



๑๐๐ ปี คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย  
100<sup>th</sup> Anniversary of The Faculty of Science, CU

เอกสารเผยแพร่เพื่อการศึกษาร่วมฉลอง 100 ปี

คู่มือโปรแกรม

Mathematica

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์

คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

## คำนำ

โปรแกรม Mathematica เป็นโปรแกรมคำนวณที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานทางด้านการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus Differential Equation Probability Statistics Numerical Analysis Linear Algebra Number Theory

ในหนังสือเล่มนี้จะแนะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Mathematica ต่อไปจึงเป็นการใช้งานเบื้องต้นของโปรแกรม การเขียนกราฟและการปรับแต่งภาพกราฟให้สวยงาม การใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปของโปรแกรม Mathematica การเขียนโปรแกรมโดยใช้คำสั่งของ Mathematica และประยุกต์ใช้งานคำนวณทั้งระดับมัธยมศึกษาและระดับอุดมศึกษา การใช้คู่มือเล่มนี้เพื่อศึกษาการใช้งานโปรแกรม Mathematica แนะนำให้ฝึกพิมพ์คำสั่งตามตัวอย่าง เมื่อได้ผลถูกต้องตามหนังสือแล้วจึงตัดแปลงสูตรหรือตัวแปรเพื่อให้เข้าใจมากขึ้น

สุดท้ายนี้หวังว่าผู้อ่านทุกท่านจะได้รับประโยชน์จากหนังสือเล่มนี้ และสามารถนำโปรแกรม Mathematica ไปประยุกต์ใช้งานในสาขาต้องการได้

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

9 ตุลาคม 2559

## สารบัญ

	หน้า
บทที่ 1 ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Mathematica	1 – 36
บทที่ 2 การใช้โปรแกรม Mathematica	37 – 88
บทที่ 3 การเขียนกราฟด้วยโปรแกรม Mathematica	89 – 140
บทที่ 4 การใช้งานเบื้องต้นเกี่ยวกับ Mathematica	141 – 170
บทที่ 5 การเขียนโปรแกรมด้วยคำสั่งของ Mathematica	171 – 180
บทที่ 6 การคำนวณระดับ ม.ปลาย ด้วยโปรแกรม Mathematica	181 – 218
บทที่ 7 การคำนวณระดับอุดมศึกษาด้วยโปรแกรม Mathematica	219 – 286

## ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับแป้นพิมพ์และคำสั่งโดยย่อ

1. กด <Shift>+<Enter> เป็นการสั่งให้คำนวณแล้วขึ้นบรรทัดใหม่
2. กด <Enter> (บน Keyboard ที่อยู่เหนือแป้น Shift) เป็นการขึ้นบรรทัดใหม่
3. กด <Enter> (บนกลุ่ม Numeric Pad ถ้ามี) เป็นการสั่งให้คำนวณแล้วขึ้นบรรทัดใหม่
4. พิมพ์ ?Command<Shift>+<Enter> เป็นการขอดูคำอธิบายของ Command นั้น
5. Clear เป็นคำสั่งยกเลิกการกำหนดตัวแปร เช่น Clear[x], Clear[x,y]
6. ตัวแปร=. เป็นคำสั่งยกเลิกการกำหนดตัวแปร เช่น x=. เป็นการยกเลิกตัวแปร x
7. % หมายถึงผลการคำนวณล่าสุด
8. Out[n] และ %n หมายถึงผลจาก Line Output[n]
9. x//N เป็นคำสั่งให้แสดงค่าใน x ออกมาเป็นตัวเลข
10. Expression//Command มีความหมายว่า Command[Expression]  
ตัวอย่างเช่น (1+x)^2//Expand จะได้  $1 + 2x + x^2$   
 $2x-4==0$ //Solve จะได้  $\{x \rightarrow 2\}$
11. สัญลักษณ์ i ให้กด <Esc>i<Esc>, e ให้กด <Esc>e<Esc>,  $\pi$  ให้กด <Esc>p<Esc>
12. การพิมพ์สัญลักษณ์บางตัวโปรแกรม Mathematica จะจัดรูปแบบให้ ตัวอย่างเช่น  
พิมพ์ -> จะได้  $\rightarrow$   
พิมพ์ == จะได้ == (เครื่องหมาย = สองตัวจะชิดติดกันมากขึ้น)  
พิมพ์ x<Ctrl>^2 จะได้  $x^2$  (เหมือนกับ  $x^2$ )  
พิมพ์ x<Ctrl>/y จะได้  $\frac{x}{y}$  (เหมือนกับ  $x/y$ )  
พิมพ์ x<Ctrl>-k จะได้  $x_k$  (เหมือนกับ  $x[[k]]$ )

**หมายเหตุ** ในกรณีที่หมายเลข Line Input-Line Output ที่ได้ไม่ตรงกับคู่มือ ไม่ต้องตกใจ เพราะวาโปรแกรม Mathematica จะเปลี่ยนแปลงหมายเลข Line Input-Line Output ทั้งหมดใน Notebook หากเราสั่งให้มีการคำนวณใหม่ และทุกครั้งที่เรากด <Shft>+<Enter> ก็จะถือว่ามี Line Input-Line Output เพิ่มขึ้นอีก 1 บรรทัดใน Notebook

## ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Mathematica

โปรแกรม Mathematica เป็นโปรแกรมช่วยในการคำนวณ สามารถนำไปประยุกต์ใช้งานได้ในการเรียนการสอนหลายวิชาเช่น Calculus Probability and Statistics Linear Algebra Differential Equations ในบทนี้จะนำความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม Mathematica ที่คำนวณได้มาให้ดูก่อนเพื่อผู้อ่านจะได้เห็นความสามารถทางการคำนวณที่สำคัญของโปรแกรม Mathematica ส่วนของการพิมพ์คำสั่ง การเข้าสู่โปรแกรม Mathematica และการประยุกต์ต่าง ๆ จะกล่าวในบทต่อไป

เนื่องจากลักษณะการทำงานของโปรแกรม Mathematica มีบรรทัดของคำสั่งที่เราต้องพิมพ์คำสั่งของการคำนวณเข้าไปเรียกว่า Line Input  $In[n]:= \dots$  โปรแกรม Mathematica จึงจะแสดงผลการคำนวณ ในบรรทัดถัดไปเรียกว่า Line Output  $Out[n]= \dots$  ดังนั้นการยกตัวอย่างความสามารถของโปรแกรมจึงขอแสดงผลการคำนวณที่ปรากฏบนจอภาพซึ่งมีทั้งบรรทัด Line Input ( $In[n] :=$ ) และ Line Output ( $Out[n]=$ ) มาให้เห็นพร้อมกัน ตัวอย่างเช่น

```
In[1]:= 1 + 2
```

```
Out[1]= 3
```

```
In[2]:= (7 + 4) * (7 - 4)
```

```
Out[2]= 33
```

```
In[3]:= Sqrt[3.]
```

```
Out[3]= 1.73205
```

## 1. การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ ทหาร และเลขยกกำลัง

In[1]:= 3.25 + 16.5

Out[1]= 19.75

In[2]:= 7.5 - 3.25

Out[2]= 4.25

In[3]:= 12 \* 3

Out[3]= 36

In[4]:= 3.5 / 2

Out[4]= 1.75

In[5]:= 2.5 ^ 2

Out[5]= 6.25

In[6]:= (2 ^ 2 + 3 \* 4) ^ 0.5

Out[6]= 4.

In[7]:=  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{6}{7}}$

Out[7]=  $\frac{525}{1046}$

In[8]:= 22 / 7

Out[8]=  $\frac{22}{7}$

In[9]:= 22. / 7

Out[9]= 3.14286

## หมายเหตุ

1. ตัวเลขในสูตรคำนวณเป็นจำนวนเต็ม การแสดงผลจะแสดงค่าเป็นรูปแบบเศษส่วน
2. ตัวเลขในสูตรคำนวณเป็นจำนวนจริง (มีทศนิยม) การแสดงผลจะแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม

## 2. สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณให้เป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

In[1]:= 22 / 7

Out[1]=  $\frac{22}{7}$

In[2]:= 22. / 7

Out[2]= 3.14286

In[3]:= N[22 / 7, 5]

Out[3]= 3.1429

In[4]:= N[22 / 7, 15]

Out[4]= 3.14285714285714

In[5]:= N[22. / 7, 15]

Out[5]= 3.14286

In[6]:= Pi // N

Out[6]= 3.14159

In[7]:= N[Pi, 18]

Out[7]= 3.14159265358979324

In[8]:= NumberForm[N[Pi], 10]

Out[8]/NumberForm=

3.141592654

In[9]:= NumberForm[N[Pi], {11, 10}]

Out[9]/NumberForm=

3.1415926536

## หมายเหตุ

1. //N ต่อท้ายเป็นการบังคับให้การแสดงผลเป็นตัวเลขทศนิยม
2. N[x, k] เป็นคำสั่งแสดงค่าของ x ให้มีตัวเลขนัยสำคัญ k ตัว
3. NumberForm[x, {a, b}] เป็นคำสั่งแสดงค่า x มีตัวเลขนัยสำคัญ a ตัวและมีทศนิยม b ตำแหน่ง

## 3. มีฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ให้ใช้งาน

In[1]:= **Sin**[Pi / 4]

Out[1]=  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

In[2]:= **Sin**[Pi / 4.]

Out[2]= 0.707107

In[3]:= **Sin**[45. \* Degree]

Out[3]= 0.707107

In[4]:= **Cos**[Pi / 6]

Out[4]=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

In[5]:= **Cos**[Pi / 6.]

Out[5]= 0.866025

In[6]:= **Tan**[Pi / 3]

Out[6]=  $\sqrt{3}$

In[7]:= **ArcSin**[1]

Out[7]=  $\frac{\pi}{2}$

In[8]:= **ArcCos**[-1]

Out[8]=  $\pi$

In[9]:= **ArcTan**[1]

Out[9]=  $\frac{\pi}{4}$

In[10]:= **ArcTan**[1.] / Degree

Out[10]= 45.

หมายเหตุ Degree มีค่าเท่ากับ  $\frac{\pi}{180}$  ใช้ในการเปลี่ยนหน่วยระหว่างเรเดียนกับองศา



```
In[1]:= Log[2]
```

```
Out[1]= Log[2]
```

```
In[2]:= Log[2.]
```

```
Out[2]= 0.693147
```

```
In[3]:= Log10[2]
```

```
Out[3]=  $\frac{\text{Log}[2]}{\text{Log}[10]}$ 
```

```
In[4]:= Log10[2.]
```

```
Out[4]= 0.30103
```

```
In[5]:= Log[2, 5]
```

```
Out[5]=  $\frac{\text{Log}[5]}{\text{Log}[2]}$ 
```

```
In[6]:= Log[2, 5.]
```

```
Out[6]= 2.32193
```

```
In[7]:= Log[5.] / Log[2]
```

```
Out[7]= 2.32193
```

```
In[8]:= E^1
```

```
Out[8]= e
```

```
In[9]:= E^1.
```

```
Out[9]= 2.71828
```

**หมายเหตุ** E หมายถึง ค่า e มีค่าประมาณเท่ากับ 2.71828

Log[a, x] หมายถึง log ฐาน a ของ x

Log[x] หมายถึง log ฐาน e ของ x

Log10[x] หมายถึง log ฐาน 10 ของ x

## 4. มีความสามารถในการกำหนดสูตรของฟังก์ชันเพื่อใช้งานได้

```
In[1]:= f[x_] := 4 + 2 * x + x^2
```

```
In[2]:= f[1]
```

```
Out[2]= 7
```

```
In[3]:= TableForm[Table[{x, f[x]}, {x, 5}]]
```

```
Out[3]/TableForm=
```

1	7
2	12
3	19
4	28
5	39

```
In[4]:= g[x_] := Piecewise[{{x^2, x ≥ 0}, {-x, x < 0}}]
```

```
In[5]:= g[-2]
```

```
Out[5]= 2
```

```
In[6]:= g[4]
```

```
Out[6]= 16
```

```
In[7]:= c[n_, r_] := n! / (r! * (n - r) !)
```

```
In[8]:= c[5, 2]
```

```
Out[8]= 10
```

```
In[9]:= b[x_, n_, p_] := (n! / (x! * (n - x) !)) * (p^x) *
((1 - p) ^ (n - x))
```

```
In[10]:= b[2, 5, 0.25]
```

```
Out[10]= 0.263672
```

หมายเหตุ  $f[x_]$ ,  $c[n_ , r_]$ ,  $b[x_ , n_ , p_]$  คือการกำหนดสูตรของฟังก์ชัน

ใน Line Input ln[4] คำสั่ง Piecewise ใช้กำหนดสูตรของฟังก์ชันที่นิยามเป็นช่วง

## 5. สามารถกำหนดเซตของจำนวน และสามารถคำนวณสมาชิกภายในเซตได้

In[1]:=  $x = \{2, 5, 7, 12\}$

Out[1]=  $\{2, 5, 7, 12\}$

In[2]:=  $x^3$

Out[2]=  $\{8, 125, 343, 1728\}$

In[3]:=  $x^2$

Out[3]=  $\{4, 25, 49, 144\}$

In[4]:=  $2 * x + 1$

Out[4]=  $\{5, 11, 15, 25\}$

In[5]:=  $\{1/2, 3/4, 5/12\}$

Out[5]=  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right\}$

In[6]:=  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{12}\right\} // N$

Out[6]=  $\{0.5, 0.75, 0.416667\}$

**หมายเหตุ** เซตของตัวเลขเป็นชนิดของตัวแปรแบบหนึ่งใน Mathematica ซึ่งเรียกว่าตัวแปรแบบ list สำหรับตัวแปรแบบ List การคำนวณต่าง ๆ จะมีผลกับสมาชิกทุกตัวในตัวแปร List และเราสามารถอ้างอิงสมาชิกของตัวแปรได้ ตัวอย่างเช่น

In[7]:=  $y = \{4, 5, 7, 9, 12\}$

Out[7]=  $\{4, 5, 7, 9, 12\}$

In[8]:=  $z = 2^y$

Out[8]=  $\{16, 32, 128, 512, 4096\}$

In[9]:=  $y[[1]]$

Out[9]= 4

## 6. สามารถเปลี่ยนหน่วยการคำนวณได้โดยง่าย

In[1]:= **Sin[60]**

Out[1]= Sin[60]

In[2]:= **Sin[60.]**

Out[2]= -0.304811

In[3]:= **Sin[60 \* Degree]**

Out[3]=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

In[4]:= **Sin[60. \* Degree]**

Out[4]= 0.866025

In[5]:= **Sin[Pi / 3]**

Out[5]=  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

In[6]:= **Sin[Pi / 3.]**

Out[6]= 0.866025

In[7]:= **ArcSin[1 / 2]**

Out[7]=  $\frac{\pi}{6}$

In[8]:= **ArcSin[0.5]**

Out[8]= 0.523599

In[9]:= **ArcSin[0.5] / Degree**

Out[9]= 30.

- หมายเหตุ 1. การเติมจุดท้ายตัวเลขจะทำให้ผลการคำนวณแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม
2. ถ้าไม่กำหนดหน่วยของมุมฟังก์ชันตรีโกณมิติใน Mathematica จะใช้หน่วยของมุมเป็นเรเดียน
3. การระบุหน่วยให้พิมพ์ \*Degree ต่อท้ายตัวเลข หรือ /Degree
4. Degree มีค่าเท่ากับ  $\frac{\pi}{180}$  ช่วยในการเปลี่ยนหน่วยของมุมระหว่างเรเดียนกับองศา

## 7. ความสามารถในการแสดงหน่วยของผลการคำนวณ

```
In[1]:= s := Quantity[200, "Kilometers"]
```

```
In[2]:= t := Quantity[10, "Hours"]
```

```
In[3]:= v := s / t
```

```
In[4]:= v
```

```
Out[4]= 20 km/h
```

```
In[5]:= a := Quantity[3, "Centimeters"]
```

```
In[6]:= b := Quantity[4, "Centimeters"]
```

```
In[7]:= c := Quantity[5, "Centimeters"]
```

```
In[8]:= s := (a + b + c) / 2
```

```
In[9]:= Area :=  $\sqrt{s * (s - a) * (s - b) * (s - c)}$ 
```

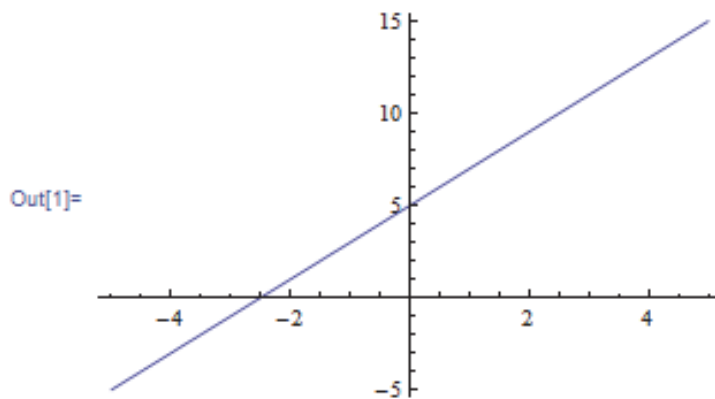
```
In[10]:= Area
```

```
Out[10]= 6 cm2
```

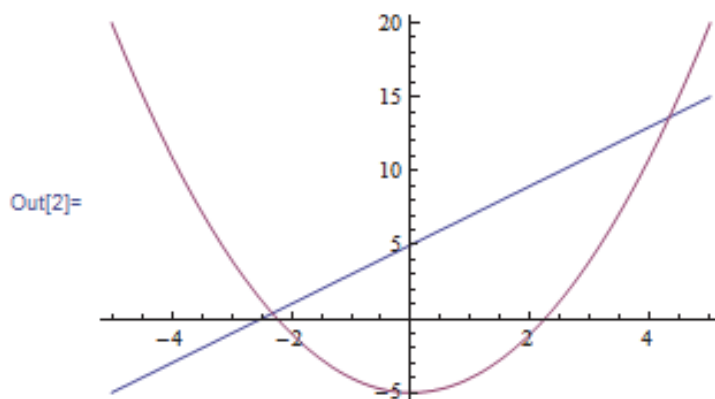
## 8. สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ

## 8.1 กราฟในระบบพิกัดฉาก

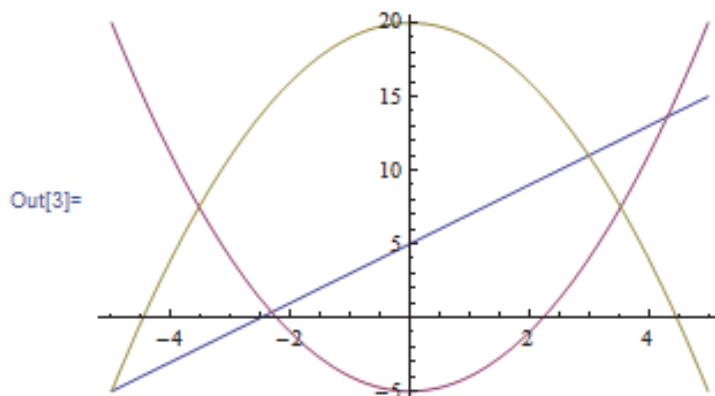
```
In[1]:= Plot[2 * x + 5, {x, -5, 5}]
```



```
In[2]:= Plot[{2 * x + 5, x^2 - 5}, {x, -5, 5}]
```

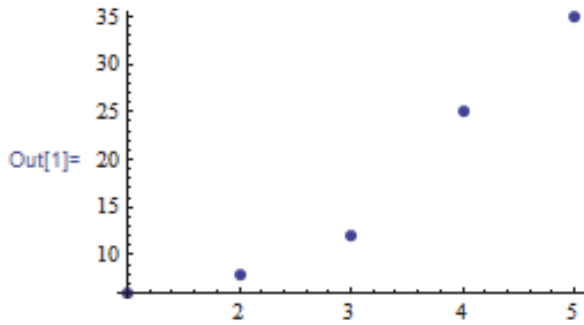


```
In[3]:= Plot[{2 * x + 5, x^2 - 5, 20 - x^2}, {x, -5, 5}]
```

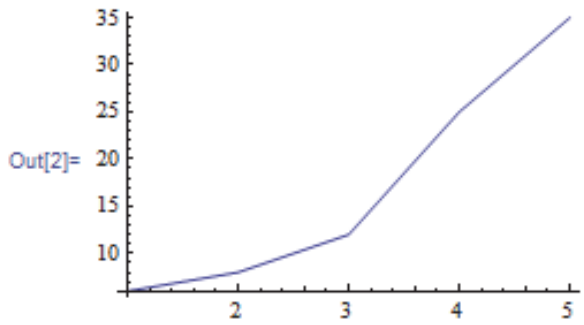


8.2 กราฟแผนภาพการกระจายของข้อมูล

```
In[1]:= ListPlot[{{1, 6}, {2, 8}, {3, 12}, {4, 25},
                {5, 35}}, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}
```



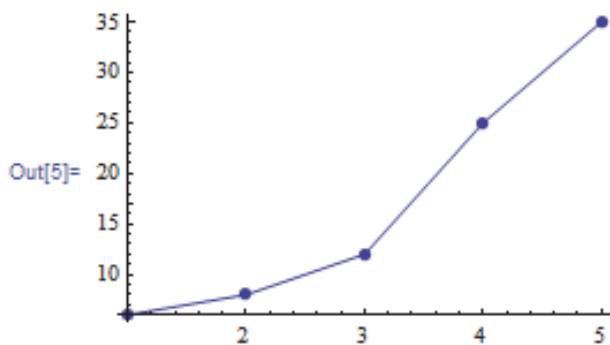
```
In[2]:= ListLinePlot[{{1, 6}, {2, 8}, {3, 12}, {4, 25},
                    {5, 35}}, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}
```



```
In[3]:= g1 := ListPlot[{{1, 6}, {2, 8}, {3, 12}, {4, 25},
                      {5, 35}}, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}
```

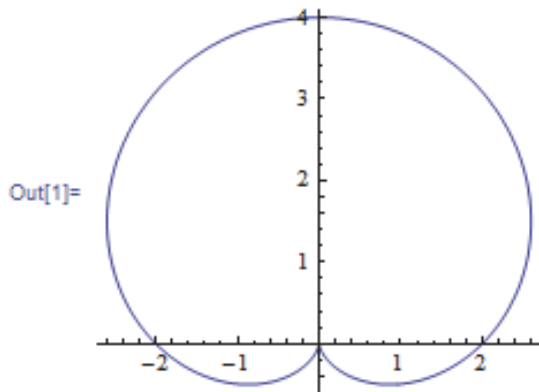
```
In[4]:= g2 := ListLinePlot[
        {{1, 6}, {2, 8}, {3, 12}, {4, 25}, {5, 35}},
        PlotStyle -> {PointSize[0.025]}
```

```
In[5]:= Show[g1, g2]
```

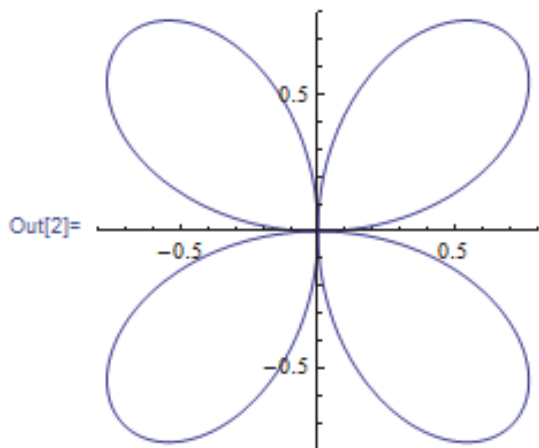


## 8.3 กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว

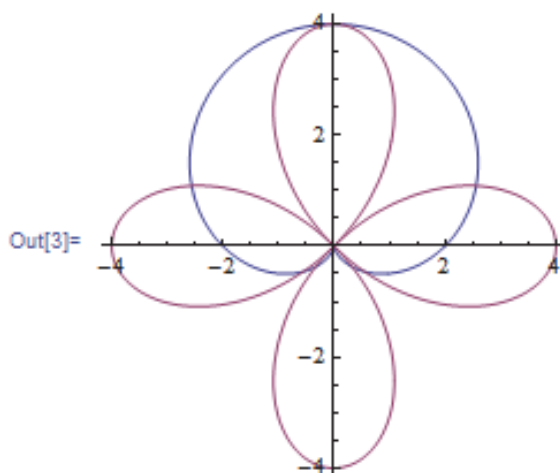
```
In[1]:= PolarPlot[2 + 2 * Sin[t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



```
In[2]:= PolarPlot[Sin[2 * t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



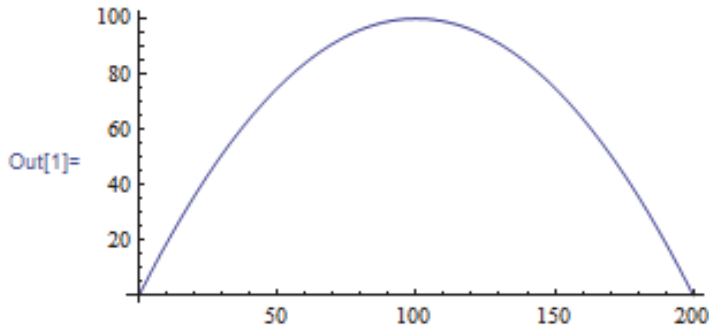
```
In[3]:= PolarPlot[{2 + 2 * Sin[t], 4 * Cos[2 t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



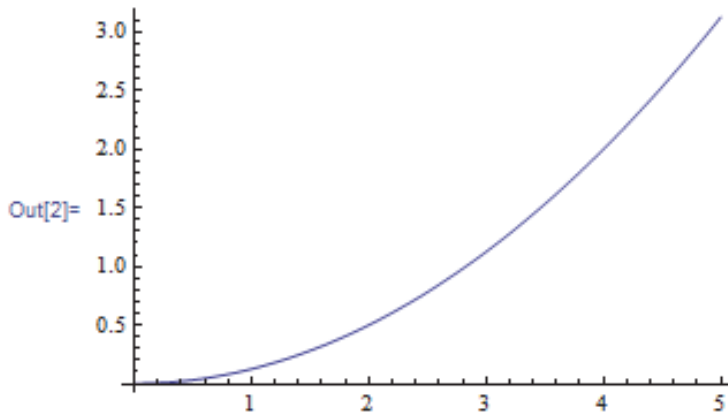


8.4 กราฟของสมการพาราเมตริก เช่นการเคลื่อนที่เป็นวงกลม การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไทล์

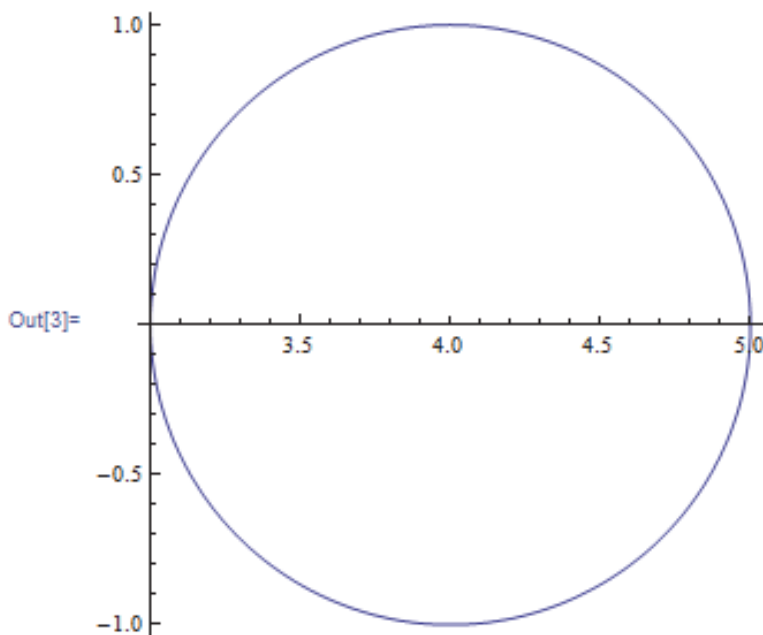
In[1]:= ParametricPlot[{40 \* t, -16 \* t^2 + 80 \* t}, {t, 0, 5}]



In[2]:= ParametricPlot[{t, t^2 / 8}, {t, 0, 5}]

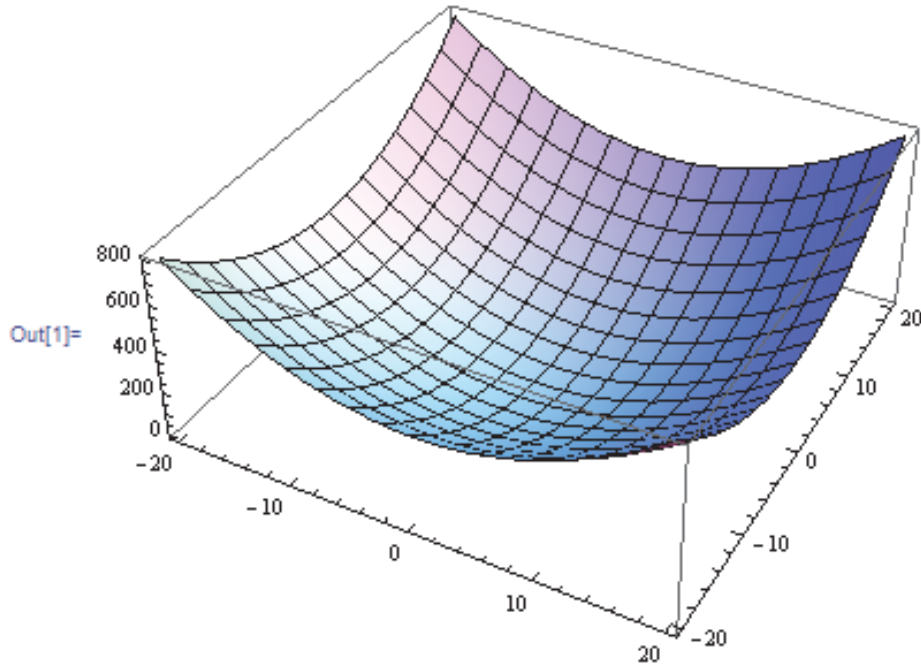


In[3]:= ParametricPlot[{4 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 \* Pi}]

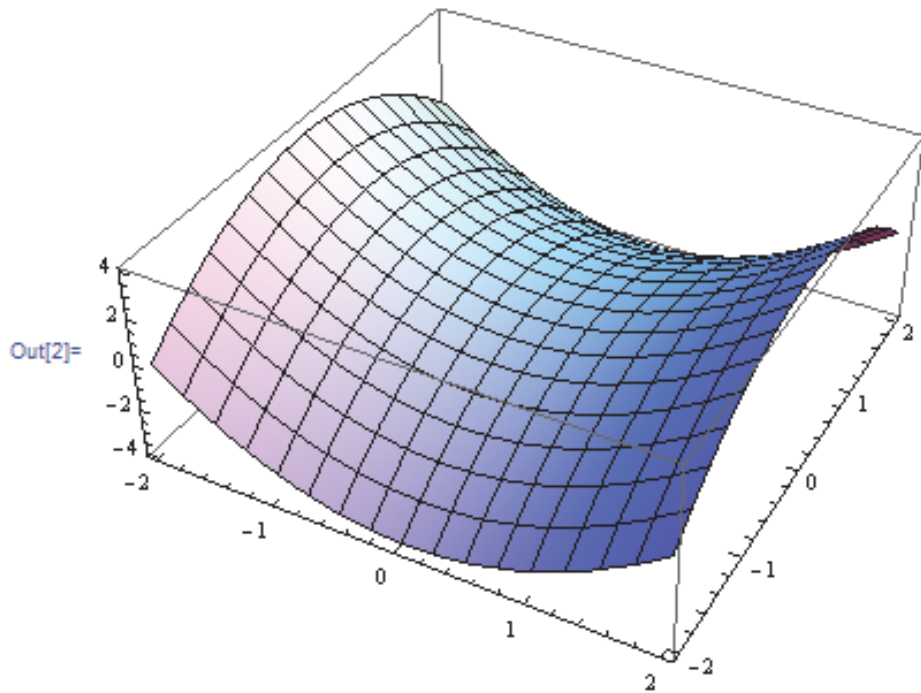


## 8.5 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติ

```
In[1]:= Plot3D[x^2 + y^2, {x, -20, 20}, {y, -20, 20}]
```

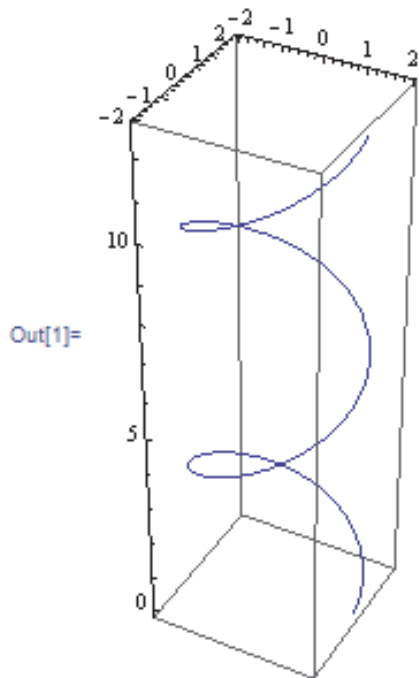


```
In[2]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```

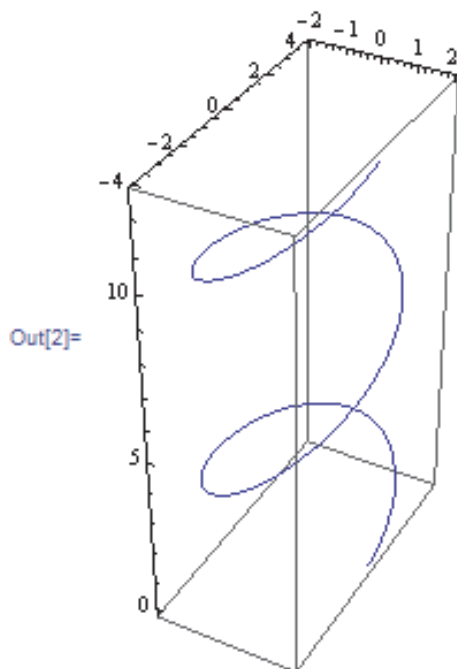


8.6 กราฟของสมการพาราเมตริกใน 3 มิติ เช่นการเคลื่อนที่แบบบันไดเวียน หรือ สปริง

```
In[1]:= ParametricPlot3D[{2 * Cos[t], 2 * Sin[t], t},
    {t, 0, 4 * Pi}]
```

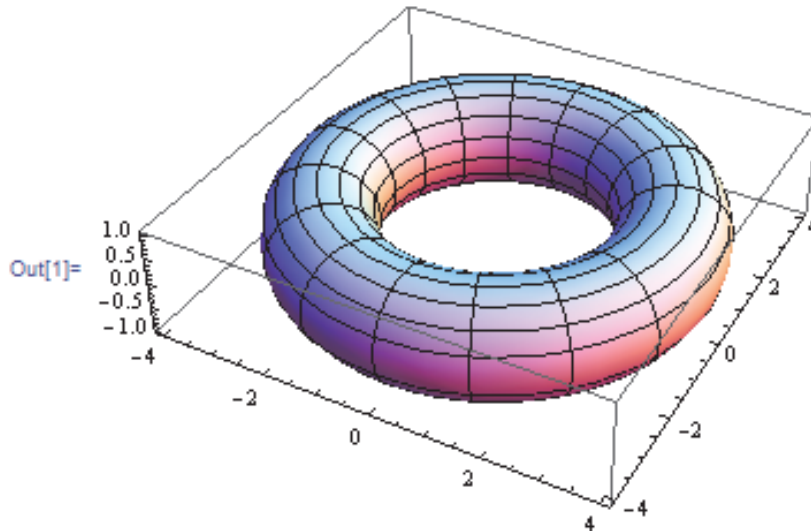


```
In[2]:= ParametricPlot3D[{2 * Cos[t], 4 * Sin[t], t},
    {t, 0, 4 * Pi}]
```

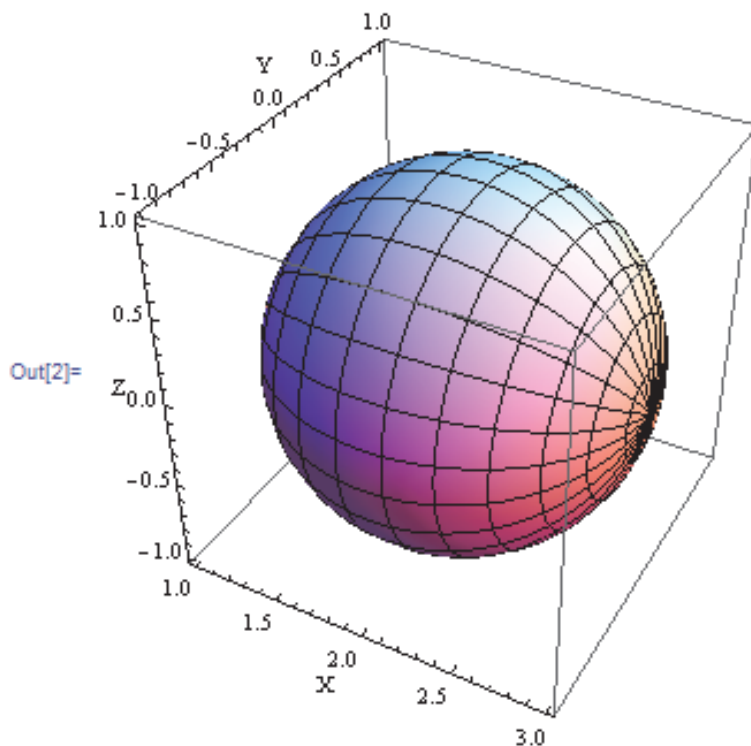


## 8.7 กราฟพื้นผิวใน 3 มิติ หรือพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

```
In[1]:= ParametricPlot3D[
  {Cos[u] (3 + Cos[v]), Sin[u] (3 + Cos[v])
  , Sin[v]}, {u, 0, 2 Pi}, {v, 0, 2 Pi}]
```



```
In[2]:= RevolutionPlot3D[{2 + Cos[t], Sin[t]},
  {t, 0, 2 Pi},
  RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  Mesh -> 25]
```



## 9. การคำนวณในรูปแบบเลขฐานต่าง ๆ

```
In[1]:= 2^^111
```

```
Out[1]= 7
```

```
In[2]:= BaseForm[7, 2]
```

```
Out[2]//BaseForm=
  1112
```

```
In[3]:= 2^^10101
```

```
Out[3]= 21
```

```
In[4]:= BaseForm[21, 2]
```

```
Out[4]//BaseForm=
  101012
```

```
In[5]:= 16^^ffffaa00
```

```
Out[5]= 4 294 945 280
```

```
In[6]:= BaseForm[4 294 945 280, 16]
```

```
Out[6]//BaseForm=
  fffffaa0016
```

```
In[7]:= BaseForm[12, 8] + BaseForm[15, 8]
```

```
Out[7]= 148 + 178
```

```
In[8]:= 8^^12 + 8^^15
```

```
Out[8]= 23
```

```
In[9]:= BaseForm[23, 8]
```

```
Out[9]//BaseForm=
  278
```

```
In[10]:= 8^^12 + 8^^15
```

```
Out[10]= 23
```

หมายเหตุ  $2^x$  จะแสดงค่าของ  $x$  ฐาน 2 ในระบบฐาน 10 เช่น  $(111)_2 = 7$

`BaseForm[a, b]` จะแสดงค่าของ  $a$  ฐาน 10 ในระบบฐาน  $b$

## 10. การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์

```
In[1]:= u := {2, 3, 6}; v := {2, -3, -1}
```

```
In[2]:= MatrixForm[u]
```

```
Out[2]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= MatrixForm[v]
```

```
Out[3]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

```
In[4]:= u + v
```

```
Out[4]= {4, 0, 5}
```

```
In[5]:= MatrixForm[u - 2 * v]
```

```
Out[5]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

```
In[6]:= u . v
```

```
Out[6]= -11
```

```
In[7]:= MatrixForm[u * v]
```

```
Out[7]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 14 \\ -12 \end{pmatrix}$$

```
In[8]:= u * v
```

```
Out[8]= {4, -9, -6}
```

หมายเหตุ 1.  $u \cdot v$  คือ  $u$  dot  $v$ ,  $u \times v$  คือ  $u$  cross  $v$

2.  $u * v$  เป็นการคูณของสมาชิกใน  $u$ ,  $v$  แบบตัวต่อตัว

## 11. การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์

```
In[1]:= A := {{1, 2}, {3, 5}}; B := {{2, 0}, {0, 4}}
```

```
In[2]:= MatrixForm[A]
```

```
Out[2]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= MatrixForm[B]
```

```
Out[3]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
In[4]:= A + B
```

```
Out[4]= {{3, 2}, {3, 9}}
```

```
In[5]:= MatrixForm[A + B]
```

```
Out[5]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

```
In[6]:= MatrixForm[A.B]
```

```
Out[6]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 20 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= MatrixForm[4 * A]
```

```
Out[7]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 20 \end{pmatrix}$$

```
In[8]:= Det[A]
```

```
Out[8]= -1
```

```
In[9]:= MatrixForm[Inverse[A]]
```

```
Out[9]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

12. การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน (หมายเหตุ การพิมพ์สัญลักษณ์  $i$  ให้พิมพ์ `<Ecs>ii<Ecs>`)

In[1]:= `z := 3 + 4 i`

In[2]:= `w := 5 + 12 i`

In[3]:= `z + w`

Out[3]= `8 + 16 i`

In[4]:= `z * w`

Out[4]= `-33 + 56 i`

In[5]:= `Abs [ z ]`

Out[5]= `5`

In[6]:= `Im [ z ]`

Out[6]= `4`

In[7]:= `Re [ w ]`

Out[7]= `5`

In[8]:= `Conjugate [ w ]`

Out[8]= `5 - 12 i`

In[9]:= `Arg [ z ]`

Out[9]= `ArcTan [  $\frac{4}{3}$  ]`

In[10]:= `u := 1. + i`

In[11]:= `Arg [ u ]`

Out[11]= `0.785398`

In[12]:= `Arg [ u ] / Degree`

Out[12]= `45.`



13. การหาผลบวกอนุกรมกำลัง อนุกรมจำกัด อนุกรมอนันต์ และผลคูณของลำดับ

In[1]:= **Sum**[**i**, {**i**, 1, 10}]

Out[1]= 55

$$\text{In[2]:= } \sum_{i=1}^5 i$$

Out[2]= 15

In[3]:= **Sum**[**i**, {**i**, 1, **n**}]

$$\text{Out[3]= } \frac{1}{2} n (1 + n)$$

In[4]:= **Product**[**n**, {**n**, 1, 5}]

Out[4]= 120

$$\text{In[5]:= } \prod_{n=1}^5 n$$

Out[5]= 120

In[6]:= **Sum**[**i**, {**i**, 1, 10, 2}]

Out[6]= 25

In[7]:= **1 + 3 + 5 + 7 + 9**

Out[7]= 25

In[8]:= **Product**[**n**, {**n**, 2, 10, 2}]

Out[8]= 3840

In[9]:= **2 \* 4 \* 6 \* 8 \* 10**

Out[9]= 3840

$$\text{In[10]:= } \sum_{n=1}^{\infty} 1 / (n * (n + 2))$$

$$\text{Out[10]= } \frac{3}{4}$$

## 14. การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น

```
In[1]:= x := {1, 2, 3, 6}
```

```
In[2]:= Mean[x]
```

```
Out[2]= 3
```

```
In[3]:= Variance[x] // N
```

```
Out[3]= 4.66667
```

```
In[4]:= StandardDeviation[x] // N
```

```
Out[4]= 2.16025
```

```
In[5]:= Median[x]
```

```
Out[5]=  $\frac{5}{2}$ 
```

```
In[6]:= Max[x]
```

```
Out[6]= 6
```

```
In[7]:= Min[x]
```

```
Out[7]= 1
```

```
In[8]:= Total[x]
```

```
Out[8]= 12
```

```
In[9]:= data := {1, 2, 3.1, 4, 5.2, 6.1, 7.3, 8, 9.3, 10, 11}
```

```
In[10]:= Quantile[data, 25 / 100]
```

```
Out[10]= 3.1
```

```
In[11]:= Quantile[data, 50 / 100]
```

```
Out[11]= 6.1
```

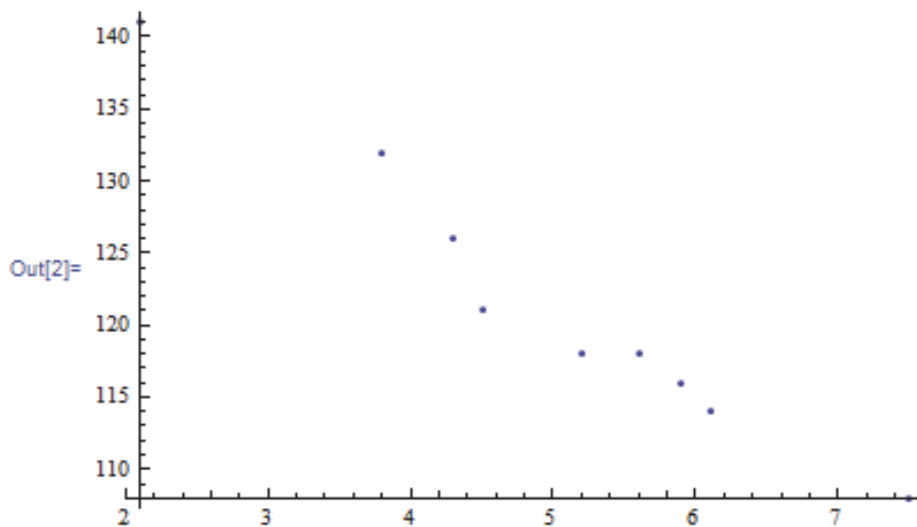
```
In[12]:= Quantile[data, 75 / 100]
```

```
Out[12]= 9.3
```

15. การหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลในรูปแบบ  $y = a + bx$ 

```
In[1]:= data = {{4.3, 126}, {4.5, 121}, {5.9, 116},
               {5.6, 118}, {6.1, 114}, {5.2, 118},
               {3.8, 132}, {2.1, 141}, {7.5, 108}};
```

```
In[2]:= ListPlot[data]
```



```
In[3]:= ycap = LinearModelFit[data, {1, x}, x]
```

```
Out[3]= FittedModel [ 153.175 - 6.32399x ]
```

```
In[4]:= Correlation[data]
```

```
Out[4]= {{1., -0.978658}, {-0.978658, 1.}}
```

```
In[5]:= ycap["ParameterConfidenceIntervalTable"]
```

	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
Out[5]= 1	153.175	2.61466	{146.993, 159.358}
x	-6.32399	0.501892	{-7.51077, -5.1372}

```
In[6]:= ycap["ANOVATable"]
```

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
Out[6]= x	1	770.262	770.262	158.768	$4.57919 \times 10^{-6}$
Error	7	33.9605	4.85151		
Total	8	804.222			

## 16. ความสามารถในการจัดรูปพีชคณิต การแยกตัวประกอบ การกระจายพหุนาม

In[1]:= **Factor**[ $x^4 - 1$ ]

Out[1]=  $(-1 + x) (1 + x) (1 + x^2)$

In[2]:= **Expand**[( $x + 3$ )<sup>4</sup>]

Out[2]=  $81 + 108 x + 54 x^2 + 12 x^3 + x^4$

In[3]:= **Simplify**[ $1 / (2^3 + 8^2)$ ]

Out[3]=  $\frac{1}{72}$

In[4]:= **Simplify** $\left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x - 1}{x^2 - 1}\right]$

Out[4]=  $\frac{2 (1 + x + x^2)}{(1 + x) (1 + x^2)}$

In[5]:= **Together** $\left[\frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{x}{x - 1}\right]$

Out[5]=  $\frac{-1 + x + x^2 + x^3}{(-1 + x) (1 + x^2)}$

In[6]:= **Apart** $\left[\frac{-1 + x + x^2 + x^3}{(-1 + x) (1 + x^2)}\right]$

Out[6]=  $1 + \frac{1}{-1 + x} + \frac{1 + x}{1 + x^2}$

In[7]:= **Cancel** $\left[\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}\right]$

Out[7]=  $\frac{1 + x}{1 + x + x^2}$

In[8]:= `TrigExpand[Sin[4 * x]]`

Out[8]=  $4 \cos[x]^3 \sin[x] - 4 \cos[x] \sin[x]^3$

In[9]:= `TrigFactor[4 Cos[x]^3 Sin[x] - 4 Cos[x] Sin[x]^3]`

Out[9]=  $8 \cos[x] \sin\left[\frac{\pi}{4} - x\right] \sin[x] \sin\left[\frac{\pi}{4} + x\right]$

In[10]:= `TrigToExp[Sin[i * x]]`

Out[10]=  $-\frac{1}{2} i e^{-x} + \frac{i e^x}{2}$

In[11]:= `ExpToTrig[-1/2 i e^-x + i e^x/2]`

Out[11]=  $i \sinh[x]$

In[12]:= `Factor[Sin[x]^3 - Cos[x]^3]`

Out[12]=  $-(\cos[x] - \sin[x]) (\cos[x]^2 + \cos[x] \sin[x] + \sin[x]^2)$

In[13]:= `TrigFactor[Sin[x]^3 - Cos[x]^3]`

Out[13]=  $-\frac{\sin\left[\frac{\pi}{4} - x\right] (2 + \sin[2x])}{\sqrt{2}}$

In[14]:= `ExpandNumerator[2(1+x+x^2)/(1+x)(1+x^2)]`

Out[14]=  $\frac{2 + 2x + 2x^2}{(1+x)(1+x^2)}$

In[15]:= `ExpandDenominator[2(1+x+x^2)/(1+x)(1+x^2)]`

Out[15]=  $\frac{2(1+x+x^2)}{1+x+x^2+x^3}$

## 17. ความสามารถในการหาอนุพันธ์แสดงผลเป็นสูตรและแสดงผลเป็นค่าตัวเลข

In[1]:=  $f[x] := x^4 + 2 * x + 4$

In[2]:=  $D[f[x], \{x, 1\}]$

Out[2]=  $2 + 4 x^3$

In[3]:=  $f'[x] /. x \rightarrow 1$

Out[3]=  $f'[1]$

In[4]:=  $D[f[x], \{x, 2\}]$

Out[4]=  $12 x^2$

In[5]:=  $D[f[x], \{x, 3\}]$

Out[5]=  $24 x$

In[6]:=  $\partial_x (x^4 + 2 * x + 4)$

Out[6]=  $2 + 4 x^3$

In[7]:=  $\partial_{x,x} (y^5 * x^2 + x^3 * y^4)$

Out[7]=  $6 x y^4 + 2 y^5$

In[8]:=  $\partial_{x,y} (y^5 * x^2 + x^3 * y^4)$

Out[8]=  $12 x^2 y^3 + 10 x y^4$

In[9]:=  $Dt[x^3 y^2]$

Out[9]=  $3 x^2 y^2 Dt[x] + 2 x^3 y Dt[y]$

In[10]:=  $Dt[x^3 y^2, x]$

Out[10]=  $3 x^2 y^2 + 2 x^3 y Dt[y, x]$

หมายเหตุ  $D[f[x], x]$  คือ  $\frac{d}{dx}f(x)$  และ  $D[f[x], \{x, n\}]$  คือ  $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$  และ  $\partial_{x,y} f[x, y]$  คือ

อนุพันธ์ย่อย และ  $Dt$  ใช้หาค่าอนุพันธ์เชิงรวม เช่น Out[9] คือ  $3x^2y^2 \frac{dx}{dt} + 2x^3y \frac{dy}{dt}$

## 18. สามารถอินทิเกรตแสดงผลเป็นสูตรและแสดงผลเป็นค่าตัวเลข

In[1]:= Integrate[x^3 + 1, x]

Out[1]=  $x + \frac{x^4}{4}$

In[2]:=  $\int (x^3 + 1) dx$

Out[2]=  $x + \frac{x^4}{4}$

In[3]:= Integrate[x^3 + 1, {x, 0, 2}]

Out[3]= 6

In[4]:=  $\int_0^2 (x^3 + 1) dx$

Out[4]= 6

In[5]:=  $\iint (x^3 * y) dx dy$

Out[5]=  $\frac{x^4 y^2}{8}$

In[6]:=  $\int_0^1 \int_0^2 (x^3 * y) dx dy$

Out[6]= 2

In[7]:= Integrate[x^3 \* y, {x, 0, 2}, {y, 0, 1}]

Out[7]= 2

In[8]:=  $\int_1^{x^2} (4 * t^3 + 1) dt$

Out[8]=  $-2 + x^2 + x^8$

In[9]:=  $\int_1^t \int_0^{t^2} (2 * x + 4 * y) dx dy$

Out[9]=  $t^2 (-2 + t^2 + t^3)$

## 19. ความสามารถในการหาค่าลิมิต

In[1]:= `Limit[x^2 + x + 1, x → 1]`

Out[1]= 3

In[2]:= `Limit[Sin[x] / x, x → 0]`

Out[2]= 1

In[3]:= `Limit[x / Abs[x], x → 0, Direction → 1]`

Out[3]= -1

In[4]:= `Limit[x / Abs[x], x → 0, Direction → -1]`

Out[4]= 1

In[5]:= `Limit[(1 + 1 / x) ^ (2 * x), x → ∞]`

Out[5]=  $e^2$

In[6]:= `Limit[(1 + 3 * x) ^ (2 / x), x → 0]`

Out[6]=  $e^6$

In[7]:= `Limit[ArcTan[x], x → ∞]`

Out[7]=  $\frac{\pi}{2}$

In[8]:= `Limit[ $\frac{4^x - 2^x + 4}{5 * 4^x + 3 * 2^x + 3}$ , x → ∞]`

Out[8]=  $\frac{1}{5}$

หมายเหตุ `Limit[f[x], x → a]` คือ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

`Limit[f[x], x → a, Direction → 1]` คือ  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$

`Limit[f[x], x → a, Direction → -1]` คือ  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$



## 20. สามารถนำคำสั่งต่าง ๆ มาเขียนเป็นโปรแกรมได้

ตัวอย่างเช่นโปรแกรมหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อรู้ความยาวทั้งสามด้านของรูปสามเหลี่ยม

```
In[1]:= a := 3;  
       b := 4;  
       c := 5;  
       s := (a + b + c) / 2;  
       Area := Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];  
       Area
```

Out[6]= 6

```
In[7]:= a := 5;  
       b := 12;  
       c := 13;  
       s := (a + b + c) / 2;  
       Area := Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];  
       Area
```

Out[12]= 30

```
In[13]:= area[a_, b_, c_] := Module[{x = a, y = b, z = c},  
    s := (x + y + z) / 2;  
    w := Sqrt[s * (s - x) * (s - y) * (s - z)];  
    w]
```

```
In[14]:= area[3, 4, 5]
```

Out[14]= 6

```
In[15]:= area[5, 12, 13]
```

Out[15]= 30

21. ความสามารถในการหารากของสมการ  $f(x) = 0$ 

```

In[1]:= FindRoot[x^2 - 2 == 0, {x, 1}]
Out[1]= {x -> 1.41421}

In[2]:= FindRoot[Sin[x] - Cos[x] == 0, {x, 1}]
Out[2]= {x -> 0.785398}

In[3]:= Solve[x^2 - 2 == 0, {x}]
Out[3]= {{x -> -sqrt[2]}, {x -> sqrt[2]}}

In[4]:= Solve[x^2 - 2.0 == 0, {x}]
Out[4]= {{x -> -1.41421}, {x -> 1.41421}}

In[5]:= Solve[72 - 18 x - 5 x^2 + x^3 == 0, x]
Out[5]= {{x -> -4}, {x -> 3}, {x -> 6}}

In[6]:= Solve[x^3 == 8, {x}]
Out[6]= {{x -> 2}, {x -> -2 (-1)^(1/3)}, {x -> 2 (-1)^(2/3)}}

In[7]:= Solve[x^3 == 8, {x}, Reals]
Out[7]= {{x -> 2}}

In[8]:= NSolve[Cos[x] == x, x, Reals]
Out[8]= {{x -> 0.739085}}

In[9]:= R = Solve[72 - 18 x - 5 x^2 + x^3 == 0, x]
Out[9]= {{x -> -4}, {x -> 3}, {x -> 6}}

In[10]:= r1 = x /. First[R]
Out[10]= -4

```

หมายเหตุ FindRoot[f[x]==0, {x, a}] ใช้หารากของ  $f(x) = 0$  โดยวิธีของ Newton จุดเริ่มต้น  $x = a$

## 22. ความสามารถในการหาผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น  $2x + y = 4$ ,  $9x - 4y = 1$

การหาผลเฉลยของระบบสมการไม่เชิงเส้น  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x - y = 0$

```
In[1]:= NSolve[{2 * x + y == 4, 9 * x - 4 * y == 1}, {x, y}]
```

```
Out[1]:= {{x -> 1., y -> 2.}}
```

```
In[2]:= Solve[{2 * x + y == 4, 9 * x - 4 * y == 1}, {x, y}]
```

```
Out[2]:= {{x -> 1, y -> 2}}
```

```
In[3]:= NSolve[{2 * x + y == Sqrt[5], 9 * x - 4 * y == Sqrt[7]}, {x, y}]
```

```
Out[3]:= {{x -> 0.681766, y -> 0.872536}}
```

```
In[4]:= Solve[{2 * x + y == Sqrt[5], 9 * x - 4 * y == Sqrt[7]}, {x, y}]
```

```
Out[4]:= {{x -> 1/17 (4 Sqrt[5] + Sqrt[7]), y -> 9 Sqrt[5]/17 - 2 Sqrt[7]/17}}
```

```
In[5]:= Solve[{x^2 + y^2 == 1, x - y == 0}, {x, y}]
```

```
Out[5]:= {{x -> -1/Sqrt[2], y -> -1/Sqrt[2]}, {x -> 1/Sqrt[2], y -> 1/Sqrt[2]}}
```

```
In[6]:= NSolve[{x^2 + y^2 == 1.0, x - y == 0}, {x, y}]
```

```
Out[6]:= {{x -> -0.707107, y -> -0.707107},
{x -> 0.707107, y -> 0.707107}}
```

```
In[7]:= Solve[x^2 + y^2 == 12 && x - y == 0, {x, y}]
```

```
Out[7]:= {{x -> -Sqrt[6], y -> -Sqrt[6]}, {x -> Sqrt[6], y -> Sqrt[6]}}
```

```
In[8]:= Solve[x^2 + y^2 == 12 && x - y == 0 && x > 0, {x, y}]
```

```
Out[8]:= {{x -> Sqrt[6], y -> Sqrt[6]}}
```

## 23. ความสามารถในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $y' = x^2$  และ  $y(1) = 2$

```
In[1]:= DSolve[y'[x] == x^2, y[x], x]
```

```
Out[1]:= {{y[x] -> x^3/3 + C[1]}}
```

```
In[2]:= DSolve[{y'[x] == x^2, y[1] == 2}, y[x], x]
```

```
Out[2]:= {{y[x] -> 1/3 (5 + x^3)}}
```

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์  $y'' + y = 0$

```
In[3]:= DSolve[y''[x] + y[x] == 0, y[x], x]
```

```
Out[3]:= {{y[x] -> C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}
```

```
In[4]:= DSolve[{y''[x] + y[x] == 0, y[0] == 4, y'[0] == -3},
  y[x], x]
```

```
Out[4]:= {{y[x] -> 4 Cos[x] - 3 Sin[x]}}
```

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์  $y'' + y = x^2$ ,  $y'(0) = -1$

และ  $y(0) = 2$

```
In[5]:= DSolve[{y''[x] + y[x] == x^2}, y[x], x]
```

```
Out[5]:= {{y[x] -> -2 + x^2 + C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}
```

```
In[6]:= DSolve[{y''[x] + y[x] == x^2,
  y'[0] == -1, y[0] == 2}, y[x], x]
```

```
Out[6]:= {{y[x] -> -2 + x^2 + 4 Cos[x] - Sin[x]}}
```

การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 2 \\y' &= -x + y - 5\end{aligned}$$

```
In[7]:= Simplify[DSolve[{x'[t] == x[t] - y[t] + 2,
  y'[t] == -x[t] + y[t] - 5}, {x[t], y[t]}, t]]
```

```
Out[7]= {{x[t] -> 1/4 (-7 - 6 t + 2 (1 + e^{2 t}) C[1] + 2 C[2] - 2 e^{2 t} C[2]),
  y[t] -> 1/4 (7 - 6 t - 2 (-1 + e^{2 t}) C[1] + 2 C[2] + 2 e^{2 t} C[2])}}
```

การหาผลเฉลยระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 2 \\y' &= -x + y - 5 \\x(0) &= 1, y(0) = -1\end{aligned}$$

```
In[8]:= DSolve[{x'[t] == x[t] - y[t] + 2,
  y'[t] == -x[t] + y[t] - 5, x[0] == 1, y[0] == -1},
  {x[t], y[t]}, t]
```

```
Out[8]= {{x[t] -> 1/4 (-7 + 11 e^{2 t} - 6 t), y[t] -> 1/4 (7 - 11 e^{2 t} - 6 t)}}
```

## 24. มีฟังก์ชันคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเต็มเช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. การแยกตัวประกอบจำนวนเต็ม

```
In[1]:= Round[4.75]
```

```
Out[1]= 5
```

```
In[2]:= Floor[4.75]
```

```
Out[2]= 4
```

```
In[3]:= Ceiling[4.75]
```

```
Out[3]= 5
```

```
In[4]:= LCM[40, 32]
```

```
Out[4]= 160
```

```
In[5]:= GCD[40, 32]
```

```
Out[5]= 8
```

```
In[6]:= IntegerPartitions[3]
```

```
Out[6]= {{3}, {2, 1}, {1, 1, 1}}
```

```
In[7]:= Mod[17, 3]
```

```
Out[7]= 2
```

```
In[8]:= Quotient[17, 3]
```

```
Out[8]= 5
```

```
In[9]:= QuotientRemainder[17, 3]
```

```
Out[9]= {5, 2}
```

```
In[10]:= FactorInteger[10!]
```

```
Out[10]= {{2, 8}, {3, 4}, {5, 2}, {7, 1}}
```

```
In[11]:= IntegerLength[10!]
```

```
Out[11]= 7
```

หมายเหตุ  $10! = 3628800 = 2^8 3^4 5^2 7$

## 25. สามารถหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผันได้

In[1]:= LaplaceTransform[1, x, s]

$$\text{Out[1]} = \frac{1}{s}$$

In[2]:= LaplaceTransform[Exp[x], x, s]

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{-1 + s}$$

In[3]:= LaplaceTransform[1 + 2 \* x^2 + x^4, x, s]

$$\text{Out[3]} = \frac{24}{s^5} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s}$$

In[4]:= LaplaceTransform[Sin[x], x, s]

$$\text{Out[4]} = \frac{1}{1 + s^2}$$

In[5]:= LaplaceTransform[Exp[x] \* Sin[x], x, s]

$$\text{Out[5]} = \frac{1}{1 + (-1 + s)^2}$$

In[6]:= LaplaceTransform[x^2 \* Exp[x] \* Sin[x], x, s]

$$\text{Out[6]} = \frac{2 (2 - 6 s + 3 s^2)}{(2 - 2 s + s^2)^3}$$

In[7]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{1}{s - 5} + \frac{4}{s^2 + 4}$ , s, x]

$$\text{Out[7]} = e^{5x} + 2 \sin[2x]$$

In[8]:= InverseLaplaceTransform[ $\frac{24}{s^5} + \frac{4}{s^3} + \frac{1}{s + 1}$ , s, x]

$$\text{Out[8]} = e^{-x} + 2x^2 + x^4$$

## 26. สามารถหาการแปลง Z transform และการแปลงผกผัน Inverse Z transform ได้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^n \text{ จะได้ } Z\text{Transform}[(u(n))] = f(z) \text{ และ } \text{InverseZTransform}[f(z)] = u(n)$$

$$\text{In[1]:= ZTransform}[1, n, z]$$

$$\text{Out[1]= } \frac{z}{-1 + z}$$

$$\text{In[2]:= } \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\text{Out[2]= } \frac{1}{1 - z}$$

$$\text{In[3]:= ZTransform}[n, n, z]$$

$$\text{Out[3]= } \frac{z}{(-1 + z)^2}$$

$$\text{In[4]:= } \sum_{n=0}^{\infty} (n * z^n)$$

$$\text{Out[4]= } \frac{z}{(-1 + z)^2}$$

$$\text{In[5]:= ZTransform}[n^2, n, z]$$

$$\text{Out[5]= } \frac{z (1 + z)}{(-1 + z)^3}$$

$$\text{In[6]:= InverseZTransform}\left[\frac{z}{z - 1}, z, n\right]$$

$$\text{Out[6]= } 1$$

$$\text{In[7]:= InverseZTransform}\left[\frac{z}{(z - 1)^2}, z, n\right]$$

$$\text{Out[7]= } n$$

$$\text{In[8]:= InverseZTransform}\left[\frac{z (1 + z)}{(z - 1)^3}, z, n\right]$$

$$\text{Out[8]= } n^2$$



## บทที่ 2

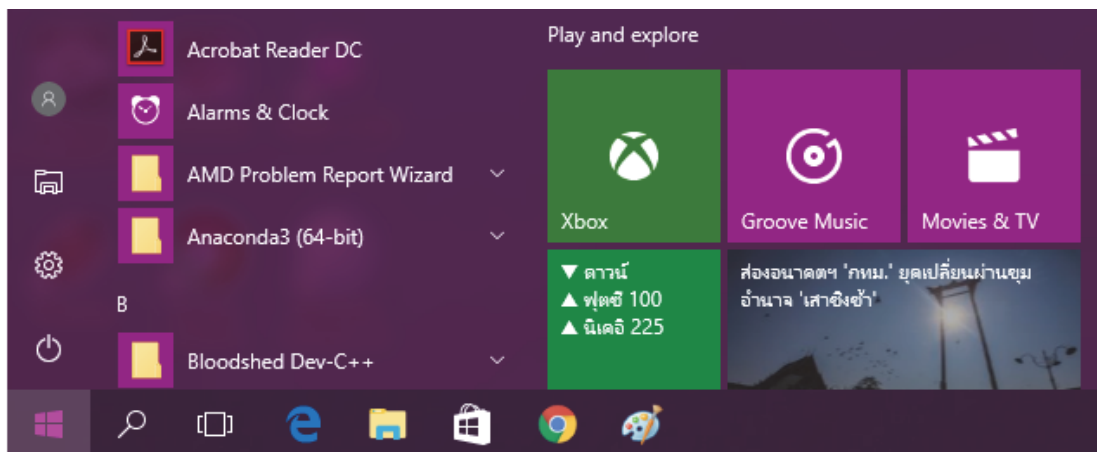
# การใช้โปรแกรม Mathematica

ในบทนี้จะเรียนรู้เกี่ยวกับการนำโปรแกรม Mathematica เข้ามาทำงาน และการคำนวณเบื้องต้นโดยใช้คำสั่งของโปรแกรม Mathematica

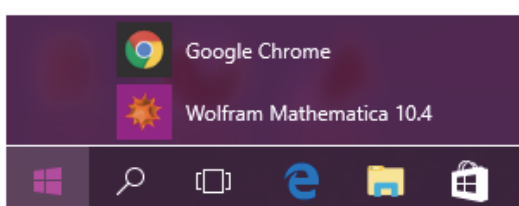
หมายเหตุ โปรแกรม Mathematica ที่ใช้ในขณะนี้คือ Mathematica 10.4 บน Window 10

### 2.1 การเรียกโปรแกรม Mathematica ขึ้นมาใช้งาน

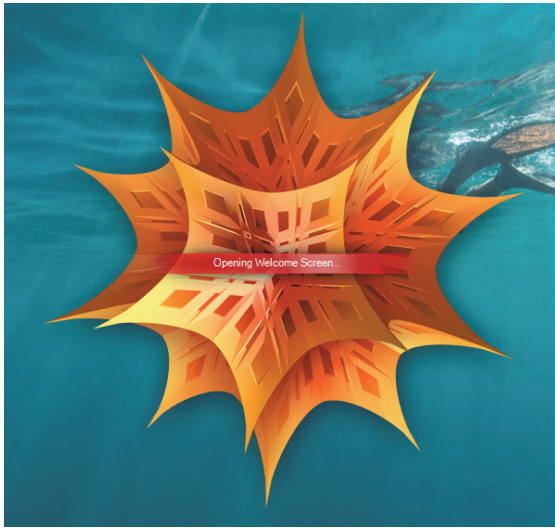
ขั้นที่ 1 เปิดเครื่องคอมพิวเตอร์



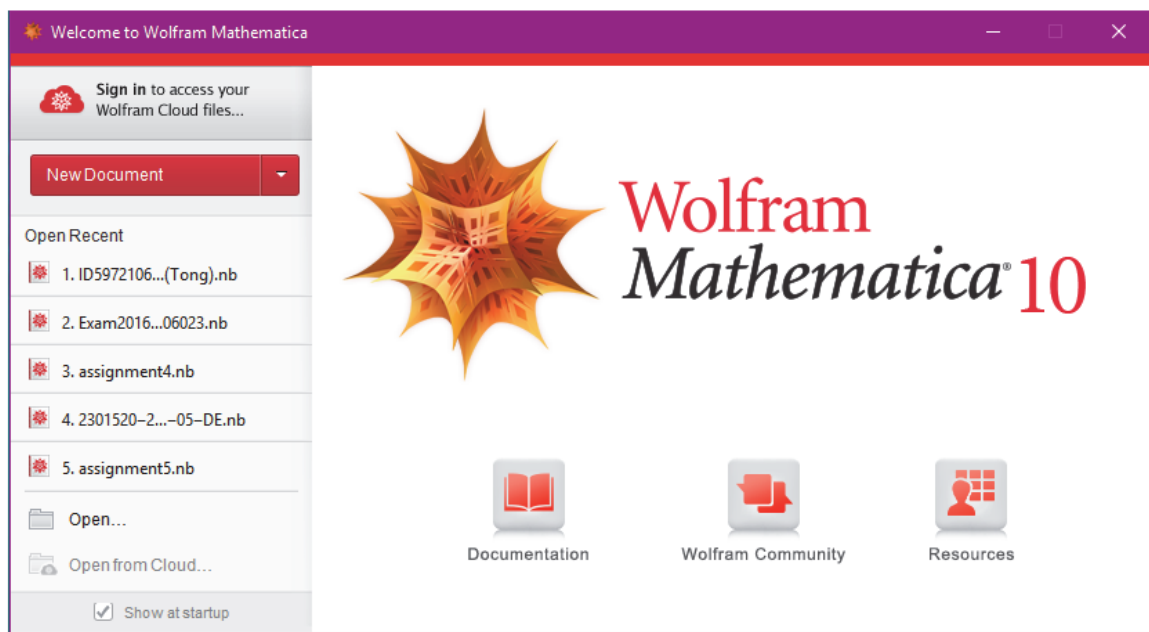
ขั้นที่ 2 เลื่อนแถบชื่อ Application จนพบชื่อ Application Wolfram Mathematica 10.4



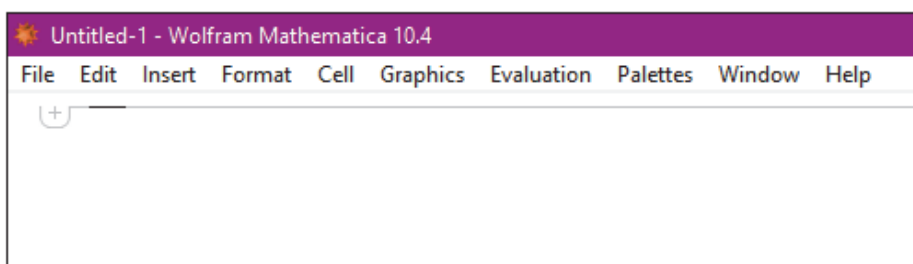
ขั้นที่ 3 คลิกที่ Application Wolfram Mathematica 10.4 รอสักครู่บนจอภาพจะ Logo ดังรูป



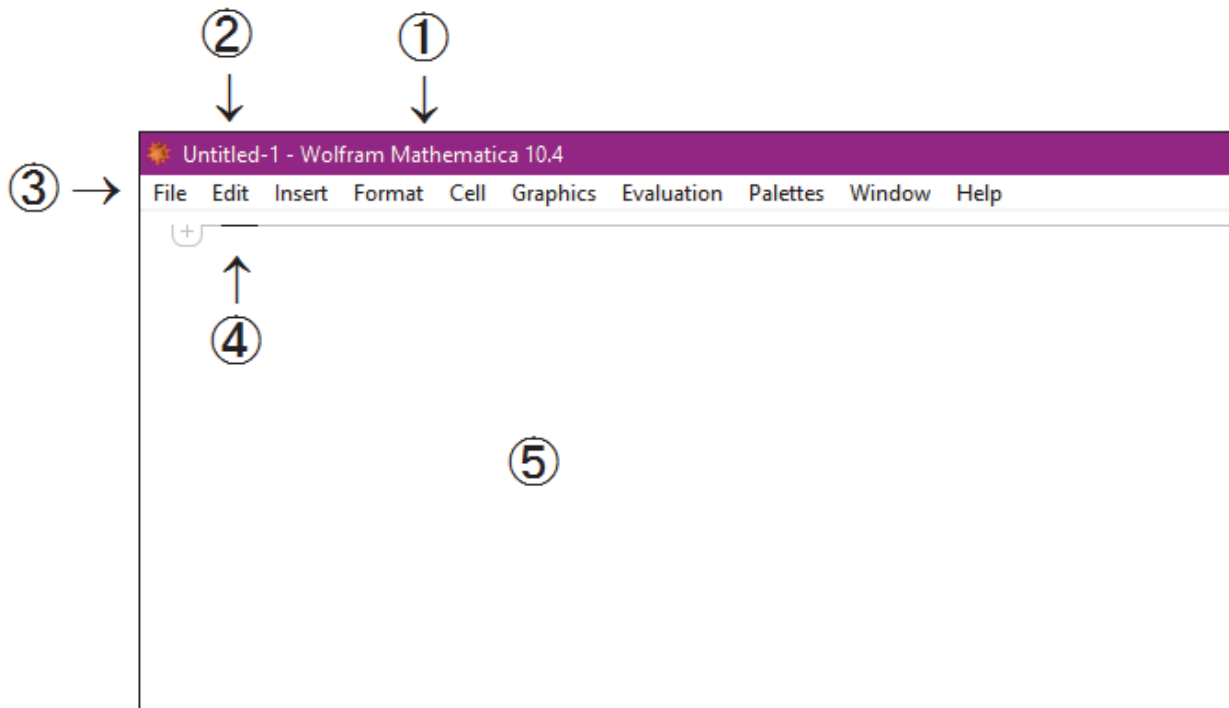
รออีกสักครู่จะได้เมนูย่อยดังรูปให้เลือก



ขั้นที่ 4 เลือก New Document จะได้ผลบนจอภาพเป็นดังนี้



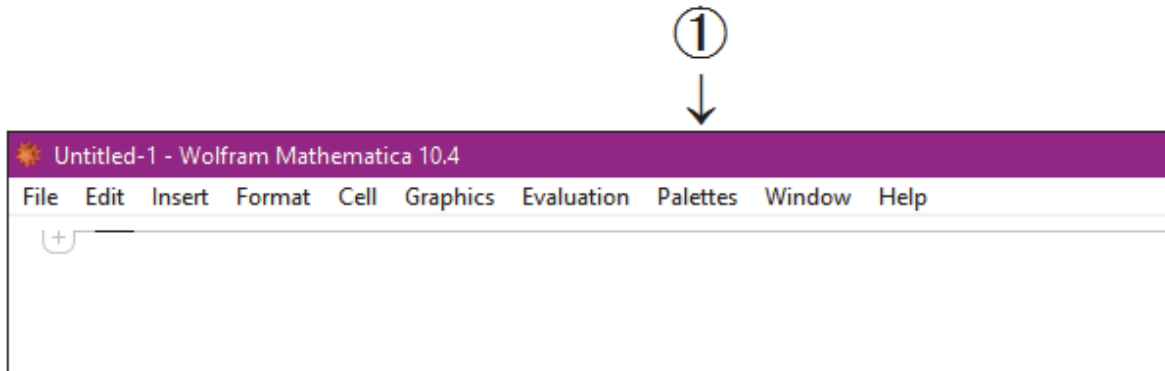
ขณะนี้เราพร้อมที่จะคำนวณโดยใช้โปรแกรม Mathematica แล้ว



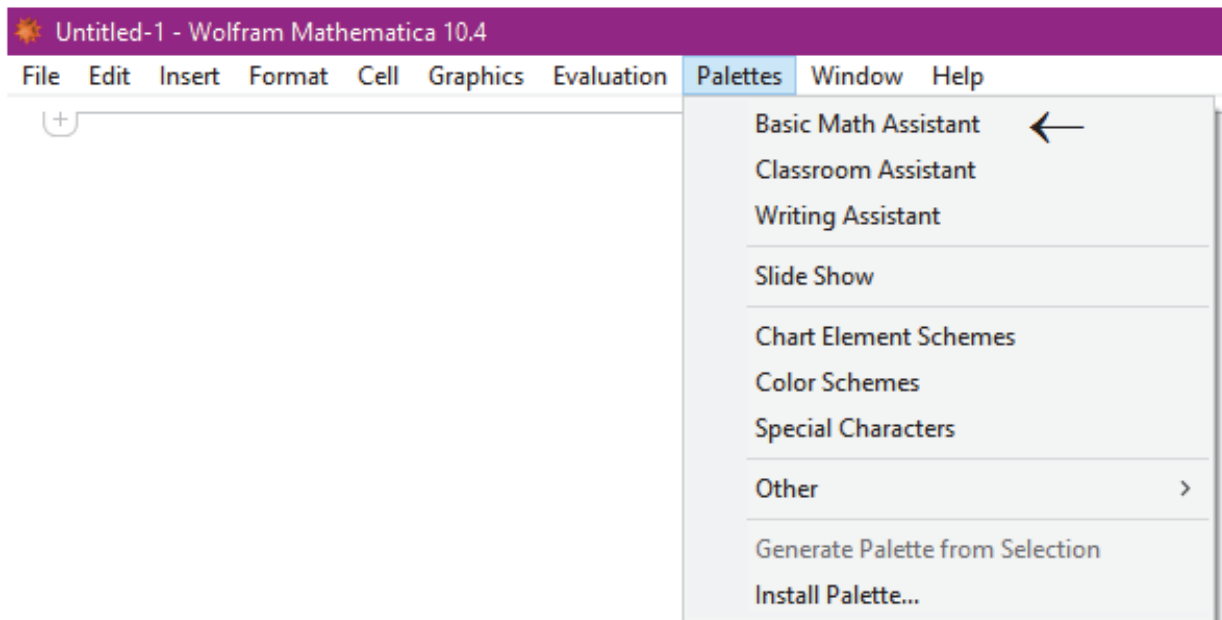
1. แสดงชื่อ Window ของการทำงานกับโปรแกรม Wolfram Mathematica 10.4
2. แสดงชื่อ Notebook ข้อมูลของ Mathematica ที่กำลังทำงาน (เข้ามาครั้งแรกจะมีชื่อเป็น Untitled-1) เพิ่มข้อมูลการคำนวณของ Mathematica เรียกว่า Notebook
3. เมนูบาร์ของการทำงานต่าง ๆ เช่น เปิด-ปิดเพิ่มข้อมูล สั่งพิมพ์งาน
4. ตำแหน่งที่ pointer กระทบเป็นตำแหน่งเริ่มต้นของการพิมพ์คำสั่งของโปรแกรม Mathematica เพื่อคำนวณค่าต่าง ๆ ที่เราต้องการ
5. บริเวณการทำงานของ Notebook

การนำแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant ของ Mathematica ขึ้นมาใช้งาน

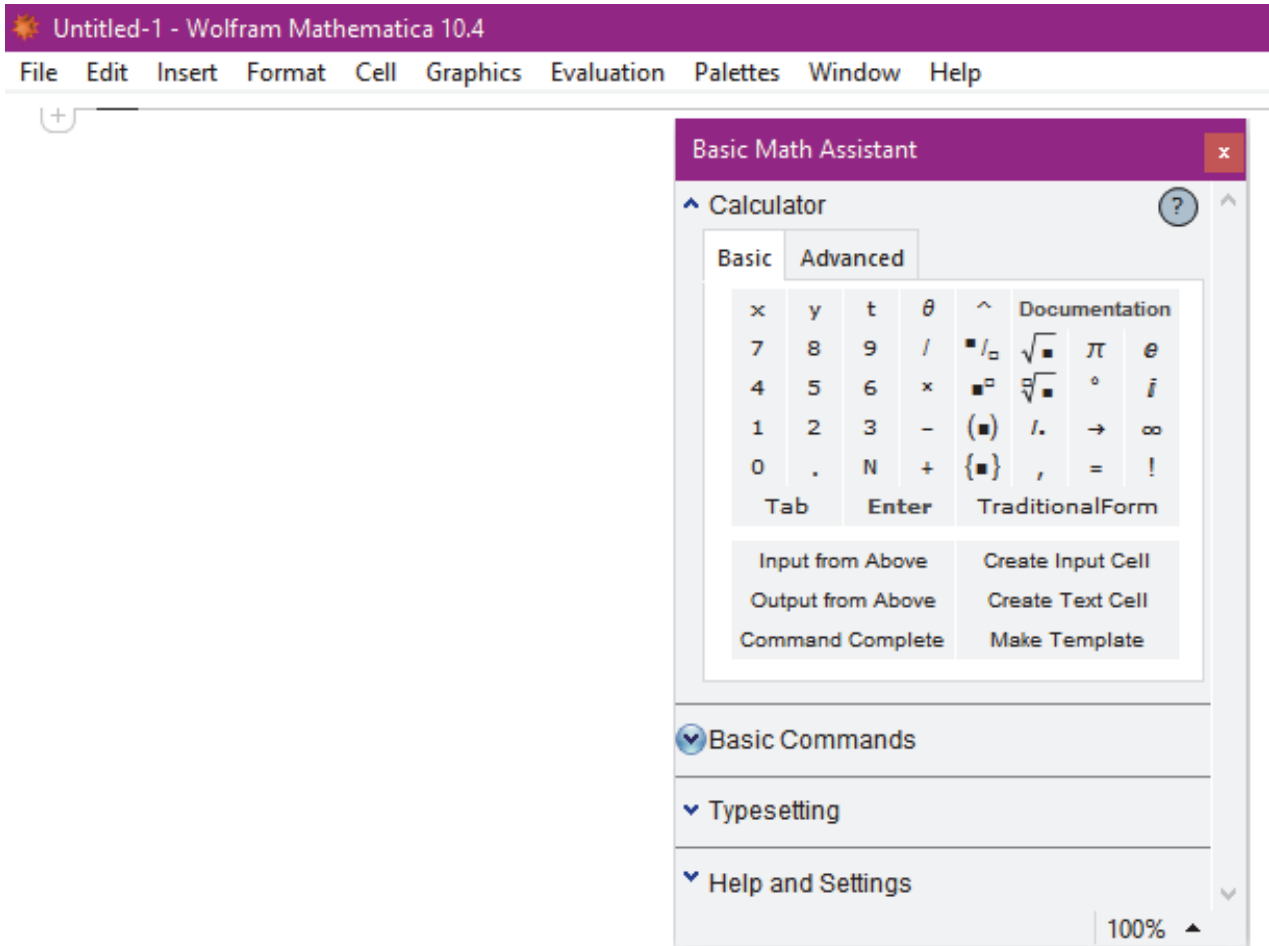
ขั้นที่ 1 เลือกเมนู Palettes



ขั้นที่ 2 เลือกเมนูย่อย Basic Math Assistant



จะได้แถบเครื่องมือของการคำนวณ Basic Math Assistant ดังรูป





## 2.2 การคำนวณโดยใช้โปรแกรม Mathematica

1. การหาผลบวก  $45.25 + 17.5$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$45.25+17.5$ <Shift>+↵	In[1]:= $45.25 + 17.5$ Out[1]= $62.75$

2. การหาผลหาร  $\frac{47}{5}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$47/5$ .<Shift>+↵ มีจุด . ท้ายเลข 5 จะแสดงผลการคำนวณ	In[2]:= $47 / 5.$ Out[2]= $9.4$
$47/5$ <Shift>+↵ ไม่มีจุด . ท้ายเลข 4 จะแสดงเป็นเศษส่วน	In[3]:= $47 / 5$ Out[3]= $\frac{47}{5}$



3. การหาผลคูณของ 15 กับ 32

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$15*32$ <Shift>+↵	In[4]:= $15 * 32$ Out[4]= $480$


4. การคำนวณเลขยกกำลัง  $4^3$  และ  $e^4$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$4^3$ <Shift>+↵	In[5]:= $4 ^ 3$ Out[5]= $64$
$E^4$ .<Shift>+↵ หมายเหตุ E = 2.718281828	In[6]:= $E ^ 4.$ Out[6]= $54.5982$
$E^4$ <Shift>+↵ หมายเหตุ เลข 4 ไม่มีจุด (.) การคำนวณจะแสดงผลเป็นสัญลักษณ์	In[7]:= $E ^ 4$ Out[7]= $e^4$

5. การคำนวณโดยใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์  $\log(2)$ ,  $\ln(2)$ ,  $\sin(\frac{\pi}{3})$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt[5]{32}$  และ  $5!$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Log10[2.]<Shift>+↵ หมายเหตุ Log10 คือลอการิทึมฐาน 10	In[8]:= <b>Log10</b> [2.] Out[8]= 0.30103
Log[2.]<Shift>+↵ หมายเหตุ Log คือลอการิทึมฐาน e	In[9]:= <b>Log</b> [2.] Out[9]= 0.693147
Log[10, 2.]<Shift>+↵ หมายเหตุ Log[b, x] คือ $\text{Log}_b x$	In[10]:= <b>Log</b> [10, 2.] Out[10]= 0.30103
Log[10, 2]<Shift>+↵ หมายเหตุ เลข 2 ไม่มีจุด (.) แสดงผลเป็นสัญลักษณ์	In[11]:= <b>Log</b> [10, 2] Out[11]= $\frac{\text{Log}[2]}{\text{Log}[10]}$
Sin[Pi/3.]<Shift>+↵	In[12]:= <b>Sin</b> [Pi / 3.] Out[12]= 0.866025
Sin[Pi/3]<Shift>+↵ หมายเหตุ เลข 3 ไม่มีจุด (.) การคำนวณจะแสดงผลเป็นสัญลักษณ์	In[13]:= <b>Sin</b> [Pi / 3] Out[13]= $\frac{\sqrt{3}}{2}$
การหารากที่ 2 มี 2 วิธี	
วิธีที่ 1 Sqrt[3.]<Shift>+↵	In[14]:= <b>Sqrt</b> [3.] Out[14]= 1.73205
Sqrt[3]<Shift>+↵ หมายเหตุ เลข 3 ไม่มีจุด (.) การคำนวณจะแสดงผลเป็นสัญลักษณ์	In[15]:= <b>Sqrt</b> [3] Out[15]= $\sqrt{3}$
วิธีที่ 2 คลิกสัญลักษณ์  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	



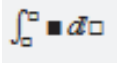



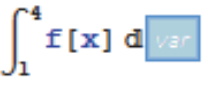
3.	$\sqrt{3.}$
<Shift>+↵	In[16]:= $\sqrt{3.}$ Out[16]= 1.73205
การหารากที่ n	
คลิกสัญลักษณ์  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	$\sqrt{\square}$
32.	$\sqrt[5]{32.}$
<Tab>	$\sqrt[5]{32.}$
5<Shift>+↵	In[17]:= $\sqrt[5]{32}$ Out[17]= 2
การหาค่า 5! แฟกทอเรียล 5!<Shift>+↵	In[18]:= 5! Out[18]= 120

6. การกำหนดค่าให้กับตัวแปรและการกำหนดสูตรฟังก์ชัน

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x:=4<Shift>+↵ หมายเหตุ := คือการกำหนดค่าให้กับตัวแปร	In[1]:= x := 4
f[x]:=x^2<Shift>+↵ หมายเหตุ f[x_]:= เป็นการกำหนดสูตร	In[2]:= f[x_] := x^2
f[x]<Shift>+↵	In[3]:= f[x] Out[3]= 16

f[3]<Shift>+↵	In[4]:= f[3] Out[4]= 9
f[x]/.x->4<Shift>+↵	In[5]:= f[x] /. x -> 4 Out[5]= 16

7. การหาค่าอินทิกรัล  $\int_a^b f(x) dx$  ตัวอย่างเช่น  $\int_1^4 (x^2 + 4) dx$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f[x]:=x^2+4<Shift>+↵	In[1]:= f[x_] := x^2 + 4
วิธีที่ 1 Integrate[f[x], {x, 0, 1}]<Shift>+↵	In[2]:= Integrate[f[x], {x, 1, 4}] Out[2]= 33
วิธีที่ 2 คลิกลักษณะ  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
1<Tab>	
4<Tab>	
f[x]<Tab>	
x<Shift>+↵	In[3]:= $\int_1^4 f[x] dx$ Out[3]= 33

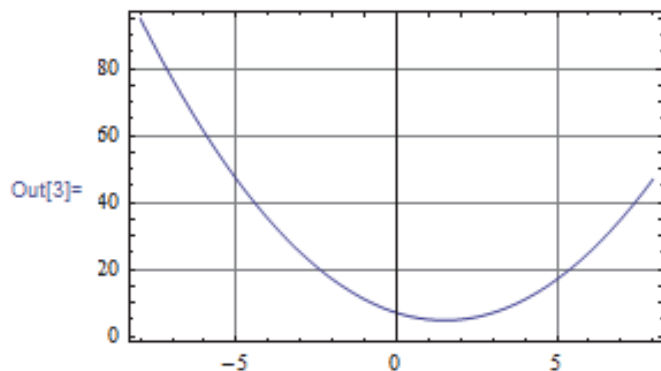
### 2.3 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน

การเขียนกราฟของ  $f(x) = x^2 - 3x + 7$  บนช่วง  $[-8, 8]$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$f[x_]:=x^2-3*x+7$ <Shift>+↵	<code>In[1]:= f[x_] := x^2 - 3*x + 7</code>
$Plot[f[x], {x, -8, 8}]$ <Shift>+↵  หมายเหตุ คำสั่ง $Plot[f[x], {x, a, b}]$ คือการเขียนกราฟ $y = f(x)$ บนช่วง $[a, b]$	<code>In[2]:= Plot[f[x], {x, -8, 8}]</code>  <p>Out[2]=</p>

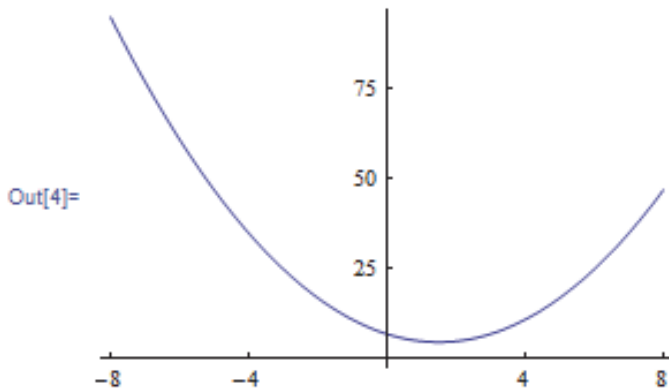
หมายเหตุ โปรแกรม Mathematica สามารถจัดรูปแบบการแสดงผลของกราฟได้หลายลักษณะเช่น

```
In[3]:= Plot[f[x], {x, -8, 8},
Frame -> True, GridLines -> {{-5, 5}, {20, 40, 60, 80}}]
```



มีเส้นตาข่ายช่วยในการประมาณค่า

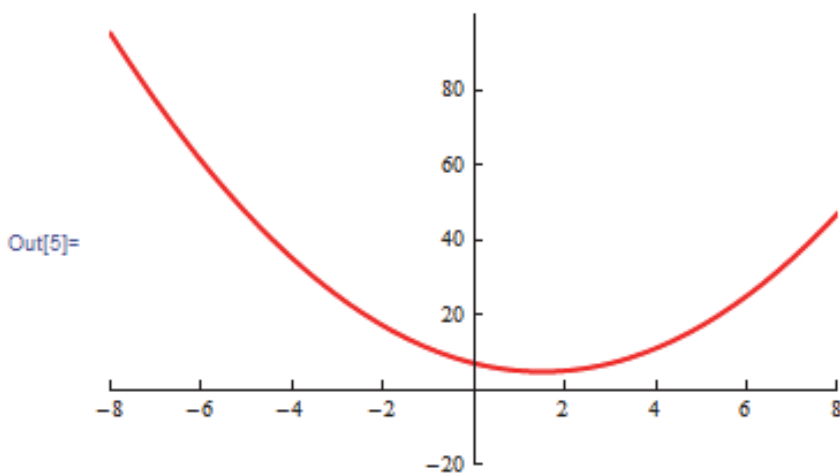
```
In[4]:= Plot[f[x], {x, -8, 8},
  Ticks -> {{-8, -4, 0, 4, 8}, {25, 50, 75}}]
```



เลือกกำหนดสเกลที่แกน X และ แกน Y

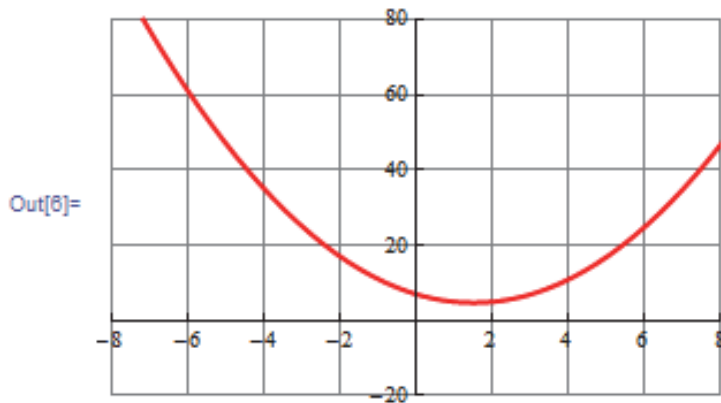
ตัวอย่างการปรับแต่งกราฟให้สวยงามเช่น

```
In[5]:= Plot[f[x], {x, -8, 8},
  PlotRange -> {{-8, 8}, {-20, 100}},
  Ticks -> {{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8},
    {-20, 0, 20, 40, 60, 80}},
  PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



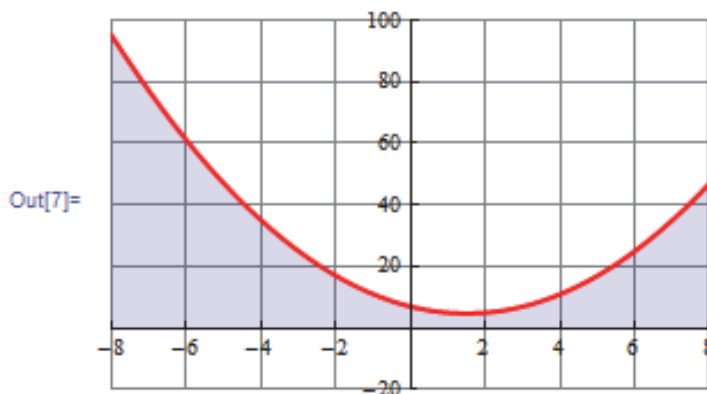
ปรับแต่งสเกลและตีเส้นกริดให้สวยงาม

```
In[8]:= Plot[f[x], {x, -8, 8},
  PlotRange -> {{-8, 8}, {-20, 80}},
  Ticks -> {{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8},
    {-20, 0, 20, 40, 60, 80, 100}},
  GridLines -> {{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8},
    {-20, 0, 20, 40, 60, 80, 100}},
  PlotStyle -> {Red, Thick}]
```



กราฟแบบแรเงาระหว่างเส้นโค้งกับแกน X

```
In[7]:= Plot[{f[x]}, {x, -8, 8},
  PlotRange -> {{-8, 8}, {-20, 100}},
  Ticks -> {{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8},
    {-20, 0, 20, 40, 60, 80, 100}},
  GridLines -> {{-8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8},
    {-20, 0, 20, 40, 60, 80, 100}},
  PlotStyle -> {Red, Thick},
  Filling -> 0]
```



## 2.4 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

ตัวอย่าง การกำหนด  $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$



พิมพ์	ผลบนจอภาพ
การกำหนดเมทริกซ์แบบที่ 1	
A=	A =
คลิกสัญลักษณ์ $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$ จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	A = $\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$
4<Tab> หมายเหตุ การกด Tab ทำให้ Cursor กระโดดไปตำแหน่งถัดไป	A = $\begin{pmatrix} 4 & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$
-2<Tab>-5<Tab> 3<Shift>+↵	In[1]:= A = $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ Out[1]= {{4, -2}, {5, 3}}
ในทำนองเดียวกัน กำหนดเมทริกซ์ B	In[2]:= B = $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Out[2]= {{2, 5}, {1, 3}}
MatrixForm[A]<Shift>+↵ หมายเหตุ MatrixForm[A] เป็นคำสั่งกำหนดการแสดงผลในรูปแบบเมทริกซ์	In[3]:= MatrixForm[A] Out[3]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
MatrixForm[B]<Shift>+↵	In[4]:= MatrixForm[B] Out[4]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

การคำนวณค่าของเมทริกซ์  $A + B$ ,  $4A$ ,  $A^2$ ,  $AB$ ,  $A^{-1}$ ,  $A^T$ ,  $\det(A)$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
MatrixForm[A+B]<Shift>+ ↵	In[5]:= MatrixForm[A + B] Out[5]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$
MatrixForm[4*A]<Shift>+ ↵	In[6]:= MatrixForm[4 * A] Out[6]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ 20 & 12 \end{pmatrix}$
MatrixForm[MatrixPower[A, 2]]<Shift>+↵	In[7]:= MatrixForm[MatrixPower[A, 2]] Out[7]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 6 & -14 \\ 35 & -1 \end{pmatrix}$
MatrixForm[A.B]<Shift>+ ↵ หมายเหตุ A.B หมายถึงการคูณแบบเมทริกซ์	In[8]:= MatrixForm[A . B] Out[8]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 13 & 34 \end{pmatrix}$
MatrixForm[A*B]<Shift>+ ↵ หมายเหตุ เป็นการคูณตัวเลขตำแหน่งที่ตรงกันเท่านั้น	In[9]:= MatrixForm[A * B] Out[9]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$
MatrixForm[Inverse[A]] <Shift>+↵	In[10]:= MatrixForm[Inverse[A]] Out[10]/MatrixForm= $\begin{pmatrix} \frac{3}{22} & \frac{1}{11} \\ -\frac{5}{22} & \frac{2}{11} \end{pmatrix}$
Det[A]<Shift>+↵	In[11]:= Det[A] Out[11]= 22

MatrixForm[Transpose[A]] <Shift>+↵	<pre>In[12]:= MatrixForm[Transpose[A]] Out[12]/MatrixForm=   ( 4 5 )   (-2 3)</pre>
---------------------------------------	---

การกำหนดดรรชนีล่าง (subscript) สำหรับอ้างอิงใช้งานกับสมาชิกของเมทริกซ์

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
MatrixForm[A]<Shift>+↵	<pre>In[13]:= MatrixForm[A] Out[13]/MatrixForm=   ( 4 -2 )   ( 5 3 )</pre>
<b>แบบที่ 1</b> คลิกสัญลักษณ์  จาก แถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
A<Tab>	$A_{\square}$
[[1,2]]<Shift>+↵	<pre>In[14]:= A[[1,2]] Out[14]= -2</pre>
<b>แบบที่ 2</b> A[[1,2]]<Shift>+↵	<pre>In[15]:= A[[1,2]] Out[15]= -2</pre>



## การกำหนดเมทริกซ์แบบที่ 2

กำหนด  $A = \{\{a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}\}, \{a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2m}\}, \dots, \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nm}\}\}$

ตัวอย่างเช่น  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

In[16]:= `A = {{1, 2, 4, 5}, {1, 2, 0, 3}, {4, 1, 1, 2}, {3, 2, 1, 5}}`

Out[16]= `{{1, 2, 4, 5}, {1, 2, 0, 3}, {4, 1, 1, 2}, {3, 2, 1, 5}}`

In[17]:= `MatrixForm[A]`

Out[17]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

In[18]:= `Det[A]`

Out[18]= `-42`

In[19]:= `MatrixForm[Inverse[A]]`

Out[19]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{8}{7} & \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{21} & \frac{4}{21} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{14} & -\frac{17}{42} & -\frac{8}{21} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

## 2.5 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์

ตัวอย่างการกำหนด  $u = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$  และ  $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  และหาค่า  $u + v$ ,  $4u$ ,  $u \cdot v$ ,  $|u|$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<code>u={-3,4}&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[1]:= u = {-3, 4} Out[1]= {-3, 4}</pre>
<code>MatrixForm[u]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[2]:= MatrixForm [u] Out[2]/MatrixForm=   ( -3 )   (  4 )</pre>
<code>v={1,2}&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[3]:= v = {1, 2} Out[3]= {1, 2}</pre>
<code>MatrixForm[v]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[4]:= MatrixForm [v] Out[4]/MatrixForm=   ( 1 )   ( 2 )</pre>
<code>MatrixForm[u+v]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[5]:= MatrixForm [u + v] Out[5]/MatrixForm=   ( -2 )   (  6 )</pre>
<code>MatrixForm[4*u]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<pre>In[6]:= MatrixForm [4 * u] Out[6]/MatrixForm=   ( -12 )   (  16 )</pre>
<code>MatrixForm[u.v]&lt;Shift&gt;+↵</code> หมายเหตุ u.v คือ dot product	<pre>In[7]:= MatrixForm [u . v] Out[7]/MatrixForm=   5</pre>



<p>MatrixForm[u*v] &lt;Shift&gt;+↵</p> <p>หมายเหตุ u*v คือ ผลคูณของสมาชิกที่มีตำแหน่งตรงกันแบบตัวต่อตัว ไม่ใช่ dot product</p>	<pre>In[8]:= MatrixForm[u*v]</pre> <pre>Out[8]/MatrixForm=</pre> $\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$
<p>Sqrt[u.u]&lt;Shift&gt;+↵</p> <p>การหาขนาดของเวกเตอร์ u</p> $ u  = \sqrt{u \cdot u}$	<pre>In[9]:= Sqrt[u.u]</pre> <pre>Out[9]= 5</pre>

การหา Cross Product ของเวกเตอร์

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<p>u={1,2,3}&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[10]:= u = {1, 2, 3}</pre> <pre>Out[10]= {1, 2, 3}</pre>
<p>v={4,5,6}&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[11]:= v = {4, 5, 6}</pre> <pre>Out[11]= {4, 5, 6}</pre>
<p>MatrixForm[u]&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[12]:= MatrixForm[u]</pre> <pre>Out[12]/MatrixForm=</pre> $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
<p>MatrixForm[v]&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[13]:= MatrixForm[v]</pre> <pre>Out[13]/MatrixForm=</pre> $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$
<p>MatrixForm[u&lt;ESC&gt;cross&lt;ESC&gt;v]&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[14]:= MatrixForm[u*v]</pre> <pre>Out[14]/MatrixForm=</pre> $\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

## 2.6 การหาค่าสถิติเบื้องต้น

ตัวอย่างข้อมูล 6 ตัว คือ 2, 3, 5, 7, 8, 15

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$x=\{2,3,5,7,8,15\}$ <Shift>+↵	In[1]:= $x = \{2, 3, 5, 7, 8, 15\}$ Out[1]= $\{2, 3, 5, 7, 8, 15\}$
Mean[x]<Shift>+↵	In[2]:= <b>Mean[x]</b> Out[2]= $\frac{20}{3}$
Median[x]<Shift>+↵	In[3]:= <b>Median[x]</b> Out[3]= 6
Variance[x]<Shift>+↵	In[4]:= <b>Variance[x]</b> Out[4]= $\frac{328}{15}$
Length[x]<Shift>+↵	In[5]:= <b>Length[x]</b> Out[5]= 6
StandardDeviation[x] <Shift>+↵	In[6]:= <b>StandardDeviation[x]</b> Out[6]= $2\sqrt{\frac{82}{15}}$
การอ้างอิงตัวสมาชิก $x_i$	
แบบที่ 1 คลิกสัญลักษณ์  จาก แถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
$x$ <Tab>	$x_{\mathbb{R}}$

[[1]]	$x_{[[1]]}$
<Shift>+↵	In[7]:= $x_{[1]}$ Out[7]= 2
แบบที่ 2 $x_{[[1]]}$ <Shift>+↵	In[8]:= $x_{[[1]]}$ Out[8]= 2

ใน Mathematica มีฟังก์ชันที่ช่วยคำนวณค่าสถิติของข้อมูล เช่น

$$\text{Mean}[x] = \text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล } x = \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Median}[x] = \text{มัธยฐานของข้อมูล } x$$

$$\text{Variance}[x] = \text{ความแปรปรวน (ตัวอย่าง) ของข้อมูล } x = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$

$$\text{Length}[x] = \text{จำนวนข้อมูล } x$$

$$\text{StandardDeviation}[x] = \text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ตัวอย่าง) ของข้อมูล } x = \sqrt{\text{Variance}[x]}$$

## 2.7 การกำหนดข้อมูล 2 ตัวแปร เขียนแผนภาพการกระจายและหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

ตัวอย่างข้อมูล

x	y
3	12
5	15
9	21
12	32

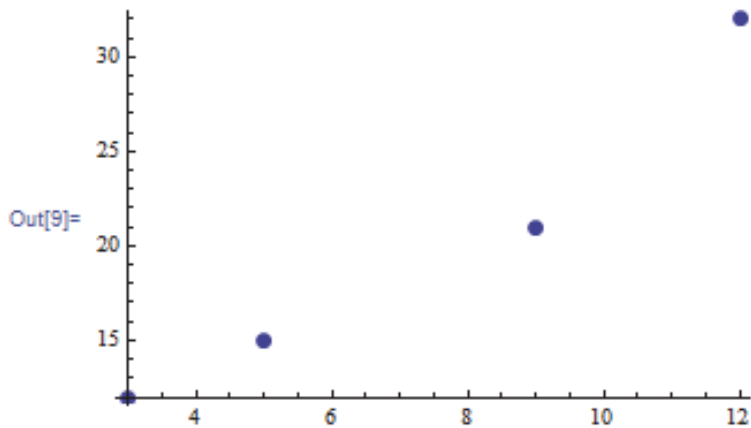
พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<b>แบบที่ 1</b> data={{3,12},{5,15},{9,21},{12,32}} <Shift>+↵	<pre>In[1]:= data = {{3, 12}, {5, 15}, {9, 21}, {12, 32}}</pre> <pre>Out[1]= {{3, 12}, {5, 15}, {9, 21}, {12, 32}}</pre>
MatrixForm[data] <Shift>+↵	<pre>In[2]:= MatrixForm[data]</pre> <pre>Out[2]//MatrixForm=</pre> $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 15 \\ 9 & 21 \\ 12 & 32 \end{pmatrix}$
<b>แบบที่ 2</b> x={3,5,9,12} <Shift>+↵	<pre>In[3]:= x = {3, 5, 9, 12}</pre> <pre>Out[3]= {3, 5, 9, 12}</pre>
y = {12,15,21,32} <Shift>+↵	<pre>In[4]:= y = {12, 15, 21, 32}</pre> <pre>Out[4]= {12, 15, 21, 32}</pre>
data=Table[{x[[i]].y[[i]]},{i,4}]<Shift>+↵	<pre>In[5]:= data = Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 4}]</pre> <pre>Out[5]= {{3, 12}, {5, 15}, {9, 21}, {12, 32}}</pre>

<p>MatrixForm[data] &lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[6]:= MatrixForm[data]</pre> <p>Out[6]/MatrixForm=</p> $\begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 5 & 15 \\ 9 & 21 \\ 12 & 32 \end{pmatrix}$
<p>ycap=LinearModelFit [data,{1,t},t]&lt;Shift&gt;+ ↵</p>	<pre>In[7]:= ycap = LinearModelFit[data, {1, t}, t]</pre> <p>Out[7]= FittedModel [ 4.53333 + 2.13333t ]</p>

การเขียนแผนภาพการกระจายและเส้นตรงที่ใช้ประมาณความสัมพันธ์

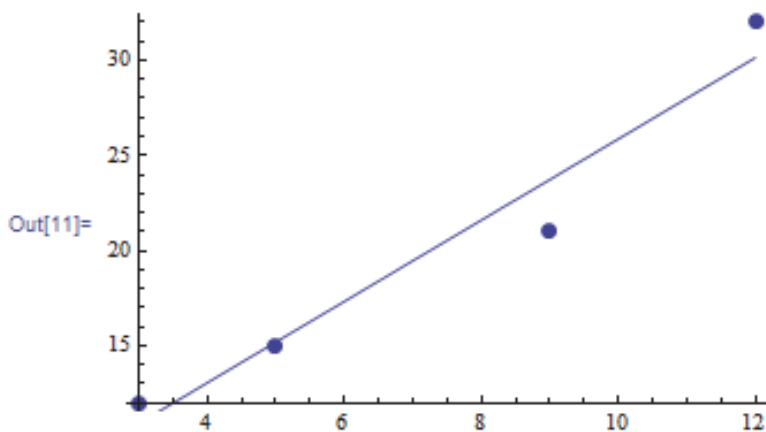
```
In[8]:= g1 := ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}]
```

```
In[9]:= Show[g1]
```



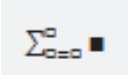
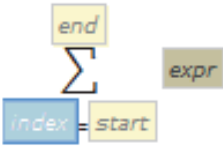

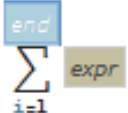
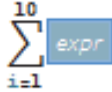
```
In[10]:= g2 := Plot[ycap[t], {t, 0, 12}]
```

```
In[11]:= Show[g1, g2]
```



## 2.8 การคำนวณค่าเกี่ยวกับผลบวกในรูปแบบ $\Sigma$

การหาค่า  $\sum_{i=1}^{10} i$ ,  $\sum_{i=1}^{10} i^2$ ,  $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 4i - 5)$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<b>วิธีที่ 1</b> ใช้คำสั่ง Sum	
Sum[i,{i,1,10}]<Shift>+↵	In[1]:= Sum[i, {i, 1, 10}] Out[1]= 55
Sum[i^2,{i,1,10}] <Shift>+↵	In[2]:= Sum[i ^ 2, {i, 1, 10}] Out[2]= 385
Sum[i^2-4*i-5,{i,1,10}] <Shift>+↵	In[3]:= Sum[i ^ 2 - 4 * i - 5, {i, 1, 10}] Out[3]= 115
<b>วิธีที่ 2</b> ใช้สัญลักษณ์ผลบวก	
คลิกสัญลักษณ์  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
i<Tab>	
1<Tab>	
10<Tab>	



<p>i&lt;Shift&gt;+↵</p>	<p>In[4]:= <math>\sum_{i=1}^{10} i</math>                  Out[4]= 55</p>
<p>หมายเหตุ ถ้าต้องการหาค่า <math>\sum_{i=1}^{10} i^2</math> ให้พิมพ์ <math>i^2</math> แทน <math>i</math></p>	<p>In[10]:= <math>\sum_{i=1}^{10} i^2</math>                  Out[10]= 385</p>

ตัวอย่างเพิ่มเติม

In[6]:=  $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 4 * i - 5)$

Out[6]= 115

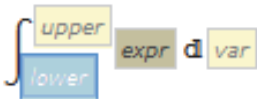
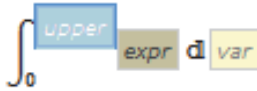
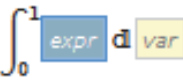
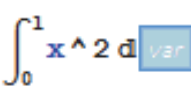
In[7]:= Sum[i, {i, 1, 10, 2}]

Out[7]= 25

หมายเหตุ Sum[i,{i,1,10,2}] = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25

2.9 การคำนวณค่าอินทิกรัล  $\int_a^b f(x) dx$

การหาค่าของ  $\int_0^1 x^2 dx$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<p>วิธีที่ 1</p> <p>ใช้คำสั่ง Integrate</p> <p>Integrate[x^2,{x,0,1}]</p> <p>&lt;Shift&gt;+↵</p>	<pre>In[1]:= Integrate[x^2, {x, 0, 1}]</pre> <pre>Out[1]= 1/3</pre>
<p>วิธีที่ 2</p> <p>คลิกสัญลักษณ์ <math>\int_a^b dx</math></p> <p>จากแถบเครื่องมือ</p> <p>Basic Math Assistant</p>	
0<Tab>	
1<Tab>	
x^2<Tab>	
x<Shift>+↵	<pre>In[2]:= <math>\int_0^1 x^2 dx</math></pre> <pre>Out[2]= 1/3</pre>

<p>หมายเหตุ ในกรณีที่ตัวเลขในการอินทิเกรตเป็นจำนวนจริงมีจุดทศนิยม จะได้ว่าผลการคำนวณที่ได้จะแสดงผลเป็นจำนวนจริงในรูปแบบทศนิยม</p>	<pre>In[4]:= ∫<sub>0</sub><sup>1.0</sup> x<sup>2</sup> dx Out[4]= 0.333333  In[5]:= ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> x<sup>2.0</sup> dx Out[5]= 0.333333  In[6]:= Integrate[x<sup>2</sup>, {x, 0, 1.}] Out[6]= 0.333333</pre>
---	--

ตัวอย่างเพิ่มเติม

In[7]:= Integrate[x<sup>2</sup>, x]

Out[7]=  $\frac{x^3}{3}$

In[8]:= Integrate[x<sup>2</sup>, {x, t, t<sup>2</sup>}]

Out[8]=  $-\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3}$

In[9]:= ∫<sub>t</sub><sup>t<sup>2</sup></sup> x<sup>2</sup> dx

Out[9]=  $-\frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{3}$

In[10]:= ∫ Sin[x] dx


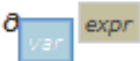

Out[10]= -Cos[x]


In[11]:= ∫<sub>0</sub><sup>1</sup> ∫<sub>0</sub><sup>2</sup> (x<sup>2</sup> + y<sup>3</sup>) dx dy

Out[11]=  $\frac{19}{6}$

## 2.10 การคำนวณค่าอนุพันธ์ $\frac{d}{dx} f(x)$ หรือ $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$

การคำนวณ  $\frac{d}{dx} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^2$  ที่  $x = 1$  และ  $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$  เมื่อ  $f(x) = x^4$  ที่  $x = 2$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<b>วิธีที่ 1</b> $D[x^2, x]$ <Shift> + <Left Arrow>	$In[1]:= D[x^2, x]$ $Out[1]= 2 x$ <b>หมายเหตุ</b> $D[f[x], x]$ เป็นคำสั่งคำนวณสูตร $f'(x)$
$D[x^2, x] /. x -> 1$ <Shift> + <Left Arrow>	$In[2]:= D[x^2, x] /. x -> 1$ $Out[2]= 2$ <b>หมายเหตุ</b> $D[f[x], x] /. x \rightarrow a$ เป็นคำสั่งคำนวณค่า $f'(a)$
$D[x^4, \{x, 2\}]$ <Shift> + <Left Arrow>	$In[3]:= D[x^4, \{x, 2\}]$ $Out[3]= 12 x^2$ <b>หมายเหตุ</b> $D[f[x], \{x, n\}]$ เป็นคำสั่งหาสูตร $f^{(n)}(x)$
$D[x^4, \{x, 2\}] /. x -> 2$ <Shift> + <Left Arrow>	$In[4]:= D[x^4, \{x, 2\}] /. x -> 2$ $Out[4]= 48$ <b>หมายเหตุ</b> $D[f[x], \{x, n\}] /. x \rightarrow a$ คำสั่งหาค่า $f^{(n)}(a)$
<b>วิธีที่ 2</b> คลิกสัญลักษณ์  จาก แถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
$x$ <Tab>	

$x^2$ <Shift>+↵	In[5]:= $\partial_x x^2$ Out[5]= $2x$
คลิกลักษณะ  แล้วพิมพ์ x<Tab>x^2/.x->1 <Shift>+↵	In[6]:= $\partial_x x^2 /. x \rightarrow 1$ Out[6]= 2

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```

In[7]:= f[x_] := x^5;
In[8]:= D[f[x], x]
Out[8]= 5 x^4

In[9]:= D[f[x], {x, 2}]
Out[9]= 20 x^3

In[10]:= D[f[x], x] /. x -> 3
Out[10]= 405

In[11]:= f[x_, y_] := Sin[x] * Cos[y];
In[12]:= D[f[x, y], x, y]
Out[12]= -Cos[x] Sin[y]

In[13]:= D[f[x, y], x, y] /. {x -> Pi/4, y -> Pi/6}
Out[13]= -1/(2*sqrt(2))

In[14]:= D[f[x, y], {x, 2}, {y, 2}]
Out[14]= Cos[y] Sin[x]

In[15]:=  $\partial_{x,y} (x^3 * y^5)$ 
Out[15]= 15 x^2 y^4
    
```

## 2.11 การกำหนดหน่วยให้กับผลการคำนวณ

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
การกำหนดหน่วยของมุม	
Sin[90.]<Shift>+↵	In[1]:= Sin[90.] Out[1]= 0.893997  หมายเหตุ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ Sin, Cos, Tan, Sec, Csc และ Cot ถ้าไม่ระบุหน่วยจะคิดหน่วยเป็นเรเดียน
Sin[90*Degree]<Shift>+↵	In[2]:= Sin[90 * Degree] Out[2]= 1  หมายเหตุ การกำหนดองศา ให้พิมพ์ Degree ท้ายตัวเลข
ArcSin[1]<Shift>+↵	In[3]:= ArcSin[1] Out[3]= $\frac{\pi}{2}$
ArcSin[1.]<Shift>+↵	In[4]:= ArcSin[1.] Out[4]= 1.5708  หมายเหตุ ค่าของ ArcSin, ArcCos, ArcTan, ArcSec, ArcCsc และ ArcCot ถ้าไม่ระบุหน่วยจะคิดหน่วยเป็นเรเดียน
ArcSin[1.]/Degree<Shift>+↵	In[5]:= ArcSin[1.] / Degree Out[5]= 90.
ArcTan[1.]<Shift>+↵	In[6]:= ArcTan[1.] Out[6]= 0.785398
ArcTan[1.]/Degree<Shift>+↵	In[7]:= ArcTan[1.] / Degree Out[7]= 45.
Degree//N<Shift>+↵	In[8]:= Degree // N Out[8]= 0.0174533
หมายเหตุ Degree = $\frac{\pi}{180}$	

การกำหนดหน่วยแบบอื่น ๆ เช่น

s:=Quantity[10.,"Kilometers"] <Shift>+↵	In[1]:= <code>s := Quantity[10., "Kilometers"]</code>
s<Shift>+↵	In[2]:= <code>s</code> Out[2]= 10. km
t:=Quantity[2.,"Hours"] <Shift>+↵	In[3]:= <code>t := Quantity[2., "Hours"]</code>
t<Shift>+↵	In[4]:= <code>t</code> Out[4]= 2. h
v:=s/t<Shift>+↵	In[5]:= <code>v := s / t</code>
v<Shift>+↵	In[6]:= <code>v</code> Out[6]= 5. km/h
UnitConvert[v,}SI"} <Shift>+↵	In[7]:= <code>UnitConvert[v, "SI"]</code> Out[7]= 1.38889 m/s

ตัวอย่างการเปลี่ยนหน่วยรูปแบบอื่น ๆ เช่น

```
In[8]:= UnitConvert[v, "Meters" / "Seconds"]
Out[8]= 1.38889 m/s

In[9]:= UnitConvert[v, "Centimeters" / "Minutes"]
Out[9]= 8333.33 cm/min
```

## 2.12 การคำนวณในรูปแบบของเลขฐาน

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$2^{1111}$ <Shift>+↵	In[1]:= $2^{1111}$ Out[1]= 15
$4^{1111}$ <Shift>+↵	In[2]:= $4^{1111}$ Out[2]= 85
BaseForm[15,2]<Shift>+↵	In[3]:= BaseForm[15, 2] Out[3]/BaseForm= 1111 <sub>2</sub>
BaseForm[15,4]<Shift>+↵	In[4]:= BaseForm[15, 4] Out[4]/BaseForm= 33 <sub>4</sub>
BaseForm[85,2]<Shift>+↵ BaseForm[x, b] =	In[5]:= BaseForm[85, 2] Out[5]/BaseForm= 1010101 <sub>2</sub>
BaseForm[85,4]<Shift>+↵	In[6]:= BaseForm[85, 4] Out[6]/BaseForm= 1111 <sub>4</sub>
BaseForm[85,16]<Shift>+ ↵	In[7]:= BaseForm[85, 16] Out[7]/BaseForm= 55 <sub>16</sub>
$2^{1111}+4^{1111}$ <Shift> +↵	In[8]:= $2^{1111} + 4^{1111}$ Out[8]= 100  หมายเหตุ $(1111)_2 + (1111)_4 = (100)_{10}$

หมายเหตุ BaseForm[x, b] คือจำนวน x ฐาน 10 ในรูปแบบตัวเลขฐาน b และ  $b^x$  คือจำนวน x ฐาน b ในรูปแบบฐาน 10



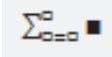

2.13 การหาผลบวกในรูปแบบ  $\sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n x_i^2, \sum_{i=1}^n y_i^2, \sum_{i=1}^n x_i y_i$

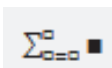
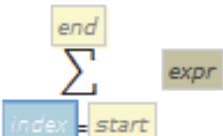


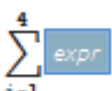

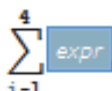

กำหนดข้อมูล

x	y
2	12
3	15
6	14
9	19

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x:={2,3,6,9}<Shift>+↵	In[1]:= x := {2, 3, 6, 9}
y:={12,15,14,19} <Shift>+↵	In[2]:= y := {12, 15, 14, 19}
{x[[1]],y[[1]]}<Shift>+↵ หมายเหตุ x[[i]] คือ $x_i$	In[3]:= {x[[1]], y[[1]]} Out[3]= {2, 12}
data=Table[{x[[i]],y[[i]]},{i,4} <Shift>+↵	In[4]:= data = Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 4}] Out[4]= {{2, 12}, {3, 15}, {6, 14}, {9, 19}}
TableForm[data] <Shift>+↵	In[5]:= TableForm[data] Out[5]/TableForm= 2   12 3   15 6   14 9   19
Sum[x[[i]],{i,1,4}] <Shift>+↵	In[6]:= Sum[x[[i]], {i, 1, 4}] Out[6]= 20 หมายเหตุ Sum[F[i],{i,a,b}] = $\sum_{i=a}^b F(i)$

$\text{Sum}[x[[i]]^2,\{i,1,4\}]$ <Shift>+↵	$\text{In}[7]:= \text{Sum}[x[[i]]^2, \{i, 1, 4\}]$ $\text{Out}[7]= 130$
$\text{Sum}[x[[i]]*y[[i]],\{i,1,4\}]$ <Shift>+↵	$\text{In}[8]:= \text{Sum}[x[[i]]*y[[i]], \{i, 1, 4\}]$ $\text{Out}[8]= 324$

การใช้สัญลักษณ์การคำนวณ  และ 

คลิกสัญลักษณ์  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
i<Tab>	
1<Tab>	
4<Tab>	
คลิกสัญลักษณ์  จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant	
x<Tab>	

[[i]]<Shift>+↵	$\text{In}[9]:= \sum_{i=1}^4 X_{[i]}$ $\text{Out}[9]= 20$
----------------	---

ตัวอย่างเพิ่มเติม

$$\text{In}[10]:= \sum_{i=1}^4 X_{[i]}^2$$

$$\text{Out}[10]= 130$$

$$\text{In}[11]:= \sum_{i=1}^4 X_{[i]} * Y_{[i]}$$

$$\text{Out}[11]= 324$$

$$\text{In}[12]:= \sum_{i=1}^4 Y_{[i]}$$

$$\text{Out}[12]= 60$$

$$\text{In}[13]:= \sum_{i=1}^4 Y_{[i]}^2$$

$$\text{Out}[13]= 926$$

### 2.14 การสร้างตารางฟังก์ชัน

`Table[{x, f(x)}, {x, a, b, d}]` เป็นการทำให้ตารางค่าของ  $x$  และ  $f(x)$  โดยที่  $x$  เปลี่ยนค่าจาก  $a$  ถึง  $b$  และกำหนดให้มีค่าเพิ่มขึ้นครั้งละ  $d$

`TableForm[...]` เป็นการคำสั่งให้แสดงผลแบบแนวตั้ง

ตัวอย่างแรกค่าของ  $x$  เพิ่มค่าเท่ากัน

$x$	$f(x) = 2x + 4$
1	6
2	8
3	10
4	12

พิมพ์	<code>Table[{x,2*x+4},{x,1,4,1}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ	<pre>In[1]:= Table[{x, 2 * x + 4}, {x, 1, 4, 1}] Out[1]= {{1, 6}, {2, 8}, {3, 10}, {4, 12}}</pre>
พิมพ์	<code>TableForm[Table[{x,2*x+4},{x,1,4,1}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ	<pre>In[2]:= TableForm[Table[{x, 2 * x + 4}, {x, 1, 4, 1}]] Out[2]/TableForm=   1    6   2    8   3   10   4   12</pre>

ในกรณีที่ค่า  $x$  เพิ่มไม่เท่ากันเช่น  $x = 2, 5, 7, 12$  สามารถคำนวณในรูปแบบตารางได้ดังนี้

```
In[3]:= x := {2, 5, 7, 12}
```

```
In[4]:= f[x_] := 2 * x + 4
```

```
In[5]:= Table[{x[[i]], f[x[[i]]]}, {i, 1, 4}]
```

```
Out[5]= {{2, 8}, {5, 14}, {7, 18}, {12, 28}}
```

```
In[6]:= TableForm[Table[{x[[i]], f[x[[i]]]}, {i, 1, 4}]]
```

```
Out[6]/TableForm=
```

2	8
5	14
7	18
12	28

## 2.15 การคำนวณค่าเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

ให้  $z = 3 + 4i$ ,  $w = 5 - 9i$  จะได้  $z + w = 8 - 5i$ ,  $|z| = 5$ ,  $\bar{z} = 3 - 4i$ ,  $z^{-1} = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
$z:=3+4\langle\text{Esc}\rangle ii\langle\text{Esc}\rangle$ $\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[1]:= z := 3 + 4 i</code>  หมายเหตุ กด $\langle\text{Esc}\rangle ii\langle\text{Esc}\rangle$ จะได้สัญลักษณ์ $i = \sqrt{-1}$ หรือคลิกสัญลักษณ์ $i$ จากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistant
$w:=5-9\langle\text{Esc}\rangle ii\langle\text{Esc}\rangle$ $\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[2]:= w := 5 - 9 i</code>
$z+w\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[3]:= z + w</code> <code>Out[3]= 8 - 5 i</code>
$\text{Abs}[z]\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[4]:= Abs[z]</code> <code>Out[4]= 5</code>
$\text{Conjugate}[z]\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[5]:= Conjugate[z]</code> <code>Out[5]= 3 - 4 i</code>
$z^{-1}\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[6]:= z ^ -1</code> <code>Out[6]= <math>\frac{3}{25} - \frac{4 i}{25}</math></code>
$z/w\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[7]:= z / w</code> <code>Out[7]= <math>-\frac{21}{106} + \frac{47 i}{106}</math></code>
$\text{Arg}[1+1\langle\text{Esc}\rangle ii\langle\text{Esc}\rangle]$ $z/w\langle\text{Shift}\rangle+\downarrow$	<code>In[8]:= Arg[1 + 1 i]</code> <code>Out[8]= <math>\frac{\pi}{4}</math></code>

2.16 การหารากของสมการ  $f(x) = 0$

การหารากของสมการ  $x^2 - 2 = 0$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
FindRoot[x^2-2==0,{x,1}] <Shift>+↵	In[1]:= FindRoot[x^2 - 2 = 0, {x, 1}] Out[1]= {x → 1.41421}
FindRoot[x^2-2==0,{x,-1}] <Shift>+↵	In[2]:= FindRoot[x^2 - 2 = 0, {x, -1}] Out[2]= {x → -1.41421}
Solve[x^2-2==0,x] <Shift>+↵	In[3]:= Solve[x^2 - 2 = 0, x] Out[3]= {{x → -√2}, {x → √2}}
Solve[x^2-2.0==0,x] <Shift>+↵	In[4]:= Solve[x^2 - 2.0 = 0, x] Out[4]= {{x → -1.41421}, {x → 1.41421}}

หมายเหตุ FindRoot[f[x] == 0, {x, x<sub>0</sub>}] เป็นคำสั่งที่ใช้หารากของสมการ  $f(x) = 0$

โดยวิธีของนิวตัน กำหนดให้จุดเริ่มต้นของการประมาณค่าเป็น  $x_0$

Solve[f[x] == 0, x] เป็นคำสั่งที่ใช้หารากของสมการ  $f(x) = 0$

In[5]:= Solve[x^4 - 16 = 0, x]

Out[5]= {{x → -2}, {x → -2 i}, {x → 2 i}, {x → 2}}

In[6]:= Solve[x^4 - 16 = 0, x, Reals]

Out[6]= {{x → -2}, {x → 2}}

In[7]:= Solve[x^3 - 4\*x^2 + 8 = 0, x]

Out[7]= {{x → 2}, {x → 1 - √5}, {x → 1 + √5}}

In[8]:= Solve[x^3 - 4\*x^2 + 8.0 = 0, x]

Out[8]= {{x → -1.23607}, {x → 2.}, {x → 3.23607}}

In[9]:= NSolve[Cos[x] = x, x, Reals]

Out[9]= {{x → 0.739085}}

## 2.17 การหาผลเฉลยของระบบสมการ

FindRoot[{equation1,equation2, ... , {x, x<sub>0</sub>}, {y, y<sub>0</sub>}, ....] เป็นคำสั่งที่ใช้หาผลเฉลยของระบบสมการโดยวิธีของนิวตัน กำหนดให้มีจุดเริ่มต้นของการประมาณค่าของ x, y เป็น x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>

ตัวอย่าง การหาผลเฉลยของระบบสมการ  $2x + 3y = 8$   
 $x + y = 3$

และ การหาจุดตัดของวงกลม  $x^2 + y^2 = 25$  และเส้นตรง  $3x + 4y = 0$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
FindRoot[{2*x+3*y==8, x+y==3,{x,0},{y,0}} <Shift>+↵	In[1]:= FindRoot[{2*x+3*y=8, x+y=3}, {x, 0}, {y, 0}]  Out[1]= {x → 1., y → 2.}
FindRoot[{x^2+y^2-25==0, 3*x+4*y==0,{x,0},{y,0}} <Shift>+↵	In[2]:= FindRoot[{x^2+y^2-25=0, 3*x+4*y=0}, {x, 1}, {y, 1}]  Out[2]= {x → 4., y → -3.}
NSolve[{x^2+y^2==4,x^2- y^2==2},{x,y}]<Shift>+↵	In[3]:= NSolve[{x^2+y^2=4, x^2-y^2=2}, {x, y}]  Out[3]= {{x → 1.73205, y → -1.}, {x → -1.73205, y → 1.}, {x → -1.73205, y → -1.}, {x → 1.73205, y → 1.}}
Solve[{x^2+y^2==4,x^2- y^2==2},{x,y}]<Shift>+↵	In[4]:= Solve[{x^2+y^2=4, x^2-y^2=2}, {x, y}]  Out[4]= {{x → -√3, y → -1}, {x → -√3, y → 1}, {x → √3, y → -1}, {x → √3, y → 1}}

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```
In[5]:= Solve[{x^2+y^2=4, x^2-y^2=2, x>0}, {x, y}]
```

```
Out[5]= {{x → √3, y → -1}, {x → √3, y → 1}}
```

```
In[6]:= Solve[x^2+y^2=2 && x-y=0, {x, y}]
```

```
Out[6]= {{x → -1, y → -1}, {x → 1, y → 1}}
```



2.18 การคำนวณค่า  ${}^n C_r$  และ  ${}^n P_r$

สูตร  ${}^n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$  และ  ${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

สามารถกำหนดเป็นสูตรในโปรแกรม Mathematica ได้ดังนี้

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<code>nCr[n_,r_]:=n!/(r!(n-r)!)</code> <Shift>+↵	<code>In[1]:= nCr[n_, r_] := n! / (r! * (n - r) !)</code>
<code>nCr[5,1]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<code>In[2]:= nCr[5, 1]</code> <code>Out[2]= 5</code>
<code>nCr[5,2]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<code>In[3]:= nCr[5, 2]</code> <code>Out[3]= 10</code>
<code>nPr[n_,r_]:=n!/(n-r)!)</code> <Shift>+↵	<code>In[4]:= nPr[n_, r_] := n! / (n - r) !</code>
<code>nPr[5,1]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<code>In[5]:= nPr[5, 1]</code> <code>Out[5]= 5</code>
<code>nPr[5,2]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<code>In[6]:= nPr[5, 2]</code> <code>Out[6]= 20</code>
<code>Binomial[5,2]&lt;Shift&gt;+↵</code>	<code>In[7]:= Binomial[5, 2]</code> <code>Out[7]= 10</code>

หมายเหตุ  $Binomial[n, r] = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

## 2.19 การคำนวณที่ให้ผลลัพธ์เป็นสูตร

โปรแกรม Mathematica สามารถคำนวณและแสดงผลออกมาในรูปแบบของสูตรได้เช่น

การกระจายพหุนาม  $(x - 1)(x + 2)$  กระจายได้เป็น  $x^2 + x - 2$

การแยกตัวประกอบ  $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$  แยกตัวประกอบได้เป็น  $(x - 2)(x + 1)(x^2 + x + 1)$

การแสดงผลเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ  $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{12} + \frac{11}{15}}$  จัดรูปเป็น  $\frac{15}{23}$

การหาอนุพันธ์  $\frac{d}{dx} x^2$  และแสดงผลการหาอนุพันธ์เป็นสูตรคือ  $2x$

การหาอินทิกรัล  $\int (4x + 7) dx$  และแสดงผลการคำนวณเป็นสูตรคือ  $2x^2 + 7x$

การหา  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + kx)$  และแสดงผลการคำนวณเป็นสูตรคือ  $k + 1$

การกระจายสูตรพหุนาม  $(x - 1)(x + 2)$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Expand[(x-1)*(x+2)] <Shift>+↵	In[1]:= Expand [(x - 1) * (x + 2)] Out[1]:= -2 + x + x <sup>2</sup>

หมายเหตุ คำสั่ง Expand[...] ใช้กระจายสูตรพหุนาม

การแยกตัวประกอบ  $x^4 - 2x^2 - 3x - 2$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Factor[x^4-2*x^2-3*x-2] <Shift>+↵	In[2]:= Factor [x ^ 4 - 2 * x ^ 2 - 3 * x - 2] Out[2]:= (-2 + x) (1 + x) (1 + x + x <sup>2</sup> )

หมายเหตุ คำสั่ง Factor[...] ใช้แยกตัวประกอบพหุนาม

การแสดงผลเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ  $\frac{3}{\frac{5}{12} + \frac{11}{15}}$  จัดรูปเป็น  $\frac{15}{23}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Simplify[(3/4)/((5/12)+(11/15))]<Shift>+↵	In[3]:= Simplify[(3/4)/((5/12)+(11/15))] Out[3]= $\frac{15}{23}$

หมายเหตุ คำสั่ง Simplify[...] ใช้ในการจัดรูปทางพีชคณิต เช่นทำเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ

การหาอนุพันธ์  $\frac{d}{dx} x^2$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
D[x^2]<Shift>+↵	In[4]:= D[x^2] Out[4]= $x^2$
D[x^2,{x,2}]<Shift>+↵	In[5]:= D[x^2, {x, 2}] Out[5]= 2

หมายเหตุ คำสั่ง D[f(x)] ใช้หาอนุพันธ์อันดับที่ 1 ของ f เทียบกับ x

คำสั่ง D[f(x), {x, k}] ใช้หาอนุพันธ์อันดับที่ k ของ f เทียบกับ x

การหาอินทิกรัลเป็นสูตร  $\int (4x + 7) dx$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Integrate[4*x+7,x]<Shift>+↵	In[6]:= Integrate[4*x+7, x] Out[6]= $7x + 2x^2$

หมายเหตุ คำสั่ง Integrate[f(x), x] ใช้หาสูตรอินทิเกรตของ f(x)

การหาค่าลิมิต  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + kx)$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Limit[x^2+k*x,x->1] <Shift>+↵	<pre>In[7]:= Limit[x^2+k*x, x-&gt;1]</pre> <pre>Out[7]= 1+k</pre> <p>เมื่อกด -&gt; บนจอภาพจะเป็นลูกศร →</p>

ตัวอย่างการคำนวณโดยใช้สัญลักษณ์การคำนวณจากแถบเครื่องมือ Basic Math Assistants

$$\text{In[8]:= } \int (48x + 7) dx$$

$$\text{Out[8]= } 7x + 24x^2$$

$$\text{In[9]:= } \partial_x (x^2 + 3x + 4)$$

$$\text{Out[9]= } 3 + 2x$$

$$\text{In[10]:= } \partial_{x,y} (x^2 + y + 4x^2y^3 + x^4y^3)$$

$$\text{Out[10]= } 24xy^2 + 12x^3y^2$$

2.20 การหาสูตรเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน

คำสั่ง Series[f(x), {x, a, k}] ใช้หาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรีไม่เกิน k ของ f(x) รอบจุด x = a

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Series[Sin[x],{x,0,5}] <Shift>+↵	In[1]:= Series[Sin[x], {x, 0, 5}]  Out[1]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6$
Series[Sin[x],{x,0,8}] <Shift>+↵	In[2]:= Series[Sin[x], {x, 0, 8}]  Out[2]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + O[x]^9$
Series[Log[x],{x,1,3}] <Shift>+↵	In[3]:= Series[Log[x], {x, 1, 3}]  Out[3]= $(x - 1) - \frac{1}{2} (x - 1)^2 + \frac{1}{3} (x - 1)^3 + O[x - 1]^4$
Series[Log[x+1],{x,0,3}] <Shift>+↵	In[4]:= Series[Log[x + 1], {x, 0, 3}]  Out[4]= $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O[x]^4$
Series[Exp[x],{x,0,4}] <Shift>+↵	In[5]:= Series[Exp[x], {x, 0, 4}]  Out[5]= $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O[x]^5$
Series[x^3+3*x^2+4*x-5,{x,2,4}]<Shift>+↵	In[6]:= Series[x^3 + 3*x^2 + 4*x - 5, {x, 2, 4}]  Out[6]= $23 + 28 (x - 2) + 9 (x - 2)^2 + (x - 2)^3 + O[x - 2]^5$

## 2.21 การหาผลการแปลงลาปลาซและผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ตัวอย่างเช่น  $L\{\sin(x)\} = \frac{1}{s^2 + 1}$  และ  $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + 1}\right\} = \sin(x)$

พิมพ์	LaplaceTransform[Sin[x],x,s]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[1]:= LaplaceTransform[Sin[x], x, s] Out[1]= $\frac{1}{1 + s^2}$
พิมพ์	LaplaceTransform[Cos[2*x],x,s]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[2]:= LaplaceTransform[Cos[2 * x], x, s] Out[2]= $\frac{s}{4 + s^2}$
พิมพ์	LaplaceTransform[Exp[4*x],x,s]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[3]:= LaplaceTransform[Exp[4 * x], x, s] Out[3]= $\frac{1}{-4 + s}$
พิมพ์	InverseLaplaceTransform[1/(s^2+1),s,x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[4]:= InverseLaplaceTransform[1 / (s ^ 2 + 1), s, x] Out[4]= Sin[x]
พิมพ์	InverseLaplaceTransform[1/(s^2+1),s,x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[5]:= InverseLaplaceTransform[s / (4 + s ^ 2), s, x] Out[5]= Cos[2 x]
พิมพ์	InverseLaplaceTransform[1/(s-4),s,x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	In[6]:= InverseLaplaceTransform[1 / (s - 4), s, x] Out[6]= $e^{4x}$

หมายเหตุ คำสั่ง LaplaceTransform[f[x]], x, s] ให้สูตร F(s) ที่เป็นผลการแปลงลาปลาซของ f(x)

คำสั่ง InverseLaplaceTransform[F[s], s, x] ให้สูตร f(x) ที่เป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ F(s)

### 2.22 การคำนวณเกี่ยวกับเศษส่วนของพหุนาม

Apart[f[x]] ใช้กระจาย f(x) ออกเป็นผลบวกของเศษส่วนย่อย

Together[f[x]] ใช้จัดรูปผลบวกของพหุนามและเศษส่วนของพหุนามให้เป็นพจน์เดียว  $\frac{p(x)}{q(x)}$

ตัวอย่าง  $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
Apart[1/(x*(x+1))]<Shift>+ ↵	In[1]:= Apart[1 / (x * (x + 1))]  Out[1]= $\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}$

ตัวอย่าง  $\frac{x^4 - x^3 + 2x^2 - 4x + 12}{(1+x)(1+x^2)} = -2 + x + \frac{10}{1+x} + \frac{4-7x}{1+x^2}$

```
In[2]:= Apart[(x^4 - x^3 + 2*x^2 - 4*x + 12) / (x^3 + x^2 + x + 1)]
```

```
Out[2]= -2 + x +  $\frac{10}{1 + x} + \frac{4 - 7x}{1 + x^2}$ 
```

```
In[3]:= Together[-2 + x +  $\frac{10}{1 + x} + \frac{4 - 7x}{1 + x^2}$ ]
```

```
Out[3]=  $\frac{12 - 4x + 2x^2 - x^3 + x^4}{(1 + x)(1 + x^2)}$ 
```

```
In[4]:= Numerator[ $\frac{12 - 4x + 2x^2 - x^3 + x^4}{(1 + x)(1 + x^2)}$ ]
```

```
Out[4]= 12 - 4x + 2x^2 - x^3 + x^4
```

```
In[5]:= Denominator[ $\frac{12 - 4x + 2x^2 - x^3 + x^4}{(1 + x)(1 + x^2)}$ ]
```

```
Out[5]= (1 + x)(1 + x^2)
```

### 2.23 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์และระบบสมการเชิงอนุพันธ์

Dsolve[สมการเชิงอนุพันธ์, y[x] ตัวแปรตาม, x ตัวแปรอิสระ] ใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

Dsolve[{สมการเชิงอนุพันธ์, เงื่อนไข 1, เงื่อนไข 1, ... }, y[x], x] ใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y'[x] \text{ คือ } \frac{dy}{dx}, y''[x] \text{ คือ } \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$$

การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์  $y' = x^2$

พิมพ์	DSolve[y'[x]==x^2,y[x],x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	<pre>In[1]:= DSolve[y'[x] = x^2, y[x], x] Out[1]= {{y[x] -&gt; x^3/3 + C[1]}}</pre>

$$\text{ผลเฉลยคือ } y = \frac{x^3}{3} + c_1$$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์  $y'' + y = 0$

พิมพ์	DSolve[y''[x]+y[x]==0,y[x],x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	<pre>In[2]:= DSolve[y''[x] + y[x] = 0, y[x], x] Out[2]= {{y[x] -&gt; C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}</pre>

$$\text{ผลเฉลยคือ } y = c_1 \cos(x) - c_2 \sin(x)$$

การหาผลเฉลยสมการของเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธ์  $y'' + y = x^2$

พิมพ์	DSolve[y''[x]+yx]==x^2,y[x],x]<Shift>+↵
ผลบนจอภาพ	<pre>In[3]:= DSolve[y''[x] + y[x] = x^2, y[x], x] Out[3]= {{y[x] -&gt; -2 + x^2 + C[1] Cos[x] + C[2] Sin[x]}}</pre>

$$\text{ผลเฉลยคือ } y = -2 + x^2 + c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$



การหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์  $y'' + y = x^2$  และ  $y'(0) = -1, y(0) = 2$

พินท์
<code>DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2,y'[0]==-1,y[0]==2},y[x],x]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[4]:= DSolve[{y''[x] + y[x] = x^2, y'[0] = -1,                 y[0] = 2}, y[x], x] Out[4]= {{y[x] -&gt; -2 + x^2 + 4 Cos[x] - Sin[x]}}</pre>

ผลเฉลยคือ  $y = -2 + x^2 + 4 \cos(x) - \sin(x)$

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์  $x' = x - y + 2$   
 $y' = -x + y - 5$

พินท์
<code>DSolve[{x'[t]==x[t]-y[t]+2,y'[t]==-x[t]+y[t]-5},{x[t],y[t]},t]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[5]:= DSolve[{x'[t] = x[t] - y[t] + 2,                 y'[t] = -x[t] + y[t] - 5}, {x[t], y[t]}, t] Out[5]= {{x[t] -&gt; 1/2 (1 + e^{2t}) (-7/4 e^{-2t} - 3t/2) +           1/2 (1 - e^{2t}) (7/4 e^{-2t} - 3t/2) +           1/2 (1 + e^{2t}) C[1] + 1/2 (1 - e^{2t}) C[2],           y[t] -&gt; 1/2 (1 - e^{2t}) (-7/4 e^{-2t} - 3t/2) +           1/2 (1 + e^{2t}) (7/4 e^{-2t} - 3t/2) +           1/2 (1 - e^{2t}) C[1] + 1/2 (1 + e^{2t}) C[2]}}</pre>

คำสั่ง `Dsolve` [{สมการเชิงอนุพันธ์ 1, สมการเชิงอนุพันธ์ 2, .... }, `x[t]`, `y[t]`, `t`] ใช้หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่มี `x`, `y` เป็นตัวแปรตาม และ `t` เป็นตัวแปรอิสระ

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

$$\begin{aligned}x' &= x - y + 2 \\y' &= -x + y - 5 \\x(0) &= 1, y(0) = -1\end{aligned}$$

<b>พิมพ์</b>
<code>DSolve[{x'[t]==x[t]-y[t]+2,y'[t]==-x[t]+y[t]-5,x[0]==1,y[0]==-1},{x[t],y[t]},t]</code> <Shift>+↵
<b>ผลบนจอภาพ</b>
<pre>In[6]:= DSolve[{x'[t] = x[t] - y[t] + 2,                y'[t] = -x[t] + y[t] - 5, x[0] = 1, y[0] = -1},                {x[t], y[t]}, t]  Out[6]= {{x[t] -&gt; 1/4 (-7 + 11 e^{2t} - 6 t),           y[t] -&gt; 1/4 (7 - 11 e^{2t} - 6 t)}}</pre>

2.24 ฟังก์ชันเกี่ยวกับจำนวนเต็มเช่น ห.ร.ม. ค.ร.น. การแยกตัวประกอบจำนวนเต็ม  
การหาตัวประกอบของจำนวนเต็ม

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
FactorInteger[100]<Shift> +↵	In[1]:= FactorInteger[100] Out[1]= {{2, 2}, {5, 2}}
FactorInteger[10!]<Shift>+ ↵	In[2]:= FactorInteger[10 !] Out[2]= {{2, 8}, {3, 4}, {5, 2}, {7, 1}}

หมายเหตุ คำสั่ง FactorInteger[x] จำนวนตัวประกอบที่เป็นจำนวนเฉพาะของจำนวนเต็ม x ตัวอย่างจากผลการคำนวณเช่น  $100 = 2^2 5^2$  และ  $10! = 2^8 3^4 5^2 7^1$

การหา ห.ร.ม.

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
GCD[40,32]<Shift>+↵	In[3]:= GCD[40, 32] Out[3]= 8
GCD[40,32,64,96]<Shift>+ ↵	In[4]:= GCD[40, 32, 64, 96] Out[4]= 8

หมายเหตุ คำสั่ง GCD[a, b, c, ...] ใช้ในการหา ห.ร.ม. ของ a, b, c, ...

การหา ค.ร.น.

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
LCM[40,32]<Shift>+↵	In[5]:= LCM[40, 32] Out[5]= 160
LCM[40,32,64,96]<Shift>+ ↵	In[6]:= LCM[40, 32, 64, 96] Out[6]= 960

หมายเหตุ คำสั่ง LCM[a, b, c, ...] ใช้ในการหา ค.ร.น. ของ a, b, c, ...

## 2.25 สามารถหาผลการแปลง Z transform และการแปลงผกผัน Inverse Z transform ได้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^n \text{ จะได้ } Z\text{Transform}[(u(n))] = f(z) \text{ และ } \text{InverseZTransform}[f(z)] = u(n)$$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
ZTransform[1,n,z] <Shift>+↵	In[1]:= ZTransform[1, n, z] Out[1]= $\frac{z}{-1+z}$
InverseZTransform[z/(z-1),z,n]<Shift>+↵	In[2]:= InverseZTransform[z / (z - 1), z, n] Out[2]= 1

ตัวอย่างเพิ่มเติม

$$\text{In[3]}:= \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\text{Out[3]}= \frac{1}{1-z}$$

$$\text{In[4]}:= Z\text{Transform}[n, n, z]$$

$$\text{Out[4]}= \frac{z}{(-1+z)^2}$$

$$\text{In[5]}:= \sum_{n=0}^{\infty} (n * z^n)$$

$$\text{Out[5]}= \frac{z}{(-1+z)^2}$$

$$\text{In[6]}:= \text{InverseZTransform}\left[\frac{z}{(z-1)^2}, z, n\right]$$

$$\text{Out[6]}= n$$

## บทที่ 3

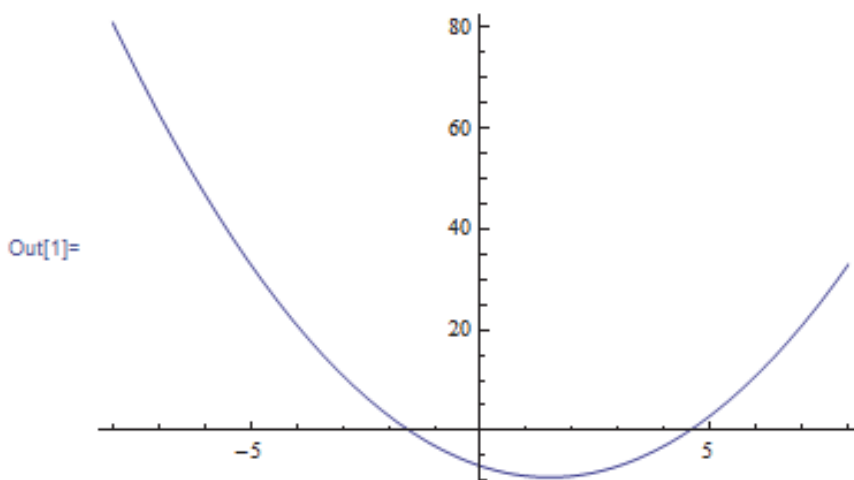
# การเขียนกราฟด้วยโปรแกรม Mathematica

โปรแกรม Mathematica มีความสามารถในการเขียนกราฟที่ใช้งานในคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา และกราฟสำหรับเนื้อหาคณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษาได้หลายแบบ เช่น กราฟในระบบพิกัดฉาก กราฟ 2 มิติ และ 3 มิติ กราฟสมการพาราเมตริก กราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว ในบทนี้จะศึกษาการใช้คำสั่งเพื่อเขียนกราฟรูปแบบต่าง ๆ เพื่อให้ได้รูปของกราฟที่มีทั้งความถูกต้อง เหมาะสม และ ความสวยงาม

ตัวอย่างของกราฟบางรูปแบบที่โปรแกรม Mathematica ทำได้เช่น

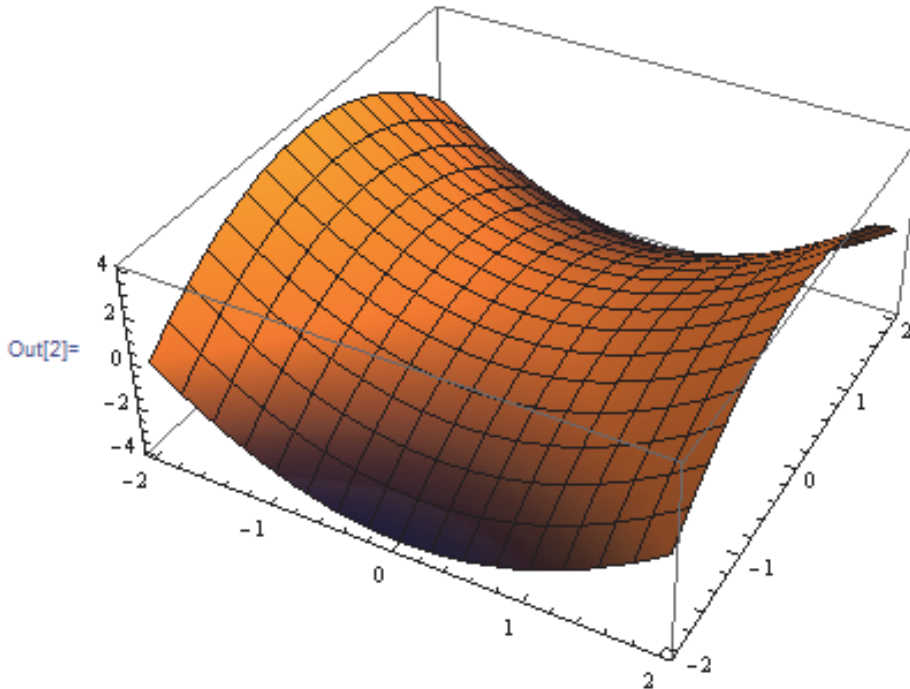
กราฟของ  $y = x^2 - 3x - 7$  บนช่วง  $[-8, 8]$

```
In[1]:= Plot[x^2 - 3*x - 7, {x, -8, 8}]
```



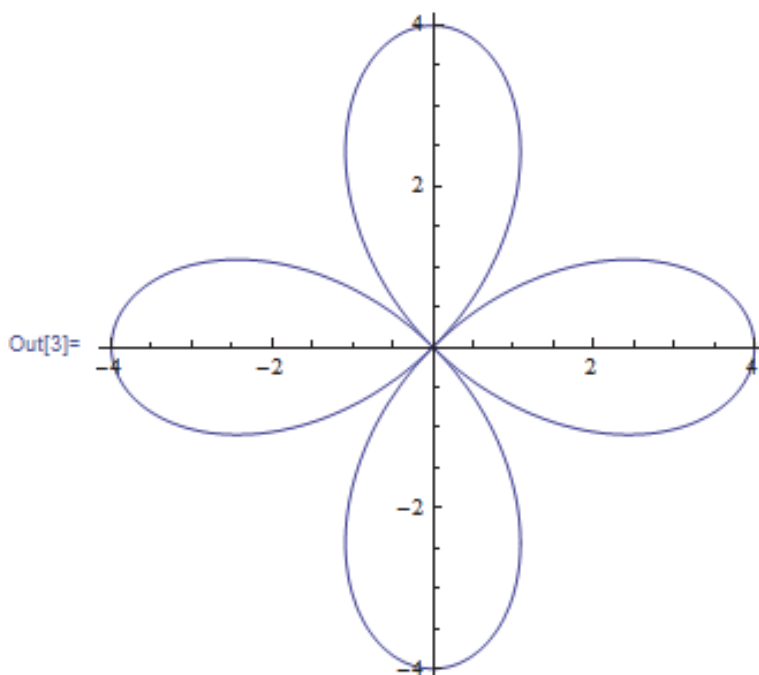
กราฟของพื้นผิวอานม้า  $z = x^2 - y^2$  ใน 3 มิติ

```
In[2]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2},
ColorFunction -> "RustTones"]
```



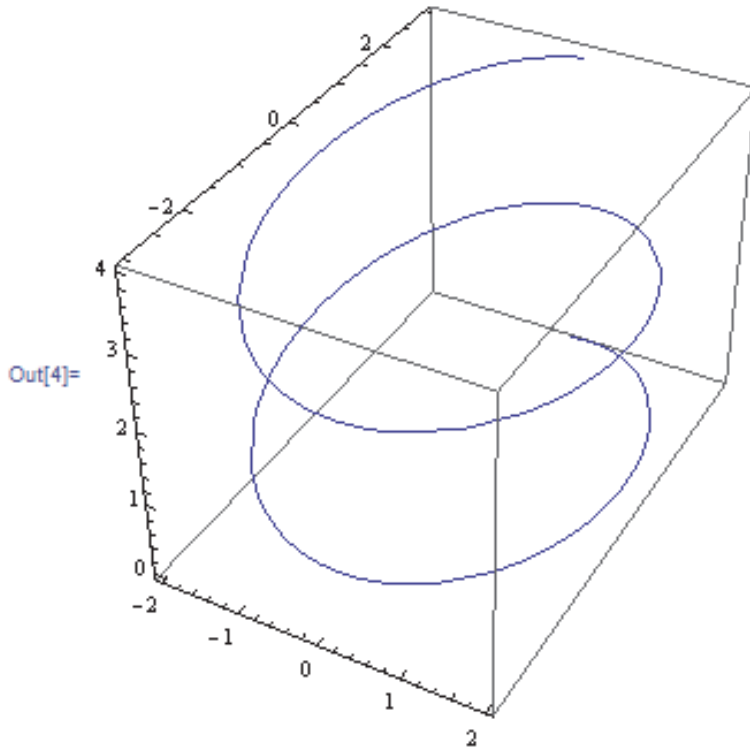
กราฟรูปกลีบกุหลาบ  $r = 4 \cos(2t)$  ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

```
In[3]:= PolarPlot[4 * Cos[2 * t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



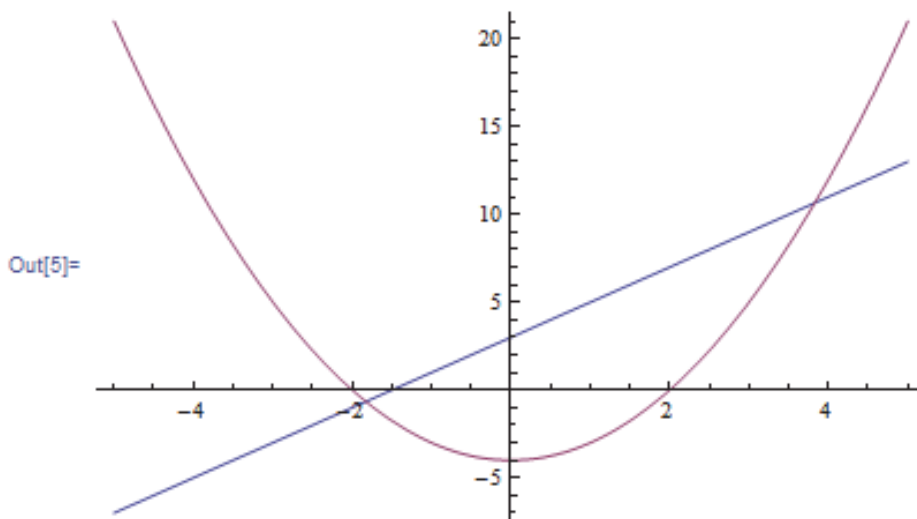
กราฟเส้นโค้งของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์  $\vec{r}(t) = (2 \sin t, 3 \cos t, \frac{t}{\pi})$  บนช่วง  $[0, 4\pi]$

```
In[4]:= ParametricPlot3D[{2*Sin[t], 3*Cos[t], t/Pi}, {t, 0, 4*Pi}]
```



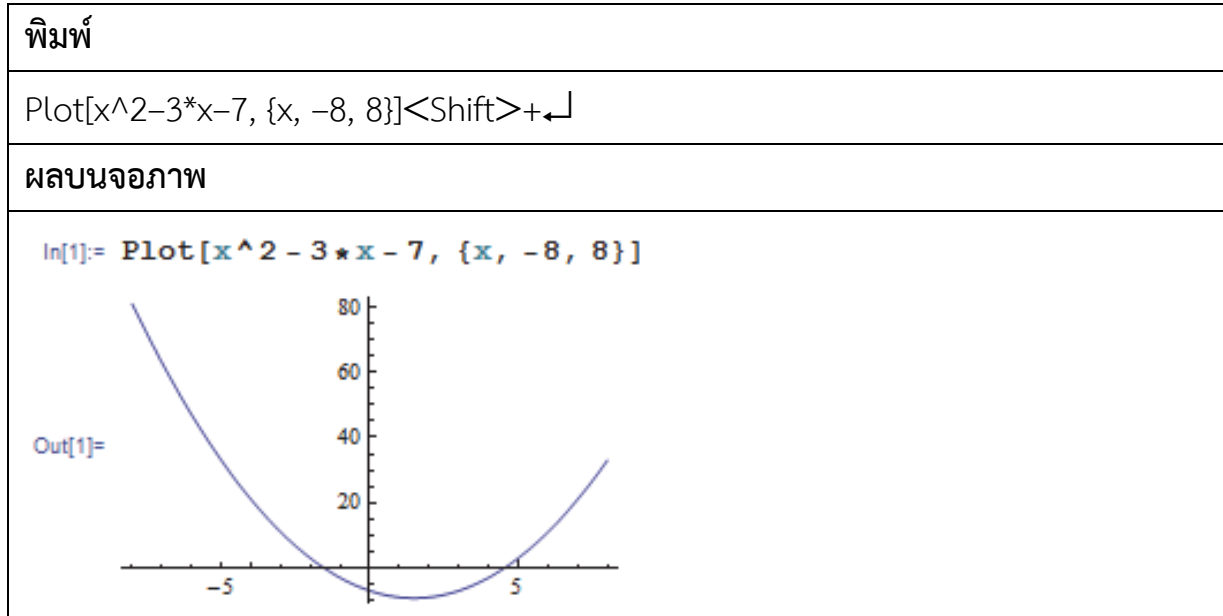
การเขียนกราฟ  $y = 2x + 3$  และ  $y = x^2 - 4$  บนช่วง  $[-5, 5]$  พร้อมกันและอยู่บนสเกลเดียวกัน

```
In[5]:= Plot[{2*x+3, x^2-4}, {x, -5, 5}]
```



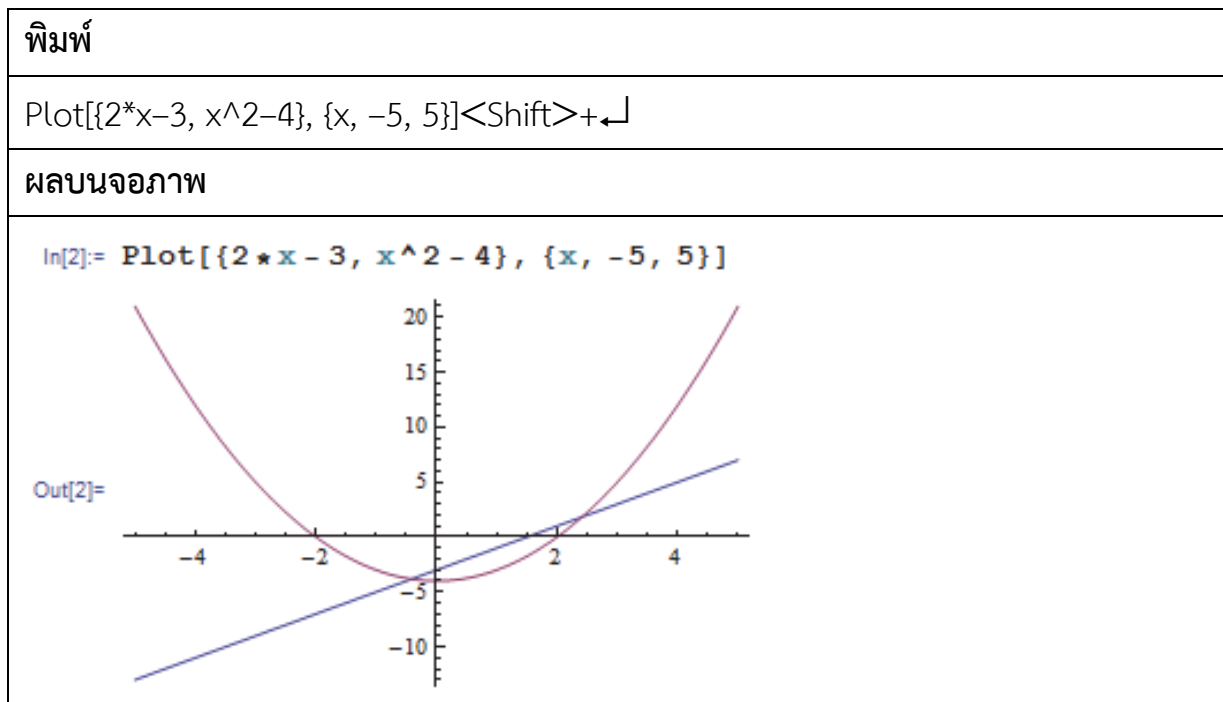
### 3.1 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

การเขียนกราฟ  $y = x^2 - 3x - 7$  บนช่วง  $[-8, 8]$



หมายเหตุ `Plot[f[x], {x, a, b}]` เป็นคำสั่งเขียนกราฟ  $y = f(x)$  บนช่วง  $[a, b]$

การเขียนกราฟ  $y = 2x - 3$  และ  $y = x^2 - 4$  บนช่วง  $[-5, 5]$



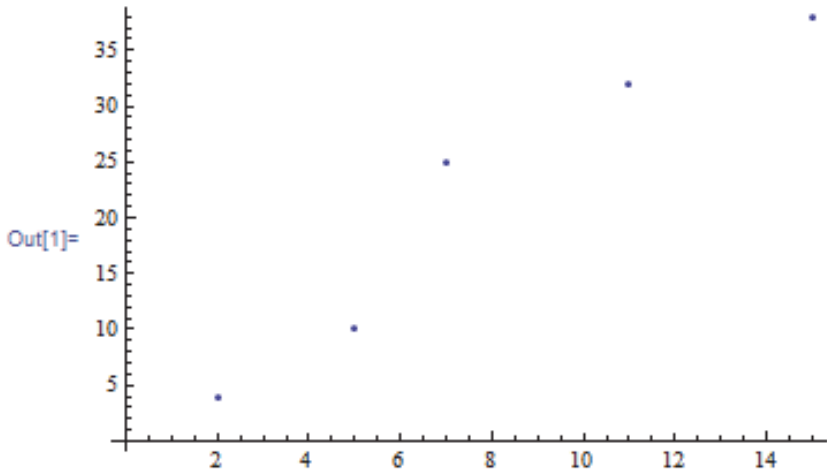
หมายเหตุ `Plot[{f[x], g[x]}, {x, a, b}]` เป็นคำสั่งเขียนกราฟ  $y = f(x)$  และ  $y = g(x)$  บนช่วง  $[a, b]$  พร้อมกัน



### 3.2 การเขียนกราฟของแผนภาพการกระจายของข้อมูล

ตัวอย่างข้อมูล

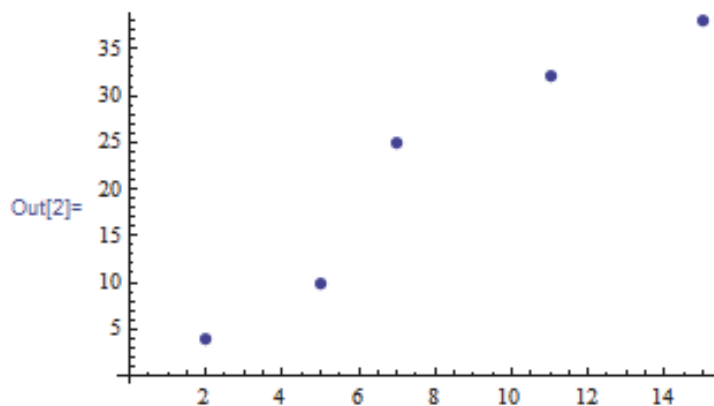
x	y
2	4
5	10
7	25
11	32
15	38

<b>พิมพ์</b>
ListPlot[{{2,4},{5,10},{7,25},{11,32},{15,38}}]<Shift>+↵
<b>ผลบนจอภาพ</b>
<pre>In[1]:= ListPlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}}]</pre>  <pre>Out[1]=</pre>

หมายเหตุ ListPlot[{{x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>}, {x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>}, ...] ใช้เขียนกราฟคู่ลำดับ (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>), i = 1, 2, 3, ... , n

ใช้คำสั่ง PlotStyle ปรับขนาดของจุดให้ใหญ่ขึ้น

```
In[2]:= ListPlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}},
  PlotStyle -> {PointSize[0.02]]]
```



ในกรณีมีข้อมูลหลายชุดเช่น

x	y	z
2	23	94
4	34	102
7	42	153
12	65	245
15	78	324

การเขียนแผนภาพการกระจายทำได้ดังนี้

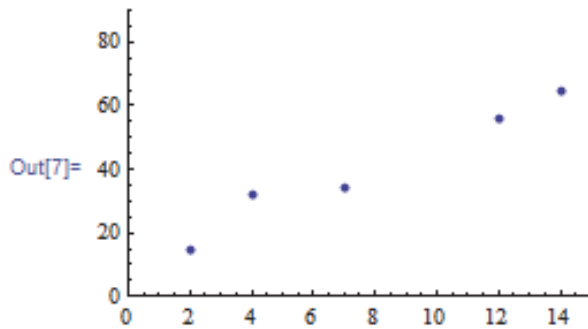
```
In[3]:= x = {2, 4, 7, 12, 14};
```

```
In[4]:= y = {15, 32, 34, 56, 65};
```

```
In[5]:= z = {574, 425, 312, 235, 124};
```

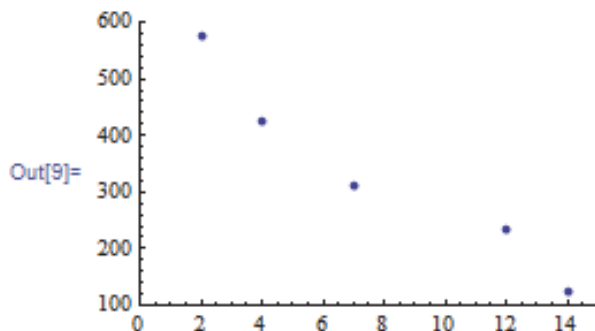
```
In[6]:= dataxy = Table[{x[[i]], y[[i]]}, {i, 5}];
```

```
In[7]:= ListPlot[dataxy, PlotStyle -> {PointSize[0.02]},  
PlotRange -> {{0, 15}, {0, 90}}]
```



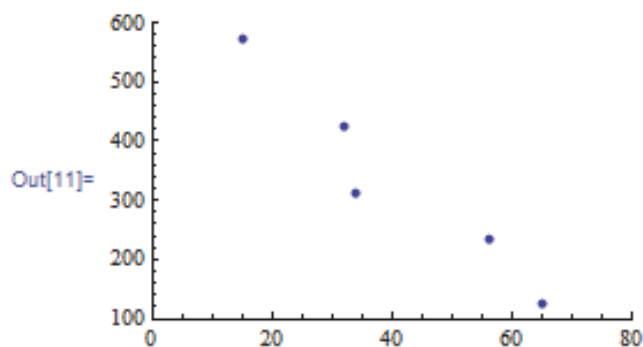
```
In[8]:= dataxz = Table[{x[[i]], z[[i]]}, {i, 5}];
```

```
In[9]:= ListPlot[dataxz, PlotStyle -> {PointSize[0.02]},  
PlotRange -> {{0, 15}, {100, 600}}]
```



```
In[10]:= datayz = Table[{y[[i]], z[[i]]}, {i, 5}];
```

```
In[11]:= ListPlot[datayz, PlotStyle -> {PointSize[0.02]},  
PlotRange -> {{0, 80}, {100, 600}}]
```



### 3.3 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริก

การเขียนกราฟของ  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  เมื่อ  $x(t) = 80t$  และ  $y(t) = -16t^2 + 80t$  บนช่วง  $[0, 5]$

พิมพ์
<code>ParametricPlot[{80*t,-16*t^2+80*t},{t,0,5}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[1]:= ParametricPlot[{80*t, -16*t^2+80*t}, {t, 0, 5}]</pre> <pre>Out[1]=</pre>

#### หมายเหตุ

`ParametricPlot[{x(t), y(t)}, {t, a, b}]` เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  บนช่วง  $[a, b]$

`ParametricPlot[{{x(t), y(t)}, {f(t), g(t)}, ...}, {t, a, b}]` เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$  และ  $\vec{r}(t) = (f(t), g(t)), ..$  บนช่วง  $[a, b]$

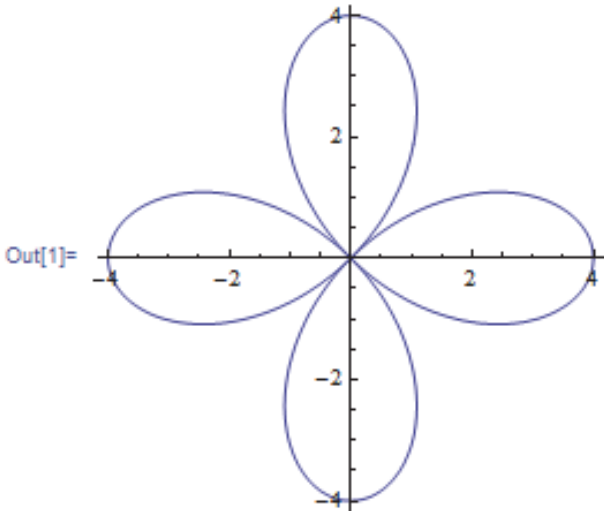
การเขียนกราฟพาราเมตริก 2 เส้น

การเขียนกราฟของ  $\vec{r}_1(t) = (\sin t, \cos t)$  และ  $\vec{r}_2(t) = (\sin t, \cos(2t))$  บนช่วง  $[0, 2\pi]$

<pre>In[2]:= ParametricPlot[{{Sin[t], Cos[t]}, {Sin[t], Cos[2*t]}}, {t, 0, 2*Pi}]</pre>
<pre>Out[2]=</pre>

### 3.4 การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟ  $r = 4 \cos(2t)$  บนช่วง  $[0, 2\pi]$

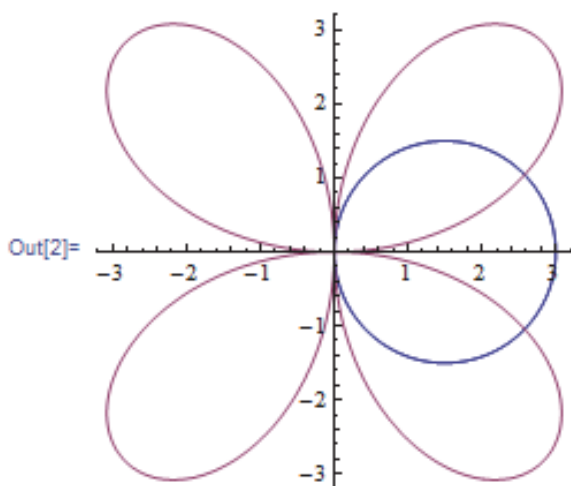
พิมพ์
<code>PolarPlot[4*Cos[2*t],{t,0,2*Pi}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[1]:= PolarPlot[4*Cos[2*t], {t, 0, 2*Pi}]</pre> 

หมายเหตุ `PolarPlot[r(t), {t, a, b}]` ใช้เขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว  $r(t)$  บนช่วง  $[a, b]$

`PolarPlot3D[{r1(t), r2(t), ... }, {t, a, b}]` ใช้เขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว  $r_1(t), r_2(t), \dots$  บนช่วง  $[a, b]$

การเขียนกราฟ  $r = 3 \cos t$  และ  $r = 4 \sin(2t)$  บนช่วง  $[0, 2\pi]$  พร้อมกัน

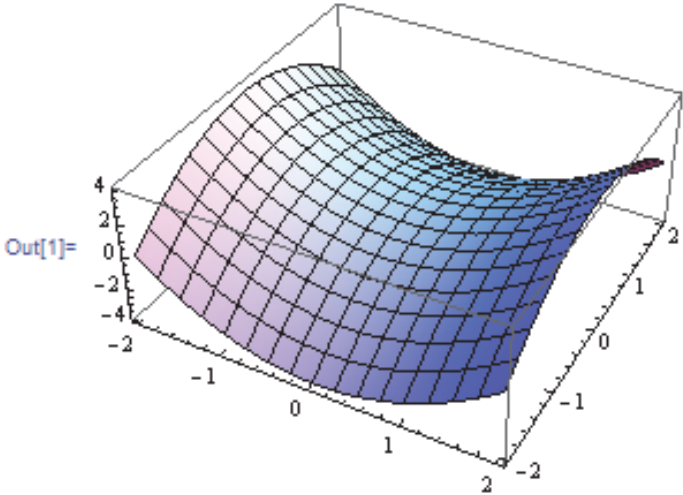
```
In[2]:= PolarPlot[{3*Cos[t], 4*Sin[2*t]}, {t, 0, 2*Pi}]
```



### 3.5 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

#### 3.5.1 กราฟพื้นผิว 3 มิติ

การเขียนกราฟพื้นผิว  $z = x^2 - y^2$  บนช่วง  $[-2, 2] \times [-2, 2]$

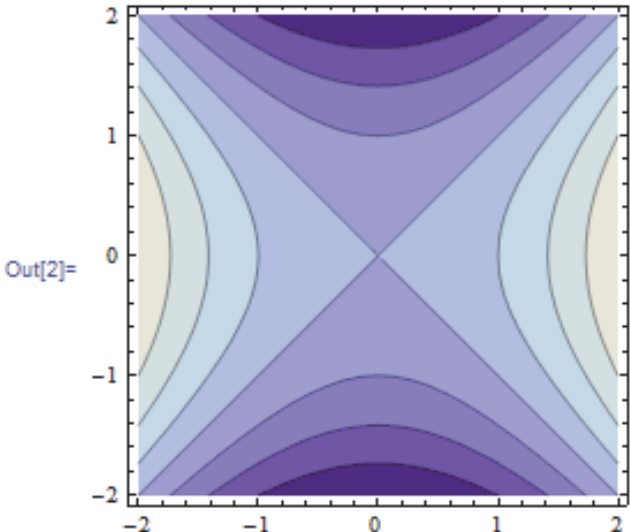
พิมพ์
<code>Plot3D[x^2-y^2,{x,-2,2},{y,-2,2}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[1]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]</pre>  <p>Out[1]=</p>

#### หมายเหตุ

`Plot3D[{f(x, y), {x, a, b}, {y, c, d}]` ใช้เขียนกราฟพื้นผิว  $z = f(x, y)$  บนช่วง  $[a, b] \times [c, d]$

3.5.2 การเขียนกราฟแบบ contour

การเขียนกราฟแบบ contour ของพื้นผิว  $z = x^2 - y^2$  บนช่วง  $[-2, 2] \times [-2, 2]$

<b>พิมพ์</b>
<code>ContourPlot[x^2-y^2,{x,-2,2},{y,-2,2]}&lt;Shift&gt;+↵</code>
<b>ผลบนจอภาพ</b>
<pre>In[2]:= ContourPlot[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]</pre> 

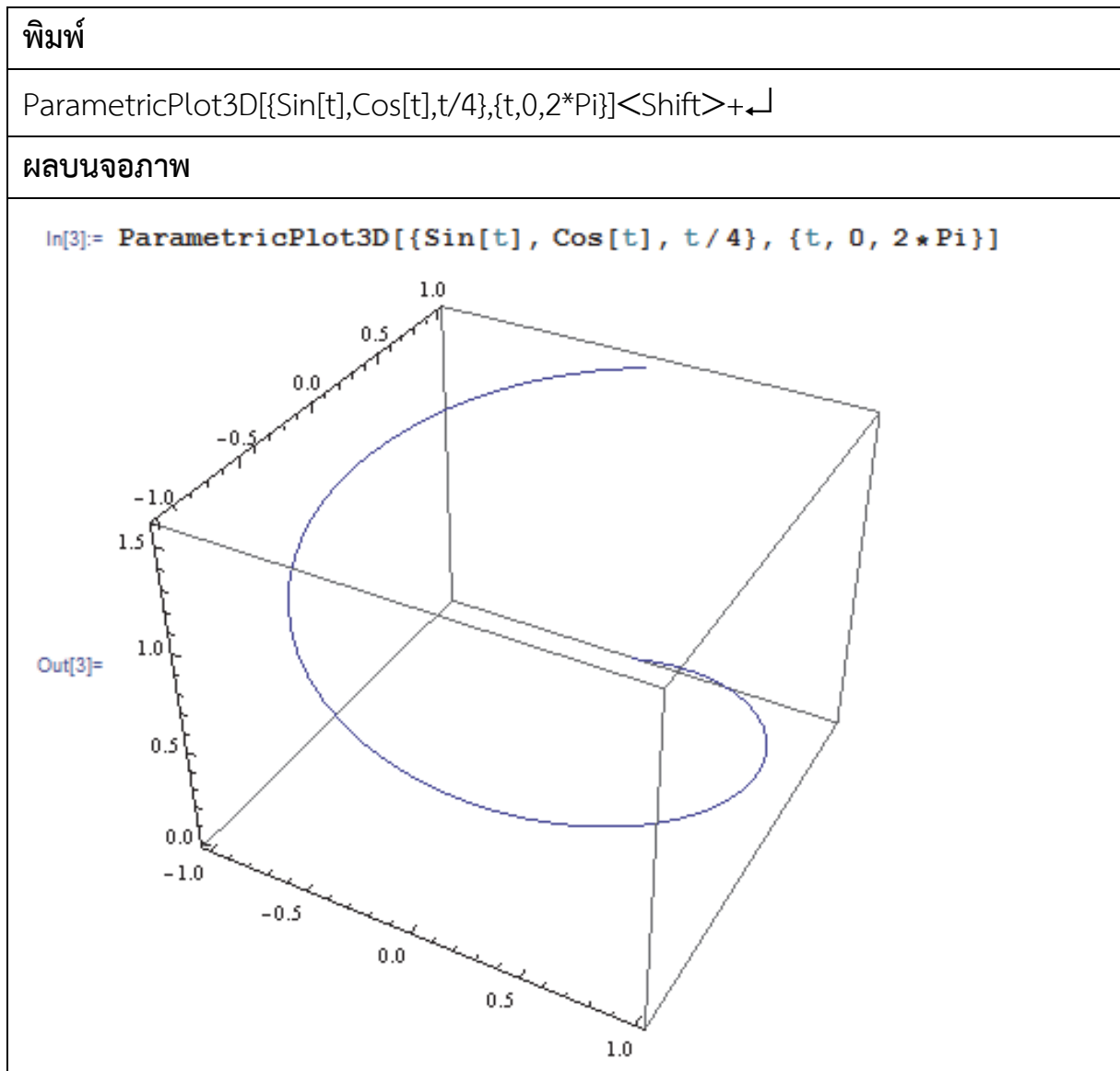
หมายเหตุ `ContourPlot[{f(x, y), {x, a, b}, {y, c, d}]`

เป็นคำสั่งเขียนกราฟแบบ contour ของพื้นผิว  $z = f(x, y)$  บนช่วง  $[a, b] \times [c, d]$

## 3.5.3 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริก 3 มิติ

การเขียนกราฟของ  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  เมื่อ  $x(t) = \sin t$ ,  $y(t) = \cos t$  และ  $z(t) = \frac{t}{4}$

บนช่วง  $[0, 2\pi]$



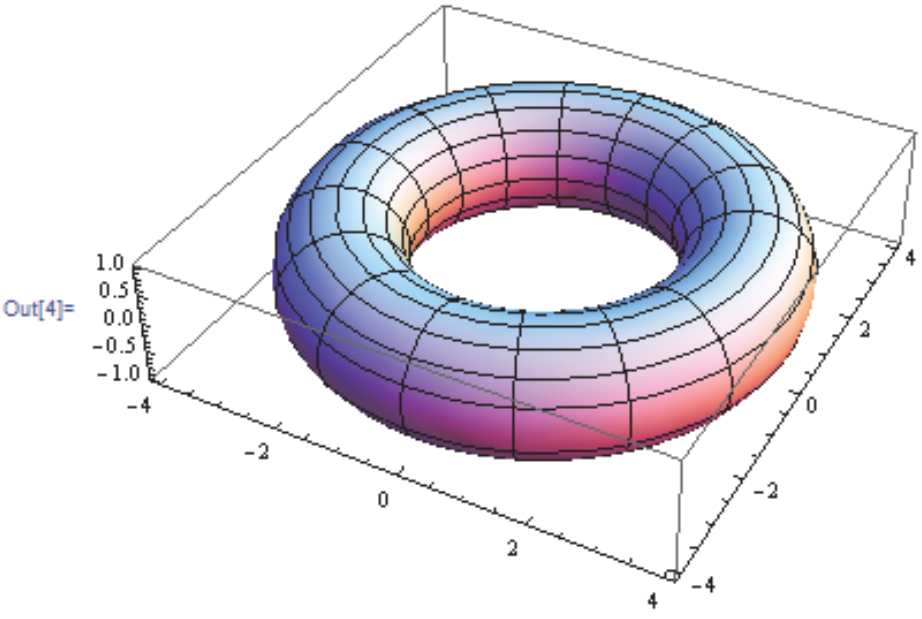
หมายเหตุ `ParametricPlot3D[{x(t), y(t), z(t)}, {t, a, b}]`

เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  บนช่วง  $[a, b]$



## 3.5.4 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริก 3 มิติ แบบ 2 ตัวแปร

การเขียนกราฟของ  $x(u, v) = \cos u (3 + \cos v)$ ,  $y(u, v) = \sin u (3 + \cos v)$ ,  $z(u, v) = \sin v$   
บนช่วง  $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

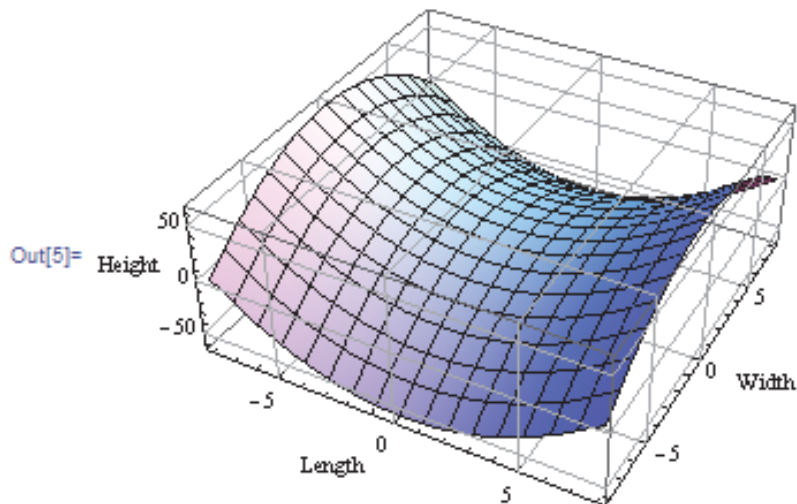
พิมพ์
<pre>ParametricPlot3D[{Cos[u]*(3+Cos[v]),Sin[u]*(3+Cos[v]),Sin[v]},{u,0,2*Pi},{v,0,2*Pi}] &lt;Shift&gt;+↵</pre>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[4]:= ParametricPlot3D[{Cos[u] * (3 + Cos[v]),       Sin[u] * (3 + Cos[v]),       Sin[v]},     {u, 0, 2 * Pi},     {v, 0, 2 * Pi}]</pre>  <p>Out[4]=</p>

หมายเหตุ `ParametricPlot3D[{x(u, v), y(u, v), z(u, v)}, {u, a, b}, {v, c, d}]`

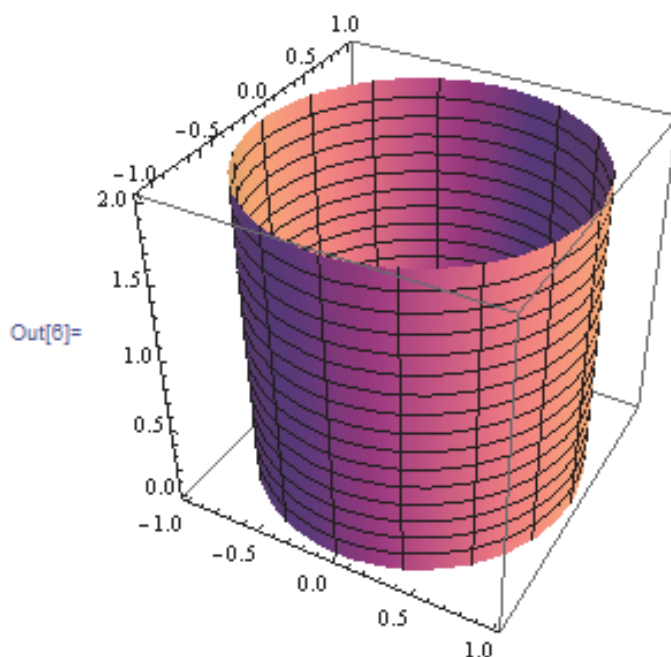
เป็นคำสั่งเขียนกราฟของพื้นผิว  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  บนช่วง  $[a, b] \times [c, d]$

การเขียนกราฟที่มีการกำหนดรูปแบบเพื่อให้ได้รูปที่เหมาะสมและสวยงาม

```
In[5]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -8, 8}, {y, -8, 8},
  PlotPoints -> 10,
  Mesh -> True,
  FaceGrids -> All,
  AxesLabel -> {"Length", "Width", "Height"}]
```



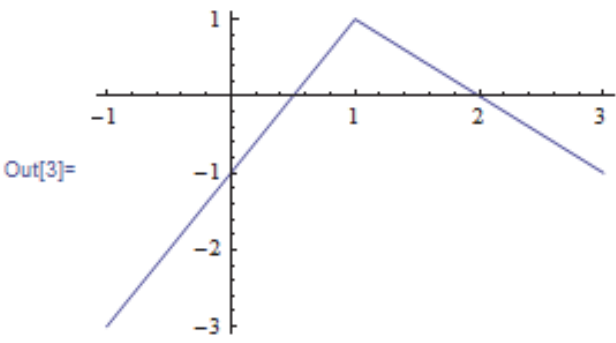
```
In[6]:= ParametricPlot3D[{Sin[u], Cos[u], v},
  {u, 0, 2*Pi},
  {v, 0, 2},
  PlotPoints -> 30]
```



### 3.6 การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่นิยามสูตรต่างกันในแต่ละช่วง

การเขียนกราฟของ  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , x < 1 \\ 2 - x & , x \geq 1 \end{cases}$  บนช่วง  $[-1, 3]$

**ขั้นที่ 1** กำหนดสูตร  $f(x)$  แบบที่ 1

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<pre>f[x_]:=2*x-1/;-1&lt;=x&lt;1&lt;Enter&gt; f[x_]:=2-x/;1&lt;=x&lt;=3&lt;Shift&gt;+&lt;Enter&gt;</pre>	<pre>In[1]:= f[x_] := 2 * x - 1 /; -1 ≤ x &lt; 1 f[x_] := 2 - x /; 1 ≤ x ≤ 3</pre>
<pre>Plot[f[x],{x,-1,3}]&lt;Shift&gt;+&lt;Enter&gt;</pre>	<pre>In[3]:= Plot[f[x], {x, -1, 3}]</pre> 

**หมายเหตุ** /; เป็นการกำหนดโดเมนของสูตร  $f(x)$

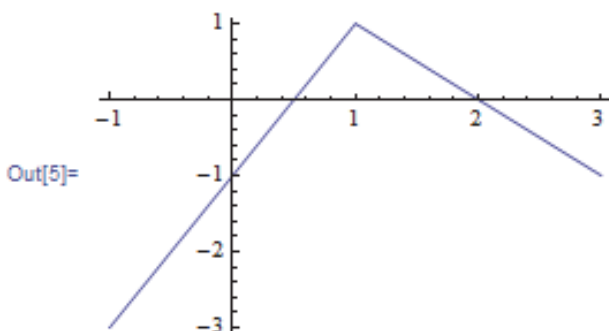
พิมพ์  $>=$  โปรแกรม Mathematica จะจัดรูปเป็น  $\geq$

พิมพ์  $<=$  โปรแกรม Mathematica จะจัดรูปเป็น  $\leq$

**แบบที่ 2**

```
In[4]:= f[x_] := Piecewise[{{2 * x - 1, -1 ≤ x < 1}, {2 - x, 1 ≤ x ≤ 3}}]
```

```
In[5]:= Plot[f[x], {x, -1, 3}]
```

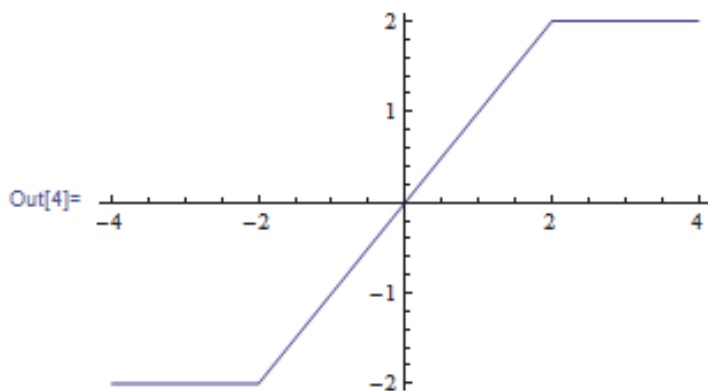


**หมายเหตุ** Piecewise[{สูตร, เงื่อนไข}, {สูตร, เงื่อนไข}, {สูตร, เงื่อนไข}, ...] ใช้กำหนดฟังก์ชันที่นิยามเป็นสูตรต่างกันในแต่ละช่วง

การเขียนกราฟของ  $f(x) = \begin{cases} -2 & , \quad x < -2 \\ x & , \quad -2 \leq x \leq 2 \text{ บนช่วง } [-4, 4] \\ 2 & , \quad 2 < x \end{cases}$

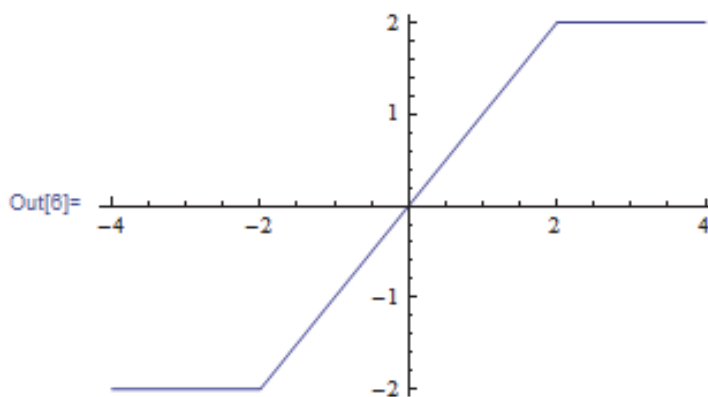
```
In[1]:= f[x_] := -2 /; -4 ≤ x < -2
        f[x_] := x /; -2 ≤ x ≤ 2
        f[x_] := 2 /; 2 < x ≤ 4
```

```
In[4]:= Plot[f[x], {x, -4, 4}]
```



```
In[5]:= f[x_] :=
        Piecewise[{{-2, -4 ≤ x < -2}, {x, -2 ≤ x ≤ 2},
        {2, 2 < x ≤ 4}}]
```

```
In[6]:= Plot[f[x], {x, -4, 4}]
```



3.7 คำสั่งที่ใช้ในการปรับปรุงรูปแบบของกราฟ

ลักษณะ	หน้าที่	ค่า Default
PlotRange	กำหนดขอบเขตของพิสัยในการเขียนกราฟ	Automatic
AspectRatio	กำหนดสัดส่วน ความสูงต่อความกว้างของกราฟ	Automatic
Frame	กำหนดให้มีกรอบล้อมรอบกราฟ	False
FrameLabel	กำหนดให้มีคำอธิบายที่กรอบ FrameLabel{xlabel, ylabel} หรือ FrameLabel{text1, text2, text3, text4} เป็นคำอธิบายที่กรอบของรูปโดยเริ่มที่ได้กรอบและหมุนตามเข็มนาฬิกาไปด้านถัดไปของกรอบ	None
Axes	กำหนดให้มีการแสดงแกน X, Y, Z ในกราฟ	Automatic
AxesLabel	กำหนดให้มีคำอธิบายที่แกน X, แกน Y ซึ่งกำหนดได้โดย {xlabel, ylabel}	None
AxesOrigin	กำหนดจุดตัดแกนว่าต้องการให้ตัดกันที่จุดใด	Automatic
FrameTicks	กำหนดให้มีการขีด scale ที่กรอบของกราฟ <b>หมายเหตุ</b> ต้องกำหนดให้มีกรอบก่อนใช้คำสั่งนี้	Automatic
GridLines	กำหนดให้มีเส้น grid ภายในกรอบของกราฟ	Automatic
DisplayFunction	กำหนดให้มีการแสดงกราฟหรือเก็บไว้โดยไม่แสดงผล DisplayFunction \$DisplayFunction แสดงกราฟ DisplayFunction Identity ไม่แสดงกราฟ	\$Display Function
PlotLabel	กำหนดชื่อกราฟ	None
PlotStyle	กำหนดลักษณะของการเขียน เช่น PointSize[n] กำหนดขนาดของจุดที่ plot	Automatic
PlotJoined	กำหนดให้มีการโยงเส้นตรงระหว่างจุดหรือไม่	False

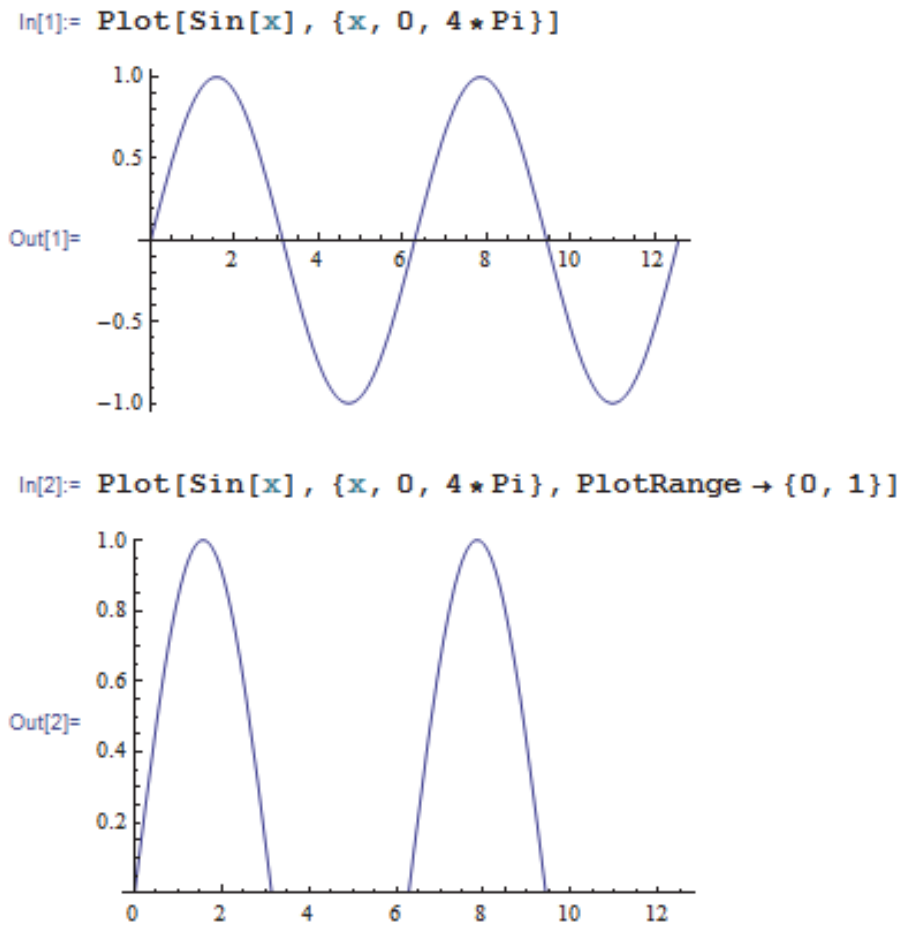
Ticks	กำหนดให้มีขีด scale ที่แกน X และ แกน Y	Automatic
AxesLabel	การแสดงคำอธิบายประกอบที่แกน	None
Boxed	กำหนดให้มีกรอบเป็นรูปกล่องล้อมรอบกราฟ	True
FaceGrids	การแสดงเส้น grid บนส่วน box	None
HiddenSurface	การแสดงผลพื้นผิวให้มีลักษณะเป็น solid	<b>True</b>
Lighting	การแสดงผลพื้นผิวที่มีสีให้มีแสง	True
Mesh	การแสดงผลพื้นผิวที่มีลักษณะเป็นร่างแห	True
Shading	กำหนดการแรเงาพื้นผิว	True
ViewPoint	กำหนดว่าจะมองกราฟในมุมใด	{1.3, -2.4, 2}

**หมายเหตุ** การกำหนดค่าให้กับ Option ต่าง ๆ เช่น Frame → True

การพิมพ์สัญลักษณ์ → (ลูกศร) ให้พิมพ์ -> (เครื่องหมาย ลบ และ มากกว่า ติดกัน) โปรแกรม

Mathematica จะเปลี่ยนเป็นลูกศร → ให้เอง

ตัวอย่าง 3.7.1 การใช้ PlotRange กำหนดขอบเขตของการเขียนกราฟ

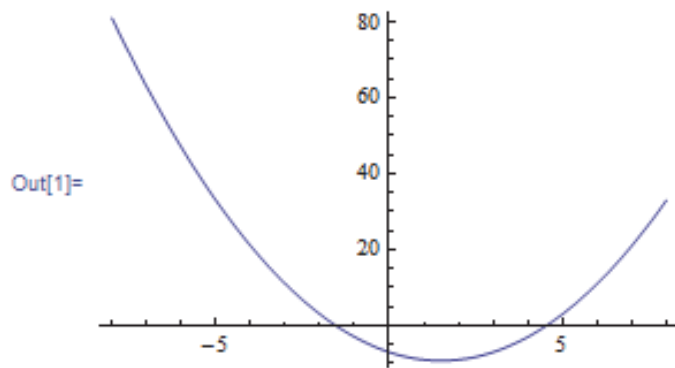


เมื่อกำหนด `PlotRange -> {0, 1}`

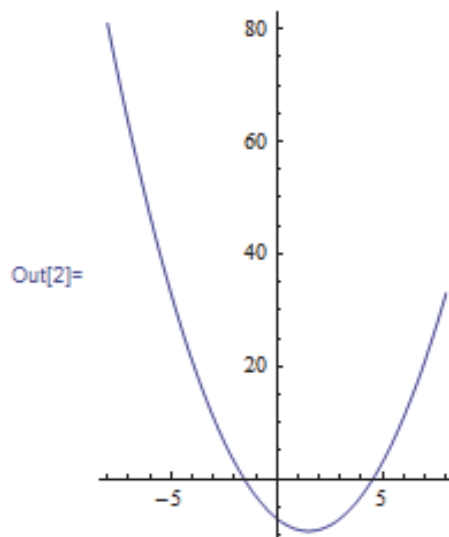
ทำให้การเขียนกราฟค่าของ  $y = \sin x$  ในบริเวณ  $0 \leq y \leq 1$  เท่านั้น

ตัวอย่าง 3.7.2 การใช้ AspectRatio กำหนดสัดส่วนความสูงต่อความกว้างของกรอบที่เขียนกราฟ

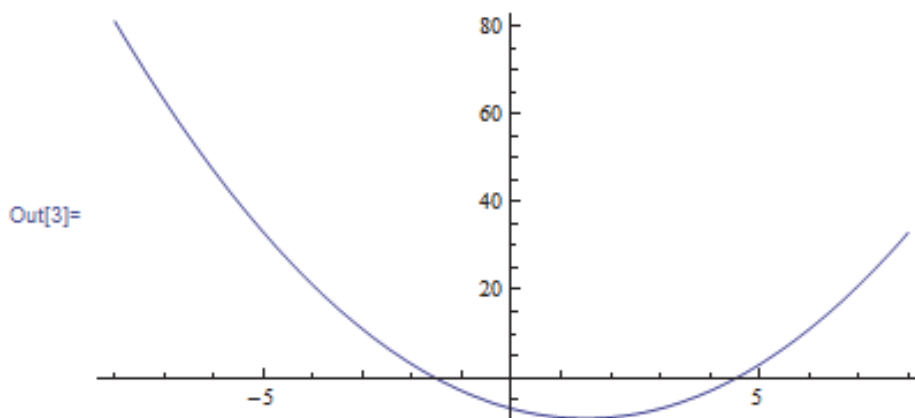
In[1]:= `Plot[x^2 - 3*x - 7, {x, -8, 8}]`



In[2]:= `Plot[x^2 - 3*x - 7, {x, -8, 8}, AspectRatio -> 1.5]`



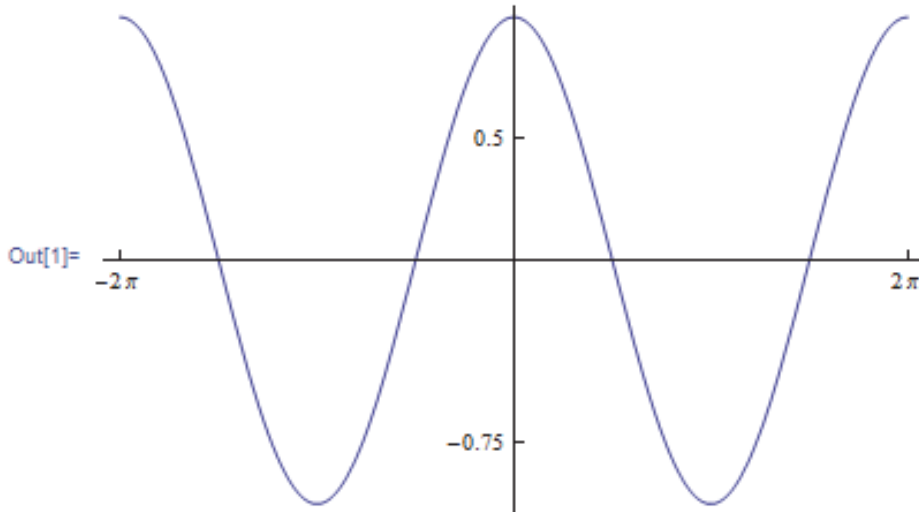
In[3]:= `Plot[x^2 - 3*x - 7, {x, -8, 8}, AspectRatio -> 0.5]`





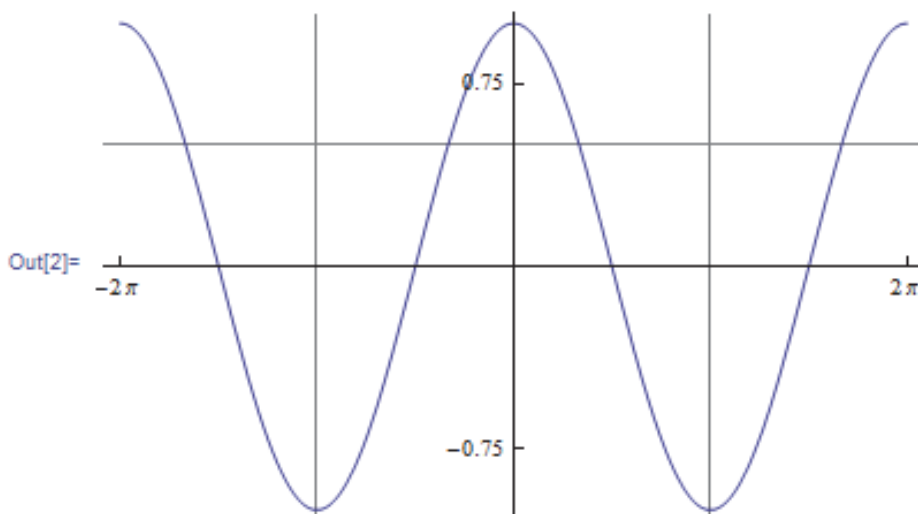
ตัวอย่าง 3.7.3 การกำหนดให้มีการขีดบนแกนตามตำแหน่งที่ต้องการด้วยคำสั่ง Ticks

```
In[1]:= Plot[Cos[x], {x, -2*Pi, 2*Pi},
           Ticks -> {{-2*Pi, 2*Pi}, {-0.75, 0.5}}]
```



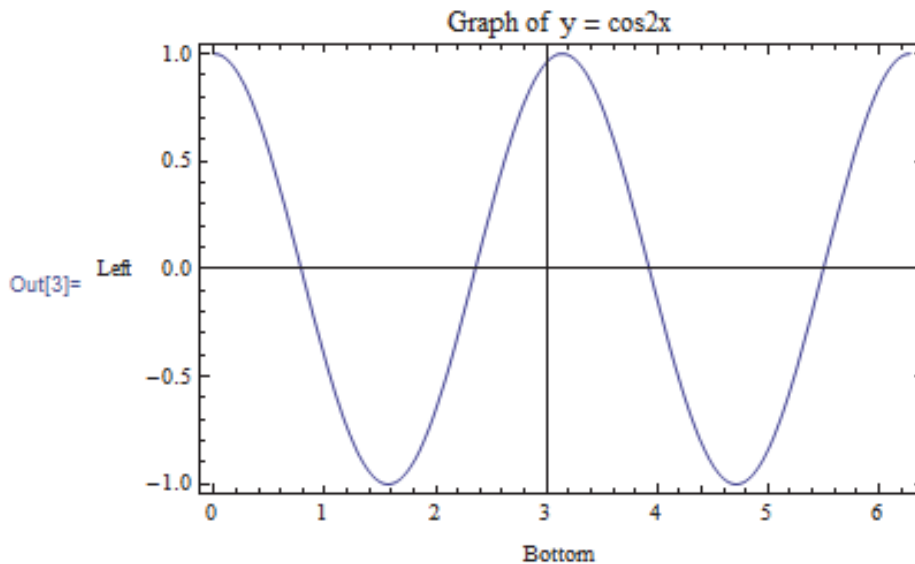
ตัวอย่าง 3.7.4 การกำหนดให้มีการขีดบนแกนตามตำแหน่งที่ต้องการด้วยคำสั่ง Ticks และลากเส้นกริดตามตำแหน่งที่ต้องการด้วยคำสั่ง GridLines

```
In[2]:= Plot[Cos[x], {x, -2*Pi, 2*Pi},
           Ticks -> {{-2*Pi, 2*Pi}, {-0.75, 0.75}},
           GridLines -> {{-Pi, Pi}, {0.5, 0.5}}]
```



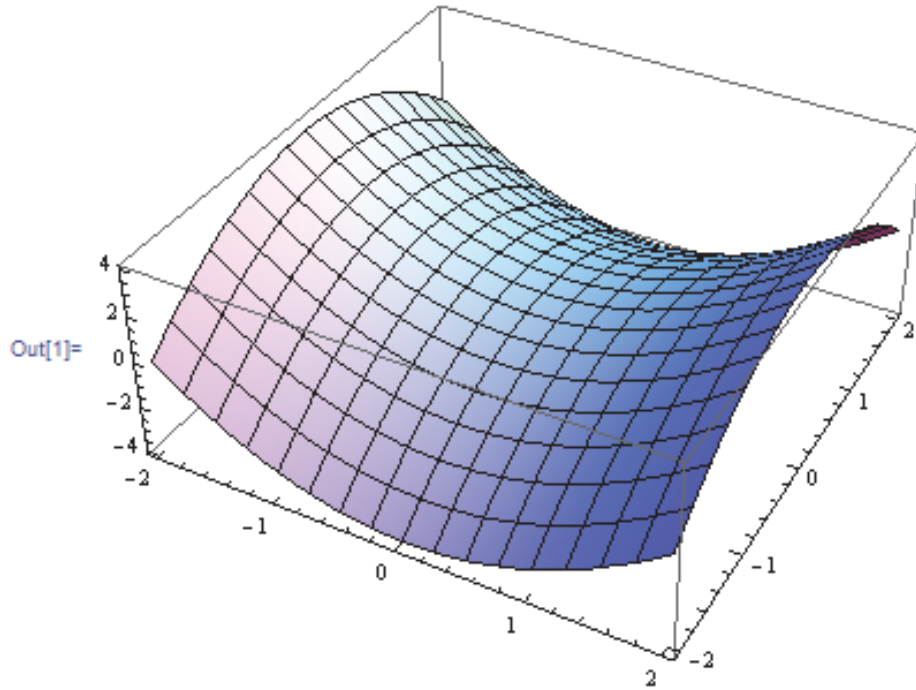
ตัวอย่าง 3.7.5 การใช้ Frame, PlotLabel, FrameLabel, RotateLabel, Axes และ AxesOrigin

```
In[3]:= Plot[Cos[2*x], {x, 0, 2*Pi},
  Frame → True,
  PlotLabel → "Graph of y = cos2x",
  FrameLabel → {Bottom, Left, Top, Right},
  RotateLabel → False,
  Axes → True,
  AxesOrigin → {3, 0}
]
```



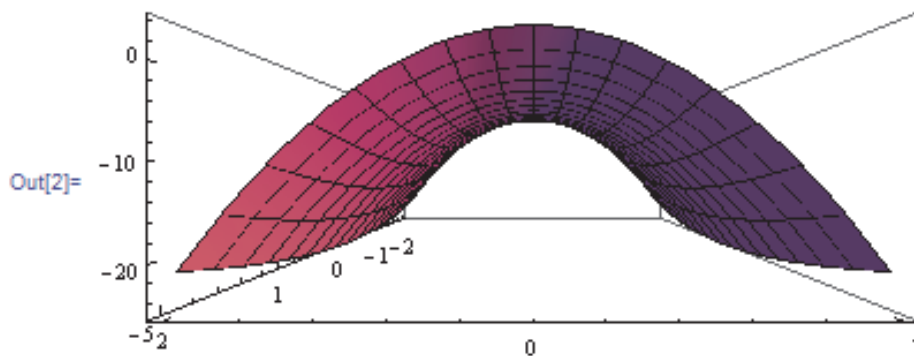
ตัวอย่าง 3.7.6 การกำหนดค่าเกี่ยวกับ Shading, PlotPoints, Mesh, FaceGrids และ AxesLabel

```
In[1]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



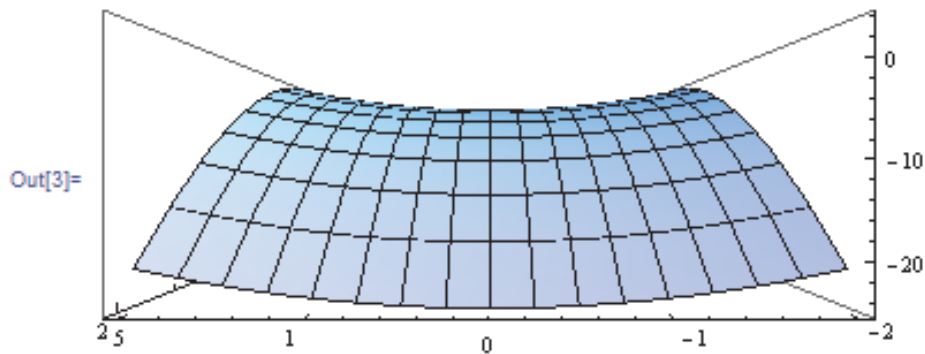
มุมมองในทิศทางแกน X

```
In[2]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -5, 5},
ViewPoint -> {1, 0, 0}]
]
```



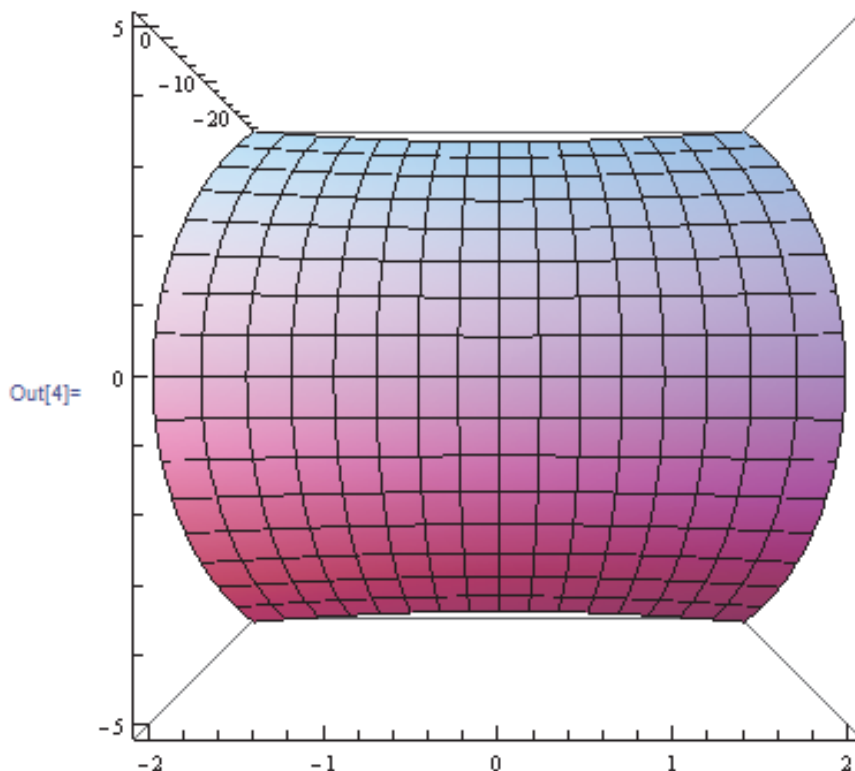
มุมมองในทิศทางแกน Y

```
In[3]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -5, 5},
ViewPoint -> {0, 1, 0}
]
```

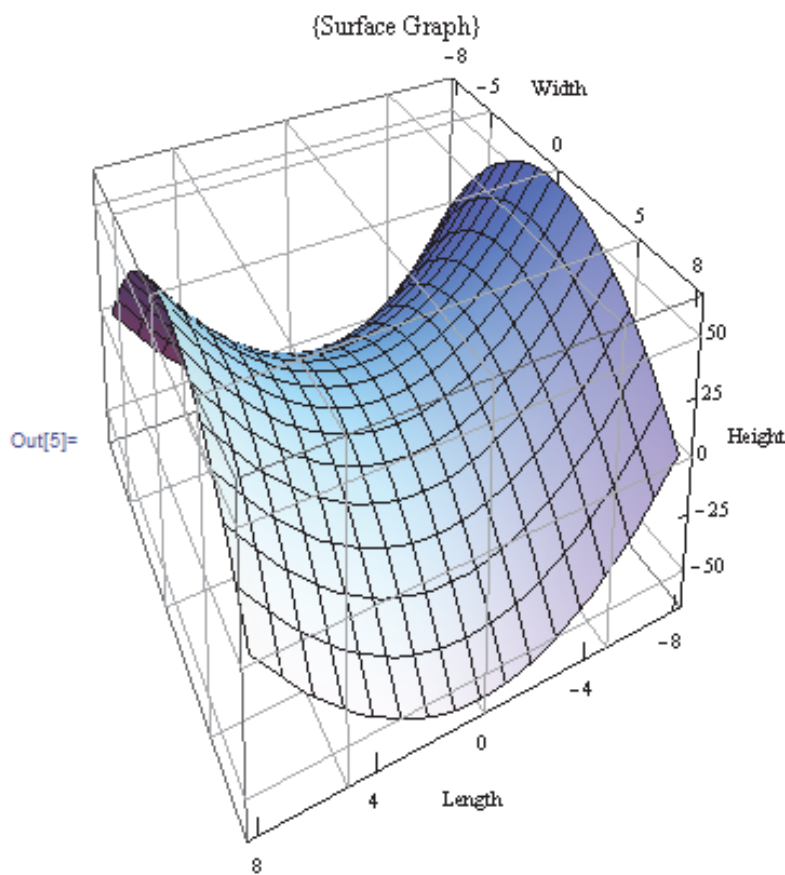


มุมมองในทิศทางแกน Z

```
In[4]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -5, 5},
ViewPoint -> {0, 0, 1}
]
```



```
In[5]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -8, 8}, {y, -8, 8}, PlotPoints -> 10,
  Mesh -> True,
  FaceGrids -> All,
  AxesLabel -> {"Length", "Width", "Height"},
  Ticks -> {{-8, -4, 0, 4, 8}, {-8, -5, 0, 5, 8}, {-50, -25, 0, 25, 50}},
  PlotLabel -> {"Surface Graph"},
  ViewPoint -> {1, 2, 1},
  AspectRatio -> 1.25
]
```



## ตัวอย่าง 3.7.7 การเขียนกราฟหลายรูปพร้อมกัน

In[1] สั่งให้เขียนกราฟรูปแรก แต่ไม่ต้องแสดงผลของกราฟ และ เก็บไว้ในตัวแปร g1

In[2] สั่งให้เขียนกราฟรูปที่ 2 แต่ไม่ต้องแสดงผลของกราฟ และ เก็บไว้ในตัวแปร g2

In[3] สั่งให้เขียนกราฟรูปที่ 3 แต่ไม่ต้องแสดงผลของกราฟ และ เก็บไว้ในตัวแปร g3

In[4] สั่งให้เขียนกราฟรูปที่ 4 แต่ไม่ต้องแสดงผลของกราฟ และ เก็บไว้ในตัวแปร g4

```
In[1]:= g1 := Plot[x, {x, -4, 4}, PlotStyle -> Red]
```

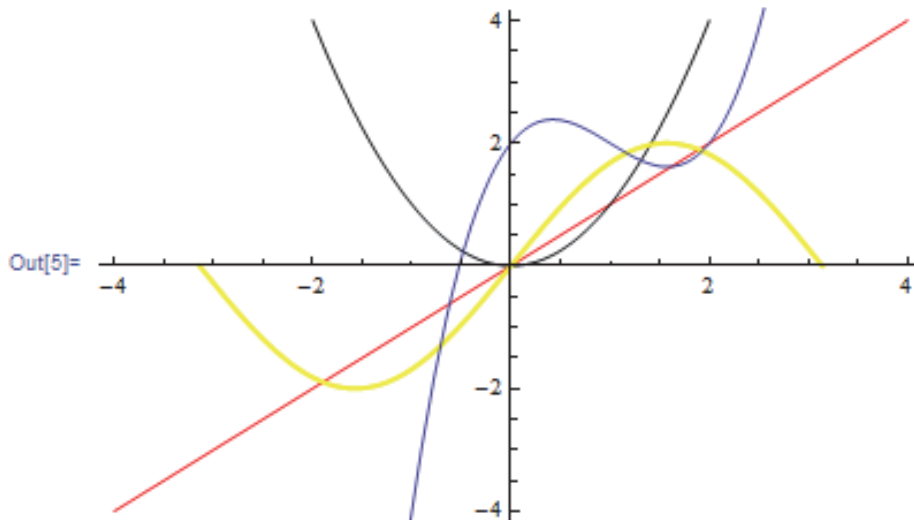
```
In[2]:= g2 := Plot[x^2, {x, -2, 2}, PlotStyle -> Black]
```

```
In[3]:= g3 := Plot[2*Sin[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle -> {Yellow, Thick}]
```

```
In[4]:= g4 := Plot[x^3 - 3*x^2 + 2*x + 2, {x, -2, 4}]
```

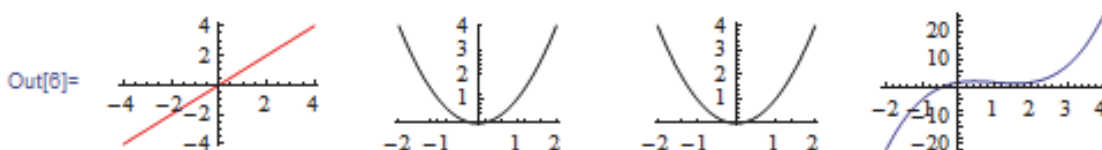
การแสดงผลของกราฟ 4 รูปบนสเกลเดียวกันโดยใช้คำสั่ง Show

```
In[5]:= Show[g1, g2, g3, g4]
```



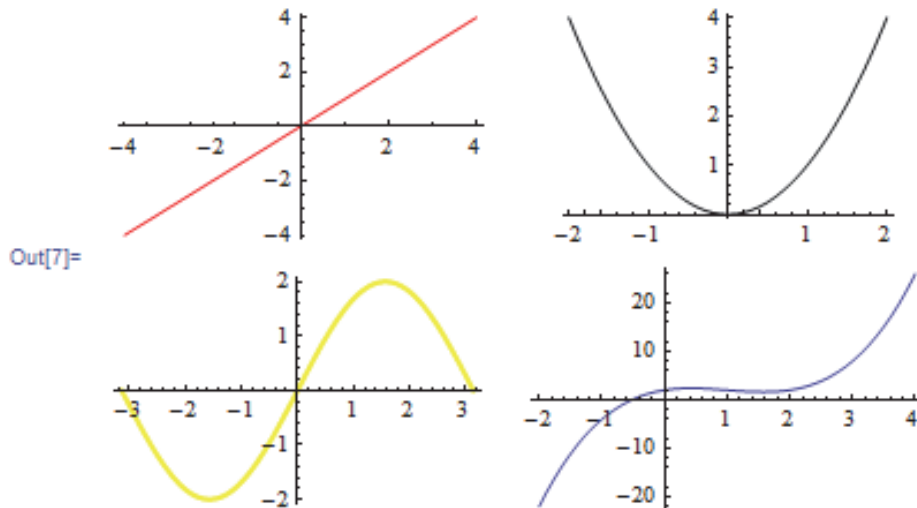
คำสั่ง GraphicsRow แสดงกราฟแบบแยกสเกลและเรียงภาพแนวแถว

```
In[6]:= GraphicsRow[{g1, g2, g2, g4}]
```



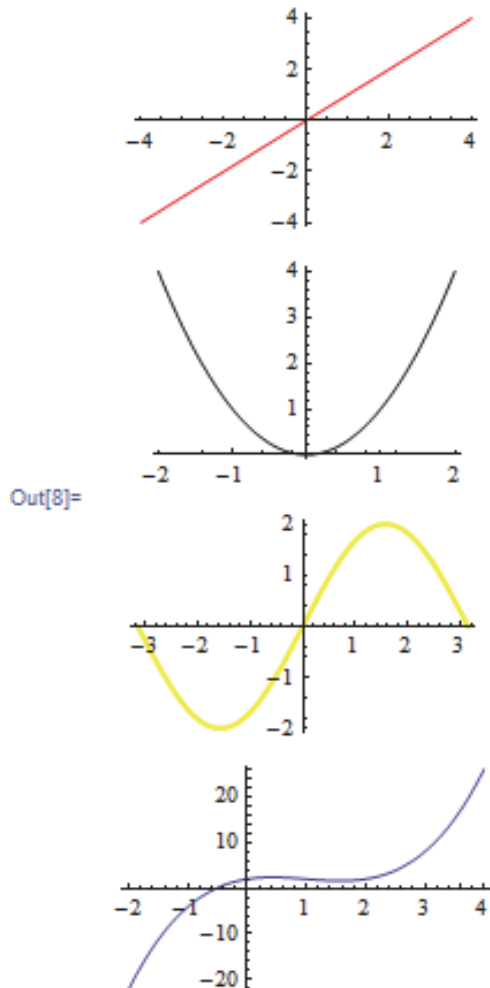
คำสั่ง GraphicsGrid แสดงกราฟแบบแยกสเกลและเรียงภาพในรูปแบบตาราง

In[7]:= GraphicsGrid[{{g1, g2}, {g3, g4}}]



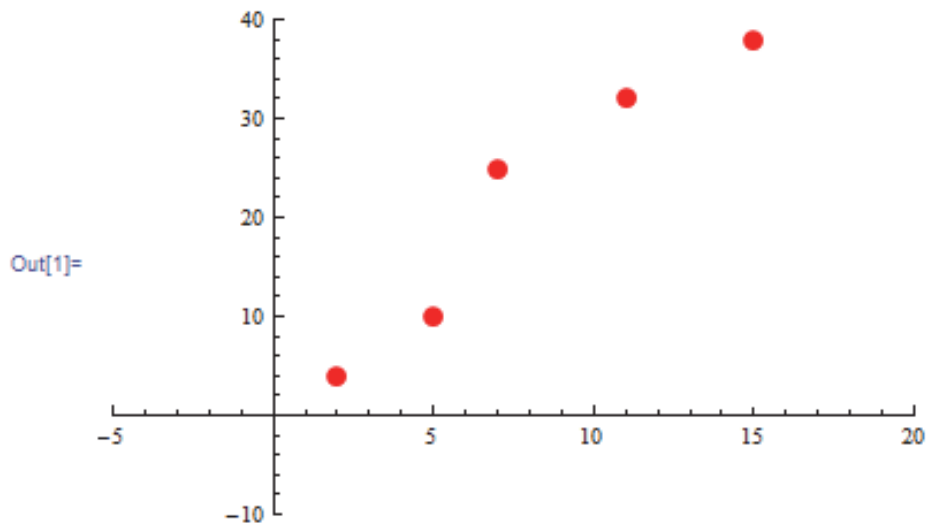
คำสั่ง GraphicsColumn แสดงกราฟแบบแยกสเกลและเรียงภาพแนวตั้ง

In[8]:= GraphicsColumn[{g1, g2, g3, g4}]



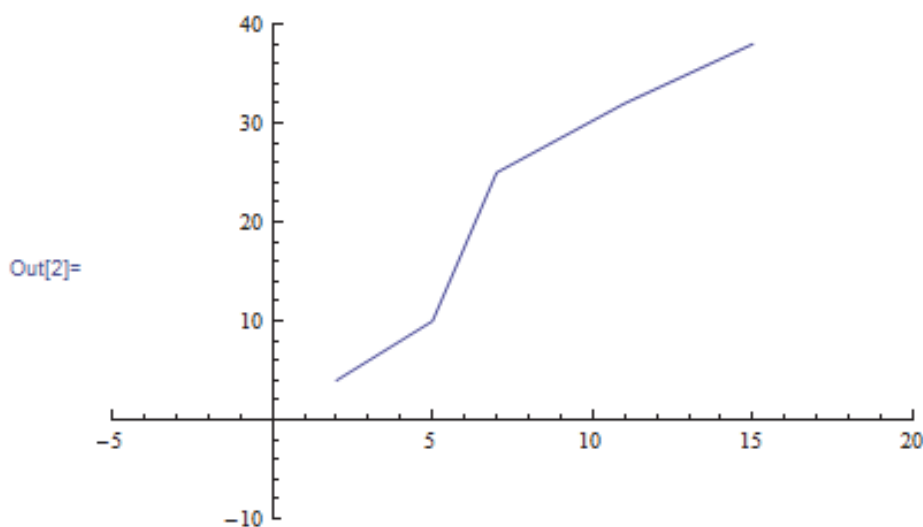
ตัวอย่าง 3.7.8 การเขียนกราฟแผนภาพการกระจายของข้อมูล

```
In[1]:= ListPlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}},
  PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}
]
```



ListLinePlot ใช้เขียนแผนภาพการกระจายแบบโยงเส้นระหว่างจุด

```
In[2]:= ListLinePlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}},
  PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}
]
```



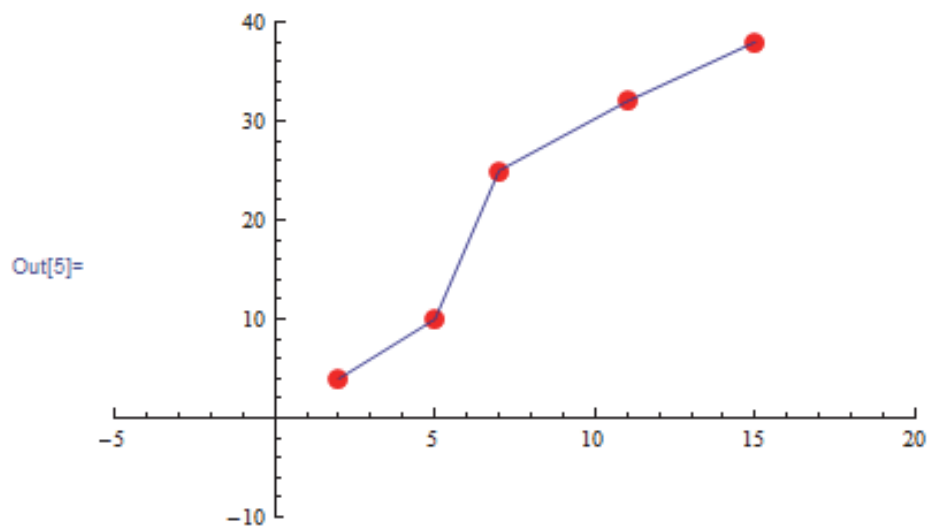


นำกราฟทั้ง 2 รูปแบบแสดงผลพร้อมกันบนสเกลเดียวกัน

```
In[3]:= g1 := ListPlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}},  
    PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},  
    PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}  
    ]
```

```
In[4]:= g2 := ListLinePlot[{{2, 4}, {5, 10}, {7, 25}, {11, 32}, {15, 38}},  
    PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}  
    ]
```

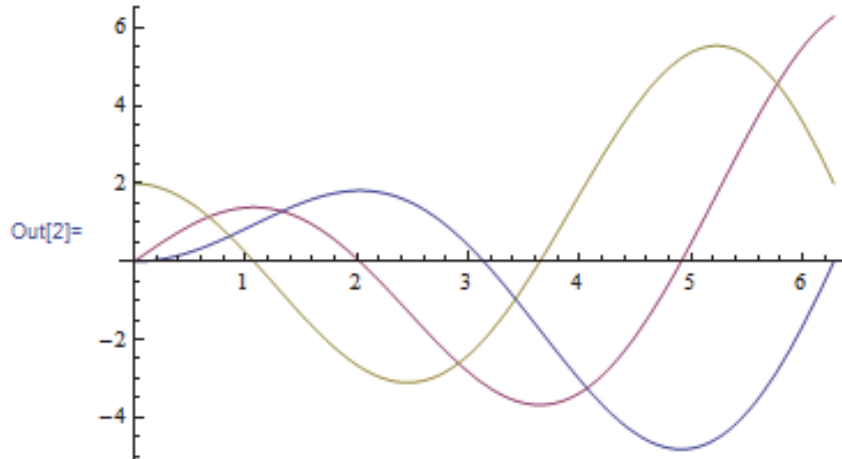
```
In[5]:= Show[{g1, g2}]
```



ตัวอย่าง 3.7.9 การเขียนกราฟของฟังก์ชันและอนุพันธ์พร้อมกัน

```
In[1]:= f[x_] := x*Sin[x]
```

```
In[2]:= Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, 0, 2*Pi}]
```

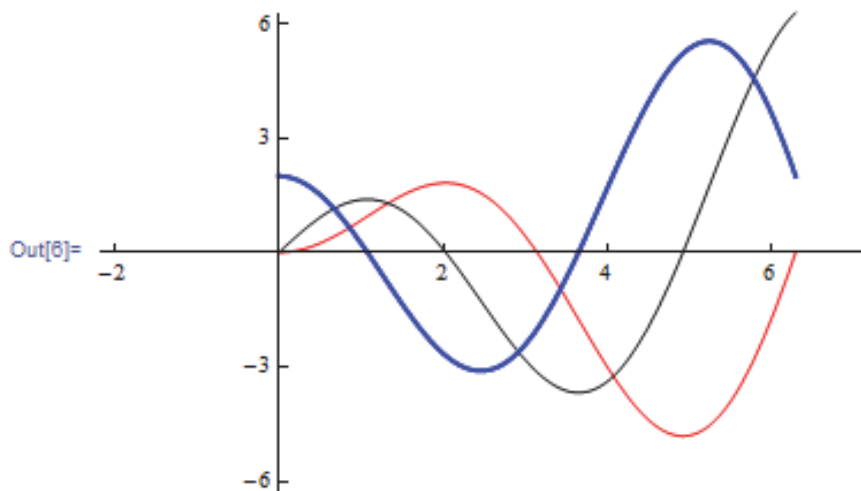


```
In[3]:= g1 := Plot[{f[x]}, {x, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> Red]
```

```
In[4]:= g2 := Plot[{f'[x]}, {x, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> Black]
```

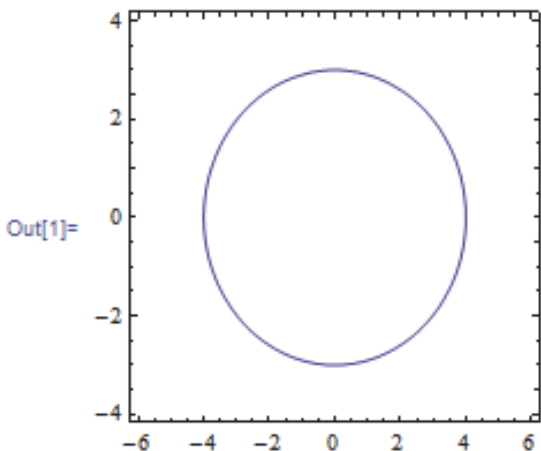
```
In[5]:= g3 := Plot[{f''[x]}, {x, 0, 2*Pi}, PlotStyle -> {Blue, Thick}]
```

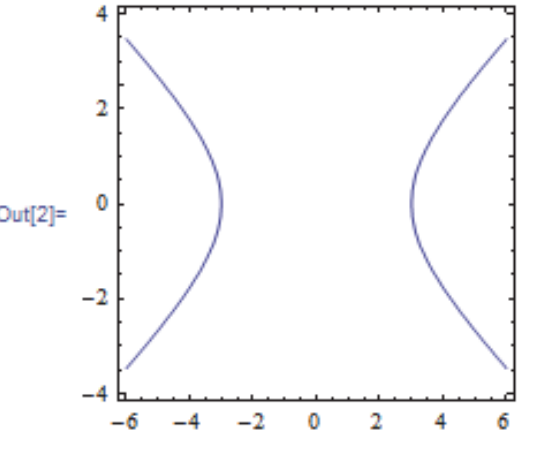
```
In[6]:= Show[{g1, g2, g3},
  PlotRange -> {{-2, 7}, {-6, 6}},
  Ticks -> {{-2, 0, 2, 4, 6, 8}, {-6, -3, 0, 3, 6}}]
```



3.8 การเขียนกราฟของฟังก์ชันที่นิยามโดยนัยหรือกราฟของความสัมพันธ์

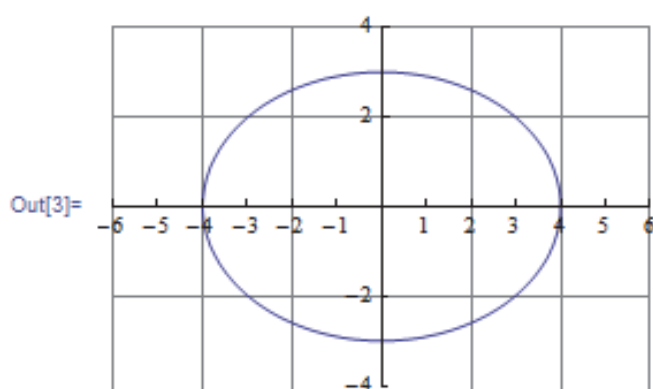
การเขียนกราฟของวงรี  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  และไฮเพอร์โบลา  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

พินิจ
<code>ContourPlot[{x^2/16+y^2/9==1},{x,-6,6},{y,-4,4}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[1]:= ContourPlot[{x^2/16+y^2/9=1},{x,-6,6},{y,-4,4}]</pre> 

พินิจ
<code>ContourPlot[{x^2/9-y^2/4==1},{x,-6,6},{y,-4,4}]&lt;Shift&gt;+↵</code>
ผลบนจอภาพ
<pre>In[2]:= ContourPlot[{x^2/9-y^2/4=1},{x,-6,6},{y,-4,4}]</pre> 

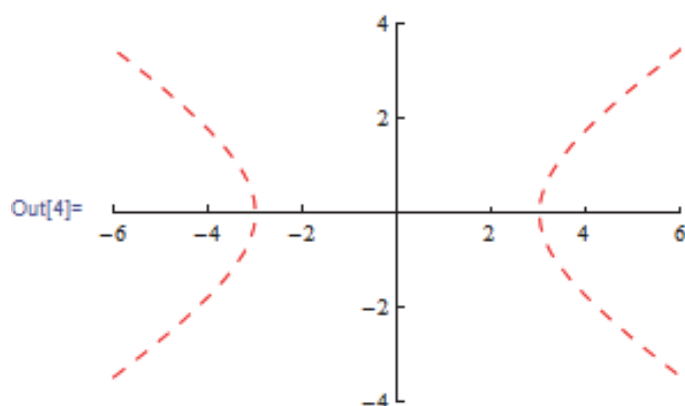
กราฟของ  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  ที่มีการปรับแต่งกราฟให้สวยงาม

```
In[3]:= ContourPlot[{x^2/16 + y^2/9 = 1}, {x, -6, 6}, {y, -4, 4},
  Axes → {1, 1},
  Frame → False,
  AspectRatio → 4/6,
  PlotRange → {{-6, 6}, {-4, 4}},
  Ticks → {{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6},
    {-4, -2, 0, 2, 4}},
  GridLines → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {-4, -2, 0, 2, 4}}]
```



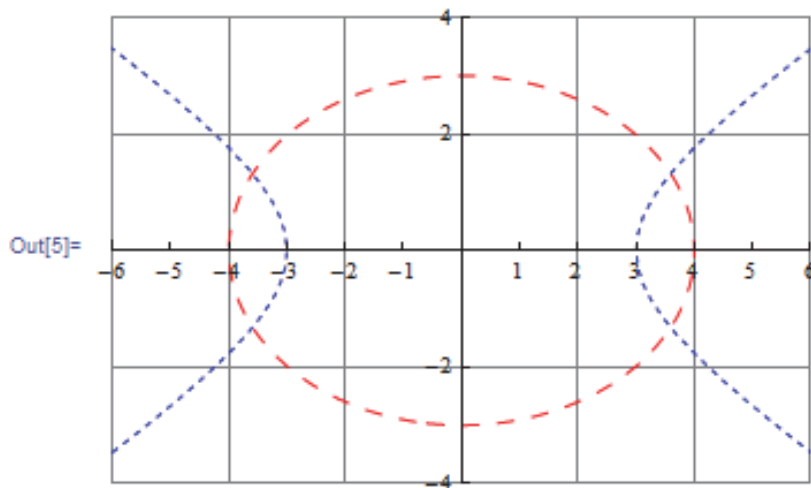
กราฟของ  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  ที่มีการปรับแต่งกราฟให้สวยงาม

```
In[4]:= ContourPlot[{x^2/9 - y^2/4 = 1}, {x, -6, 6}, {y, -4, 4},
  Axes → {1, 1},
  Frame → False,
  AspectRatio → 4/6,
  PlotRange → {{-6, 6}, {-4, 4}},
  Ticks → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {-4, -2, 0, 2, 4}},
  ContourStyle → {Red, Dashing[ {.025} ]}]
```



กราฟของ  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$  และ  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$  พร้อมกันและปรับแต่งกราฟให้สวยงาม

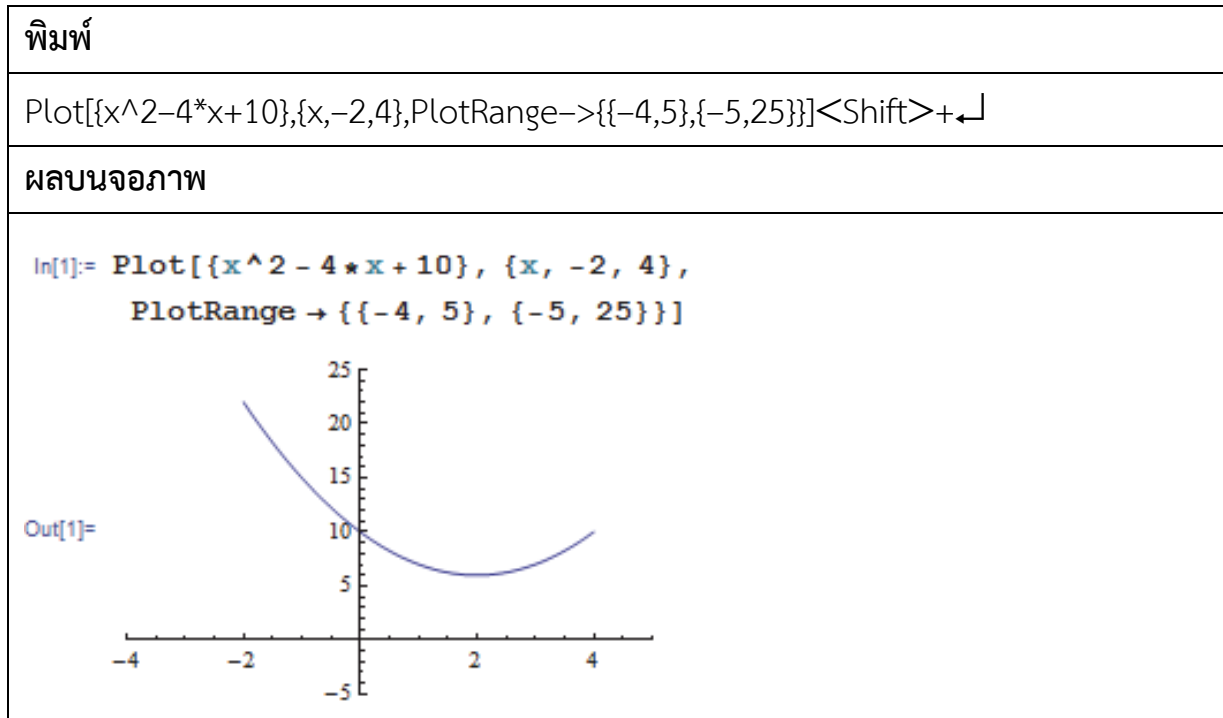
```
In[5]:= ContourPlot[{x^2/16 + y^2/9 = 1, x^2/9 - y^2/4 = 1},
  {x, -6, 6}, {y, -4, 4},
  Axes → {1, 1},
  Frame → False,
  AspectRatio → 4/6,
  PlotRange → {{-6, 6}, {-4, 4}},
  Ticks → {{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6},
    {-4, -2, 0, 2, 4}},
  GridLines → {{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6}, {-4, -2, 0, 2, 4}},
  ContourStyle → {{Red, Dashing[ {.025}]},
    {Blue, Dashing[ {0.01}]}}
]
```



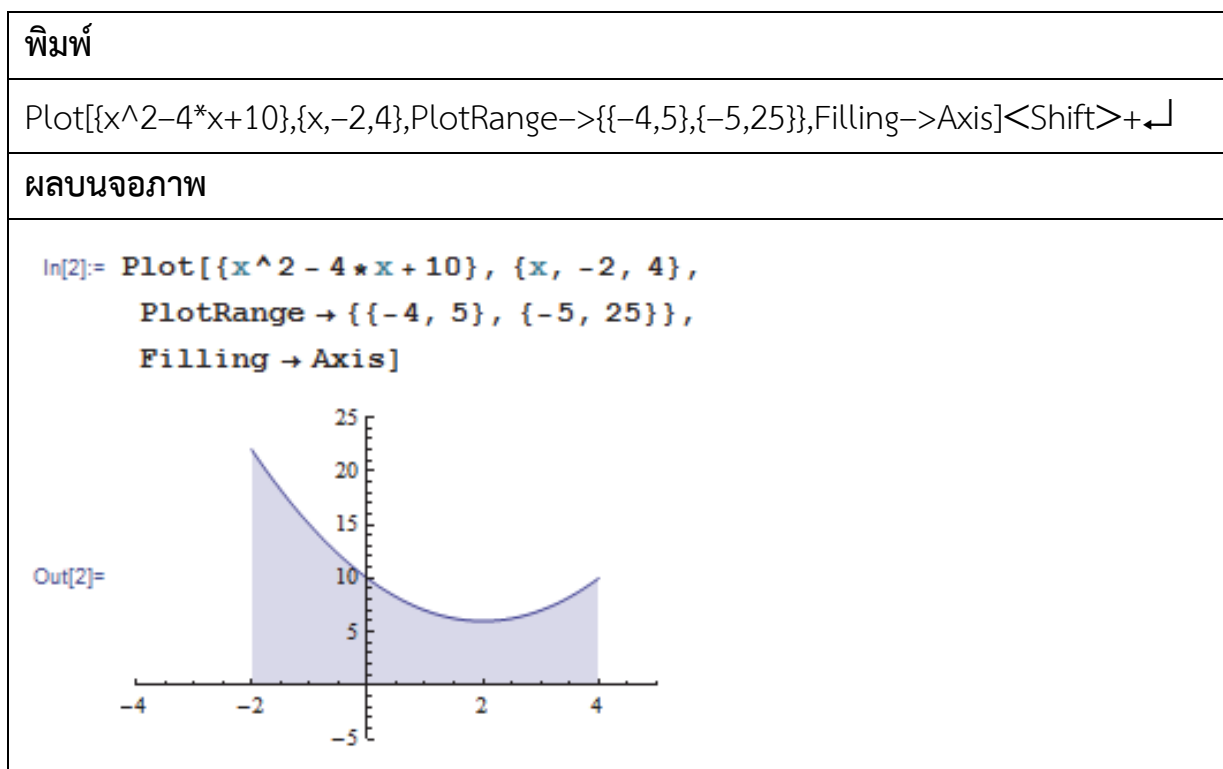
### 3.9 การเขียนกราฟของสมการและการแรเงาในบริเวณที่ต้องการ

การเขียนกราฟและแรเงาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง  $y = x^2 - 4x + 10$  แกน X บนช่วง  $[-2, 4]$

การเขียนกราฟแบบไม่แรเงา



ต่อไปเขียนกราฟแบบแรเงาระหว่างเส้นโค้งกับแกน X โดยเพิ่ม Options `Filling->Axis`



Options Filling มี 4 แบบคือ Top, Bottom, Axis และ k

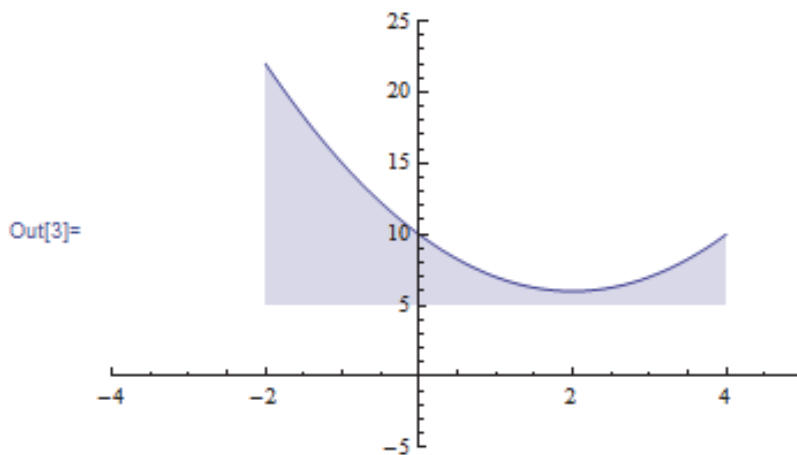
Filling -> k แรเงาระหว่างเส้นโค้ง  $y = f(x)$  กับเส้นตรง  $y = k$

Filling -> Axis แรเงาระหว่างเส้นโค้ง  $y = f(x)$  กับแกน X

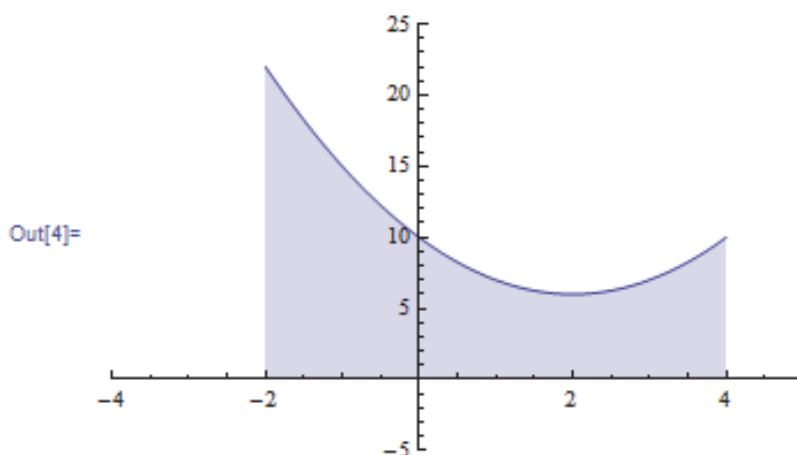
Filling -> Top แรเงาระหว่างเส้นโค้ง  $y = f(x)$  กับค่ามากที่สุดบนกราฟ

Filling -> Bottom แรเงาระหว่างเส้นโค้ง  $y = f(x)$  กับค่าต่ำสุดบนกราฟ

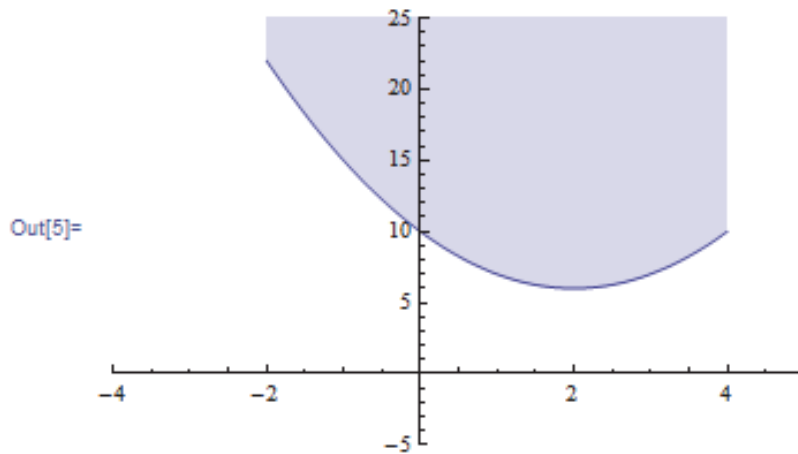
```
In[3]:= Plot[{x^2 - 4*x + 10}, {x, -2, 4},
  PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}},
  Filling -> 5]
```



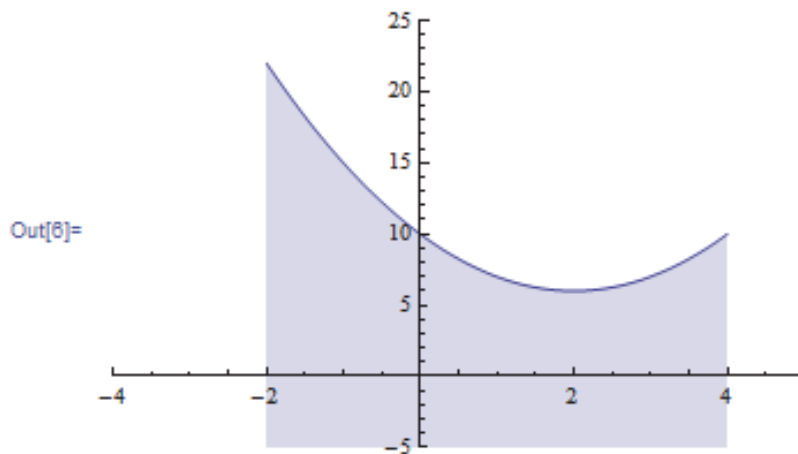
```
In[4]:= Plot[{x^2 - 4*x + 10}, {x, -2, 4},
  PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}},
  Filling -> Axis]
```



```
In[5]:= Plot[{x^2 - 4*x + 10}, {x, -2, 4},
  PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}},
  Filling -> Top]
```



```
In[6]:= Plot[{x^2 - 4*x + 10}, {x, -2, 4},
  PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}},
  Filling -> Bottom]
```

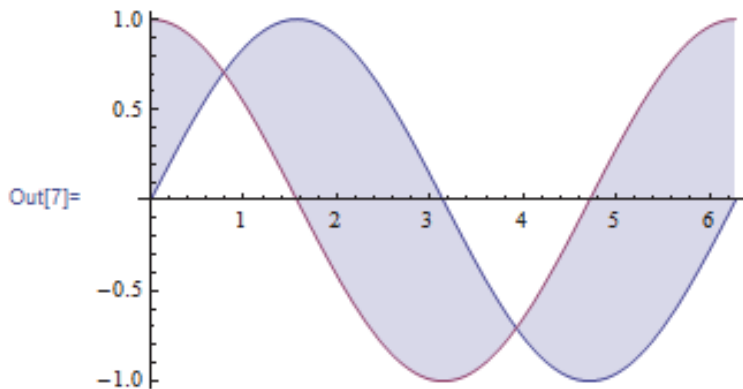




การแรเงาระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้น

Filling ->{1->{2}} สั่งให้แรเงาระหว่างเส้นโค้งเส้นที่ 1 ( $y = \sin x$ ) กับเส้นโค้งเส้นที่ 2 ( $y = \cos x$ )

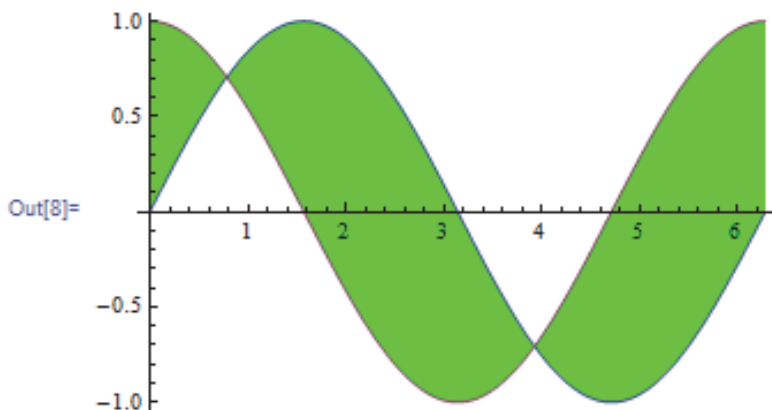
```
In[7]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2*Pi},
  Filling -> {1 -> {2}}]
```



Filling ->{1->{2, Yellow}}

สั่งให้แรเงาสีเหลืองระหว่างเส้นโค้งเส้นที่ 1 ( $y = \sin x$ ) กับเส้นโค้งเส้นที่ 2 ( $y = \cos x$ )

```
In[8]:= Plot[{Sin[x], Cos[x]}, {x, 0, 2*Pi},
  Filling -> {1 -> {{2}, Green}}]
```

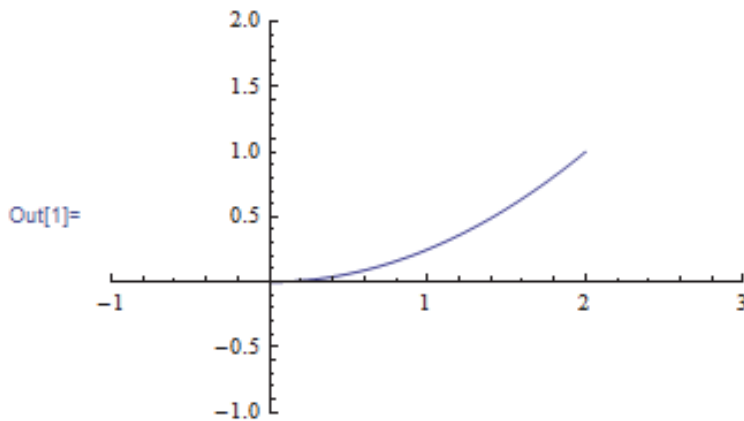


### 3.10 การเขียนกราฟของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง

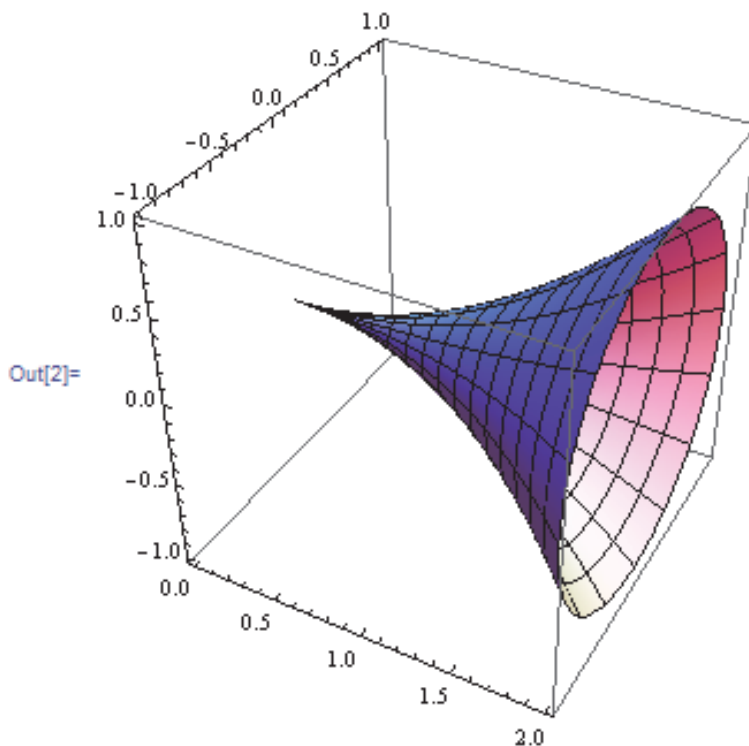
RevolutionPlot3D เป็นคำสั่งเขียนกราฟของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง  $y = f(x)$  รอบเส้นตรง

การเขียนกราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง  $y = \frac{x^2}{4}$  บนช่วง  $[0, 2]$  รอบแกน X

```
In[1]:= Plot[(x^2)/4, {x, 0, 2}, PlotRange -> {{-1, 3}, {-1, 2}}]
```

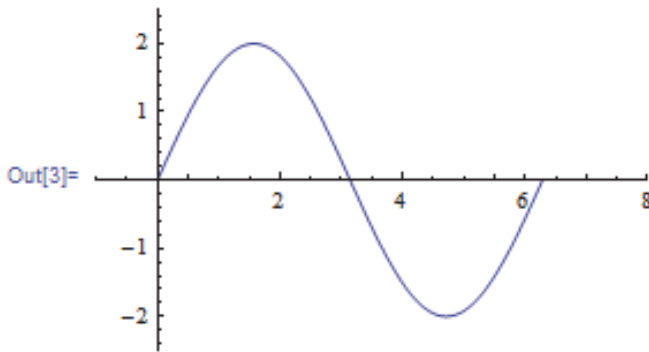


```
In[2]:= RevolutionPlot3D[(x^2)/4, {x, 0, 2},
  RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```

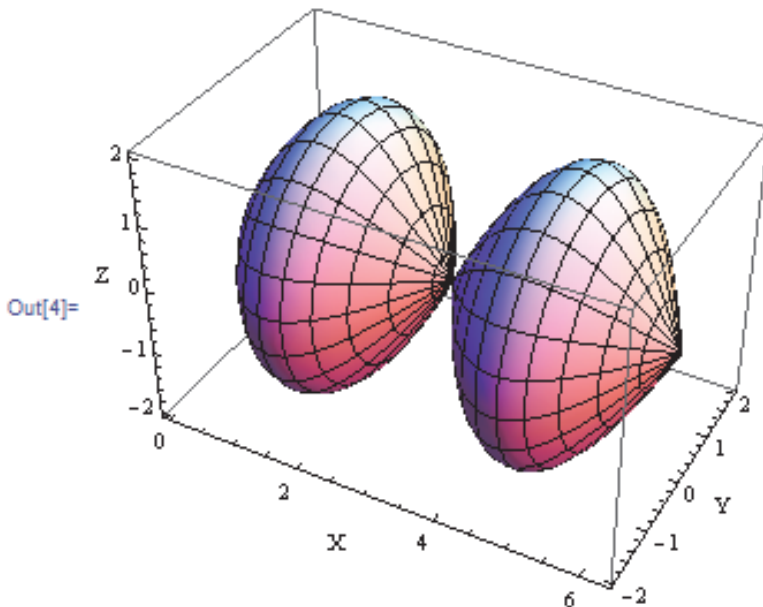


การเขียนกราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง  $y = 2 \sin x$  บนช่วง  $[0, 2\pi]$  รอบแกน X

```
In[3]:= Plot[2*Sin[x], {x, 0, 2*Pi},
  PlotRange -> {{-1, 8}, {-2.5, 2.5}}]
```



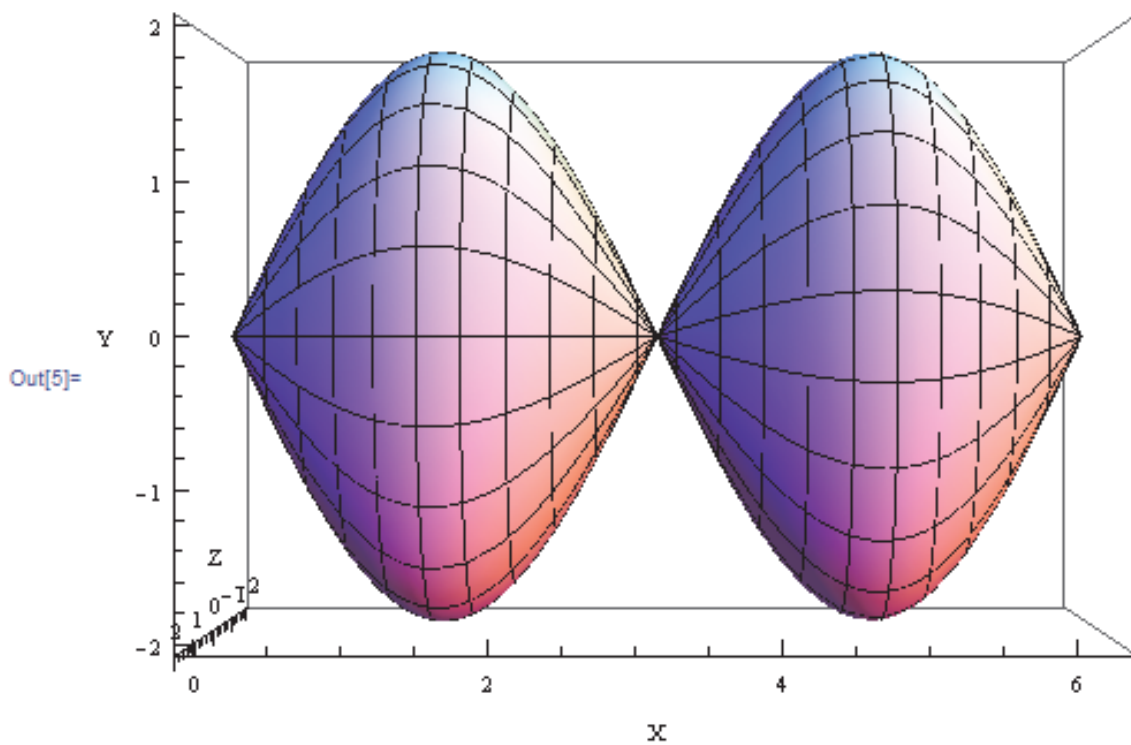
```
In[4]:= RevolutionPlot3D[2*Sin[x], {x, 0, 2*Pi},
  RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  Mesh -> 20]
```



กราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนเส้นโค้ง  $y = 2 \sin x$  บนช่วง  $[0, 2\pi]$  รอบแกน X

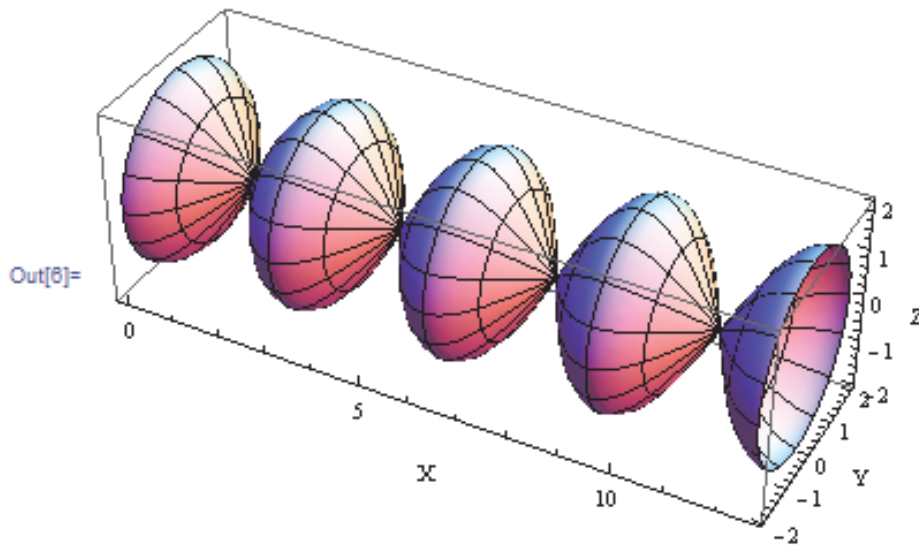
มุมมอง ViewPoint>Top

```
In[5]:= RevolutionPlot3D[2*Sin[x], {x, 0, 2*Pi},
-   RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
   AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
   Mesh -> 20,
   ViewPoint -> Top,
   BoxRatios -> {3, 2, 1}]
```

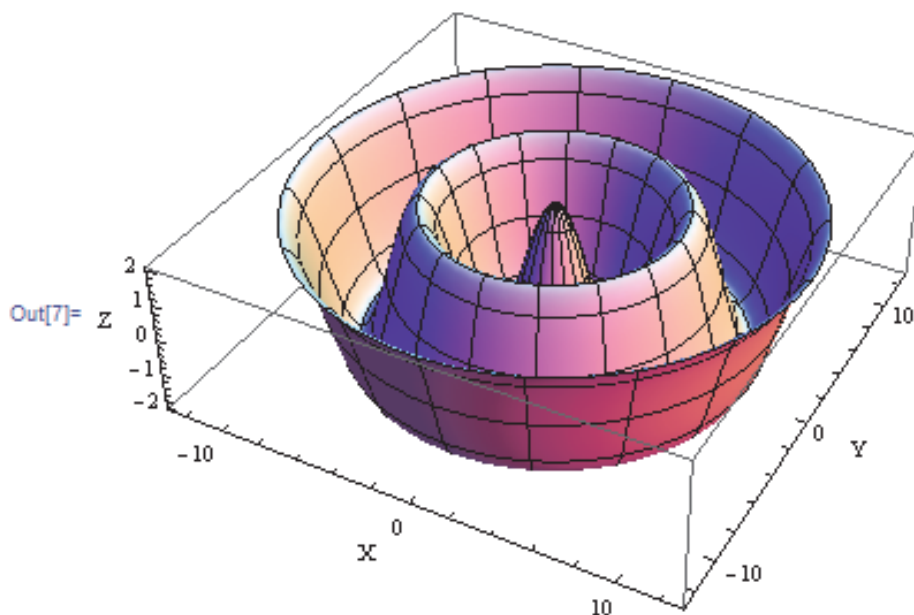


กราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน

```
In[6]:= RevolutionPlot3D[2 * Cos[x], {x, 0, 4 * Pi},
    RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
    AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
    PlotPoints -> 40]
```

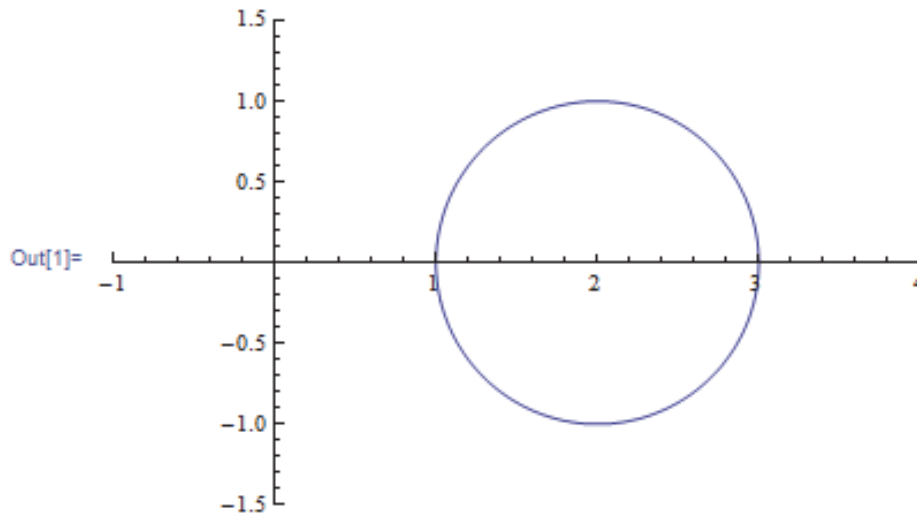


```
In[7]:= RevolutionPlot3D[2 * Cos[x], {x, 0, 4 * Pi},
    RevolutionAxis -> {0, 0, 1},
    AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
    PlotPoints -> 50]
```



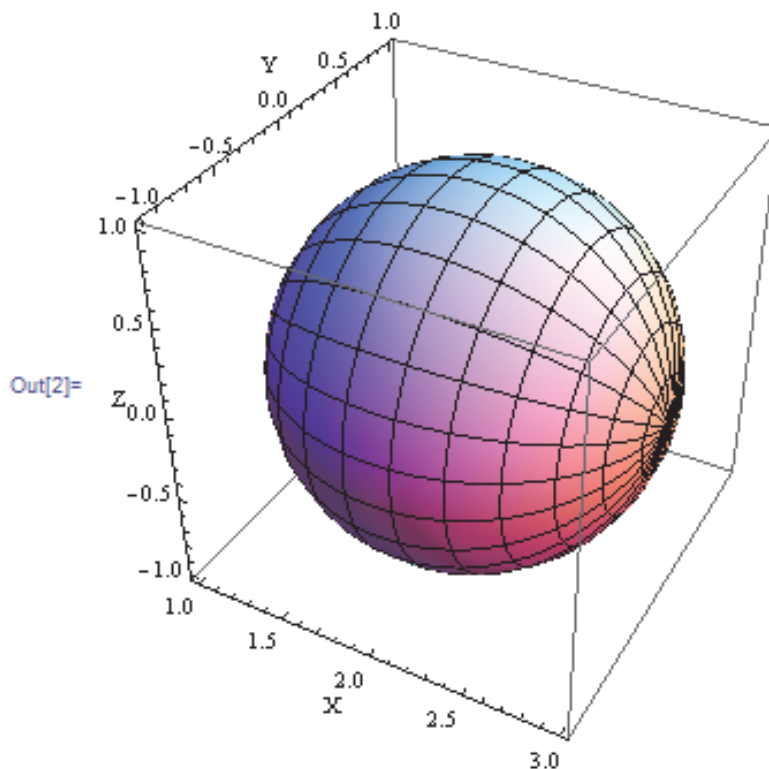
กราฟของวงกลมบนระนาบ XY

```
In[1]:= ParametricPlot[{2 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  PlotRange -> {{-1, 4}, {-1.5, 1.5}}]
```



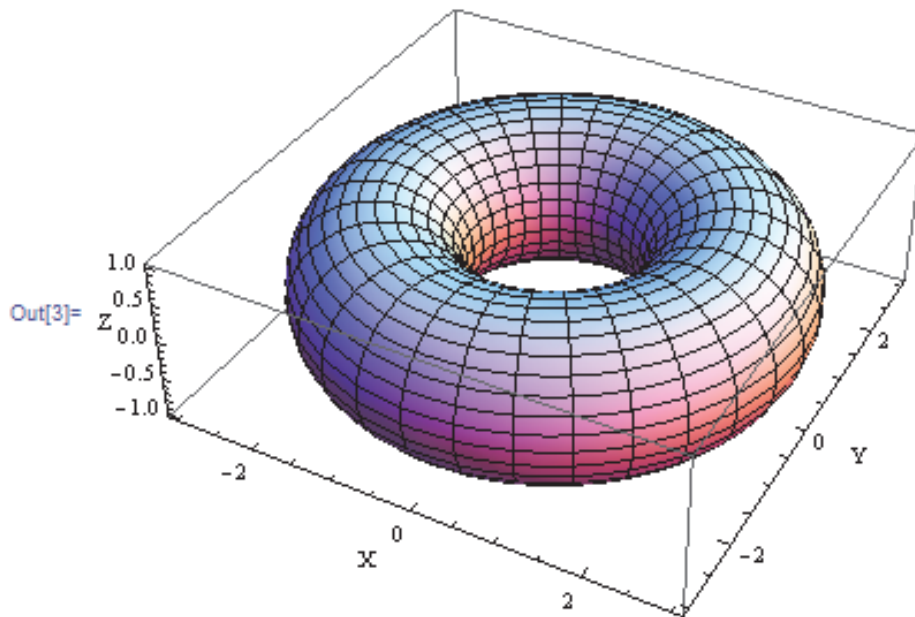
กราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนวงกลมรอบแกน X

```
In[2]:= RevolutionPlot3D[{2 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  RevolutionAxis -> {1, 0, 0},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  Mesh -> 25]
```



กราฟพื้นผิวที่เกิดจากการหมุนวงกลมรอบแกน Z

```
In[3]:= RevolutionPlot3D[{2 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 Pi},
  RevolutionAxis -> {0, 0, 1},
  AxesLabel -> {"X", "Y", "Z"},
  Mesh -> 30]
```

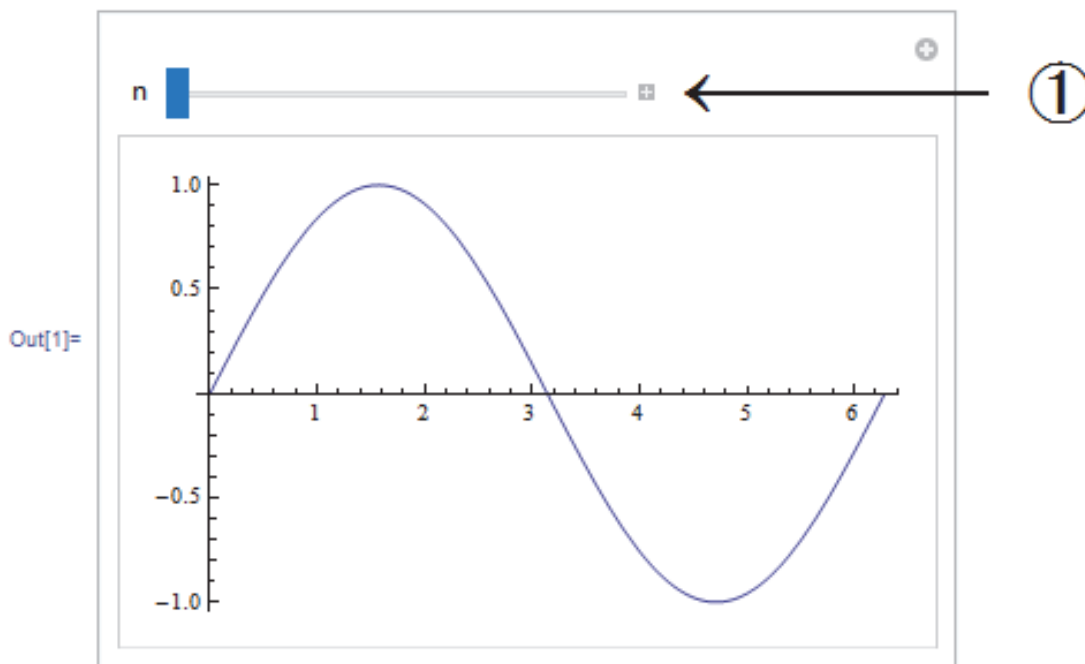


### 3.11 การเขียนกราฟเคลื่อนไหว (Interactive Graph)

Manipulate เป็นคำสั่งเขียนกราฟที่มีการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์ภายในคำสั่งได้ ทำให้กราฟที่ได้มีลักษณะคล้ายกับเกิดการเคลื่อนไหว

Manipulate[Command, Parameter ที่เปลี่ยนแปลงขณะเขียนกราฟ]

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Sin[n*t], {t, 0, 2*Pi}], {n, 1, 4, 0.5}]
```



ในตัวอย่างข้างต้น

Command คือ `Plot[Sin[n*t],{t,0,2*Pi}]` ซึ่งเป็นคำสั่งเขียนกราฟ  $y = \sin nt$

จะเห็นว่าใน Command ระบุว่า  $t$  มีค่าจาก 0 ถึง  $2\pi$  แต่ยังไม่ระบุค่าของ  $n$  ซึ่งเราถือว่า  $n$  เป็นตัวพารามิเตอร์ที่รอกำหนดเงื่อนไขในกลุ่มของพารามิเตอร์ ด้านท้ายคำสั่ง

Parameter คือ  $n$  กำหนดให้มีค่าจาก 1 ถึง 4 เพิ่มค่าครั้งละ 0.5

ภาพของกราฟแรกที่ได้คือ  $y = \sin t$  เมื่อ  $n = 1$

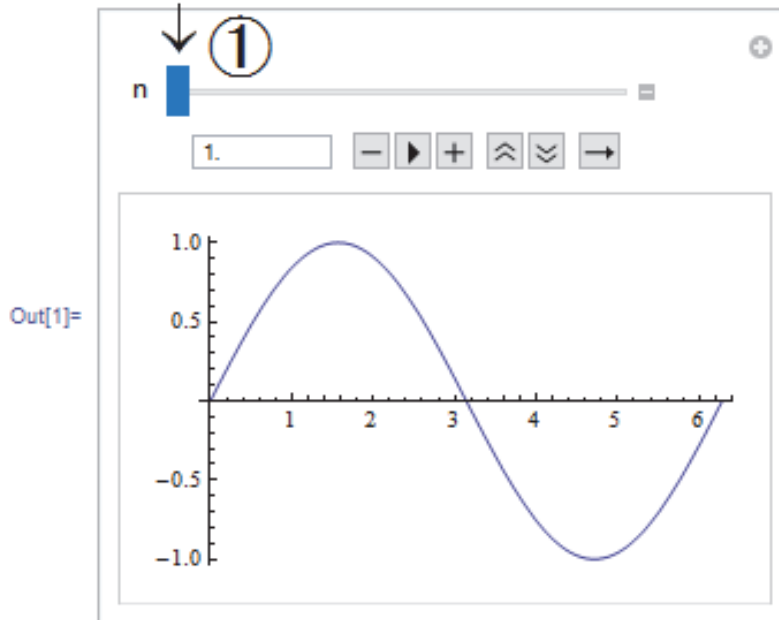
ต่อไปให้คลิกที่เครื่องหมาย + ตรงที่ลูกศรชี้ (หมายเลข 1 ในรูปข้างบน)

จะได้เมนูย่อยของการปรับเปลี่ยนค่าพารามิเตอร์



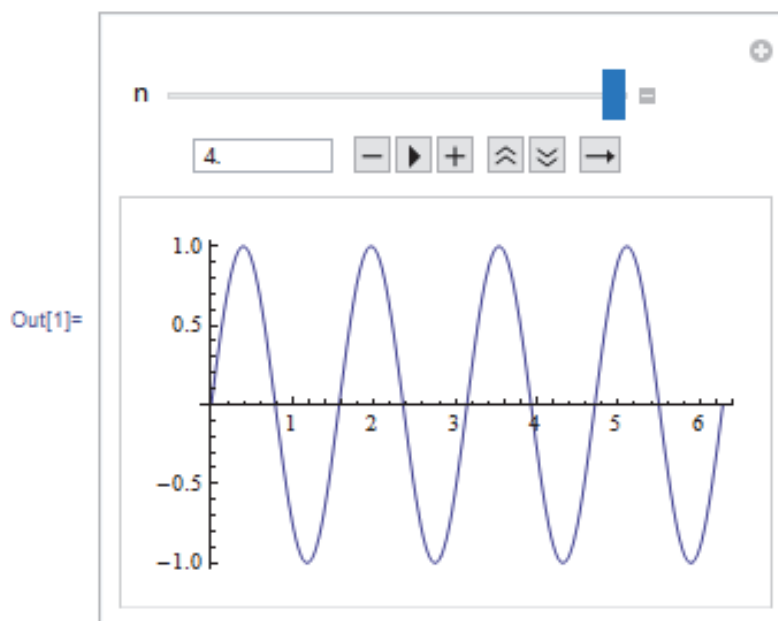
บนจอภาพจะเห็นเมนูย่อยในกรอบของภาพ

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Sin[n*t], {t, 0, 2*Pi}], {n, 1, 4, 0.5}]
```

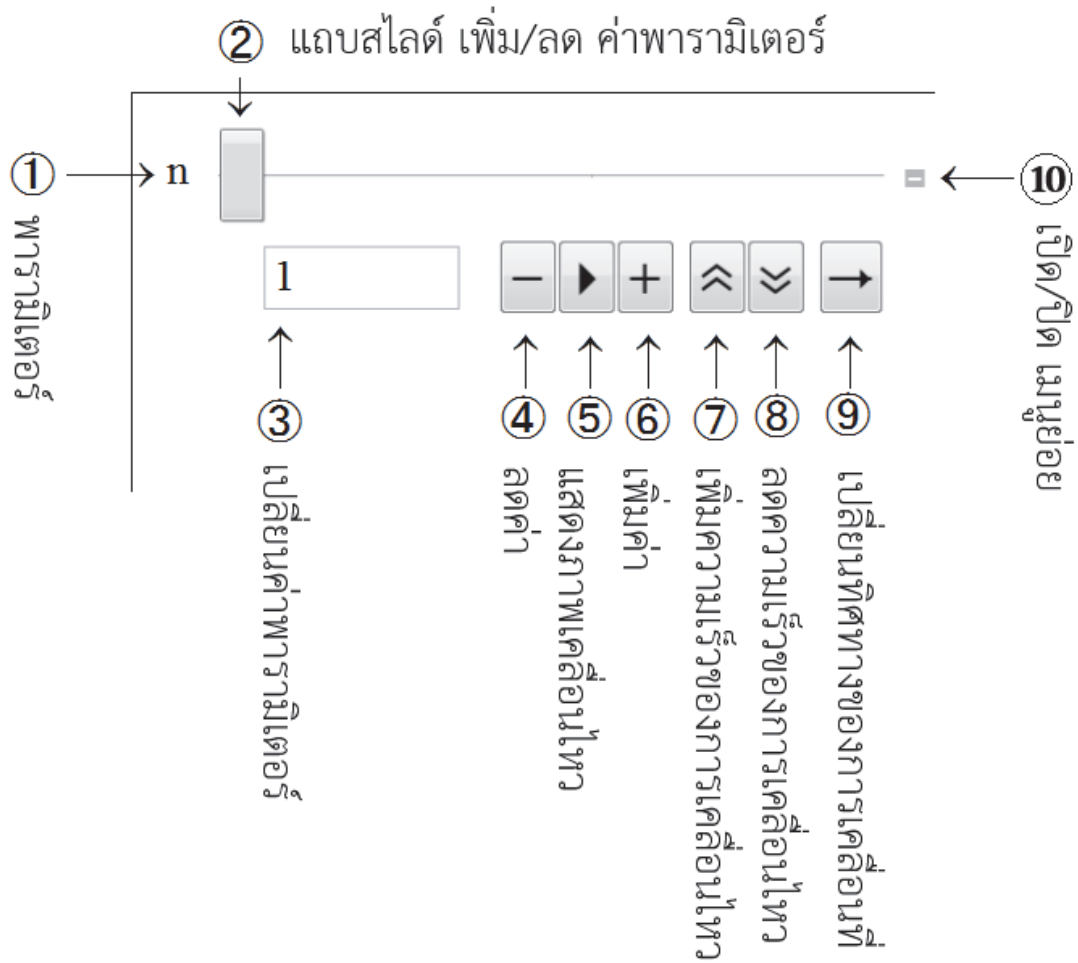


เลื่อนแถบสไลด์ (หมายเลข 1 ในรูปข้างบน) ไปไว้ขวาสุด ค่า n จะกลายเป็น 4 และจะได้กราฟดังนี้

```
In[1]:= Manipulate[Plot[Sin[n*t], {t, 0, 2*Pi}], {n, 1, 4, 0.5}]
```



คลิกที่ปุ่ม  จะได้ภาพเคลื่อนไหวบนจอภาพ

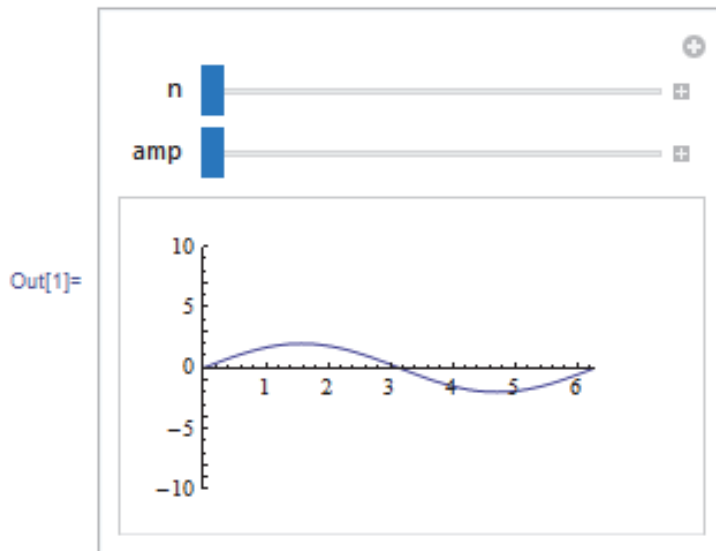


หน้าที่ของปุ่มต่าง ๆ

1. แสดงตัวพารามิเตอร์ที่ใช้ควบคุมการแสดงผลของกราฟ
2. แถบสไลด์เพื่อ เพิ่ม/ลด ค่าพารามิเตอร์ซึ่งจะ เพิ่ม/ลด ค่าตามที่กำหนดไว้ในคำสั่ง
3. เปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์โดยการพิมพ์ตัวเลข
4. ปุ่มเพิ่มค่าพารามิเตอร์ เพิ่มทีละค่าตามที่กำหนดไว้ในคำสั่ง
5. แสดงภาพเคลื่อนไหว หรือ สั่งให้หยุดแสดงการเคลื่อนไหว
6. ปุ่มลดค่าพารามิเตอร์ ลดทีละค่าตามที่กำหนดไว้ในคำสั่ง
7. เพิ่มความเร็วของการเคลื่อนไหว
8. ลดความเร็วของการเคลื่อนไหว
9. เปลี่ยนทิศทางของการเคลื่อนไหว ซ้ายไปขวา ขวาไปซ้าย หรือ ซ้ายไปขวาและขวาไปซ้ายสลับกัน
10. ปุ่ม เปิด/ปิด เมนูย่อยของการแสดงภาพเคลื่อนไหว

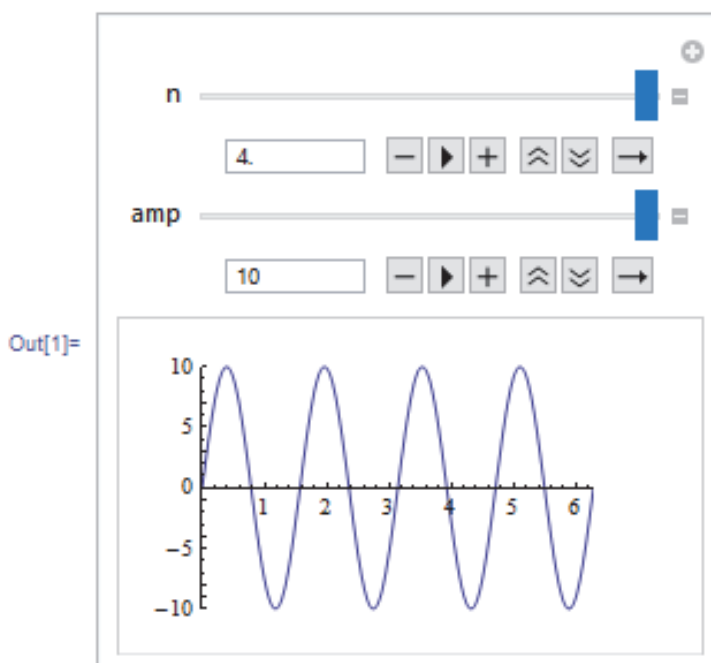
การเขียนกราฟเคลื่อนไหวแบบมีตัวพารามิเตอร์ 2 ตัว เช่นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก  $y = \text{amp} \sin(nt)$  เมื่อเวลา  $t$  อยู่บนช่วง  $[0, 2\pi]$  และมี  $n, \text{amp}$  เป็นตัวพารามิเตอร์

```
In[1]:= Manipulate[Plot[amp*Sin[n*t], {t, 0, 2*Pi},
  PlotRange -> {{0, 2*Pi}, {-10, 10}},
  {n, 1, 4, 0.5}, {amp, 2, 10, 2}]
```



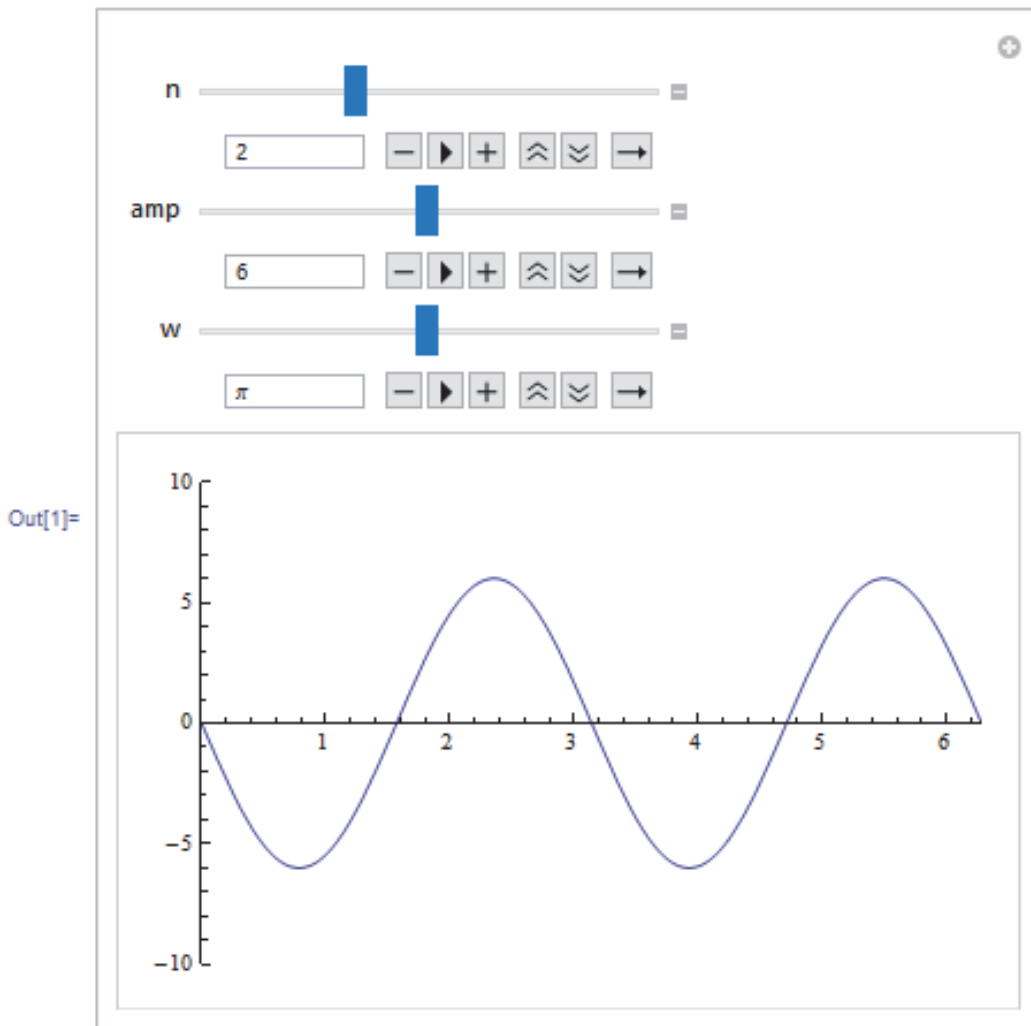
ตัวอย่างกราฟที่เปลี่ยน  $n$  เป็น 4 และ  $\text{amp}$  เป็น 10

```
In[1]:= Manipulate[Plot[amp*Sin[n*t], {t, 0, 2*Pi},
  PlotRange -> {{0, 2*Pi}, {-10, 10}},
  {n, 1, 4, 0.5}, {amp, 2, 10, 2}]
```



การเขียนกราฟเคลื่อนไหวแบบมีตัวพารามิเตอร์ 3 ตัว เช่นการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก  $y = \text{amp} \sin(nt + w)$  เมื่อเวลา  $t$  อยู่บนช่วง  $[0, 2\pi]$  และมี  $n$ ,  $\text{amp}$ ,  $w$  เป็นตัวพารามิเตอร์

```
In[1]:= Manipulate[Plot[amp*Sin[n*t+w], {t, 0, 2*Pi},
  PlotRange -> {{0, 2*Pi}, {-10, 10}},
  {{n, 2}, 1, 4, 0.5},
  {{amp, 6}, 2, 10, 2},
  {{w, Pi}, 0, 2*Pi, Pi/4}]
```



$\{\{n, 2\}, 1, 4, 0.5\}$

$n$  มีตั้งแต่ 1 ถึง 4 เพิ่มค่าครั้งละ 0.5 และกราฟรูปแรกใช้ค่า  $n = 2$

$\{\{\text{amp}, 6\}, 2, 10, 2\}$

$\text{amp}$  มีตั้งแต่ 2 ถึง 10 เพิ่มค่าครั้งละ 2 และ เริ่มกราฟรูปแรกเมื่อ  $\text{amp} = 6$

$\{\{w, \pi\}, 0, 2\pi, \frac{\pi}{4}\}$

$w$  มีตั้งแต่ 0 ถึง  $2\pi$  เพิ่มค่าครั้งละ  $\frac{\pi}{4}$  และ เริ่มกราฟรูปแรกเมื่อ  $w = \pi$

ประยุกต์คำสั่ง Manipulate กับการเขียนเส้นโค้งปฏิบัติการแผนการสุ่มตัวอย่าง (Operating characteristics curve for sampling plan หรือ OC curve)

ให้ ความน่าจะเป็นที่สินค้าแต่ละชิ้นชำรุด =  $t$

โรงงานส่งสินค้ามาจำนวนมาก ทำการตรวจสอบคุณภาพของบางส่วนเพื่อพิจารณาว่าจะยอมรับสินค้าที่นำมาส่งทั้งหมดหรือไม่

โดยทำการสุ่มตัวอย่างสินค้า  $n$  ชิ้น

ข้อตกลง ระหว่างฝ่ายโรงงานที่นำสินค้ามาส่ง กับ ฝ่ายตรวจรับ คือ

ถ้าพบสินค้าชำรุดไม่เกิน  $c$  ชิ้น แล้วจะยอมรับสินค้าทั้งหมด

ให้  $X$  = จำนวนสินค้าชำรุดที่ได้

เพราะฉะนั้น  $X = 0, 1, 2, \dots, n$  และ  $X$  เป็นตัวแปรสุ่มทวินาม

$$P(X = x) = \binom{n}{x} t^x (1-t)^{n-x}$$

$$= \text{PDF}[\text{BinomialDistribution}[n, t], x]$$

เพราะว่า ถ้าพบสินค้าชำรุดไม่เกิน  $c$  ชิ้น แล้วจะยอมรับสินค้าทั้งหมด

เพราะฉะนั้น  $P(\text{ยอมรับสินค้าทั้งหมด}) = P(X \leq c)$

$$= \sum_{x=0}^c P(X = x)$$

ให้  $P[t, n, c] = P(\text{ยอมรับสินค้าทั้งหมด})$

=  $P(\text{ตรวจสอบของ } n \text{ ชิ้น พบของชำรุดไม่เกิน } c \text{ ชิ้น ขณะที่สัดส่วนของชำรุดเท่ากับ } t)$

$$\text{เพราะฉะนั้น } P[t, n, c] = \sum_{x=0}^c P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^c \binom{n}{x} t^x (1-t)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^c \text{PDF}[\text{BinomialDistribution}[n, t], x]$$

กราฟของ  $y = P(t, n, c)$  เรียกว่า โค้งปฏิบัติการแผนการสุ่มตัวอย่าง (Operating characteristics curve for sampling plan หรือ OC curve)

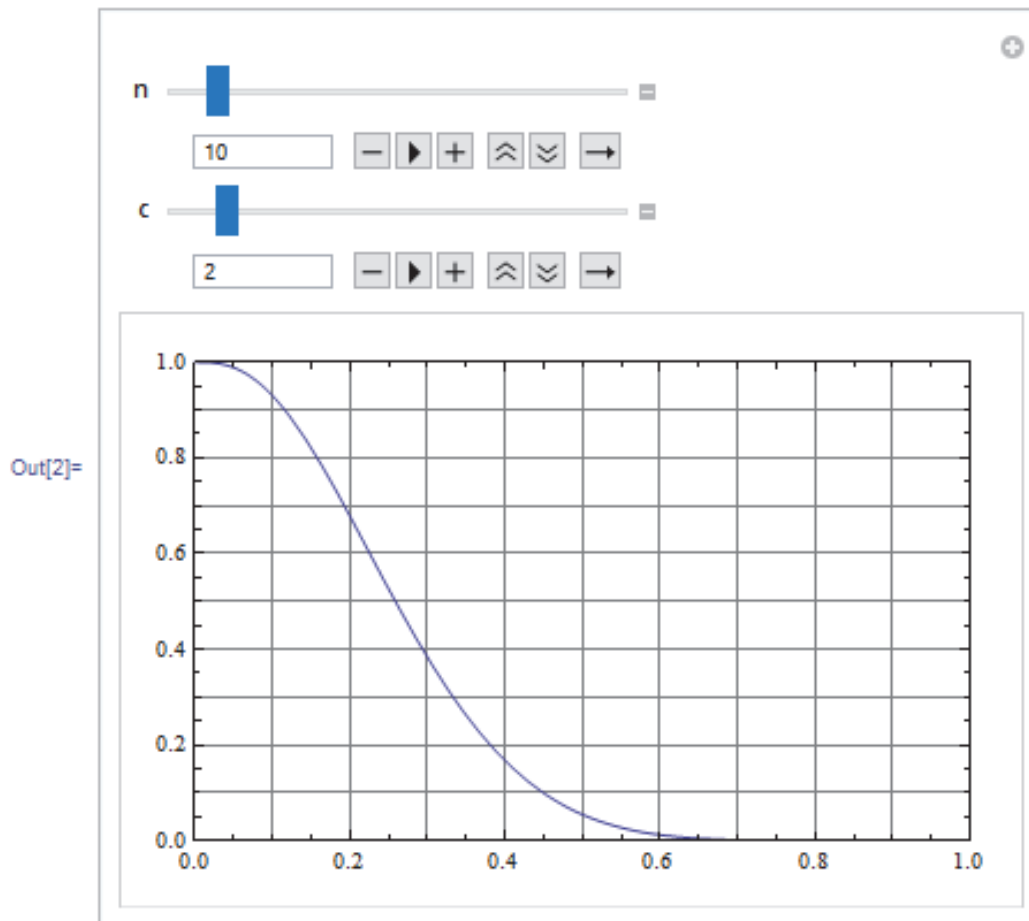
กราฟ OC-curve 1 เส้นมีค่าพารามิเตอร์ 2 ตัวคือ n และ c

$$\text{In}[1]:= P[t_, n_, c_] := \sum_{x=0}^c \text{PDF}[\text{BinomialDistribution}[n, t], x]$$

```

In[2]:= Manipulate[Plot[P[t, n, c], {t, 0, 1},
  PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, Frame -> True,
  GridLines -> {{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1}}],
  {{n, 10}, 1, 100, 1},
  {{c, 2}, 1, n, 1}]

```



Line Input[1] กำหนดสูตร  $P[t, n, c]$

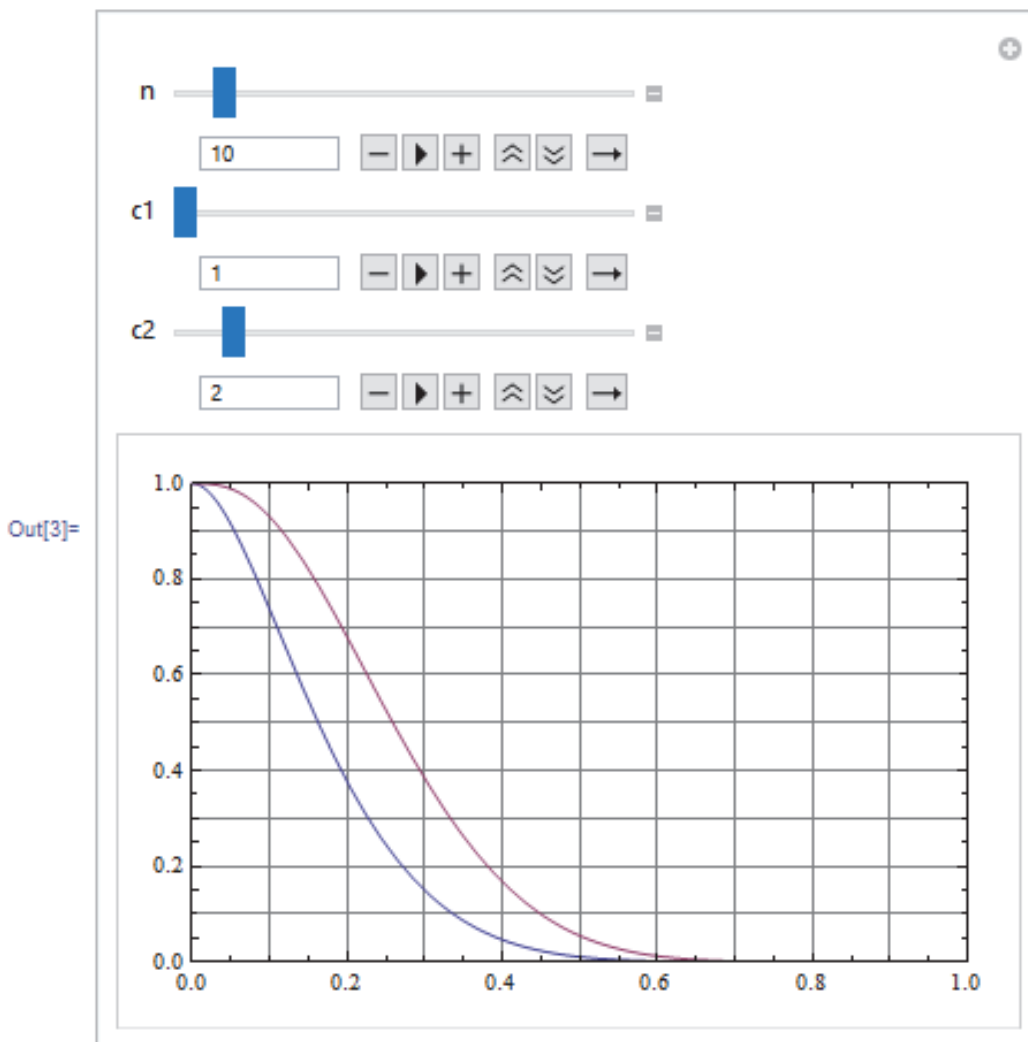
Line Input[2]  $\text{Plot}[P[n,t,c],\{t,0,1\}]$  เป็นคำสั่งเขียนกราฟมีตัวพารามิเตอร์ 2 ตัว คือ n, c

$\{\{n, 10\}, 1, 100, 1\}$  n มีตั้งแต่ 1 ถึง 100 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า n = 10

$\{\{c, 2\}, 1, n, 1\}$  c มีตั้งแต่ 1 ถึง n เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า c = 2

กราฟ OC-curve 2 เส้นมีค่าพารามิเตอร์ 3 ตัวคือ  $n$ ,  $c_1$  และ  $c_2$

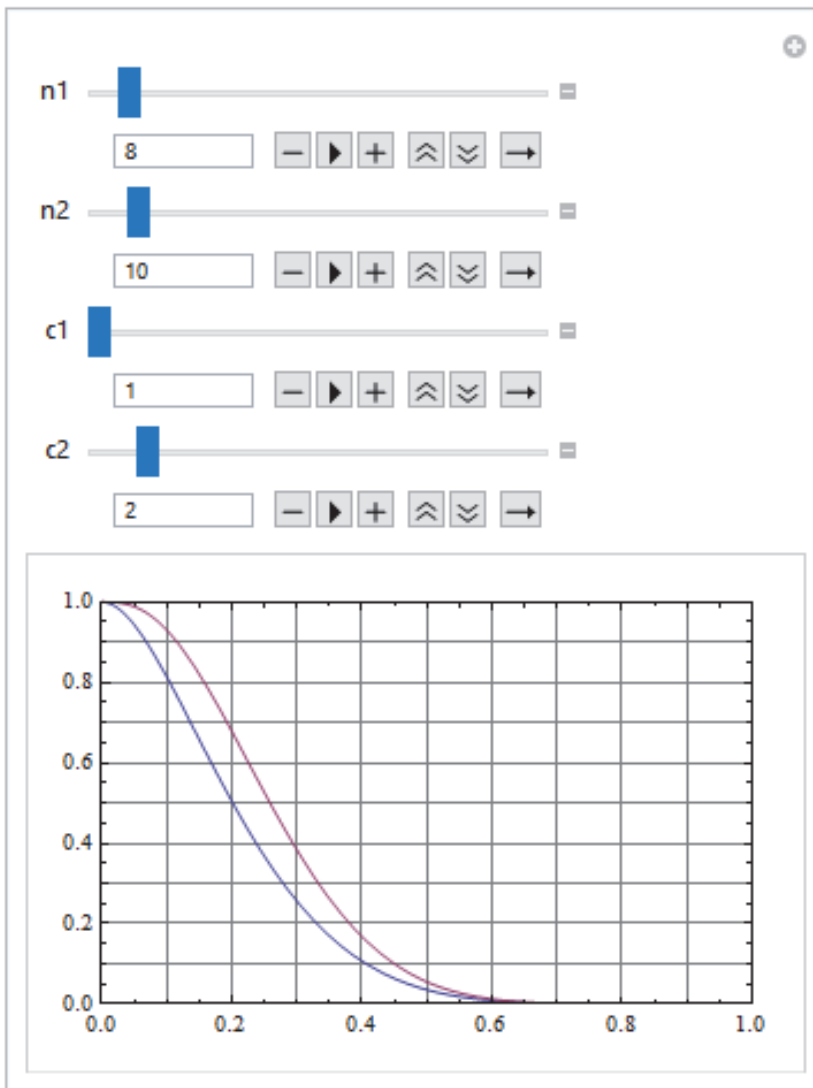
```
In[3]:= Manipulate[Plot[{P[t, n, c1], P[t, n, c2]}, {t, 0, 1},
  PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, Frame -> True,
  GridLines -> {{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1}}],
  {{n, 10}, 1, 100, 1},
  {{c1, 1}, 1, n, 1},
  {{c2, 2}, 1, n, 1}]
```



Line Input[3] Plot[{P[t,n,c1],{t,0,1}], P[t,n,c2],{t,0,1}] เป็นคำสั่งเขียนกราฟ 2 เส้น  
 {{n, 10},1,100,1}  $n$  มีตั้งแต่ 1 ถึง 100 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า  $n = 10$   
 {{c1, 1},1,n,1}  $c_1$  มีตั้งแต่ 1 ถึง  $n$  เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า  $c_1 = 1$   
 {{c2, 2},1,n,1}  $c_2$  มีตั้งแต่ 1 ถึง  $n$  เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า  $c_2 = 2$

กราฟ OC-curve 2 เส้นมีค่าพารามิเตอร์ 4 ตัวคือ n1, n2, c1 และ c2

```
In[4]:= Manipulate[Plot[{P[t, n1, c1], P[t, n2, c2]}, {t, 0, 1},
  PlotRange -> {{0, 1}, {0, 1}}, Frame -> True,
  GridLines -> {{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1}}],
  {{n1, 8}, 1, 100, 1}, {{n2, 10}, 1, 100, 1},
  {{c1, 1}, 1, n1, 1}, {{c2, 2}, 1, n2, 1}]
```



Line Input[4] Plot[{P[t,n1,c1],{t,0,1}], P[t,n2,c2],{t,0,1}]} เป็นคำสั่งเขียนกราฟ 2 เส้น  
 {{n1, 10},1,100,1} n1 มีตั้งแต่ 1 ถึง 100 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า n1 = 8  
 {{n2, 8},1,100,1} n2 มีตั้งแต่ 1 ถึง 100 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า n2 = 10  
 {{c1, 1},1,n1,1} c1 มีตั้งแต่ 1 ถึง n1 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า c1 = 1  
 {{c2, 2},1,n2,1} c2 มีตั้งแต่ 1 ถึง n2 เพิ่มค่าครั้งละ 1 และกราฟรูปแรกใช้ค่า c2 = 2



## การใช้งานเบื้องต้นเกี่ยวกับโปรแกรม Mathematica

ในบทนี้จะเป็นการใช้งานเบื้องต้นเกี่ยวกับโปรแกรม Mathematica เช่นการพิมพ์สูตร การนำสูตรเก่ากลับมาใช้ใหม่ การอ้างอิงถึงผลลัพธ์เพื่อนำกลับมาใช้ใหม่ การบันทึกแฟ้มข้อมูล การปรับแต่ง การแสดงผลตัวเลข การใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปที่มีในโปรแกรม Mathematica เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

### 4.1 การกำหนดผลการคำนวณให้แสดงผลลัพธ์ตามที่ต้องการ

โปรแกรม Mathematica สามารถกำหนดการแสดงผลการคำนวณได้หลายแบบเช่น

ตัวอย่างการคำนวณ	คำอธิบาย
<pre>In[1]:= 22 / 7 Out[1]= <math>\frac{22}{7}</math></pre>	เมื่อไม่กำหนดเงื่อนไขการแสดงผล โปรแกรมจะแสดงผลในรูปแบบเศษส่วน
<pre>In[2]:= 22 / 7 . Out[2]= 3.14286</pre>	ถ้าตัวเลขที่คำนวณมีจุดทศนิยมแล้วผลการคำนวณที่ได้จะแสดงผลเป็นเลขทศนิยม
<pre>In[3]:= 22 / 7 // N Out[3]= 3.14286</pre>	มี //N ท้ายสูตร จะเป็นการบังคับให้แสดงผลเป็นเลขทศนิยม

<pre>In[4]:= N[22 / 7, 8] Out[4]= 3.1428571  In[5]:= N[22 / 7, 15] Out[5]= 3.14285714285714</pre>	<p><math>N[M, k]</math> คำสั่งแสดงผล <math>M</math> เป็นเลขทศนิยมที่มีเลขนัยสำคัญ <math>k</math> ตัว และ <math>M</math> ต้องไม่มีพจน์ของเลขทศนิยม</p> <p>ตัวอย่างเช่น <math>N[22./7,15]</math> จะแสดงผลเหมือน <math>22./7</math></p> <pre>In[16]:= N[22. / 7, 15] Out[16]= 3.14286</pre>
<pre>In[6]:= NumberForm[22 / 7., 6] Out[6]//NumberForm= 3.14286  In[7]:= NumberForm[22 / 7., 10] Out[7]//NumberForm= 3.142857143</pre>	<p><math>NumberForm</math>[สูตร, <math>k</math>] คำสั่งแสดงผลเป็นเลขทศนิยมที่มีตัวเลขนัยสำคัญ <math>k</math> ตัว</p>
<pre>In[8]:= ScientificForm[3.414 ^ 20, 6] Out[8]//ScientificForm= 4.62669 × 10<sup>10</sup>  In[9]:= ScientificForm[3.414 ^ 20, 10] Out[9]//ScientificForm= 4.626689296 × 10<sup>10</sup></pre>	<p><math>ScientificForm[x, k]</math> แสดงผลเป็น <math>N \times 10^m</math> โดยที่ <math>N</math> มีตัวเลขนัยสำคัญ <math>k</math> ตัว</p>
<pre>In[10]:= EngineeringForm[3.414 ^ 20, 6] Out[10]//EngineeringForm= 46.2669 × 10<sup>9</sup>  In[11]:= EngineeringForm[3.414 ^ 20, 10] Out[11]//EngineeringForm= 46.26689296 × 10<sup>9</sup></pre>	<p><math>EngineeringForm[x, k]</math> แสดงผลเป็น <math>N \times 10^m</math> โดยที่ <math>N</math> มีตัวเลขนัยสำคัญ <math>k</math> ตัว และ 3 ทหาร <math>m</math> ลงตัว</p>

### 4.2 การนำผลการคำนวณเก่ามาใช้ใน Line Input ใหม่

การนำผลการคำนวณเก่าที่เคยคำนวณไว้แล้วกลับมาใช้ใหม่ มีวิธีทำดังนี้

**วิธีที่ 1** ใช้การอ้างถึงด้วยสัญลักษณ์ %, %%, %%% , ...

เช่น % หมายถึงผลการคำนวณล่าสุดย้อนหลัง 1 ขั้นตอน

%% หมายถึงผลการคำนวณล่าสุดย้อนหลัง 2 ขั้นตอน

%%% หมายถึงผลการคำนวณล่าสุดย้อนหลัง 3 ขั้นตอน

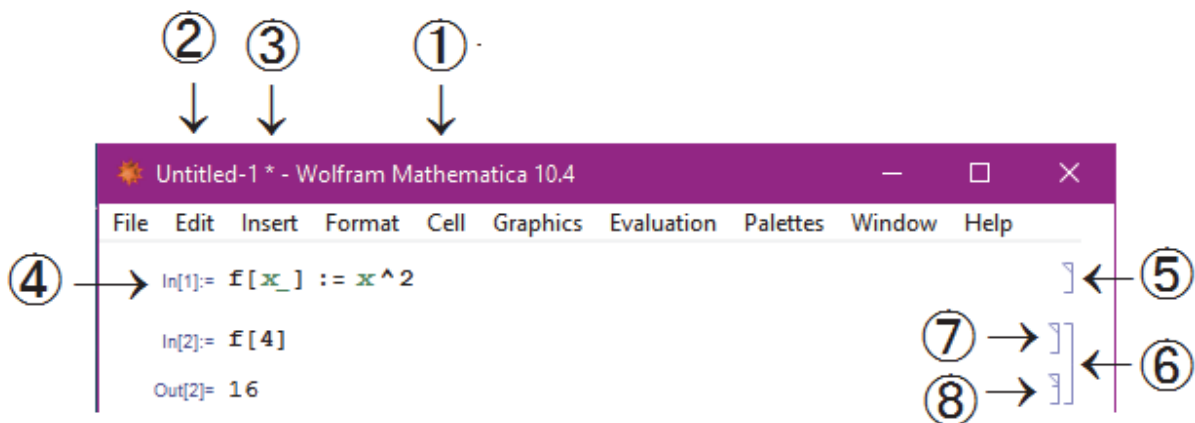
**วิธีที่ 2** %k หมายถึงผลการคำนวณจาก Line Output ตัวที่ k

**วิธีที่ 3** ใช้การอ้างถึงด้วย Out[k] หมายถึงผลการคำนวณใน Line Output[k]

พิมพ์	ความหมาย
In[1]:= 1 + 2 Out[1]= 3  In[2]:= 4 * 5 Out[2]= 20	เริ่มต้นการคำนวณเพื่อเตรียม Line In และ Line Out ไว้อ้างอิง
In[3]:= 5 + % Out[3]= 25	ใน Line Input[3] 5 + % คือการบวก 5 ด้วยผลลัพธ์ล่าสุดจาก Out[2]
In[4]:= 35 + %% Out[4]= 55	ใน Line Input[4] 35 + %% คือการบวก 35 ด้วยผลลัพธ์ย้อนหลัง 2 ขั้นตอน ซึ่งในตัวอย่างนี้คือ 20 จาก Out[1]
In[5]:= 5 + %2 Out[5]= 25	ใน Line Input[5] คือการบวก 5 ด้วยผลลัพธ์จาก Out[2]
In[6]:= 5 + Out[1] Out[6]= 8	ใน Line Input[6] คือการบวก 5 ด้วยผลลัพธ์จาก Out[1]
In[7]:= 3 ^ Out[1] Out[7]= 27	ผลการคำนวณอ้างอิงจากค่าที่ได้จาก Line Output[1]
In[8]:= % + %3 Out[8]= 52	ผลการคำนวณอ้างอิงจากค่าที่ได้จากค่าที่ได้ล่าสุดจาก Line Out[7] + ค่าจาก Line Output[3]

### 4.3 การ copy สูตร และ การ paste สูตร

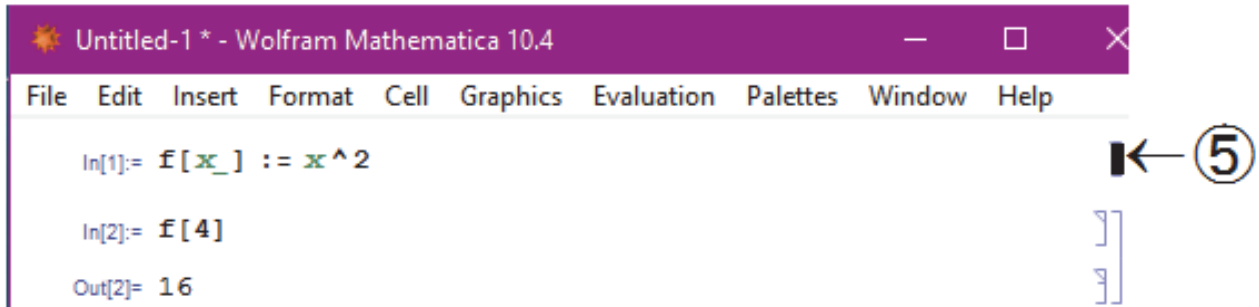
การทำงานใน Window notebook ของโปรแกรม Mathematica มีสิ่งที่เราพิมพ์ข้อมูลเข้าไปและมีสิ่งที่โปรแกรม Mathematica แสดงผลการคำนวณเกิดขึ้นระหว่างการทำงานเราสามารถ Copy ผลการคำนวณหรือสูตรต่าง ๆ บนจอภาพไปใช้งานได้  
จากตัวอย่างต่อไปนี้จะมีบริเวณที่สำคัญเช่น



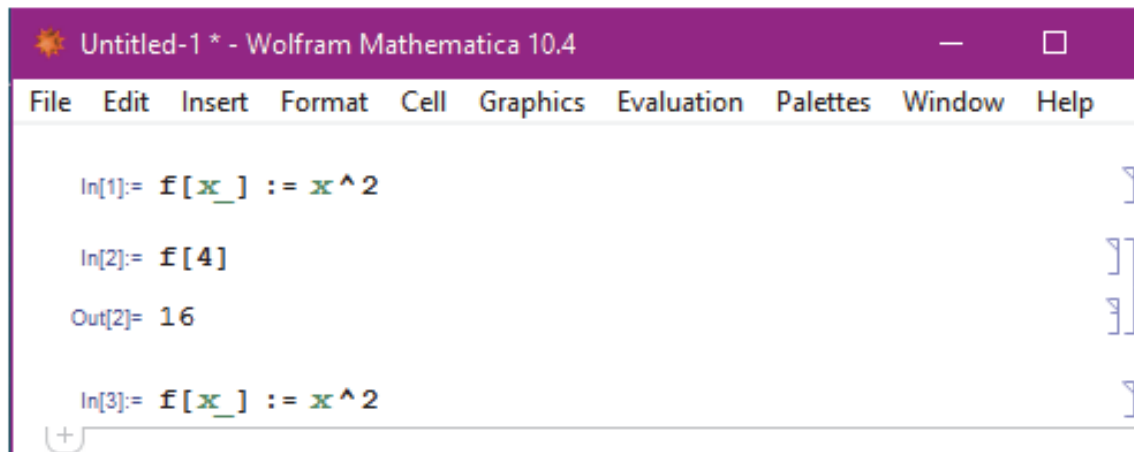
1. สัญลักษณ์ที่บอกว่าเรากำลังทำงานใน Window notebook ของ Mathematica
2. ชื่อแฟ้มข้อมูล notebook (\*.nb) ของ Mathematica  
ในกรณีที่เข้าใหม่และยังไม่ได้บันทึกแฟ้ม Mathematica จะตั้งชื่อชั่วคราวว่า Untitled-1
3. การนำแฟ้มเก่ามาแก้ไขหากยังไม่ได้บันทึก Mathematica จะเตือนเราด้วยเครื่องหมายดอกจันเหนือชื่อ
4. Line Input[...] เป็นบริเวณที่เราพิมพ์คำสั่งต่าง ๆ เพื่อการคำนวณ
5. สัญลักษณ์วงเล็บที่คลุม Line Input[...]  
ภายในสัญลักษณ์แบบนี้เราสามารถแก้ไขสูตรในบรรทัดนั้นและสั่งคำนวณใหม่ได้  
**หมายเหตุ** เมื่อแก้ไขและสั่งคำนวณ Mathematica จะถือว่า Line Input นั้นเป็น Line Input ใหม่ล่าสุด ขอให้สังเกตที่หมายเลข Line Input[...]
6. สัญลักษณ์วงเล็บที่คลุม Line Input[...] และ Line Output[...] ที่อยู่ในชุดเดียวกัน
7. ส่วนของ Line Input
8. ส่วนของ Line Output (**หมายเหตุ** ในส่วนของ Line Output จะแก้ไขสูตรไม่ได้)

การ Copy สูตรมีขั้นตอนดังนี้

- ขั้นที่ 1** คลิกเมาส์ที่วงเล็บหมายเลข 5 จะขึ้นแถบสีดำดังรูป  
ทำการ copy โดยการกด <Ctrl> + C



- ขั้นที่ 2** คลิกเมาส์ในบริเวณใต้บรรทัด Out[2]  
กด <Ctrl> + V แล้วกด <Shift>+↵  
สิ่งที่เรา copy จะถูก Paste เพื่อจะได้ทำการแก้ไขเป็น Line Input ใหม่ต่อไป



### 4.3 การบันทึกแฟ้ม Notebook.nb

จากตัวอย่างการทำงานใน Window Notebook ดังภาพ

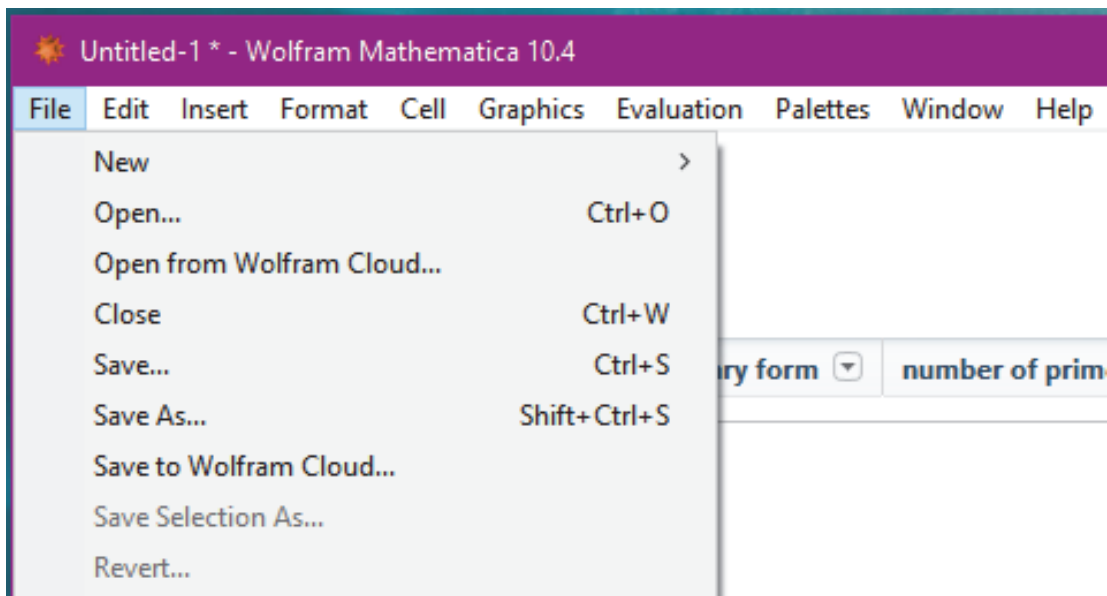
```

Untitled-1 * - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

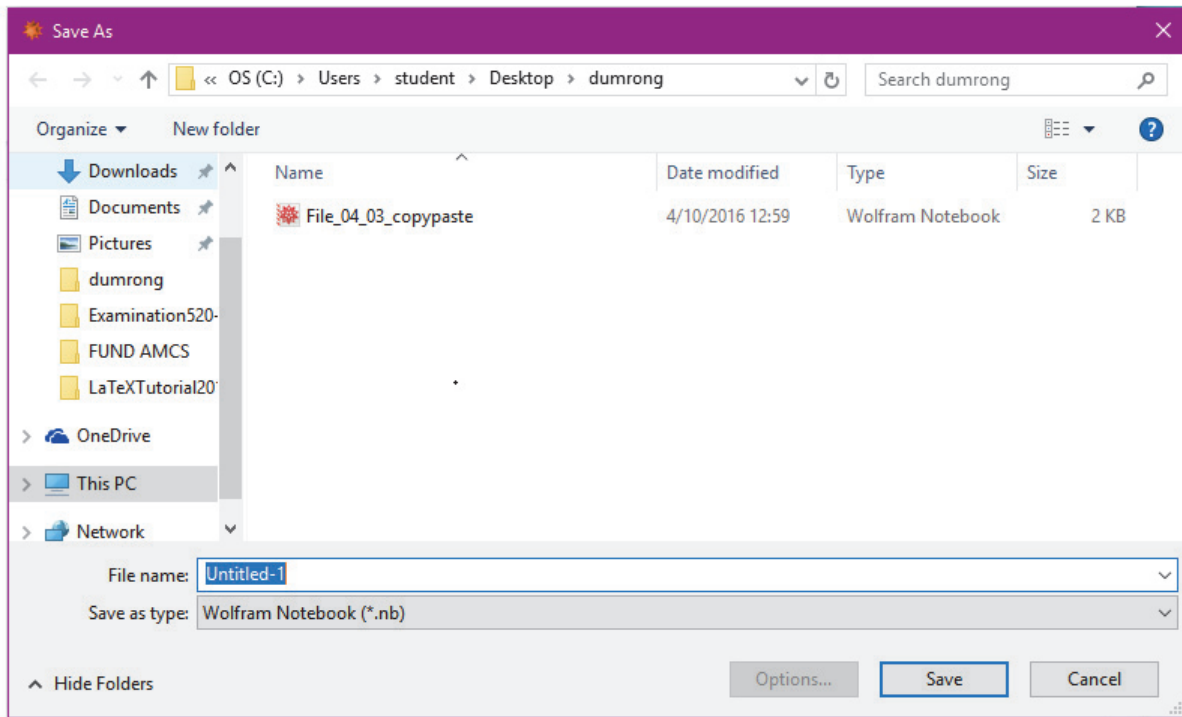
In[1]:= f[x_] := x^2
In[2]:= f[4]
Out[2]= 16
In[3]:= f[x_] := x^2
  
```

การ Save แฟ้ม Notebook มีขั้นตอนดังนี้

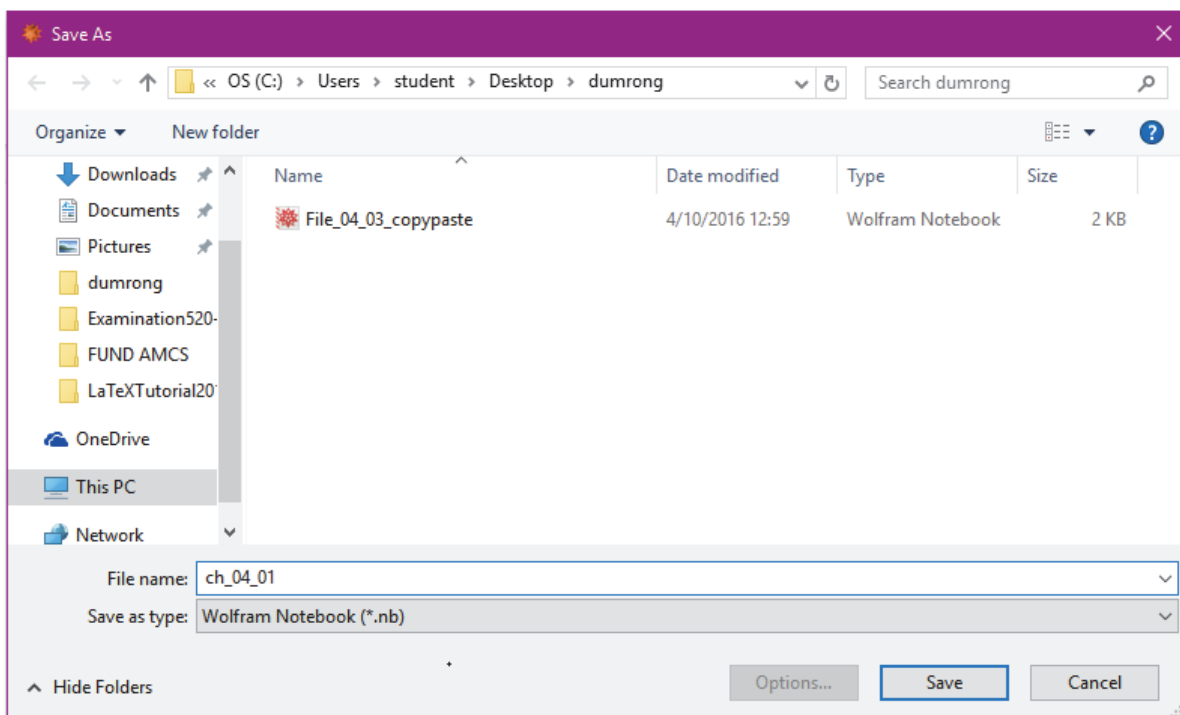
ขั้นที่ 1 คลิกคำสั่ง File



ขั้นที่ 2 คลิกเลือกคำสั่งย่อย Save จะได้เมนูย่อยของการบันทึกเพิ่มข้อมูล

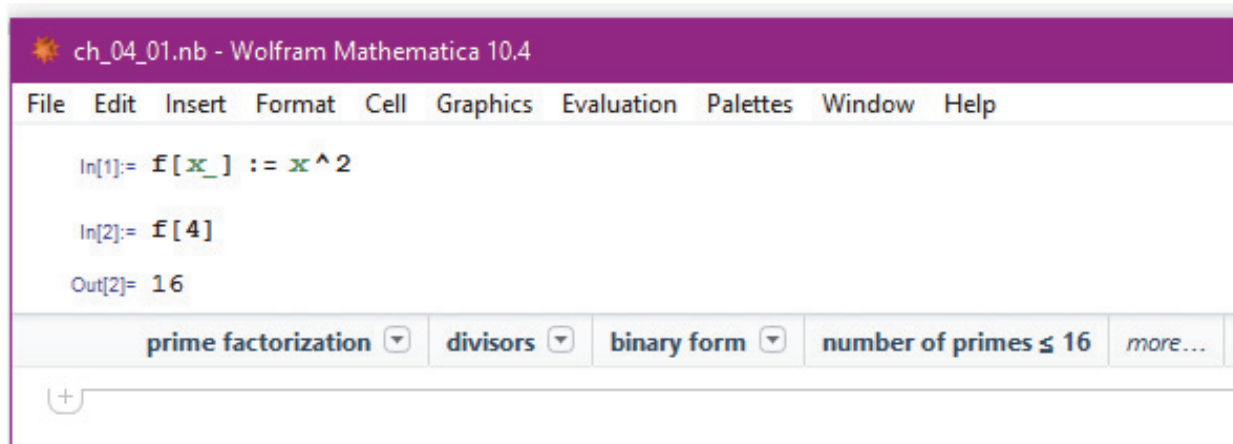


ขั้นที่ 3 พิมพ์ชื่อเพิ่มเช่น ch\_04\_01



ขั้นที่ 4 คลิกปุ่มคำสั่ง Save โปรแกรมจะทำการบันทึก Notebook เป็นชื่อ ch\_04\_01.nb

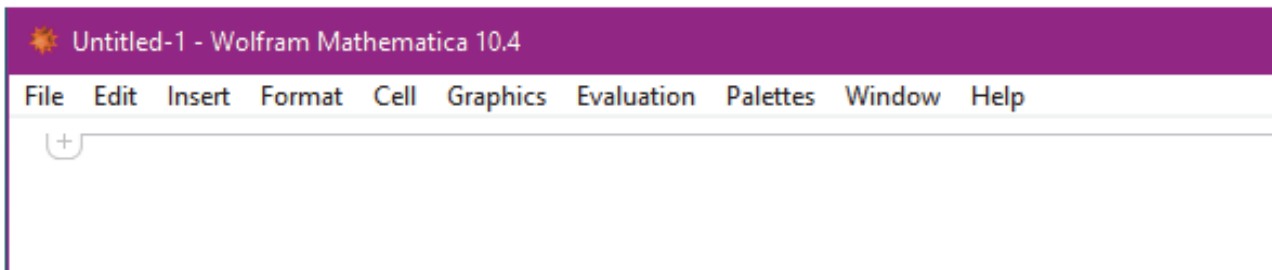
จะเห็นว่าตรงชื่อเดิม Untitled-1\* เปลี่ยนเป็น ch\_04\_01.nb





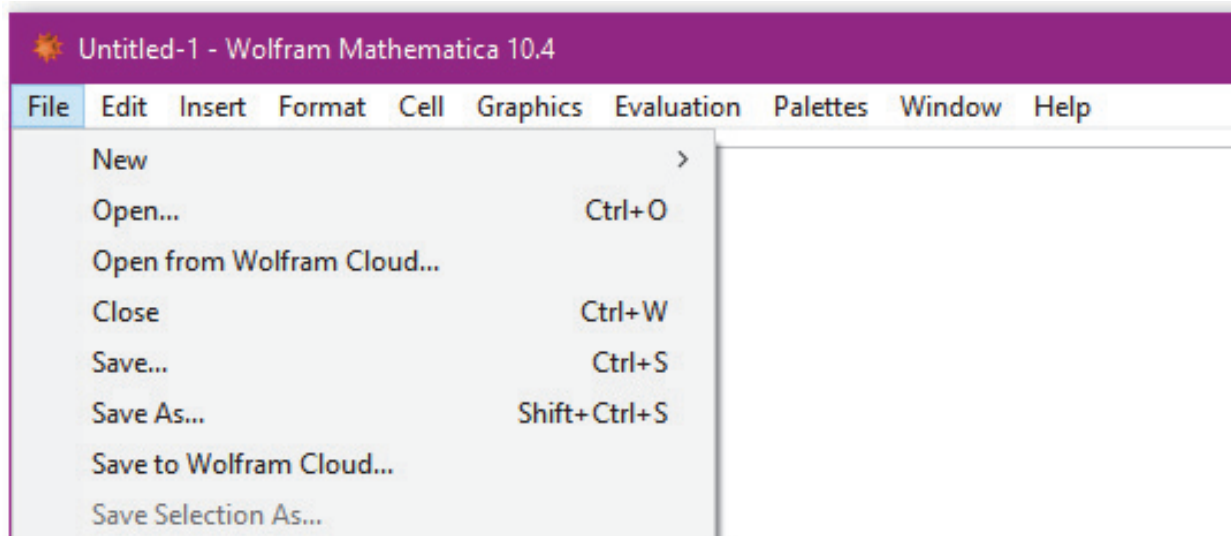
#### 4.4 การเปิดแฟ้ม Notebook.nb

ขณะทำงานใน Window Notebook ครั้งแรก

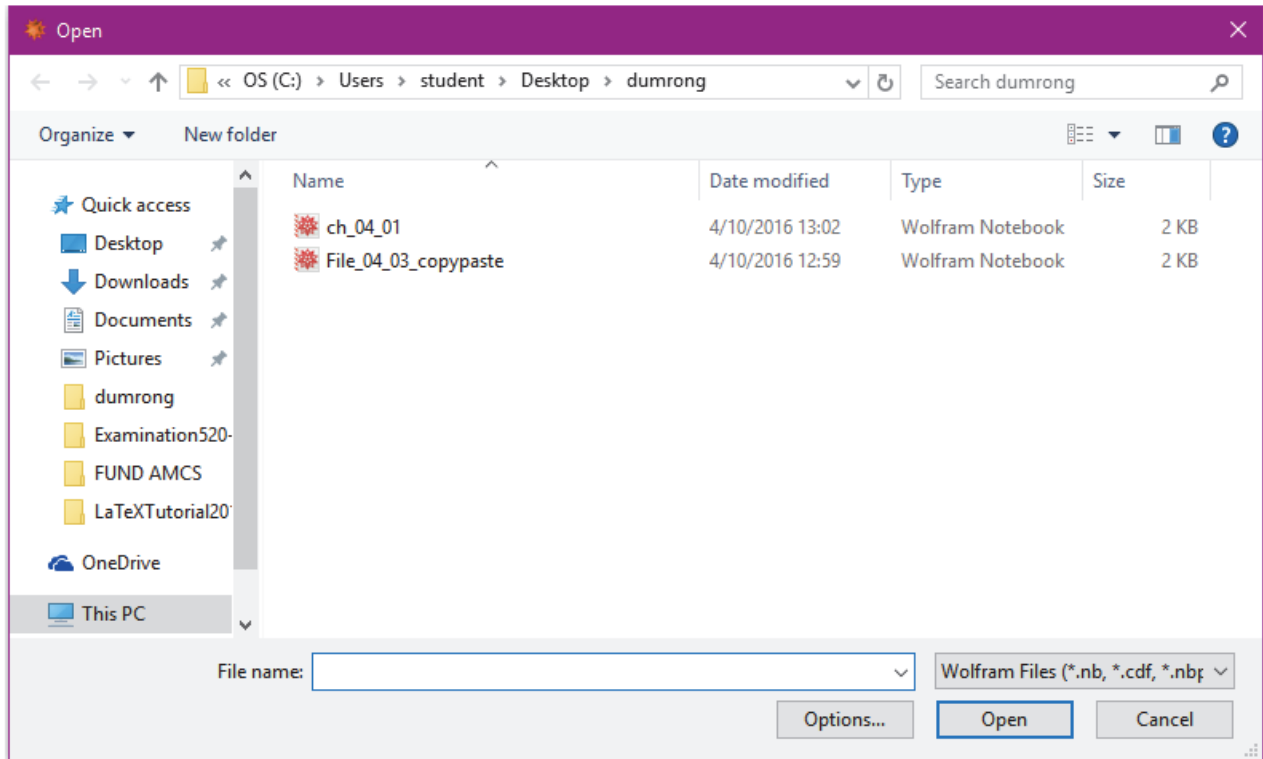


การเปิดแฟ้มข้อมูลมีขั้นตอนดังนี้

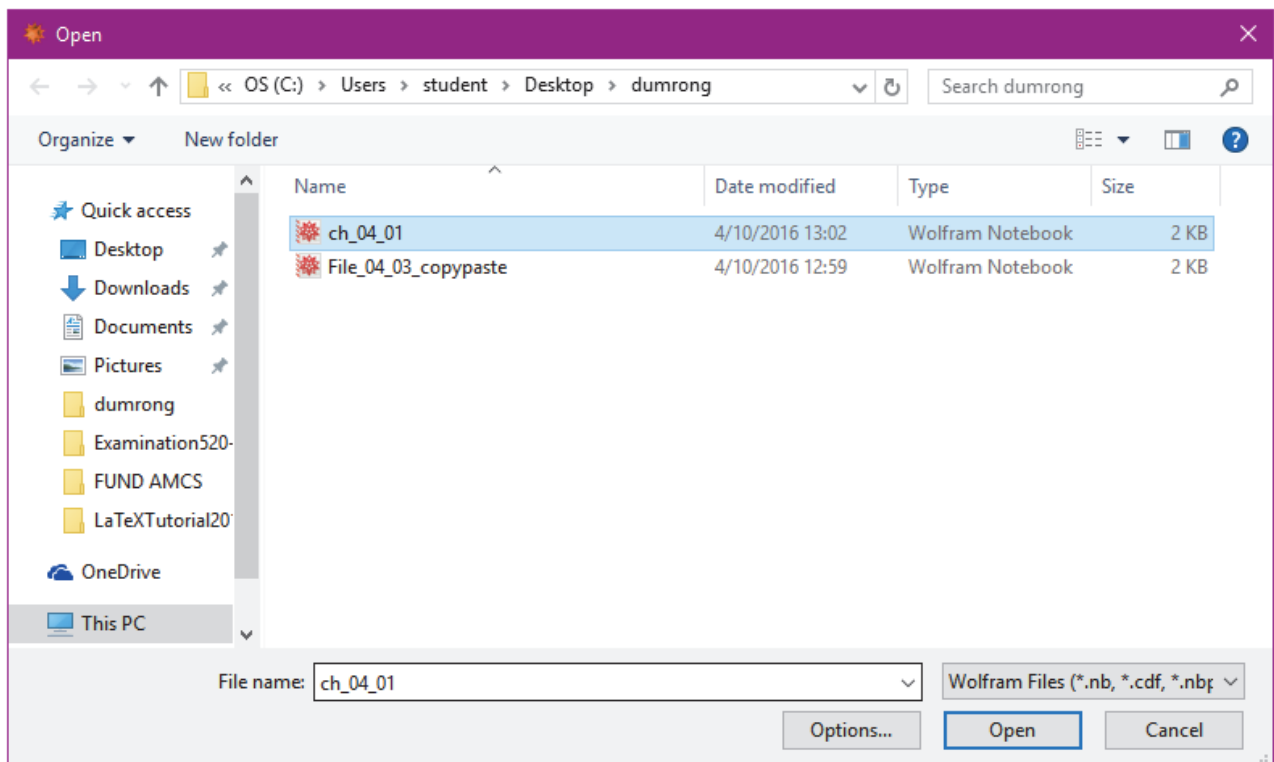
**ขั้นที่ 1** คลิกคำสั่ง File



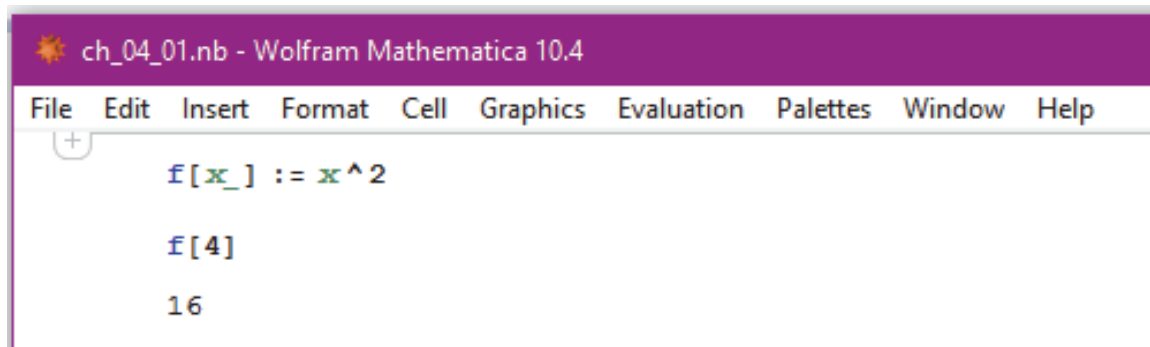
ขั้นที่ 2 เลือกคำสั่งย่อย Open จะได้เมนูย่อยของการเปิดแฟ้มข้อมูล



ขั้นที่ 3 ในช่อง File name: ให้พิมพ์ชื่อ Notebook ch\_04\_01



ขั้นที่ 4 คลิกปุ่มคำสั่ง Open จะได้แฟ้ม ch\_04\_01.nb ที่บันทึกไว้ขึ้นมาบนจอภาพ

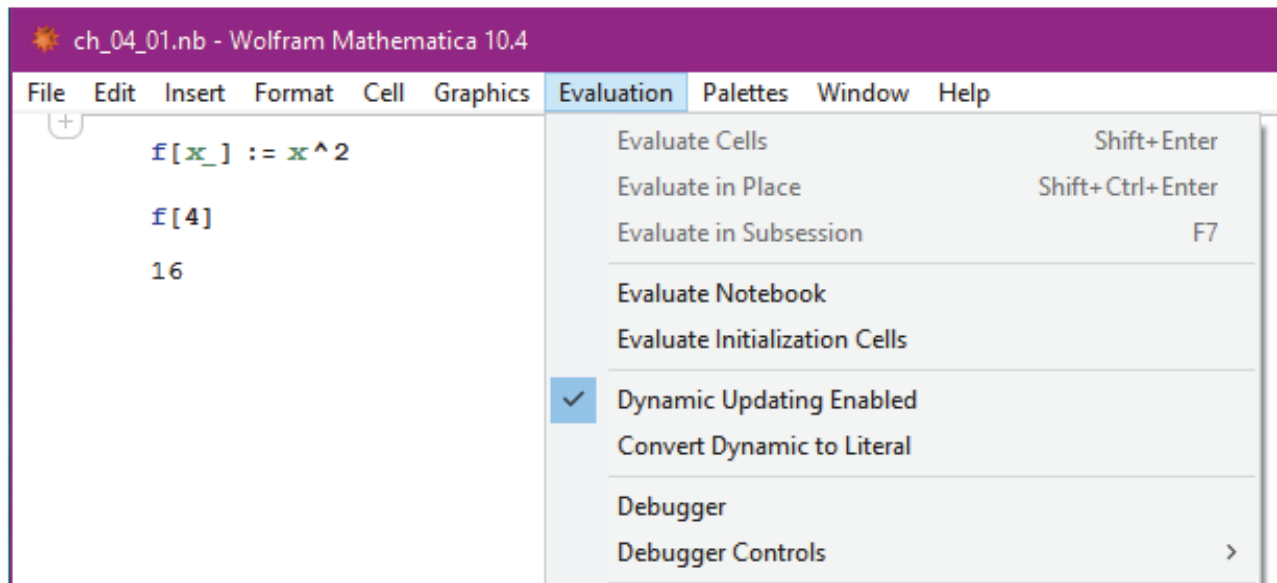


```
ch_04_01.nb - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
+
f[x_] := x^2
f[4]
16
```

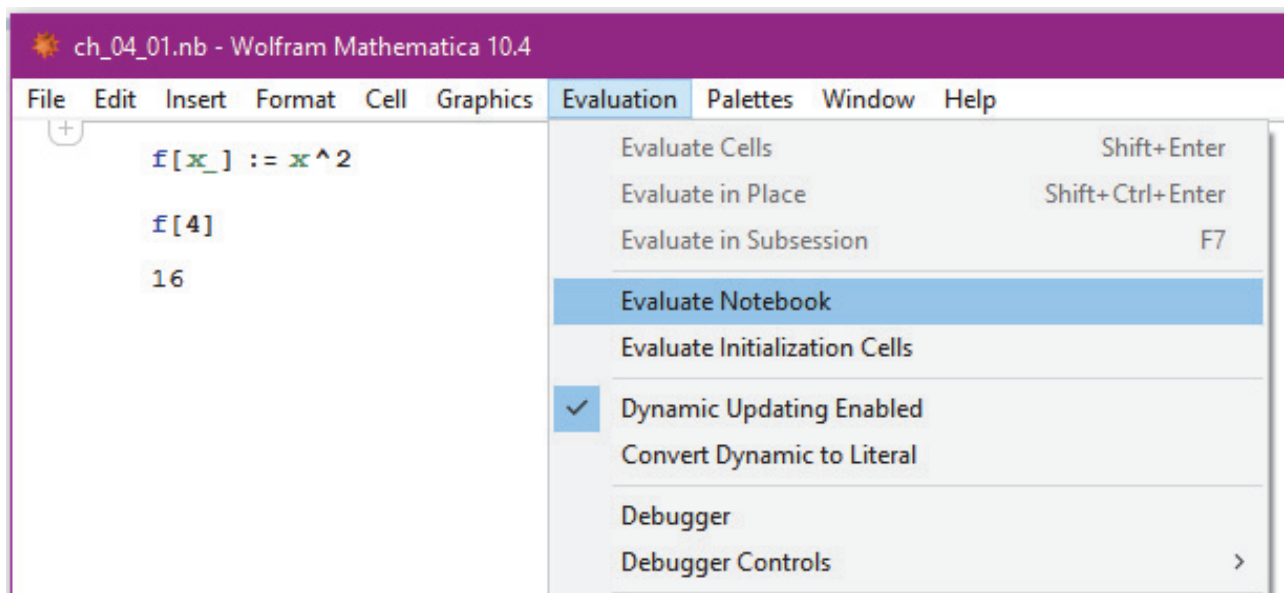
หมายเหตุ เมื่อเปิดแฟ้ม Notebook เข้ามาใหม่โปรแกรม Mathematica ยังไม่เติมหมายเลข Line Input และ Line Output ให้

การสั่งให้แฟ้ม Npnotebook ที่เปิดขึ้นมาใหม่ทำการคำนวณมีขั้นตอนดังนี้

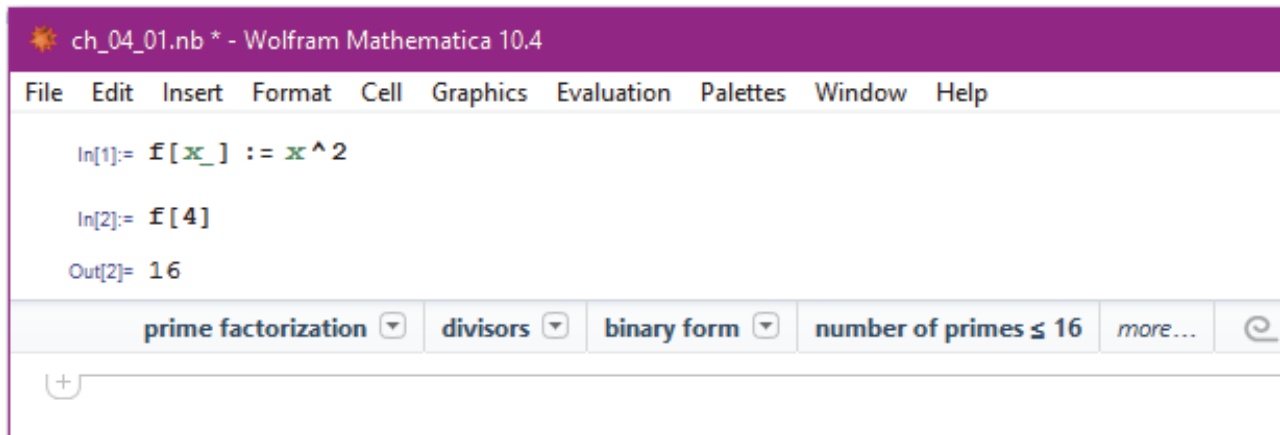
ขั้นที่ 1 เลือกคำสั่ง Evaluation



ขั้นที่ 2 คลิกที่ Evaluate Notebook



จะได้ผลการทำงานของ Notebook พร้อมทั้งหมายเลข Line Input และ Line Output ดังนี้



The screenshot shows the Mathematica 10.4 interface with a notebook titled "ch\_04\_01.nb \*". The menu bar includes File, Edit, Insert, Format, Cell, Graphics, Evaluation, Palettes, Window, and Help. The input area contains two lines of code: "In[1]:= f[x\_] := x^2" and "In[2]:= f[4]". The output area shows "Out[2]= 16". Below the output, there is a palette with buttons for "prime factorization", "divisors", "binary form", "number of primes ≤ 16", and "more...".

```
ch_04_01.nb * - Wolfram Mathematica 10.4
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
In[1]:= f[x_] := x^2
In[2]:= f[4]
Out[2]= 16
prime factorization divisors binary form number of primes ≤ 16 more...
```

## 4.5 ฟังก์ชันสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์และฟังก์ชันอื่น ๆ ที่สำคัญ

## 4.5.1 ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
Abs[z]	ค่าสัมบูรณ์ของ z หรือ ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน z  <pre>In[1]:= {Abs[-3], Abs[-3 + 4 i]}</pre> <pre>Out[1]:= {3, 5}</pre> <p>หมายเหตุ กด &lt;Esc&gt;ii&lt;Esc&gt; จึงจะได้สัญลักษณ์ <b>i</b></p>
Arg[z]	ค่าอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z  <pre>In[2]:= Arg[1 + i]</pre> <pre>Out[2]:= <math>\frac{\pi}{4}</math></pre>
Re[z] Im[z] Conjugate[z]	ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ และค่าสังยุคของ z  <pre>In[3]:= {Re[3 + 4 i], Im[3 + 4 i], Conjugate[3 + 4 i]}</pre> <pre>Out[3]:= {3, 4, 3 - 4 i}</pre>
Exp[x]	เอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน ( $e^x$ )  <pre>In[4]:= {Exp[0], Exp[1], N[Exp[1], 20]}</pre> <pre>Out[4]:= {1, e, 2.7182818284590452354}</pre>
Ceiling[x]	จำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ x  <pre>In[5]:= {Ceiling[-2.9], Ceiling[2.9], Ceiling[2.1]}</pre> <pre>Out[5]:= {-2, 3, 3}</pre>
Round[x]	การปัดเศษจำนวนจริง x ให้เป็นตัวเลขจำนวนเต็มทีใกล้ที่สุด  <pre>In[6]:= {Round[-2.51], Round[-2.49], Round[3.51]}</pre> <pre>Out[6]:= {-3, -2, 4}</pre>

Floor[x]	จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ x  In[7]:= {Floor[-2.9], Floor[2.9], Floor[2.1]} Out[7]:= {-3, 2, 2}
Log[x]	Log[x] คือค่าลอการิทึมฐาน e ของ x  In[8]:= {Log[2.], Log[3.], Log[4.]} Out[8]:= {0.693147, 1.09861, 1.38629}
Log10[x]	Log10[x] คือค่าลอการิทึมฐาน 10 ของ x  In[9]:= {Log10[2.], Log10[3.], Log10[4.]} Out[9]:= {0.30103, 0.477121, 0.60206}
Log[b, x]	Log[b, x] คือค่าลอการิทึมฐาน b ของ x  In[10]:= {Log[10, 2.], Log[10, 3.]} Out[10]:= {0.30103, 0.477121}
Mod[x, y]	เศษเหลือจากการหาร x ด้วยจำนวนเต็ม y  In[11]:= {Mod[12, 5], Mod[25, 7]} Out[11]:= {2, 4}
Sign[x]	เท่ากับ 1 ถ้า $x > 0$ และเท่ากับ -1 ถ้า $x < 0$ และ Sign[0] = 0  In[12]:= {Sign[-2.1], Sign[0], Sign[2.5]} Out[12]:= {-1, 0, 1}
Sqrt[x]	รากที่ 2 ของ x  In[13]:= {Sqrt[2], Sqrt[2.], Sqrt[4*i]} Out[13]:= { $\sqrt{2}$ , 1.41421, $2(-1)^{1/4}$ }

Sin[x] Cos[x] Tan[x] Sec[x] Csc[x] Cot[x]	ฟังก์ชันตรีโกณมิติ  In[14]:= {Sin[Pi / 4], Cos[Pi / 6], Tan[Pi / 6.0]}  Out[14]= $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0.57735\right\}$  In[15]:= {Sec[Pi / 3], Csc[Pi / 4], Cot[Pi / 6.]}  Out[15]= $\{2, \sqrt{2}, 1.73205\}$
ArcSin[x] ArcCos[x] ArcTan[x] ArcSec[x] ArcCsc[x] ArcCot[x]	ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน  In[16]:= {ArcSin[0.5], ArcCos[0.5], ArcTan[-1]}  Out[16]= $\left\{0.523599, 1.0472, -\frac{\pi}{4}\right\}$  In[17]:= {ArcSec[2], ArcCsc[-2], ArcCot[1]}  Out[17]= $\left\{\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$
Sinh[x] Cosh[x] Tanh[x] Sech[x] Csch[x] Coth[x]	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก  In[18]:= {Sinh[0.5], Cosh[2.5], Tanh[0.5]}  Out[18]= {0.521095, 6.13229, 0.462117}  In[19]:= {Sech[0], Csch[1.0], Coth[1.0]}  Out[19]= {1, 0.850918, 1.31304}
ArcSinh[x] ArcCosh[x] ArcTanh[x] ArcSech[x] ArcCsch[x] ArcCoth[x]	ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน  In[20]:= {ArcSinh[0.2], ArcCosh[2.5], ArcTanh[0.2]}  Out[20]= {0.19869, 1.5668, 0.202733}  In[21]:= {ArcSech[0.5], ArcCsch[1.0], ArcCoth[4.0]}  Out[21]= {1.31696, 0.881374, 0.255413}



4.5.2 คำสั่งเกี่ยวกับการจัดรูปพีชคณิต

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
Apart[f(x)]	เขียนเศษส่วนของพหุนามในรูปแบบผลบวกของเศษส่วนย่อย <pre>In[1]:= Apart[x^3 / (x^2 - 2 * x - 3)]</pre> $\text{Out[1]}= 2 + \frac{27}{4(-3+x)} + x + \frac{1}{4(1+x)}$
Together[f(x)]	รวมเทอมผลบวกของเศษส่วนย่อยให้อยู่ในรูปพหุนาม $\frac{p(x)}{q(x)}$ <pre>In[2]:= Together[2 + 27 / (4 * (-3 + x)) + x + 1 / (4 * (1 + x))]</pre> $\text{Out[2]}= \frac{x^3}{(-3+x)(1+x)}$
Simplify[f(x)]	จัดรูปแบบพีชคณิตให้เป็นรูปแบบอย่างง่าย <pre>In[3]:= Simplify[2 + 27 / (4 * (-3 + x)) + x + 1 / (4 * (1 + x))]</pre> $\text{Out[3]}= \frac{x^3}{(-3+x)(1+x)}$ <pre>In[4]:= f[x_] := x^3;</pre> <pre>In[5]:= Simplify[(f[x+h] - f[x]) / h]</pre> $\text{Out[5]}= h^2 + 3 h x + 3 x^2$
Expand[f(x)]  ExpandAll[f(x)]	กระจายสูตรของฟังก์ชัน Expand[f(x), Trig -> True] กระจายสูตรของฟังก์ชันตรีโกณมิติ กระจายสูตรของฟังก์ชันทุกเทอมที่ปรากฏ <pre>In[6]:= Expand[(x + 2)^3]</pre> $\text{Out[6]}= 8 + 12 x + 6 x^2 + x^3$

	<pre>In[7]:= Expand[Sin[x + y], Trig -&gt; True] Out[7]= Cos[y] Sin[x] + Cos[x] Sin[y]  In[8]:= Expand[(1 - x^2) / ((1 + x^2)^2)] Out[8]= <math>\frac{1}{(1 + x^2)^2} - \frac{x^2}{(1 + x^2)^2}</math>  In[9]:= ExpandAll[(1 - x^2) / ((1 + x^2)^2)] Out[9]= <math>\frac{1}{1 + 2x^2 + x^4} - \frac{x^2}{1 + 2x^2 + x^4}</math></pre>
<p>ComplexExpand[f(x)] กระจายสูตรของฟังก์ชันเชิงซ้อน</p>	<pre>In[10]:= ComplexExpand[Exp[4 * i * x]] Out[10]= Cos[4 x] + i Sin[4 x]</pre>
<p>Collect[f(x)] จัดรูปแบบพีชคณิตโดยการกระจายตามพจน์ของตัวแปรที่กำหนด</p>	<pre>In[11]:= Collect[(2 * x + y + 1)^3, x] Out[11]= 1 + 8 x^3 + 3 y + 3 y^2 + y^3 + x^2 (12 + 12 y) + x (6 + 12 y + 6 y^2)  In[12]:= Collect[(2 * x + y + 1)^3, y] Out[12]= 1 + 6 x + 12 x^2 + 8 x^3 + (3 + 12 x + 12 x^2) y + (3 + 6 x) y^2 + y^3</pre>
<p>Factor[f(x)]</p>	<p>แยกตัวประกอบ</p> <p>Factor[f(x), Trig -&gt; True] แยกตัวประกอบฟังก์ชันตรีโกณมิติ</p> <pre>In[13]:= Factor[x^2 - 3 * x - 4] Out[13]= (-4 + x) (1 + x)  In[14]:= Factor[Sin[x] + Sin[y], Trig -&gt; True] Out[14]= 2 Cos[<math>\frac{x}{2} - \frac{y}{2}</math>] Sin[<math>\frac{x}{2} + \frac{y}{2}</math>]</pre>

<p>Cancel[f(x)]</p>	<p>หาผลหารของพหุนาม</p> <pre>In[15]:= Cancel [ (x^2 - 1) / (x^4 - 1) ]</pre> $\text{Out[15]} = \frac{1}{1 + x^2}$
<p>Denominator[f(x)]</p>	<p>ใช้ในการหาพหุนามเฉพาะพจน์ที่เป็นตัวส่วนของ f(x)</p> <pre>In[16]:= Denominator [ (x^3 - 1) / (x^4 - 1) ]</pre> $\text{Out[16]} = -1 + x^4$
<p>Numerator[f(x)]</p>	<p>ใช้ในการหาพหุนามเฉพาะพจน์ที่เป็นตัวเศษของ f(x)</p> <pre>In[17]:= Numerator [ (x^3 - 1) / (x^4 - 1) ]</pre> $\text{Out[17]} = -1 + x^3$
<p>TraditionalForm[f[x]]</p>	<p>ใช้แสดงสูตร f(x) ให้สวยงาม</p> <pre>In[18]:= Expand [ (x - 4) ^ 2 * (x + 1) ^ 3 ]</pre> $\text{Out[18]} = 16 + 40 x + 25 x^2 - 5 x^3 - 5 x^4 + x^5$ <pre>In[19]:= TraditionalForm [Expand [ (x - 4) ^ 2 * (x + 1) ^ 3 ] ]</pre> $\text{Out[19]/TraditionalForm} = x^5 - 5 x^4 - 5 x^3 + 25 x^2 + 40 x + 16$ <pre>In[20]:= TraditionalForm [ \frac{1}{1 + 2 x^2 + x^4} - \frac{x^2}{1 + 2 x^2 + x^4} ]</pre> $\text{Out[20]/TraditionalForm} = \frac{1}{x^4 + 2x^2 + 1} - \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}$

## 4.5.3 คำสั่งเกี่ยวกับผลบวกและผลคูณ

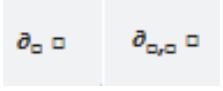
ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
1. Sum[f[i], {i, a, b}] 2. Sum[f[i], {i, a, b, c}] 3. Sum[f[i, j], {i, a, b, c}, {j, d, e, k}]	1. หาผลรวม $f(i)$ โดย $i$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ 2. หาผลรวม $f(i)$ โดย $i$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ เพิ่มค่าครั้งละ $c$ 3. หาผลรวม $f(i, j)$ โดย $i$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ เพิ่มค่าครั้งละ $c$ และ $j$ เปลี่ยนค่าจาก $d$ ถึง $e$ เพิ่มค่าครั้งละ $k$  <pre>In[1]:= Sum[i, {i, 1, 10}] Out[1]= 55  In[2]:= Sum[i, {i, 1, 10, 2}] Out[2]= 25  In[3]:= Sum[i * j, {i, 1, 2}, {j, 1, 3}] Out[3]= 18</pre>
1. Product[f[x], {x, a, b}] 2. Product[f[x], {x, a, b, c}] 3. Product[f[x, y], {x, a, b, c}, {j, d, e, k}]	1. หาผลคูณ $f(x)$ โดย $x$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ 2. หาผลคูณ $f(x)$ โดย $x$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ เพิ่มค่าครั้งละ $c$ 3. หาผลคูณ $f(x, y)$ โดย $x$ เปลี่ยนค่าจาก $a$ ถึง $b$ เพิ่มค่าครั้งละ $c$ และ $y$ เปลี่ยนค่าจาก $d$ ถึง $e$ เพิ่มค่าครั้งละ $k$  <pre>In[4]:= Product[x, {x, 1, 5}] Out[4]= 120  In[5]:= 1 * 2 * 3 * 4 * 5 Out[5]= 120  In[6]:= Product[x, {x, 2, 10, 2}] Out[6]= 3840  In[7]:= 2 * 4 * 6 * 8 * 10 Out[7]= 3840</pre>

4.5.4 คำสั่งกำหนดสูตรฟังก์ชัน และการหาลิมิต อนุพันธ์ และอินทิกรัลของฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
<p>1. <math>f[x_]:=...</math></p> <p>2. <math>f[x]/.x \rightarrow a</math></p> <p>3. <math>f[a]</math></p>	<p>1. <math>f[x_]:=...</math> เป็นการกำหนดสูตรฟังก์ชัน</p> <p>2. คำนวณค่า <math>f(a)</math></p> <p><b>หมายเหตุ</b> <math>\rightarrow</math> ได้จากการพิมพ์ <math>-</math> และ <math>&gt;</math></p> <p>3. <math>f[a]</math> คำสั่งคำนวณค่า <math>f(a)</math></p> <pre>In[1]:= f[x_] := x^2; In[2]:= f[4] Out[2]= 16 In[3]:= f[x] /. x -&gt; 4 Out[3]= 16</pre>
<p>1. <math>\text{Composition}[f, g, \dots][x]</math></p> <p>2. <math>\text{Nest}[f, x, n]</math></p>	<p>1. ฟังก์ชันประกอบของ <math>f, g, \dots</math></p> <p>2. ฟังก์ชันประกอบ <math>(f \circ f \circ \dots \circ f)(x)</math> <math>n</math> ครั้ง</p> <pre>In[4]:= f[x_] := x^2; In[5]:= g[x_] := x + 1; In[6]:= Composition[f, g][x] Out[6]= (1 + x)^2 In[7]:= Composition[g, f][x] Out[7]= 1 + x^2 In[8]:= Nest[f, x, 3] Out[8]= x^8</pre>

Limit[f[x], x→a]	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ <pre>In[9]:= Limit[x^2, x → 4]</pre> <pre>Out[9]= 16</pre>
Limit[f[x], x→a , Direction→1]	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ <pre>In[10]:= Limit[Abs[x] / x, x → 0, Direction -&gt; 1]</pre> <pre>Out[10]= -1</pre>
Limit[f[x], x→a , Direction→-1]	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ <pre>In[11]:= Limit[Abs[x] / x, x → 0, Direction → -1]</pre> <pre>Out[11]= 1</pre>
f'[x], f''[x], f'''[x], ...	$f'(x), f''(x), f'''(x), \dots$ ตามลำดับ <pre>In[12]:= f[x_] := x^3 - 4 * x + 5;</pre> <pre>In[13]:= f'[x]</pre> <pre>Out[13]= -4 + 3 x^2</pre> <pre>In[14]:= f''[x]</pre> <pre>Out[14]= 6 x</pre> <pre>In[15]:= f'''[x]</pre> <pre>Out[15]= 6</pre>

หมายเหตุ สัญลักษณ์ ";" " ท้าย Line Input เป็นการกำหนดให้ทำการคำนวณแต่ยังไม่ต้องแสดงผล จากตัวอย่างข้างต้น Line Input[12] จะรับค่าของสูตรไว้และไม่พิมพ์ Line Output[12]

<p>D[f, x] D[f, {x, k}]</p>	<p>D[f, x] อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งของ f เทียบกับ x D[f, {x, k}] อนุพันธ์อันดับที่ k ของ f เทียบกับ x</p> <pre>In[16]:= f[x_] := x^3 - 4 * x + 5;</pre> <pre>In[17]:= D[f[x], x]</pre> <pre>Out[17]= -4 + 3 x^2</pre> <pre>In[18]:= D[f[x], {x, 1}]</pre> <pre>Out[18]= -4 + 3 x^2</pre> <pre>In[19]:= D[f[x], {x, 2}]</pre> <pre>Out[19]= 6 x</pre>
<p>Dt[f, x]</p>	<p>ค่าอนุพันธ์เชิงรวม</p> <pre>In[20]:= Dt[x^2 * y^3, t]</pre> <pre>Out[20]= 2 x y^3 Dt[x, t] + 3 x^2 y^2 Dt[y, t]</pre> <pre>In[21]:= Dt[x^2 * y^3, x]</pre> <pre>Out[21]= 2 x y^3 + 3 x^2 y^2 Dt[y, x]</pre> <p>ผลที่ได้คือ <math>\frac{d}{dt}(x^2 y^3) = 2xy^3 \frac{dx}{dt} + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dt}</math> และ <math>\frac{d}{dx}(x^2 y^3) = 2xy^3 + 3x^2 y^2 \frac{dy}{dx}</math></p>
<p>สัญลักษณ์การคำนวณ</p> 	<p>ใช้หาอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อย</p> <pre>In[22]:= ∂<sub>x</sub> (x^3 - 4 * x + 5)</pre> <pre>Out[22]= -4 + 3 x^2</pre> <pre>In[23]:= ∂<sub>x,y</sub> (x^2 * y^3)</pre> <pre>Out[23]= 6 x y^2</pre>

Integrate[f[x], x]	<p>อินทิกรัลไม่จำกัดเขต <math>\int f(x) dx</math></p> <pre>In[1]:= f[x_] := x^2;</pre> <pre>In[2]:= Integrate[f[x], x]</pre> <p>Out[2]= <math>\frac{x^3}{3}</math></p> <pre>In[3]:= Integrate[x^2, x]</pre> <p>Out[3]= <math>\frac{x^3}{3}</math></p>
Integrate[f[x], {x, a, b}]	<p>อินทิกรัลจำกัดเขต <math>\int_a^b f(x) dx</math></p> <pre>In[4]:= Integrate[f[x], {x, 0, 1}]</pre> <p>Out[4]= <math>\frac{1}{3}</math></p> <pre>In[5]:= Integrate[x^2, {x, 0, 1}]</pre> <p>Out[5]= <math>\frac{1}{3}</math></p>
NIntegrate[f[x], {x, a, b}]	<p>การประมาณค่า <math>\int_a^b f(x) dx</math> ออกมาเป็นค่าตัวเลข</p> <pre>In[6]:= Integrate[Sin[x] / x, {x, 0, Pi / 2}]</pre> <p>Out[6]= SinIntegral <math>\left[\frac{\pi}{2}\right]</math></p> <pre>In[7]:= NIntegrate[Sin[x] / x, {x, 0, Pi / 2}]</pre> <p>Out[7]= 1.37076</p> <pre>In[8]:= NIntegrate[f[x], {x, 0, 1}]</pre> <p>Out[8]= 0.333333</p>



4.5.5 คำสั่งเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซ ผลการแปลง Z-Transform และพหุนามเทย์เลอร์

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
<p>LaplaceTransform[f[x], x, s]</p>	<p>ผลการแปลงลาปลาซของ f(x)</p> <pre>In[1]:= LaplaceTransform[x^2, x, s]</pre> $\text{Out[1]} = \frac{2}{s^3}$ <pre>In[2]:= % /. {s -&gt; 2}</pre> $\text{Out[2]} = \frac{1}{4}$
<p>InverseLaplaceTransform[F[s], s, x]</p>	<p>ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ F(s)</p> <pre>In[3]:= InverseLaplaceTransform[2 / (s^3), s, x]</pre> $\text{Out[3]} = x^2$ <pre>In[4]:= % /. {x -&gt; 1.5}</pre> $\text{Out[4]} = 2.25$
<p>Series[f[x], {x, a, n}]</p>	<p>พหุนามเทย์เลอร์ของ f รอบจุด x = a ดีกรีไม่เกิน n</p> <pre>In[1]:= Series[Exp[x], {x, 0, 2}]</pre> $\text{Out[1]} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O[x]^3$ <pre>In[2]:= Series[Exp[x], {x, 0, 3}]</pre> $\text{Out[2]} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + O[x]^4$ <pre>In[3]:= Normal[%]</pre> $\text{Out[3]} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ <pre>In[4]:= % /. {x -&gt; 1}</pre> $\text{Out[4]} = \frac{8}{3}$

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
ZTransform[u[n], n, z]	ผลการแปลง Z-transform ของ u(n)  In[1]:= ZTransform[n, n, z] Out[1]= $\frac{z}{(-1+z)^2}$  In[2]:= $\sum_{n=0}^{\infty} (n * z^n)$ Out[2]= $\frac{z}{(-1+z)^2}$
Inverse ZTransform[f[z],z,n]	ผลการแปลง Z-transform F(s)  In[3]:= InverseZTransform[ $\frac{z}{(z-1)^2}$ , z, n] Out[3]= n

หมายเหตุ  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^n$

จะได้ว่า ZTransform[(u(n))] = f(z) และ InverseZTransform[f(z)] = u(n)

ตัวอย่างเพิ่มเติม

In[4]:= ZTransform[1, n, z]

Out[4]=  $\frac{z}{-1+z}$

In[5]:=  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Out[5]=  $\frac{1}{1-z}$

In[6]:= InverseZTransform[ $\frac{z}{-1+z}$ , z, n]

Out[6]= 1

4.5.6 คำสั่งหาค่ารากสมการ

ฟังก์ชัน	ความหมายและตัวอย่างการใช้งาน
Solve[equ1==equ2]	<p>หาค่ารากของสมการ <math>equ1 = equ2</math></p> <pre>In[1]:= Solve[x^2 = 2]</pre> <pre>Out[1]= {{x -&gt; -sqrt(2)}, {x -&gt; sqrt(2)}}</pre> <pre>In[2]:= Solve[x^2 - 4*x = 2*x]</pre> <pre>Out[2]= {{x -&gt; 0}, {x -&gt; 6}}</pre> <pre>In[3]:= Solve[x^2 - 4*x + 2 = 0, x]</pre> <pre>Out[3]= {{x -&gt; 2 - sqrt(2)}, {x -&gt; 2 + sqrt(2)}}</pre> <pre>In[4]:= Solve[x^2 - 4*x + 15 = 0, x]</pre> <pre>Out[4]= {{x -&gt; 2 - i*sqrt(11)}, {x -&gt; 2 + i*sqrt(11)}}</pre>
Solve[{equ1==equ2, equ3==equ4, ...}]	<p>หาผลเฉลยของระบบสมการ <math>equ1 = equ2, equ3 = equ4, \dots</math></p> <pre>In[5]:= Solve[{2*x + 3*y = 8, 5*x + 4*y = 13}]</pre> <pre>Out[5]= {{x -&gt; 1, y -&gt; 2}}</pre> <pre>In[6]:= Solve[{x^2 + y^2 = 25, 3*x - 4*y = 0}]</pre> <pre>Out[6]= {{x -&gt; -4, y -&gt; -3}, {x -&gt; 4, y -&gt; 3}}</pre> <pre>In[7]:= Solve[{y = x^2 - 2*x - 2, y = 2*x + 3}]</pre> <pre>Out[7]= {{y -&gt; 1, x -&gt; -1}, {y -&gt; 13, x -&gt; 5}}</pre>
NSolve[equ1==equ2]	<p>หาค่ารากของสมการ <math>equ1 = equ2</math> และแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม</p> <pre>In[8]:= NSolve[x^2 - 4*x + 2 = 0, x]</pre> <pre>Out[8]= {{x -&gt; 0.585786}, {x -&gt; 3.41421}}</pre> <pre>In[9]:= NSolve[x^2 - 4*x + 15 = 0, x]</pre> <pre>Out[9]= {{x -&gt; 2. - 3.31662 i}, {x -&gt; 2. + 3.31662 i}}</pre>

$\text{NSolve}[\{\text{equ1}==\text{equ2}, \text{equ3}==\text{equ4}, \dots\}]$	<p>หาผลเฉลยของระบบสมการ <math>\text{equ1} = \text{equ2}, \text{equ3} = \text{equ4}, \dots</math> และแสดงผลเป็นเลขทศนิยม</p> <pre>In[10]:= NSolve[y = x^2 - 2*x - 2 &amp;&amp; y = 2*x + 3] Out[10]= {{y -&gt; 13., x -&gt; 5.}, {y -&gt; 1., x -&gt; -1.}}</pre>
$\text{NRoots}[\text{equ1}==\text{equ2}, x]$	<p>หารากของสมการ <math>\text{equ1} = \text{equ2}</math></p> <pre>In[11]:= NRoots[x^2 - 4*x - 5 = 0, x] Out[11]= x == -1.    x == 5.  In[12]:= NRoots[x^2 - 4*x + 2 = 0, x] Out[12]= x == 0.585786    x == 3.41421  In[13]:= NRoots[x^2 - 4*x + 15 = 0, x] Out[13]= x == 2. - 3.31662 i    x == 2. + 3.31662 i</pre>
$\text{FindRoot}[\text{equ1}==\text{equ2}, \{x, x_0\}]$	<p>หารากของสมการพหุนาม <math>\text{equ1} = \text{equ2}</math> โดยมีจุดเริ่มต้นของการประมาณค่ารากที่ <math>x = x_0</math></p> <pre>In[14]:= FindRoot[x^2 = 2, {x, 1}] Out[14]= {x -&gt; 1.41421}  In[15]:= FindRoot[x^2 = 2, {x, -1}] Out[15]= {x -&gt; -1.41421}</pre>
$\text{Reduce}[\text{equ1}==\text{equ2}]$	<p>ค้นหาความเป็นไปได้ของผลเฉลยของสมการ</p> <pre>In[16]:= Reduce[a*x + 1 = b*y] Out[16]= (x != 0 &amp;&amp; a == -1 + b*y/x)    (x == 0 &amp;&amp; y != 0 &amp;&amp; b == 1/y)  In[17]:= Reduce[x^2 - y^2 = 1, {x, y}] Out[17]= y == -sqrt(-1 + x^2)    y == sqrt(-1 + x^2)</pre>

<p>Eliminate[equ1== equ2 &amp;&amp; equ1==equ2, ตัวแปรที่ต้องการขจัด]</p>	<p>จัดรูปพีชคณิตเพื่อขจัดตัวแปรที่ไม่ต้องการและเหลือไว้เฉพาะตัวแปรที่ต้องการ</p> <p><code>In[18]:= Eliminate[y = x^2 &amp;&amp; y = x + 1, x]</code></p> <p><code>Out[18]= -3 y + y^2 == -1</code></p> <p><math>y = x^2</math> และ <math>y = x + 1</math> ... (1)</p> <p><math>y^2 = (x + 1)^2</math> จาก (1))</p> <p><math>= x^2 + 2x + 1</math></p> <p><math>= y + 2(y - 1) + 1</math> จาก (1)</p> <p><math>= 3y - 1</math></p> <p><math>-3y + y^2 = -1</math> ผลที่ได้</p>
---	---

## 4.5.7 คำสั่งในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

DSolve[equ1==equ2, y[x], x] หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

```
In[1]:= DSolve[y' [x] - 4 * y[x] = 4, y[x], x]
```

```
Out[1]= {{y[x] → -1 + e4x C[1]}}
```

```
In[2]:= DSolve[{y' [x] - 4 * y[x] = 4, y[0] = 1}, y[x], x]
```

```
Out[2]= {{y[x] → -1 + 2 e4x}}
```

DSolve[equ1==equ2, equ3==equ3, ... , y[x], x]

หาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์

```
In[3]:= DSolve[{y' [t] - x[t] + 4 * y[t] = 0,
               x' [t] + x[t] + 2 * y[t] = 0}, {x[t], y[t]}, t]
```

```
Out[3]= {{x[t] → e-3t (-1 + 2 et) C[1] - 2 e-3t (-1 + et) C[2],
          y[t] → e-3t (-1 + et) C[1] - e-3t (-2 + et) C[2]}}
```

```
In[4]:= DSolve[{y' [t] - x[t] + 4 * y[t] = 0,
               x' [t] + x[t] + 2 * y[t] = 0, y[0] = 0, x[0] = 1},
               {x[t], y[t]}, t]
```

```
Out[4]= {{x[t] → e-3t (-1 + 2 et), y[t] → e-3t (-1 + et)}}
```

## การเขียนโปรแกรมด้วยคำสั่งของ Mathematica

การแก้ปัญหาทางด้านคณิตศาสตร์ที่มีขั้นตอนการทำงานหลายขั้นตอน เราสามารถนำคำสั่งของโปรแกรม Mathematica มารวมกันเพื่อเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อประยุกต์ใช้งานได้ ในบทนี้เราจะนำปัญหาคณิตศาสตร์บางปัญหามาเขียนเป็นโปรแกรมเพื่อใช้งาน โดยขอเริ่มจากแผนภูมิสายงาน



เราสามารถนำมาประยุกต์กับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้ ตัวอย่างเช่น

โปรแกรมหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวด้าน  $a$ ,  $b$  และ  $c$

โปรแกรมหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดพิกัดจุดยอด 3 จุด

โปรแกรมหารากสมการ  $f(x) = 0$  โดยวิธีของนิวตัน

โปรแกรมหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์โดยวิธีของออยเลอร์

**โปรแกรม 1** การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้าน a, b, c

ส่วนของ INPUT คือ การกำหนดค่า a, b, c

ส่วนประมวลผล คือ การคำนวณค่า s และ area

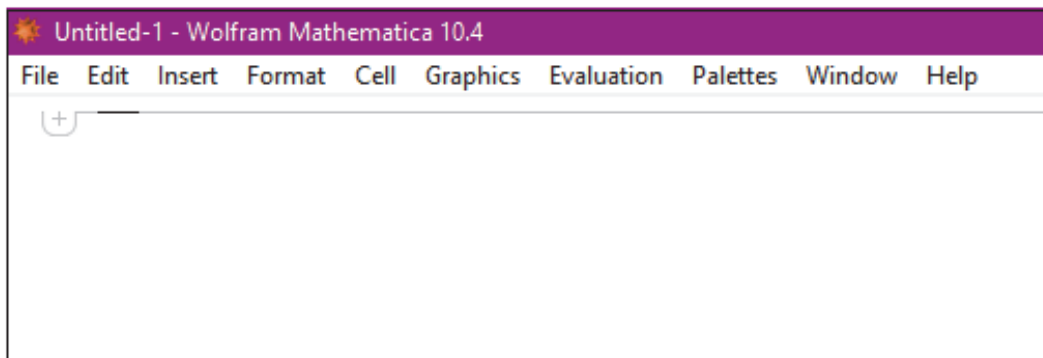
ส่วนแสดงผล คือ การพิมพ์ค่า area

ขั้นตอนการเขียนโปรแกรมมีดังนี้

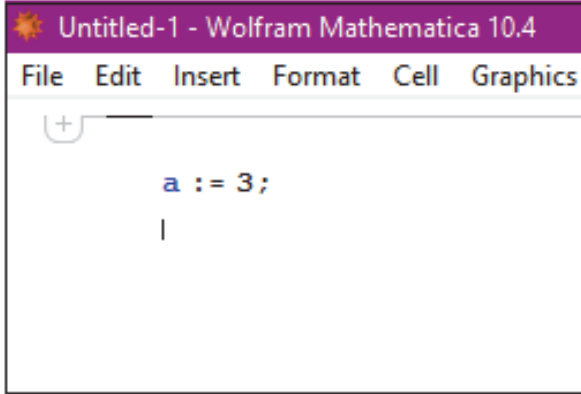
**ขั้นที่ 1** เข้าสู่การทำงานของ Mathematica

**หมายเหตุ** เพื่อให้ผลของการพิมพ์และข้อความที่ปรากฏเหมือนกับคำแนะนำในหนังสือขณะนี้

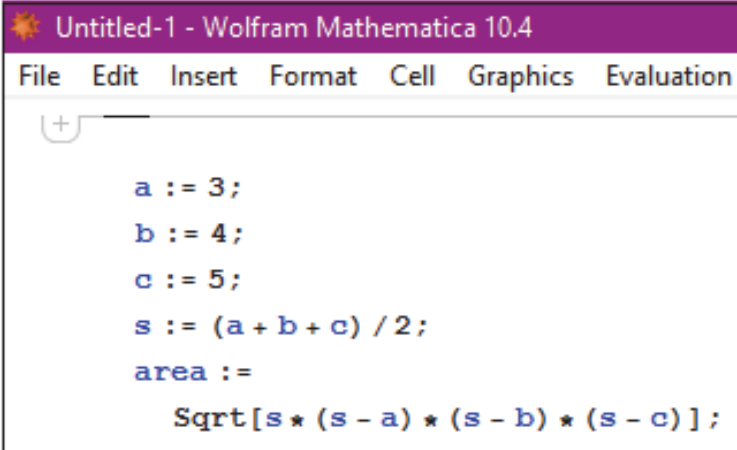
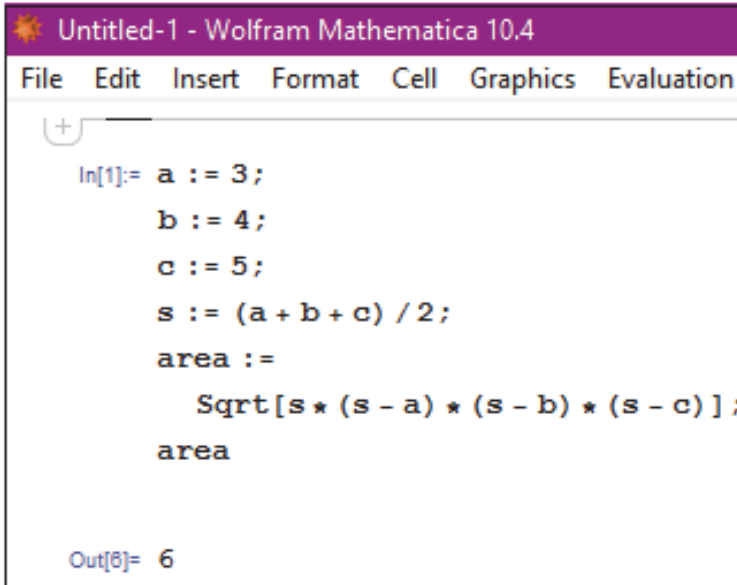
ขอให้ **ปิด** การทำงานของ Mathematica ก่อน แล้วจึง **เปิด** เข้ามาใหม่



**ขั้นที่ 2** พิมพ์โปรแกรมด้วยคำสั่งต่าง ๆ ตามที่ต้องการ

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
<p>a:=3;↵</p> <p><b>หมายเหตุ</b> 1. กด ↵ เพื่อขึ้นบรรทัดใหม่ โดยไม่คำนวณ</p> <p>2. สัญลักษณ์ ln[...] ยังไม่มี เพราะว่ายังไม่ได้สั่งคำนวณ</p>	 <p><b>ข้อสังเกต</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>มี * ที่ชื่อ Untitled-1*</li> <li>Curser รอที่บรรทัดถัดไป โดยยังไม่คำนวณ</li> </ol>



<p>b:=4;↵                  c:=5;↵                  s:=(a+b+c)/2;↵                  area:=Sqrt[s*(s-a)*(s-b)*(s-c)];↵</p>	 <pre>                 a := 3;                 b := 4;                 c := 5;                 s := (a + b + c) / 2;                 area :=                     Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];                 </pre>
<p>area&lt;Shift&gt;+↵</p> <p><b>ข้อสังเกต</b></p> <p>1. In[2] คือ b:=4;                  In[3] คือ c:=5;                  :                  In[6] คือ area                  ไม่แสดงสัญลักษณ์                  line Input ออกมา</p>	 <pre>                 In[1]:= a := 3;                 b := 4;                 c := 5;                 s := (a + b + c) / 2;                 area :=                     Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];                 area                  Out[6]= 6                 </pre> <p>ผลการคำนวณที่ได้ คือ area มีค่าเท่ากับ 6</p>

หมายเหตุ แนะนำให้ Save Notebook ชื่อ Findarea.nb

แก้ไขค่า a, b, c ใหม่เช่น a:=10, b:=8, c:=6

แล้วกด <Shift>+↵

จะได้ผลการคำนวณใหม่ดังนี้

```
In[8]:= a := 10;
        b := 8;
        c := 6;
        s := (a + b + c) / 2;
        area := Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];
        area
```

Out[13]= 24

การเขียน Module หรือ Function Programming ของโปรแกรม Mathematica

จากตัวอย่างโปรแกรมข้างต้นจะเห็นว่ามีารรับค่า 3 ค่า คือ a, b, c และแสดงผล 1 ค่า คือ area เราสามารถปรับเปลี่ยนการทำงานของโปรแกรมข้างต้นให้เป็น Function Programming ซึ่งในโปรแกรม Mathematica เรียกว่า Module ได้ดังนี้

```
In[19]:= findarea[x_, y_, z_] := Module[{a = x, b = y, c = z},
        s := (a + b + c) / 2;
        area := Sqrt[s * (s - a) * (s - b) * (s - c)];
        area]
```

```
In[20]:= findarea[3, 4, 5]
```

Out[20]= 6

```
In[21]:= findarea[12, 15, 9]
```

Out[21]= 54

```
In[22]:= findarea[5, 12, 13]
```

Out[22]= 30

โปรแกรม 2 การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดพิกัดจุดยอด 3 จุด

หมายเหตุ เมื่อกำหนดจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC เป็น  $A(x_0, y_0)$ ,  $B(x_1, y_1)$ ,  $C(x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| (y_1 - y_0)(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) \right| \end{aligned}$$

โปรแกรมการหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดพิกัดจุดยอด 3 จุด

```
In[1]:= x0 := 0;
        y0 := 0;
        x1 := 6;
        y1 := 0;
        x2 := 0;
        y2 := 4;
        area := (1/2) * Abs[(y1 - y0) * (x2 - x0) - (x1 - x0) * (y2 - y0)];
        area
```

Out[8]= 12

เปลี่ยนพิกัดของจุดยอดเป็น  $A(0, 0)$ ,  $B(12, 0)$  และ  $C(0, 15)$

```
In[10]:= x0 := 0;
          y0 := 0;
          x1 := 12;
          y1 := 0;
          x2 := 0;
          y2 := 15;
          area := (1/2) * Abs[(y1 - y0) * (x2 - x0) - (x1 - x0) * (y2 - y0)];
          area
```

Out[17]= 90

คำสั่งที่ควรทราบเพื่อใช้ในการเขียนโปรแกรมของ Mathematica

คำสั่ง	รูปแบบและหน้าที่
(*.....*)	Remark ของโปรแกรมซึ่งไม่มีการคำนวณที่บรรทัด Remark (*.....This is a remark.....*)
Print[...]	ใช้พิมพ์ ข้อความ ตัวแปร  <pre>In[1]:= Print["text", 12 + 13] text25  In[2]:= Print["text", " ", 12 + 13] text 25</pre>
Do	Do[คำสั่ง, {imax}] ทำงานที่กำหนดซ้ำ imax ครั้ง Do[คำสั่ง(i), {i, imax}] ทำงานที่กำหนดซ้ำตามค่าของ i ตั้งแต่ 1 ถึง imax และ i เพิ่มค่าครั้งละ 1 Do[คำสั่ง(i), {i, imax, d}] ทำงานที่กำหนดซ้ำตามค่าของ i ตั้งแต่ 1 ถึง imax และ i เพิ่มค่าครั้งละ d Do[คำสั่ง(i, j), {i, imax}, {j, jmax}] ทำงานที่กำหนดซ้ำตามค่าของ i ตั้งแต่ 1 ถึง imax และ i เพิ่มค่าครั้งละ 1 และ j ตั้งแต่ 1 ถึง jmax และ j เพิ่มค่าครั้งละ 1  <pre>In[1]:= Do[Print[i, " ", 2^i], {i, 1, 5}] 1 2 2 4 3 8 4 16 5 32  In[2]:= Do[Print[i, " ", 2^i], {i, 1, 5, 2}] 1 2 3 8 5 32</pre>

<p>While</p>	<p>While[เงื่อนไข 1, คำสั่ง 1]                  ถ้า เงื่อนไข 1 เป็นจริง ให้ทำงานตามคำสั่ง 1                  ถ้า เงื่อนไข 1 เป็นเท็จ ให้ออกจาก Loop While</p> <pre>In[1]:= n := 0; While[n &lt; 4,     {n = n + 1, Print[n, " ", n^2]}]  1 1 2 4 3 9 4 16  In[2]:= n := 0; While[n &lt; 4,     {n = n + 2, Print[n, " ", n^2]}]  2 4 4 16</pre>
<p>For</p>	<p>For[start, test, incr, body]                  start การกำหนดค่าตัวแปรเริ่มต้น                  test เงื่อนไขในการทำงาน                  ถ้า เงื่อนไข เป็นเท็จ ให้ออกจากลูป For                  incr การเพิ่มค่าของตัวแปร                  body กลุ่มคำสั่งของการทำงาน</p> <pre>In[1]:= For[n = 1, n &lt; 5, n = n + 1,     Print[n, " ", n^2]]  1 1 2 4 3 9 4 16  In[2]:= For[n = 2, n &lt; 5, n = n + 2,     Print[n, " ", n^2]]  2 4 4 16</pre>

If	<p>If[test, command1, command2] เมื่อ test คือ เงื่อนไข  ถ้า เงื่อนไข test เป็นจริง ให้ทำ command1  ถ้า เงื่อนไข test เป็นเท็จ ให้ทำ command2</p> <pre> In[1]:= If[4 &lt; 5, Print["4&lt;5"], Print["4&gt;=5"]] 4&lt;5  In[2]:= f[x_] := If[x &lt; 0, x^3, x^2];  In[3]:= Print["f[-2]=", f[-2], " ", "f[2]=", f[2]] f[-2]=-8 f[2]=4 </pre>
----	---

ตัวอย่างการนิยามสูตร  $f(x) = \begin{cases} x & \text{if } x < 0 \\ x^2 & \text{if } 0 \leq x < 3 \\ x^3 & \text{if } x \geq 3 \end{cases}$

```
In[4]:= f[x_] := If[x < 0, x, If[x < 3, x^2, x^3]];
```

```
In[5]:= Print["f[-2]=", f[-2], " ", "f[2]=", f[2], " ", "f[5]=",
f[5]]
```

```
f[-2]=-2 f[2]=4 f[5]=125
```

```
In[6]:= g[x_] := Piecewise[{{x, x < 0}, {x^2, 0 ≤ x && x < 3}, {x^3, x > 3}}]
```

```
In[7]:= Print["g[-2]=", g[-2], " ", "g[2]=", g[2], " ", "g[5]=",
g[5]]
```

```
g[-2]=-2 g[2]=4 g[5]=125
```

```
In[8]:= Do[Print[x, " ", f[x], " ", g[x]], {x, -2, 5}]
```

```
-2 -2 -2
```

```
-1 -1 -1
```

```
0 0 0
```

```
1 1 1
```

```
2 4 4
```

```
3 27 0
```

```
4 64 64
```

```
5 125 125
```

**โปรแกรม 3** การหาราก  $f(x) = 0$  โดยใช้สูตรของนิวตัน  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

เมื่อกำหนดค่าเริ่มต้น  $x_0$

การหารากของสมการ  $f(x) = x^2 - 2$ ,  $x_0 = 1$

```
In[1]:= Tol := 0.000000000001;
f[x_] := x^2 - 2;
fpi[x_] := f'[x];
x[0] = 1;
x[1] = x[0] - f[x[0]] / fpi[x[0]];
k = 0;
While[Abs[x[k + 1] - x[k]] > Tol,
  {k = k + 1, x[k + 1] = x[k] - f[x[k]] / fpi[x[k]]}];
Print["k", " ", "X[k]"];
For[j = 1, j < k + 1, j = j + 1, Print[j, " ", N[x[j], 20]]];
Print["Root = ", N[x[k], 20]]
```

ผลการทำงานของโปรแกรม

```
k X[k]
1 1.50000000000000000000
2 1.41666666666666666667
3 1.4142156862745098039
4 1.4142135623746899106
5 1.4142135623730950488
Root = 1.4142135623730950488
```

เปรียบเทียบกับ  $\sqrt{2}$  คือ

```
In[11]:= N[Sqrt[2], 20]
Out[11]= 1.4142135623730950488
```

**โปรแกรม 4** การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  และ  $y(x_0) = y_0$

การหาค่าประมาณของ  $y(c)$  โดยวิธีของออยเลอร์

ให้  $\frac{dy}{dx} = xy$  และ  $y(1) = 1$  จงหาค่าประมาณของ  $y(1.5)$

```
In[1]:= f[x_, y_] := x*y;
x[0] = 1;
y[0] = 1;
h = 0.1;
c = 1.5;
n = (c - x[0]) / h;
i = 0;
Print["i", " ", "x[i]", " ", "y[i]"];
While[i < n,
  {i = i + 1,
   x[i] = x[i - 1] + h,
   y[i] = y[i - 1] + h*f[x[i - 1], y[i - 1]],
   Print[i, " ", x[i], " ", N[y[i], 20]}}
];
Print["y(c) = ", N[y[i], 5]]
```

ผลการทำงานของโปรแกรม

```
i   x[i]  y[i]
1   1.1   1.1
2   1.2   1.221
3   1.3   1.36752
4   1.4   1.5453
5   1.5   1.76164
y(c) = 1.76164
```



## บทที่ 6

# การคำนวณระดับ ม. ปลาย ด้วยโปรแกรม Mathematica

ในบทนี้จะเป็นการนำความสามารถของโปรแกรม Mathematica มาใช้ในการคำนวณเพื่อเสริมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

### 6.1 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 1

#### 6.1.1 การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร เลขยกกำลัง และหารากที่ 2

```
In[1]:= 25 + 12
```

```
Out[1]= 37
```

```
In[2]:= 25 - 12
```

```
Out[2]= 13
```

```
In[3]:= 25 * 12
```

```
Out[3]= 300
```

```
In[4]:= 25 / 12 .
```

```
Out[4]= 2.08333
```

```
In[5]:= 4 ^ 3
```

```
Out[5]= 64
```

```
In[6]:= Sqrt [12.]
```

```
Out[6]= 3.4641
```

## 6.1.2 การกำหนดสูตรฟังก์ชันและการคำนวณค่า และสร้างตารางฟังก์ชัน

```
In[1]:= f[x_] := x^2;
```

```
In[2]:= TableForm[Table[{i, f[i]}, {i, 1, 4}]]
```

```
Out[2]/TableForm=
```

1	1
2	4
3	9
4	16

```
In[3]:= x := {2, 3, 5, 7};
```

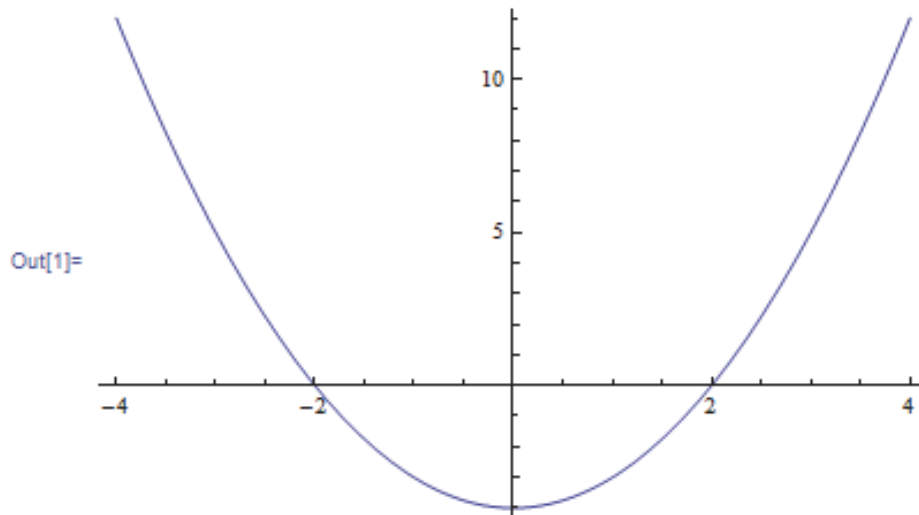
```
In[4]:= TableForm[Table[{x[[i]], f[x[[i]]}], {i, 1, 4}]]
```

```
Out[4]/TableForm=
```

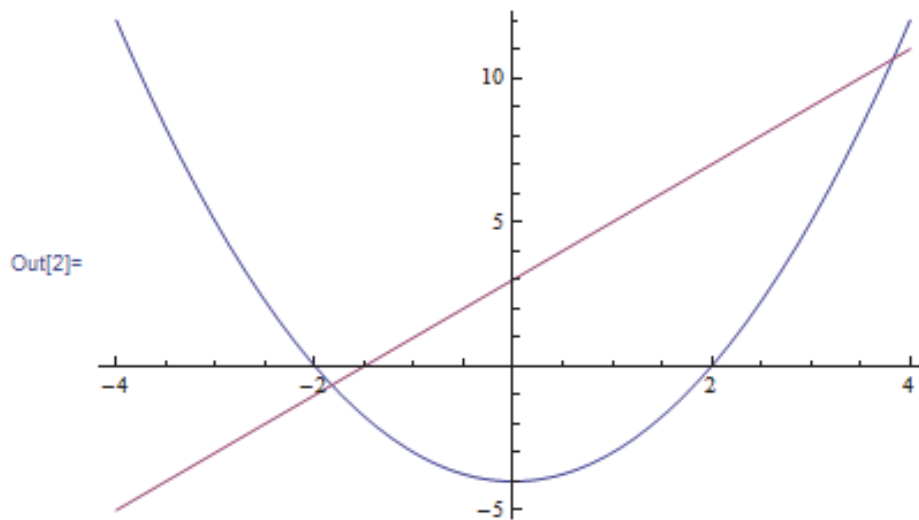
2	4
3	9
5	25
7	49

6.1.3 การเขียนกราฟฟังก์ชัน

In[1]:= `Plot[x^2 - 4, {x, -4, 4}]`



In[2]:= `Plot[{x^2 - 4, 2*x + 3}, {x, -4, 4}]`



## 6.1.4 การเปลี่ยนตัวเลขระหว่าง เลขฐาน 2 เลขฐาน 16 และ เลขฐาน 10

```
In[1]:= 2^^101
Out[1]= 5

In[2]:= 4^^101
Out[2]= 17

In[3]:= 8^^101
Out[3]= 65

In[4]:= 16^^101
Out[4]= 257

In[5]:= BaseForm[5, 2]
Out[5]/BaseForm=
  1012

In[6]:= BaseForm[17, 4]
Out[6]/BaseForm=
  1014

In[7]:= BaseForm[65, 8]
Out[7]/BaseForm=
  1018

In[8]:= BaseForm[257, 16]
Out[8]/BaseForm=
  10116
```

6.1.5 การแยกตัวประกอบและการกระจายพหุนาม

In[1]:= `Factor[-4 - 3 * x + x ^ 2]`

Out[1]=  $(-4 + x) (1 + x)$

In[2]:= `Expand[(-4 + x) * (1 + x)]`

Out[2]=  $-4 - 3 x + x^2$

In[3]:= `Simplify[1 / (x ^ 2 - 4) + x / (x - 1)]`

Out[3]=  $\frac{x}{-1 + x} + \frac{1}{-4 + x^2}$

In[4]:= `FullSimplify[1 / (x ^ 2 - 4) + x / (x - 2)]`

Out[4]=  $\frac{(1 + x)^2}{-4 + x^2}$

In[5]:= `Apart[ $\frac{(1 + x)^2}{-4 + x^2}$ ]`

Out[5]=  $1 + \frac{9}{4(-2 + x)} - \frac{1}{4(2 + x)}$

In[6]:= `Together[ $1 + \frac{9}{4(-2 + x)} - \frac{1}{4(2 + x)}$ ]`

Out[6]=  $\frac{1 + 2 x + x^2}{(-2 + x) (2 + x)}$

In[7]:= `Numerator[ $\frac{(1 + x)^2}{-4 + x^2}$ ]`

Out[7]=  $(1 + x)^2$

## 6.1.6 การหารากของสมการ

```
In[1]:= FindRoot[x^2 - 2 = 0, {x, 1}]
```

```
Out[1]:= {x -> 1.41421}
```

```
In[2]:= FindRoot[x^2 - 2 = 0, {x, -1}]
```

```
Out[2]:= {x -> -1.41421}
```

```
In[3]:= Solve[x^2 - 2 = 0]
```

```
Out[3]:= {{x -> -sqrt[2]}, {x -> sqrt[2]}}
```

```
In[4]:= Solve[x^2 - 2.0 = 0]
```

```
Out[4]:= {{x -> -1.41421}, {x -> 1.41421}}
```

```
In[5]:= NSolve[x^3 + 4*x^2 + x - 4 = 0]
```

```
Out[5]:= {{x -> -3.34292}, {x -> -1.47068}, {x -> 0.813607}}
```

```
In[6]:= Solve[x^3 = 8, x]
```

```
Out[6]:= {{x -> 2}, {x -> -2 (-1)^(1/3)}, {x -> 2 (-1)^(2/3)}}
```

```
In[7]:= Solve[x^3 = 8, x, Reals]
```

```
Out[7]:= {{x -> 2}}
```

```
In[8]:= NSolve[Cos[x] = x, x, Reals]
```

```
Out[8]:= {{x -> 0.739085}}
```

```
In[9]:= Solve[x^2 + y^2 = 2 && x - y = 0, {x, y}]
```

```
Out[9]:= {{x -> -1, y -> -1}, {x -> 1, y -> 1}}
```

```
In[10]:= Solve[x^2 + y^2 = 2 && x - y = 0 && x > 0, {x, y}]
```

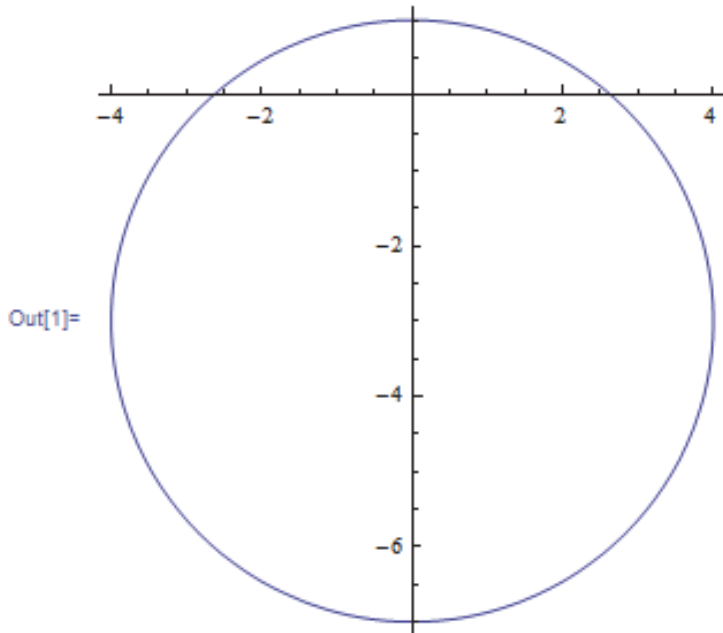
```
Out[10]:= {{x -> 1, y -> 1}}
```

## 6.2 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 2

### 6.2.1 การเขียนกราฟ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลา

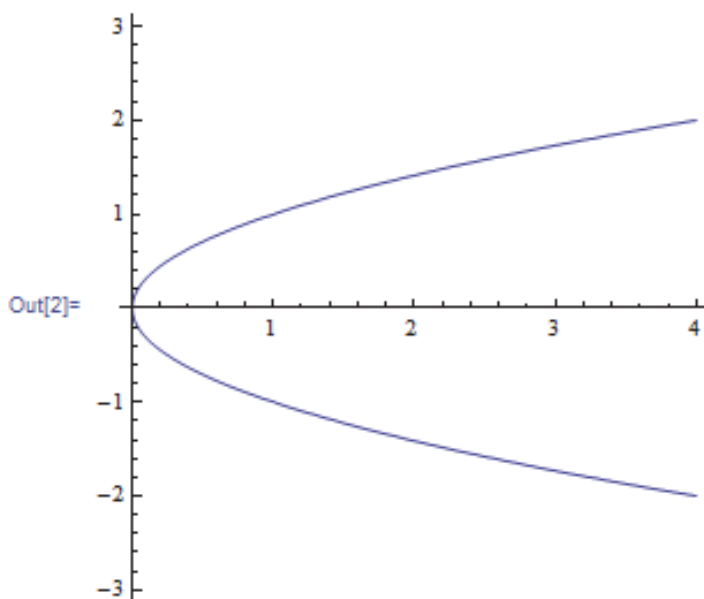
การเขียนกราฟวงกลม  $x^2 + (y + 3)^2 = 16$

```
In[1]:= ContourPlot[x^2 + (y + 3)^2 = 16, {x, -4, 4}, {y, -7, 1},
      Axes → True, Frame → False]
```



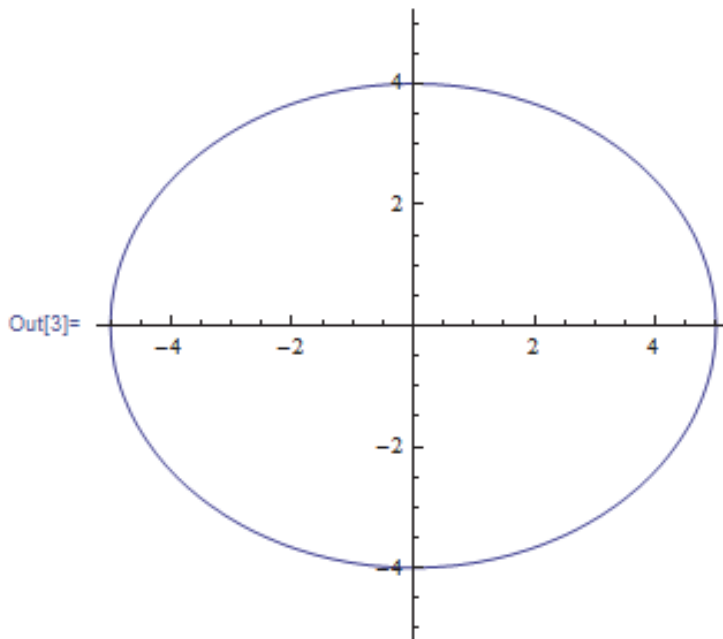
การเขียนกราฟพาราโบลา  $x = y^2$

```
In[2]:= ContourPlot[y^2 = x, {x, 0, 4}, {y, -3, 3}, Axes → True,
      Frame → False]
```



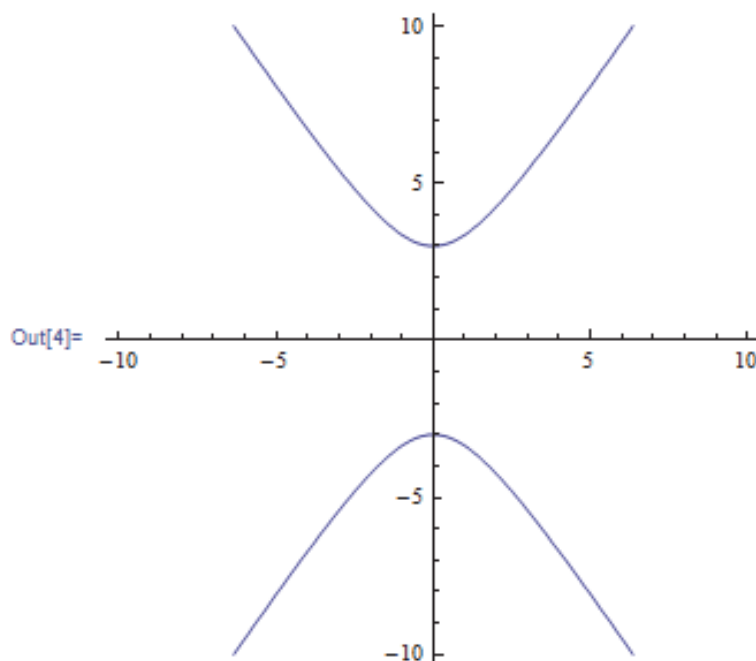
การเขียนกราฟวงรี  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

```
In[3]:= ContourPlot[x^2/25 + y^2/16 = 1, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  Axes → True, Frame → False]
```



การเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

```
In[4]:= ContourPlot[y^2/9 - x^2/4 = 1, {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
  Axes → True, Frame → False]
```





## 6.2.2 การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin, cos, tan, sec, cosec, cot

```
In[1]:= Sin[Pi / 4]
```

$$\text{Out[1]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

```
In[2]:= Sin[Pi / 4.]
```

```
Out[2]= 0.707107
```

```
In[3]:= Sin[45 * Degree]
```

$$\text{Out[3]} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

```
In[4]:= Sin[45.0 * Degree]
```

```
Out[4]= 0.707107
```

```
In[5]:= Cos [60.0 * Degree]
```

```
Out[5]= 0.5
```

```
In[6]:= Tan[Pi / 6]
```

$$\text{Out[6]} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

```
In[7]:= Sec[Pi / 6.]
```

```
Out[7]= 1.1547
```

```
In[8]:= Csc[45.0 * Degree]
```

```
Out[8]= 1.41421
```

```
In[9]:= Cot[Pi / 3.]
```

```
Out[9]= 0.57735
```

```
In[10]:= Tan[60.0 * Degree]
```

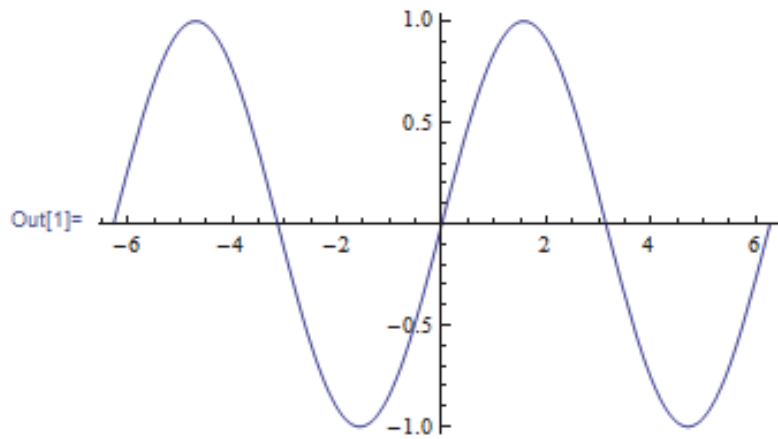
```
Out[10]= 1.73205
```

```
In[11]:= Cot [60.0 * Degree]
```

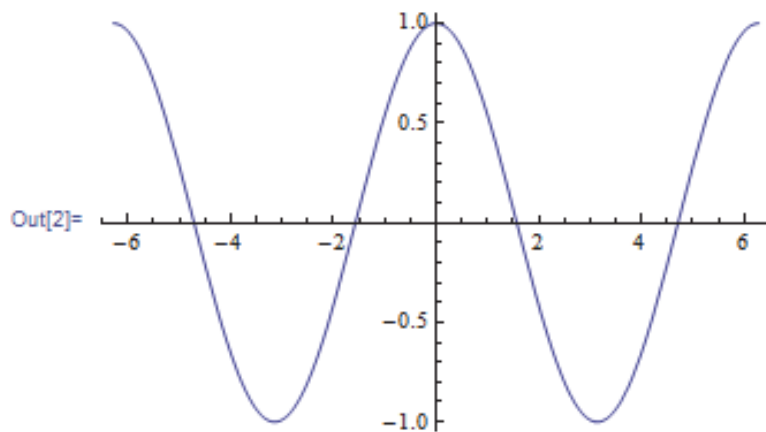
```
Out[11]= 0.57735
```

## 6.2.3 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin, cos, tan, sec, cosec, cot

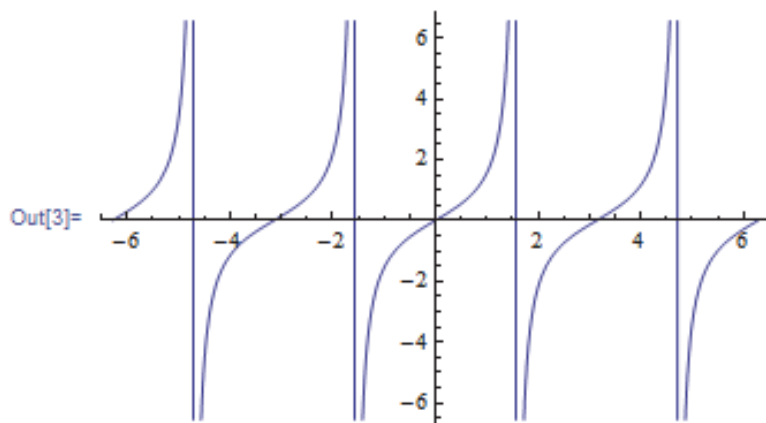
```
In[1]:= Plot[Sin[x], {x, -2 * Pi, 2 * Pi}]
```



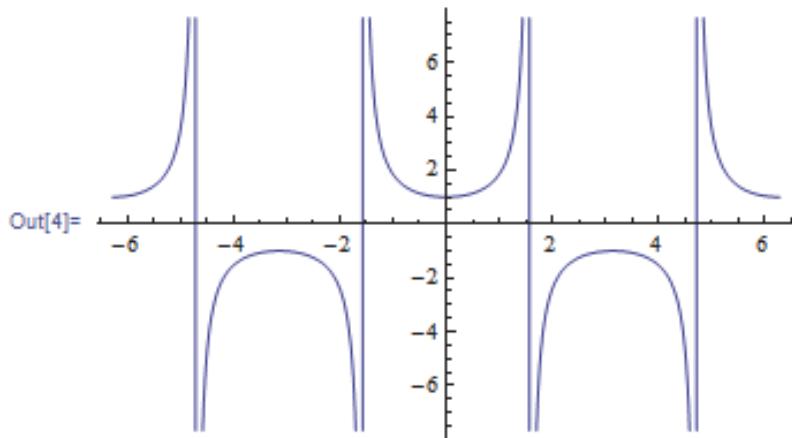
```
In[2]:= Plot[Cos[x], {x, -2 * Pi, 2 * Pi}]
```



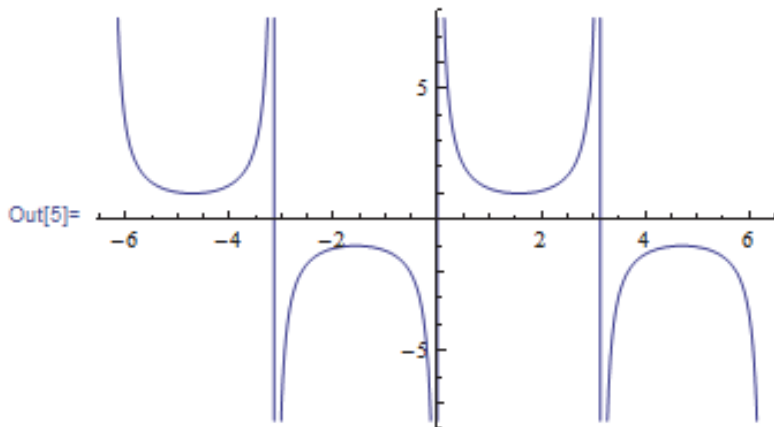
```
In[3]:= Plot[Tan[x], {x, -2 * Pi, 2 * Pi}]
```



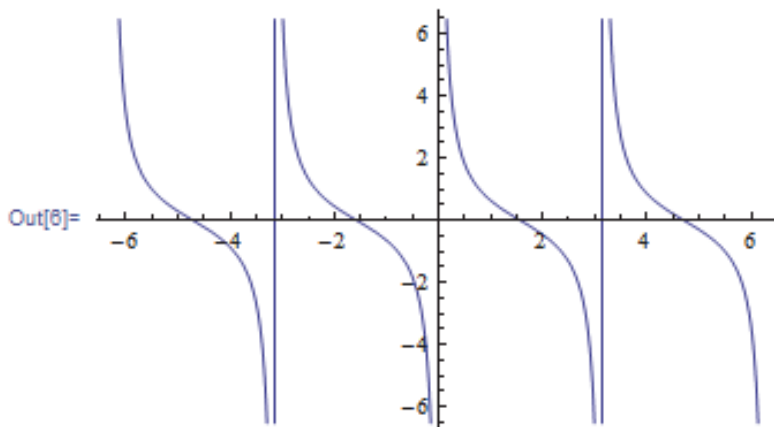
In[4]:= Plot[Sec[x], {x, -2\*Pi, 2\*Pi}]



In[5]:= Plot[Csc[x], {x, -2\*Pi, 2\*Pi}]



In[6]:= Plot[Cot[x], {x, -2\*Pi, 2\*Pi}]



## 6.2.4 การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ความแปรปรวน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

```
In[1]:= x := {1, 4, 10, 14, 18}
```

```
In[2]:= Mean[x]
```

```
Out[2]=  $\frac{47}{5}$ 
```

```
In[3]:= Median[x]
```

```
Out[3]= 10
```

```
In[4]:= Variance[x]
```

```
Out[4]=  $\frac{244}{5}$ 
```

```
In[5]:= StandardDeviation[x]
```

```
Out[5]=  $2\sqrt{\frac{61}{5}}$ 
```

หมายเหตุ ในกรณีที่ข้อมูลบางตัวเป็นเลขทศนิยม ผลการคำนวณจะแสดงเป็นเลขทศนิยม

```
In[6]:= x := {1, 4, 10, 14, 18.0}
```

```
In[7]:= Mean[x]
```

```
Out[7]= 9.4
```

```
In[8]:= Median[x]
```

```
Out[8]= 10.
```

```
In[9]:= Variance[x]
```

```
Out[9]= 48.8
```

```
In[10]:= StandardDeviation[x]
```

```
Out[10]= 6.9857
```

หมายเหตุ 
$$\text{Variance}[x] = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

### 6.3 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 3

#### 6.3.1 การคำนวณค่าฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

In[1]:= **Exp**[2.]

Out[1]= 7.38906

In[2]:= **Exp**[2]

Out[2]=  $e^2$

In[3]:=  $e^{2.}$

Out[3]= 7.38906

In[4]:= **Log**[8, 2]

Out[4]=  $\frac{1}{3}$

In[5]:= **Log**[2, 8]

Out[5]= 3

In[6]:= **Log10**[2]

Out[6]=  $\frac{\text{Log}[2]}{\text{Log}[10]}$

In[7]:= **Log10**[2.]

Out[7]= 0.30103

In[8]:= **Log**[10.]

Out[8]= 2.30259

In[9]:= **Log**[e, 10.]

Out[9]= 2.30259

In[10]:= **Log**[10., 2]

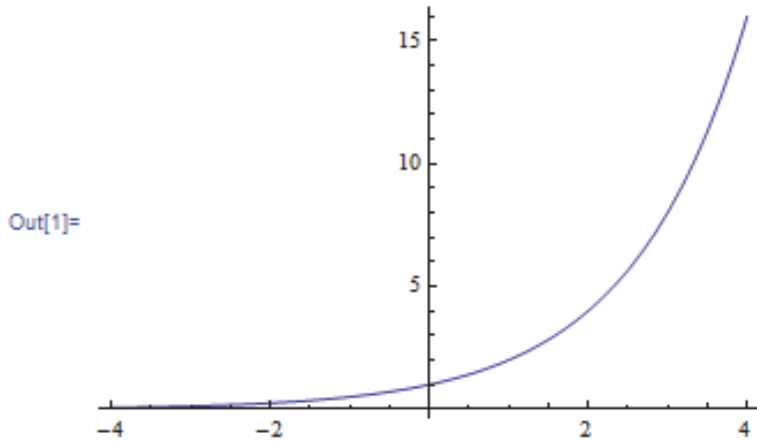
Out[10]= 0.30103

In[11]:= **N**[**Log**[10], 30]

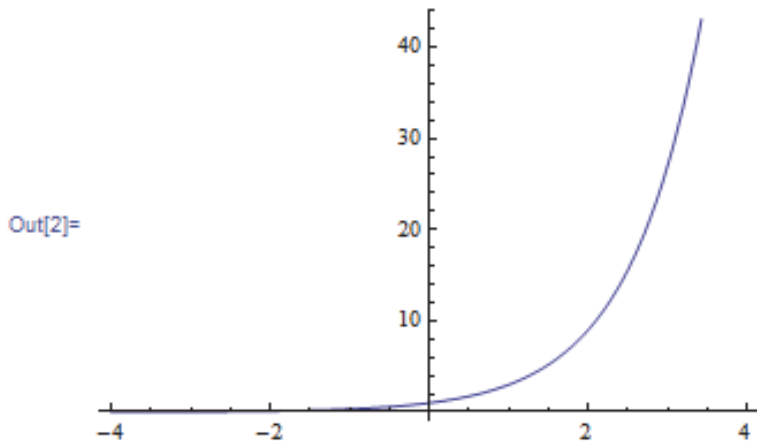
Out[11]= 2.30258509299404568401799145468

6.3.2 การเขียนกราฟของ  $y = e^x$ ,  $y = a^x$  และ  $y = \log_a x$ 

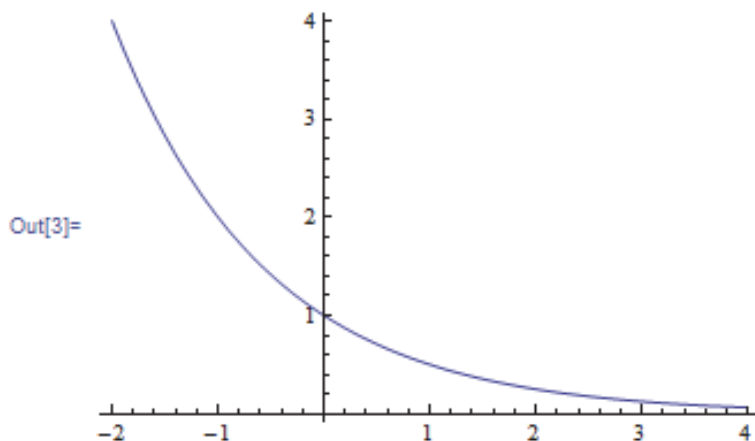
```
In[1]:= Plot[2^x, {x, -4, 4}]
```



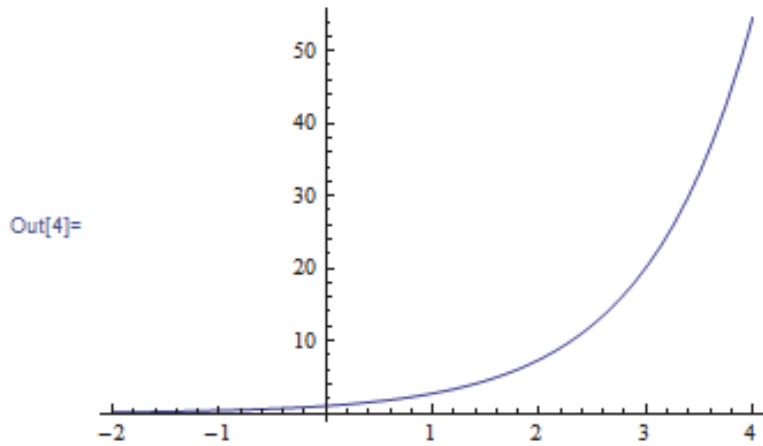
```
In[2]:= Plot[3^x, {x, -4, 4}]
```



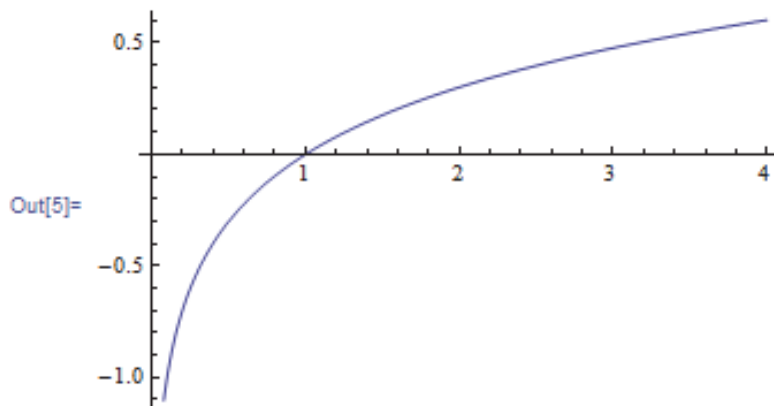
```
In[3]:= Plot[0.5^x, {x, -2, 4}]
```



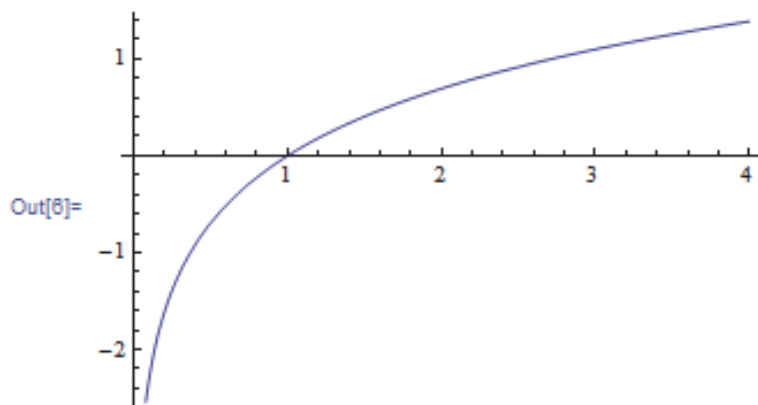
In[4]:= `Plot[Exp[x], {x, -2, 4}]`



In[5]:= `Plot[Log10[x], {x, 0, 4}]`



In[6]:= `Plot[Log[x], {x, 0, 4}]`



## 3. การทำตารางค่าของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

```
In[1]:= TableForm[Table[{i, Exp[i] // N, Log10[i] // N}, {i, 2, 7}]]
```

```
Out[1]/TableForm=
```

2	7.38906	0.30103
3	20.0855	0.477121
4	54.5982	0.60206
5	148.413	0.69897
6	403.429	0.778151
7	1096.63	0.845098

```
In[2]:= TableForm[Table[{i, Exp[i] // N, Log[i] // N}, {i, 2, 7}]]
```

```
Out[2]/TableForm=
```

2	7.38906	0.693147
3	20.0855	1.09861
4	54.5982	1.38629
5	148.413	1.60944
6	403.429	1.79176
7	1096.63	1.94591

```
In[3]:= x := {2, 8, 64, 128};
```

```
In[4]:= TableForm[
  Table[{i, x[[i]], Log10[x[[i]]] // N, Log[x[[i]]] // N},
  {i, 1, 4}]]
```

```
Out[4]/TableForm=
```

1	2	0.30103	0.693147
2	8	0.90309	2.07944
3	64	1.80618	4.15888
4	128	2.10721	4.85203

```
In[5]:= TableForm[
  Table[{i, x[[i]], Log[4, x[[i]]] // N, Log[2, x[[i]]] // N},
  {i, 1, 4}]]
```

```
Out[5]/TableForm=
```

1	2	0.5	1.
2	8	1.5	3.
3	64	3.	6.
4	128	3.5	7.



## 6.3.4 การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน arcsin, arccos, arctan, arcsec, arccosec, arccot

```
In[1]:= Pi * 1.
```

```
Out[1]= 3.14159
```

```
In[2]:= Pi / 180.
```

```
Out[2]= 0.0174533
```

```
In[3]:= 1. * Degree
```

```
Out[3]= 0.0174533
```

```
In[4]:= {ArcSin[1], Pi / 2., ArcSin[1.], ArcSin[1.] / Degree}
```

```
Out[4]= { $\frac{\pi}{2}$ , 1.5708, 1.5708, 90.}
```

```
In[5]:= {ArcCos[ $\frac{1}{2}$ ], Pi / 3., ArcCos[0.5], ArcCos[0.5] / Degree}
```

```
Out[5]= { $\frac{\pi}{3}$ , 1.0472, 1.0472, 60.}
```

```
In[6]:= {ArcTan[1], Pi / 4., ArcTan[1.], ArcTan[1.] / Degree}
```

```
Out[6]= { $\frac{\pi}{4}$ , 0.785398, 0.785398, 45.}
```

```
In[7]:= {ArcSec[2], Pi / 3., ArcSec[2.], ArcSec[2.] / Degree}
```

```
Out[7]= { $\frac{\pi}{3}$ , 1.0472, 1.0472, 60.}
```

```
In[8]:= {ArcCsc[2], Pi / 6., ArcCsc[2.], ArcCsc[2.] / Degree}
```

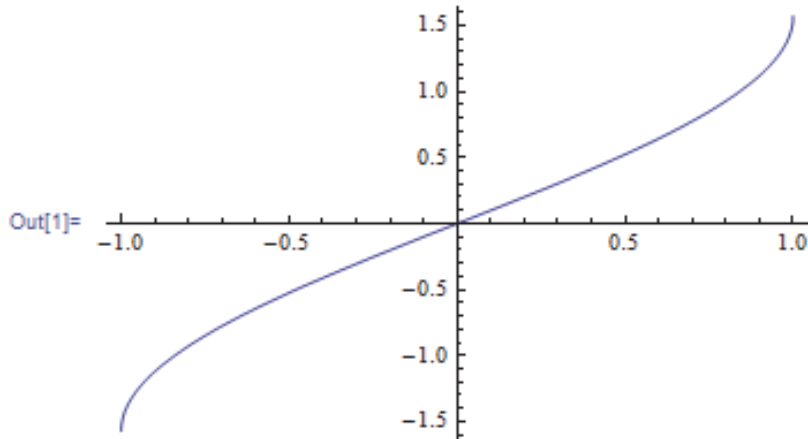
```
Out[8]= { $\frac{\pi}{6}$ , 0.523599, 0.523599, 30.}
```

```
In[9]:= {ArcCot[ $\sqrt{3}$ ], Pi / 6., ArcCot[ $\sqrt{3.}$ ], ArcCot[ $\sqrt{3.}$ ] / Degree}
```

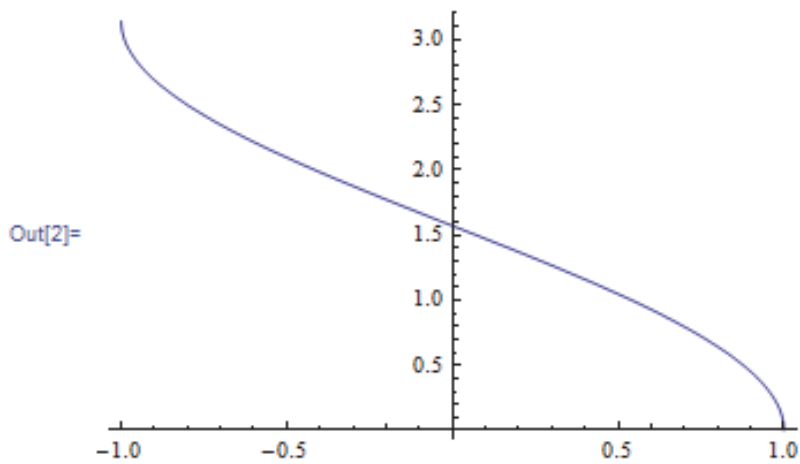
```
Out[9]= { $\frac{\pi}{6}$ , 0.523599, 0.523599, 30.}
```

## 6.3.5 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

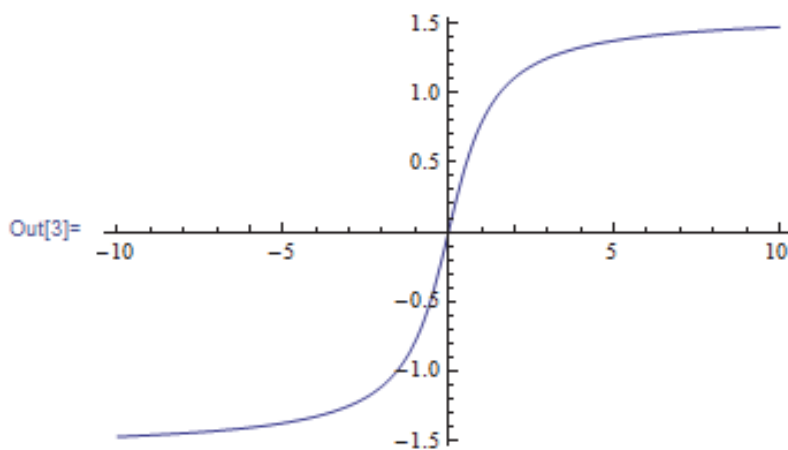
```
In[1]:= Plot[ArcSin[x], {x, -1, 1}]
```



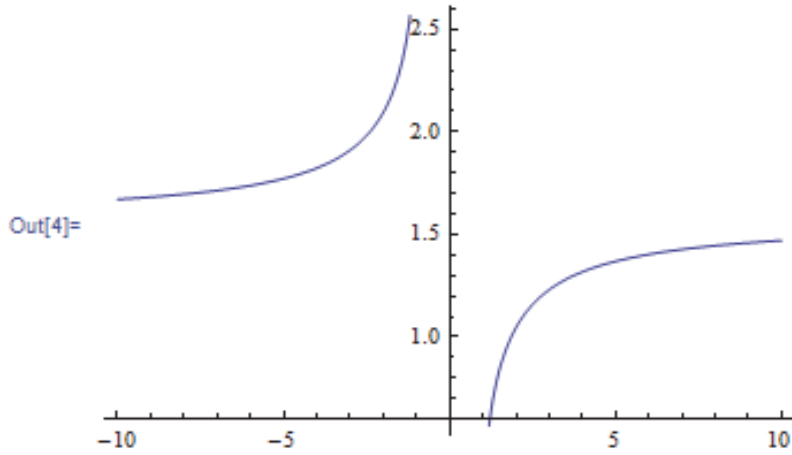
```
In[2]:= Plot[ArcCos[x], {x, -1, 1}]
```



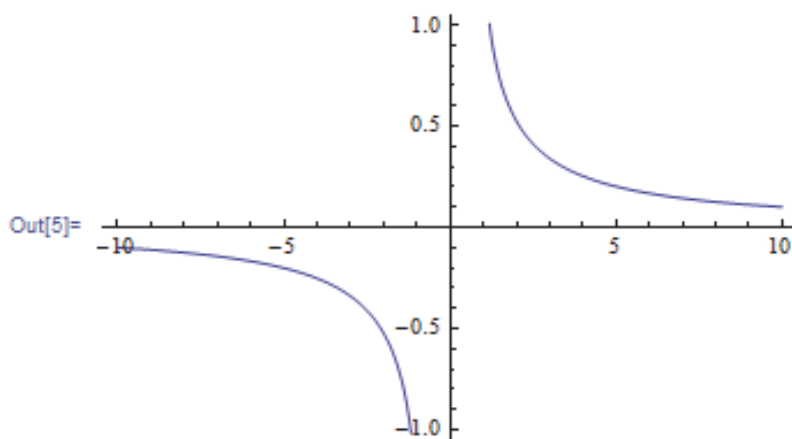
```
In[3]:= Plot[ArcTan[x], {x, -10, 10}]
```



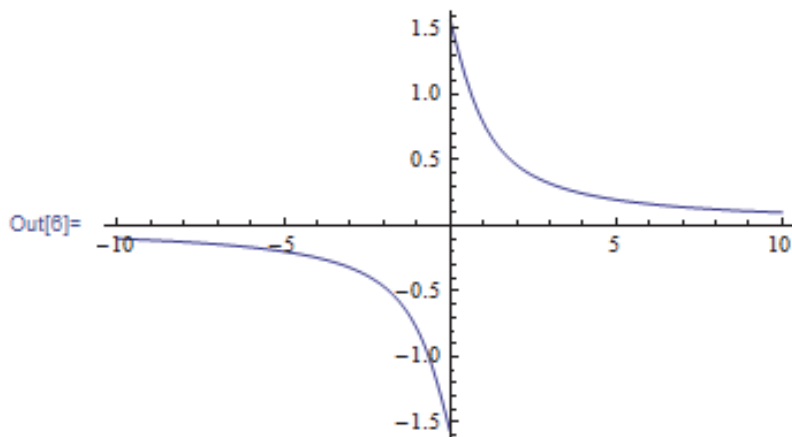
In[4]:= Plot[ArcSec[x], {x, -10, 10}]



In[5]:= Plot[ArcCsc[x], {x, -10, 10}]



In[6]:= Plot[ArcCot[x], {x, -10, 10}]



## 6.3.6 การคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ สเกลาร์คูณเมทริกซ์ ค่ากำหนดของเมทริกซ์

```
In[1]:= A := {{1, 2}, {3, 4}};

In[2]:= A
Out[2]:= {{1, 2}, {3, 4}}

In[3]:= MatrixForm[A]
Out[3]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$


In[4]:= B := {{3, 4}, {2, 3}};

In[5]:= B
Out[5]:= {{3, 4}, {2, 3}}

In[6]:= MatrixForm[B]
Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$


In[7]:= {MatrixForm[A + B], MatrixForm[A.B], MatrixForm[4 * A]}
Out[7]= { $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$ }

In[8]:= {MatrixForm[A ^ (-1)], Det[A], Det[B], Det[A.B]}
Out[8]= { $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ , -2, 1, -2}

In[9]:= MatrixForm[A * B]
Out[9]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$$

```

หมายเหตุ  $A*B$  เป็นการคูณของสมาชิกที่มีตำแหน่งตรงกัน

$A.B$  เป็นการคูณแบบเมทริกซ์

6.3.7 การหาผลเฉลยของระบบสมการ

In[1]:= `Solve[{2 * x + 3 * y = 2, 5 * x + 8 * y = 1}]`

Out[1]= `{{x → 13, y → -8}}`

In[2]:= `Solve[{2 * x + 3 * y = 2, 5 * x + 8 * y = 1}, {x, y}]`

Out[2]= `{{x → 13, y → -8}}`

In[3]:= `Solve[{2 * x + 3 * y = u, 5 * x + 8 * y = u}, {x, y}]`

Out[3]= `{{x → 5 u, y → -3 u}}`

In[4]:= `Solve[{x + y + z = 12, 2 * x + 3 * y + 4 * z = 64,  
x + 2 * y - z = -4}]`

Out[4]= `{{x → -14, y → 12, z → 14}}`

In[5]:= `Solve[{x + y + z = u + v, 2 * x + 3 * y + 4 * z = v + w,  
x + 2 * y - z = w + v}, {x, y, z}]`

Out[5]= `{{x →  $\frac{1}{4} (11 u + 7 v - 4 w)$ , y →  $-\frac{3 u}{2} - \frac{v}{2} + w$ , z →  $-\frac{u}{4} - \frac{v}{4}$ }}`

In[6]:= `Solve[{x^2 + y^2 = 16, x - y = 2}]`

Out[6]= `{{x →  $1 - \sqrt{7}$ , y →  $-1 - \sqrt{7}$ }, {x →  $1 + \sqrt{7}$ , y →  $-1 + \sqrt{7}$ }}`

In[7]:= `Solve[{x^2 + y^2 = 16, x - y = 2}, {x, y}]`

Out[7]= `{{x →  $1 - \sqrt{7}$ , y →  $-1 - \sqrt{7}$ }, {x →  $1 + \sqrt{7}$ , y →  $-1 + \sqrt{7}$ }}`

In[8]:= `Solve[x^2 + y^2 = 16 && x - y = 2 && x > 0, {x, y}]`

Out[8]= `{{x →  $1 + \sqrt{7}$ , y →  $-1 + \sqrt{7}$ }}`

In[9]:= `NSolve[x^2 + y^2 = 16 && x - y = 2 && x > 0, {x, y}]`

Out[9]= `{{x → 3.64575, y → 1.64575}}`

## 6.4 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 4

## 6.4.1 การบวกและลบเวกเตอร์ สเกลาร์คูณเวกเตอร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ ขนาดของเวกเตอร์

```

In[1]:= u := {3, 4};

In[2]:= u
Out[2]= {3, 4}

In[3]:= MatrixForm[u]
Out[3]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$


In[4]:= v := {5, 12};

In[5]:= v
Out[5]= {5, 12}

In[6]:= MatrixForm[v]
Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$$


In[7]:= {MatrixForm[u + v], MatrixForm[4 * v], u.v}
Out[7]=  $\left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 20 \\ 48 \end{pmatrix}, 63 \right\}$ 

In[8]:= Norm[v]
Out[8]= 13

In[9]:= Normalize[v]
Out[9]=  $\left\{ \frac{5}{13}, \frac{12}{13} \right\}$ 

In[10]:= MatrixForm[Normalize[v]]
Out[10]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$$


```

## 6.4.2 การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน ค่าสัมบูรณ์ อาร์กิวเมนต์ ส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

```
In[1]:= z := 3 + 4 * i;
```

```
In[2]:= z
```

```
Out[2]= 3 + 4 i
```

```
In[3]:= Abs[z]
```

```
Out[3]= 5
```

```
In[4]:= Re[z]
```

```
Out[4]= 3
```

```
In[5]:= Im[z]
```

```
Out[5]= 4
```

```
In[6]:= Conjugate[z]
```

```
Out[6]= 3 - 4 i
```

```
In[7]:= Arg[z]
```

```
Out[7]= ArcTan[ $\frac{4}{3}$ ]
```

```
In[8]:= ArcTan[4 / 3.]
```

```
Out[8]= 0.927295
```

```
In[9]:= w := 3.0 + 4.0 * i;
```

```
In[9]:= w := 3.0 + 4.0 * i;
```

```
In[10]:= w
```

```
Out[10]= 3. + 4. i
```

```
In[11]:= Arg[w]
```

```
Out[11]= 0.927295
```

```
In[12]:= z := 3 + 4 * i; w := 5 + 12 * i;
```

```
In[13]:= {z + w, 4 * z, z * w, Re[z], Im[z]}
```

```
Out[13]= {8 + 16 i, 12 + 16 i, -33 + 56 i, 3, 4}
```

## 6.4.3 การหาค่าสถิติของข้อมูล

```

In[1]:= data := {1.25, 2.5, 3.335, 4.5, 5.75, 6.235, 7.25, 8.325, 9.25};

In[2]:= Mean[data]
Out[2]= 5.37722

In[3]:= Median[data]
Out[3]= 5.75

In[4]:= MeanDeviation[data]
Out[4]= 2.20531

In[5]:= MedianDeviation[data]
Out[5]= 2.415

In[6]:= q = Quartiles[data]
Out[6]= {3.12625, 5.75, 7.51875}

In[7]:= q[[1]]
Out[7]= 3.12625

In[8]:= q[[2]]
Out[8]= 5.75

In[9]:= q[[3]]
Out[9]= 7.51875

In[10]:= (q[[3]] - q[[1]]) / 2
Out[10]= 2.19625

In[11]:= QuartileDeviation[data]
Out[11]= 2.19625

In[12]:= InterquartileRange[data]
Out[12]= 4.3925

In[13]:= q[[3]] - q[[1]]
Out[13]= 4.3925

```



## 6.5 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 5

## 6.5.1 การหาขีดจำกัดของลำดับ

$$\text{In[1]:= Limit}\left[\frac{2 * n}{3 * n + 4}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[1]= } \frac{2}{3}$$

$$\text{In[2]:= Limit}\left[\frac{\text{Sin}[n]}{n}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[2]= } 0$$

$$\text{In[3]:= Limit}\left[\frac{\text{Sin}\left[\frac{2}{n}\right]}{\frac{4}{n}}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[3]= } \frac{1}{2}$$

$$\text{In[4]:= Limit}\left[\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{4 * n^2 + 4 * n + 1}}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[4]= } \frac{1}{2}$$

$$\text{In[5]:= Limit}\left[\frac{1 + \text{Sin}\left[\frac{4}{n}\right]}{1 + \frac{2}{n}}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[5]= } 1$$

$$\text{In[6]:= Limit}\left[\left(1 + \frac{4}{n}\right)^{3 * n}, n \rightarrow \infty\right]$$

$$\text{Out[6]= } e^{12}$$

## 6.5.2 การหาผลบวกของอนุกรม และสูตรผลบวกของอนุกรม

In[1]:= `Sum[i, {i, 1; 10}]`

Out[1]= 55

$$\text{In[2]:= } \sum_{i=1}^{10} i$$

Out[2]= 55

In[3]:= `Sum[i, {i, 1, n}]`

$$\text{Out[3]= } \frac{1}{2} n (1 + n)$$

$$\text{In[4]:= } \sum_{i=1}^n i$$

$$\text{Out[4]= } \frac{1}{2} n (1 + n)$$

In[5]:= `5 + 10 + 15 + 20`

Out[5]= 50

In[6]:= `Sum[i, {i, 5, 20, 5}]`

Out[6]= 50

In[7]:= `f[x_] := x^2 + x + 1;`

In[8]:= `Sum[f[x], {x, 1; 5}]`

Out[8]= 75

$$\text{In[9]:= } \sum_{i=1}^5 (i^2 + i + 1)$$

Out[9]= 75

$$\text{In[10]:= } \prod_{i=1}^6 i$$

Out[10]= 720

In[11]:= `6!`

Out[11]= 720

6.5.3 การหาลิมิตและอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการเขียนกราฟของ  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$  พร้อมกัน

```
In[1]:= Limit[x^2 + x + 1, x -> 1]
```

```
Out[1]= 3
```

```
In[2]:= Limit[ $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ , x -> 2]
```

```
Out[2]= 4
```

```
In[3]:= Limit[ $\frac{\text{Abs}[x - 2]}{x - 2}$ , x -> 2, Direction -> 1]
```

```
Out[3]= -1
```

```
In[4]:= Limit[ $\frac{\text{Abs}[x - 2]}{x - 2}$ , x -> 2, Direction -> -1]
```

```
Out[4]= 1
```

```
In[5]:= f[x_] := 4 * x^3 + 8 * x^2 - 6 * x + 4
```

```
In[6]:= Limit[f[x], x -> 2]
```

```
Out[6]= 56
```

```
In[7]:= D[f[x], x]
```

```
Out[7]= -6 + 16 x + 12 x^2
```

```
In[8]:= D[f[x], x] /. x -> 0
```

```
Out[8]= -6
```

```
In[9]:= f'[0]
```

```
Out[9]= -6
```

```
In[10]:= f''[0]
```

```
Out[10]= 16
```

```
In[11]:= f'''[0]
```

```
Out[11]= 24
```

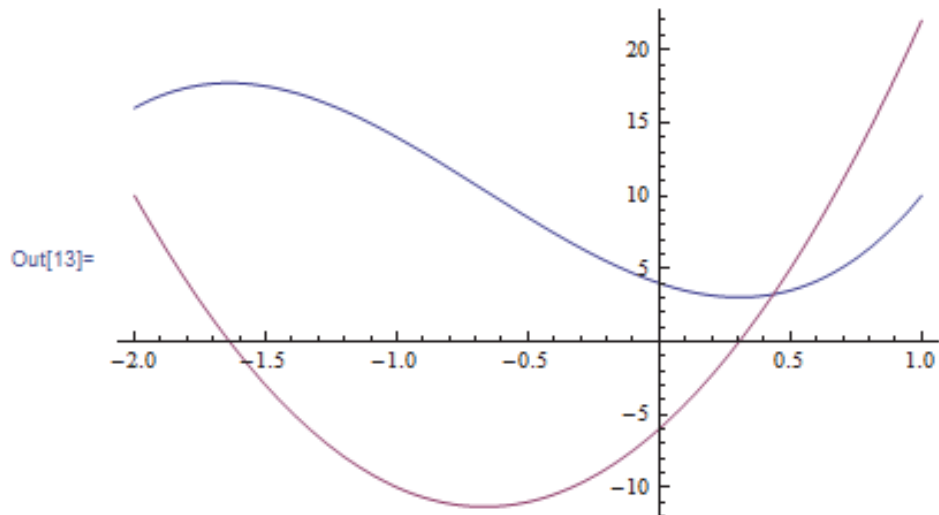
```
In[12]:= D[f[x], {x, 2}]
```

```
Out[12]= 16 + 24 x
```

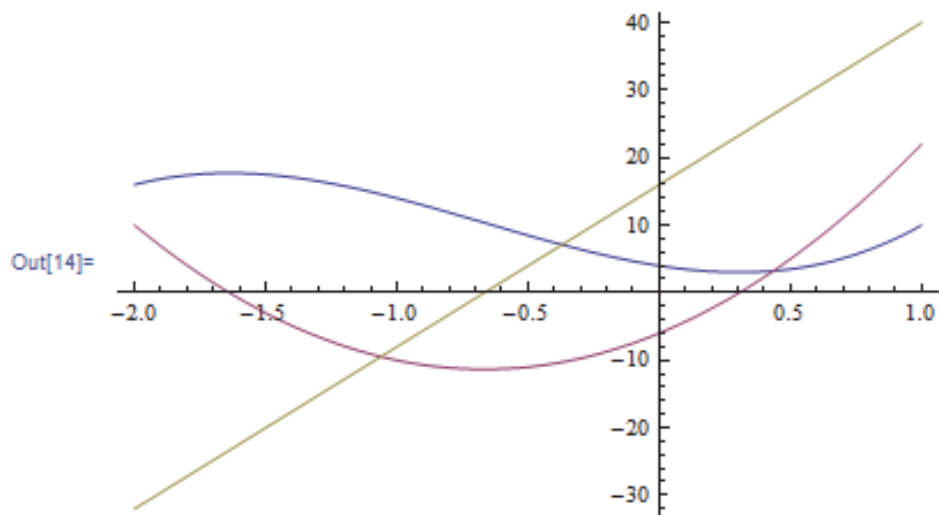
```
In[12]:= D[f[x], {x, 2}]
```

```
Out[12]= 16 + 24 x
```

```
In[13]:= Plot[{f[x], f'[x]}, {x, -2, 1}]
```



```
In[14]:= Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -2, 1}]
```



6.5.4 การหาค่าอินทิกรัล การหาสูตรอินทิกรัล และการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

In[1]:= Integrate[x^2, x]

Out[1]=  $\frac{x^3}{3}$

In[2]:=  $\int x^2 dx$

Out[2]=  $\frac{x^3}{3}$

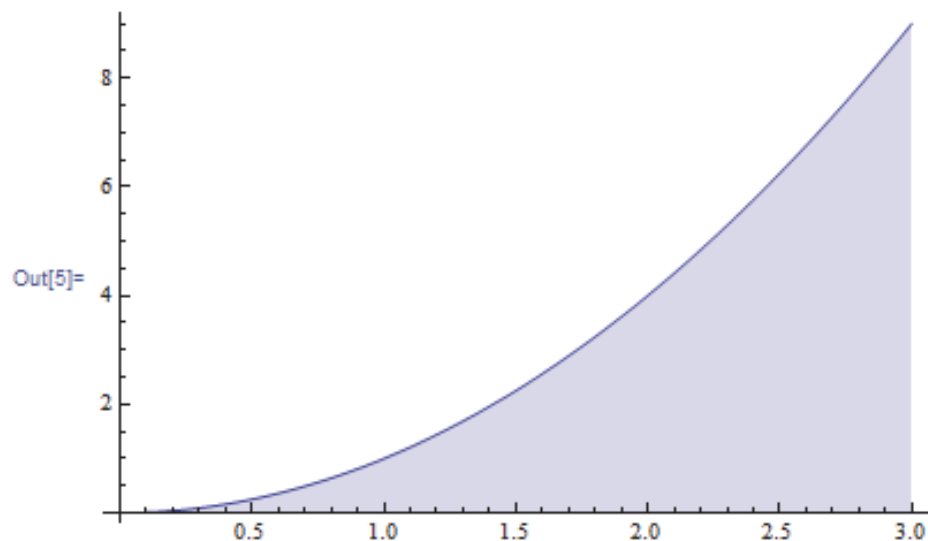
In[3]:= Integrate[x^2, {x, 0, 1}]

Out[3]=  $\frac{1}{3}$

In[4]:=  $\int_0^1 x^2 dx$

Out[4]=  $\frac{1}{3}$

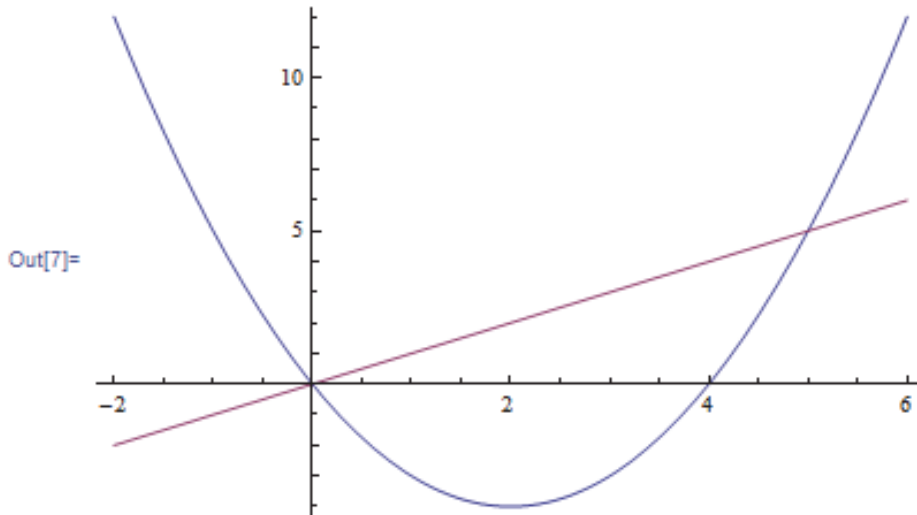
In[5]:= Plot[x^2, {x, 0, 3}, Filling -> Axis]



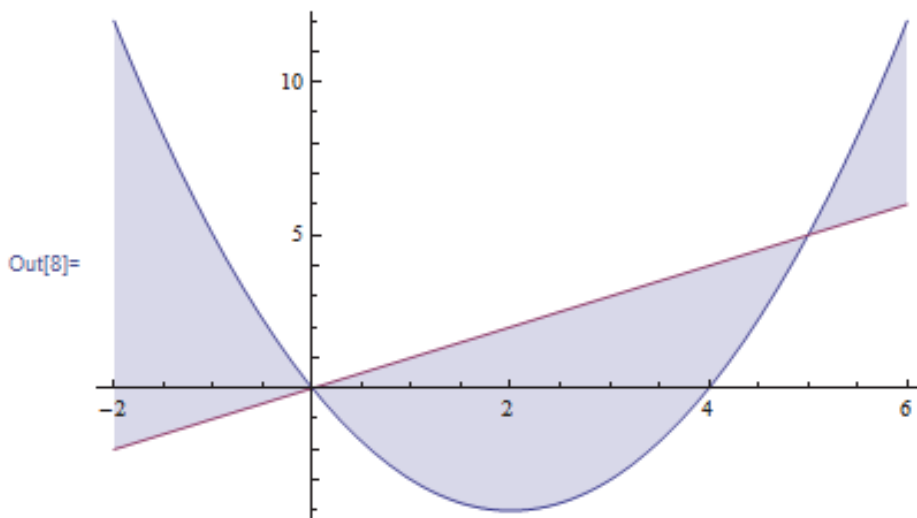
In[6]:= Integrate[x^2, {x, 0, 3}]

Out[6]= 9

In[7]:= `Plot[{x^2 - 4*x, x}, {x, -2, 6}]`



In[8]:= `Plot[{x^2 - 4*x, x}, {x, -2, 6}, Filling -> {1 -> {2}}]`



In[9]:= 
$$\int_{-2}^6 \text{Abs}[(x^2 - 4) - (x)] dx$$

Out[9]= 
$$\frac{1}{3} (80 + 17\sqrt{17})$$

## 6.6 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ 6

6.6.1 การคำนวณค่า  $n!$ ,  ${}^n P_r$ ,  ${}^n C_r$  และการกระจายทวินาม

```
In[1]:= 5 !
```

```
Out[1]= 120
```

```
In[2]:=  $\frac{5!}{3! * 2!}$ 
```

```
Out[2]= 10
```

```
In[3]:= nCr[n_, r_] := n! / (r! * (n - r) !);
```

```
In[4]:= nCr[5, 2]
```

```
Out[4]= 10
```

```
In[5]:= nPr[n_, r_] := n! / (n - r) !;
```

```
In[6]:= nPr[5, 2]
```

```
Out[6]= 20
```

```
In[7]:= Binomial[5, 2]
```

```
Out[7]= 10
```

```
In[8]:= Expand[(1 + x) ^ 6]
```

```
Out[8]= 1 + 6 x + 15 x2 + 20 x3 + 15 x4 + 6 x5 + x6
```

```
In[9]:= Expand[(a + b) ^ 4]
```

```
Out[9]= a4 + 4 a3 b + 6 a2 b2 + 4 a b3 + b4
```

```
In[10]:= Expand[(a + b + c) ^ 3]
```

```
Out[10]= a3 + 3 a2 b + 3 a b2 + b3 + 3 a2 c + 6 a b c + 3 b2 c + 3 a c2 + 3 b c2 + c3
```

```
In[11]:= PDF[BinomialDistribution[10, 0.2], 4]
```

```
Out[11]= 0.0880804
```

```
In[12]:=  $\frac{10!}{4! * 6!} * (0.2)^4 * (0.8)^6$ 
```

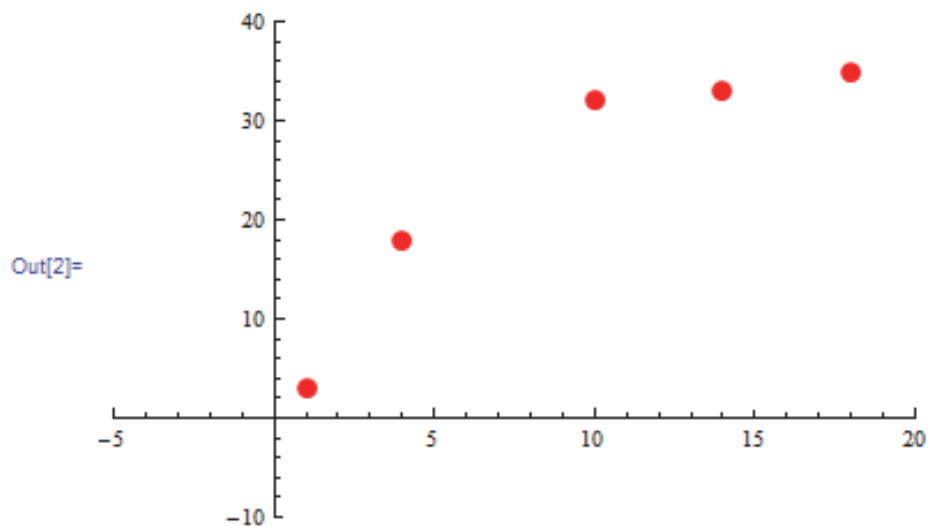
```
Out[12]= 0.0880804
```

## 6.6.2 กราฟแผนภาพการกระจายของข้อมูล

x	y
1	3
4	18
10	32
14	33
18	35

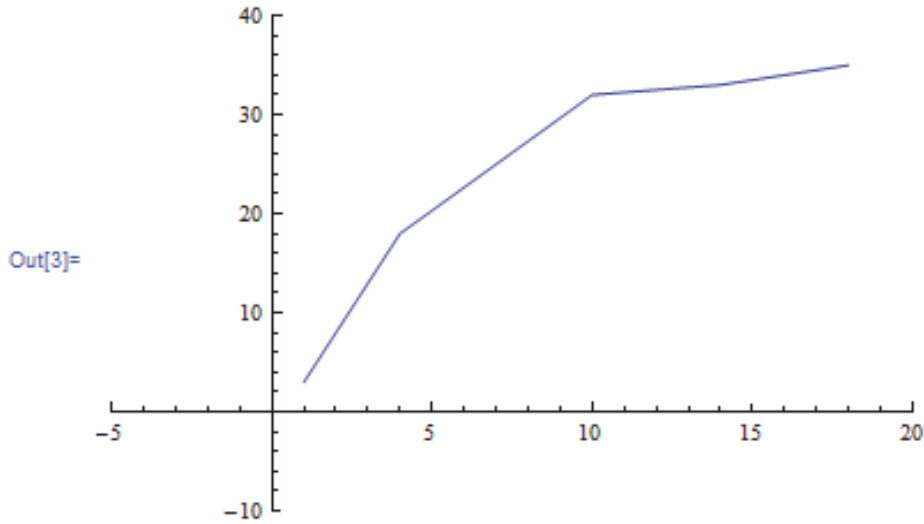
```
In[1]:= data := {{1, 3}, {4, 18}, {10, 32}, {14, 33}, {18, 35}}
```

```
In[2]:= ListPlot[data, PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},  
PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}]
```





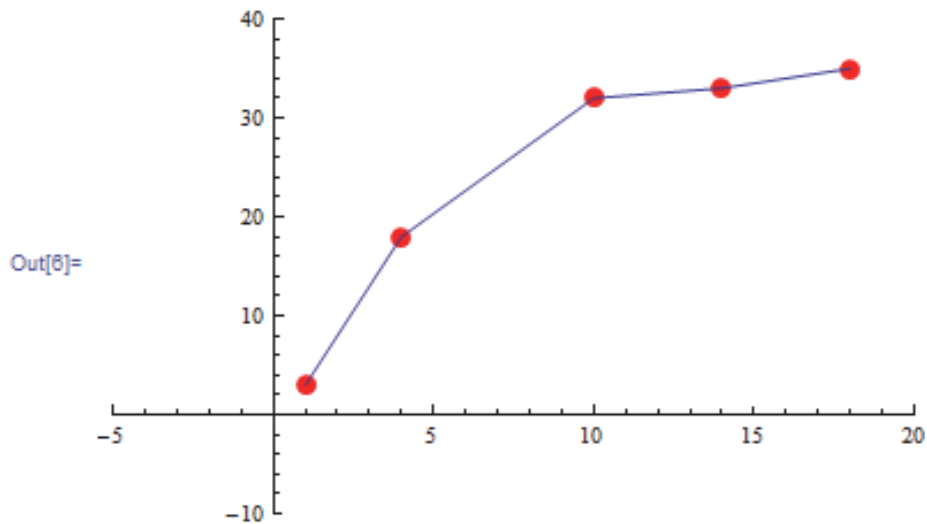
```
In[3]:= ListLinePlot[data, PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}]
```



```
In[4]:= g1 := ListPlot[data, PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},  
PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}]
```

```
In[5]:= g2 := ListLinePlot[data, PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}]
```

```
In[6]:= Show[{g1, g2}]
```



## 6.6.3 การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

ตัวอย่างข้อมูล

x	y
1	3
4	18
10	32
14	33
18	35

```
In[1]:= data := {{1, 3}, {4, 18}, {10, 32}, {14, 33}, {18, 35}}
```

```
In[2]:= ycap = LinearModelFit[data, {1, x}, x]
```

```
Out[2]= FittedModel [ 7.36475 + 1.79098x ]
```

```
In[3]:= ycap[4]
```

```
Out[3]= 14.5287
```

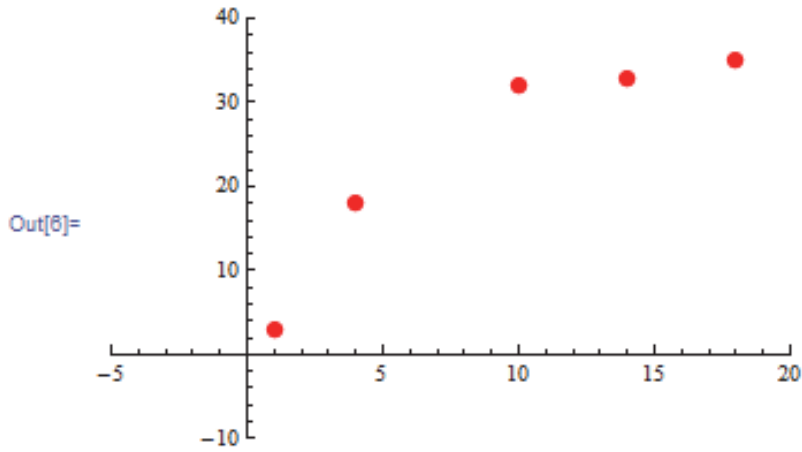
```
In[4]:= g3 := ListPlot[data,
  PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}];
```

```
In[5]:= g4 := Plot[ycap[x], {x, 0, 20},
  PlotStyle -> {Red, PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{-5, 20}, {-10, 40}}];
```

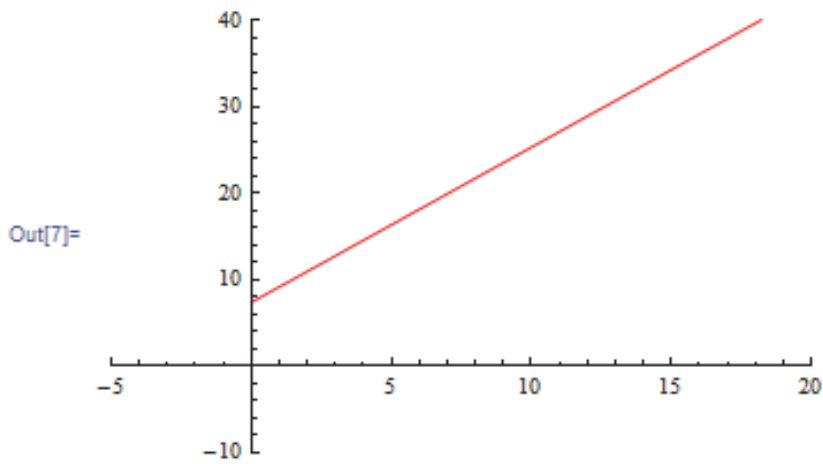
สมการเส้นตรงคือ  $ycap(x) = 7.36475 + 1.79098x$

ค่าพยากรณ์ของ y เมื่อ  $x = 4$  คือ 14.5287

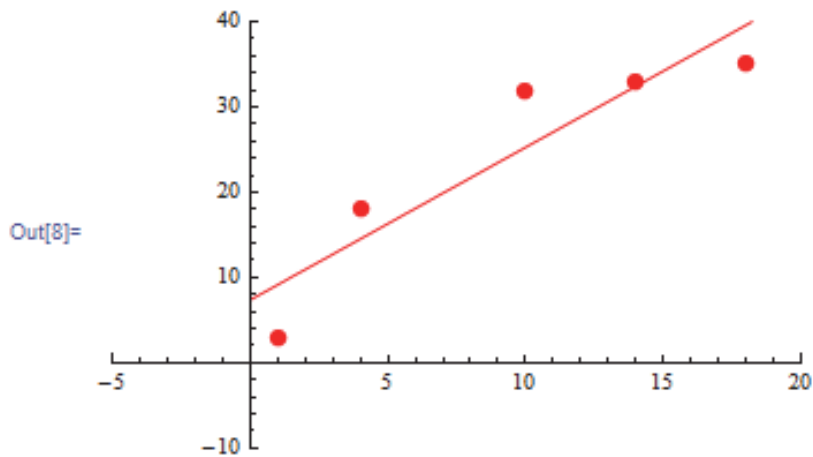
In[6]:= Show [g3]



In[7]:= Show [g4]



In[8]:= Show [g3, g4]



## 6.7 Mathematica กับการเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ Entrance

ข้อสอบ Entrance สามารถหาคำตอบได้ด้วยโปรแกรม Mathematica ตัวอย่างเช่น

ข้อสอบคณิตศาสตร์ 1 มีนาคม 2546 ข้อ 18

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} [\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x)(1-x^2)} + \sqrt{(1-x)(1-x^2)}]$$

มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                  |                  |
|------------------|------------------|
| 1. 0             | 2. $\frac{1}{4}$ |
| 3. $\frac{1}{2}$ | 4. 1             |

การคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

$$\text{In[1]:= Limit}\left[\left(\frac{1}{x^3}\right) * \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - \sqrt{(1+x) * (1-x^2)} + \sqrt{(1-x) * (1-x^2)}\right), x \rightarrow 0\right]$$

$$\text{Out[1]= } \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นตอบข้อ 3.

ข้อสอบคณิตศาสตร์ 2 มีนาคม 2546 ข้อ 11

ถ้า  $\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 8$  โดยที่  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

แล้ว  $\sin x + \cos 2x + \tan 3x$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$  | 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$  |
| 3. $\frac{-\sqrt{3}-1}{2}$ | 4. $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ |

การคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

In[1]:= Solve[1 / (1 - Sin[x]) + 1 / (1 + Sin[x]) = 8]

Out[1]= {{Sin[x] -> - $\frac{\sqrt{3}}{2}$ }, {Sin[x] ->  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ }}

In[2]:= x = ArcSin[- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ];

In[3]:= Sin[x] + Cos[2 \* x] + Tan[3 \* x]

Out[3]= - $\frac{1}{2}$  -  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

เพราะฉะนั้นตอบข้อ 3.

ข้อสอบคณิตศาสตร์ 1 มีนาคม 2545 ข้อ 2

$-\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \sin^2 3^\circ + \dots - \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$  มีค่าเท่ากับเท่าใด

การคำนวณด้วยโปรแกรม Mathematica

```
In[1]:= Sum[(-1)^n * Sin[n/180. * Pi]^2, {n, 1, 90}]
```

```
Out[1]= 0.5
```

```
In[2]:= Sum[(-1.)^n * Sin[n * Degree]^2, {n, 1, 90}]
```

```
Out[2]= 0.5
```

เพราะฉะนั้น  $-\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ - \sin^2 3^\circ + \dots - \sin^2 89^\circ + \sin^2 90^\circ$  มีค่าเท่ากับ 0.5

## บทที่ 7

# การคำนวณระดับอุดมศึกษา ด้วยโปรแกรม Mathematica

การเรียนในระดับอุดมศึกษามีปัญหาทางด้านการคำนวณมากมาย หากนักเรียนนิสิต นักศึกษา หรือ ผู้สอน ได้นำความสามารถของโปรแกรม Mathematica มาใช้ในการคำนวณก็จะทำให้เกิดประโยชน์อย่างมาก ในบทนี้จึงได้ยกตัวอย่างการคำนวณทางคณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษา จำแนกเป็นกลุ่มต่าง ๆ ดังนี้

1. แคลคูลัส
2. สมการเชิงอนุพันธ์
3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข
4. พีชคณิตเชิงเส้น
5. สถิติและความน่าจะเป็น
6. คณิตศาสตร์ขั้นสูง

### 7.1 เสริมการคำนวณแคลคูลัสด้วยโปรแกรม Mathematica

#### 7.7.1 การคำนวณค่าลิมิต

```
In[1]:= Limit[(Sqrt[x + 4] - 2) / x, x → 0]
```

```
Out[1]=  $\frac{1}{4}$ 
```

```
In[2]:= Limit[Sqrt[x^2 - 4] / (x + 4), x → ∞]
```

```
Out[2]= 1
```

```
In[3]:= Limit[Abs[x] / x, x → 0, Direction → 1]
```

```
Out[3]= -1
```

```
In[4]:= Limit[Abs[x] / x, x → 0, Direction → -1]
```

```
Out[4]= 1
```

## 7.7.2 การกำหนดสูตรฟังก์ชัน การหาอนุพันธ์ อนุพันธ์อันดับสูง และอนุพันธ์ย่อย

```
In[1]:= f[x_] := x^4;
```

```
In[2]:= D[f[x], x]
```

```
Out[2]= 4 x^3
```

```
In[3]:= D[f[x], {x, 2}]
```

```
Out[3]= 12 x^2
```

```
In[4]:= D[f[x], x] /. x -> 3
```

```
Out[4]= 108
```

```
In[5]:= f[x_, y_] := x^4 * y^3;
```

```
In[6]:= D[f[x, y], x, y]
```

```
Out[6]= 12 x^3 y^2
```

```
In[7]:= D[f[x, y], x, y] /. {x -> 2, y -> 1}
```

```
Out[7]= 96
```

```
In[8]:= D[f[x, y], {x, 2}, {y, 3}]
```

```
Out[8]= 72 x^2
```

```
In[9]:=  $\partial_{x,y} (x^3 * y^4)$ 
```

```
Out[9]= 12 x^2 y^3
```

```
In[10]:=  $\partial_x \sin[2 * x + 3]$ 
```

```
Out[10]= 2 Cos[3 + 2 x]
```



7.1.3 การหาอินทิกรัลแสดงผลการคำนวณเป็นสูตรและเป็นตัวเลข

In[1]:= Integrate[x^2, x]

Out[1]=  $\frac{x^3}{3}$

In[2]:= Integrate[x^2, {x, 0, 1}]

Out[2]=  $\frac{1}{3}$

In[3]:= Integrate[x^2 \* y^3, x, y]

Out[3]=  $\frac{x^3 y^4}{12}$

In[4]:= Integrate[x^2 \* y^3, {x, 0, 2}, {y, 0, 3}]

Out[4]= 54

In[5]:=  $\int x^2 dx$

Out[5]=  $\frac{x^3}{3}$

In[6]:=  $\int_0^1 x^2 dx$

Out[6]=  $\frac{1}{3}$

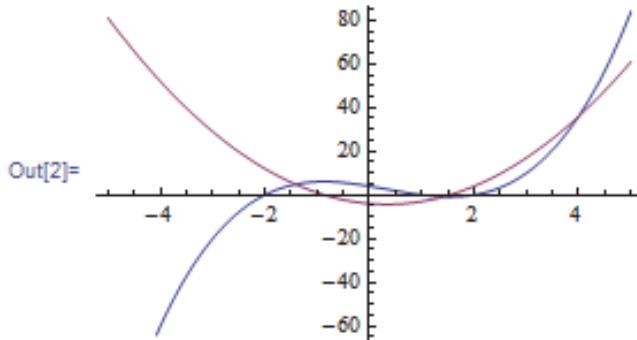
In[7]:=  $\int_0^4 \int_1^2 12 * x^2 * y^3 dx dy$

Out[7]= 1792

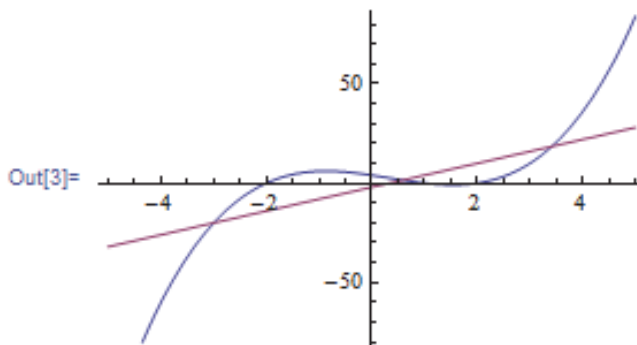
7.1.4 กราฟของฟังก์ชัน  $f$ ,  $f'$  และ  $f''$ 

```
In[1]:= f[x_] := x^3 - x^2 - 4*x + 4;
```

```
In[2]:= Plot[{f[x], f'[x]}, {x, -5, 5}]
```

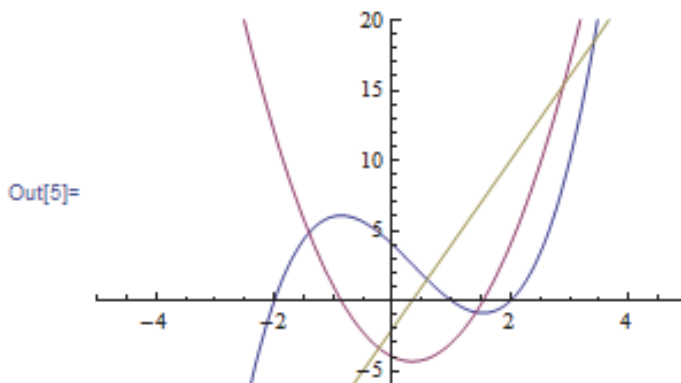


```
In[3]:= Plot[{f[x], f''[x]}, {x, -5, 5}]
```



```
In[4]:= f[x_] := x^3 - x^2 - 4*x + 4
```

```
In[5]:= Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -5, 5},
  PlotRange -> {{-5, 5}, {-6, 20}}
]
```



## 7.1.5 การหาผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

การหาผลบวกรีมันน์ของ  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  บนช่วง  $[1, 3]$

```
In[1]:= f[x_] := x^2 - 4*x + 6;
n := 10;
a := 1;
b := 3;
h := (b - a) / n;
s := 0;
For[i = 1, i < n + 1, i = i + 1,
  {xi := a + (i - 1) * h;
  s = s + h * f[xi]}}];
Print["Riemann sum = ", N[s, 4]]

Riemann sum = 4.680

In[9]:= Integrate[x^2 - 4*x + 6, {x, 1, 3}] // N
Out[9]= 4.66667
```

เปลี่ยนค่า  $n = 1000$

```
In[10]:= f[x_] := x^2 - 4*x + 6;
n := 1000;
a := 1;
b := 3;
h := (b - a) / n;
s := 0;
For[i = 1, i < n + 1, i = i + 1,
  {xi := a + (i - 1) * h;
  s = s + h * f[xi]}}];
Print["Riemann sum = ", N[s, 4]]

Riemann sum = 4.667

In[18]:= Integrate[x^2 - 4*x + 6, {x, 1, 3}] // N
Out[18]= 4.66667
```

เพราะฉะนั้น ค่าของ  $\int_1^3 (x^2 - 4x + 6)dx = 4.666666$

## 7.1.6 การหาพหุนามเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน

การหาพหุนามเทย์เลอร์ของ  $\sin(x)$ ,  $\arctan(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(x)$

In[1]:= Series[Sin[x], {x, 0, 9}]

$$\text{Out[1]}= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} + O[x]^{10}$$

In[2]:= Series[ArcTan[x], {x, 0, 9}]

$$\text{Out[2]}= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + O[x]^{10}$$

In[3]:= Series[Cos[x], {x, 0, 8}]

$$\text{Out[3]}= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} + O[x]^9$$

In[4]:= Series[Log[x], {x, 1, 4}]

$$\text{Out[4]}= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O[x-1]^5$$

In[5]:= Series[Log[x+1], {x, 0, 5}]

$$\text{Out[5]}= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O[x]^6$$

In[6]:= Series[Exp[x], {x, 0, 7}]

$$\text{Out[6]}= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + O[x]^8$$

In[7]:= Series[3\*x^3 + 2\*x^2 - 4\*x + 12, {x, 2, 3}]

$$\text{Out[7]}= 36 + 40(x-2) + 20(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + O[x-2]^4$$

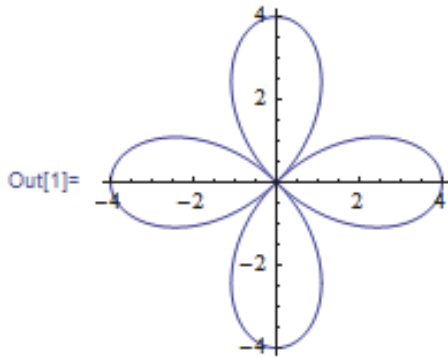
In[8]:= 36 + 40(x-2) + 20(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + O[x-2]^4

$$\text{Out[8]}= 36 + 40(x-2) + 20(x-2)^2 + 3(x-2)^3 + O[x-2]^4$$

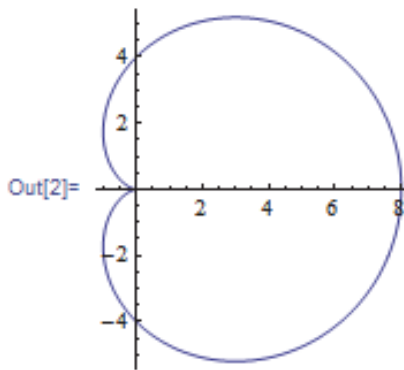
7.1.7 การเขียนกราฟในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของ  $r = 4 \cos(2t)$ ,  $r = 4 + 4 \cos(2t)$  และ  $r = 1 + \cos t$ ,  $r = \sin t$

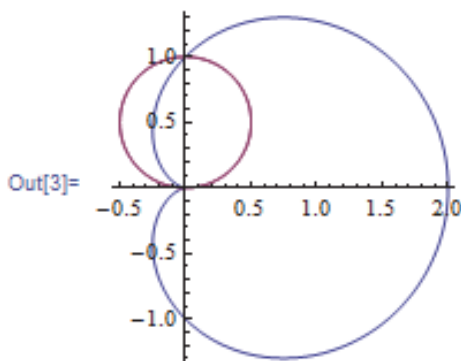
```
In[1]:= PolarPlot[4 * Cos[2 * t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



```
In[2]:= PolarPlot[4 + 4 * Cos[t], {t, 0, 2 * Pi}]
```



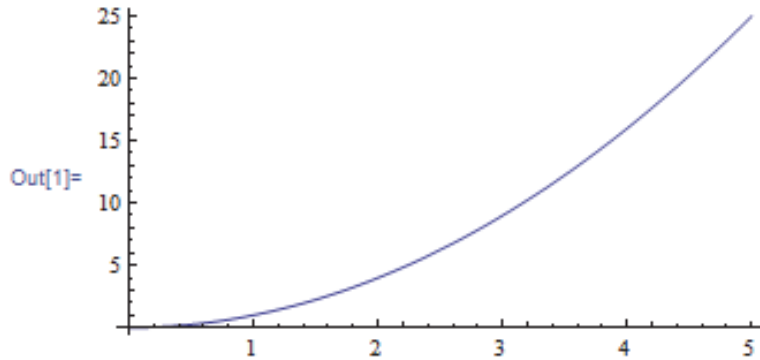
```
In[3]:= PolarPlot[{1 + Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



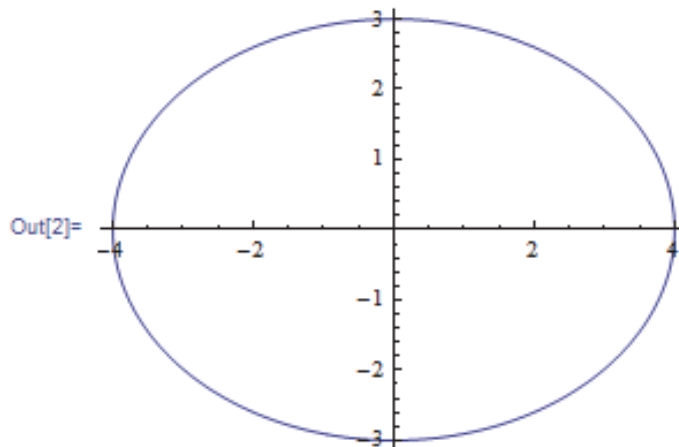
## 7.1.8 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริกใน 2 มิติ

การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริก  $r(t) = (t, t^2)$  บนช่วง  $[0, 5]$

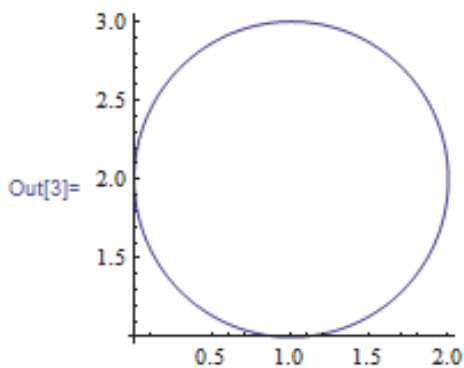
```
In[1]:= ParametricPlot[{t, t^2}, {t, 0, 5}, AspectRatio -> 0.5]
```



```
In[2]:= ParametricPlot[{4 * Sin[t], 3 * Cos[t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



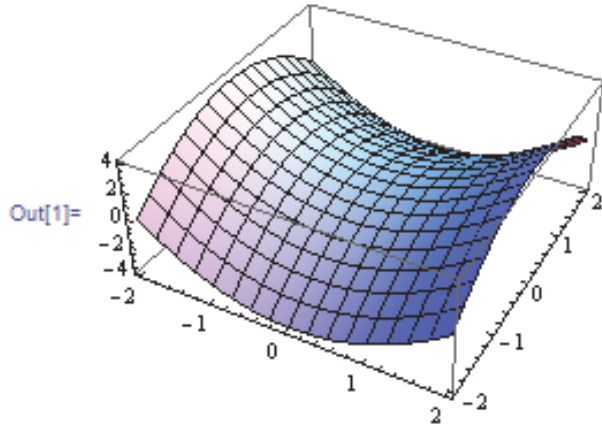
```
In[3]:= ParametricPlot[{1 + Sin[t], 2 + Cos[t]}, {t, 0, 2 * Pi}]
```



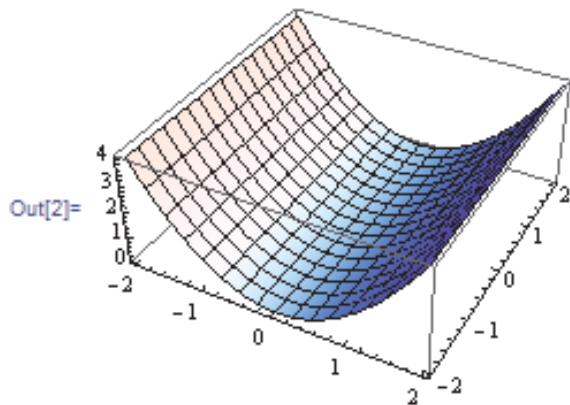
7.1.9 การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ

กราฟของพื้นผิว  $z = x^2 - y^2$

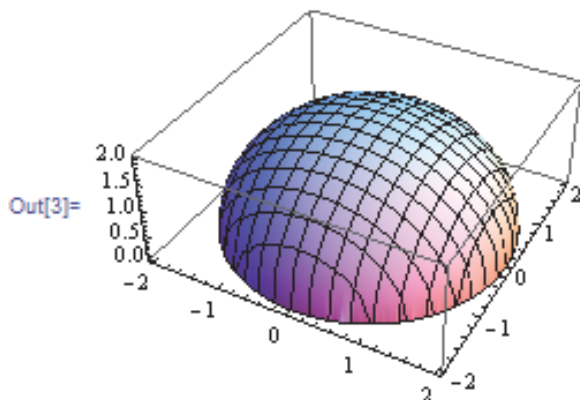
```
In[1]:= Plot3D[x^2 - y^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



```
In[2]:= Plot3D[x^2, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



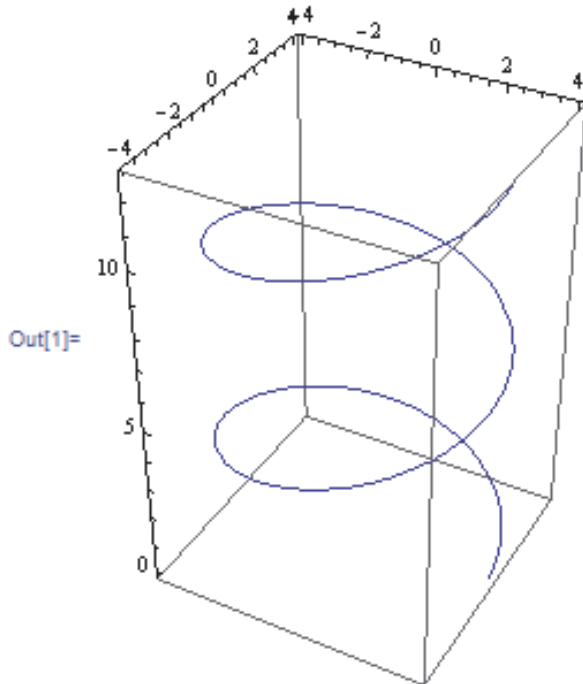
```
In[3]:= Plot3D[{Sqrt[4 - x^2 - y^2]}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]
```



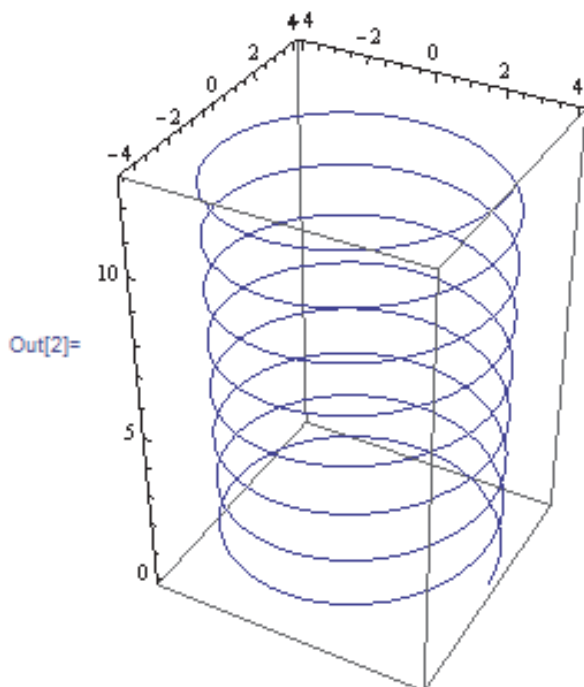
## 7.1.10 การเขียนกราฟของสมการพาราเมตริกใน 3 มิติ

กราฟของสมการพาราเมตริก  $r(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, t)$  บนช่วง  $[0, 4\pi]$

```
In[1]:= ParametricPlot3D[{4 * Cos[t], 4 * Sin[t], t}, {t, 0, 4 * Pi}]
```



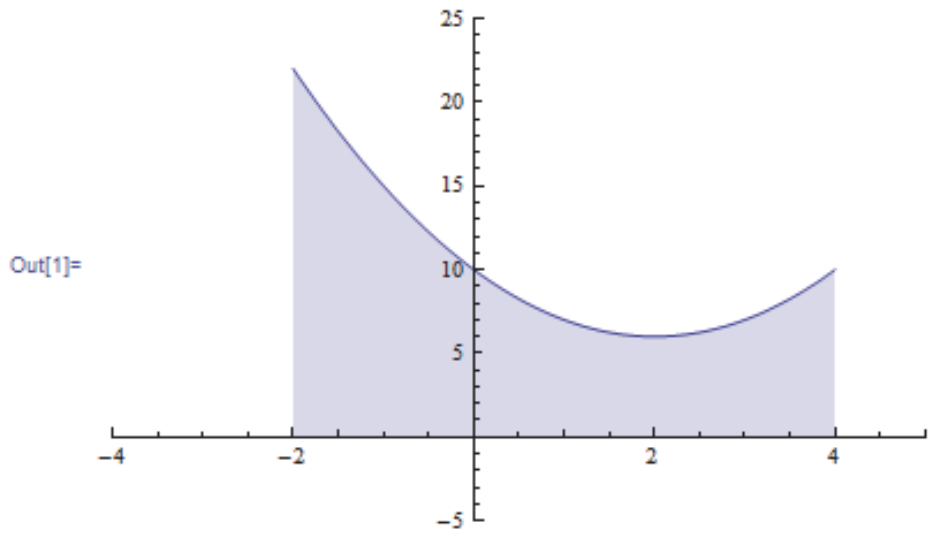
```
In[2]:= ParametricPlot3D[{4 * Cos[4 * t], 4 * Sin[4 * t], t}, {t, 0, 4 * Pi}]
```





7.1.11 การเขียนกราฟแบบแรเงาและการหาพื้นที่

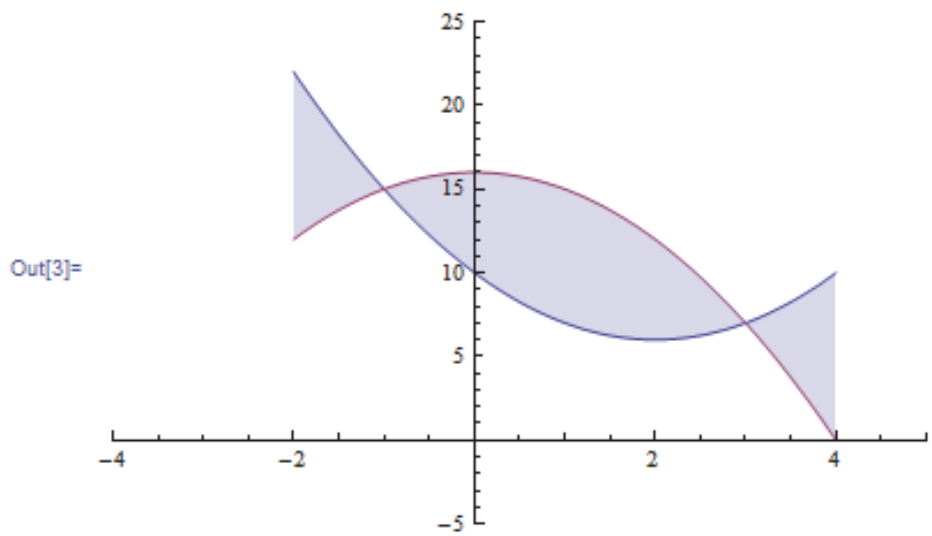
```
In[1]:= Plot[x^2 - 4*x + 10, {x, -2, 4},
          PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}}, Filling -> Axis]
```



```
In[2]:= Integrate[x^2 - 4*x + 10, {x, -2, 4}]
```

Out[2]= 60

```
In[3]:= Plot[{x^2 - 4*x + 10, 16 - x^2}, {x, -2, 4},
          PlotRange -> {{-4, 5}, {-5, 25}}, Filling -> {1 -> {2}}]
```



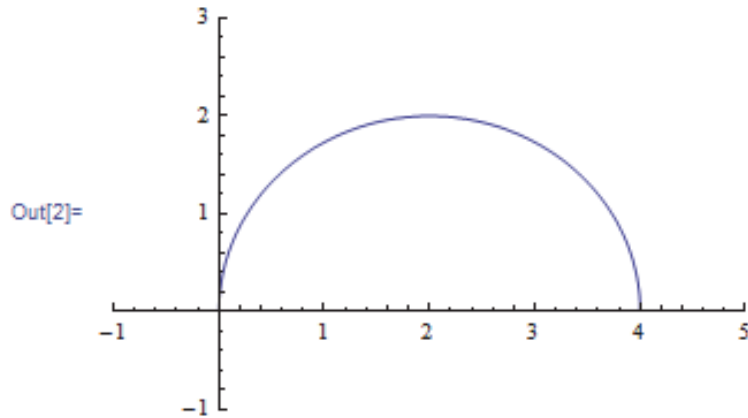
```
In[4]:= Integrate[Abs[x^2 - 4*x + 10 - (16 - x^2)], {x, -2, 4}]
```

Out[4]=  $\frac{92}{3}$

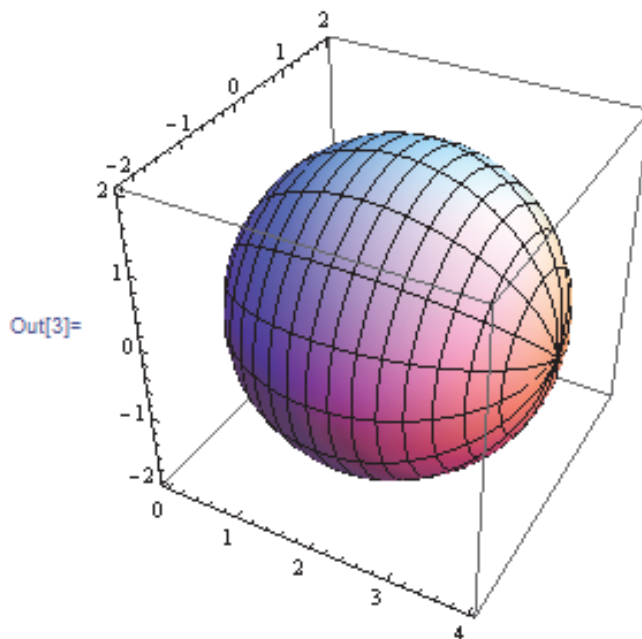
## 7.1.12 การเขียนกราฟของพื้นผิวที่เกิดจากการหมุน การหาปริมาตรและพื้นที่ผิว

```
In[1]:= f[x_] := Sqrt[4 - (x - 2) ^ 2];
```

```
In[2]:= Plot[f[x], {x, 0, 5}, PlotRange -> {{-1, 5}, {-1, 3}}]
```



```
In[3]:= RevolutionPlot3D[f[x], {x, 0, 4},
  RevolutionAxis -> {1, 0, 0}]
```



```
In[4]:= Pi * Integrate[f[x] ^ 2, {x, 0, 4}]
```

Out[4]=  $\frac{32 \pi}{3}$

```
In[5]:= 2 * Pi * Integrate[f[x] * Sqrt[1 + f'[x] ^ 2], {x, 0, 4}]
```

Out[5]=  $16 \pi$

หมายเหตุ การหมุนเส้นโค้ง  $f(x) = \sqrt{4 - (x - 2)^2}$  บนช่วง  $[0, 4]$  รอบแกน X

จะได้อาณาบริเวณเป็นทรงกลมรัศมี  $r = 2$

$$\text{ปริมาตรที่เกิดจากการหมุน} = \pi \int_0^4 [f(x)]^2 dx = \frac{32\pi}{3}$$

$$\text{สูตรปริมาตรทรงกลม} = \frac{4}{3} \pi r^2 = \frac{32\pi}{3}$$

$$\text{พื้นที่ผิวที่เกิดจากการหมุน} = 2\pi \int_0^4 f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = 16\pi$$

$$\text{สูตรพื้นที่ผิวทรงกลม} = 4\pi r^2 = 16\pi$$

## 7.1.13 การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

การหาค่าต่ำสุดของ  $f(x) = x^2 + 2x - 3$

```
In[1]:= FindMinimum[x^2 + 2*x - 3, {x, 1}]
```

```
Out[1]= {-4., {x -> -1.}}
```

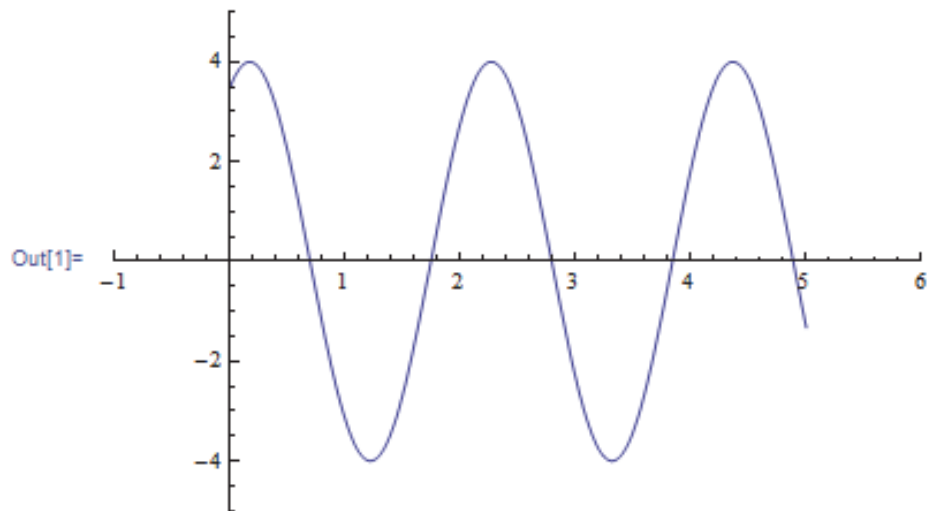
เพราะฉะนั้น  $f(-1) = -4$  เป็นค่าต่ำสุด

หมายเหตุ FindMinimum[f, {x, a}] เป็นคำสั่งหาค่าต่ำสุดของ  $f(x)$  รอบ ๆ จุด  $x = a$

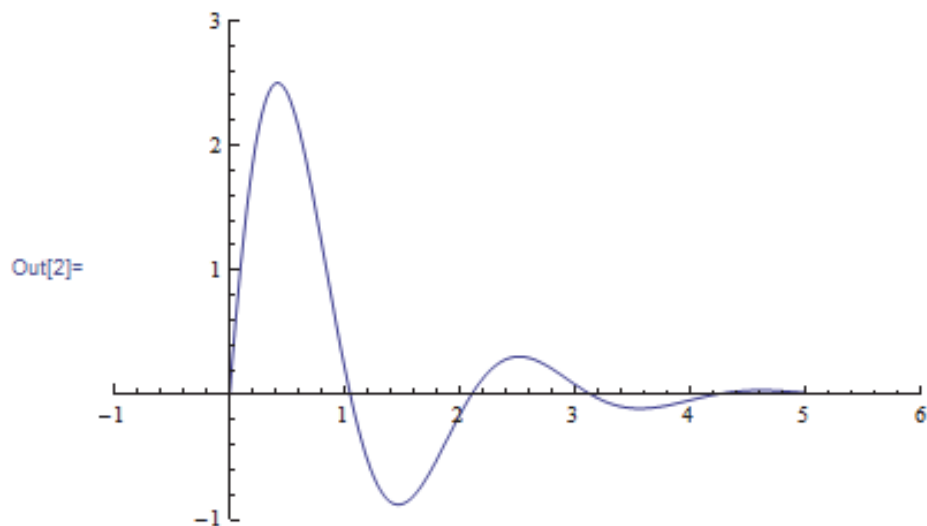
## 7.2 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยโปรแกรม Mathematica

### 7.2.1 กราฟของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

```
In[1]:= Plot[4 * Sin[3 * t + Pi / 3], {t, 0, 5},
PlotRange -> {{-1, 6}, {-5, 5}}]
```



```
In[2]:= Plot[4 * Exp[-t] * Sin[3 * t], {t, 0, 5},
PlotRange -> {{-1, 6}, {-1, 3}}]
```



## 7.2.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $\frac{dx}{dt} - 2xt = t$

```
In[1]:= DSolve[x'[t] - 2*t*x[t] == t, x[t], t]
```

```
Out[1]= {{x[t] -> -\frac{1}{2} + e^{t^2} C[1]}}
```

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์  $x''(t) + 4x(t) = 0$

```
In[2]:= DSolve[x''[t] + 4*x[t] = 0, x[t], t]
```

```
Out[2]= {{x[t] -> C[1] Cos[2 t] + C[2] Sin[2 t]}}
```

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```
In[3]:= DSolve[{x'[t] + 4*x[t] = 4 + 4*t}, x[t], t]
```

```
Out[3]= {{x[t] -> 1 + t + C[1] Cos[2 t] + C[2] Sin[2 t]}}
```

```
In[4]:= DSolve[{x'[t] + 4*x[t] = 1 + t, x'[0] = 2, x[0] = -1}, x[t], t]
```

```
Out[4]= {{x[t] -> \frac{1}{8} (2 + 2 t - 10 Cos[2 t] + 7 Sin[2 t])}}
```

```
In[5]:= DSolve[{x'[t] + 4*x[t] = 4, x'[0] = 2, x[0] = -1}, x[t], t]
```

```
Out[5]= {{x[t] -> 1 - 2 Cos[2 t] + Sin[2 t]}}
```

```
In[6]:= DSolve[x''[t] - 4*x'[t] + 5*x[t] = 0, x[t], t]
```

```
Out[6]= {{x[t] -> e^{2t} C[2] Cos[t] + e^{2t} C[1] Sin[t]}}
```

```
In[7]:= DSolve[{x''[t] - 4*x'[t] + 5*x[t] = 0,
               x'[0] = 1, x[0] = 1}, x[t], t]
```

```
Out[7]= {{x[t] -> e^{2t} (Cos[t] - Sin[t])}}
```

```
In[8]:= DSolve[{x''[t] - 4*x'[t] + 5*x[t] = 0,
               x'[0] = 1, x[0] = 1}, x[t], t]
```

```
Out[8]= {{x[t] -> e^{2t} (Cos[t] - Sin[t])}}
```

7.2.3 การหาผลการแปลงลาปลาซ และ ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

การหาค่า  $L\{\sin(x)\} = \frac{1}{1+s^2}$  และ  $L^{-1}\{\frac{1}{1+s^2}\} = \sin x$

In[1]:= LaplaceTransform[Sin[x], x, s]

Out[1]=  $\frac{1}{1+s^2}$

In[2]:= InverseLaplaceTransform[1 / (1 + s ^ 2), s, x]

Out[2]= Sin[x]

ตัวอย่างเพิ่มเติม

In[3]:= LaplaceTransform[{Exp[2 \* t], x \* Exp[2 \* x]}, x, s]

Out[3]=  $\left\{ \frac{e^{2t}}{s}, \frac{1}{(-2 + s)^2} \right\}$

In[4]:= LaplaceTransform[{Exp[2 \* x] \* Cos[3 \* x], Exp[x] \* Sin[2 \* x]}, x, s]

Out[4]=  $\left\{ \frac{-2 + s}{9 + (-2 + s)^2}, \frac{2}{4 + (-1 + s)^2} \right\}$

In[5]:= LaplaceTransform[{1, x, Cos[2 \* x], Sin[3 \* x]}, x, s]

Out[5]=  $\left\{ \frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{s}{4 + s^2}, \frac{3}{9 + s^2} \right\}$

In[6]:= LaplaceTransform[{1 + 4 \* x + 3 Cos[x] + 5 Sin[x]}, x, s]

Out[6]=  $\left\{ \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{5}{1 + s^2} + \frac{3s}{1 + s^2} \right\}$

In[7]:= InverseLaplaceTransform[s / (1 + s ^ 2), s, x]

Out[7]= Cos[x]

In[8]:= InverseLaplaceTransform[s / (1 - s ^ 2), s, x]

Out[8]=  $-\frac{1}{2} e^{-x} (1 + e^{2x})$

In[9]:= InverseLaplaceTransform[(s + 3) / (s ^ 4 - 16), s, x]

Out[9]=  $-\frac{1}{32} e^{-2x} + \frac{5 e^{2x}}{32} + \frac{1}{16} (-2 \text{Cos}[2x] - 3 \text{Sin}[2x])$

## 7.2.4 การหาผลการแปลง Z transform และ Inverse Z transform

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^n \text{ จะได้ } Z\text{Transform}[(u(n))] = f(z) \text{ และ } \text{InverseZTransform}[f(z)] = u(n)$$

In[1]:= ZTransform[1, n, z]

$$\text{Out[1]} = \frac{z}{-1 + z}$$

In[2]:=  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{1 - z}$$

In[3]:= ZTransform[n, n, z]

$$\text{Out[3]} = \frac{z}{(-1 + z)^2}$$

In[4]:=  $\sum_{n=0}^{\infty} (n * z^n)$

$$\text{Out[4]} = \frac{z}{(-1 + z)^2}$$

In[5]:= ZTransform[n<sup>2</sup>, n, z]

$$\text{Out[5]} = \frac{z(1 + z)}{(-1 + z)^3}$$

In[6]:= InverseZTransform[ $\frac{z}{z-1}$ , z, n]

$$\text{Out[6]} = 1$$

In[7]:= InverseZTransform[ $\frac{z}{(z-1)^2}$ , z, n]

$$\text{Out[7]} = n$$

In[8]:= InverseZTransform[ $\frac{z(1+z)}{(z-1)^3}$ , z, n]

$$\text{Out[8]} = n^2$$



## 7.3 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วยโปรแกรม Mathematica

7.3.1 การประมาณเส้นโค้ง  $y(x)$  ที่ผ่านจุด  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ การหาพหุนามที่ผ่านจุด  $(1, 2), (2, 5), (3, 13), (4, 20)$ 

```
In[1]:= InterpolatingPolynomial[{2, 5, 13, 20}, x]
```

```
Out[1]= 2 + (3 + (11/2 - x) (-2 + x)) (-1 + x)
```

```
In[2]:= Expand[Out[1]]
```

```
Out[2]= 10 - 31 x/2 + 17 x^2/2 - x^3
```

เพราะฉะนั้นพหุนามที่ผ่านจุด  $(1, 2), (2, 5), (3, 13), (4, 20)$  คือ  $10 - \frac{31}{2}x + \frac{17}{2}x^2 - x^3$ การหาพหุนามที่ผ่านจุด  $(2, 5), (5, 7), (7, 10), (9, 12), (11, 15)$ 

```
In[3]:= InterpolatingPolynomial[{{2, 5}, {5, 7}, {7, 10}, {9, 12}, {11, 15}}, x]
```

```
Out[3]= 5 + (2/3 + (1/6 + (-1/24 + 1/108) (-9 + x)) (-7 + x)) (-5 + x) (-2 + x)
```

```
In[4]:= Expand[Out[3]]
```

```
Out[4]= 169/12 - 1841 x/216 + 133 x^2/54 - 55 x^3/216 + x^4/108
```

เพราะฉะนั้นพหุนามที่ผ่านจุด 5 จุดที่กำหนดให้คือ

$$\frac{169}{12} - \frac{1841}{216}x + \frac{133}{54}x^2 - \frac{55}{216}x^3 + \frac{1}{108}x^4$$

## 7.3.2 การหารากของสมการ

การหารากของสมการ  $x^2 - 5 = 0$

```
In[1]:= Solve[x^2 - 5 = 0, x]
```

```
Out[1]= {{x -> -sqrt(5)}, {x -> sqrt(5)}}
```

```
In[2]:= NSolve[x^2 - 5 = 0, x]
```

```
Out[2]= {{x -> -2.23607}, {x -> 2.23607}}
```

การหารากของสมการ  $\sin x - \cos x = 0$

```
In[3]:= FindRoot[Sin[x] - Cos[x] = 0, {x, 1}]
```

```
Out[3]= {x -> 0.785398}
```

เพราะฉะนั้นรากสมการ  $\sin x - \cos x = 0$  คือ  $0.785398 = \frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```
In[4]:= Solve[x^3 = 8]
```

```
Out[4]= {{x -> 2}, {x -> -1 - i sqrt(3)}, {x -> -1 + i sqrt(3)}}
```

```
In[5]:= Solve[x^3 = 8, Reals]
```

```
Out[5]= {{x -> 2}}
```

```
In[6]:= NSolve[Cos[x] = x, Reals]
```

```
Out[6]= {{x -> 0.739085}}
```

```
In[7]:= Solve[x^4 = 16]
```

```
Out[7]= {{x -> -2}, {x -> -2 i}, {x -> 2 i}, {x -> 2}}
```

```
In[8]:= Solve[{x^4 = 16, x > 0}]
```

```
Out[8]= {{x -> 2}}
```

## 7.3.3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น

การหาผลเฉลยของระบบสมการ  $x + y + z = 12$

$$x - y + z = 4$$

$$x + y - z = 2$$

```
In[1]:= NSolve[{x + y + z = 12, x - y + z = 4, x + y - z = 2}]
```

```
Out[1]:= {{x -> 3., y -> 4., z -> 5.}}
```

เพราะฉะนั้นผลเฉลยคือ  $x = 3$ ,  $y = 4$  และ  $z = 5$

การหาผลเฉลยของระบบสมการ  $x^2 + y^2 = 25$

$$x + y = 7$$

```
In[2]:= NSolve[{x^2 + y^2 = 25, x + y = 7}]
```

```
Out[2]:= {{x -> 4., y -> 3.}, {x -> 3., y -> 4.}}
```

รากของสมการคือ  $(x, y) = (3, 4), (4, 3)$

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```
In[3]:= NSolve[{x^2 + y^2 = 2, x - y = 0}, {x, y}]
```

```
Out[3]:= {{x -> -1., y -> -1.}, {x -> 1., y -> 1.}}
```

```
In[4]:= NSolve[{x^2 + y^2 = 2, x - y = 0, x > 0}, {x, y}]
```

```
Out[4]:= {{x -> 1., y -> 1.}}
```

```
In[5]:= Solve[{x^2 + y^2 = 2, x - y = 0}, {x, y}]
```

```
Out[5]:= {{x -> -1, y -> -1}, {x -> 1, y -> 1}}
```

```
In[6]:= Solve[{x^2 + y^2 = 2, x - y = 0, x > 0}, {x, y}]
```

```
Out[6]:= {{x -> 1, y -> 1}}
```

```
In[7]:= Solve[{x + y = a, x - y = b}, {x, y}]
```

```
Out[7]:= {{x -> (a + b)/2, y -> (a - b)/2}}
```

7.3.4 การประมาณค่า  $y(c)$  เมื่อกำหนด  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  และผ่านจุด  $(x_0, y_0)$

โดยวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้วที่มีสูตร

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} (f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n)))$$

$$\text{เมื่อ } h = \frac{c - x_0}{n}, \quad x_{n+1} = x_n + h$$

การหาค่าประมาณค่า  $y(1)$  เมื่อกำหนด  $\frac{dy}{dx} = x + y$  และผ่านจุด  $(0, 0)$

```
In[1]:= f[x_, y_] := x + y;
n := 1000;
x[0] := 0
y[0] = 0;
c := 1;
h := (c - x[0]) / n;
For[i = 0, i < n + 1, i = i + 1,
  {x[i + 1] = x[i] + h,
   fi = f[x[i], y[i]],
   fiplus = f[x[i + 1], y[i] + h * fi],
   y[i + 1] = y[i] + (h/2) * (fi + fiplus)}
];
Print["y(c) = ", N[y[n], 20]]
y(c) = 0.71828137575176083736
```

หมายเหตุ ผลเฉลยแท้จริงคือ  $y(x) = e^x - x - 1$  เพราะฉะนั้นค่าจริง  $y(1) = 0.718282$

## 7.4 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นด้วยโปรแกรม Mathematica

### 7.4.1 การคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

```
In[1]:= A := {{1, 2}, {3, 4}}
```

```
In[2]:= MatrixForm[A]
```

Out[2]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= B = {{2, 0}, {0, 4}}
```

Out[3]= {{2, 0}, {0, 4}}

```
In[4]:= MatrixForm[B]
```

Out[4]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

```
In[5]:= {MatrixForm[A + B], MatrixForm[A.B]}
```

Out[5]=  $\left\{ \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 6 & 16 \end{pmatrix} \right\}$

```
In[6]:= {Det[A], MatrixForm[Transpose[A]]}
```

Out[6]=  $\left\{ -2, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

```
In[7]:= MatrixForm[Inverse[A]]
```

Out[7]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

## 7.4.2 การหาค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง ของเมทริกซ์

การหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

```

In[1]:= A = {{4, 0}, {1, 3}};

In[2]:= MatrixForm[A]
Out[2]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$


In[3]:= Simplify[Det[A - x*IdentityMatrix[2]]]
Out[3]= 12 - 7 x + x2

In[4]:= Eigenvalues[A]
Out[4]= {4, 3}

In[5]:= Eigenvectors[A]
Out[5]= {{1, 1}, {0, 1}}

In[6]:= Eigensystem[A]
Out[6]= {{4, 3}, {{1, 1}, {0, 1}}}}

In[7]:= Simplify[Det[A - x*IdentityMatrix[2]]]
Out[7]= 12 - 7 x + x2

In[8]:= Factor[Simplify[Det[A - x*IdentityMatrix[2]]]]
Out[8]= (-4 + x) (-3 + x)

In[9]:= NSolve[Factor[Simplify[Det[A - x*IdentityMatrix[2]]]], x]
Out[9]= {{x -> 3.}, {x -> 4.}}
```

ค่าเจาะจงคือ 3, 4 โดยมีเวกเตอร์เจาะจงเป็น (0, 1), (1, 1) ตามลำดับ

## 7.4.3 การหาเมทริกซ์ลดรูปเป็นขั้นแบบแถวที่สมมูลกับ A และ Rank(A)

```
In[1]:= A = {{4, 1, 1, 4}, {1, 3, 4, 1}, {2, 1, 2, 2}};
```

```
In[2]:= MatrixForm[A]
```

```
Out[2]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= MatrixForm[RowReduce[A]]
```

```
Out[3]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
In[4]:= MatrixRank[A]
```

```
Out[4]= 3
```

```
In[5]:= B = {{1, 2, 3, 4, 5}, {2, 3, 4, 5, 0},
             {2, 1, 2, 1, 0}, {1, 1, 2, 1, 3}};
```

```
In[6]:= MatrixForm[B]
```

```
Out[6]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

```
In[7]:= MatrixForm[RowReduce[B]]
```

```
Out[7]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
In[8]:= MatrixRank[B]
```

```
Out[8]= 4
```

7.4.4 การหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ  $\mathbb{R}^3$  โดยใช้กระบวนการของ Gram – Schmidt

การหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ  $\mathbb{R}^2$  จากมูลฐาน  $\{v_1 = (1, 1), v_2 = (0, 1)\}$

```
In[1]:= v1 = {1, 1};
        v2 = {0, 1};
        Orthogonalize[{v1, v2}]

Out[3]= {{1/√2, 1/√2}, {-1/√2, 1/√2}}
```

มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติคือ  $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

การหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ  $\mathbb{R}^3$

จากมูลฐาน  $\{v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 0, 1)\}$

```
In[4]:= v1 = {1, 1, 1};
        v2 = {0, 1, 1};
        v3 = {0, 0, 1};
        Orthogonalize[{v1, v2, v3}]

Out[7]= {{1/√3, 1/√3, 1/√3}, {-√2/3, 1/√6, 1/√6}, {0, -1/√2, 1/√2}}
```

มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติคือ  $\{(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}), (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

ตัวอย่างเพิ่มเติม

```
In[8]:= Orthogonalize[{{1, 1}, {1, 2}}]

Out[8]= {{1/√2, 1/√2}, {-1/√2, 1/√2}}

In[9]:= Orthogonalize[{{1, 1, 0}, {1, 0, 2}, {1, 1, 1}}]

Out[9]= {{1/√2, 1/√2, 0}, {1/(3√2), -1/(3√2), 2√2/3}, {-2/3, 2/3, 1/3}}

In[10]:= Orthogonalize[{{1, 1, 0}, {1, 1, 2}}]

Out[10]= {{1/√2, 1/√2, 0}, {0, 0, 1}}
```



7.4.5 การแปลงเมทริกซ์ A ให้เป็นเมทริกซ์เฉียง (Orthogonal Diagonalization)

ตัวอย่างเช่น ให้  $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$  การหา P ที่ทำให้  $P^T A P$  เป็นเมทริกซ์เฉียง

In[1]:= **A := {{3, -2}, {-2, 3}}**

In[2]:= **MatrixForm[A]**

Out[2]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

In[3]:= **{P, d, Q} = SingularValueDecomposition[A]**

Out[3]= **{{{-1/√2, 1/√2}, {1/√2, 1/√2}},**  
**{{5, 0}, {0, 1}}, {{{-1/√2, 1/√2}, {1/√2, 1/√2}}}}**

In[4]:= **MatrixForm[P]**

Out[4]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In[5]:= **MatrixForm[d]**

Out[5]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In[6]:= **MatrixForm[Q]**

Out[6]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

In[7]:= **Simplify[MatrixForm[Transpose[P].A.P]]**

Out[7]/MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้น  $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$  ทำให้  $P^T A P = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## 7.4.6 LU-decomposition

ให้ A เป็นเมทริกซ์ การหาเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (L) และเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (U) ที่ทำให้  $A = LU$

```
In[1]:= A := {{1, 3, 2}, {2, 8, 6}, {4, 14, 13}}
```

```
In[2]:= MatrixForm[A]
```

```
Out[2]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

```
In[3]:= {LU, p, c} = LUdecomposition[A]
```

```
Out[3]= {{{1, 3, 2}, {2, 2, 2}, {4, 1, 3}}, {1, 2, 3}, 1}
```

```
In[4]:= L = LUSparseArray[{{i_, j_} /; j < i -> 1, {3, 3}}] +  
IdentityMatrix[3]
```

```
Out[4]= {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {4, 1, 1}}
```

```
In[5]:= MatrixForm[L]
```

```
Out[5]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
In[6]:= U = LUSparseArray[{{i_, j_} /; j ≥ i -> 1, {3, 3}}
```

```
Out[6]= {{1, 3, 2}, {0, 2, 2}, {0, 0, 3}}
```

```
In[7]:= MatrixForm[U]
```

```
Out[7]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
In[8]:= MatrixForm[L.U]
```

```
Out[8]/MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 4 & 14 & 13 \end{pmatrix}$$

## 7.5 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับความน่าจะเป็นและสถิติด้วยโปรแกรม Mathematica

## 7.5.1 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม

```
In[1]:= Binomial[5, 2]
```

```
Out[1]= 10
```

```
In[2]:= b[x_, n_, p_] := Binomial[n, x] * (p^x) * ((1 - p)^(n - x))
```

```
In[3]:= b[1, 5, 0.2]
```

```
Out[3]= 0.4096
```

```
In[4]:= PDF[BinomialDistribution[5, 0.2], 1]
```

```
Out[4]= 0.4096
```

```
In[5]:= TableForm[Table[{x, b[x, 5, 0.2]}, {x, 0, 5}]]
```

```
Out[5]/TableForm=
```

0	0.32768
1	0.4096
2	0.2048
3	0.0512
4	0.0064
5	0.00032

```
In[6]:= TableForm[Table[{x,  $\sum_{i=0}^x b[i, 5, 0.2]$ }, {x, 0, 5}]]
```

```
Out[6]/TableForm=
```

0	0.32768
1	0.73728
2	0.94208
3	0.99328
4	0.99968
5	1.

```
In[7]:= TableForm[
  Table[{x, PDF[BinomialDistribution[5, 0.2], x]},
    {x, 0, 5}]]
```

```
Out[7]/TableForm=
```

0	0.32768
1	0.4096
2	0.2048
3	0.0512
4	0.0064
5	0.00032

หมายเหตุ  $b(x, n, p) = \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$  เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม

In[2] เป็นการกำหนดสูตรเพื่อใช้งาน

In[4] นำฟังก์ชันสำเร็จรูปของ Mathematica มาใช้งาน

PDF[BinomialDistribution[n, p], x] คือ  $\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$

## 7.5.2 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซอง

```

In[1]:= p[x_, mu_] := (Exp[-mu] * (mu ^ x)) / x !

In[2]:= p[1, 4.5]
Out[2]= 0.0499905

In[3]:= PDF[PoissonDistribution[4.5], 1]
Out[3]= 0.0499905

In[4]:= TableForm[Table[{x, p[x, 4.5]}, {x, 0, 5}]]
Out[4]/TableForm=
  0    0.011109
  1    0.0499905
  2    0.112479
  3    0.168718
  4    0.189808
  5    0.170827

In[5]:= TableForm[Table[{x, PDF[PoissonDistribution[4.5], x]},
  {x, 0, 5}]]
Out[5]/TableForm=
  0    0.011109
  1    0.0499905
  2    0.112479
  3    0.168718
  4    0.189808
  5    0.170827

In[6]:= TableForm[Table[{x, Sum[p[i, 4.5], {i, 0, x}]}, {x, 0, 5}]]
Out[6]/TableForm=
  0    0.011109
  1    0.0610995
  2    0.173578
  3    0.342296
  4    0.532104
  5    0.70293

```

หมายเหตุ ฟังก์ชัน  $p(x, \mu)$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$  เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซอง

In[1] เป็นการกำหนดสูตรเพื่อใช้งาน

In[3] นำฟังก์ชันสำเร็จรูป PDF[PoissonDistribution[ $\mu$ ], x] ของ Mathematica มาใช้งาน

PDF[PoissonDistribution[ $\mu$ ], x] คือ  $\frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!}$

## 7.5.3 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปกติและตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน

ตัวแปรสุ่มปกติ  $X$  มีค่าเฉลี่ย  $\mu$  และความแปรปรวน  $\sigma^2$

ตัวแปรสุ่มปกติ  $X$  มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

PDF[NormalDistribution[ $\mu$ ,  $\sigma$ ],  $x$ ] คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

PDF[NormalDistribution[0, 1],  $z$ ] คือฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปกติมาตรฐาน

CDF[NormalDistribution[0, 1],  $k$ ] =  $P(-\infty < Z < k)$

InverseCDF[NormalDistribution[0, 1],  $A$ ] = ค่า  $k$  บนแกน  $Z$  ที่ทำให้  $P(-\infty < Z < k) = A$

$Z(A)$  = ค่าวิกฤต  $z_A$  บนแกน  $Z$  (แกนนอน) ที่ทำให้  $P(Z > z_A) = A$

Pvalue( $k$ ) =  $P(Z > |k|)$

```
In[1]:= f[x_, mu_, sigma_] :=  $\frac{1}{\sqrt{2 * \pi * sigma}}$  e- $\frac{1}{2} (\frac{x-mu}{sigma})^2$ 
```

```
In[2]:= f[1.5, 0, 1]
```

```
Out[2]= 0.129518
```

```
In[3]:= PDF[NormalDistribution[0, 1], 1.5]
```

```
Out[3]= 0.129518
```

```
In[4]:= P[a_, b_, mu_, sigma_] :=  $\int_a^b f[x, mu, sigma] dx$ 
```

```
In[5]:= P[0, 1.96, 0, 1]
```

```
Out[5]= 0.475002
```

```
In[6]:= P[a_, b_, mu_, sigma_] :=
```

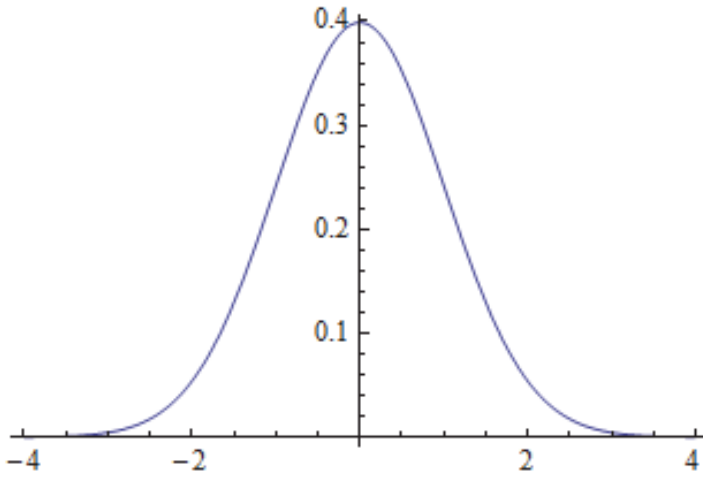
```
 $\int_a^b$  PDF[NormalDistribution[mu, sigma], x] dx
```

```
In[7]:= P[0, 1.96, 0, 1]
```

```
Out[7]= 0.475002
```

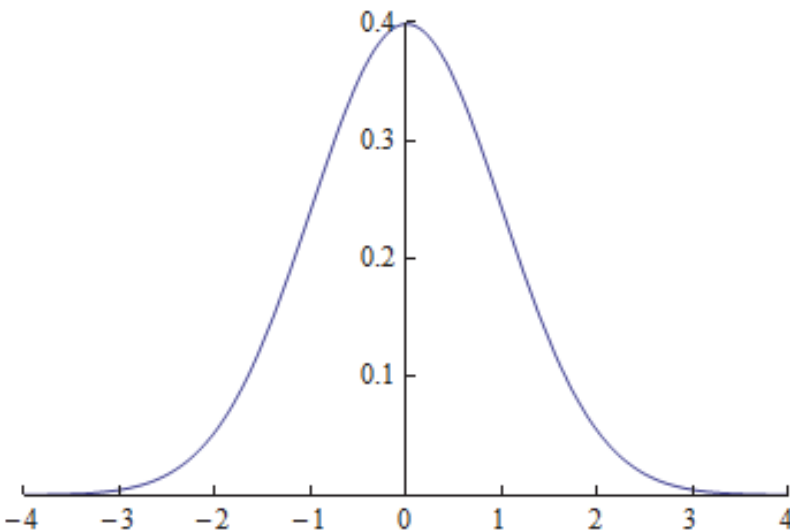
```
In[8]:= Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, -4, 4}]
```

Out[8]=



```
In[9]:= Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x], {x, -4, 4},
  PlotRange -> {{-4, 4}, {0, 0.4}},
  Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}}]
```

Out[9]=



```

In[10]:= g1 := Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x],
  {x, -4, 4},
  PlotRange -> {{-4, 4}, {0, 0.4}},
  Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}}]

```

```

In[11]:= g2 := Plot[PDF[NormalDistribution[0, 1], x],
  {x, 0, 2},
  PlotRange -> {{-4, 4}, {0, 0.4}},
  Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}},
  Filling -> Axis]

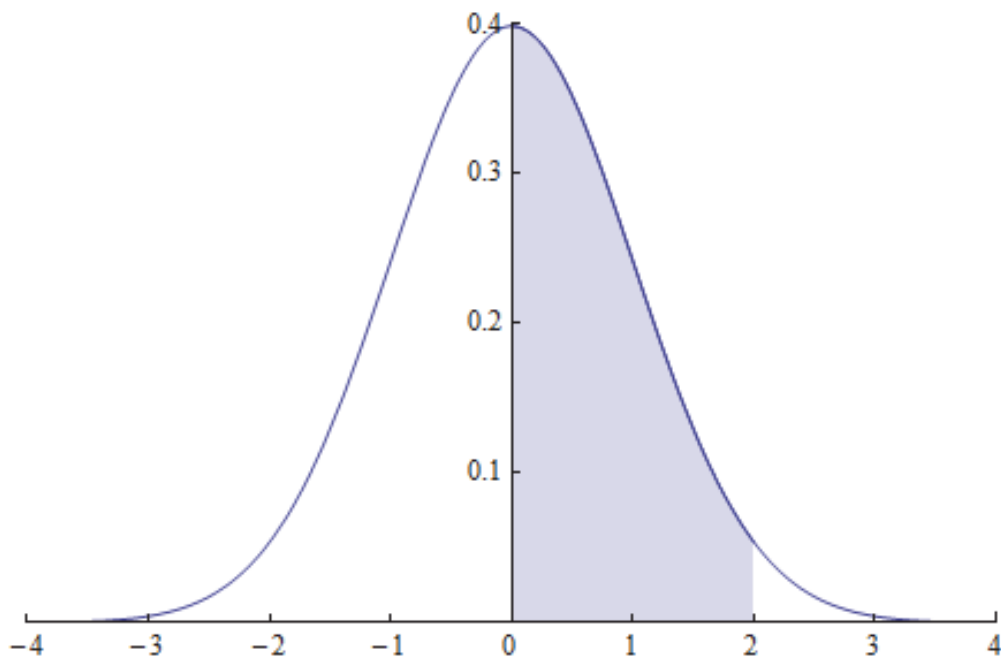
```

```

In[12]:= Show[g1, g2]

```

Out[12]=





```
In[13]:= CDF[NormalDistribution[0, 1], 1.96]
```

```
Out[13]= 0.975002
```

```
In[14]:= P[a_, b_, mu_, sigma_] :=  
        CDF[NormalDistribution[mu, sigma], b] -  
        CDF[NormalDistribution[mu, sigma], a]
```

```
In[15]:= P[0, 1.96, 0, 1]
```

```
Out[15]= 0.475002
```

```
In[16]:= Z[A_] := InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], 1 - A]
```

```
In[17]:= Z[0.025]
```

```
Out[17]= 1.95996
```

```
In[18]:= Pvalue[k_] :=  
        1 - CDF[NormalDistribution[0, 1], Abs[k]]
```

```
In[19]:= Pvalue[1.96]
```

```
Out[19]= 0.0249979
```

```
In[20]:= Pvalue[-1.645]
```

```
Out[20]= 0.0499849
```

7.5.4 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่  $t$  ระดับชั้นความเสรี  $v$

ตัวแปรสุ่มที่  $t$  ระดับชั้นความเสรี  $v$  มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น

$$f(t, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{\pi v}} \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}$$

PDF[StudentTDistribution[v], t] คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น  $f(t, v)$

CDF[StudentTDistribution[v], k] =  $P(-\infty < t < k)$

InverseCDF[StudentTDistribution[v], A] = ค่า  $k$  บนแกน  $t$  ที่ทำให้  $P(-\infty < t < k) = A$

T(A) = ค่าวิกฤต  $t_A$  บนแกน  $t$  (แกนนอน) ที่ทำให้  $P(t > t_A) = A$

Pvalue(k) =  $P(t > |k|)$

$$\text{In[1]:= } f[t_, v_] := \left( \frac{\text{Gamma}\left[\frac{v+1}{2}\right]}{\text{Gamma}\left[\frac{v}{2}\right]\sqrt{\pi * v}} \right) * \left(1 + \left(\frac{t^2}{v}\right)\right)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)}$$

In[2]:= f[2.228, 10]

Out[2]= 0.0423946

In[3]:= PDF[StudentTDistribution[10], 2.228]

Out[3]= 0.0423946

$$\text{In[4]:= } P[a_, b_, v_] := \int_a^b f[t, v] dt$$

In[5]:= P[0, 2.228, 10]

Out[5]= 0.474994

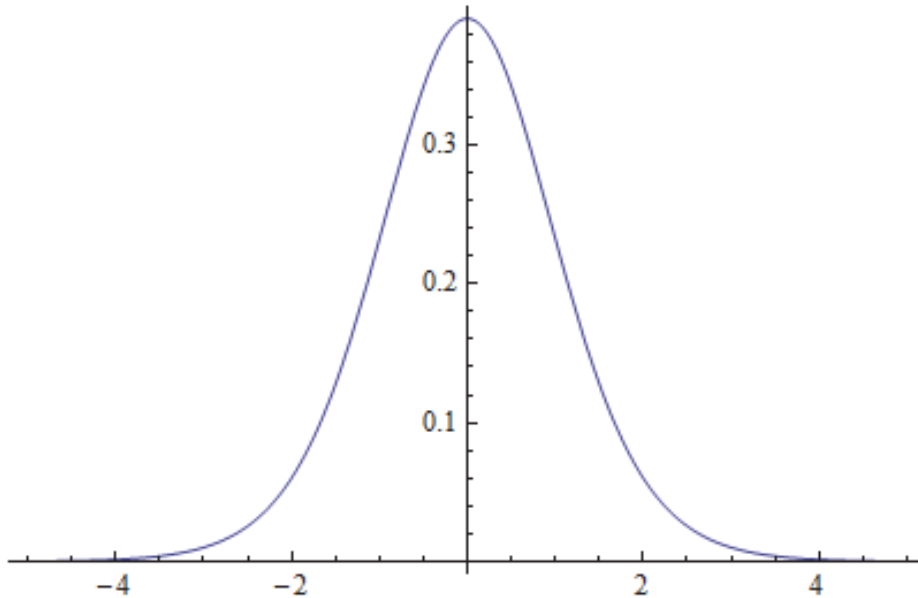
$$\text{In[6]:= } P[a_, b_, v_] := \int_a^b \text{PDF}[\text{StudentTDistribution}[v], t] dt$$

In[7]:= P[0, 2.228, 10]

Out[7]= 0.474994

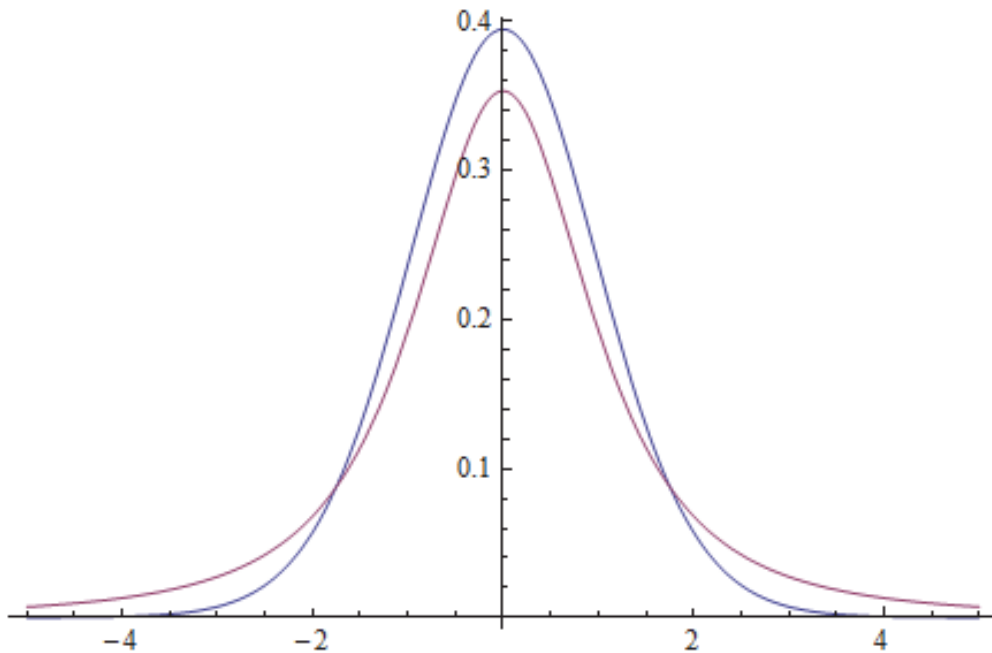
In[8]:= `Plot[PDF[StudentTDistribution[12], t], {t, -5, 5}]`

Out[8]=



In[9]:= `Plot[{PDF[StudentTDistribution[25], t], PDF[StudentTDistribution[2], t]}, {t, -5, 5}]`

Out[9]=



```

In[10]:= g1 := Plot[PDF[StudentTDistribution[10], t],
  {t, -5, 5},
  PlotRange → {{-5, 5}, {0, 0.4}},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}}]

```

```

In[11]:= g2 := Plot[PDF[StudentTDistribution[10], t],
  {t, 0, 2},
  PlotRange → {{-5, 5}, {0, 0.4}},
  Ticks → {{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5},
    {0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4}},
  Filling → Axis]

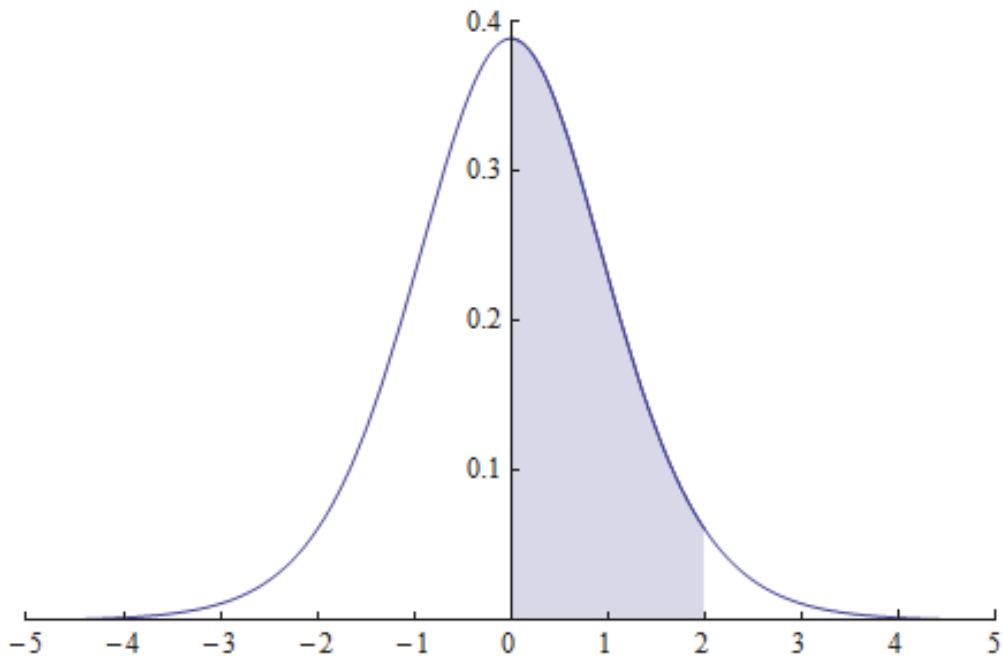
```

```

In[12]:= Show[g1, g2]

```

Out[12]=



```
In[13]:= CDF[StudentTDistribution[10], 2.228]
```

```
Out[13]= 0.974994
```

```
In[14]:= P[a_, b_, v_] := CDF[StudentTDistribution[v], b] -  
CDF[StudentTDistribution[v], a]
```

```
In[15]:= P[0, 2.228, 10]
```

```
Out[15]= 0.474994
```

```
In[16]:= T[A_, v_] := InverseCDF[StudentTDistribution[v],  
1 - A]
```

```
In[17]:= T[0.025, 10]
```

```
Out[17]= 2.22814
```

```
In[18]:= Pvalue[k_, v_] :=  
1 - CDF[StudentTDistribution[v], Abs[k]]
```

```
In[19]:= Pvalue[2.228, 10]
```

```
Out[19]= 0.0250059
```

```
In[20]:= Pvalue[-2.228, 10]
```

```
Out[20]= 0.0250059
```

7.5.5 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไคสแควร์ ระดับชั้นความเสรี  $v$   
ตัวแปรสุ่มไคสแควร์  $\chi^2$  ระดับชั้นความเสรี  $v$  มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$f(x, v) = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

PDF[ChiSquareDistribution[v], x] คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น  $f(x, v)$

$$\text{CDF}[\text{ChiSquareDistribution}[v], k] = P(0 < \chi^2 < k)$$

InverseCDF[ChiSquareDistribution[v], A] = ค่า  $k$  บนแกน  $\chi^2$  ที่ทำให้  $P(0 < \chi^2 < k) = A$

Chisquare(A) = ค่าวิกฤต  $\chi^2_A$  บนแกนไคสแควร์ (แกนนอน) ที่ทำให้  $P(\chi^2 > \chi^2_A) = A$

$$\text{Pvalue}(k) = P(\chi^2 > |k|)$$

$$\text{In[1]:= } f[x_, v_] := \left( \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} * \text{Gamma}\left[\frac{v}{2}\right]} \right) * x^{\frac{v}{2}-1} * e^{-\frac{x}{2}}$$

$$\text{In[2]:= } f[20.5, 24]$$

$$\text{Out[2]= } 0.058111$$

$$\text{In[3]:= } \text{PDF}[\text{ChiSquareDistribution}[24], 20.5]$$

$$\text{Out[3]= } 0.058111$$

$$\text{In[4]:= } P[a_, b_, v_] := \int_a^b f[x, v] dx$$

$$\text{In[5]:= } P[0, 24.996, 15]$$

$$\text{Out[5]= } 0.950003$$

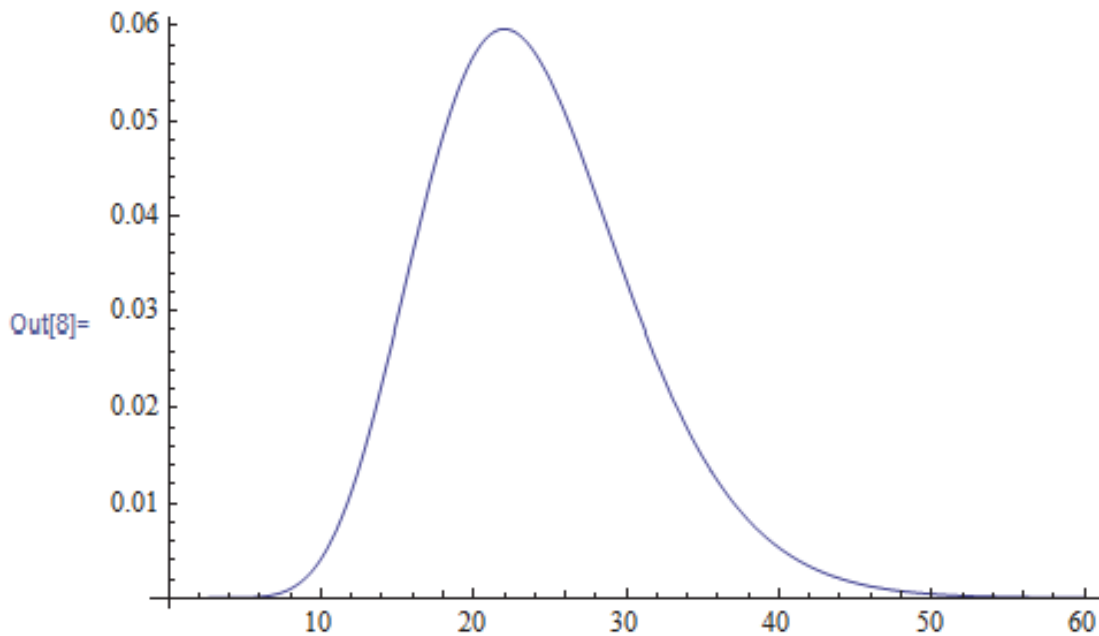
$$\text{In[6]:= } P[a_, b_, v_] :=$$

$$\int_a^b \text{PDF}[\text{ChiSquareDistribution}[v], t] dt$$

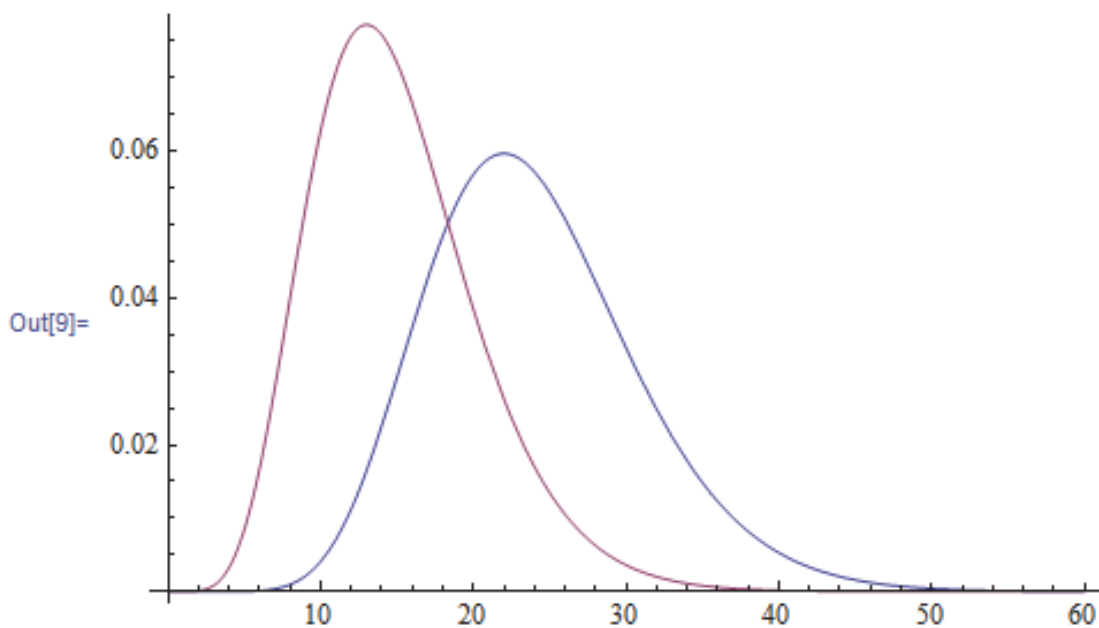
$$\text{In[7]:= } P[0, 24.996, 15]$$

$$\text{Out[7]= } 0.950003$$

```
In[8]:= Plot[PDF[ChiSquareDistribution[24], x],
{x, 0, 60}]
```



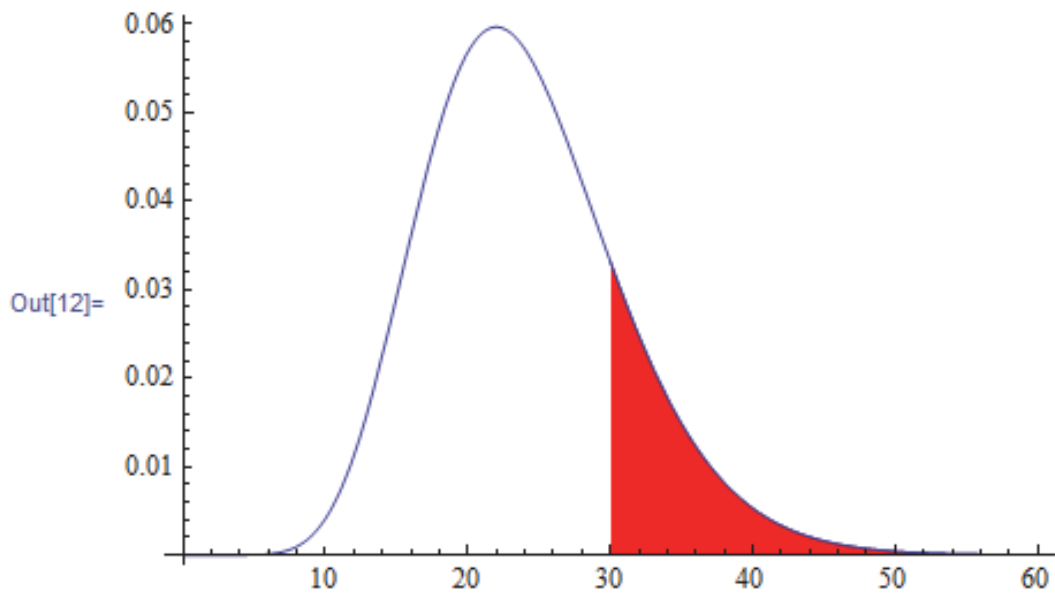
```
In[9]:= Plot[{PDF[ChiSquareDistribution[24], x],
PDF[ChiSquareDistribution[15], x]},
{x, 0, 60}]
```



```
In[10]:= g1 := Plot[PDF[ChiSquareDistribution[24], t],  
             {t, 0, 60}]
```

```
In[11]:= g2 := Plot[PDF[ChiSquareDistribution[24], t],  
             {t, 30, 60}, Filling -> {1 -> {Axis, {Red}}}]
```

```
In[12]:= Show[{g1, g2}]
```





```
In[13]:= CDF[ChiSquareDistribution[24], 42.980]
```

```
Out[13]= 0.99
```

```
In[14]:= P[a_, b_, v_] :=  
          CDF[ChiSquareDistribution[v], b] -  
          CDF[ChiSquareDistribution[v], a]
```

```
In[15]:= P[13.844, 42.980, 24]
```

```
Out[15]= 0.940096
```

```
In[16]:= Chisquare[A_, v_] :=  
          InverseCDF[ChiSquareDistribution[v], 1 - A]
```

```
In[17]:= Chisquare[0.05, 15]
```

```
Out[17]= 24.9958
```

```
In[18]:= Pvalue[k_, v_] :=  
          1 - CDF[ChiSquareDistribution[v], k]
```

```
In[19]:= Pvalue[24.9958, 15]
```

```
Out[19]= 0.0499999
```

7.5.6 การคำนวณค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเอฟ (F) ระดับชั้นความเสรี  $v_1$  และ  $v_2$   
ตัวแปรสุ่มเอฟ (F) ระดับชั้นความเสรี  $v_1$  และ  $v_2$  มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น

$$h(f, v_1, v_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{v_1}{2}} f^{\frac{v_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)\left(1+\frac{v_1}{v_2}f\right)^{\frac{v_1+v_2}{2}}}$$

PDF[FRatioDistribution[ $v_1, v_2$ ],  $x$ ] คือฟังก์ชันความน่าจะเป็น  $h(f, v_1, v_2)$

CDF[FRatioDistribution[ $v_1, v_2$ ],  $k$ ] =  $P(0 < F < k)$

InverseCDF[FRatioDistribution[ $v_1, v_2$ ],  $A$ ] = ค่า  $k$  บนแกน  $F$  ที่ทำให้  $P(0 < F < k) = A$

F(A) = ค่าวิกฤต  $f_A$  บนแกนเอฟ (แกนนอน) ที่ทำให้  $P(F > f_A) = A$

Pvalue( $k$ ) =  $P(F > |k|)$

$$\text{In[1]:= } h[f_, v1_, v2_] := \frac{\text{Gamma}\left[\frac{v1+v2}{2}\right] * \left(\frac{v1}{v2}\right)^{\left(\frac{v1}{2}\right)} f^{\left(\frac{v1}{2}-1\right)}}{\text{Gamma}\left[\frac{v1}{2}\right] * \text{Gamma}\left[\frac{v2}{2}\right] * \left(1 + \left(\frac{v1}{v2}\right) * f\right)^{\frac{v1+v2}{2}}}$$

In[2]:= h[1.5, 6, 10]

Out[2]= 0.300467

In[3]:= PDF[FRatioDistribution[6, 10], 1.5]

Out[3]= 0.300467

In[4]:= P[a\_, b\_, v1\_, v2\_] :=  $\int_a^b h[x, v1, v2] dx$

In[5]:= P[13.844, 42.980, 6, 10]

Out[5]= 0.000248001

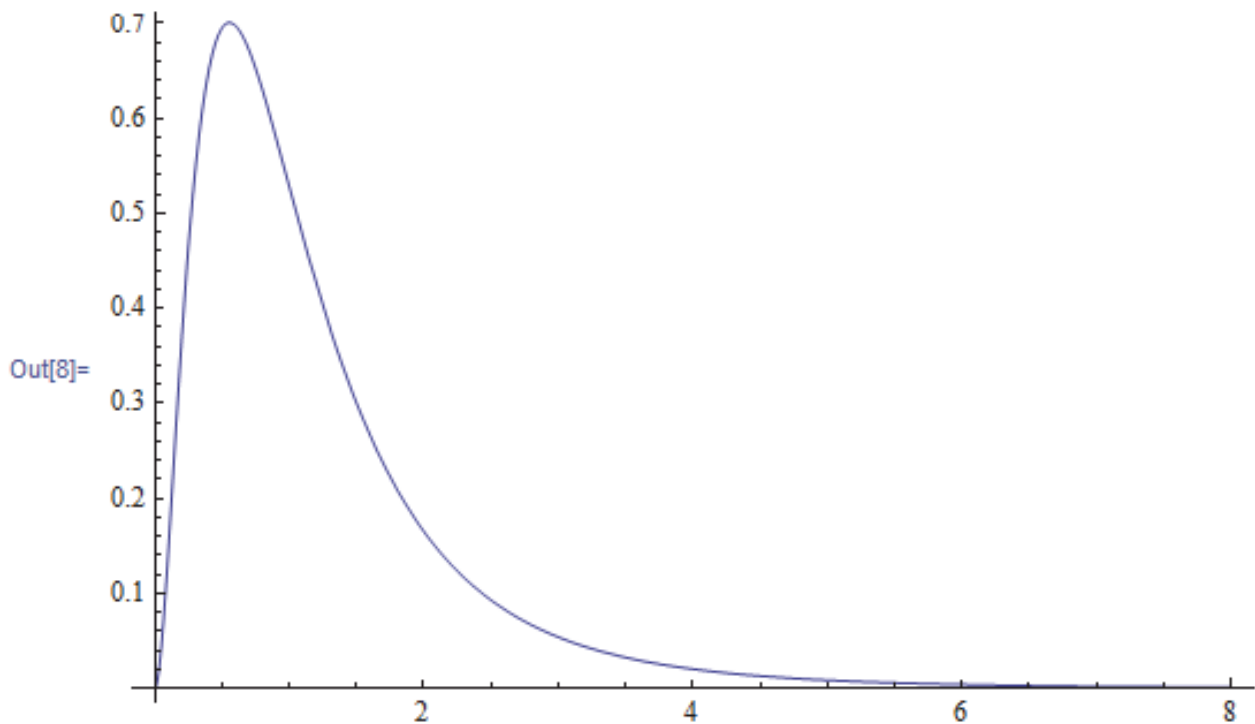
In[6]:= P[a\_, b\_, v1\_, v2\_] :=

$$\int_a^b \text{PDF}[\text{FRatioDistribution}[v1, v2], x] dx$$

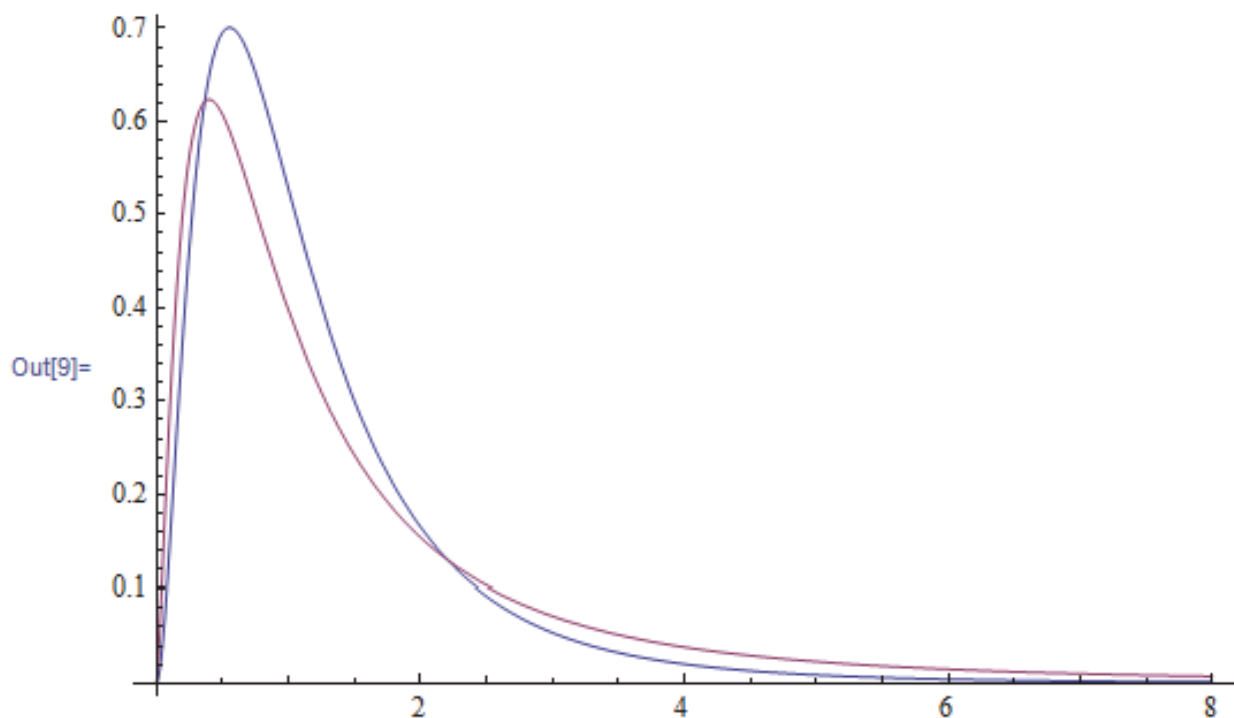
In[7]:= P[13.844, 42.980, 6, 10]

Out[7]= 0.000248001

In[8]:= Plot[PDF[FRatioDistribution[6, 10], f], {f, 0, 8}]



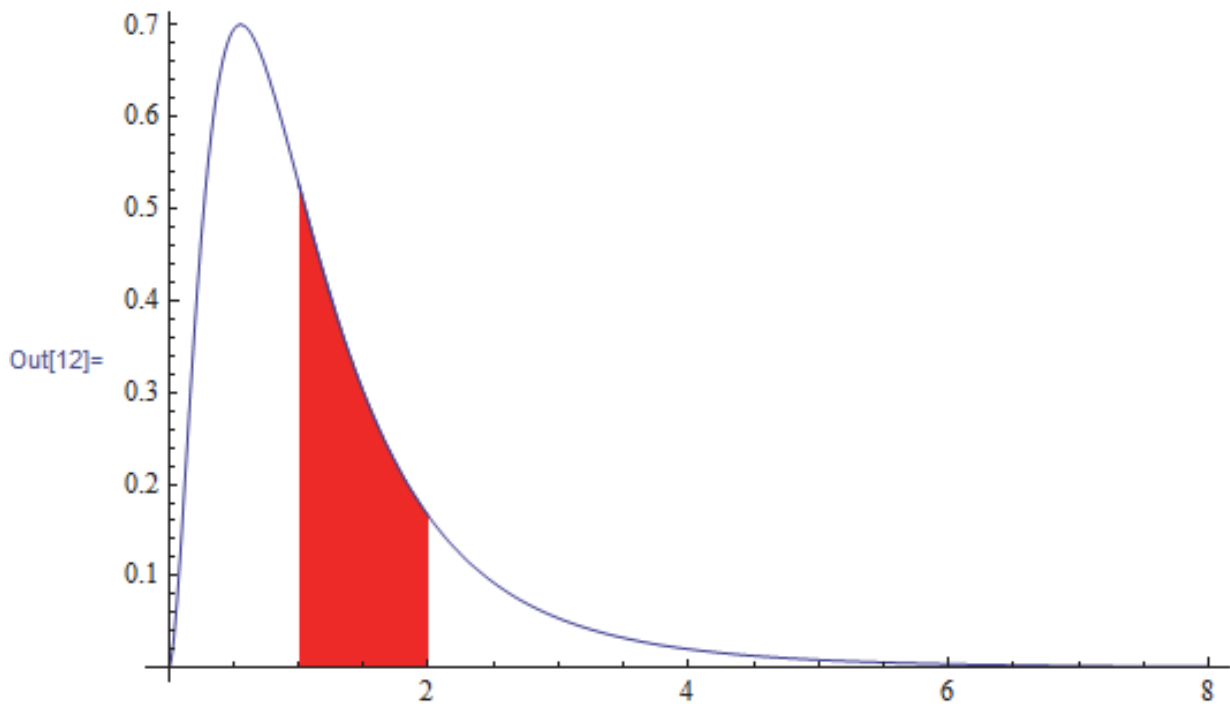
In[9]:= Plot[{PDF[FRatioDistribution[6, 10], f],  
PDF[FRatioDistribution[5, 4], f]}, {f, 0, 8}]



```
In[10]:= g1 := Plot[PDF[FRatioDistribution[6, 10], f], {f, 0, 8}]
```

```
In[11]:= g2 := Plot[PDF[FRatioDistribution[6, 10], f],  
  {f, 1, 2}, Filling -> {1 -> {0, {Red}}}]
```

```
In[12]:= Show[{g1, g2}]
```



```
In[13]:= CDF[FRatioDistribution[6, 10], 3.22]
```

```
Out[13]= 0.950122
```

```
In[14]:= P[a_, b_, v1_, v2_] :=  
          CDF[FRatioDistribution[v1, v2], b] -  
          CDF[FRatioDistribution[v1, v2], a]
```

```
In[15]:= P[0.246, 3.22, 6, 10]
```

```
Out[15]= 0.900262
```

```
In[16]:= F[A_, v1_, v2_] :=  
          InverseCDF[FRatioDistribution[v1, v2], 1 - A]
```

```
In[17]:= F[0.01, 4, 10]
```

```
Out[17]= 5.99434
```

```
In[18]:= Pvalue[k_, v1_, v2_] :=  
          1 - CDF[FRatioDistribution[v1, v2], k]
```

```
In[19]:= Pvalue[5.994, 4, 10]
```

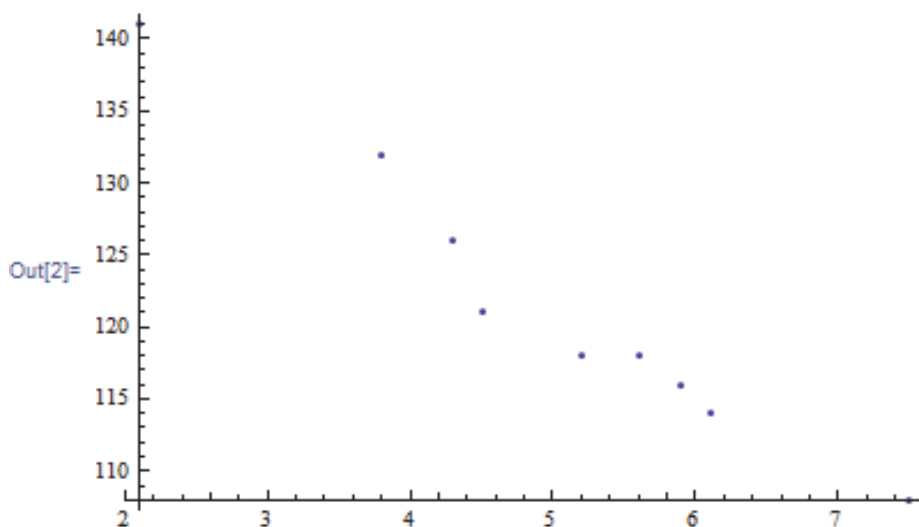
```
Out[19]= 0.0100019
```

7.5.7 การหาสมการถดถอย สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ และการเขียนแผนภาพกระจายข้อมูล  
กำหนดข้อมูล

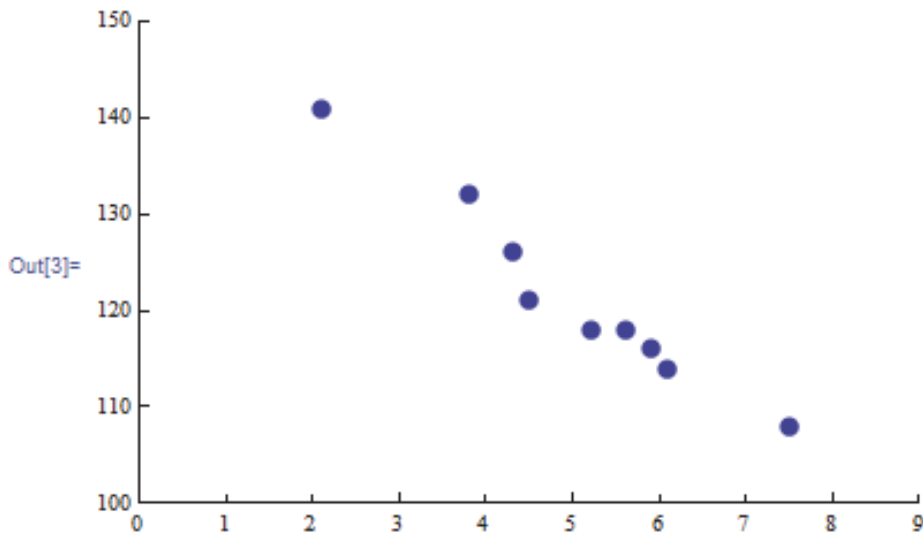
x	y
4.3	126
4.5	121
5.9	116
5.6	118
6.1	114
5.2	118
3.8	132
2.1	141
7.5	108

```
In[1]:= data = {{4.3, 126}, {4.5, 121}, {5.9, 116}, {5.6, 118},
               {6.1, 114}, {5.2, 118}, {3.8, 132}, {2.1, 141},
               {7.5, 108}};
```

```
In[2]:= ListPlot[data]
```



```
In[3]:= ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{0, 9}, {100, 150}},
  Ticks -> {{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
    {100, 110, 120, 130, 140, 150}}]
```



```
In[4]:= ycap = LinearModelFit[data, {1, x}, x]
```

```
Out[4]= FittedModel [ 153.175 - 6.32399x ]
```

```
In[5]:= Correlation[data]
```

```
Out[5]= {{1., -0.978658}, {-0.978658, 1.}}
```

```
In[6]:= ycap["ParameterConfidenceIntervalTable"]
```

		Estimate	Standard Error	Confidence Interval
Out[6]=	1	153.175	2.61466	{146.993, 159.358}
	x	-6.32399	0.501892	{-7.51077, -5.1372}

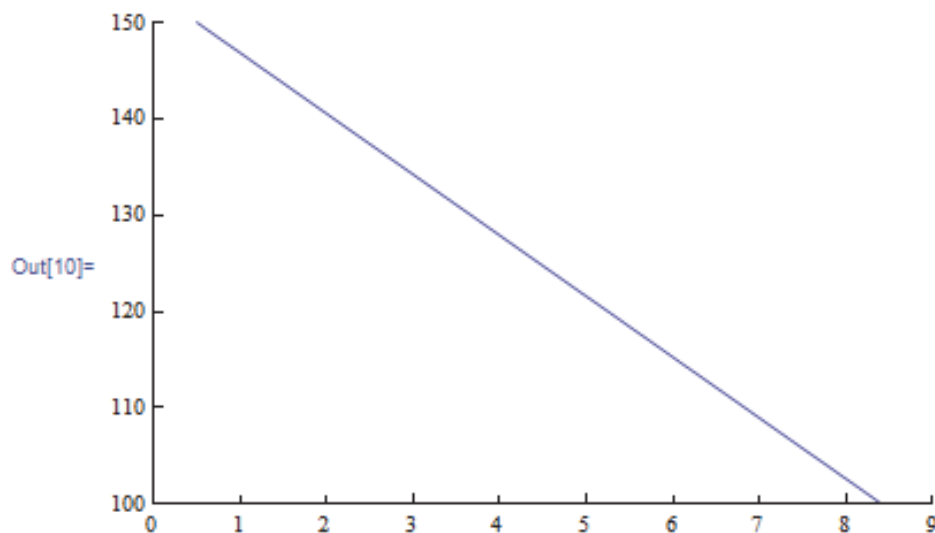
```
In[7]:= ycap["ANOVATable"]
```

		DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
Out[7]=	x	1	770.262	770.262	158.768	$4.57919 \times 10^{-6}$
	Error	7	33.9605	4.85151		
	Total	8	804.222			

```
In[8]:= g1 := ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{0, 9}, {100, 150}},
  Ticks -> {{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
    {100, 110, 120, 130, 140, 150}}]
```

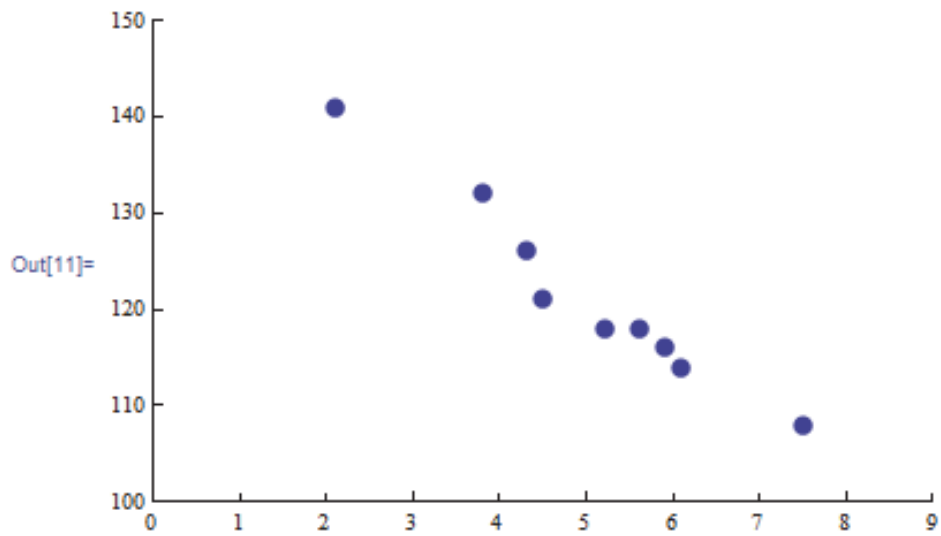
```
In[9]:= g2 := Plot[ycap[x], {x, 0, 10},
  PlotRange -> {{0, 9}, {100, 150}},
  Ticks -> {{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9},
    {100, 110, 120, 130, 140, 150}}]
```

```
In[10]:= Show[g2]
```

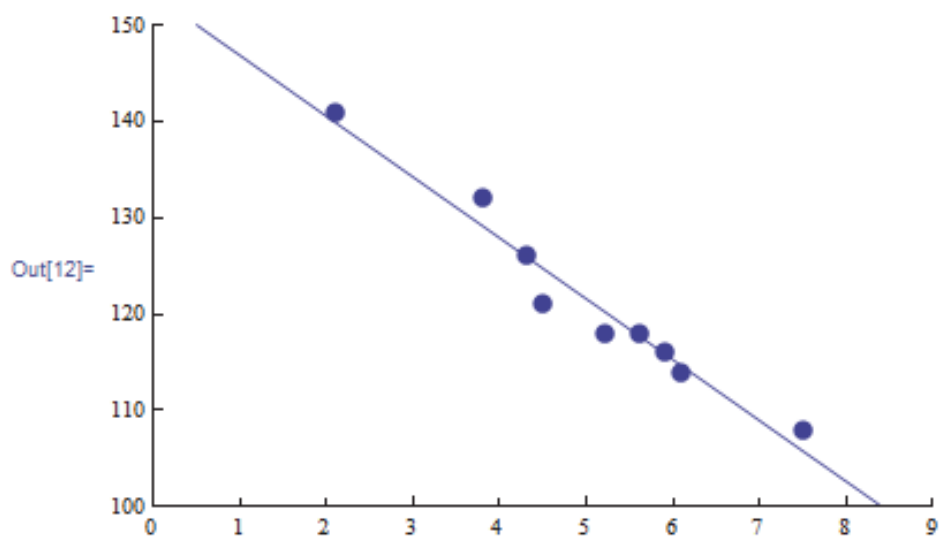




In[11]:= Show [g1]



In[12]:= Show [g1, g2]



In[13]:= `yca = LinearModelFit[data, {1, x}, x]`

Out[13]= FittedModel [  $153.175 - 6.32399x$  ]

In[14]:= `yca["ParameterConfidenceIntervalTable"]`

	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
1	153.175	2.61466	{146.993, 159.358}
x	-6.32399	0.501892	{-7.51077, -5.1372}

In[15]:= `yca = LinearModelFit[data, {1, x}, x, ConfidenceLevel -> .95]`

Out[15]= FittedModel [  $153.175 - 6.32399x$  ]

In[16]:= `yca["ParameterConfidenceIntervalTable"]`

	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
1	153.175	2.61466	{146.993, 159.358}
x	-6.32399	0.501892	{-7.51077, -5.1372}

In[17]:= `yca = LinearModelFit[data, {1, x}, x, ConfidenceLevel -> .99]`

Out[17]= FittedModel [  $153.175 - 6.32399x$  ]

In[18]:= `yca["ParameterConfidenceIntervalTable"]`

	Estimate	Standard Error	Confidence Interval
1	153.175	2.61466	{144.026, 162.325}
x	-6.32399	0.501892	{-8.08035, -4.56763}

In[19]:= `ycap`

Out[19]= `FittedModel` [  $153.175 - 6.32399x$  ]

In[20]:= `ycap["ParameterTable"]`

		Estimate	Standard Error	t-Statistic	P-Value
Out[20]=	1	153.175	2.61466	58.5834	$1.10816 \times 10^{-10}$
	x	-6.32399	0.501892	-12.6003	$4.57919 \times 10^{-6}$

In[21]:= `ycap[4]`

Out[21]= 127.88

In[22]:= `ycap["RSquared"]`

Out[22]= 0.957772

In[23]:= `ycap["AdjustedRSquared"]`

Out[23]= 0.95174

In[24]:= `ycap["EstimatedVariance"]`

Out[24]= 4.85151

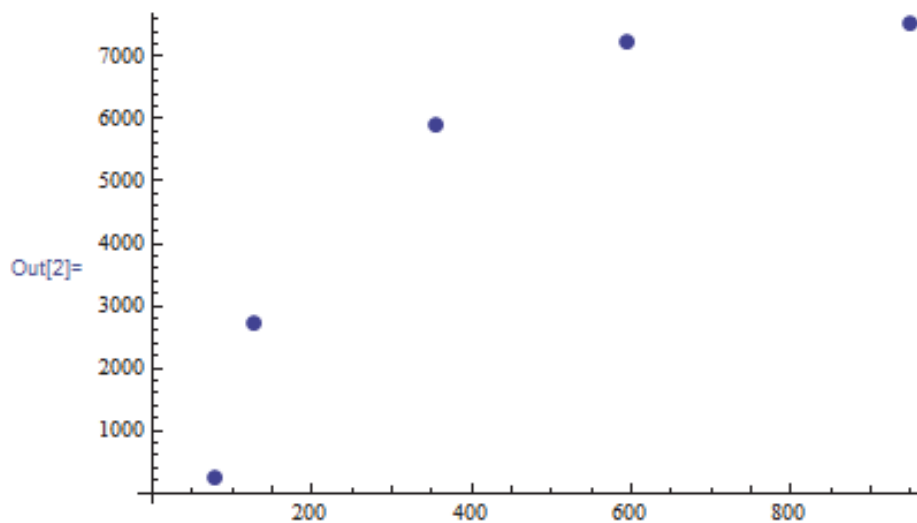
## 7.5.8 กราฟของแผนภาพการกระจายบนกราฟสเกล (X, Y), (X, ln Y), (ln X, Y) และ (ln X, ln Y)

กำหนดข้อมูล

x	y
79	255
128	2732
355	5915
595	7231
950	7525

```
In[1]:= data := {{79, 255}, {128, 2732}, {355, 5915},
                {595, 7231}, {950, 7525}}
```

```
In[2]:= ListPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}
```

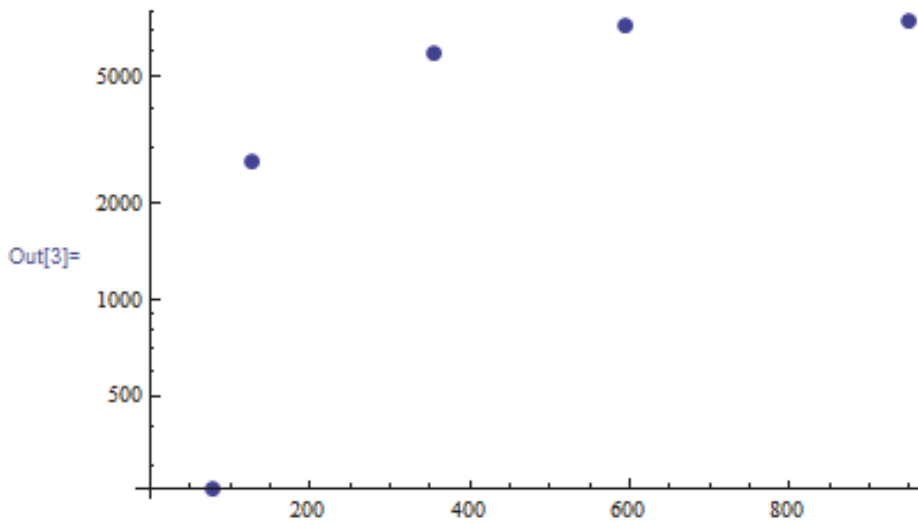


ListPlot เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  บนสเกล (X, Y)

สเกลบนแกนนอนเป็นค่าของ X บนช่วง [0, 1000]

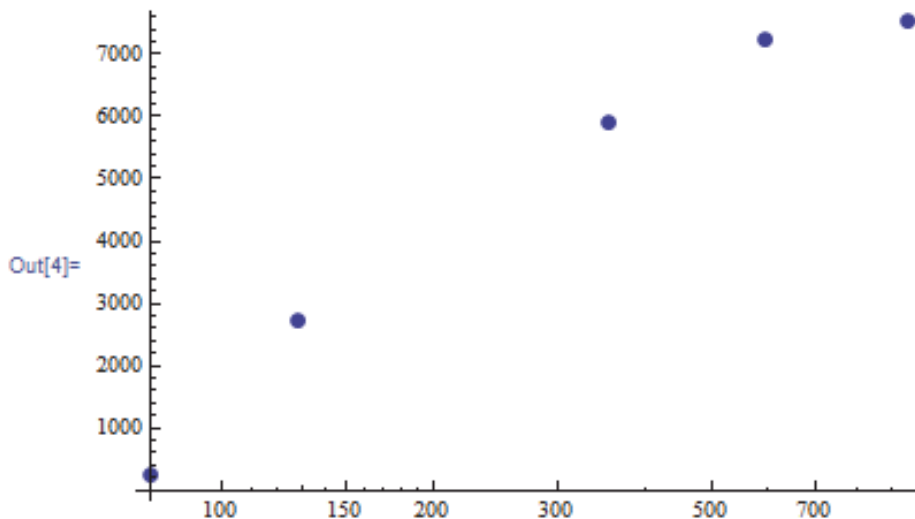
สเกลบนแกนตั้งเป็นค่าของ Y บนช่วง [0, 7525]

```
In[3]:= ListLogPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}]
```



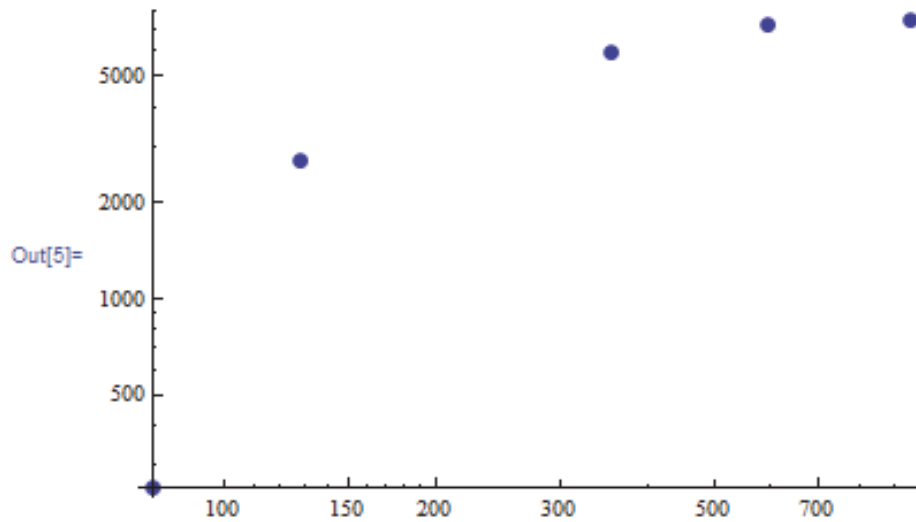
ListLogPlot เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $(x_i, \ln y_i), i = 1, 2, 3, 4, 5$  บนสเกล  $(X, \ln Y)$   
 สเกลบนแกนนอนเป็นสเกลปกติ X  
 สเกลบนแกนตั้งเป็นสเกล ln Y

```
In[4]:= ListLogLinearPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}]
```



ListLogLinearPlot เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $(\ln x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4, 5$  บนสเกล  $(\ln X, Y)$   
 สเกลบนแกนนอนเป็นสเกล ln X  
 สเกลบนแกนตั้งเป็นสเกลปกติ Y

```
In[5]:= ListLogLogPlot[data, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}]
```



ListLoglogPlot เป็นคำสั่งเขียนกราฟของ  $(\ln x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$  บนสเกล  $(\ln X, \ln Y)$   
 สเกลบนแกนนอนเป็นสเกล  $\ln X$   
 สเกลบนแกนตั้งเป็นสเกล  $\ln Y$

การเขียนแผนภาพการกระจายโดยการเปลี่ยนตัวแปร ( $U = X, V = \ln Y$ ) บนสเกล ( $U, V$ )

```
In[1]:= x := {79, 128, 355, 595, 950};
```

```
In[2]:= y := {255, 2732, 5915, 7231, 7525};
```

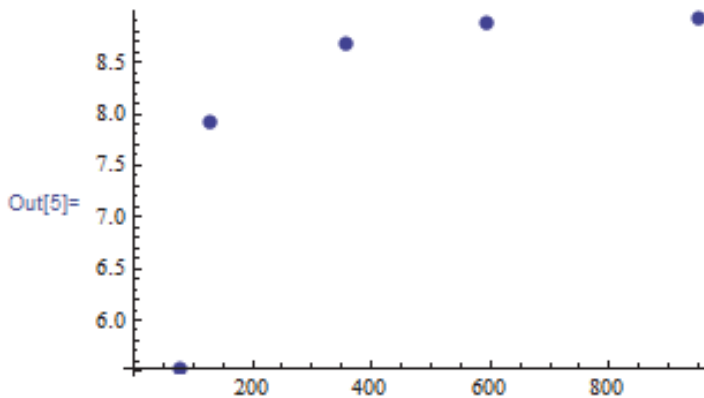
```
In[3]:= u = x; v = Log[y]; uv := Table[{u[[i]], v[[i]]}, {i, 5}]
```

```
In[4]:= TableForm[uv] // N
```

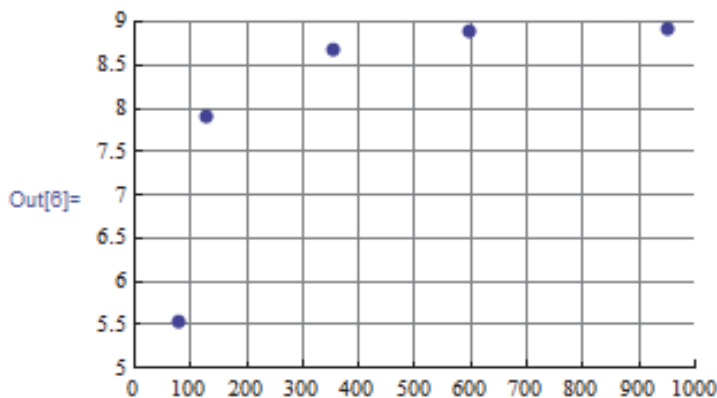
Out[4]/TableForm=

```
79.      5.54126
128.     7.91279
355.     8.68525
595.     8.88613
950.     8.92599
```

```
In[5]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}]
```



```
In[6]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.025]},
  PlotRange -> {{0, 1000}, {5, 9}},
  GridLines -> {{0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000},
    {5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9}},
  Ticks -> {{0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000},
    {5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9}}]
```



การเขียนแผนภาพการกระจายโดยการเปลี่ยนตัวแปร ( $U = \ln X$ ,  $V = Y$ ) บนสเกล ( $U$ ,  $V$ )

```
In[1]:= x := {79, 128, 355, 595, 950};
```

```
In[2]:= y := {255, 2732, 5915, 7231, 7525};
```

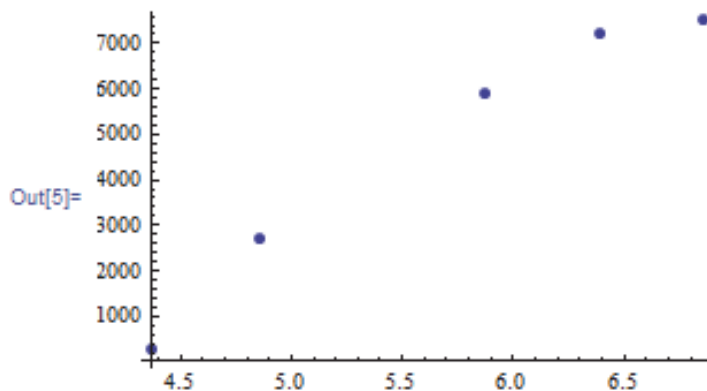
```
In[3]:= u = Log[x] // N; v = y; uv := Table[{u[[i]], v[[i]]}, {i, 5}]
```

```
In[4]:= TableForm[uv]
```

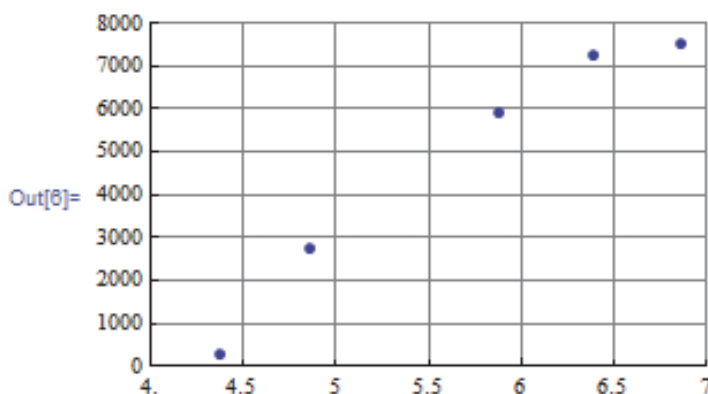
Out[4]/TableForm=

4.36945	255
4.85203	2732
5.87212	5915
6.38856	7231
6.85646	7525

```
In[5]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.02]}]
```



```
In[8]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.02]},
  PlotRange -> {{4, 7}, {0, 8000}},
  GridLines -> {{4.0, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7},
    {0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000}},
  Ticks -> {{4.0, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7},
    {0, 1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000}}]
```





การเขียนแผนภาพการกระจายโดยการเปลี่ยนตัวแปร ( $U = \ln X$ ,  $V = \ln Y$ ) บนสเกล ( $U$ ,  $V$ )

```
In[1]:= x := {79, 128, 355, 595, 950};
```

```
In[2]:= y := {255, 2732, 5915, 7231, 7525};
```

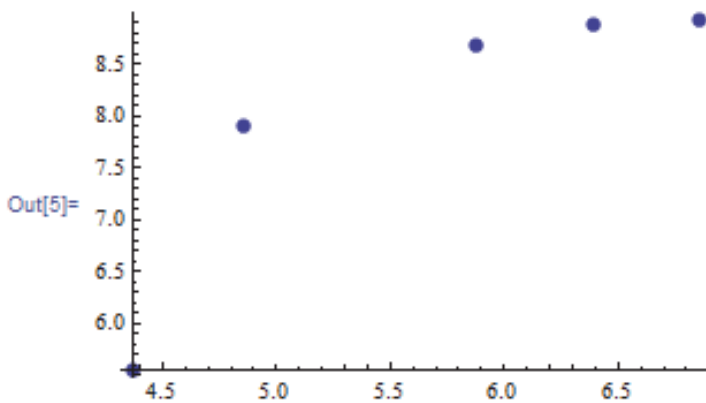
```
In[3]:= u = Log[x]; v = Log[y]; uv := Table[{u[[i]], v[[i]]}, {i, 5}];
```

```
In[4]:= TableForm[uv] // N
```

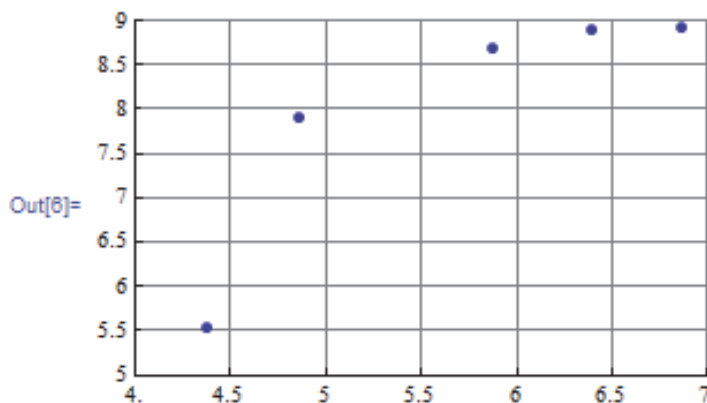
Out[4]/TableForm=

4.36945	5.54126
4.85203	7.91279
5.87212	8.68525
6.38856	8.88613
6.85646	8.92599

```
In[5]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.025]}]
```



```
In[6]:= ListPlot[uv, PlotStyle -> {PointSize[0.02]},
  PlotRange -> {{4, 7}, {5, 9}},
  GridLines -> {{4.0, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7},
    {5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9}},
  Ticks -> {{4.0, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5, 7},
    {5, 5.5, 6, 6.5, 7, 7.5, 8, 8.5, 9}}]
```



## 7.6 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูงด้วยโปรแกรม Mathematica

### 7.6.1 การหาอินทิกรัลจำกัดเขตและอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

In[1]:= Integrate[x^2, x]

$$\text{Out[1]} = \frac{x^3}{3}$$

In[2]:= Integrate[x^2, {x, 0, 1}]

$$\text{Out[2]} = \frac{1}{3}$$

In[3]:= Integrate[t^2, {t, x+1, x^2}]

$$\text{Out[3]} = \frac{1}{3} (x^6 - (1+x)^3)$$

In[4]:=  $\int_{x+1}^{x^2} (t^2) dt$

$$\text{Out[4]} = \frac{1}{3} (x^6 - (1+x)^3)$$

In[5]:= Integrate[Exp[x] \* Sin[x], x]

$$\text{Out[5]} = \frac{1}{2} e^x (-\text{Cos}[x] + \text{Sin}[x])$$

In[6]:= Integrate[x \* Sin[x], x]

$$\text{Out[6]} = -x \text{Cos}[x] + \text{Sin}[x]$$

In[7]:= Integrate[x \* Sin[x], {x, 0, t}]

$$\text{Out[7]} = -t \text{Cos}[t] + \text{Sin}[t]$$

7.6.2 การหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามในพจน์ของปริพันธ์

$$\text{In[1]:= D}\left[\int x^2 dx, x\right]$$

$$\text{Out[1]= } x^2$$

$$\text{In[2]:= D}\left[\int_x^{x^2} (4 * t^3 - 3 * t^2 + 8 * t + 4) dt, x\right]$$

$$\text{Out[2]= } -4 + 3 x^2 + 12 x^3 - 6 x^5 + 8 x^7$$

$$\text{In[3]:= D}\left[\int_x^{x^2} (t^2 + 4 * t + 3) dt, \{x, 4\}\right]$$

$$\text{Out[3]= } 48 + 120 x^2$$

$$\text{In[4]:= } \partial_x \left( \int_x^{x^2} (t^2 + 4 * t + 3) dt \right)$$

$$\text{Out[4]= } -3 + 2 x - x^2 + 8 x^3 + 2 x^5$$

$$\text{In[5]:= Integrate}[1 / (x^4 - 1), x]$$

$$\text{Out[5]= } -\frac{\text{ArcTan}[x]}{2} + \frac{1}{4} \text{Log}[1 - x] - \frac{1}{4} \text{Log}[1 + x]$$

$$\text{In[6]:= D[Integrate}[1 / (x^4 - 1), x], x]$$

$$\text{Out[6]= } -\frac{1}{4(1-x)} - \frac{1}{4(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)}$$

$$\text{In[7]:= TraditionalForm}[\%]$$

Out[7]/TraditionalForm=

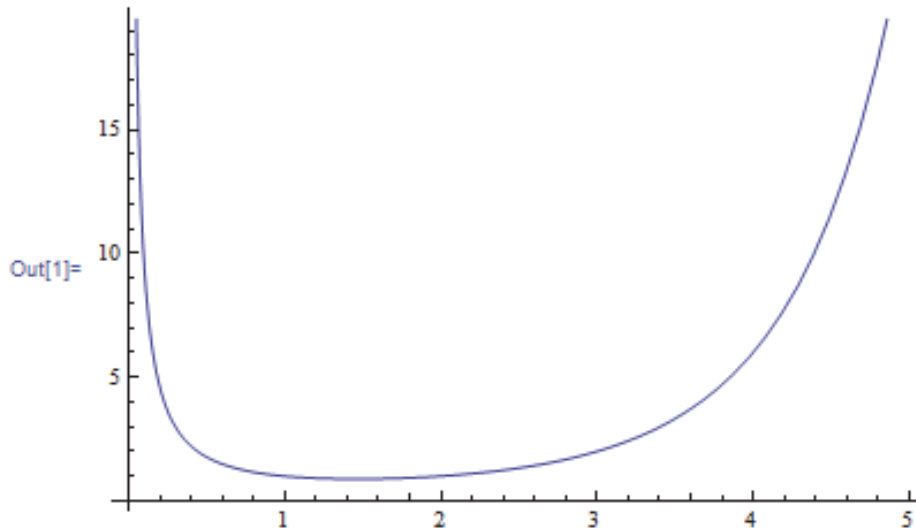
$$-\frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{4(x + 1)} - \frac{1}{4(1 - x)}$$

$$\text{In[8]:= Simplify}[\%]$$

$$\text{Out[8]= } \frac{1}{-1 + x^4}$$

## 7.6.3 กราฟของฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) และการคำนวณค่าฟังก์ชันแกมมา

```
In[1]:= Plot[Gamma[x], {x, 0, 5}]
```



```
In[2]:= Gamma[2]
```

```
Out[2]= 1
```

```
In[3]:= Gamma[5]
```

```
Out[3]= 24
```

```
In[4]:= Gamma[2.5]
```

```
Out[4]= 1.32934
```

```
In[5]:= (1.5) * (0.5) * Gamma[0.5]
```

```
Out[5]= 1.32934
```

```
In[6]:= Gamma[-2.5]
```

```
Out[6]= -0.945309
```

```
In[7]:= 
$$\frac{\text{Gamma}[0.5]}{(-2.5) * (-1.5) * (-0.5)}$$

```

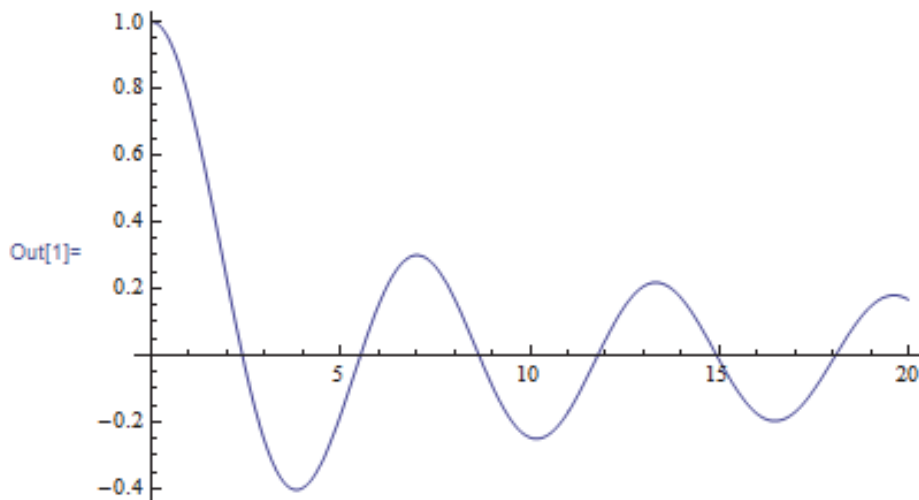
```
Out[7]= -0.945309
```

7.6.4 ฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) และ กราฟของฟังก์ชันเบสเซล

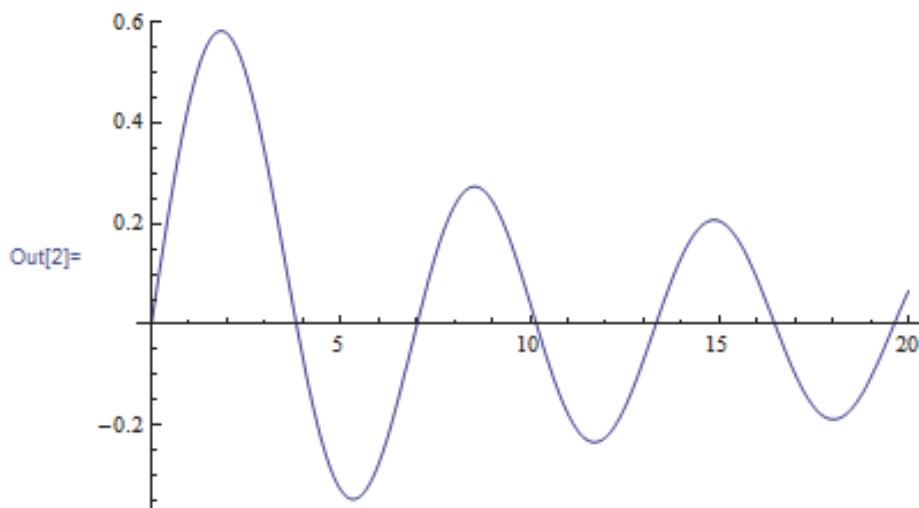
หมายเหตุ  $BesselU[v, x]$  คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 1 อันดับ  $v$

$BesselY[v, x]$  คือ ฟังก์ชันเบสเซลชนิดที่ 2 อันดับ  $v$

In[1]:= Plot[ BesselJ[0,x], {x, 0, 20} ]



In[2]:= Plot[ BesselJ[1,x], {x, 0, 20} ]



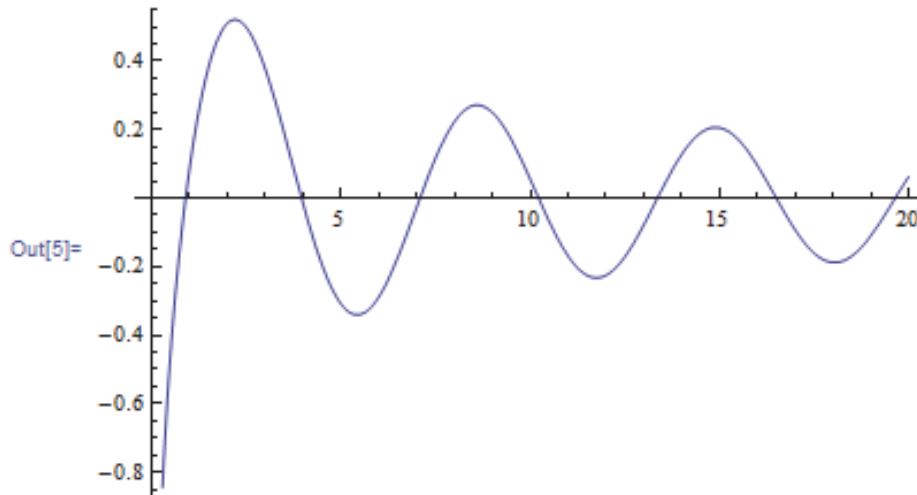
In[3]:= {BesselJ[0, 1.], BesselJ[0, 1.5], BesselJ[0, 2.0],  
BesselJ[0, 3.]}

Out[3]= {0.765198, 0.511828, 0.223891, -0.260052}

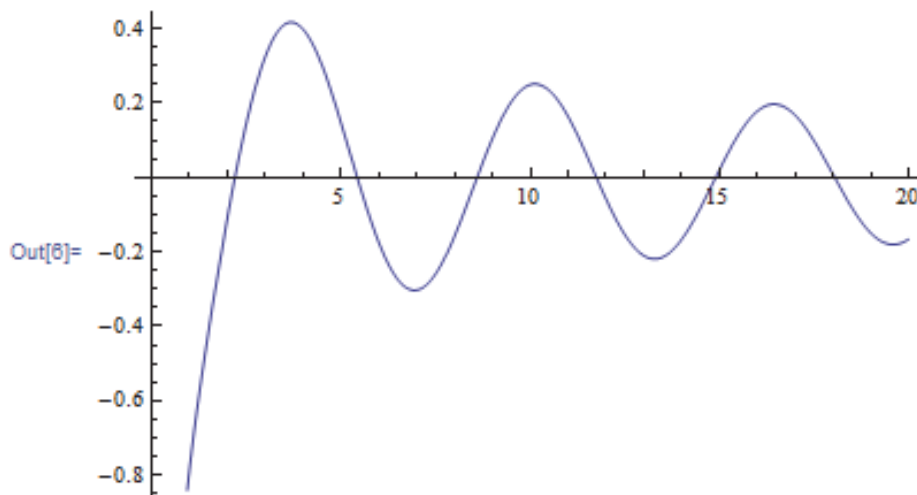
```
In[4]:= {BesselJ[1, 1.], BesselJ[2, 1.], BesselJ[3, 1.],
         BesselJ[4, 1.]}
```

```
Out[4]:= {0.440051, 0.114903, 0.0195634, 0.00247664}
```

```
In[5]:= Plot[ Bessely[0,x], {x, 0, 20} ]
```



```
In[6]:= Plot[ Bessely[1,x], {x, 0, 20} ]
```



7.6.5 การหาอนุพันธ์อันดับสูงและอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่างเช่น  $\frac{d^3}{dx^3}(x^4) = 24x$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(x^4 y^3) = 12x^2 y^3$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial y^2}(x^4 y^3) = 6x^4 y$

และ  $\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}(x^4 y^3) = 36x^2 y^2$

Out[1]= 24 x

In[2]:= D[x^4 \* y^3, {x, 2}]

Out[2]= 12 x^2 y^3

In[3]:= D[x^4 \* y^3, {y, 2}]

Out[3]= 6 x^4 y

In[4]:= D[x^4 \* y^3, {x, 2}, {y, 1}]

Out[4]= 36 x^2 y^2

In[5]:= D\_{x,y} (x^2 \* y^3 - 4 \* x^3 \* y^4)

Out[5]= 6 x y^2 - 48 x^2 y^3

In[7]:= D\_{x,x} (Exp[4 \* x \* y^2] \* x \* y)

Out[7]= 8 e^{4xy^2} y^3 + 16 e^{4xy^2} x y^5

In[8]:= Factor[%]

Out[8]= 8 e^{4xy^2} y^3 (1 + 2 x y^2)

In[9]:= D\_{y,x} (Exp[x^2] \* Cos[x \* y])

Out[9]= -e^{x^2} x y Cos[x y] - e^{x^2} Sin[x y] - 2 e^{x^2} x^2 Sin[x y]

In[10]:= TraditionalForm[%]

Out[10]//TraditionalForm=

$-2e^{x^2} x^2 \sin(xy) - e^{x^2} \sin(xy) - e^{x^2} x y \cos(xy)$

7.6.6 การหาพหุนามเลอจองด์  $P_n(x)$ 

```
In[1]:= {LegendreP[1, x], LegendreP[2, x], LegendreP[3, x],
LegendreP[4, x]}
```

```
Out[1]= {x,  $\frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$ ,  $\frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$ ,  $\frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$ }
```

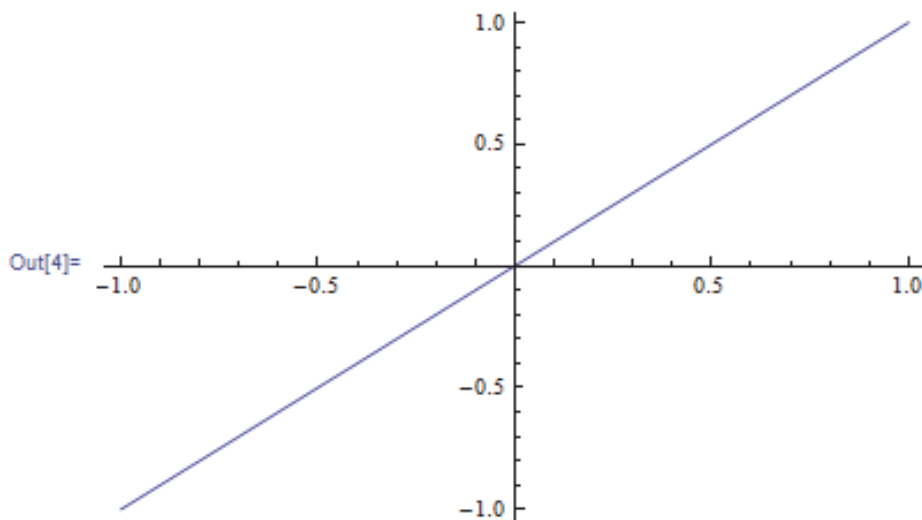
```
In[2]:= {LegendreP[5, x], LegendreP[6, x]}
```

```
Out[2]= { $\frac{1}{8}(15x - 70x^3 + 63x^5)$ ,  $\frac{1}{16}(-5 + 105x^2 - 315x^4 + 231x^6)$ }
```

```
In[3]:= {LegendreP[2, 0.5], LegendreP[3, -0.5]}
```

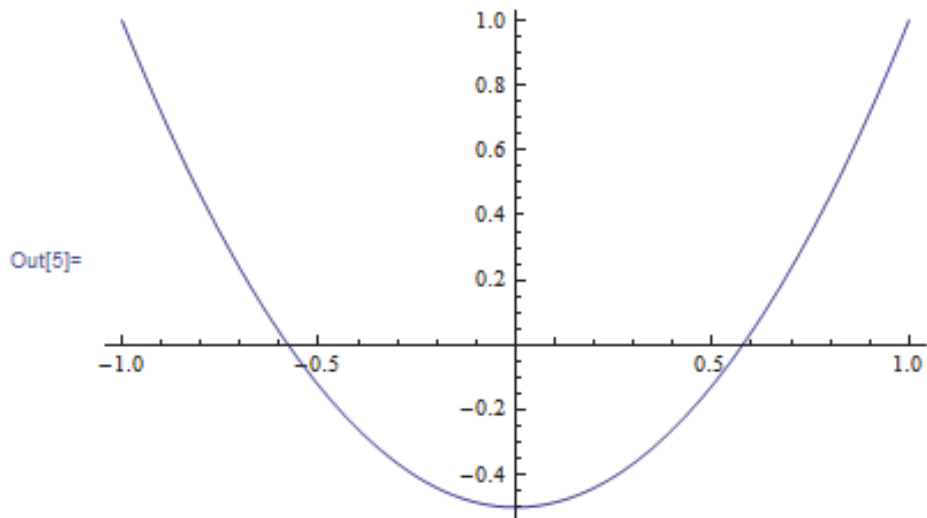
```
Out[3]= {-0.125, 0.4375}
```

```
In[4]:= Plot[LegendreP[1, x], {x, -1, 1}]
```

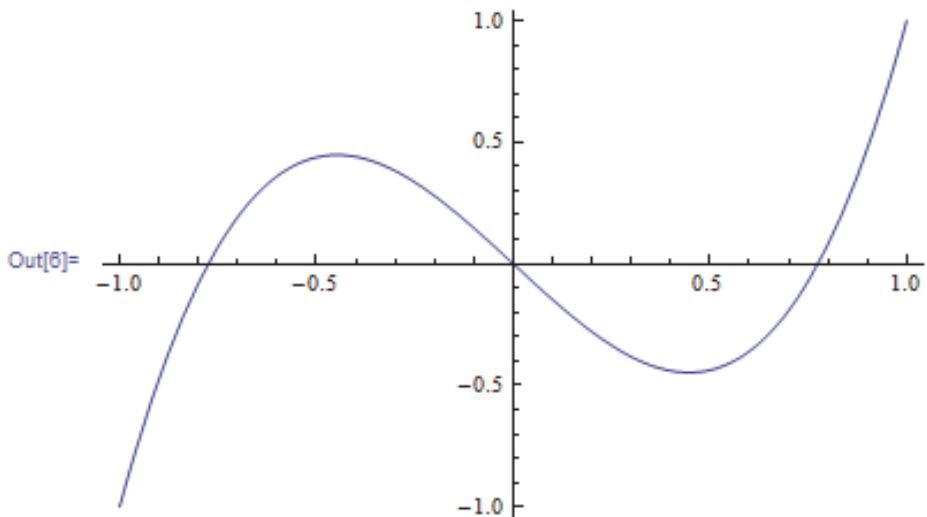




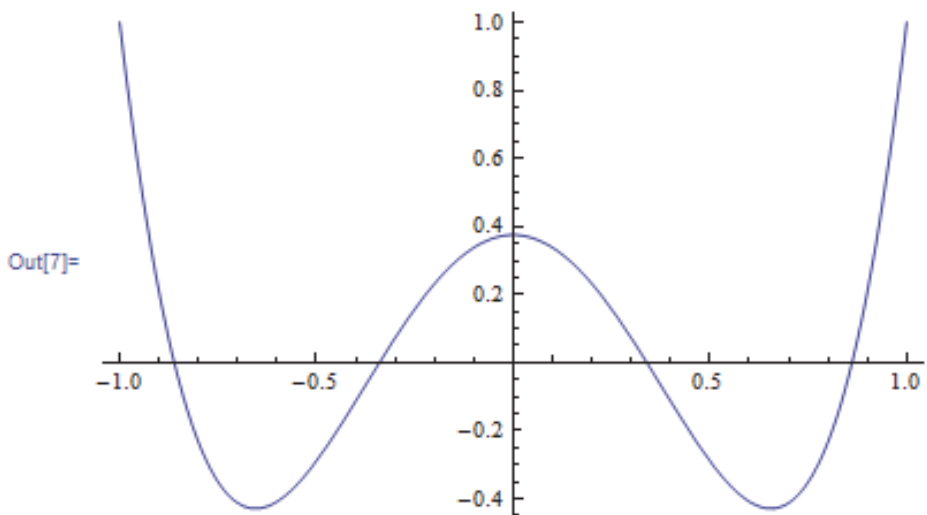
In[5]:= Plot[LegendreP[2, x], {x, -1, 1}]



In[6]:= Plot[LegendreP[3, x], {x, -1, 1}]



In[7]:= Plot[LegendreP[4, x], {x, -1, 1}]



```
In[8]:= {LegendreP[1, x], LegendreP[2, x], LegendreP[3, x],
LegendreP[4, x]}
```

```
Out[8]:= {x,  $\frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$ ,  $\frac{1}{2}(-3x + 5x^3)$ ,  $\frac{1}{8}(3 - 30x^2 + 35x^4)$ }
```

```
In[9]:= g1 := Plot[LegendreP[1, x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> Red];
```

```
In[10]:= g2 := Plot[LegendreP[2, x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> Blue];
```

```
In[11]:= g3 := Plot[LegendreP[3, x], {x, -1, 1},
PlotStyle -> {Green, Thick}];
```

```
In[12]:= g4 := Plot[LegendreP[4, x], {x, -1, 1}, PlotStyle -> Black];
```

```
In[13]:= Show[g1, g2, g3, g4]
```

