คณิตศาสตร์ปรนัย

เฉลย
คณิตศาสตร์ กข.
2537

เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข.
และข้อสอบแข่งขันระดับ ม.ปลาย ด้วยวิธีตามหลักสูตร
วิธีลัดและเทคนิคการตัดตัวเลือก

ข้อสอบจริงข้อ 20. คณิตศาสตร์ กข 2537

ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$[\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots] < 1$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < x < \sqrt{3}$
2. $x > \sqrt{3}$
3. $0 < x < 3\sqrt{3}$
4. $x > 3\sqrt{3}$

ตอบ 3.

เทคนิคการตัดตัวเลือก

เพราะว่าเมื่อ x = 1 และ x = 3 จะได้

$$[\log_3 1 - \log_{3^2} 1 + \log_{3^4} 1 - \log_{3^8} 1 + \ldots] = 0 < 1$$

$$[\log_3 3 - \log_{3^2} 3 + \log_{3^4} 3 - \log_{3^8} 3 + \ldots] = \frac{2}{3} < 1$$

ดังนั้นเซตคำตอบต้องมี x = 1 และ x = 3

สรุป ตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้ง

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เล่มที่ 1

ISBN 974-584-249-4

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 1

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ISBN 974-584-249-4
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2537
จำนวน 10,000 เล่ม

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626
จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2152200, 2554433 โทรสาร 2554441

คำนำ

เนื่องจากข้อสอบแข่งขันเข้ามหาวิทยาลัยวิชา คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข และข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ข้อสอบแข่งขันของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ ข้อสอบแข่งขันคัดเลือกโอลิมปิก ลักษณะข้อสอบส่วนใหญ่เป็นข้อสอบปรนัย ซึ่งการทำโจทย์ข้อสอบนั้นการหาคำตอบโดยวิธีจริงเป็นวิธีที่ดีที่สุด แต่ถ้านักเรียนต้องการเพิ่มความเร็วในการหาตัวเลือกที่ต้องการให้เร็วขึ้นอีกนิด ก็จะสามารถทำได้โดยการฝึกสังเกต ฝึกการแทนค่า และพิจารณาการตัดตัวเลือก ซึ่งความคิดในลักษณะนี้อาจจะเกิดขึ้นได้ขณะที่นักเรียนกำลังคิดวิธีจริงอยู่นั่นเอง

ดังนั้นในหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 1 นี้ ผู้เขียนจึงนำข้อสอบคณิตศาสตร์ กข ปี 2537 มาแสดงการหาคำตอบทั้งวิธีจริงและฝึกการคิดลัดและการตัดตัวเลือกด้วย สำหรับข้อสอบคณิตศาสตร์ ก ปี 2537 จะนำมาเฉลยในแนวนี้ต่อไปในคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 2

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย

วิธีจริง	ดีที่สุด
วิธีจริงกับวิธีลัด	ดีที่สุดและเร็วกว่า
วิธีจริงกับวิธีลัดและวิธีตัดตัวเลือก	ดีที่สุดและเร็วที่สุด

คณิตศาสตร์ กข ประจำปี 2537

วันอังคารที่ 5 เมษายน 2537

ตอนที่ 1

1. ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

   1. $(p \wedge q) \vee \sim r$
   2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
   3. $\sim(p \vee q) \vee r$
   4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** ตีตารางแสดงค่าความจริง

วิธีที่ 2 โดยใช้สูตร

$$
\begin{aligned}
(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &= (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \\
&= (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\
&= \sim(p \vee q) \vee r
\end{aligned}
$$

วิธีลัด p เป็น T q เป็น F และ r เป็น F

จะได้ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$ เป็น F

1. $(p \wedge q) \vee \sim r$ เป็น T
2. $(p \wedge q) \rightarrow r$ เป็น T
3. $\sim(p \vee q) \vee r$ เป็น F
4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$ เป็น T

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ วิธีตัดตัวเลือกนี้คิดเหมือนกับการตีตารางแสดงค่าความจริง แต่เมื่อพบว่าตัวเลือกใดผิด เราก็ไม่ต้องคิดประพจน์ในตัวเลือกนั้นอีก

2. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ p แทนประพจน์

"สำหรับจำนวนจริงบวก x ใดๆ ผลบวกของ x กับ $\frac{1}{x}$ มีค่ามากกว่า 1"

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. p สมมูลกับ $\forall x[x \leq 0 \vee (x+\frac{1}{x} > 1)]$

ข. p มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก
2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด ประพจน์ p คือ $\forall x \in R^+[x+\frac{1}{x} > 1]$

เพราะว่า $(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$

$$x^2-x+1 > 0$$

$$x^2+1 > x$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $x > 0$ จะได้ $x+\frac{1}{x} > 1$

p มีค่าความจริงเป็นจริง

นอกจากนั้นเรายังได้ว่า $\forall x \in R[x \leq 0 \vee (x+\frac{1}{x} > 1)]$

มีค่าความจริงเป็นจริงสมมูลกับ p

สรุป ก. และ ข. ถูกต้อง

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. <u>เหตุ</u> 1. นายสมหมายเป็นคนขยันหรือนายสมหมายสอบได้ที่หนึ่งของห้อง

2. นายสมหมายเป็นคนไม่ขยัน

<u>ผล</u> นายสมหมายสอบได้ที่หนึ่งของห้อง

ข. <u>เหตุ</u> 1. ถ้าสมศรีไปเที่ยวชายทะเลแล้วสมศรีไม่สบาย

2. สมศรีไม่สบาย

<u>ผล</u> สมศรีไปเที่ยวชายทะเล

การอ้างเหตุผลใน ก. และ ข. ข้างต้น สมเหตุสมผลหรือไม่

1. ก. สมเหตุสมผล ข. สมเหตุสมผล
2. ก. สมเหตุสมผล ข. ไม่สมเหตุสมผล
3. ก. ไม่สมเหตุสมผล ข. สมเหตุสมผล
4. ก. ไม่สมเหตุสมผล ข. ไม่สมเหตุสมผล

ตอบ 2.

แนวคิด ก. p แทน สมหมายเป็นคนขยัน

q แทน สมหมายสอบได้ที่หนึ่ง

ดังนั้น เหตุ 1. $p \wedge q$

2. $\sim p$

ผล q

เนื่องจาก $((p \wedge q) \wedge \sim p) \rightarrow q$ เป็นสัจจนิรันดร์

เพราะฉะนั้น ก. สมเหตุสมผล

ข. p แทน สมศรีไปเที่ยวชายทะเล

q แทน สมศรีไม่สบาย

ดังนั้น เหตุ 1. $p \to q$

2. q

ผล p

พิจารณาประพจน์ $((p \to q) \wedge q) \to p$ มีกรณีที่เป็นเท็จคือ มี p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

ดังนั้น ข. ไม่สมเหตุสมผล

4. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

และ $A = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2+y^2 \leqslant 16\}$

$B = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 \leqslant 4y\}$

$C = \{(x,y) \in R \times R \mid -4 \leqslant x \leqslant 4,\ y = 4\}$

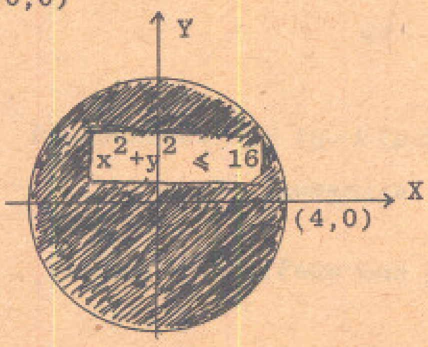
ข้อใดต่อไปนี้<u>ผิด</u>

1. $A \cap (B \cap C) = \{(0,4)\}$ 2. $A-B \neq \phi$

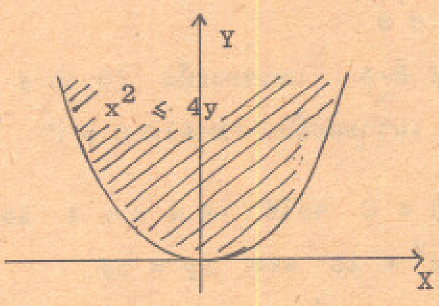
3. $(B-A) \cap C = C$ 4. $C-B = \phi$

ตอบ 3.

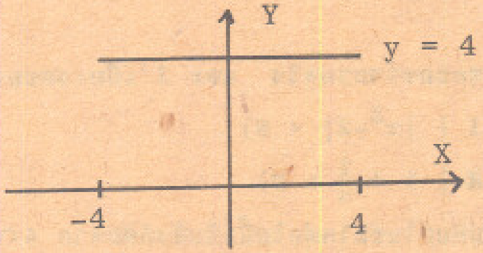
แนวคิด กราฟแสดงจุด (x,y) ในเซต A คือจุดภายในวงกลมรัศมี 4 จุดศูนย์กลางที่ (0,0)



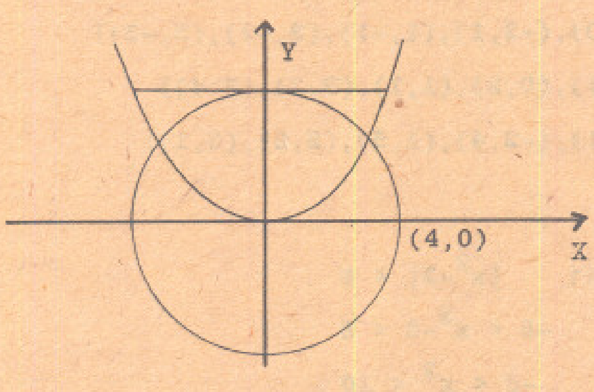
กราฟแสดงจุด (x,y) ในเซต B



กราฟแสดงบริเวณของเซต C คือเซตของจุดบนเส้นตรง y = 4 และ $-4 \leqslant x \leqslant 4$



เมื่อนำกราฟของ A, B และ C มาเขียนพร้อมกันจะได้



เพราะฉะนั้น $A \cap (B \cap C) = A \cap C = \{(0,4)\}$

เพราะว่า $(0,-4) \in A$ และ $(0,-4) \notin B$

เพราะฉะนั้น $A-B \neq \phi$

เพราะว่า $(0,4) \notin B-A$ เพราะฉะนั้น $(0,4) \notin (B-A)\cap C$

แต่ $(0,4) \in C$ เพราะฉะนั้น $(B-A)\cap C \neq C$

วิธีลัด เมื่อ $(x,y) \in C$ จะได้ $-4 \leqslant x \leqslant 4$ และ $y = 4$

$0 \leqslant x^2 \leqslant 16$ และ $4y = 16$

เพราะฉะนั้น $x^2 \leqslant 4y$ นั่นคือ $(x,y) \in B$

เพราะฉะนั้น $C \subset B$

ดังนั้น $C-B = \phi$ เราจึงสามารถตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

5. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $A = \{x \in I \mid |x^2-2| < 8\}$

และ $B = \{x \in R \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

แล้วเซตของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A\cap B$ ไป B

1. $\{(-3,1),(-2,2),(-1,3),(1,4),(2,5)\}$
2. $\{(-3,0),(-2,1),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$
3. $\{(-3,1),(0,2),(1,1),(2,3),(3,4)\}$
4. $\{(-3,1),(-2,4),(1,5),(2,2),(3,1)\}$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $|x^2-2| < 8$

$$-8 < x^2-2 < 8$$

$$-6 < x^2 < 10$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in I \mid |x^2-2| < 8\}$

$= \{0,1,-1,2,-2,3,-3\}$

เพราะว่า $1 + \frac{1}{x} > 0$

$\frac{x+1}{x} > 0$

$x < -1$ หรือ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $B = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

ดังนั้น $A \cap B = \{1,2,-2,3,-3\}$

เพราะฉะนั้น $\{(-3,1),(-2,4),(1,5),(2,2),(3,1)\}$

เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า $A \cap B = \{1,2,-2,3,-3\}$

และโดเมนแต่ละตัวเลือกคือ

$D_1 = \{-3,-2,-1,1,2\} \neq A \cap B$, $D_2 = \{-3,-2,1,2,3\} = A \cap B$

$D_3 = \{-3,0,1,2,3\} \neq A \cap B$, $D_4 = \{-3,-2,1,2,3\} = A \cap B$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ผิดแน่นอน

เพราะว่า $0 \notin B$ ดังนั้น $(-3,0) \notin A \cap B \times B$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

จากการที่เราทราบว่า $B = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

โดยการพิจารณาเรนจ์ของแต่ละตัวเลือก

$R_1 = \{1,2,3,4,5\} \subset B$ $R_2 = \{0,1,-1,-2,-3\} \not\subset B$

$R_3 = \{1,2,3,4\} \subset B$ $R_4 = \{1,4,5,2\} \subset B$

ดังนั้นตัวเลือก 2. ผิด

6. ให้ $r_1 = \{(x,y) \mid x^2+y-2 \leq 0\}$

$r_2 = \{(x,y) \mid \ln|y-x^2| \geq 0\}$

เรนจ์ของ $(r_1 \cap r_2)$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

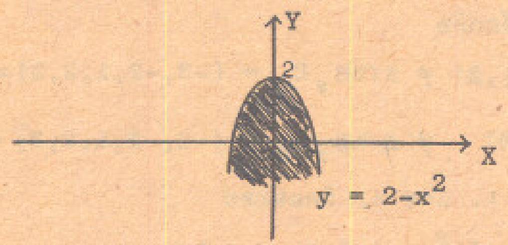
1. $[1,2]$
2. $(-\infty,0]$
3. $(-\infty,-1] \cup [\frac{1}{2},1]$
4. $(-\infty,\frac{1}{2}] \cup [1,2]$

ตอบ 4.

แนวคิด $r_1 = \{(x,y) \mid x^2+y-2 \leq 0\}$

$= \{(x,y) \mid y \leq 2-x^2\}$

มีกราฟเป็น



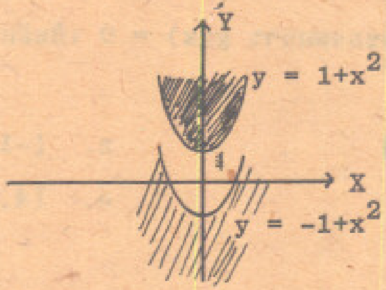
$r_2 = \{(x,y) \mid \ln|y-x^2| \geq 0\}$

$= \{(x,y) \mid |y-x^2| \geq 1\}$

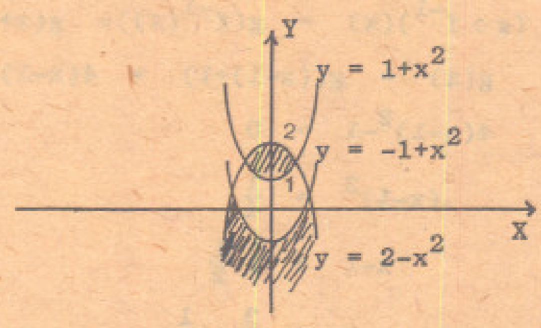
$= \{(x,y) \mid y-x^2 \leq -1$ หรือ $y-x^2 \geq 1\}$

$= \{(x,y) \mid y \leq -1+x^2$ หรือ $y \geq 1+x^2\}$

มีกราฟเป็น



เพราะฉะนั้น $r_1 \cap r_2$ มีกราฟเป็นส่วนที่แรเงา



เมื่อ $y = 2-x^2$ และ $y = -1+x^2$ จะได้

$$2-x^2 = -1+x^2$$

$$x^2 = \frac{3}{2}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ $(r_1 \cap r_2)$ คือ $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1,2]$

7. ถ้า $f(x) = x-1$ และ $(g \circ f^{-1})(x) = 4x^2-1$

แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) = 0$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

๑. $[-4,-1]$ ๒. $[-1,0]$

๓. $[0,4]$ 4. $[4,6]$

ตอบ ๓.

แนวคิด $f(x) = x-1$

$f^{-1}(x) = x+1$

จะได้ $(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x+1) = 4x^2-1$

ดังนั้น $g(x) = g((x-1)+1) = 4(x-1)^2-1$

เพราะว่า $4(x-1)^2-1 = 0$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x-1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid g(x) = 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\} \subset [0,4]$

วิธีลัด ขณะที่เรารู้ว่า $g(x+1) = 4x^2-1$

เมื่อพิจารณา $4x^2-1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm\frac{1}{2}$

ดังนั้น $g(\frac{3}{2}) = g(\frac{1}{2}+1) = 0$

$g(\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}+1) = 0$

สรุป $\{x \mid g(x) = 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

8. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x < y$ ห.ร.ม.ของ x,y เท่ากับ 9 ค.ร.น.ของ x,y เท่ากับ 28215 และจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวน

ค่าของ y-x เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36 2. 45
3. 9 4. 18

ตอบ 4.

แนวคิด ห.ร.ม.$(x,y) = 9$

ค.ร.น.$(x,y) = 28215 = 3^3\cdot5\cdot11\cdot19$

เพราะฉะนั้น $xy = $ [ห.ร.ม.(x,y)]×[ค.ร.น.(x,y)]

$= (9)(28215) = 253935$

เพราะว่า $253935 = 3\cdot3\cdot5\cdot3\cdot3\cdot3\cdot11\cdot19 = 3^5\cdot5\cdot11\cdot19$

และมีจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวน

เพราะฉะนั้น $x = 3^2\cdot5\cdot11 = 495$

และ $y = 3^3\cdot19 = 513$

ดังนั้น $y-x = 18$

วิธีลัด จากการที่เราทราบว่า $xy = 253935$

เราสามารถนำตัวเลขในตัวเลือกมาพิจารณาเพื่อตัดตัวเลือกได้เช่น

$y-x = 18$ จะได้

$$\frac{253935}{x} - x = 18$$

$$x^2+18x-253935 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324+4(253935)}}{2}$$

$$= \frac{-18 \pm \sqrt{1016064}}{2}$$

$$= \frac{-18 \pm 1008}{2}$$

$$= -513,\ 495$$

เพราะว่า x เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $x = 495$ และ $y = 495+18 = 513$

ส่วนตัวเลือกอื่นเช่น 36

$$\frac{253935}{x} - x = 36$$

$$x^2+36x-253935 = 0$$

$$x = \frac{-36 \pm \sqrt{1296+4(253935)}}{2}$$

$$= \frac{-36 \pm \sqrt{1017036}}{2}$$

$$= \frac{-36 \pm 1008.482}{2}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ในทำนองเดียวกัน $y-x = 9$ และ $y-x = 45$ ไม่ได้

9. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m,n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x+3$ หาร x^3+mx^2+nx+p ลงตัว และ $x-1$ หาร x^3+mx^2+nx+p เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $m = 4,\ n = -4$
   2. $m = 2,\ n = -2$
   3. $m = -4\ \ n = 4$
   4. $m = -2,\ n = 2$

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $f(x) = x^3+mx^2+nx+p$

ถ้า $x+3$ หาร $f(x)$ ลงตัว

จะได้ว่า $f(-3) = 0$ และ 3 หาร p ลงตัว

เพราะว่า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก เพราะฉะนั้น p = 3 และจะได้

$$-27+9m-3n+3 = 0$$

$$9m-3n = 24 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เพราะว่า x-1 หาร f(x) เหลือเศษ 4

เพราะฉะนั้น f(1) = 4 ดังนั้น

$$1+m+n+3 = 4$$

$$m+n = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

เพราะฉะนั้น m = 2 และ n = -2

วิธีลัด 1 จากสมการ (1) เมื่อทราบว่า 9m-3n = 24 แล้วเราเอาค่า m,n จากตัวเลือกมาแทนก็จะได้ว่า ตัวเลือก 1. 3. และ 4 ผิด

วิธีลัด 2 นอกจากนี้เมื่อเราทราบว่า p = 3 และ f(-3) = 0 และ f(1) = 4

พิจารณาตัวเลือก 1. m = 4, n = -4 จะได้

$$f(x) = x^3+4x^2-4x+3 \quad \text{และ} \quad f(-3) \neq 0$$

พิจารณาตัวเลือก 3. m = -4, n = 4 จะได้

$$f(x) = x^3-4x^2+4x+3 \quad \text{และ} \quad f(-3) \neq 0$$

พิจารณาตัวเลือก 4. m = -2, n = 2 จะได้

$$f(x) = x^3-2x^2+2x+3 \quad \text{และ} \quad f(-1) \neq 0$$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. 3. และ 4. ทิ้งได้เหมือนกัน

10. ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต

$\{-\frac{(1+2+...+n)}{n^2} \mid n$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ ใน R

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$

3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0

ตอบ 2.

แนวคิด $\frac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} = \frac{-n(n+1)}{2n^2}$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant -\frac{1}{2}$ ทุกค่า $n \in I^+$

ให้ k เป็นค่าขอบเขตบน ดังนั้นทุกค่า $n \in I^+$

$$\frac{-(1+2+...+n)}{n^2} \leqslant k$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant k$$

และ $\lim\limits_{n \to \infty} (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}) \leqslant k$

นั่นคือ $-\frac{1}{2} \leqslant k$ เพราะฉะนั้น ค่าขอบเขตบนน้อยสุดคือ $-\frac{1}{2}$

วิธีลัด ให้ $S = \{\frac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} \mid n \in I^+\}$

โดยการแทนค่า $n = 1,2,3,...$ จะได้

$S = \{-1, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{8}, ...\}$ ดังนั้น -1 ไม่เป็นขอบเขตบน

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

11. ให้ α β และ γ เป็นรากทั้งสามของสมการ

$$\sqrt{2}\,z^3 = 1+i$$

ถ้า α และ β เป็นรากที่อยู่ในควอแดรนท์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ แล้ว $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. $(1+3\sqrt{3})+i$
3. $4+\sqrt{3}\,i$
4. $1+3\sqrt{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด $\sqrt{2}\,z^3 = 1 + i$

$$z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\ ,\ k=0,1,2$$

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\ ,\ k=0,1,2$$

$k = 0$; $\alpha = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

$k = 1$; $\beta = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}$

$k = 2$; $\gamma = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$

เพราะฉะนั้น $4\alpha^4 = 4\left(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12}\right)$

$$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= 2+2\sqrt{3}\,i$$

$$\beta^4 = \cos\frac{36\pi}{12} + i\sin\frac{36\pi}{12}$$

[illegible]

$$= \cos 3\pi + i\sin 3\pi$$

$$= -1$$

$$2\gamma^4 = 2(\cos\frac{68\pi}{12} + i\sin\frac{68\pi}{12})$$

$$= 2(\cos(6\pi-\frac{4\pi}{12}) + i\sin(6\pi-\frac{4\pi}{12})$$

$$= 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= 1-\sqrt{3}\,i$$

สรุป $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4 = (2+2\sqrt{3}\,i) + 1 + 1-\sqrt{3}\,i$

$$= 4+\sqrt{3}\,i$$

12. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่ทำมุม 45° กับแกน X และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2-4x+3y^2-2 = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$
2. $4\sqrt{2}$
3. 2
4. 4

ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูป $x^2-4x+3y^2-2 = 0$

$$(x-2)^2 + 3y^2 = 6$$

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (2,0) และแกนเอกขนานกับแกน X

จะได้ $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$ ดังนั้น $c = \sqrt{6-2} = 2$

เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสอยู่ที่ (0,0) และ (4,0)

เส้นที่ทำมุม 45° กับแกน X มีความชันเท่ากับ $\tan 45° = 1$

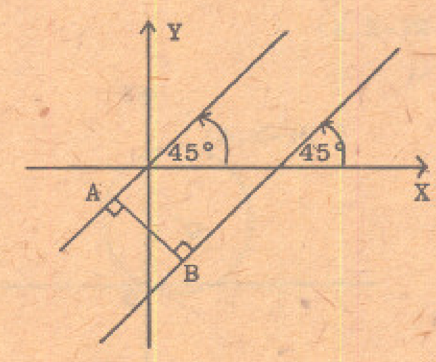
เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $y = x$ และ $y = x-4$

$x-y = 0$ และ $x-y-4 = 0$

ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ $\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

วิธีลัด เมื่อทราบจุดโฟกัสของวงรี (0,0) และ (4,0)

แล้วเขียนเส้นตรงจริงๆ และวัดระยะตั้งฉากก็จะได้คำตอบเหมือนกัน



ความยาว AB = 2.9

จากค่าในตัวเลือก $2\sqrt{2} = 2.82$, $4\sqrt{2} = 5.66$, 2 และ 4

เลือกคำตอบเป็น $2\sqrt{2}$ ดีกว่า

13. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+4x+y^2-8y+11 = 0$ แล้วสมการของเส้นตรง OP และสมการของวงกลมที่มี OP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือข้อใดต่อไปนี้

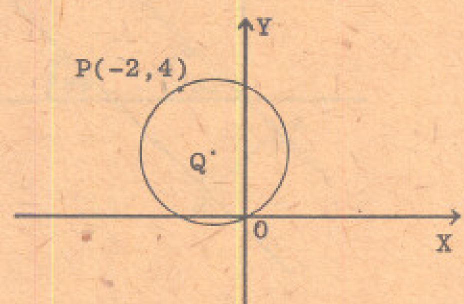
1. $y = 4x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$
2. $y = -4x$ และ $x^2+2x+y^2-2y = 0$
3. $y = 2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 10$
4. $y = -2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูป $x^2+4x+y^2-8y+11 = 0$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

ดังนั้นพิกัด P(-2,4)



จุดกึ่งกลาง OP คือ Q(-1,2)

สมการเส้นตรง OP คือ $\frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = -2$ หรือ $y = -2x$

ความยาว OQ เท่ากับ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x+1)^2+(y-2)^2 = 5$

$$x^2+2x+y^2-4y = 0$$

วิธีลัด 1 เมื่อเราได้พิกัด P(-2,4) จะรู้ทันทีว่า ความชันเส้นตรง OP ต้องเป็นลบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3 ทิ้ง ต่อไปเอาจุด (-2,4) แทนค่าในสมการวงกลม เราก็จะตัดตัวเลือก 2. ทิ้งไปได้

วิธีลัด 2 เพราะว่าความชัน OP เท่ากับ -2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้เลย

14. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$ และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E มีจุดยอดกับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้คือสมการของไฮเพอร์โบลา

    1. $x^2-5y^2-2x-20y+14 = 0$
    2. $x^2-5y^2+2x+20y-14 = 0$
    3. $x^2-5y^2+2x+20y-18 = 0$
    4. $5x^2-y^2-2x+20y+18 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$

$$6(x^2+2x+1) + 5(y^2-4y+4) = 4+6+20$$

$$6(x+1)^2 + 5(y-2)^2 = 30$$

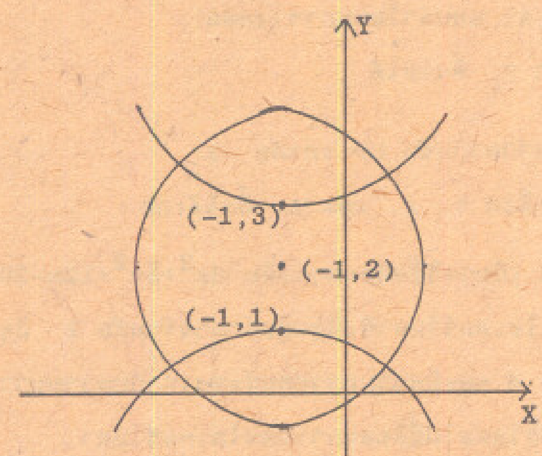
$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

วงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (-1,2) แกนเอกขนานแกน Y

$a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$ ดังนั้น $c = 1$

เพราะฉะนั้นจุดยอดของวงรีคือ $(-1,2+\sqrt{6})$ และ $(-1,2-\sqrt{6})$

จุดโฟกัสของวงรีคือ (-1,3) และ (-1,1)



เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลา H จะมีจุดศูนย์กลางที่ (-1,2)

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y มีจุดยอดที่ (-1,3) และ (-1,1)

มีค่า $b = \sqrt{5}$ และ $a = 1$

ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

$$5(y^2-4y+4) - (x^2+2x+1) = 5$$

$$5y^2-20y+20-x^2-2x-1 = 5$$

$$x^2-5y^2+2x+20y-14 = 0$$

วิธีลัด จากการที่โจทย์บอกว่า (-1,3),(-1,1) เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา ทำให้เราสามารถใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

(1) แทนค่า $x = -1 , y = 1$

$1-5+2-20+14 \neq 0$

(3) แทนค่า $x = -1 , y = 3$

$1-45-2+60-18 \neq 0$

(4) แทนค่า $x = -1 , y = 1$

$5-1-2+20+8 \neq 0$

เพราะฉะนั้น 1. 3. และ 4 ผิดตัดทิ้งได้

15. ถ้า $A = \{(x,y) \mid 0 < x \leqslant \pi, 0 < y \leqslant \pi, \cos(x+y) \geqslant 0, \sin(x+y) \leqslant 0\}$

แล้ว A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant 2\pi - x , x \leqslant \pi\}$
2. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant \pi , x \leqslant \pi\}$
3. $\{(x,y) \mid 0 < y \leqslant 2\pi - x , x > 0\}$
4. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi , \frac{3\pi}{4} \leqslant y \leqslant \pi\}$

ตอบ 2.

แนวคิด $0 < x \leqslant \pi$ และ $0 < y \leqslant \pi$ ______________(1)

จะได้ $0 < x+y \leqslant 2\pi$ ______________(2)

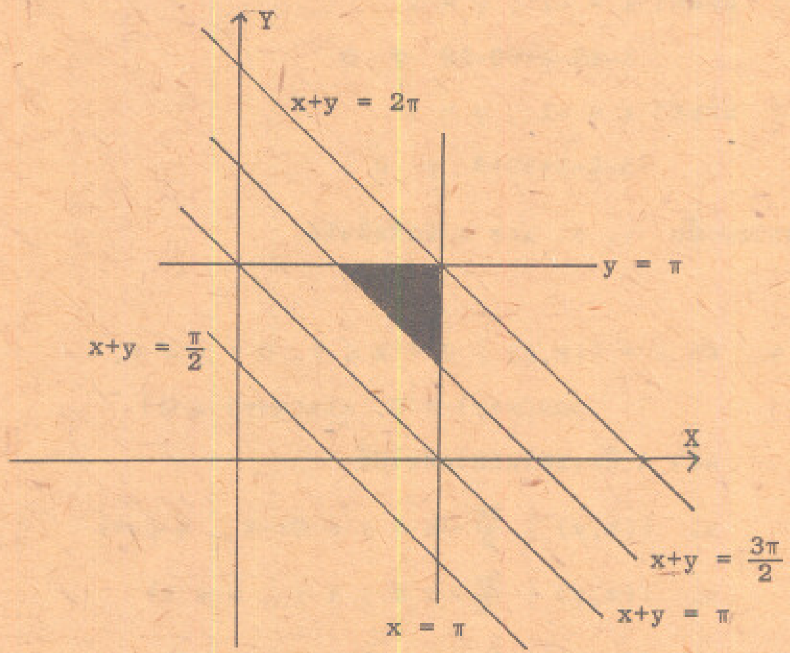
จาก $\cos(x+y) \geqslant 0$ จะได้

$0 \leqslant x+y \leqslant \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2} \leqslant x+y \leqslant 2\pi$ ______(3)

จาก $\sin(x+y) \leqslant 0$ จะได้

$\pi \leqslant x+y \leqslant 2\pi$ ______________(4)

จากอสมการ (1),(2),(3) และ (4) เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้บริเวณที่แรเงาคือ บริเวณที่สอดคล้องเงื่อนไขของเซต A



สรุป $A = \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} \leqslant x+y$ และ $y \leqslant \pi$ และ $x \leqslant \pi\}$

$= \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant \pi$ และ $x \leqslant \pi\}$

วิธีลัด ตัวเลือก ง. ตัดทิ้งได้เลย เพราะว่ามีเงื่อนไข $x > 0$ แสดงว่า $x = \frac{3\pi}{2}$ ได้ ดังนั้น

$A \neq \{(x,y) \mid 0 < y \leqslant 2\pi - x,\ x > 0\}$

ต่อไปเลือกมุมที่แทนค่าได้ง่ายเช่น $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\cos(x+y) = \cos\pi = -1 \leqslant 0$

และ $\sin(x+y) = \sin\pi = 0 \leqslant 0$

แต่ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือกข้อ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ต่อไปพิจารณา $x = \frac{\pi}{2}$ และ $y = \frac{3\pi}{2}$ กับตัวเลือก 1.

เพราะว่า $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \in \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant 2\pi - x,\ x \leqslant \pi\}$

และ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \notin A$

เพราะฉะนั้น $A \neq \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant 2\pi - x,\ x \leqslant \pi\}$

เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

16. กำหนดให้ $\sin 3\theta + \sin\theta = 1-4\sin^3\theta$

แล้ว $\sec 2\theta + \cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{8}$
2. $\frac{9}{8}$
3. $\frac{25}{28}$
4. $\frac{39}{28}$

ตอบ 4.

แนวคิด

$$\sin 3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$$

$$\sin\theta - 4\sin^3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) = \sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

$$= \frac{1}{1-2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{2}{16}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

เพราะฉะนั้น $\sec 2\theta + \cos(\frac{3\pi}{2}+\theta) = \frac{8}{7}+\frac{1}{4} = \frac{39}{28}$

17. กำหนดให้ $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$

ถ้า $\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x & \sin(x+y)\\ \sin x & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{bmatrix}$

แล้ว $\tan(2x+y)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-1/\sqrt{3}$
2. $-\sqrt{3}$
3. $1/\sqrt{3}$
4. $\sqrt{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด $\begin{bmatrix}\sin x & \cos x\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos x & \sin(x+y)\\ \sin x & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}\sin x\cos x + \cos x\sin x & \sin x\sin(x+y)\\ \cos x & \sin(x+y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sqrt{3}/2 & 1/2\\ \sqrt{3}/2 & 1\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

เพราะว่า $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ ดังนั้น $0 \leq x+y \leq 2\pi$

ดังนั้น $\sin(x+y) = 1 \longrightarrow x+y = \frac{\pi}{2} \longrightarrow y = \frac{\pi}{2}$

สรุป $\tan(2x+y) = \tan(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

18. ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2\arcsin x$

แล้วค่าของ $(f \circ g)(\frac{1}{3})$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{2}{9}(1+\sqrt{8})$
3. $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$
4. $\frac{2}{27}(7+2\sqrt{10})$

ตอบ 4.

แนวคิด $g(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + 2\arcsin(\frac{1}{3})$

เพราะว่า $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

เพราะฉะนั้น $2\arcsin(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}})$

$= \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$

$g(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$

$(f \circ g)(\frac{1}{3}) = f(g(\frac{1}{3}))$

$= \sin(\arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))$

$= \sin(\arcsin(\frac{2}{3}))\cos(\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))$

$+ \sin(\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))\cos(\arcsin(\frac{2}{3}))$

$$= \frac{2}{3}\cos(\arccos\sqrt{1-\frac{32}{81}}) + \frac{4\sqrt{2}}{9}\cos(\arccos\sqrt{1-\frac{4}{9}})$$

$$= (\frac{2}{3})(\frac{7}{9}) + (\frac{4\sqrt{2}}{9})(\frac{\sqrt{5}}{3})$$

$$= \frac{14 + 4\sqrt{10}}{27}$$

$$= \frac{2}{27}(7+2\sqrt{10})$$

19. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ

$$(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$$

และ $3^{y-1} = 2^{2y-3}$

แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < y < x$ 2. $0 < x < y$

3. $y < 0 < x$ 4. $0 < x = y$

ตอบ 2.

แนวคิด $(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$

$$\frac{2\log 0.5}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 0.5} = \log_3 4$$

$$\log_3 x^2 = \log_3 4$$

$$x^2 = 4$$

เพราะว่า $x = -2$ ไม่ได้ ดังนั้น $x = 2$

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$

$$(y-1)(0.477) = (2y-3)(0.301)$$
$$0.477y - 0.477 = 0.602y - 0.903$$
$$0.125y = 0.426$$
$$y = 3.408$$

เพราะฉะนั้น $0 < x < y$

วิธีลัด เมื่อเรารู้ว่า $x = 2$ และ $3^{2-1} = 3 \neq 2 = 2^{4-3}$

ดังนั้น $y \neq 2$ แน่จึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ในกรณีที่เราจำค่า log 2 และ log 3 ไม่ได้ อาจพิจารณาค่า y ดังนี้

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$
$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$
$$y\log 3 - \log 3 = 2y\log 2 - 3\log 2$$
$$= y\log 4 - \log 8$$
$$y(\log 3 - \log 4) = \log 3 - \log 8$$
$$y\log(\tfrac{3}{4}) = \log(\tfrac{3}{8})$$

เพราะว่า $\log\frac{3}{4} < 0$ และ $\log\frac{3}{8} < 0$

เพราะฉะนั้น $y > 0$ ดังนั้นตัวเลือก 3. ผิด

เหลืออีก 2 ตัวเลือกต้องเดา

20. ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$\left[\log_{3}x - \log_{3^2}x + \log_{3^4}x - \log_{3^8}x + \ldots\right] < 1$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < x < \sqrt{3}$
2. $x > \sqrt{3}$
3. $0 < x < 3\sqrt{3}$
4. $x > 3\sqrt{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด จาก $\log_{3}x - \log_{3^2}x + \log_{3^4}x - \log_{3^8}x + \ldots$

$$= \frac{\log x}{\log 3} - \frac{\log x}{2\log 3} + \frac{\log x}{4\log 3} - \frac{\log x}{8\log 3} + \ldots$$

$$= \frac{\log x}{\log 3}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\log x}{\log 3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\log_{3}x$$

พิจารณาอสมการ $\frac{2}{3}\log_{3}x < 1 = \log_{3}3$

$$\log_{3}x < \frac{3}{2}\log_{3}3$$

$$\log_{3}x < \log_{3}3^{(3/2)}$$

$$x < 3^{(3/2)} = 3\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{3}\log_{3}x < 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < x < 3\sqrt{3}$

วิธีลัด โดยการแทนค่าแบบง่ายๆ ด้วย $x = 1$ จะได้

$$\log_3 1 - \log_{3^2} 1 + \ldots = 0$$

ดังนั้น $x = 1$ ได้

เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $x = 3$ จะได้

$$\log_3 3 - \log_{3^2} 3 + \log_{3^4} 3 - \log_{3^8} 3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ได้เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

21. กำหนดให้ $y = \sqrt{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}$ เมื่อ $x \geqslant 0$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2 \frac{(y + \sqrt{y^2-4})}{2}$
2. $\log_2 \frac{(y + \sqrt{y^2+4})}{2}$
3. $\log \frac{(y + \sqrt{y^2-4})}{2}$
4. $\log \frac{(y + \sqrt{y^2+4})}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด

$$2^{2x} + 2^{-2x} + 2 = \frac{(2^{2x})^2 + 1 + 2(2^{2x})}{2^{2x}}$$

$$= \frac{(2^{2x}+1)^2}{2^{2x}} = \left[\frac{2^{2x}+1}{2^2}\right]^2$$

เพราะฉะนั้น $\quad y = \dfrac{2^{2x}+1}{2^x}$

$$2^x y = 2^{2x}+1$$

$$(2^x)^2 - y\,2^x + 1 = 0$$

$$2^x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$$

$$x = \log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\right)$$

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้มีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่าที่ง่ายและเหมาะสมเราก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้เช่น $x = 0$ จะได้ $y = \sqrt{1+1+2} = 2$ เอา $y = 2$ แทนค่าตัวเลือก

(1) $\log_2 \left(\frac{2+0}{2}\right) = \log_2 1 = 0$ ใช้ได้

(2) $\log_2 \left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) \neq 0$ ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งเลย

(3) $\log \left(\frac{2+0}{2}\right) = \log 1 = 0$ ยังตัดทิ้งไม่ได้

(4) $\log \left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) \neq 0$ ตัดทิ้งได้เลย

ตัวเลือกหายไป 2 ตัวแล้วจะเดา 1. หรือ 3. ก็ได้ ลองแทนค่าต่อเช่น $x = 1$

จะได้ $\quad y = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{16+1+8}{4}} = \frac{5}{2}$

แทนค่าในตัวเลือก 1. และ 3.

$$(1)\quad \log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-4}}{2}\right) = \log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right)$$

$$= \log_2 2 = 1$$

$$(3)\quad \log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+4}}{2}\right) \neq 1$$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

22. เซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\ldots+\frac{1}{\log_9 x}+\frac{1}{\log_{10} x} \leqslant 1$$

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,1)$
2. $[10!,\infty)$
3. $(0,1)\cup[10!,\infty)$
4. $(0,1)\cup(1,\infty)$

ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\ldots+\frac{1}{\log_9 x}+\frac{1}{\log_{10} x}$

$$= \log_x 2+\log_x 3+\ldots+\log_x 9+\log_x 10$$

$$= \log_x 10!$$

เพราะว่า $\log_x 10! \leqslant 1$

$$\frac{\log 10!}{\log x} \leqslant 1$$

เมื่อ $0 < x < 1$ จะได้ $\log x < 0$ ดังนั้น $\frac{\log 10!}{\log x} \leqslant 1$

เมื่อ $x > 1$ จะได้ $\log x > 0$

$$\log 10! \leqslant \log x$$

$$10! \leqslant x$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(0,1) \cup [10!,\infty)$

วิธีลัด 1 เมื่อเราทราบว่า

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x} = \log_x 10! \leqslant 1$$

จะพบว่า $x = 10!$ ได้ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

และ $x = 0.1$ ได้เพราะว่า $\frac{\log 10!}{\log 0.1} = -\log 10! \leqslant 1$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

วิธีลัด 2 โดยการเลือกค่า x ที่เหมาะสมคือ คิดเลขง่าย และจำแนกตัวเลือกได้เช่น $x = 10$ จะได้

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \text{และ} \quad \log_n 10 > 0 \quad , n = 2,3,\ldots,9$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_3 10} + \ldots + \frac{1}{\log_{10} 10} > 1$

นั่นคือเซตคำตอบต้องไม่มี 10 เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

23. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$

ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง แล้วจะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$
2. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = -1$
3. $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$
4. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$

$= \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = x-2$ เมื่อ $x \neq \pm 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x-2 = -1$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x-2 = -3$$

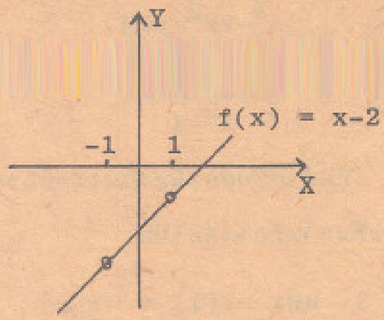
เพื่อให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$

ต้องกำหนดให้ $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = -1$

และ $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = -3$

วิธีลัด จากกราฟของ $f(x) = x-2$ เมื่อ $x \neq \pm 1$

มีกราฟเป็น



เพื่อให้ $f(x)$ ต่อเนื่องต้องกำหนด $f(1) = -1$ และ $f(-1) = -3$

24. ให้ $f(x) = 3x-10$

และ $h(x) = (f \circ g)(x) = ax^2+bx+c$

ถ้า $h(0) = 1$ และ h มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ คือ 5

แล้วค่าของ $g(1)$ คือข้อใด

1. 2 2. 3

3. 5 4. 6

ตอบ 1.

แนวคิด $1 = h(0) = (f \circ g)(0) = c$

เพราะฉะนั้น $h(x) = ax^2+bx+1$

เพราะว่า $h(-2) = 5$ เพราะฉะนั้น

$$4a-2b+1 = 5$$

$$2a-b = 2 \qquad \underline{\hspace{4cm}}(1)$$

เพราะว่า $h'(x) = 2ax+b$ และ $h'(-2) = 0$

เพราะฉะนั้น $-4a+b = 0 \qquad \underline{\hspace{4cm}}(2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = -1$ และ $b = -4$

เพราะฉะนั้น $h(x) = (f \circ g)(x) = -x^2-4x+1$

$(f \circ g)(1) = -1-4+1 = -4$

เพราะว่า $f(x) = 3x-10$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x+10}{3}$

สรุป $g(1) = f^{-1}((f \circ g)(1))$

$= f^{-1}(-4)$

$= \frac{-4+10}{3}$

$= 2$

25. ให้ $f(x) = 2-|x^3-3|$, $g(x) = x^3$ และ

$F(x) = f(g^{-1}(x))$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^+} F(x)$

ข. $\lim_{x \to 3^-} \frac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{F(x)-F(3)}{x-3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ทั้ง ก. และ ข.ถูก
2. ก.ถูก ข.ผิด
3. ก.ผิด ข.ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข.ผิด

ตอบ 2.

แนวคิด $g(x) = x^3$ จะได้ $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$F(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x^{\frac{1}{3}})$

$= 2-|x-3|$

$$\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} 2-|x-3| = 2$$

$$\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^-} 2-|x-3| = 2$$

เพราะฉะนั้นข้อความ ก. ถูกต้อง

เพราะว่า $\dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \dfrac{(2-|x-3|) - 2}{x-3} = \dfrac{-|x-3|}{x-3}$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} \frac{x-3}{x-3} = 1$

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิด

26. ให้ f มีกราฟเป็นรูปพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (0,1) และเส้นตรง $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3}$ 2. $\frac{8}{3}$

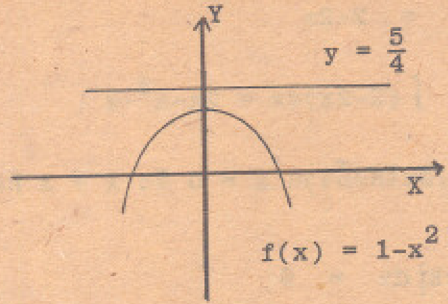
3. 2 4. 4

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า (0,1) เป็นจุดยอด

และ $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์

ดังนั้น $c = \frac{-1}{4}$ และโฟกัส $(0, \frac{3}{4})$



สมการพาราโบลาคือ $x^2 = 4(-\frac{1}{4})(y-1) = 1-y$

หรือ $f(x) = y = 1-x^2$ และ $f(x) \geqslant 0$ บนช่วง $[-1,1]$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $= \int_{-1}^{1} f(x)dx$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx$$

$$= (x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= (1 - \frac{1}{3})-(-1 + \frac{1}{3}) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

27. ถ้าความชันของเส้นโค้งที่จุด (x,y) ใดๆ เป็น $2-2x$ และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ จากจุด $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับ 9 แล้วเส้นโค้งผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. (3,0) 2. (1,0)
3. (0,-3) 4. (0,-1)

ตอบ 1. และ 3.

แนวคิด ความชัน $\frac{dy}{dx} = 2-2x$

ดังนั้น $f(x) = y = \int (2-2x)dx = 2x-x^2+k$

เพราะว่าพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ คือ

$$\int_0^3 |2x-x^2+k|\,dx = 9$$

$$\left|x^2-\frac{x^3}{3}+kx\right|\Big|_0^3 = 9$$

$$|9-9+3k| = 9$$

$$|3k| = 9$$

$$k = \pm 3$$

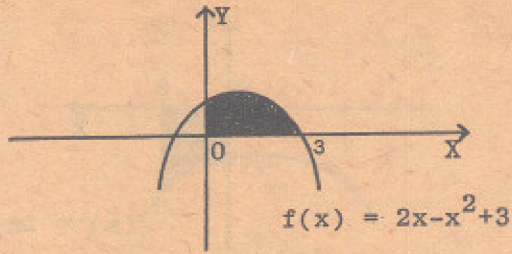
ดังนั้น $f(x) = 2x-x^2+3$ ซึ่งผ่านจุด $(3,0)$

และ $f(x) = 2x-x^2-3$ ซึ่งผ่านจุด $(0,-3)$

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้สามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก นั้นคือ $f(x) = 2x-x^2+k$ และพิจารณาค่า k จากแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $0 = f(3) = 6-9+k$ จะได้ $k = 3$

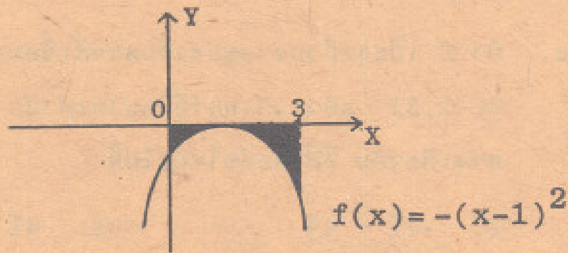
$f(x) = 2x-x^2+3 \geq 0$ บนช่วง $[0,3]$



$$\int_0^3 f(x)dx = 9$$ ซึ่งสอดคล้องกับโจทย์

ตัวเลือก 2. $0 = f(x) = 2-1+k$ จะได้ $k = -1$

$$f(x) = 2x-x^2-1$$
$$= -(x-1)^2 \leqslant 0$$ บนช่วง $[0,3]$

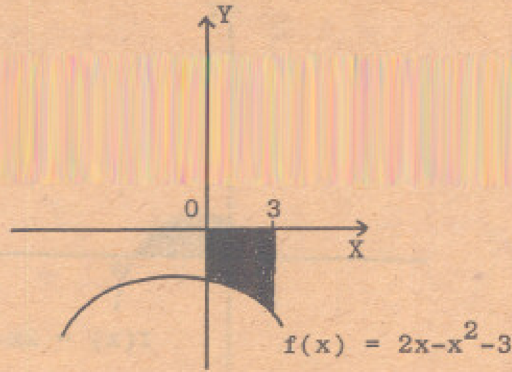


$$\left|\int_0^3 f(x)dx\right| = 3 \neq 9$$ ตามโจทย์

ดังนั้นตัวเลือก 2. ตัดทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $-3 = f(0) = 0-0+k$ จะได้ $k = -3$

$f(x) = 2x-x^2-3 \leqslant 0$ บนช่วง $[0,3]$



$\left|\int_0^3 f(x)dx\right| = 9$ ซึ่งสอดคล้องกับโจทย์เหมือนกัน

ตัวเลือก 4. $-1 = f(0) = 0+0+k$ จะได้ $k = -1$ เหมือนกับตัวเลือก 2. ดังนั้นตัดทิ้งได้

สรุป ตัวเลือก 1. และ 3. ใช้ได้

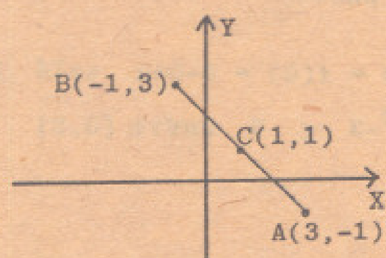
28. ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(3,-1) และ B(-1,3) แล้วเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-4\bar{i} + 4\bar{j}$ 2. $4\bar{i} - 4\bar{j}$

3. $-4\sqrt{2}\,\bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j}$ 4. $4\sqrt{2}\,\bar{i} - 4\sqrt{2}\,\bar{j}$

ตอบ 3.

แนวคิด



จุดกึ่งกลาง A และจุด B คือ $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-1}{2}\right) = (1,1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1-3)\bar{i} + (3+1)\bar{j} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-3)\bar{i} + (1+1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = (-2)(-2) + (2)(2) = 8$$

เวกเตอร์ที่ต้องการคือ $\dfrac{8\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{8}{\sqrt{16+16}}(-4\bar{i} + 4\bar{j})$

$$= \frac{32}{\sqrt{32}}(-\bar{i} + \bar{j})$$

$$= -4\sqrt{2}\,\bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j}$$

วิธีลัด 1 เมื่อรู้ว่า $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = 8$ เราคิดต่อดังนี้
ดังนั้นเวกเตอร์ที่ต้องการต้องมีขนาดเท่ากับ

แต่ $|-4\bar{i} + 4\bar{j}| = \sqrt{32} = |4\bar{i} - 4\bar{j}| \neq 8$

เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

เพราะว่าเวกเตอร์ที่ต้องการมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ต้องเป็นเลขบวกเหมือนของ $\overrightarrow{AB}$

เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีลัด 2 เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ ต้องมี

สัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ เป็นลบ และสัมประสิทธิ์ของ $\bar{j}$ เป็นบวก

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งก่อนได้

แล้วจึงตรวจสอบขนาดเวกเตอร์ทีหลัง

29. กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ

$|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$

ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$

แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\pi}{5}$

3. $\frac{4\pi}{5}$ 4. $\frac{6\pi}{5}$

ตอบ 3.

แนวคิด $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{v} + \bar{w}|^2$$

$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2$$

เพราะว่า $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ ดังนั้น $-\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$

เพราะว่า $\frac{\pi}{5}$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น
$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\ |\bar{v}|}$$
$$= \frac{-\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|\ |\bar{v}|}$$
$$-\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\ |\bar{w}|}$$
$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\ |\bar{w}|}$$

เพราะฉะนั้นมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ คือ $\frac{4\pi}{5}$

วิธีลัด มุมระหว่างเวกเตอร์ต้องอยู่ในช่วง $[0,\pi]$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้เลย

ในขั้นตอนการคิดที่ทำมาเมื่อ $-\bar{น}\cdot\bar{ข} = \bar{ข}\cdot\bar{พ}$ แสดงว่า

มุมระหว่าง $\bar{ข}$ และ $\bar{พ}$ ไม่เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก ๒.ทิ้งได้อีก

เพราะว่า $\bar{น}\cdot\bar{ข} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\bar{ข}\cdot\bar{พ} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{ข}$ และ $\bar{พ}$ ไม่ขนานกันแน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

๓๐. ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ a_{ij} เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้ว ข้อความต่อไปนี้ <u>ข้อใดผิด</u>

1. $\det (AA^t) = \det (A^2)$
2. $\det (kA)^2 = k^{2n} \det (A^2)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
3. $\det (A^2+A) = [\det (A) + 1] \det (A)$
4. $[\det (A)] I = A(\operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A) A$

ตอบ 3.

แนวคิด (1) $\det (AA^t) = \det A \cdot \det A^t$

$= \det A \cdot \det A$

$= \det (A^2)$

(2) $\det (kA)^2 = \det (kA) \cdot \det (kA)$

$= k^n \det A \cdot k^n \det A$

$= k^{2n} \det (A^2)$

(4) เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \operatorname{adj} (A)$

เพราะฉะนั้น $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det (A)} \left(A \cdot \operatorname{adj} (A)\right)$

$$(\det (A))I = A(\operatorname{adj} (A))$$

ในทำนองเดียวกัน $(\det (A))I = (\operatorname{adj} (A))A$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\det (A) = 0$,

$$(\det (A))I = A(\operatorname{adj} (A)) = (\operatorname{adj} (A))A$$

(3) ผิดเช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det (A) = 1$

แต่ $\det (A^2+A) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\right) = -6$$

และ $(\det A + 1) \det A = 2$

31. ให้ A,B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 ถ้า AB = BA = I และ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว เมตริกซ์ผูกพันของ B (adj B) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}A$ 2. $-3A$

3. $\frac{1}{3}A^t$ 4. $-3A^t$

ตอบ 1.

แนวคิด $\det(A) = 3$

เพราะว่า $AB = BA = I$ เพราะฉะนั้น $B = A^{-1}$

เพราะว่า $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \operatorname{adj}(B)$

เพราะฉะนั้น
$$\operatorname{adj}(B) = \det(B) \cdot B^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}A$$

ข้อนี้ความจริงก็ง่ายดี แต่ B และ adj (B) พิมพ์ติดกันมากไป เลยมีความหมายเป็น B (adj B) ซึ่งบางคนอาจตีความเป็นการหา B คูณกับ adj (B) ซึ่งมีแนวทางในการหาดังนี้

จาก
$$\operatorname{adj}(B) = \frac{1}{3}A$$
$$B \operatorname{adj}(B) = \frac{1}{3}BA = \frac{1}{3}I$$

เพราะฉะนั้น $B \text{ adj } (B) = \frac{1}{3} I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$$\det (B \text{ adj } (B)) = (\tfrac{1}{3})^3$$

และ $(B \text{ adj } (B))^{-1} = 3I$

เพราะว่า $[B \text{ adj } (B)]^{-1}$

$$= \frac{1}{\det(B \text{ adj } (B))} \cdot \text{adj } (B \text{ adj } (B))$$

$$3I = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3} \text{ adj } (B \text{ adj } (B))$$

$$\text{adj } (B \text{ adj } (B)) = \frac{1}{9} I$$

ถือว่าโชคดีไปที่ไม่มีตัวเลือก $\frac{1}{9} I$ ให้มา

วิธีลัด สำหรับการหา adj (B)

เพราะว่า $B^{-1} = \frac{1}{\det (B)} \cdot \text{adj } (B)$

$$\det (B) \cdot B^{-1} = \text{adj } (B)$$

$$\frac{1}{3} \cdot A = \text{adj } (B)$$

เพราะฉะนั้น $\det (\text{adj } (B)) = (\frac{1}{3})^3 \det (A) = \frac{1}{9}$

จากตัวเลือก 2. และ 4. $\det (-3A) = (-3)^3 \det A$

$$= -81 = \det (3A^t)$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

๓๒. ให้ A เป็นเมตริกซ์ และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ ๓×๓

ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

สอดคล้องกับสมการ $AB - AC - \frac{1}{2}I = 0$

แล้ว A^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

ตอบ 2.

แนวคิด

$$AB - AC - \frac{1}{2}I = 0$$

$$A(B - C) = \frac{1}{2}I$$

$$2A(B - C) = I$$

$$A(2(B - C)) = I$$

เพราะฉะนั้น $A^{-1} = 2(B - C)$

$$= 2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

33. กำหนดให้ $z = 3x_1-5x_2$ โดยที่

$$x_1-2x_2 \leqslant 4$$
$$2x_1+3x_2 \geqslant 6$$
$$x_1 \geqslant 0\ ,\ x_2 \geqslant 0$$

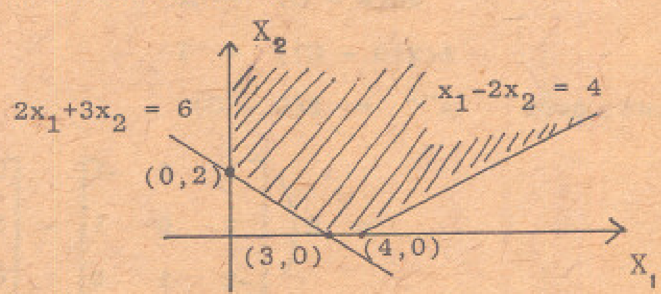
แล้วจุด (x_1,x_2) ที่ให้ค่าสูงสุดของ z คือจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ 2. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$

3. $x = 3$ 4. $y = 4$

ตอบ ไม่มีคำตอบ

แนวคิด เขียนกราฟแสดงบริเวณดังนี้



โดยการแก้สมการจะได้จุดมุมคือ (0,2),(3,0) และ (4,0)

(x_1,x_2)	$z = 3x_1-5x_2$
(0,2)	-10
(3,0)	9
(4,0)	12

เพราะว่าบนเส้นตรง $x_1-2x_2 = 4$ จะได้ $x_2 = \frac{x_1-4}{2}$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} z &= 3x_1-5x_2 \\ &= 3x_1 - 5\left(\frac{x_1-4}{2}\right) \\ &= \frac{x_1}{2} + 10 \end{aligned}$$

นั่นคือเมื่อ x_1 มากขึ้นตามเส้นตรง $x_1-2x_2 = 4$
จะได้ว่า z มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ
เพราะฉะนั้น z ไม่มีค่าสูงสุด

หมายเหตุ 1. โจทย์ข้อนี้สับสนเพราะว่าโจทย์กล่าวในพจน์ x_1 และ x_2 แต่ตัวเลือกกล่าวในพจน์ของ x และ y

2. ถึงแม้ $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$

$$x-2y = 4$$

สอดคล้องตามสมการ $x_1-2x_2 = 4$ แต่ก็ถือว่า z ไม่มีค่าสูงสุด

๓๔. โรงงานแกะสลักไม้แห่งหนึ่งมีคนงาน ๑๕ คน เป็นหญิง ๖ คน ชาย 9 คน ผู้จัดการรับงานมา ๓ ชนิด โดยงานชนิดที่หนึ่งใช้คนงานหญิง ๓ คน งานชนิดที่สองใช้คนงานชาย ๕ คน ส่วนงานชนิดที่สามใช้คนงานชายหรือหญิงก็ได้จำนวน ๓ คน จำนวนวิธีที่ผู้จัดการจะเลือกคนงานให้แกะสลักไม้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

๑. 37,800 ๒. 68,250

๓. 75,600 4. 88,200

ตอบ 4.

แนวคิด **ขั้นตอนที่ ๑** เลือกหญิง ๓ คนเพื่อทำงานชนิดที่ ๑ มี

$$\binom{6}{3} \text{ วิธี}$$

ขั้นตอนที่ ๒ เลือกชาย ๕ คนเพื่อทำงานชนิดที่ ๒ มี $\binom{9}{5}$ วิธี

ขั้นตอนที่ ๓ เลือกคน ๓ คน ชายหรือหญิงก็ได้จาก 7 คนที่เหลือ

ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี

$$\text{จำนวนวิธีทั้งหมด} = \binom{6}{3}\binom{9}{5}\binom{7}{3}$$

$$= (20)(126)(35)$$

$$= 88200$$

๑5. สัมประสิทธิ์ของ x^{54} ในอนุกรม

$$1+(1+x^2)+(1+x^2)^2+\ldots+(1+x^2)^{50}$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\binom{50}{27}$ 2. $\binom{50}{28}$

3. $\binom{51}{27}$ 4. $\binom{51}{28}$

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาเป็นลำดับเรขาคณิต $a = 1$ และ $r = 1+x^2$

$$1+(1+x^2)+(1+x^2)^2+\ldots+(1+x^2)^{50}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{(1)(1-(1+x^2)^{51})}{1-(1+x^2)}$$

$$= \frac{1-(1+x^2)^{51}}{-x^2}$$

เพราะว่าพจน์ที่มี x^{56} ของ $(1+x^2)^{51}$ คือ

$$\binom{51}{28}(x^2)^{28} = \binom{51}{28}x^{56}$$

เพราะฉะนั้นพจน์ที่มี x^{54} ของ $\frac{1-(1+x^2)^{51}}{-x^2}$ คือ $\binom{51}{28}x^{54}$

36. มีเลข 8 จำนวน เป็นเลขบวก 6 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ [illegible] 3 จำนวน จำนวนคี่ 3 จำนวน และมีเลขลบ 2 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 1 จำนวน จำนวนคี่ 1 จำนวน ถ้าสุ่มเลขจำนวนดังกล่าวมา 4 จำนวน แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขทั้งสี่จำนวนมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{70}$ 2. $\frac{10}{70}$

3. $\frac{14}{70}$ 4. $\frac{28}{70}$

ตอบ 1.

แนวคิด จำนวนวิธีทั้งหมดในการหยิบเลข 4 ตัวจาก 8 ตัว คือ

$$\binom{8}{4} = 70$$

การที่เลข 4 ตัวจะคูณกันแล้วมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่คือ ต้องเป็นเลขคี่ทั้ง 4 ตัวที่มีเท่านั้น ซึ่งทำได้แค่วิธีเดียว

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการเท่ากับ $\frac{1}{70}$

37. จากข้อมูลที่กำหนดให้

ชุด A 5 10 15 20 25

ชุด B 15 30 45 60 50

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ข้อมูลชุด B มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมากกว่าข้อมูลชุด A

ข. ข้อมูลชุด B มีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันน้อยกว่าข้อมูลชุด A

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก.ถูก และ ข.ถูก
2. ก.ถูก และ ข.ผิด
3. ก.ผิด และ ข.ถูก
4. ก.ผิด และ ข.ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด จากข้อมูลชุด A $\bar{x}_A = \frac{\Sigma x_A}{5} = \frac{75}{5} = 15$

$$\Sigma (x - \bar{x}_A)^2 = \Sigma (x - 15)^2 = (-10)^2+(-5)^2+0+5^2+10^2 = 250$$

เพราะฉะนั้น $s_A = \sqrt{\frac{250}{5}} = \sqrt{50} = 7.07$

และสัมประสิทธิ์การแปรผันของชุด A $= \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{7.07}{15} = 0.47$

จากข้อมูลชุด B $\bar{x}_B = \frac{\Sigma x_B}{5} = \frac{200}{5} = 40$

$$\Sigma (x - \bar{x}_B)^2 = \Sigma (x - 40)^2 = (-25)^2+(-10)^2+5^2+20^2+10^2 = 1250$$

เพราะฉะนั้น $s_B = \sqrt{\frac{1250}{5}} = \sqrt{250} = 15.81$

และสัมประสิทธิ์การแปรผันของชุด B $= \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{15.81}{40} = 0.395$

สรุป ก.ถูก และ ข.ถูก

38. กำหนดให้ค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนคนงาน
81 - 85	1
86 - 90	3
91 - 95	x
96 - 100	5
101 - 105	8
106 - 110	y
111 - 115	10
116 - 120	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้ว จำนวนคนงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 คน
2. 22 คน
3. 28 คน
4. 42 คน

ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนคนงาน $N = 1+3+x+5+8+y+10+4 = 31+x+y$

P_{25} ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{N}{4}$

เพราะว่า $P_{25} = 100.5$ ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 96 - 100

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{N}{4} = \frac{31+x+y}{4}$

$$36+4x = 31+x+y$$

$$3x-y = -5 \quad \underline{\hspace{4cm}}(1)$$

Q_3 ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{3N}{4}$

เพราะว่า $Q_3 = 110.5$ ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 106 - 110

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5+8+y = \frac{3N}{4} = \frac{3}{4}(31+x+y)$

$$4(17+x+y) = 3(31+x+y)$$

$$68+4x+4y = 93+3x+3y$$

$$x+y = 25 \quad \underline{\hspace{4cm}}(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) ได้ $x = 5$ และ $y = 20$

เพราะฉะนั้นคนงานที่ได้ค่าจ้างต่ำกว่า 105.5 บาท มี

$$1+3+x+5+8 = 22 \text{ คน}$$

วิธีลัด 1 เมื่อ N = จำนวนคนทั้งหมด

เพราะว่า $P_{25} = 100.5$ เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{N}{4}$

เพราะว่า $Q_3 = 110.5$ เพราะฉะนั้น $\frac{N}{4} = 10+4$

ดังนั้น $9+x = 14$

$x = 5$

จะได้คนที่มีรายได้ต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับ 22 คน เหมือนกัน

วิธีลัด 2 พิจารณาตัวเลือก 1.

ถ้า $8+5+x+3+1 = 16$ แล้ว $x = -1$

ดังนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้ง

พิจารณาตัวเลือก 2.

ถ้า $8+5+x+3+1 = 28$ แล้ว $x = 11$

จะขัดแย้งกับ $1+3+11+5 = 20 = \frac{N}{4} \neq 14$

ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 4. ผิดด้วย

39. ข้อมูล 7 จำนวนมีค่าแตกต่างกันดังนี้

9, 6, 15, a, 2, 4, 12 โดยที่ $2 < a < 12$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ แล้วค่า a ที่เป็นไปได้เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{62}{3}$
2. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{25}{2}$
3. มี 1 ค่า และมีค่าไม่เท่ากับค่ามัธยฐาน
4. มี 1 ค่า และมีค่าเท่ากับค่ามัธยฐาน

ตอบ 4.

แนวคิด เรียงตัวเลขจากน้อยไปมากได้ 2, 4, 6, 9, 12, 15 เพราะว่า $2 < a < 12$ เพราะฉะนั้นการเรียงลำดับข้อมูลทั้งหมดอาจเป็น 4 กรณี

(๑) 2, a, 4, 6, 9, 12, 15

(๒) 2, 4, a, 6, 9, 12, 15

(๓) 2, 4, 6, a, 9, 12, 15

(๔) 2, 4, 6, 9, a, 12, 15

ค่าเฉลี่ยของข้อมูลเท่ากับ $\frac{2+4+6+9+12+15+a}{7} = \frac{48+a}{7}$

กรณี	Q_1	Q_3	$\frac{(Q_3-Q_1)}{2}$	มัธยฐาน
1	a	12	$\frac{(12-a)}{2}$	6
2	4	12	4	6
3	4	12	4	a
4	4	12	4	9

พิจารณากรณีที่ 1

$$\bar{x} = 2\left(\frac{Q_3-Q_1}{2}\right)$$

$$\frac{48+a}{7} = 2\left(\frac{12-a}{2}\right)$$

$$48+a = 84-7a$$

$$a = 4.5$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $2 < a < 4$

ดังนั้นกรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

พิจารณากรณีที่ 2, 3 และ 4

$$\bar{x} = 2\left(\frac{Q_3-Q_1}{2}\right)$$

$$\frac{48+a}{7} = 2(4)$$

$$48+a = 56$$

$$a = 8$$

เพราะฉะนั้นกรณีที่เป็นไปได้คือ กรณีที่ 3

$2, 4, 6, 8, 9, 12, 15$

และมัธยฐาน $= a = 8$

40. น้ำหนักและส่วนสูงของนักเรียนห้องหนึ่ง ต่างมีการแจกแจงปกติ โดยที่น้ำหนักเฉลี่ยเป็น 40 กก. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 2 กก. ส่วนสูงเฉลี่ยเป็น 150 ซม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 4 ซม.

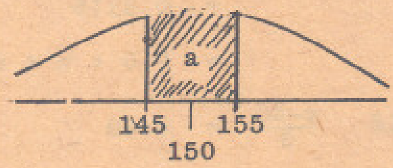
ถ้ามีนักเรียน a เปอร์เซนต์ที่สูงไม่ต่ำกว่า 145 ซม. และไม่เกิน 155 ซม. คือกลุ่มนักเรียนที่มีน้ำหนักไม่ต่ำกว่า 36 กก. และไม่เกิน b กก. แล้ว a และ b มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $a = 62.30$ และ $b < 40$
2. $a = 78.88$ และ $b < 40$
3. $a = 62.30$ และ $b < 42$
4. $a = 78.88$ และ $b < 42$

Z	0.88	0.89	1.24	1.25	1.95	2.00
A	0.3106	0.3133	0.3925	0.3944	0.4744	0.4773

ตอบ 4.

แนวคิด



เมื่อ $x = 145$ จะได้ $z = \frac{145-150}{4} = -1.25$

$x = 155$ จะได้ $z = \frac{155-150}{4} = 1.25$

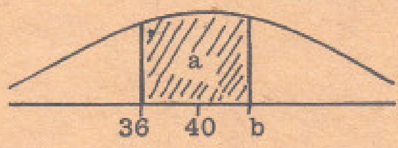
เพราะว่า $P(145 < x < 155) = P(-1.25 < z < 1.25)$

$= 2P(0 < z < 1.25)$

$= 2(0.3944)$

$= 0.7888$

เพราะฉะนั้น $a = 0.788(100) = 78.88$ %



เมื่อ $x = 36$ จะได้ $z = \frac{36-40}{2} = -2$

$x = 40$ จะได้ $z = 0$

เพราะว่า $P(36 < x < 40) = P(-2 < z < 0)$

$= P(0 < z < 2)$

$= 0.4773$

เพราะฉะนั้น $P(40 < x < b) = 0.7888 - 0.4773$

$= 0.3115$

$= P(0 < z < 0.89)$

เมื่อ $z = 0.89$ จะได้ $\frac{x-40}{2} = 0.89$

$x = 41.78$

เพราะฉะนั้น $b < 42$

วิธีลัด เมื่อเราทราบค่า $a = 0.7888$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง ต่อไปพิจารณาค่า $x = 40$

$$P(36 < x < 40) = P(-2 < z < 0)$$
$$= P(0 < z < 2)$$
$$= 0.4773$$
$$\neq 0.7888$$

จึงทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

41. ให้สมการค่าจ้างรายวันของคนงานก่อสร้างเป็น

$$y = 6.5(x - 2529) + 60$$

เมื่อ x เป็น พ.ศ. y เป็นค่าจ้าง มีหน่วยเป็นบาท ถ้าใน พ.ศ. 2536 ดัชนีราคาผู้บริโภคเท่ากับ 110 % เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2535 แล้วค่าจ้างรายวันแท้จริงในปี พ.ศ. 2536 เมื่อเทียบกับค่าจ้างรายวันในปี พ.ศ. 2535 เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เพิ่มขึ้น 2.80 บาท
2. เพิ่มขึ้น 6.50 บาท
3. ลดลง 3.10 บาท
4. ลดลง 9.90 บาท

ตอบ 3.

แนวคิด รายได้ในปี 2536 จะได้

$$y = 6.5(2536 - 2529) + 60 = 105.5$$

รายได้ในปี 2535 $y = 6.5(2535 - 2529) + 60 = 99$

เพราะฉะนั้นรายได้แท้จริงของปี 2536 คือ $\frac{105.5}{1.10} = 95.9$

ดังนั้นรายได้ในปี 2536 ลดลงจากปี 2535 $= 99 - 95.91$

$= 3.10$ บาท

ตอนที่ 2

1. จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 มีทั้งหมดกี่จำนวน

ตอบ 48

แนวคิด ให้ $X = \{0,1,2,...,100\}$ เพราะว่า $15 = 3\times5$ เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 คือจำนวนที่ 3 หรือ 5 หารลงตัว

ให้ $A = \{x \in X \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{0,3,6,9,...,99\}$

$n(A) = 34$

$B = \{x \in X \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{0,5,10,15,...,100\}$

$n(B) = 21$

$A\cap B = \{x \in X \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{0,15,30,...,90\}$

$n(A\cap B) = 7$

เพราะฉะนั้น $n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$= 34 + 21 - 7$

$= 48$

2. กำหนด $f(x) = x^4+bx^3+cx^2+dx+e$

และ $f(2+\sqrt{3}i) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 9$

แล้ว $f'(0)$ มีค่าเท่าไร

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณากรณี b,c,d,e เป็นจำนวนจริง

เมื่อ $f(1) = 0$ จะได้ $1+b+c+d+e = 0$

$$b+c+d+e = -1 \qquad \text{______} (1)$$

เมื่อ $f(2) = 9$ จะได้ $16+8b+4c+2d+e = 9$

$$8b+4c+2d+e = -7 \qquad \text{______} (2)$$

เมื่อ $f(2+\sqrt{3}i) = 0$ จะได้

$$(2+\sqrt{3}i)^4 + (2+\sqrt{3}i)^3b + (2+\sqrt{3}i)^2c + (2+\sqrt{3}i)d + e = 0$$

เพราะว่า $(2+\sqrt{3}i)^2 = 4+2\sqrt{3}i - 3 = 1+2\sqrt{3}i$

$$(2+\sqrt{3}i)^3 = (1+2\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)$$

$$= (2+5\sqrt{3}i -6)$$

$$= -4+5\sqrt{3}i$$

$$(2+\sqrt{3}i)^4 = (1+2\sqrt{3}i)^2 = 1+4\sqrt{3}i -12$$

$$= -11+4\sqrt{3}i$$

เพราะฉะนั้น $-11+4\sqrt{3}i + (-4+5\sqrt{3}i)b + (1+2\sqrt{3}i)c$

$$+ (2+\sqrt{3}i)d + e = 0$$

จะได้สมการส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพเป็น

$$-11-4b+c+2d+e = 0$$

$$-4b+c+2d+e = 11 \qquad \text{______} (3)$$

และ $4\sqrt{3}i + 5\sqrt{3}ib + 2\sqrt{3}ic + \sqrt{3}id = 0$

$$4+5b+2c+d = 0$$

$$5b+2c+d = -4 \qquad \text{(4)}$$

จากระบบสมการ (1),(2),(3) และ (4) จะได้

$b = -4$, $c = 6$, $d = 4$ และ $e = -7$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^4-4x^3+6x^2+4x-7$

$$f'(x) = 4x^3-12x^2+12x+4$$

ดังนั้น $f'(x) = 4$

วิธีลัด เพราะว่า $f'(x) = 4x^3+3bx^2+2cx+d$

ดังนั้น $f'(0) = d$

เพราะฉะนั้นในการหาคำตอบของระบบสมการเราหาเฉพาะค่า $d = 4$ ก็พอ

วิธีที่ 2 ในกรณีที่ b,c,d และ e เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า $x = 1,\ 2+\sqrt{3}i$ เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$

ดังนั้น $x = 2-\sqrt{3}i$ เป็นรากด้วย และสมมติ $k \in R$ และ

$$f(x) = (x-1)(x-(2+\sqrt{3}i))(x-(2-\sqrt{3}i))(x+k)$$

$$= (x-1)(x^2-4x+7)(x+k)$$

จาก $f(x) = (x-1)(x^2-4x+7)(x+k)$

$$9 = f(2) = (2-1)(4-8+7)(2+k)$$

$9 = 3(k+2)$

$3 = k+2$

$k = 1$

จาก $f(x) = (x-1)(x^2-4x+7)(x+1)$

$= x^4-4x^3+6x^2+4x-7$

$f'(x) = 4x^3-12x^2+12x+4$

ดังนั้น $f'(0) = 4$

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ P_n เป็นพาราโบลา $y = \frac{1}{n}x^2$ ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ P_k มีจุดร่วมกับเส้นตรง $x-y = 4$ เพียงจุดเดียว แล้ว k มีค่าเท่าไร

ตอบ 16

แนวคิด แทน $y = \frac{1}{k}x^2$ ใน $x-y = 4$ จะได้

$$x - \frac{1}{k}x^2 = 4$$

$$\frac{1}{k}x^2 - x + 4 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่าสมการ $ax^2+bx+c = 0$ มีรากตัวเดียวก็ต่อเมื่อ $b^2-4ac = 0$

จาก (1) $a = \frac{1}{k}$, $b = -1$ และ $c = 4$

$b^2-4ac = (-1)^2 - 4(\frac{1}{k})(4) = 0$ จะได้ $k = 16$

4. กำหนดให้รถขนส่งสินค้าชนิดหนึ่งมีการเผาไหม้ของน้ำมันเป็น

$\frac{1}{400}\left(\frac{1600}{x} + x\right)$ ลิตร/กิโลเมตร เมื่อ x เป็นความเร็ว มีหน่วยเป็นกิโลเมตร/ชั่วโมง ถ้าต้องการขับรถเป็นระยะทาง 600 กิโลเมตร โดยจ่ายค่าน้ำมันน้อยที่สุด ขณะที่น้ำมันราคาลิตรละ 10 บาท แล้วจะต้องจ่ายค่าน้ำมันเท่าไร

ตอบ 1200

แนวคิด x = ความเร็วหน่วยเป็นกิโลเมตร/ชั่วโมง

f(x) = ค่าใช้จ่ายเมื่อความเร็วเป็น x

$$f(x) = 600\left(\frac{1}{400}\left(\frac{1600}{x} + x\right)\right)(10)$$

$$= \frac{24000}{x} + \frac{30}{2}x$$

$f'(x) = \frac{-24000}{x^2} + \frac{30}{2}$ และ $f''(x) = \frac{48000}{x^3}$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{-24000}{x^2} + \frac{30}{2} = 0$

$$\frac{30}{2} = \frac{24000}{x^2}$$

$$x^2 = 1600$$

$$x = 40$$

เพราะว่า $f''(40) > 0$ เพราะฉะนั้น $f(40)$ เป็นค่าต่ำสุด

$$f(40) = \frac{24000}{40} + \frac{30(40)}{2}$$

$$= 600+600 = 1200$$

5. การเขียนเครื่องหมาย O หรือ X ลงในตารางขนาด 2×3 โดยให้มีเครื่องหมายเต็มทุกช่อง และต้องมีเครื่องหมายอย่างน้อยอย่างละ 1 เครื่องหมาย แล้วจำนวนวิธีเขียนเท่ากับเท่าไร

ตอบ 62

แนวคิด การจัด O และ X ลงในช่องเหมือนกับการจัดลำดับของ 6 สิ่ง แบบมีการซ้ำ เช่น O 2 ตัว และ X 4 ตัว ทำได้

$\frac{6!}{2!4!} = 15$ วิธี

สรุปเป็นตารางดังนี้

O	X	จำนวนวิธี
5	1	$\frac{6!}{5!1!} = 6$
4	2	$\frac{6!}{4!2!} = 15$
3	3	$\frac{6!}{3!3!} = 20$
2	4	$\frac{6!}{2!4!} = 15$
1	5	$\frac{6!}{1!5!} = 6$
		รวม 62

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 62

6. จากการสอบถามครอบครัว n ครอบครัว ที่มีรายได้ต่อเดือนตั้งแต่ 5,000 บาท ถึง 20,000 บาท เกี่ยวกับรายจ่ายต่อเดือน ปรากฏผลดังนี้

รายได้ (หน่วยเป็นพันบาท) : x	$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n$
รายจ่าย (หน่วยเป็นพันบาท) : y	$y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_n$

และ $\bar{x} = 12$, $\bar{y} = 5$ โดยที่สมการเส้นตรงซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่าย (y) และรายได้ (x) ตัดแกน Y ที่จุด (0,-3) ถ้าครอบครัวหนึ่งมีรายได้ 15,000 บาท แล้วจะมีรายจ่ายโดยประมาณเท่ากับเท่าไร

ตอบ 7000 บาท

แนวคิด จาก $y = mx+c$ และเส้นตรงผ่าน (0,-3)

จะได้ $-3 = 0+c$ ดังนั้น $c = -3$

เพราะว่า $c = \bar{y}-m\bar{x}$ เพราะฉะนั้น

$$-3 = 5-12m$$

$$m = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $y = \frac{2}{3}x - 3$

เมื่อรายได้เท่ากับ 15000 บาท จะได้ $x = 15$

ดังนั้น $y = \frac{2}{3}(15) - 3 = 7$

เพราะฉะนั้นรายจ่ายเท่ากับ 7000 บาท

เกี่ยวกับผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การศึกษา

วท.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานที่ทำ

รองศาสตราจารย์ ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2528-2537)

อาจารย์สอนเสริมมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2526-2537)

ผลงานตำรา

- พีชคณิตเชิงเส้น (2537)
- ภาษาเบสิก (2531)
- คณิตศาสตร์ขั้นสูง (2532)
- ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมตริกซ์ (2534)

คณิตศาสตร์ปรนัย

เป็นหนังสือเกี่ยวกับการเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. ข้อสอบแข่งขันของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ และข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์อื่น ๆ โดยนำข้อสอบมาเฉลย ทั้งการใช้แนวคิดตามหลักสูตร ม.ปลาย และแนวคิดวิธีลัด และใช้เทคนิคการตัดตัวเลือก สำหรับคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มนี้เน้นที่ข้อสอบทุกข้อของคณิตศาสตร์ กข. ประจำปีการศึกษา 2537

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท
กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2152200, 2554433
โทรสาร 2554441

ISBN 974-584-249-4
9 789745 842496
C112
4000
15.00 บาท