คณิตศาสตร์ปรนัย

เฉลย
คณิตศาสตร์ ก
ปี 2537

เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข.
และข้อสอบแข่งขันระดับ ม.ปลาย ด้วยวิธีตามหลักสูตร
วิธีลัดและเทคนิคการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ก. 2537

ข้อสอบจริงข้อ 4

ให้ $A = \{x \in R \mid |x-1| < 4\}$

$B = \{x \in R \mid \frac{x+2}{x-1} \geq 0\}$

C = เซตของจำนวนเต็ม

แล้ว $A \cap B \cap C$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-2,2,3,4\}$ 2. $\{-3,-2,2,3,4\}$

3. $\{-3,-2,1,2,3,4\}$ 4. $\{-3,-2,1,2,3,4,5\}$

แนวคิดโดยวิธีลัด จาก $|x-1| < 4$

จะได้ $-4 < x-1 < 4$ และ $-3 < x < 5$

เพราะฉะนั้น $A = (-3,5)$

เพราะว่า $-3 \notin A$ เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cap B \cap C$

ดังนั้น -3 ต้องไม่อยู่ในเซตที่เป็นตัวเลือกซึ่งมีตัวเลือกเดียว

คือตัวเลือก 1.

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เล่มที่ 2
ISBN 974-584-250-8

15 บาท

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 2

พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ. 2537

จำนวน 3,000 เล่ม

สงวนลิขสิทธิ์

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980-2, 2187000 โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 2

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 2 นี้ ผมได้นำข้อสอบแข่งขันเข้า
มหาวิทยาลัย วิชาคณิตศาสตร์ ก. ที่สอบไปเมื่อวันอาทิตย์ที่ 10
เมษายน 2537 มาทำการเฉลยโดยคงรูปแบบในลักษณะที่แสดงวิธี
ทำจริงตามหลักสูตร วิธีลัด และวิธีตัดตัวเลือก

ลักษณะข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. ปีนี้ได้เพิ่มเนื้อหาจากปีก่อน
เช่น แคลคูลัสซึ่งมี 10 คะแนน และเมตริกซ์ซึ่งมี 12 คะแนน แต่ใ
การทำโจทย์จริงก็ต้องพึ่งเนื้อหาอื่นด้วย อย่างไรก็ตามโดยใช้เหตุผล
วิธีตัดตัวเลือกก็จะทำคะแนนกับข้อสอบชุดนี้ได้มากกว่า 30 คะแนน
เช่นข้อ 4, 8, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 29
36

สำหรับคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3 ต่อไปจะเป็นการนำข้อสอ
ENTRANCE และข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ฯ และข้อสอบแข่งขันอื่น ๆ
มาเฉลยในแนวทางนี้ต่อไป

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ ก **ประจำปี 2537**

วันอาทิตย์ที่ 10 เมษายน 2537

ตอนที่ 1

1. ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ
ถ้าค่าความจริงของ $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)$ เป็นเท็จ
แล้วค่าความจริงของ $[(\sim p \vee r) \wedge q] \leftrightarrow r$ จะเหมือนกับ
ค่าความจริงของประพจน์ใดต่อไปนี้

1. $p \wedge r$ 2. $p \vee r$
3. $p \rightarrow r$ 4. $p \leftrightarrow r$

ตอบ 2.

แนวคิด $(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)$ เป็นเท็จจะได้ว่า
$p \wedge q$ เป็นจริง และ $\sim q \vee r$ เป็นเท็จ
เมื่อ $\sim q \vee r$ เป็นเท็จ จะได้ $\sim q$ เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ
ดังนั้น q เป็นจริง และ p เป็นจริง
ผลที่ตามมาคือ $[(\sim p \vee r) \wedge q] \leftrightarrow r$ เป็นจริง
ตัวเลือก 1. $p \wedge r$ เป็นเท็จ
ตัวเลือก 2. $p \vee r$ เป็นจริง
ตัวเลือก 3. $p \rightarrow r$ เป็นเท็จ
ตัวเลือก 4. $p \leftrightarrow r$ เป็นเท็จ

2. ถ้าประพจน์ $p \wedge (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แล้วประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(q \vee r) \leftrightarrow (p \vee s)$
2. $(p \vee r) \longrightarrow (\sim p \wedge s)$
3. $(\sim p \wedge r) \wedge (p \vee q)$
4. $p \rightarrow [(q \vee r) \rightarrow \sim p]$

ตอบ 1.

แนวคิด เมื่อ $p \wedge (q \vee r)$ เป็นจริง จะได้ p เป็นจริง และ $q \vee r$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $p \vee s$ เป็นจริง

สรุป $(q \vee r) \leftrightarrow (p \vee s)$ เป็นจริง

หมายเหตุ ข้อนี้อาจถือได้ว่าโชคดีที่ได้คำตอบเป็นตัวเลือกแรก สำหรับตัวเลือกอื่นๆ พิจารณาดังนี้

2. $\sim p \wedge s$ เป็นเท็จ และ $p \vee r$ เป็นจริง
   ดังนั้นสรุปค่าความจริงของ $(p \vee r) \longrightarrow (\sim p \wedge s)$ เป็นเท็จ
3. $\sim p \wedge r$ เป็นเท็จ ดังนั้น $(\sim p \wedge r) \wedge (p \vee q)$ เป็นเท็จแน่ๆ
4. $(q \vee r) \longrightarrow \sim p$ เป็นเท็จ และ p เป็นจริง
   ดังนั้น $p \longrightarrow [(q \vee r) \longrightarrow \sim p]$ เป็นเท็จ

3. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ $U = \{x \in I \mid x \geq 0\}$
   ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $\exists x [x^3 = 3^x]$
2. $\forall x [|x| = x]$
3. $\forall x [3^x + 1 > 2]$
4. $\exists x [\frac{2}{x} > x]$

ตอบ 3.

แนวคิด 1. เพราะว่ามี $x = 3$ ที่ทำให้ $3^3 = 3^3$

เพราะฉะนั้น $\exists x [x^3 = 3^x]$ เป็นจริง

2. เพราะว่า $x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = x$

นั่นคือ $\forall x [|x| = x]$ เป็นจริง

3. เพราะว่ามี $x = 0$ ที่ทำให้ $3^0+1 = 2 \neq 2$

เพราะฉะนั้น $\forall x [3^x+1 > 2]$ เป็นเท็จ

4. เพราะว่ามี $x = 1$ ที่ทำให้ $\frac{2}{1} > 1$

เพราะฉะนั้น $\exists x [\frac{2}{x} > x]$ เป็นจริง

4. ให้ $A = \{x \in R \mid |x-1| < 4\}$

$B = \{x \in R \mid \frac{x+2}{x-1} \geq 0\}$

$C =$ เซตของจำนวนเต็ม

แล้ว $A \cap B \cap C$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-2,2,3,4\}$ 2. $\{-3,-2,2,3,4\}$

3. $\{-3,-2,1,2,3,4\}$ 4. $\{-3,-2,1,2,3,4,5\}$

ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณา $|x-1| < 4$

$-4 < x-1 < 4$

$-3 < x < 5$

ดังนั้น $A = (-3,5)$

พิจารณา $\frac{x+2}{x-1} \geq 0$ จะได้

$x \leq -2$ หรือ $x > 1$

ดังนั้น $B = (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

เพราะว่า $A \cap B = (-3,-2] \cup (1,5)$

เพราะฉะนั้น $A \cap B \cap C = \{-2,2,3,4\}$

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า $A = (-3,5)$ นั่นคือ $-3 \notin A$

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cap B \cap C$

เนื่องจากมี -3 อยู่ในเซตของตัวเลือก 2. 3. และ 4.

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2. 3. และ 4. ทิ้งได้

นั่นคือได้คำตอบโดยไม่ต้องหาเซต B

5. กำหนดให้ $B = \{\phi,0,1\}$ และ $P(B)$แทนเพาเวอร์เซตของเซต B ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $\phi \in P(B)$ แต่ $0 \notin P(B)$
   2. $\phi \subset P(B)$ แต่ $1 \not\subset P(B)$
   3. $\{\phi\} \in P(B)$ และ $\{1\} \in P(B)$
   4. $\{\phi\} \subset P(B)$ และ $\{0\} \subset P(B)$

ตอบ 4.

แนวคิด เมื่อ $B = \{\phi,0,1\}$ เราพิจารณาดังนี้

เพราะว่า	เพราะฉะนั้น
1. ϕ เป็นสมาชิกของทุกเพาเวอร์เซต	$\phi \in P(B)$
2. สมาชิกของ P(B) ต้องเป็นเซต	$0 \notin P(B)$
3. ϕ เป็นสับเซตของทุกเซต	$\phi \subset P(B)$
4. เลข 1 ไม่ใช่เซต	$1 \not\subset P(B)$
5. $\phi \in B$	$\{\phi\} \in P(B)$
6. $1 \in B$	$\{1\} \in P(B)$
7. $\phi \in P(B)$	$\{\phi\} \subset P(B)$
8. $0 \notin P(B)$	$\{0\} \not\subset P(B)$

สรุป ตัวเลือก 4. $\{\phi\} \subset P(B)$ และ $\{0\} \subset P(B)$ ผิด

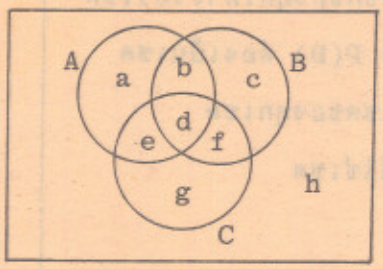
หมายเหตุ คำว่า "แต่" ในโจทย์นี้มีความหมายเป็น "และ"

6. ให้ A,B และ C เป็นเซตซึ่งมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 25, 14 และ 18 ตามลำดับ ถ้า $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ และ $A \cap B \cap C$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 6,8,10 และ 2 ตามลำดับ แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $(A \cap C) - B$, $B - (A \cup C)$ และ $(A \cup B) - C$ ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 6, 0, 17
2. 6, 1, 26
3. 4, 1, 21
4. 4, 0, 17

ตอบ 1.

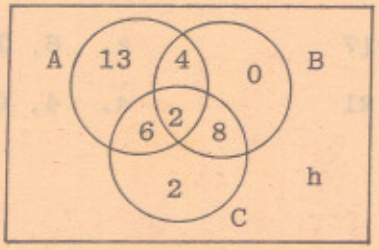
แนวคิด โดยใช้แผนภาพของเวนน์และพิจารณาจำนวนสมาชิกในแต่ละส่วนของเซตดังต่อไปนี้



a, b, c, ..., g, h เป็นจำนวนสมาชิกแต่ละส่วน

เพราะว่า	เพราะฉะนั้น
$n(A \cap B \cap C) = 2$	$d = 2$
$n(A \cap B) = 6$	$b+d = 6$ และ $b = 4$
$n(A \cap C) = 8$	$d+e = 8$ และ $e = 6$
$n(B \cap C) = 10$	$d+f = 10$ และ $f = 8$
$n(A) = 25$	$a+b+d+e = 25$, $a = 13$
$n(B) = 14$	$b+c+d+f = 14$, $c = 0$
$n(C) = 18$	$d+e+f+g = 18$, $g = 2$

ดังนั้นสมาชิกแต่ละส่วนเป็นดังนี้



เพราะฉะนั้น $n((A \cap C) - B) = 6$

$n(B - (A \cup C)) = 0$

$n((A \cup B) - C) = 17$

7. กำหนดให้ x,y เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $|x-y| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$
2. $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$
3. ถ้า $(x-1)^2 > |y|^2$ แล้ว $x > |y|+1$ หรือ $x < 1-|y|$
4. ถ้า $(x-1)^2 < |y|^2$ แล้ว $x > |y|-1$ หรือ $x < |y|+1$

ตอบ 3. และ 4.

แนวคิด 1. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = 1$ และ $y = -1$

จะได้ $|1-(-1)| = 2 \not\leq 0 = |1-1|$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = 1$ และ $y = -1$

จะได้ $|1+(-1)|^2 = 0 \neq 2 = |1|^2 + |-1|^2$

3. ถูกต้อง เพราะว่า

$$(x-1)^2 > |y|^2$$

$$(x-1)^2 - |y|^2 > 0$$

$$[(x-1) - |y|][(x-1) + |y|] > 0$$

$(x-1) < -|y|$ หรือ $(x-1) > |y|$

$x < 1-|y|$ หรือ $x > 1+|y|$

4. ถูกต้อง เพราะว่า

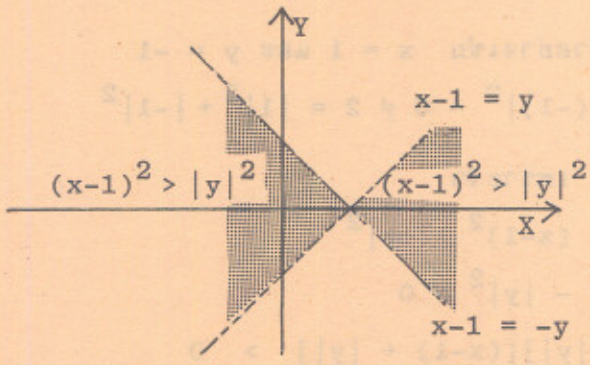
$$(x-1)^2 < |y|^2$$
$$(x-1)^2 - |y|^2 < 0$$
$$[(x-1) - |y|][(x-1) + |y|] < 0$$
$$-|y| < (x-1) < |y|$$
$$-|y| < (x-1) \quad \text{และ} \quad (x-1) < |y|$$
$$1-|y| < x \quad \text{และ} \quad x < 1+|y|$$

ซึ่งสรุปได้ว่า

$$x > |y|-1 \quad \text{หรือ} \quad x < |y|+1$$

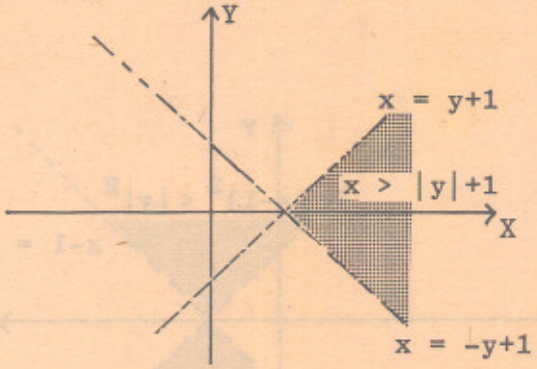
หมายเหตุ ตัวเลือก 3. และ 4. โดยใช้กราฟดังนี้

3. กราฟของบริเวณ $(x-1)^2 > |y|^2$ คือ

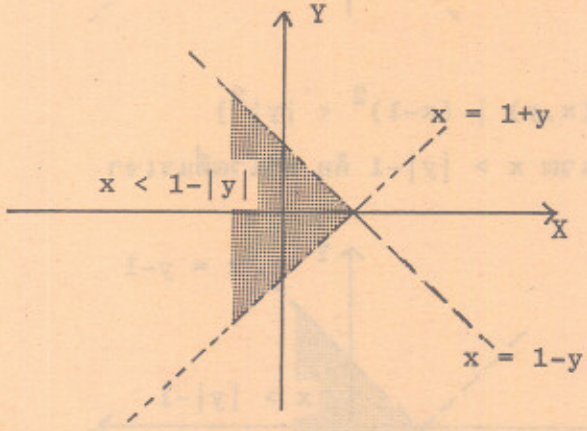


ให้ $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 > |y|^2\}$

กราฟของบริเวณ $x > |y|+1$ คือ



กราฟของบริเวณ $x < 1-|y|$ คือ



จากกราฟของบริเวณใน $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ เมื่อให้

$A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 > |y|^2\}$

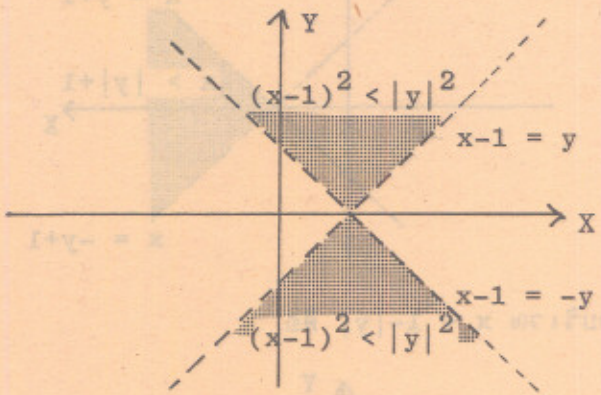
$B = \{(x,y) \mid x > |y|+1 \text{ หรือ } x < 1-|y|\}$

จะได้ว่า $A = B$ นั่นคือ

ถ้า $(x-1)^2 > |y|^2$ แล้ว $x > |y|+1$ หรือ $x < 1-|y|$

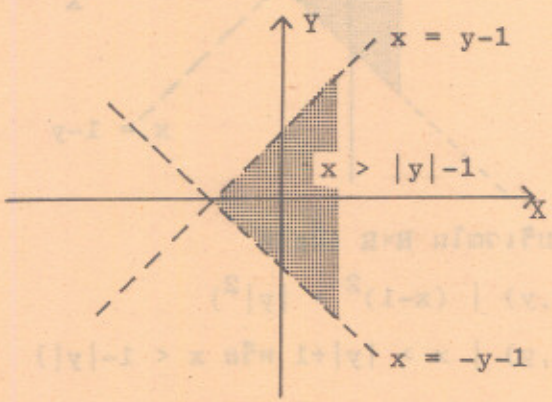
4. เพราะว่ากราฟของบริเวณ $(x-1)^2 < |y|^2$ คือ บริเวณที่

แรเงา

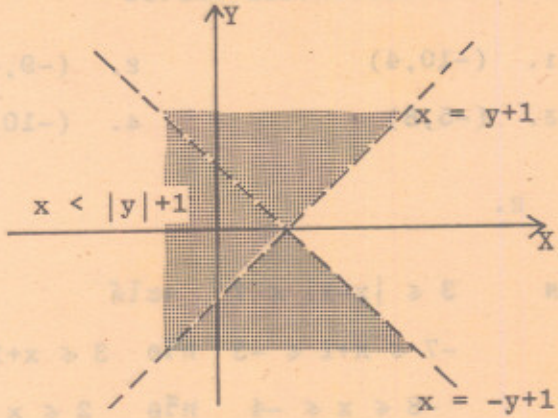


ให้ $A = \{(x,y) \mid (x-1)^2 < |y|^2\}$

กราฟของบริเวณ $x > |y|-1$ คือ บริเวณที่แรเงา



กราฟของบริเวณ $x < |y|+1$ คือ บริเวณที่แรเงา



ให้ $B = \{(x,y) \mid x > |y|-1 \text{ หรือ } x < |y|+1\}$

เพราะฉะนั้น $B = R \times R$ และ $A \subset B$

ซึ่งหมายความว่าทุกค่า $(x,y) \in A$ เป็นสมาชิกของ B

นั่นคือ ถ้า $(x-1)^2 < |y|^2$ แล้ว $x > |y|-1$ หรือ $x < |y|+1$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม. ปลาย) ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ที่สอบเมื่อวันที่ 9 มกราคม 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และ เทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

กำหนดวางตลาด กลางเดือนสิงหาคม 2537

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

8. เซตคำตอบของอสมการ $3 \leq |x+1| \leq 7$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-10,4)$
2. $(-9,-2) \cup (1,7)$
3. $(-5,8)$
4. $(-10,-3) \cup (3,8)$

ตอบ 2.

แนวคิด $3 \leq |x-1| \leq 7$ จะได้

$-7 \leq x+1 \leq -3$ หรือ $3 \leq x+1 \leq 7$

$-8 \leq x \leq -4$ หรือ $2 \leq x \leq 6$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $[-8,-4] \cup [2,6]$

เป็นสับเซตของ $(-9,-2) \cup (1,7)$

วิธีลัด พิจารณาจากการแทนค่า $x = 3$ จะได้ $3 \leq |3+1| \leq 7$

แต่ $3 \notin (-10,-3) \cup (3,8)$ เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

$x = 4$ จะได้ $3 \leq |4+1| \leq 7$

แต่ $4 \notin (-10,4)$ เราจึงตัดตัวเลือก 1. ได้อีก

เมื่อ $x = -5$ จะได้ $3 \leq |-5+1| \leq 7$

และ $-5 \notin (-5,8)$ ตัวเลือก 3. จึงตัดทิ้งได้

หมายเหตุ การเลือกค่า x ให้สังเกตจุดปลายช่วง

9. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 5x^2-42x+16 > 0\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \left|x - \frac{21}{5}\right| > \frac{19}{5}\}$

ข. $A = \mathbf{R} - [\frac{2}{5}, 8]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก.ถูก และ ข.ถูก
2. ก.ถูก และ ข.ผิด
3. ก.ผิด และ ข.ถูก
4. ก.ผิด และ ข.ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณา $5x^2-42x+16 > 0$

$$(5x-2)(x-8) > 0$$

$$(x-\frac{2}{5})(x-8) > 0$$

$$x < \frac{2}{5} \text{ หรือ } x > 8$$

พิจารณา $|x - \frac{21}{5}| > \frac{19}{5}$ จะได้

$$x - \frac{21}{5} < -\frac{19}{5} \text{ หรือ } x - \frac{21}{5} > \frac{19}{5}$$

$$x < \frac{2}{5} \text{ หรือ } x > 8$$

ดังนั้น $A = \{x \in \mathbf{R} \mid 5x^2-42x+16 > 0\}$

$= \{x \in \mathbf{R} \mid \left|x - \frac{21}{5}\right| > \frac{19}{5}\}$

$= (-\infty, \frac{2}{5}) \cup (8, \infty)$

$= \mathbf{R} - [\frac{2}{5}, 8]$

ดังนั้น ก.ถูก และ ข.ถูก

10. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย

$$r = \{(x,y) \in R\times R \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก และ } x^2+xy+y^2 = 75\}$$

แล้วโดเมนของ r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$
2. $\{-5,-4,-3,\ldots,3,4,5\}$
3. $\{-10,-9,-8,\ldots,8,9,10\}$
4. $\{-15,-14,-13,\ldots,13,14,15\}$

ตอบ ไม่มีตัวเลือก

แนวคิด ดูตามโจทย์แล้วตัวเลือกที่ถูกต้องไม่มีแน่นอน เพราะว่าทุกเซตในตัวเลือกมีจำนวนเต็มลบบางตัวเป็นสมาชิก แต่จากโจทย์ x ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก นั่นคือ $R_r \subset R^+$ เพื่อให้เกิดความรู้จากโจทย์ข้อนี้ขอแก้โจทย์เป็น

$r = \{(x,y) \in R\times R \mid x \in I \text{ และ } x^2+xy+y^2 = 75\}$

พิจารณา $x^2+xy+y^2 = 75$

$y^2+xy+(x^2-75) = 0$

สูตร y ในพจน์ของ x คือ

$$y = \frac{-x \pm \sqrt{x^2-4(x^2-75)}}{2}$$

ดังนั้น $y \in R$ ก็ต่อเมื่อ $x^2-4(x^2-75) \geq 0$

นั่นคือ $-3x^2+300 \geq 0$

$x^2 \leq 100$

เพราะฉะนั้นค่า $x \in I$ ที่เป็นไปได้คือ $-10 \leq x \leq 10$

สรุป เรนจ์ของ r คือ $\{-10,-9,-8,\ldots,8,9,10\}$

11. ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$

และ $g(x) = \sqrt{x}$

โดเมนและเรนจ์ของ $f \circ g$ ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
2. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$
3. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
4. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \frac{1}{x}$ จะได้ $D_f = R-\{0\} = R_f$

$g(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_g = [0,\infty) = R_g$

เพราะฉะนั้น $R_g \subset D_f$ ซึ่งจะทำให้ $f \circ g$ มีความหมาย

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$D_{f \circ g} = (0,\infty) = \{x \mid x > 0\}$ และ

$R_{f \circ g} = (0,\infty) = \{x \mid x > 0\}$

วิธีลัด เพราะว่า $g(-2)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $-2 \notin D_{f \circ g}$ แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$

เพราะฉะนั้น $-1 \notin R_{f \circ g}$ จึงทำให้เราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

12. กำหนดให้ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{2}{x-1}$

ค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{30}$
2. 0
3. $\frac{1}{30}$
4. $\frac{1}{5}$

ตอบ 4.

แนวคิด

$$f(g(x)) = g(f(x))$$

$$f(\frac{2}{x-1}) = g(4x)$$

$$4(\frac{2}{x-1}) = \frac{2}{4x-1}$$

$$4(4x-1) = x-1$$

$$15x = 3$$

$$x = \frac{1}{5}$$

วิธีคิด โจทย์ถามว่า x เท่ากับเท่าใด และตัวเลือกเป็นตัวเลขด้วย ดังนั้นจับแทนค่าเลย เช่น

$f(g(0)) = f(-2) = -8$

แต่ $g(f(0)) = g(0) = -2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะฉะนั้นข้อนี้แล้วแต่โชคดีเหมือนกันว่า เราจะเอาตัวเลขใดมาแทนค่า สุดท้ายก็ได้คำตอบเหมือนกัน

13. ให้ $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ x+3 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$

และ $g(x) = 2x+3$

$(f \circ g^{-1})(1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -3

3. 2 4. 1

ตอบ 3.

แนวคิด $y = g(x) = 2x+3$

จะได้ $x = \frac{y-3}{2}$ ดังนั้น $g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g^{-1})(1) = f(g^{-1}(1))$

$= f(-1)$

$= 2$

14. พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสี่อยู่ที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ และจุดโฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

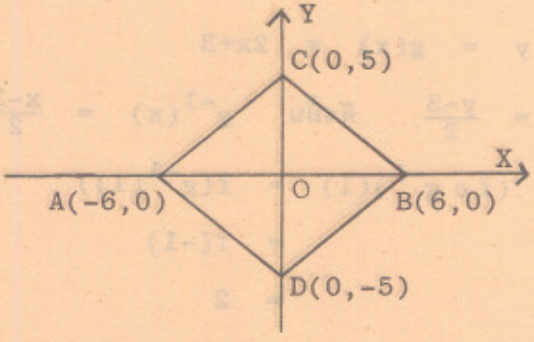
1. 30
2. 40
3. 48
4. 60

ตอบ 4.

แนวคิด ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มีค่า a = 4 และ และ b = 3 เพราะฉะนั้น $c = \sqrt{a^2+b^2} = 5$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง (0,0) แกนไฮเพอร์โบลาทับแกน Y จุดโฟกัสที่ (0,-5) และ (0,5)

วงรี $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ มีค่า a = 10 , b = 8 และ c = 6 เป็นวงรีจุดศูนย์กลาง (0,0) แกนเอกทับแกน X และมีจุดโฟกัสที่ (-6,0) และ (6,0)



เพราะว่า ความชัน AD เท่ากับ ความชัน BC และ
ความชัน AC เท่ากับ ความชัน BD

เพราะฉะนั้น ACBD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พื้นที่สี่เหลี่ยม ACBD = 2 เท่าของพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5$$

$$= 60$$

วิธีลัด พิจารณาจากรูปก็จะพบว่า ACBD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เราวัดความยาวฐาน AD ยาว 7.6 หน่วย และวัดส่วนสูงจาก AD ไปยังด้าน BC ได้ยาว 7.8 หน่วย
ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมมีค่าประมาณ (7.6)(7.8) = 59.28

สรุปเลือกข้อ 4. ตีกว่า

15. ถ้าวงกลมผ่านจุด (0,0) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $3y^2+4x^2 = 48$ แล้ว วงกลมมีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+y^2-4y = 0$ และ $x^2+y^2+4y = 0$
2. $x^2+y^2-4y+12 = 0$ และ $x^2+y^2+4y+12 = 0$
3. $x^2-4x+y^2+12 = 0$ และ $x^2+4x+y^2+12 = 0$
4. $x^2-4x+y^2 = 0$ และ $x^2+4x+y^2 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด จากสมการ $3y^2+4x^2 = 48$ จะได้

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$$

เป็นวงรีจุดศูนย์กลาง (0,0) แกนเอกทับแกน Y

$a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$ และ $c = 2$

จุดไฟกัสของวงรีคือ (0,-2) และ (0,2)

วงกลมจุดศูนย์กลาง (0,-2) ผ่านจุด (0,0) คือ

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = (0-0)^2 + (0+2)^2$$

$$x^2+y^2+4y = 0$$

วงกลมจุดศูนย์กลาง (0,2) ผ่านจุด (0,0) คือ

$$(x-0)^2 + (y-2)^2 = (0-0)^2 + (0-2)^2$$

$$x^2+y^2-4y = 0$$

วิธีลัด โจทย์บอกว่าจุด (0,0) อยู่บนวงกลม แต่ (0,0) ไม่อยู่ในสมการวงกลมของตัวเลือก 2. และ 3. เราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งไป

เพราะว่าจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2-4x+y^2 = 0$ คือ (2,0)

เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

16. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2+4x-2y = 4$ กับจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = -6y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{17}}{2}$
2. $\frac{\sqrt{25}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{29}}{2}$
4. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด $x^2+y^2+4x-2y = 4$

$(x+2)^2+(y-1)^2 = 9$

เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลาง $(-2,1)$ และรัศมี 3

พาราโบลา $x^2 = -6y$

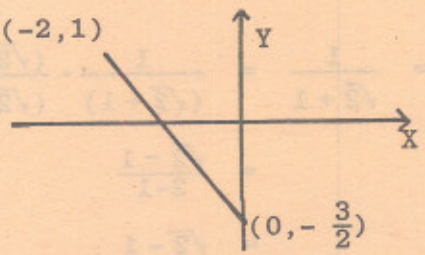
$x^2 = 4(-\frac{3}{2})y$

เป็นพาราโบลาคว่ำมีจุดยอด $(0,0)$ แกนพาราโบลาทับแกน Y และจุดโฟกัสที่ $(0,-\frac{3}{2})$

ระยะทางจากจุด $(-2,1)$ กับ $(0,-\frac{3}{2})$ เท่ากับ

$$\sqrt{(-2-0)^2+(1+\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

วิธีลัด ข้อนี้ต้องหาจุดศูนย์กลาง $(-2,1)$ และจุดโฟกัส $(0,-\frac{3}{2})$ ได้ก่อนแต่ถ้าลืมสูตรระยะทางระหว่างจุดก็ใช้วัดระยะทางกันเลย



เมื่อวัดความยาวได้เท่ากับ 3.2

ดูตัวเลือกเลยว่าเลือกได้หรือยัง ปรากฏว่าตัวเลือกอยู่ในรูปของราก ที่ 2 ทั้งนั้น อย่าท้อถอย ทำต่ออีกนิดโดยเอา $(3.2)^2 = 10.24$ แล้วเอาตัวเลือกยกกำลัง 2 ด้วยทุกตัว

1. $(\frac{\sqrt{17}}{2})^2 = \frac{17}{4} = 4.25$
2. $(\frac{\sqrt{25}}{2})^2 = \frac{25}{4} = 6.25$
3. $(\frac{\sqrt{29}}{2})^2 = \frac{29}{4} = 7.25$
4. $(\frac{\sqrt{41}}{2})^2 = \frac{41}{4} = 10.25$

ถึงตอนนี้เราเลือกตัวเลือก 4. ดีที่สุด

17. ค่าของ $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. $\sqrt{2}$
3. 2
4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}$

$= \sqrt{2}-1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$$

$$= \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}} = \sqrt{9}-\sqrt{8}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{9}-\sqrt{8})$$

$$= \sqrt{9}-1$$

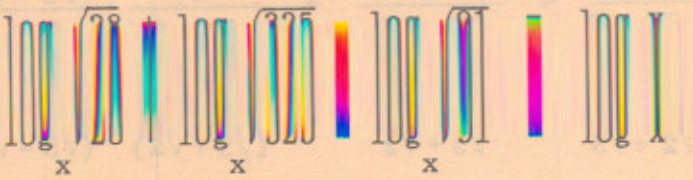
$$= 2$$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 1

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ กข ปี 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และเทคนิควิธีในการคัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

18. เซตคำตอบของสมการ



คือข้อใดต่อไปนี้

1. ϕ
2. $\{\frac{1}{10}\}$
3. $\{10\}$
4. $\{10, \frac{1}{10}\}$

ตอบ 4.

แนวคิด $\log_x \sqrt{28} + \log_x \sqrt{325} - \log_x \sqrt{91} = \log x$

$$\frac{1}{2}(\log_x 28 + \log_x 325 - \log_x 91) = \log x$$

$$\log_x (\frac{28 \cdot 325}{91}) = 2 \log x$$

$$\log_x 100 = 2 \log x$$

$$\frac{\log 100}{\log x} = 2 \log x$$

$$\frac{2}{\log x} = 2 \log x$$

$$(\log x)^2 = 1$$

$$\log x = 1, -1$$

$$x = 10, \frac{1}{10}$$

วิธีลัด แทนค่าเลย $x = 10$, $x = \frac{1}{10}$ มีแค่ 2 ค่าเท่านั้น พอพบว่าใช้ได้ทั้งคู่ก็เลือกตัวเลือก 4.

19. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\log (3x+4) = \log (x-1) + 1$$

B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2^{2x} + 2^{x} = 20$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A' = B$ 2. $A \cap B = \phi$

3. $A' \cap B' = \phi$ 4. $A \cap B' = \phi$

ตอบ 4.

แนวคิด

$$\begin{aligned} \log (3x+4) &= \log (x-1) + 1 \\ &= \log (x-1) + \log 10 \\ &= \log 10(x-1) \\ 3x+4 &= 10(x-1) \\ 7x &= 14 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A = \{2\}$

จาก $2^{2x} + 2^{x} = 20$

$$\begin{aligned} (2^{x})^{2} + 2^{x} - 20 &= 0 \\ (2^{x}+5)(2^{x}-4) &= 0 \\ 2^{x} &= 4 \quad (2^{x} = -5 \text{ ไม่ได้}) \\ x &= 2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $B = \{2\}$

ดังนั้น $A = B$ และ $A \cap B' = A \cap A' = \phi$

20. ค่าของ $\cos\frac{7\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{8\pi}{3}\right)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{9}{4}$ 2. $-\frac{3}{4}$

3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{9}{4}$

ตอบ 4.

แนวคิด
$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\frac{8\pi}{3} = \sin\left(3\pi-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\cos\frac{7\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{8\pi}{3}\right)$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$$
$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= \frac{9}{4}$$

วิธีลัด $\frac{7\pi}{6} \in Q_3$ จะได้ $\cos\frac{7\pi}{6}$ เป็นลบ

$\frac{5\pi}{3} \in Q_4$ จะได้ $\sin\frac{5\pi}{3}$ เป็นลบ

$\frac{8\pi}{3} \in Q_2$ จะได้ $\sin\frac{8\pi}{3}$ เป็นบวก

เพราะฉะนั้น $\cos\frac{7\pi}{6}\left(\sin\frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{8\pi}{3}\right)$ มีเครื่องหมายเป็น (ลบ)(ลบ − 2(บวก)) = (ลบ)(ลบ) = บวก

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

21. ถ้า $\frac{1}{\sin\theta+1} - \frac{1}{\sin\theta-1} = 4$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

แล้ว $\sin\theta \sec(\theta+\frac{\pi}{2})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -1
3. 0 4. 2

ตอบ 2.

แนวคิด

$$\frac{1}{\sin\theta+1} - \frac{1}{\sin\theta-1} = 4$$

$$\frac{(\sin\theta-1)-(\sin\theta+1)}{\sin^2\theta - 1} = 4$$

$$\frac{-2}{-\cos^2\theta} = 4$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ดังนั้น

$$\sin\theta \sec(\theta+\tfrac{\pi}{2}) = \sin\tfrac{\pi}{4} \sec(\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{2})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})(-\operatorname{cosec}\tfrac{\pi}{4})$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})(-\sqrt{2})$$

$$= -1$$

วิธีลัด 1 เพราะว่า $\sin\theta \sec(\theta+\frac{\pi}{2}) = \sin\theta \sec(\frac{\pi}{2}+\theta)$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)}$$

$$= \frac{\sin\theta}{-\sin\theta}$$

$$= -1$$

เพราะฉะนั้นเราจะได้ $\sin\theta \sec(\theta+\frac{\pi}{2}) = -1$

วิธีลัด 2 ลองให้เหตุผลตัดตัวเลือกบ้าง เพราะว่า $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\sin\theta$ เป็นบวก และ $\theta+\frac{\pi}{2} \in Q_2$

จะได้ $\sec(\theta+\frac{\pi}{2})$ เป็นลบ

เพราะฉะนั้น $\sin\theta \sec(\theta+\frac{\pi}{2})$ ต้องเป็นลบ

ใช้เหตุผลแค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 3. และ 4 ทิ้งได้

22. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\sin\theta > \tan\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
2. $\sin\theta < 1$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
3. $\tan\theta > 1$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
4. $\sin\theta < \cos\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

ตอบ 1.

แนวคิด 1. ผิด ตัวอย่างเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้

$0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ แต่ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not> 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

หมายเหตุ ลักษณะโจทย์ถามว่าข้อใดผิด การตัดตัวเลือกคือวิธีทำที่ดีวิธีหนึ่ง ดังนั้นเราจึงศึกษาตัวเลือกอื่นเพิ่มเติมเพื่อเพิ่มความรู้

2. ถูกต้อง เพราะว่า $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ เสมอ

ดังนั้นบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ ก็จะได้ว่า $\sin\theta \leq 1$

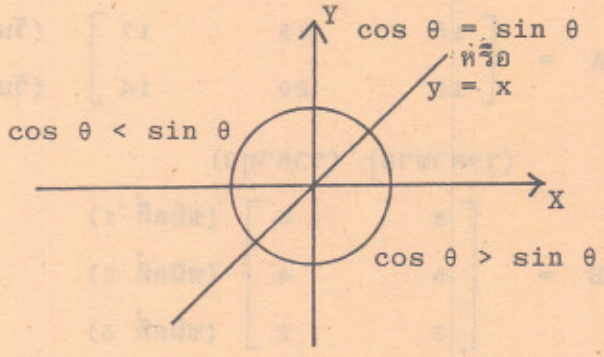
และ $\frac{\pi}{2} \notin (0, \frac{\pi}{2})$ ดังนั้น

$\sin\theta < 1$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ เป็นจริง

พิจารณา กราฟของเส้นตรง $y = x$ และวงกลมวงหนึ่งหน่วย

จะพบว่า บนเส้นตรง $y = x$ มีความหมายเช่นเดียวกับ

$\sin\theta = \cos\theta$ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{4}$



บนช่วง $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า $\sin\theta < \cos\theta$

สรุป $\sin\theta < \cos\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ เป็นจริง

บนช่วง $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ พบว่า $0 < \cos\theta < \sin\theta$

นั่นคือ $1 < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

สรุป $\tan\theta > 1$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$

โจทย์ข้อนี้น่าจะถือว่าเป็นโชคดีของผู้เข้าสอบที่ตัวเลือกผิดยกตัวอย่างได้ง่าย และยังอยู่ตัวเลือก 1. อีกด้วย

23. ถ้าจัดเก็บข้อมูลจำนวนไอศกรีมชนิดที่ 1, 2 และ 3 ซึ่งนายแดงขายได้ในวันเสาร์และอาทิตย์ที่ผ่านมาไว้ในเมตริกซ์ A และเก็บราคาขายกับราคาทุนต่อหน่วยไว้ในเมตริกซ์ B เป็นดังนี้

(ชนิดที่ 1) (ชนิดที่ 2) (ชนิดที่ 3)

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 18 & 17 \\ 12 & 20 & 14 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(วันเสาร์)} \\ \text{(วันอาทิตย์)} \end{matrix}$$

(ราคาขาย) (ราคาทุน)

$$B = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{(ชนิดที่ 1)} \\ \text{(ชนิดที่ 2)} \\ \text{(ชนิดที่ 3)} \end{matrix}$$

จงหาว่าในวันอาทิตย์ นายแดงขายไอศกรีมได้กำไรเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 65 2. 58
3. 23 4. 16

ตอบ 2.

แนวคิด ในวันอาทิตย์นายแดงขายไอศกรีมได้กำไรดังนี้

จากชนิดที่ 1

(ราคาขาย - ราคาทุน) × จำนวนที่ขายได้ = (8-6)(12) = 24

จากชนิดที่ 2

(ราคาขาย - ราคาทุน) × จำนวนที่ขายได้ = (5-4)(20) = 20

จากชนิดที่ 3

(ราคาขาย - ราคาทุน) × จำนวนที่ขายได้ = (3-2)(14) = 14

รวมกำไรในวันอาทิตย์ = 24+20+14 = 58

24. กำหนดให้ $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

ถ้า B เป็นเมตริกซ์ 2×2 ที่สอดคล้องสมการ $BA^{-1} = A^t$

แล้ว B คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ตอบ 3.

แนวคิด $BA^{-1} = A^t$

$BA^{-1}A = A^tA$

$$B = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\right)^t \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีลัด เราสามารถใช้ค่ากำหนดช่วยในการตัดตัวเลือก

$$\det (BA^{-1}) = \det (A^t)$$

$$\det (B) \det (A^{-1}) = \det (A)$$

$$\frac{\det (B)}{\det (A)} = \det (A)$$

$$\det (B) = (\det (A))^2$$

เพราะว่า $\det (A) = 1$ เพราะฉะนั้น $\det (B) = 1$

พิจารณาตัวเลือก

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ 2. $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ 4. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งไปเลย

25. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} \sin x & 2\sin x \\ -\cos x & 2\cos x \end{bmatrix}$$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-2\pi, 2\pi\}$
2. $\{-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$
3. $\{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$
4. $\{-2\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi\}$

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $A = \begin{bmatrix} \sin x & 2\sin x \\ -\cos x & 2\cos x \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x \\ &= \sin 2x + \sin 2x \\ &= 2\sin 2x \end{aligned}$$

A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$

ก็ต่อเมื่อ $2\sin 2x = 0$

ก็ต่อเมื่อ $\sin 2x = 0$

ก็ต่อเมื่อ $2x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \pm 4\pi, \ldots$

เพราะว่า $x \in [-2\pi, 2\pi]$

เพราะฉะนั้น $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm 2\pi$

วิธีลัด ใช้แทนค่ามุม θ โดยเลือกมุมที่จำแนกตัวเลือกได้เช่น

$\theta = 2\pi$ กับ -2π ไม่ควรใช้เพราะมีทุกตัวเลือก

เลือก $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์เอกฐาน ดังนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ตัดทิ้งได้

พิจารณาตัวเลือก 2. กับ 4. เลือก θ ที่ไม่มีร่วมกัน

เช่น $\theta = \frac{3\pi}{2}$ จะได้ $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

เป็นเมตริกซ์เอกฐาน ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

26. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1998 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2 & \text{เมื่อ } 0 \leq x < 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } 1 < x \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2$

ข. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก.ถูก และ ข.ถูก
2. ก.ถูก และ ข.ผิด
3. ก.ผิด และ ข.ถูก
4. ก.ผิด และ ข.ผิด

ตอบ 4.

คณิตศาสตร์ ก 2537

แนวคิด พิจารณา ก. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2 = 2$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1998 = 1998$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ สรุป ก. ผิด

พิจารณา ข. $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 2x = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2 = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ สรุป ข. ผิด

27. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-2} & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ x + \frac{1}{3} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดซึ่ง $x = -1$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดซึ่ง $x = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก.ถูก และ ข.ถูก
2. ก.ถูก และ ข.ผิด
3. ก.ผิด และ ข.ถูก
4. ก.ผิด และ ข.ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณา ก. $f(-1) = \frac{2}{-1-2} = -\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x + \frac{1}{3} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{-1-2} = -\frac{2}{3}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดซึ่ง $x = -1$ สรุป ก. ถูก

พิจารณา ข. เพราะว่า $f(2) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

และ $\lim_{x\to 2} f(2) = \lim_{x\to 2} x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดซึ่ง $x = 2$

สรุป ข. ถูก

28. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 3$

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 3$$

ความชันของเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = 1$ ของฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

1. $f(x)$
2. $g(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$
4. $(\frac{f}{g})(x)$

ตอบ 4.

แนวคิด $f'(x) = 3x^2$ จะได้ $f'(1) = 3$

$$g(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} - 3$$

จะได้ $g'(x) = -2x^{-\frac{3}{2}}$ และ $g'(1) = -2$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$= (3x^2)(4x^{-\frac{1}{2}} - 3) + (x^3+3)(-2x^{-\frac{3}{2}})$$

$$(f\cdot g)'(1) = (3)(4-3) + (1+3)(-2) = -5$$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{(4x^{-\frac{1}{2}} - 3)(3x^2) - (-2x^{-\frac{3}{2}})(x^3+3)}{(4x^{-\frac{1}{2}} - 3)^2}$$

$$(\frac{f}{g})'(x) = \frac{(4-3)(3) - (-2)(1+3)}{(4-3)^2} = 11$$

สรุป ความชันเส้นโค้ง $\frac{f}{g}$ ที่จุด $x = 1$ มีค่ามากที่สุด

วิธีลัด $f(1) = 1+3 = 4$ $\quad f'(1) = 3$

$g(1) = 1$ $\quad g'(1) = -2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

$$(f\cdot g)'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$$

$$= (3)(1) + (4)(-2) = -5$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

$$(\frac{f}{g})'(1) = \frac{g(1)f'(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2}$$

$$= \frac{(1)(3) - (-2)(4)}{1^2} = 11$$

เพราะฉะนั้นเลือกข้อ 4. ถูกต้องแน่นอน

29. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$

แล้วเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x = \frac{2}{3}$ จะขนานกับเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

1. $6x+3y-7 = 0$ 2. $8x+3y+5 = 0$

3. $8x-3y-4 = 0$ 4. $4x+3y-11 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$

จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x - 6$

ที่จุด $x = \frac{2}{3}$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3(\frac{2}{3})^2 + 3(\frac{2}{3}) - 6$

$= \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = \frac{2}{3}$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{8}{3}$

ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $8x+3y+5 = 0$

วิธีลัด ดูแค่ความชันเส้นตรงของโจทย์คือ $-\frac{8}{3}$

และความชันเส้นตรงของตัวเลือก

1. ความชัน = -2 2. ความชัน = $-\frac{8}{3}$

3. ความชัน = $\frac{8}{3}$ 4. ความชัน = $-\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 3. และ 4. ทิ้ง

30. ชาวสวนผู้หนึ่งสังเกตว่าถ้าเขาปลูกมะม่วง 80 ต้น ในพื้นที่หนึ่ง จะได้ผลเฉลี่ย 150 ผลต่อต้น แต่ถ้าเขาปลูกให้น้อยลงจะได้ผลเฉลี่ยเพิ่มขึ้นต้นละ 5 ผลต่อจำนวนมะม่วงที่ลดลง 1 ต้น ถ้า N เป็นจำนวนต้นมะม่วงที่ปลูกในพื้นที่นี้เพื่อให้ได้ผลผลิตมากที่สุด แล้ว N เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $25 \leqslant N < 40$
2. $40 \leqslant N < 55$
3. $55 \leqslant N < 70$
4. $70 \leqslant N < 80$

ตอบ 3.

แนวคิด จากเงื่อนไขที่โจทย์บอกมาเราพิจารณาเป็นตารางดังนี้

ให้ x เป็นจำนวนต้นมะม่วงที่ปลูกลดลงจากเดิมที่มี 80 ต้น

จำนวนต้น	จำนวนผล/ต้น	จำนวนผลทั้งหมด
80	150	(80)(150) = 12000
80-1	150+5	(80-1)(150+5) = 12245
80-2	150+10	(80-2)(150+10) = 12480
⋮	⋮	⋮
80-x	150+5x	(80-x)(150+5x)

f(x) = จำนวนผลผลิตรวมเมื่อปลูกลดลง x ต้น

f(x) = (80-x)(150+5x)

$f(x) = 12000+250x-5x^2$

$f'(x) = 250-10x$

$f''(x) = -10$

เพราะว่า $f'(x) = 0$

$250-10x = 0$

$x = 25$

และ $f''(25) < 0$ เพราะฉะนั้น $f(25)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่าบนช่วง $(-\infty,25)$, $f'(x) > 0$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty,25)$

เพราะว่าบนช่วง $(25,\infty)$, $f'(x) < 0$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(25,\infty)$

สรุป $f(25)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $N = 80-25 = 55$

วิธีลัด จากการที่ $f(x) = 12000 + 250x - 5x^2$

$= -5(x^2 - 50x - 2400)$

$= -5[(x^2-50x+625) - 3025]$

$= -5((x-25)^2 - 3025)$

$= 15125 - 5(x-25)^2$

ดังนั้น $f(x)$ มากที่สุด เมื่อ $x = 25$ นั่นคือ $N = 55$

หมายเหตุ การใช้แคลคูลัสตามวิธีจริงยังเป็นเรื่องสำคัญ เพราะว่าถ้า $f(x)$ ไม่เป็นพาราโบลา เราจะใช้วิธีลัดไม่ได้

31. จำนวนวิธีจัดเรียงอักษรในคำ ENTRANCE ซึ่งอักษร E ไม่อยู่ติดกัน เท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. 2520
2. 7560
3. 8820
4. 10080

ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนอักษรในคำว่า ENTRANCE มีทั้งหมด 8 ตัว เป็นตัว E, N อย่างละ 2 ตัว เป็นตัว T, R, A, C อย่างละตัว

จัดลำดับแบบไม่มีเงื่อนไขทำได้ $\frac{8!}{2!2!}$ = 10080 วิธี

เมื่อบังคับให้ E ต้องติดกันจะจัดลำดับได้ $\frac{7!}{2!}$ = 2520 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่ E ไม่อยู่ติดกันเท่ากับ 10080 - 2520 = 7560 วิธี

32. สามีภรรยาคู่หนึ่งมีลูกอยู่ 2 คน มีทรัพย์สินอยู่ 10 อย่าง โดยที่ถ้าจัดกลุ่มตามมูลค่าที่ใกล้เคียงกัน จะแบ่งได้เป็นสองกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมี 4 อย่าง กลุ่มที่สองมี 6 อย่าง และได้เขียนพินัยกรรมโดยระบุว่าลูกคนโตได้ทรัพย์สินจากกลุ่มที่หนึ่ง 2 อย่าง และจากกลุ่มที่สอง 3 อย่าง ผู้จัดการมรดกจะแบ่งทรัพย์สินให้แก่ลูกคนโตได้กี่วิธี

1. 120
2. 240
3. 252
4. 1440

ตอบ 1.

แนวคิด จำนวนวิธีได้ทรัพย์สิน 2 อย่างจากกลุ่มที่หนึ่งมีค่าเท่ากับ

$$\binom{4}{2} = 6$$

จำนวนวิธีได้ทรัพย์สิน 3 อย่างจากกลุ่มที่สองมีค่าเท่ากับ $\binom{6}{3} = 20$

สรุป จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $6 \times 20 = 120$

33. ในการเลือกคณะกรรมการ 5 คน จากผู้สมัคร 11 คน ถ้าผู้สมัครสองคนที่กำหนดให้จะไม่ถูกเลือกพร้อมกันหรือไม่ถูกเลือกทั้งคู่ จำนวนวิธีการเลือกคือข้อใดต่อไปนี้

1. 420
2. 378
3. 252
4. 210

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ ก. และ ข. เป็นคนสองคนที่กำหนดให้

กรณี 1 ก. และ ข. ไม่ถูกเลือกทำได้ $\binom{9}{5} = 126$ วิธี

กรณี 2 ก. ได้รับเลือก และ ข. ไม่ได้รับเลือก

ทำได้ $\binom{9}{4} = 126$ วิธี

กรณี 3 ก. ไม่ได้รับเลือก และ ข. ได้รับเลือก

ทำได้ $\binom{9}{4} = 126$ วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $126+126+126 = 378$

วิธีลัด จำนวนวิธีเลือกคน 5 คนจาก 11 คน ทำได้

$$\binom{11}{5} = 462 \text{ วิธี}$$

จำนวนวิธีในการเลือกคน 5 คนจาก 11 คน โดยได้ ก. และ ข.

ทั้งสองคนทำได้ $\binom{2}{2}\binom{9}{3} = 84$ วิธี

ดังนั้นจำนวนวิธีที่จะได้ว่าคนสองคนที่กำหนดจะไม่ถูกเลือกพร้อมกัน

หรือไม่ถูกเลือกทั้งคู่ $= 462-84 = 378$

34. กำหนดให้ A,B,C เป็นเหตุการณ์ใดๆ

ถ้า $P(A\cup B\cup C) = 0.9$ โดยที่

$P(A\cap B'\cap C') = P(B\cap A'\cap C') = P(C\cap A'\cap B') = 0.1$

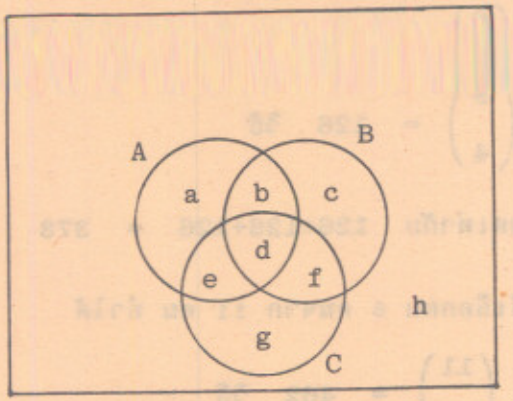
และ $P(A\cap B) = P(B\cap C) = P(A\cap C) = 0.2$ แล้ว

$P(A\cap B\cap C)$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 0.05
3. 0.1
4. 0.15

ตอบ 1.

แนวคิด โดยการใช้แผนภาพของเวนน์



a,b,c,d,e,f,g และ h เป็นความน่าจะเป็นของแต่ละบริเวณดังรูป

เพราะว่า	เพราะฉะนั้น
$P(A \cup B \cup C) = 0.9$	$a+b+c+d+e+f+g = 0.9$ ..(1)
$P(A \cap B' \cap C') = 0.1$	$a = 0.1$ .....(2)
$P(B \cap A' \cap C') = 0.1$	$c = 0.1$ .....(3)
$P(C \cap A' \cap B') = 0.1$	$g = 0.1$ .....(4)
$P(A \cap B) = 0.2$	$b+d = 0.2$ .....(5)
$P(B \cap C) = 0.2$	$d+f = 0.2$ .....(6)
$P(A \cap C) = 0.2$	$d+e = 0.2$ .....(7)

(2)+(3)+(4) ; $a+c+g = 0.3$

(5)+(6)+(7) ; $b+d+d+f+d+e = 0.6$

$b+f+e = 0.6 - 3d$

จาก (1) $a+b+c+d+e+f+g = 0.9$

$$(a+c+g)+d+(b+f+e) = 0.9$$

$$0.3 + d + 0.6 - 3d = 0.9$$

$$d = 0$$

สรุป $P(A \cap B \cap C) = 0$

35. โยนเหรียญ 1 อัน พร้อมกับลูกเต๋า 2 ลูก ถ้าเหรียญขึ้นหัว จะได้เงินเท่ากับผลบวกของแต้มจากลูกเต๋าทั้งสอง ถ้าเหรียญขึ้นก้อยจะได้เงินเท่ากับผลต่างของแต้ม ความน่าจะเป็นที่จะได้เงินอย่างมาก 4 บาท มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{1}{9}$
3. $\frac{17}{36}$ 4. $\frac{5}{9}$

ตอบ 4.

แนวคิด ให้ (x,y,z) เป็นอันดับที่บอกลักษณะผลทดลอง

x เป็น หัว (H) หรือ ก้อย (T)

y เป็นแต้มลูกเต๋าลูกที่ 1 ; $y = 1,2,\ldots,6$

z เป็นแต้มลูกเต๋าลูกที่ 2 ; $z = 1,2,\ldots,6$

$S = \{(x,y,z) \mid x = H, T \text{ และ } y,z = 1,2,\ldots,6\}$

เพราะฉะนั้น $n(S) = 2\times6\times6 = 72$

A = เหตุการณ์ได้หัว และ $y+z \leq 4$

$A = \{(H,y,z) \mid y+z \leq 4\}$

เพราะว่า $y+z \leq 4$ มี 6 วิธี ดังนั้น $n(A) = 6$

B = เหตุการณ์ได้ก้อย และ $|y-z| \leq 4$

$B = \{(T, y, z) \mid |y-z| \leq 4\}$

เพราะว่าเหตุการณ์ที่ $|y-z| > 4$ มี 2 วิธีเท่านั้น

คือ (T,1,6) หรือ (T,6,1)

$$n(B) = 36 - 2 = 34$$

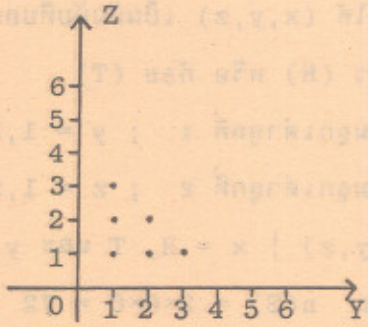
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$= 6 + 34 - 0$$
$$= 40$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เงินอย่างมาก 4 บาท เท่ากับ

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$

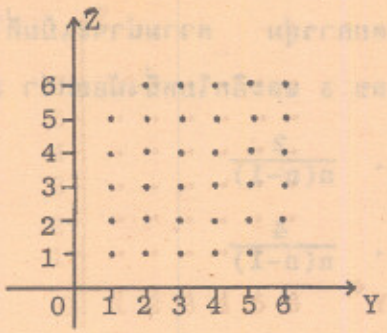
วิธีลัด ใช้การนับจริงจากกราฟแสดงแต้มที่ได้จากการโยนลูกเต๋า

กรณีเหรียญขึ้นหัว (H) y และ z เป็นไปได้ 36 วิธี



$y+z \leq 4$ มีจำนวน 6 วิธี

กรณีเหรียญขึ้นก้อย (T) y และ z เป็นไปได้ 36 วิธี



$|y-z| \leq 4$ มี 34 วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้เงินอย่างมาก 4 บาท

$$= \frac{6+34}{72}$$

$$= \frac{5}{9}$$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม. ปลาย) ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ที่สอบเมื่อวันที่ 9 มกราคม 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และ เทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

กำหนดวางตลาด กลางเดือนสิงหาคม 2537

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

36. กล่องใบหนึ่งมีบัตร n ใบ บัตรแต่ละใบเขียนเลขไม่ซ้ำกันกำกับ

โดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่ได้บัตร 2 ใบโดยที่ใบหนึ่งเป็นเลข 3 และอีกใบหนึ่งน้อยกว่า 3 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{n(n-1)}$
2. $\frac{2}{n^2}$
3. $\frac{4}{n(n-1)}$
4. $\frac{4}{n^2}$

ตอบ 3.

แนวคิด จำนวนวิธีหยิบบัตร 2 ใบ จาก n ใบทำได้ $\binom{n}{2}$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้ใบหนึ่งเป็นหมายเลข 3 และอีกใบหนึ่งน้อยกว่า 3 พิจารณาดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การได้เลข 3 ทำได้ $\binom{1}{1} = 1$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 การได้เลข 1 หรือ 2 ทำได้ $\binom{2}{1} = 2$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีได้ 3 หนึ่งใบ และอีกใบเป็น 1 หรือ 2 เท่ากับ (1)(2) = 2 วิธี

ความน่าจะเป็นที่ต้องการ $= \frac{2}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)}$

วิธีลัด ข้อนี้มีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร โดยการแทนค่า n = 3 จะได้ว่ามีเลข 1,2,3 แล้วหยิบออกมา 2 ตัว จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่ได้ 3 หนึ่งใบ และอีกใบน้อยกว่า 3

$$= \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

เมื่อ n = 3 ตัวเลือกแต่ละตัวให้ค่าดังนี้

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{9}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{4}{9}$

ดังนั้นตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้เลย

หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้ตรงกับข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2535

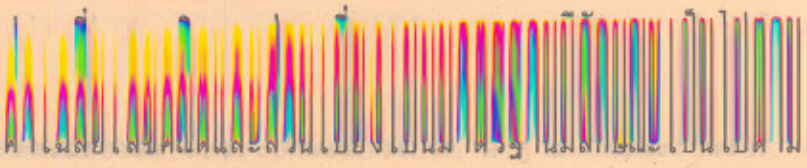
คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม. ปลาย) ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ที่สอบเมื่อวันที่ 9 มกราคม 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และ เทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

กำหนดวางตลาด กลางเดือนสิงหาคม 2537

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

37. ถ้า 3,6,2,1,7,5 และ 8,6,3,7,2,4 เป็นข้อมูล 2 ชุดแล้ว



ข้อใดต่อไปนี้

1. ค่าเฉลี่ยเท่ากัน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน
2. ค่าเฉลี่ยเท่ากัน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน
3. ค่าเฉลี่ยต่างกัน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากัน
4. ค่าเฉลี่ยต่างกัน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่างกัน

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อมูล 3,6,2,1,7,5 มี

ค่าเฉลี่ย $= \frac{\Sigma x}{6} = \frac{24}{6} = 4$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{6} - \bar{x}^2}$

$= \sqrt{\frac{124}{6} - 16} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

ข้อมูลชุดที่สอง 8,6,3,7,2,4 มี

ค่าเฉลี่ย $= \frac{\Sigma x}{6} = \frac{30}{6} = 5$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{6} - \bar{x}^2}$

$= \sqrt{\frac{178}{6} - 25} = \sqrt{\frac{14}{3}}$

วิธีลัด ถ้านักเรียนลืมสูตร s^2 แต่จำสูตรค่าเฉลี่ยได้ก็จะพบว่าค่าเฉลี่ยของข้อมูล 2 ชุด ต่างกัน จึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

38. ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่งมีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 60 และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับ 20% ถ้าผู้ที่สอบได้ระดับ A ต้องได้ค่ามาตรฐานไม่ต่ำกว่า 2.5 แล้วคะแนนต่ำสุดของผู้ที่จะสอบได้ระดับ A คือคะแนนในข้อใดต่อไปนี้

1. 95 2. 90
3. 88 4. 85

ตอบ 2.

แนวคิด $\bar{x} = 60$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= 0.2$

$$\frac{s}{\bar{x}} = 0.2$$

เพราะฉะนั้น $s = 0.2\ (\bar{x}) = 12$

คะแนนมาตรฐาน $z = 2.5$

$$\frac{x-\bar{x}}{s} = 2.5$$

$$\frac{x-50}{12} = 2.5$$

$$x = 90$$

เพราะฉะนั้นคะแนนต่ำสุดของกลุ่มที่ได้ A คือ 90

39. ในปี 2529 ชายคนหนึ่งมีรายได้เดือนละ 4,000 บาท ภริยามี

รายได้ 3,500 บาท และลูกยังไม่มีรายได้ ต่อมาในปี 2535 เขามีรายได้เดือนละ 5,050 บาท ภริยามีรายได้ 4,550 บาท และลูกมีรายได้ 2,400 บาท ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของ พ.ศ. 2535 เท่ากับ 130.0 (พ.ศ. 2529 = 100) แล้ว รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของครอบครัวนี้ในปี 2535 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (รายได้ต่อเดือนของครอบครัวหมายถึงผลรวมของรายรายได้ต่อเดือนของคนที่มีรายได้ในครอบครัวทุกคน)

1. 9,230.77 บาท 2. 9,750.00 บาท
3. 10,961.54 บาท 4. 12,000.00 บาท

ตอบ 1.

แนวคิด ในปี 2535 รายได้รวมของครอบครัวเท่ากับ

$$5050+4550+2400 = 12000$$

เพราะฉะนั้นรายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของครอบครัวปี 2535

$$= \frac{\text{รายได้รวมปี 2535}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2535}} \times 100$$

$$= \frac{12000}{130} \times 100$$

$$= 9230.77 \text{ บาท}$$

ข้อ 40 - 41 ให้ใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้

ข้อมูลในตารางต่อไปนี้ แสดงรายได้ต่อเดือนของเกษตรกรในตำบลหนึ่ง

รายได้ (บาท)	จำนวนครัวเรือน
1500 - 1799	15
1800 - 2099	20
2100 - 2399	35
2400 - 2699	15
2700 - 2999	10
3000 - 3299	5

40. จากข้อมูลที่กำหนดให้ ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูก

1. เกษตรกรจำนวน 30 ครัวเรือนมีรายได้สูงกว่าเดือนละ 2,400 บาท
2. เกษตรกรมีรายได้ต่ำที่สุดเดือนละ 1,500 บาท
3. เกษตรกรร้อยละ 85 มีรายได้ต่ำกว่าเดือนละ 2,699.50 บาท
4. เกษตรกรจำนวน 55 ครัวเรือนมีรายได้ตั้งแต่ 1,799 บาท ถึง 2,399 บาท

ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด เพราะว่ามีเกษตรกรจำนวน 30 ครัวเรือน มีรายได้สูงกว่าเดือนละ 2,399.50 บาท

2. ผิด เพราะว่าเกษตรกรมีรายได้ต่ำที่สุดเดือนละ 1,499.50 บาท

3. ถูกต้อง เพราะว่าคนที่มีรายได้ต่ำกว่าเดือนละ 2,699.50 บาท มีจำนวน 15+35+20+15 = 85 คน จากคนทั้งหมด 100 คน จึงคิดเป็น 85 % ของทั้งหมด

4. ผิด เพราะว่าเกษตรกรจำนวน 55 ครัวเรือน มีรายได้ตั้งแต่ 1,799.50 บาท ถึง 2,399.50 บาท

41. ถ้าจากข้อมูลที่กำหนดให้ทราบว่าเกษตรกรร้อยละ 25 มีรายได้ต่ำกว่า 1,949.50 บาท ค่าส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของรายได้ของเกษตรกรตำบลนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 275 บาท
2. 325 บาท
3. 550 บาท
4. 650 บาท

ตอบ 1.

แนวคิด จากข้อมูล $Q_1 = 1949.50$

Q_3 อยู่ในชั้น 2400 - 2699

$$Q_3 = 2399.5 + (\frac{75-70}{15})(2699.5 - 2399.5)$$
$$= 2399.5 + 100$$
$$= 2499.5$$

เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์

$$= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{2499.5 - 1949.5}{2} = 275$$

ตอนที่ 2

1. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x & -1 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det(AB^t) = \det C$ แล้ว $x+y$ มีค่าเท่าใด

ตอบ 0

แนวคิด $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$AB^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\det(AB^t) = 0$

เพราะว่า $\det(C) = x+y$

เพราะฉะนั้น $x+y = 0$

2. ตะกร้าใบหนึ่งมี ส้ม น้อยหน่า และมะม่วง รวม 10 ลูก โดยที่จำนวนส้มเป็นสองเท่าของน้อยหน่า และมีมะม่วงอยู่ 1 ลูก ถ้าหยิบผลไม้ขึ้นมา 3 ลูกอย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่ได้ผลไม้ชนิดละ 1 ลูก มีค่าเป็นเท่าใด

ตอบ 0.15

แนวคิด มะม่วง 1 ผล

x เป็นจำนวนส้ม และ y เป็นจำนวนน้อยหน่า

$$x+y = 10-1 = 9$$

จากจำนวนส้มเป็น 2 เท่าของน้อยหน่า จะได้ $x = 2y$

เพราะฉะนั้น $x + y = 9$

$$2y + y = 9$$

$$y = 3$$

สรุป มีมะม่วง 1 ผล ส้ม 6 ผล และน้อยหน่า 3 ผล

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบออกมา 3 ลูกพร้อมกันแล้วได้ผลไม้อย่างละ 1 ลูก มีค่าเท่ากับ

$$\frac{\binom{1}{1}\binom{6}{1}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} = 0.15$$

3. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 4 ค่า ถ้ามัธยฐาน และฐานนิยมเท่ากัน และเท่ากับ 35 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 40 และพิสัยเท่ากับ 50 แล้ว ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด (ข้อมูลชุดนี้มีเพียง 2 ค่าที่เท่ากัน)

ตอบ 337.5

แนวคิด a, b, c, d เป็นข้อมูลที่ต้องการโดยที่

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$$

เพราะว่าพิสัย = 50 เพราะฉะนั้น

$$d - a = 50 \quad \text{_____(1)}$$

เพราะว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 40 เพราะฉะนั้น

$$\frac{a+b+c+d}{4} = 40$$

$$a+b+c+d = 160 \quad \text{_____(2)}$$

เพราะว่ามัธยฐาน = 35 เพราะฉะนั้น

$$\frac{b+c}{2} = 35$$

$$b+c = 70 \quad \text{_____(3)}$$

แทนค่า $b+c = 70$ ใน (2) จะได้

$$a+70+d = 160$$

$$a+d = 90 \quad \text{_____(4)}$$

จาก (1) และ (4) จะได้ $a = 20$

$d = 70$

เพราะฉะนั้น $b = c = 35$

ความแปรปรวน $= \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{4}$

$= \frac{(20-40)^2+(35-40)^2+(35-40)^2+(70-40)^2}{4}$

$= \frac{400+25+25+900}{4}$

$= 337.5$

4. ถ้าราคาและปริมาณของหม้อหุงข้าวยี่ห้อหนึ่ง 3 ขนาดที่ร้านสหการไฟฟ้าจำหน่ายในเวลา 3 ปี เป็นดังนี้

ขนาดของหม้อหุงข้าว	ราคาต่อหน่วย (ร้อยบาท)		
	2534	2535	2536
ขนาดเล็ก	5.5	5.0	4.0
ขนาดกลาง	7.0	6.5	6.0
ขนาดใหญ่	11.5	11.0	10.0

เมื่อใช้ปี 2534 เป็นปีฐาน ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของปี 2535 เป็นเท่าใด

ตอบ 93.75

แนวคิด ราคารวมของปี 2534 เท่ากับ 5.5+7.0+11.5 = 24
ราคารวมของปี 2535 เท่ากับ 5.0+6.5+11.0 = 22.5
เพราะฉะนั้นดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของปี 2535 เท่ากับ

$$\frac{22.5}{24} \times 100 = 93.75$$

5. ถ้า $S = \{-50,-49,-48,\ldots,0,1,2,\ldots,98,99,100\}$
และ $f : S \longrightarrow R$ กำหนดโดย $f(x) = x^2+15x$ แล้ว
จำนวนของสมาชิก $a \in S$ ที่ $f(a) \in S$ ทั้งหมด เท่ากับเท่าใด

ตอบ 22

แนวคิด พิจารณาเมื่อ $-50 \leq x \leq 100$

จะได้ $0 \leq x^2 \leq 10000$

$-750 \leq 15x \leq 1500$

$-750 \leq x^2+15x \leq 11500$

$f(x) = x^2+15x$

$f'(x) = 2x+15$

$f''(x) = 2$

เพราะว่า $f'(x) = 0$

$2x+15 = 0$

$x = -7.5$

เพราะฉะนั้น ถ้า $-50 \leq x < -7.5$ แล้ว $f'(x) < 0$

ถ้า $-7.5 < x \leq 100$ แล้ว $f'(x) > 0$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-50,-7.5]$

และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-7.5,100]$

พิจารณา $f(x) = -50$

$x^2+15x = -50$

$$x^2+15x+50 = 0$$

$$(x+5)(x+10) = 0$$

$$x = -5, -10$$

พิจารณา $f(x) = 100$

$$x^2+15x = 100$$

$$x^2+15x-100 = 0$$

$$(x+20)(x-5) = 0$$

$$x = -20, 5$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-20,-10]$

เพราะฉะนั้น $f(-5) \leqslant f(x) \leqslant f(-20)$

นั่นคือ $-50 \leqslant f(x) \leqslant 100$ เมื่อ $x \in [-20,-10]$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-5,5]$

เพราะฉะนั้น $f(-5) \leqslant f(x) \leqslant f(5)$

นั่นคือ $-50 \leqslant f(x) \leqslant 100$ เมื่อ $x \in [-5,5]$

สรุป $x \in [-20,-10] \cup [-5,5]$

จะได้ $-50 \leqslant f(x) \leqslant 100$

เพราะฉะนั้น $\{a \in S \mid f(a) \in S\}$

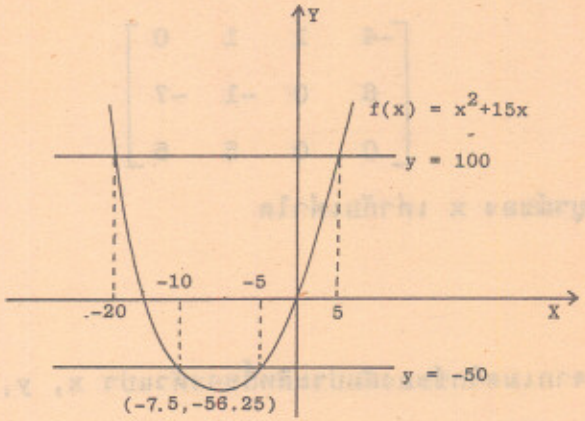
$= \{a \in S \mid -50 \leqslant f(x) \leqslant 100\}$

$= \{-20,-19,\ldots,-10,-5,-4,\ldots,5\}$

มีสมาชิกทั้งหมด 22 ตัว

วิธีลัด จากสูตร $f(x) = x^2+15x$

จะได้ว่ากราฟเป็นพาราโบลาหงายจุดยอดที่ $(-7.5,-56.25)$



ลากเส้นตรง $y = -50$ และ $y = 100$

แก้สมการ $y = -50$ และ $y = x^2+15x$ ได้ $x = -10, -5$

แก้สมการ $y = 100$ และ $y = x^2+15x$ ได้ $x = -20, 5$

จากรูปพาราโบลาจะเห็นว่า

ถ้า $-20 \leq x \leq -10$ แล้ว $-50 \leq x^2+15x \leq 100$

ถ้า $-5 \leq x \leq 5$ แล้ว $-50 \leq x^2+15x \leq 100$

นั่นคือ $\{a \in S \mid f(a) \in s\}$

$= \{-20,-19,\ldots,-10,-5,-4,\ldots,5\}$

มีสมาชิก 22 ตัว

หมายเหตุ ในโจทย์ข้อนี้วิธีจริงโดยใช้แคลคูลัสยังเป็นวิธีที่ดี เพราะว่าถ้า $f(x)$ ไม่มีกราฟเป็นพาราโบลา การใช้วิธีลัดจะเป็นเรื่องยาก

6. ถ้าเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x,y,z และค่าคงตัวของระบบสมการเชิงเส้นระบบหนึ่งเขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

ค่าสัมบูรณ์ของ x เท่ากับเท่าใด

ตอบ 1

แนวคิด จากเมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x, y, z และค่าคงตัว จะได้สมการ

$$-4x + y + z = 0 \quad \text{_____(1)}$$

$$6x - z = -7 \quad \text{_____(2)}$$

$$5z = 5 \quad \text{_____(3)}$$

เพราะฉะนั้น $z = 1$

แทนค่าใน (2) จะได้ $6x - 1 = -7$

$$x = -1$$

เพราะฉะนั้น $|x| = 1$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม. ปลาย) ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

กำหนดวางตลาด กลางเดือนสิงหาคม 2537

เกี่ยวกับผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การศึกษา

วท.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานที่ทำ

รองศาสตราจารย์ ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์
(2528-2537)

อาจารย์สอนเสริมมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2526-2537)

ผลงานตำรา

- พีชคณิตเชิงเส้น (2537)
- ภาษาเบสิก (2531)
- คณิตศาสตร์ชั้นสูง (2532)
- ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมตริกซ์ (2534)
- คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 1

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 2

เนื้อหาภายในเล่มมีข้อสอบแข่งขันเข้ามหาวิทยาลัย วิชาคณิต-ศาสตร์ ก. ประจำปีการศึกษา 2537 ครบทุกข้อ ด้วยรูปแบบการเฉลยข้อสอบ ที่ประกอบไปด้วยแนวคิดตามหลักสูตรของ สสวท. แนวคิดโดยวิธีลัดและเทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท
กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980-2, 2187000
โทรสาร 2554441

คณิตคาเลอร์ปรนัย เล่ม 2
ISBN 974-584-250-8
9 789745 842502