คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

สำหรับข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับม.ปลาย

ข้อสอบคณิตศาสตร์ (ม.ปลาย) ปีการศึกษา 2536
สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ข้อ 7. ให้ R เป็นเซตจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R กำหนดโดย

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$
$$g(x) = x^2-2$$

ข้อใดต่อไปนี้ ผิด

ก. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ทุก $x \geq 0$

ข. $R_{g \circ f} = R_{f \circ g} = [0, \infty)$

ค. $D_{g \circ f} = D_f$

ง. $D_{f \circ g} = D_g$

ตอบ ข.

แนวคิดโดยวิธีลัด เลือก $x = -1$

$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -1$

ดังนั้น $-1 \in R_{g \circ f}$

เพราะว่า $-1 \notin [0, \infty)$ เพราะฉะนั้น ตัวเลือก ข. ผิด

เล่มที่ 3

ISBN 974-584-756-9

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3
ISBN 974-584-756-9
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ.2537
จำนวน 3,000 เล่ม

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626
จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2, 2187000 โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 3

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3 นี้ได้นำข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ที่สอบไปเมื่อวันอาทิตย์ที่ 9 มกราคม 2537

การตัดตัวเลือกและวิธีลัดไม่ใช่การเดา แต่เป็นการประมวลความรู้ตามสภาพแวดล้อมของโจทย์และตัวเลือกขณะนั้นด้วยเหตุและผลที่เหมาะสม โดยใช้แนวทางการเฉลยตามวิธีของคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มนี้ จะเห็นว่าข้อสอบบางข้อนั้นอาจหาคำตอบได้โดยง่ายโดยไม่ต้องใช้วิธีลัด เช่นข้อ 1, 8, 18 ข้อสอบบางข้อนั้นเมื่อใช้เหตุผลตามวิธีจริงอาจจะเสียเวลาในการทำนาน แต่ถ้าใช้วิธีลัดหรือการตัดตัวเลือกจะได้คำตอบที่ถูกต้องและใช้เวลาน้อยกว่า เช่นข้อ 2, 7, 10, 12, 13, 15, 25, 32, 40, 41 นอกจากนั้นยังมีข้อสอบที่ทำวิธีตัดตัวเลือกไม่ได้ เช่นข้อ 30, 36, 37

สุดท้ายนี้ผมขอขอบคุณท่านกรรมการสมาคมคณิตศาสตร์ทุกท่านที่ได้จัดทำข้อสอบที่เป็นประโยชน์ต่อนักเรียน ครูผู้สอน และผู้สอบทุกท่าน

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์

ข้อสอบแข่งขันประจำปีการศึกษา 2536 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

สอบวันอาทิตย์ที่ 9 มกราคม พ.ศ.2537 เวลา 9.00-12.00 น.

ตอนที่ 1

1. กำหนดให้ $A = \{a,b,c,\{a,b\},\{c\}\}$

   ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

   ก. $\{a,b\} \in A$ ข. $\{a,b\} \subset A$

   ค. $\{a\} \subset A$ ง. $\{a\} \in A$

ตอบ ง.

แนวคิด ก. ถูก เพราะว่า $\{a,b\} \in A$

ข. ถูก เพราะว่า $a,b \in A$

ค. ถูก เพราะว่า $a \in A$

ง. ผิด เนื่องจากไม่มี $\{a\}$ เป็นสมาชิกของ A

2. สำหรับสับเซต A,B,C ใดๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

   ถ้า $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$ แล้วข้อความใดต่อไปนี้ผิด

   ก. $(A \cap B')\cup(A \cup B)' = B'$

   ข. $(A-C)\cap(B-C) = (A \cap B)-(A \cup C)$

   ค. $(A-C)\cap(B-C) = (A \cap B)-C$

   ง. $A \cap (A \cup B) \subset A$

ตอบ ข.

แนวคิด ข้อ ก. ถูก เพราะว่า

$$(A\cap B')\cup(A\cup B)' = (A\cap B')\cup(A'\cap B')$$
$$= (A\cup A')\cap B'$$
$$= \mathcal{U}\cap B'$$
$$= B'$$

ข้อ ข. ผิด เพราะว่า

$$(A-C)\cap(B-C) = (A\cap C')\cap(B\cap C')$$
$$= A\cap B\cap C'$$

แต่ $(A\cap B)-(A\cup C) = (A\cap B)\cap(A\cup C)'$
$$= (A\cap B)\cap(A'\cap C')$$
$$= \phi$$

ซึ่ง $A\cap B\cap C'$ อาจไม่เป็นเซตว่างก็ได้ เช่น

$A = \{1\}$, $B = \{1\}$ และ $C = \phi$

จะได้ว่า $A\cap B\cap C' = \{1\} \neq \phi$

ข้อ ค. ถูก เพราะว่า

$$(A-C)\cap(B-C) = (A\cap C')\cap(B\cap C')$$
$$= A\cap B\cap C'$$
$$= (A\cap B)-C$$

ข้อ ง. ถูก เพราะว่า $A\cap(A\cup B) = A \subset A$

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้ถือได้ว่า คำตอบเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่าที่เหมาะสมจะสามารถตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งได้ เช่น

$\mathcal{U} = \{1,2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{1\}$ และ $C \neq \phi$

ก. $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = (\{1\} \cap \{2\}) \cup (\{1\} \cup \{1\})'$

$= \phi \cup \{2\}$

$= \{2\}$

$= B'$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. อาจจะถูกต้อง

ข. $(A - C) \cap (B - C) = (\{1\} - \phi) \cap (\{1\} - \phi)$

$= \{1\} \cap \{1\}$

$= \{1\}$

แต่ $(A \cap B) - (A \cup C) = (\{1\} \cap \{1\}) - (\{1\} \cup \phi)$

$= \{1\} - \{1\}$

$= \phi$

เพราะฉะนั้นสูตรในตัวเลือก ข. ผิดแน่นอน

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ถามว่าข้อใดผิด เราจึงเลือกข้อ ข. เป็นคำตอบได้เลยโดยไม่ต้องสนใจ ก. ค. และ ง. อีก

ธ. ห.ร.ม. ของ −504 และ 450 มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 18 ข. −18

ค. 72 ง. ไม่มีค่า ห.ร.ม.

ตอบ ก.

แนวคิด

วิธีที่ 1 เพราะว่า ห.ร.ม.(−504,450) = ห.ร.ม.(504,450)

เพราะฉะนั้นเราจึงหา ห.ร.ม.(504,450) ก่อนดังนี้

เพราะว่า $504 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7$

$= 2^3\cdot 3^2\cdot 7$

และ $450 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5$

$= 2\cdot 3^2\cdot 5^2$

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.(504,450) = 18

วิธีที่ 2 โดยขั้นตอนวิธีของยุคลิด

	450	504 450	1
8	450 432	54	
	18	54 54	3

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.(504,450) = 18

วิธีลัด ในที่นี้ถ้านักเรียนจำนิยามของ ห.ร.ม. ได้แม่นยำคือ

1. จำนวนเต็มบวกหรือลบ 2 จำนวนใดๆ ต้องหา ห.ร.ม.ได้
2. ห.ร.ม. (a,b) ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก ข. และ ง. ตัดทิ้งได้

เพราะว่า 72 หาร 450 ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.(450,504) $\neq$ 72 แน่ๆ

เราจึงตัดตัวเลือก ค. ทิ้งได้อีกแล้ว

4. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$f(n) = \begin{cases} n-4 & \text{ถ้า } n \geqslant 2000 \\ f(f(n+8)) & \text{ถ้า } n < 2000 \end{cases}$$

f(2537) - f(4) เท่ากับเท่าใด

ก. 537 ข. 529

ค. 2533 ง. 2537

ตอบ ก.

แนวคิด

วิธีที่ 1 จาก $f(2537) = 2537-4 = 2533$

และ

$$\begin{aligned} f(4) &= f(f(12)) \\ f(12) &= f(f(20)) \\ f(20) &= f(f(28)) \\ &\vdots \\ f(1980) &= f(f(1988)) \\ f(1988) &= f(f(1996)) \end{aligned}$$

เมื่อ $n = 1996$ จะได้

$$f(1996) = f(f(2004)) = f(2000) = 1996$$

โดยแทนค่าย้อนกลับจะได้

$$f(1988) = f(f(1996)) = f(1996) = 1996$$
$$f(1980) = f(f(1988)) = f(1996) = 1996$$
$$\vdots$$
$$f(4) = f(1996) = 1996$$

สรุป $f(2537) - f(4) = 2533 - 1996 = 537$

5. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ $B = \{a,b,c,d\}$

$X = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และ $f(1) = a\}$

X มีจำนวนสมาชิกเท่ากับเท่าใด

ก. 12 ข. 24

ค. 60 ง. 81

ตอบ ค.

แนวคิด การนับสมาชิกของ A จำแนกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 มีสมาชิกบางตัวใน $\{2,3,4,5\}$ ส่งไปยัง a

เนื่องจาก $\{2,3,4,5\}$ และ $\{a,b,c,d\}$ เป็นเซตจำกัดที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จึงสามารถนับจำนวนฟังก์ชัน $f \in X$ ได้จากฟังก์ชัน g ซึ่ง

$$g : \{2,3,4,5\} \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} \{a,b,c,d\}$$

การนับจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ของ g นับดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> 2 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 4 วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> 3 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 3 วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> 4 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 2 วิธี

<u>ขั้นที่ 4</u> 5 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 1 วิธี

ดังนั้นมีฟังก์ชัน g ทั้งหมดเท่ากับ $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ฟังก์ชัน

เนื่องจาก $g \cup \{(1,a)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ดังนั้น f ที่นิยามโดย $f = g \cup \{(1,a)\}$ จะเป็นสมาชิกของ X

เพราะฉะนั้น f ตามกรณีที่ 1 มีได้ทั้งหมด 24 ฟังก์ชัน

กรณีที่ 2 ไม่มีสมาชิกใน $\{2,3,4,5\}$ ส่งไปยัง a

พิจารณาการส่งค่าจาก $\{2,3,4,5\}$ ไปทั่วถึง $\{b,c,d\}$

จะเห็นว่าจำนวนสมาชิกในเซต $\{2,3,4,5\}$ มากกว่าจำนวนสมาชิกในเซต $\{b,c,d\}$ อยู่ 1 ตัว จึงต้องมีสมาชิกสองตัวในเซต $\{2,3,4,5\}$ ไปจับคู่กับสมาชิกในเซต $\{b,c,d\}$ ตัวเดียวกัน จึงมีการพิจารณาดังนี้

<u>ขั้นที่ 1</u> เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก $\{2,3,4,5\}$ ที่จะส่งค่าไปที่เดียวกัน ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิก 2 ตัวที่เลือกมาจากขั้นที่ 1 เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกตัวถัดไปที่เหลือ เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 สมาชิกตัวสุดท้าย เลือกส่งค่าได้ 1 วิธี

สรุปมีจำนวนฟังก์ชันในกรณีที่ 2 ทั้งหมด = $6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ = 36

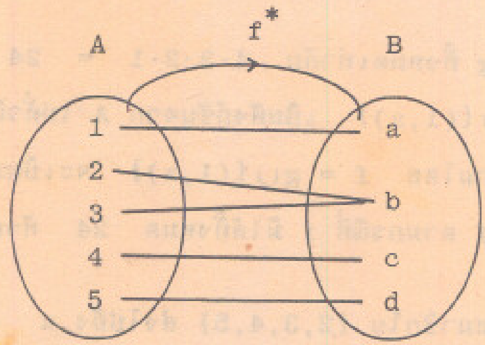
จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า X มีจำนวนสมาชิก = 24+36 = 60

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า กรณีที่ 1 มีสมาชิก 24 ตัว แล้ว

แสดงว่าตัวเลือก ก. ตัดทิ้งได้

แต่ตัวเลือก ข. ยังไม่แน่ว่าจะถูกหรือไม่

เมื่อพิจารณาการส่งค่าบางแบบเช่น



จะเห็นว่า $f^* \in X$ และ f^* ไม่อยู่ในกรณีที่ 1

ดังนั้น $n(X) > 24$ แน่นอน

ดังนั้นตัวเลือก ข. ผิดแล้ว

ที่เหลือ ค. กับ ง. เดาจากสองตัวเลือกก็ยังดี

6. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน

(2) $f \cap g$ เป็นฟังก์ชัน

(3) $f - g$ เป็นฟังก์ชัน

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

ข. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

ตอบ ข.

แนวคิด

1. ผิด เช่น $f = \{(1,a),(2,b)\}$

$g = \{(1,a),(2,c)\}$

จะได้ $f \cup g = \{(1,a),(2,b),(2,c)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะว่าสับเซตของฟังก์ชันต้องเป็นฟังก์ชันด้วย

เพราะฉะนั้นเมื่อ $f \cap g \subset f$

และ $f - g \subset f$

จะได้ว่า $f \cap g$ และ $f - g$ เป็นฟังก์ชัน

สรุปได้ว่า 2. ถูก และ 3. ถูก

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $g \subset f$

แล้ว g เป็นฟังก์ชัน

ให้ $(x,y_1),(x,y_2) \in g$ ดังนั้น $(x,y_1),(x,y_2) \in f$

แต่ f เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $y_1 = y_2$

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชัน

7. ให้ R เป็นเซตจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของของ R ไป R

กำหนดโดย $f(x) = \sqrt{x+2}$

$g(x) = x^2-2$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ทุก $x \geqslant 0$

ข. $R_{g \circ f} = R_{f \circ g} = [0,\infty)$

ค. $D_{g \circ f} = D_f$

ง. $D_{f \circ g} = D_g$

ตอบ ข.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{x+2}$, $D_f = [-2,\infty)$ และ $R_f = [0,\infty)$

$g(x) = x^2-2$, $D_g = R$ และ $R_g = [-2,\infty)$

พิจารณา $g \circ f$

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0,\infty) \neq \phi$ ดังนั้น $g \circ f$ มีความหมาย

นอกจากนี้ $R_f \subset D_g$ จะได้ $D_{g \circ f} = D_f$

สำหรับ $x \in [-2,\infty)$ จะได้

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(\sqrt{x+2})\\ &= \sqrt{x+2}^{\,2} - 2\\ &= x+2-2\\ &= x\end{aligned}$$

จะได้ $(g\circ f)(x) = x$, $D_{g\circ f} = R_{g\circ f}$

<u>พิจารณา $f\circ g$</u>

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [-2,\infty) \neq \phi$ ดังนั้น $g\circ f$ **มีความหมาย**

นอกจากนี้ $R_g \subset D_f$ จะได้ $D_{f\circ g} = D_g$

สำหรับ $x \in R$ จะได้ $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$$\begin{aligned}&= f(x^2-2)\\ &= \sqrt{(x^2-2)+2}\\ &= \sqrt{x^2}\\ &= |x|\end{aligned}$$

ดังนั้น $(f\circ g)(x) = \begin{cases} x & , x \geqslant 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ และ $R_{f\circ g} = [0,\infty)$

สรุป ก. ถูก เพราะเมื่อ $x \geqslant 0$ จะได้ $(g\circ f)(x) = x$

และ $(f\circ g)(x) = x$

ดังนั้น $(g\circ f)(x) = (f\circ g)(x)$ ทุก $x \geqslant 0$

ข. ผิด $R_{g\circ f} = [-2,\infty)$ และ $R_{f\circ g} = [0,\infty)$

ค. ถูก

ง. ถูก

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า $R_f = [0,\infty) \subset R = D_g$

แสดงว่า $g \circ f$ มีความหมาย และ $(g \circ f)(x)$ หาค่าได้ทุก $x \in D_f$

นั่นคือ $D_{g \circ f} = D_f$ แน่นอน

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $R_g = [-2,\infty) = D_f$

แสดงว่า $(f \circ g)(x)$ หาค่าได้ทุก $x \in D_g$

นั่นคือ $D_{f \circ g} = D_g$ แน่นอน

ขณะนี้ตัวเลือก ค. และ ง. ถูกต้องเราจึงตัดทิ้งได้แล้ว

การได้คำตอบแบบเร็วที่สุดของข้อนี้ทำได้โดยการแทนค่ากับตัวเลขที่คิดง่ายๆ เช่น $x = -1$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -1$$

ดังนั้น $-1 \in R_{g \circ f}$

แต่ $-1 \notin [0,\infty)$

เพราะฉะนั้น ข. ผิดแน่นอนเลือกได้เลย

8. ในการทำตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์ L เมื่อ L แทนประพจน์ $(p \wedge q \rightarrow p) \leftrightarrow ((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$ เราต้องแจงกรณีตามค่าความจริงของ p,q และ r ทั้งหมด 8 กรณี ในจำนวนทั้ง 8 กรณีนั้น จะมีจำนวนกรณีที่ประพจน์ L มีค่าความจริงเป็นจริงเท่ากับเท่าใด

ก. 1 ข. 2

ค. 4 ง. 8

ตอบ ง.

แนวคิด เนื่องจาก $p \wedge q \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

และ $((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

เพราะฉะนั้น $L = ((p \wedge q) \rightarrow p) \longleftrightarrow ((q \wedge \sim q) \rightarrow r)$ เป็นสัจนิรันดร์

ดังนั้น L มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณีของ p,q และ r

นั่นคือ L มีค่าความจริงเป็นจริงทั้ง 8 กรณี

9. กำหนดให้ m เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

ค่าจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ 5 หาร $3^n + 6^m$ ลงตัว

คือค่าใดต่อไปนี้

ก. 2535 ข. 2536

ค. 2537 ง. 2538

ตอบ ง.

แนวคิด เพราะว่า $3^4 = 81$ เพราะฉะนั้น $3^{4k} = (81)^k$ มีเลขในหลักหน่วยเป็น 1 ทุกค่า $k \in I^+$

จำนวน	ตัวเลขในหลักหน่วย	หารด้วย 5 เหลือเศษ
3^{4k}	1	1
3^{4k+1}	3	3
3^{4k+2}	9	4
3^{4k+3}	7	2

เพราะว่า 6^m เป็นจำนวนเต็มที่เลขในหลักหน่วยเป็น 6

เพราะฉะนั้น $3^n + 6^m$ หารด้วย 5 ลงตัว เมื่อ

หลักหน่วยในพจน์ 3^n มีค่าเป็น 4

นั่นคือ 3^n อยู่ในรูปแบบ 3^{4k+2}

เพราะว่า $2535 = 4(633)+3$

$2536 = 4(634)$

$2537 = 4(634)+1$

$2538 = 4(634)+2$

เพราะฉะนั้น $n = 2538$ จึงจะทำให้

$3^{2538} + 6^m$ หารด้วย 5 ลงตัว

10. สมการของวงรีที่ผ่านจุดกำเนิดและมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (-1,1) กับ (1,1) คือสมการในข้อใด

ก. $2x^2+y^2+4x = 0$ ข. $2x^2+y^2-4x = 0$

ค. $x^2+2y^2+4y = 0$ ง. $x^2+2y^2-4y = 0$

ตอบ ง.

แนวคิด เนื่องจากจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่จุดโฟกัสทั้งสองคือ

$\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{1+1}{2}\right)$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกึ่งกลางของจุดโฟกัสทั้งสองคือ จุด (0,1)

ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส $c = 1$

สมการของวงรีอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ ______(1)

จาก $a^2 = b^2 + c^2$ แทนค่า $c = 1$ จะได้ $a^2 = b^2+1$

วงรีผ่าน (0,0) ดังนั้นแทน x ด้วย 0 แทน y ด้วย 0 ใน (1)

จะได้ $\frac{1}{b^2} = 1$

$b = 1$

ดังนั้น $a^2 = 1+1 = 2$

สมการของวงรีคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1$$

$$x^2+2y^2-4y+2 = 2$$

$$x^2+2y^2-4y = 0$$

วิธีลัด 1 จากโจทย์ เพราะว่า (-1,1) และ (1,1) เป็นจุดโฟกัส

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกขนานแกน X จากตัวเลือกพบว่า

ก. แกนเอกขนานแกน Y

ข. แกนเอกขนานแกน Y

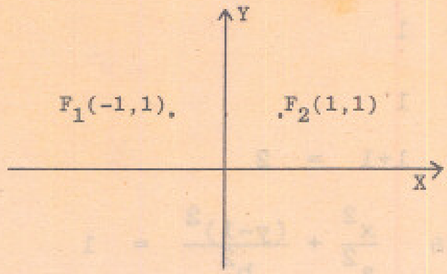
ดังนั้นตัดตัวเลือก ก. และ ข. ทิ้ง

เพราะว่าจุดศูนย์กลางวงรีคือ (0,1)

ค. จุดศูนย์กลางเป็น (0,-1)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ค. ทิ้ง

วิธีลัด 2



เมื่อรู้ว่า $F_1(-1,1)$ และ $F_2(1,1)$ เป็นโฟกัส

เพราะฉะนั้นแกนเอกขนานแกน X และ $c = 1$

เพราะว่าวงรีผ่านจุด $(0,0)$ ดังนั้น $b = 1$

ผลที่ตามมาคือ $a = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้นวงรีผ่านจุด $(-\sqrt{2},1)$ และ $(\sqrt{2},1)$

โดยการแทนค่าในตัวเลือกด้วย $x = \sqrt{2}$ และ $y = 1$

ก. $4 + 1 + 4\sqrt{2} \neq 0$

ข. $4 + 1 - 4\sqrt{2} \neq 0$

ค. $2 + 2 + 4 \neq 0$

ง. $2 + 2 - 4 = 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ข. และ ค. ตัดทิ้ง

11. จุดต่อไปนี้จุดใดอยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และเส้นสัมผัสนั้นขนานกับเส้นตรง $x+y = 0$

ก. $(2,-1)$ ข. $(3,-5)$

ค. $(4,-7)$ ง. $(5,-9)$

ตอบ ข.

แนวคิด เพราะว่า สมการเส้นตรงที่ขนานกับ $x+y = 0$ ต้องอยู่ในรูป $x+y = c$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสพาราโบลา $y^2 = 8x$ ต้องอยู่ในรูป $x+y = c$

แทนค่า $x = c-y$ ลงในสมการ $y^2 = 8x$ จะได้

$$y^2 = 8(c-y)$$

$$y^2+8y-8c = 0$$

y มีรากค่าเดียวกัน เมื่อ $8^2-4(1)(-8c) = 0$

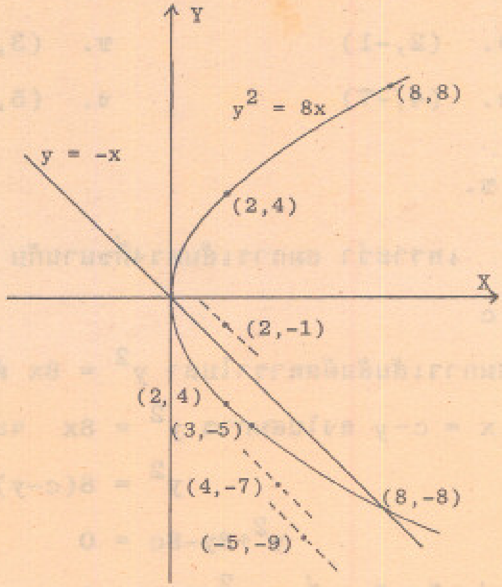
$$64 + 32c = 0$$

$$c = -2$$

สมการเส้นสัมผัสคือ $x+y = -2$ ผ่านจุด $(3,-5)$

วิธีลัด 1 ด้วยการเขียนกราฟของ $y^2 = 8x$ และ $y = -x$ บนช่วง

[0,8]



เมื่อลากเส้นตรงขนานกับ $y = -x$ และผ่านจุด (2,-1) พบว่าเส้นตรงตัดพาราโบลา 2 จุด เราจึงตัดข้อ ก. ทิ้ง

เมื่อลากเส้นตรงขนานกับ $y = -x$ และผ่านจุด (4,-7) จะไม่สัมผัสกับพาราโบลา เราจึงตัดข้อ ค. ทิ้ง

ในทำนองเดียวกันก็ตัดข้อ ง. ทิ้งได้ด้วย

วิธีลัด 2 จาก $y^2 = 8x$

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} 8x$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$$

ความชันเส้นสัมผัสพาราโบลาต้องเท่ากับความชันเส้นตรง $x+y = 0$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = -1$

$$\frac{4}{y} = -1$$

$$y = -4$$

เมื่อ $y = -4$ จะได้ $x = 2$

เพราะฉะนั้นจุดบนพาราโบลาที่มีความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ -1

คือจุด $(2,-4)$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y-(-4) = (-1)(x-2)$

$$y+4 = -x+2$$

$$x+y+2 = 0$$

ซึ่งผ่านจุด $(3,-5)$

12. ให้ O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2+y^2+4x = 0$ ลาก OP ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง OP พิกัดของ Q สอดคล้องสมการข้อใด

ก. $x^2+y^2+2x = 0$ ข. $x^2+y^2-2x = 0$

ค. $x^2+y^2+8x = 0$ ง. $x^2+y^2-8x = 0$

ตอบ ก.

แนวคิด $x^2 + y^2 + 4x = 0$ ________________(1)

ให้ (x,y) เป็นพิกัดของจุด Q

เพราะฉะนั้นพิกัดของจุด P คือ $(2x,2y)$

เพราะว่า P อยู่บนวงกลมของสมการ (1) ดังนั้น

แทน x ด้วย 2x แทน y ด้วย 2y ในสมการ (1) จะได้

$$(2x)^2 + (2y)^2 + 4(2x) = 0$$

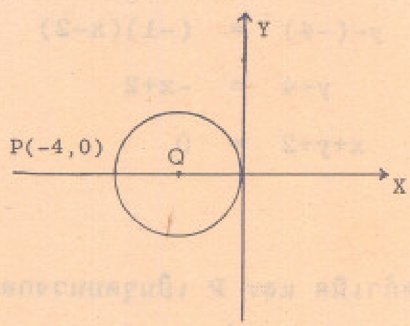
$$4x^2 + 4y^2 + 8x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0$$

วิธีลัด เขียนวงกลม $x^2+y^2+4x = 0$

$$(x+2)^2 + y^2 = 4$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (-2,0) และรัศมี 2



เลือกหาจุด Q ที่สอดคล้องตามโจทย์เช่น เมื่อ P(-4,0)

จะได้ Q(-2,0) ต่อไปแทนค่า x = -2 , y = 0 ในตัวเลือก

ก. $4+0-4 = 0$

ข. $4+0+4 \neq 0$

ค. $4+0-16 \neq 0$

ง. $4+0+16 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข. ค. และ ง. ทิ้งได้

13. ไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3-3\sqrt{13},1)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,1)$ อัตราส่วนของระยะทางครึ่งแกนตามขวางต่อระยะครึ่งแกนสังยุคเป็น ๒ : ๓

สมการของไฮเพอร์โบลานี้คือสมการในข้อใด

ก. $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{81} = 1$

ข. $\frac{(y-1)^2}{81} - \frac{(x+3)^2}{36} = 1$

ค. $\frac{(x+3)^2}{117} - \frac{(y-1)^2}{50} = 1$

ง. $\frac{(x+3)^2}{50} - \frac{(y-1)^2}{117} = 1$

ตอบ ก.

แนวคิด จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $(-3,1)$
จุดโฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $(-3-3\sqrt{13},1)$
และแกนตามขวางขนานกับแกน X

เพราะฉะนั้น สมการอยู่ในรูป $\frac{(x+3)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, $a^2+b^2 = c^2$ และ $c = 3\sqrt{13}$

จะได้ $a^2 + \frac{9}{4}a^2 = 117$

$a^2 = 36$

$a = 6$

ดังนั้น $b = 9$

เพราะฉะนั้นสมการของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{81} = 1$

วิธีลัด เราสามารถนำเงื่อนไขของโจทย์คือ $a : b = 2 : 3$

มาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ดังนี้

	a	b	a : b
ก	6	9	2 : 3
ข	9	6	3 : 2
ค	$\sqrt{117}$	$\sqrt{50}$	$\sqrt{117} : \sqrt{50}$
ง	$\sqrt{50}$	$\sqrt{117}$	$\sqrt{50} : \sqrt{117}$

สรุปตัดตัวเลือก ข. ค. และ ง. ทิ้ง

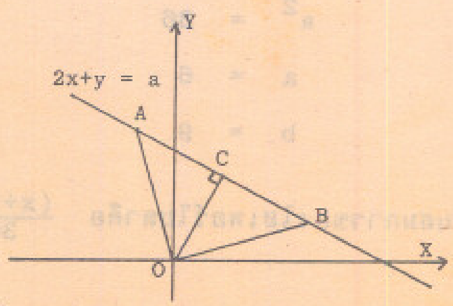
14. ให้ O เป็นจุดกำเนิด ลากเส้นตรง OA และ OB ทำให้จุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $2x+y = a$ โดยมี OA = OB และมุม AOB เป็นมุมฉาก พื้นที่สามเหลี่ยม OAB จะมีค่าเป็นเท่าใด

ก. $\frac{a^2}{2}$ ข. $\frac{a^2}{3}$

ค. $\frac{a^2}{4}$ ง. $\frac{a^2}{5}$

ตอบ ง.

แนวคิด



Δ AOB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นมีวงกลมผ่านจุด A,O,B

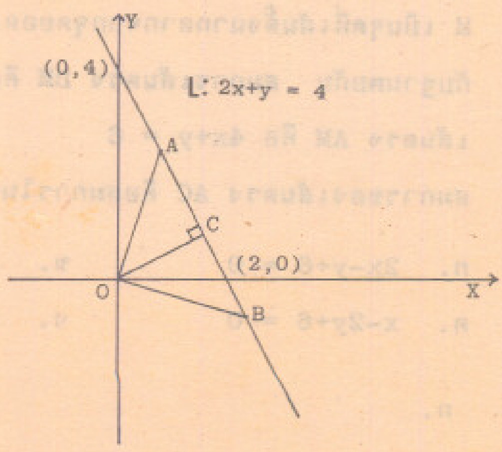
$$OC = \frac{|2(0)+1(0)+a|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

ดังนั้น $AC = CB = OC = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$ และ $AB = \frac{2|a|}{\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \Delta\ OAB &= \frac{1}{2}\cdot OC\cdot AB \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{|a|}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2|a|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{a^2}{5} \end{aligned}$$

วิธีลัด ข้อนี้เข้าลักษณะโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ดังนั้นโดยการวาดรูปประกอบและการวัดด้วยไม้บรรทัดก็จะสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้ เช่น

a = 4 จะได้ 2x+y = 4



ลาก OC ตั้งฉากกับ L

วัดระยะตั้งฉากจาก O ไปยังเส้นตรง L ได้ 1.8

เพราะว่า $OA = OB$ และ $A\hat{O}B = 90^{\circ}$

ดังนั้นมีวงกลมผ่านจุด O,A และ B โดยมี C เป็นจุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น AB ยาวเท่ากับ 2 เท่าของ OC

$$\text{พื้นที่ } \Delta\, AOB = \frac{1}{2}\cdot \text{ฐาน}\cdot \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC = \frac{1}{2}\,(2(1.8))\cdot(1.8)$$

$$= 3.24$$

เมื่อ a = 4 แทนค่าในตัวเลือกจะได้

ก. 8 ข. 5.33

ค. 4 ง. 3.2

สรุปเลือกคำตอบเป็น ง. ดีกว่า

15. รูปสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรง AB คือ $3x+2y = 12$ M เป็นจุดที่เส้นตั้งฉากลากจากจุดยอด A, B และ C มาตั้งฉากกับฐานพบกัน สมการเส้นตรง BM คือ $x+2y = 4$ และสมการเส้นตรง AM คือ $4x+y = 6$

สมการของเส้นตรง AC คือสมการในข้อใด

ก. $2x-y+6 = 0$ ข. $2x-y+8 = 0$

ค. $x-2y+6 = 0$ ง. $x-2y+8 = 0$

ตอบ ก.

แนวคิด สมการของเส้นตรง AB คือ $3x+2y = 12$ ______(1)

สมการของเส้นตรง AM คือ $4x+y = 6$ ______(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$x = 0$$

$$y = 6$$

ดังนั้นพิกัดของจุด A คือ (0,6)

เส้นตรง AC ตั้งฉากกับเส้นตรง BM และเส้นตรง MB มีความชัน

เท่ากับ $-\frac{1}{2}$ ดังนั้นเส้นตรง AC มีสมการอยู่ในรูป

$$y = 2x+c$$

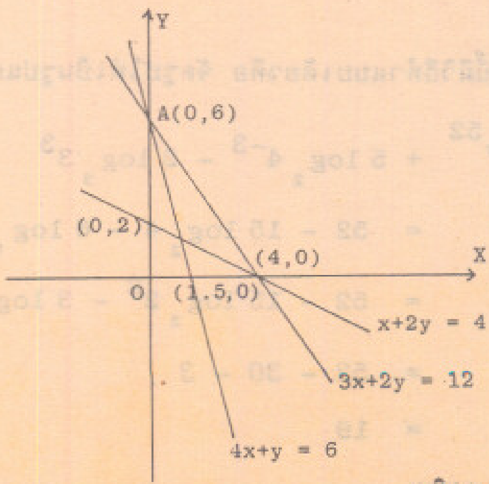
เนื่องจากจุด A(0,6) อยู่บนเส้นตรง AC

จะได้ว่า $6 = 2(0)+c$ นั่นคือ $c = 6$

ดังนั้น เส้นตรง AC มีสมการเป็น $y = 2x+6$

หรือ $2x-y+6 = 0$

วิธีลัด โจทย์ทำนองนี้ควรจะวาดกราฟดูก่อน



เส้นตรง ; $3x+2y = 12$

เส้นตรง AM ; $4x+y = 6$

ตัดกันที่จุด (0,6) ดังนั้น A มีพิกัดเป็น (0,6)

แทนค่า $x = 0$, $y = 6$ ในตัวเลือก

ก. $0-6+6 = 0$ ข. $0-6+8 \neq 0$

ค. $0-12+6 \neq 0$ ง. $0-12+8 \neq 0$

เพราะว่า A(0,6) ต้องอยู่บนเส้นตรงในตัวเลือก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข. ค. และ ง. ทิ้ง

16. ค่าของ $7^{\log_7 52} + 5\log_2 4^{-3} - 2\log_9 3^3$ เท่ากับเท่าใด

ก. 19 ข. 25

ค. 31 ง. 94

ตอบ ก.

แนวคิด ข้อนี้มีวิธีทำแบบเดียวคือ จัดรูปให้เป็นรูปแบบอย่างง่าย

$$
\begin{aligned}
7^{\log_7 52} + 5\log_2 4^{-3} - 2\log_9 3^3 &= 52 - 15\log_2 4 - 6\log_9 3 \\
&= 52 - 15\log_2 2^2 - 3\log_9 3^2 \\
&= 52 - 30 - 3 \\
&= 19
\end{aligned}
$$

17. กำหนด $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

ถ้า $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \ldots + a_{2535} = 3170$

และ $a_{1269} + a_{1270} + a_{1271} + \ldots + a_{1308} = a_{2088}$

แล้ว a_1 เท่ากับเท่าใด

ก. -1267 ข. -1268

ค. -6335 ง. -6337

ตอบ ค.

แนวคิด ให้ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$

เพราะว่า $a_7 - a_3 = a_1 + 6d - a_1 - 2d = 4d$

$$a_{11} - a_7 = a_1 + 10d - a_1 - 6d = 4d$$

$$\vdots$$

$$a_{2535} - a_{2531} = a_1 + 2534d - a_1 - 2530d = 4d$$

เพราะฉะนั้น $a_3, a_7, a_{11}, \ldots, a_{2535}$ เป็นลำดับเลขคณิต

ที่มีพจน์แรกเป็น a_3 และผลต่างร่วมเท่ากับ 4d

เราพิจารณาจำนวนพจน์ของ $a_3, a_7, a_{11}, \ldots, a_{2535}$

เทียบเท่ากับจำนวนพจน์ของ 3, 7, 11, ..., 2535

(1 บวกตลอด) 4, 8, 12, ..., 2536

(4 หารตลอด) 1, 2, 3, ..., 634

เพราะฉะนั้น $a_3, a_7, a_{11}, \ldots, a_{2535}$ มี 634 พจน์

ดังนั้น $a_3 + a_7 + a_{11} + \ldots + a_{2535} = 3170$

$$\frac{634}{2}(a_3 + a_{2535}) = 3170$$

$$a_3 + a_{2535} = 10$$
$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 2534d) = 10$$
$$2a_1 + 2536d = 10$$
$$a_1 + 1268d = 5$$

เพราะฉะนั้น $a_{1269} = 5$

เพราะว่า $a_{2088} = a_1 + 2087d = a_1 + 1268d + 819d$

$= 5 + 819d$

เพราะฉะนั้น $a_{1269} + a_{1270} + \dots + a_{1308} = a_{2088}$

$$5 + 819d = \frac{40}{2}(a_{1269} + a_{1308})$$
$$= 20(5 + a_1 + 1307d)$$
$$= 20(5 + a_1 + 1268d + 39d)$$
$$= 20(5 + 5 + 39d)$$
$$= 200 + 780d$$
$$39d = 195$$
$$d = 5$$

เพราะฉะนั้น $a_1 = 5 - 1268d = 5 - 1268(5) = -6335$

18. ถ้าลำดับ 2, a, b, c, 162 เป็นลำดับเรขาคณิตแล้ว

$\log_a 2 + \log_b a + \log_c b + \log_a b + \log_b c + \log_c 162$

เท่ากับเท่าใด

ก. 2 ข. 4

ค. 6 ง. 8

ตอบ ค.

แนวคิด เพราะว่า 2,a,b,c,162 เป็นลำดับเรขาคณิต โดยมีพจน์แรกเป็น 2

ให้ r เป็นอัตราส่วนร่วม จะได้ว่า $a = 2r$

$$b = 2r^2$$

$$c = 2r^3$$

$$162 = 2r^4$$

ดังนั้น $r^4 = 81$ เพราะว่า $2r = a > 0$ ดังนั้น $r = 3$

เพราะฉะนั้น $a = 6$, $b = 18$ และ $c = 54$

สรุป $\log_a 2 + \log_b a + \log_c b + \log_a b + \log_b c + \log_c 162$

$= \log_6 2 + \log_{18} 6 + \log_{54} 18 + \log_6 18 + \log_{18} 54$
$\quad + \log_{54} 162$

$= \log_6 2 + \log_6 18 + \log_{18} 6 + \log_{18} 54 + \log_{54} 18$
$\quad + \log_{54} 162$

$= \log_6 36 + \log_{18} 324 + \log_{54} 2916$

$= \log_6 6^2 + \log_{18} 18^2 + \log_{54} 54^2$

$= 2 + 2 + 2$

$= 6$

19. ผลคูณของคำตอบของสมการ $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan\frac{1}{2}$ เท่ากับเท่าใด

ก. $-\frac{1}{9}$ ข. $-\frac{4}{3}$

ค. $\frac{1}{9}$ ง. $\frac{4}{3}$

ตอบ ก.

แนวคิด $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan\frac{1}{2}$

$$\tan(\arctan(3x^2+1)) = \tan(2\arctan\tfrac{1}{2})$$

เพราะฉะนั้น $3x^2+1 = \tan(2\arctan\frac{1}{2})$

$$= \frac{2\tan(\arctan\frac{1}{2})}{1-(\tan(\arctan\frac{1}{2}))^2}$$

$$= \frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{4}{3}$$

ดังนั้น $3x^2+1 = \frac{4}{3}$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้น ผลคูณของคำตอบของสมการข้างต้นคือ $-\frac{1}{9}$

วิธีลัด จากลักษณะของสมการ $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan(\frac{1}{2})$

จะมีราก 2 ตัวนั้นคือ x และ -x เป็นรากของสมการ

ผลคูณของราก 2 ตัวนั้นต้องเป็นจำนวนลบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ค. และ ง. ทิ้ง

20. ผลบวกของคำตอบของสมการ $\sin 4x^\circ + \sin 2x^\circ = \cos x^\circ$ สำหรับ x ในช่วง [0,360) เท่ากับเท่าใด

ก. 610 ข. 900

ค. 990 ง. 1,260

ตอบ ง.

แนวคิด $\sin 4x^\circ + \sin 2x^\circ = \cos x^\circ$

$$2\sin\frac{1}{2}(4x^\circ + 2x^\circ)\cos\frac{1}{2}(4x^\circ - 2x^\circ) = \cos x^\circ$$

$$2\sin 3x^\circ \cos x^\circ = \cos x^\circ$$

$$\cos x^\circ(2\sin 3x^\circ - 1) = 0$$

$\cos x^\circ = 0$ หรือ $\sin 3x^\circ = \frac{1}{2}$

จาก $\cos x^\circ = 0$ เราได้ $x = 90, 270$

เนื่องจาก $0 \leqslant x < 360$ ดังนั้น $0 \leqslant 3x < 1080$

จาก $\sin 3x^\circ = \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $3x = 30, 150, 390, 510, 750, 870$

นั่นคือ $x = 10, 50, 130, 170, 250, 290$

เพราะฉะนั้น ผลบวกของคำตอบของสมการที่กำหนดให้เท่ากับ

$90 + 270 + 10 + 50 + 130 + 170 + 250 + 290 = 1,260$ องศา

21. ค่าของ $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5})$ เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{48}{65}$ ข. $\frac{52}{65}$

ค. $\frac{56}{65}$ ง. $\frac{63}{65}$

ตอบ ค.

แนวคิด ให้ $\arcsin\frac{5}{13} = \alpha$ และ $\arccos\frac{4}{5} = \beta$

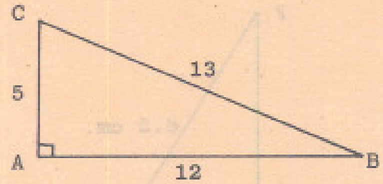
พิจารณา α และ β เป็นมุมแหลมที่เป็นบวก

$$\sin\alpha = \frac{5}{13} \quad \text{และ} \quad \cos\beta = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5}) &= \sin(\alpha+\beta) \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\
&= \sin\alpha\cos\beta + \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,\sqrt{1-\cos^2\beta} \\
&= (\frac{5}{13})(\frac{4}{5}) + \sqrt{1-\frac{25}{169}}\,\sqrt{1-\frac{16}{25}} \\
&= (\frac{5}{13})(\frac{4}{5}) + (\frac{12}{13})(\frac{3}{5}) \\
&= \frac{56}{65}
\end{aligned}$$

วิธีลัด ลองใช้ไม้โปรช่วยในการหาคำตอบบ้าง

สร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป

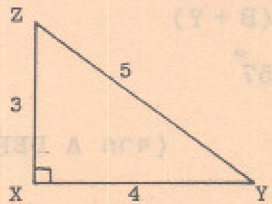


$$\sin \hat{B} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{5}{13}$$

จะได้ $\hat{B} = \arcsin(\frac{5}{13})$

โดยการวัดมุมจะได้ $\hat{B} = 21^\circ$

สร้างสามเหลี่ยม XYZ ดังรูป



$$\cos \hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{4}{5}$$

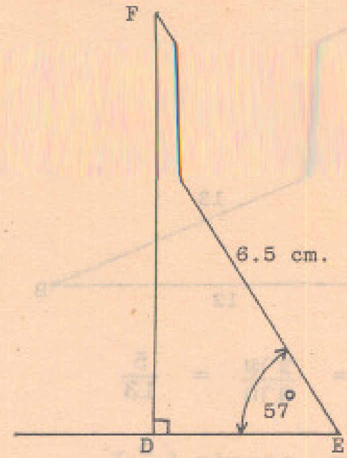
จะได้ $\hat{Y} = \arccos(\frac{4}{5})$

โดยการวัดมุมจะได้ $\hat{Y} = 36^\circ$

$$\hat{B} + \hat{Y} = 21^\circ + 36^\circ = 57^\circ$$

สร้างสามเหลี่ยม DEF โดย $\hat{D} = 90^\circ$

EF ยาว 6.5 และ $\hat{E} = 57^\circ$



ต่อไปวัดความยาว FD ได้ 5.6 cm.

เพราะฉะนั้น $\sin(\arcsin \frac{5}{13} + \arccos \frac{4}{5})$

$$= \sin(\hat{B} + \hat{Y})$$

$$= \sin 57^\circ$$

$$= \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} \qquad (\text{จาก } \Delta\ DEF)$$

$$= \frac{5.6}{6.5}$$

$$= \frac{56}{65}$$

สรุปเลือกข้อ ค. ดีที่สุด

22. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) คำตอบของสมการ $3\tan^2\theta = 7\sec\theta - 5$

สำหรับ θ ในช่วง $[0,2\pi)$ มี 2 คำตอบ

(2) Δ ABC มี AB = 5 เซนติเมตร AC = 8 เซนติเมตร

และ $B\hat{A}C = 20^\circ$ ถ้า $\sin 20^\circ = 0.3420$

$\cos 20^\circ = 0.9397$ และ $\tan 20^\circ = 0.3640$

พื้นที่ Δ ABC เท่ากับ 6.84 ตารางเซนติเมตร

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เท่านั้นที่ถูกต้อง

ข. ข้อ (2) เท่านั้นที่ถูกต้อง

ค. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง

ง. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ไม่ถูกต้อง

ตอบ ค.

แนวคิด (1) $3\tan^2\theta = 7\sec\theta - 5$

$3(\sec^2\theta - 1) = 7\sec\theta - 5$

$3\sec^2\theta - 7\sec\theta + 2 = 0$

$(3\sec\theta - 1)(\sec\theta - 2) = 0$

$\sec\theta = \frac{1}{3}$ หรือ $\sec\theta = 2$

แต่ $\sec\theta = \frac{1}{3}$ เป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $\sec\theta = 2$

จาก $\sec\theta = 2$ ได้ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น สมการที่กำหนดให้มี 2 คำตอบ

(๒) พื้นที่ของ Δ ABC $= \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin B\hat{A}C$

$= \frac{1}{2} \cdot (8) \cdot (5) \cdot \sin 20^\circ$

$= 20(0.3420)$

$= 6.84$ ตารางเซนติเมตร

๒๓. ถ้ากำหนดจำนวนเชิงซ้อน $2 + i$ และ $1 - 3i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด

ก. 15 ข. 17

ค. 23 ง. 29

ตอบ ข.

แนวคิด เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ $x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ เป็นจำนวนจริง

ดังนั้นเมื่อ $2+i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $2-i$ เป็นคำตอบของสมการ

และเมื่อ $1-3i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $1+3i$ เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้นรากทั้ง 4 ตัวของสมการคือ $2+i$, $2-i$, $1-3i$ และ $1+3i$

เนื่องจากสมการที่กำหนดให้เป็นสมการพหุนามกำลัง 4

เพราะฉะนั้น $2+i$, $2-i$, $1-3i$ และ $1+3i$ เป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ และ

$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

$= (x-(2+i))(x-(2-i))(x-(1-3i))(x-(1+3i))$

$= (x^2-4x+5)(x^2-2x+10)$

$= x^4-6x^3+23x^2-50x+50$

นั่นคือ $a = -6$, $b = 23$, $c = -50$ และ $d = 50$

สรุป $a+b+c+d = 17$

วิธีลัด เพราะว่า $2+i$ และ $1-3i$ เป็นราก

เพราะฉะนั้น $2-i$ และ $1+3i$ เป็นราก

ให้ $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

จะได้ $f(x) = (x-(2+i))(x-(2-i))(x-(1-3i))(x-(1+3i))$

เพราะว่า $f(1) = 1+a+b+c+d$

เพราะฉะนั้น $a+b+c+d = f(1)-1$

$= (1-(2+i))(1-(2-i))(1-(1-3i))(1-(1+3i))-1$

$= (-1-i)(-1+i)(3i)(-3i)-1$

$= (1+1)(9)-1 = 17$

24. กำหนด $z_1 = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ และ $z_2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$

ถ้า $a = z_1^5 + z_2^5$ และ $b = z_1^6 + z_2^6$

แล้วจะได้ว่า $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

ก. -1 ข. 2

ค. 4 ง. 5

ตอบ ง.

แนวคิด เขียน z_1 และ z_2 ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

$$\tan\theta_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{-2}{1}) = -\sqrt{3}$$

เนื่องจาก $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ อยู่ในควอรันท์ที่ 2

ดังนั้น $\theta_1 = 120^\circ$, $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$$z_1 = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

ทำนองเดียวกันจะได้ $z_2 = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ$

$$\begin{aligned}
a &= z_1^5 + z_2^5 \\
&= (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^5 + (\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)^5 \\
&= (\cos 600^\circ + i\sin 600^\circ) + (\cos 1200^\circ + i\sin 1200^\circ) \\
&= (\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ) + (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) \\
&= -\cos 60^\circ - i\sin 60^\circ - \cos 60^\circ + i\sin 60^\circ \\
&= -2\cos 60^\circ \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b &= z_1^6 + z_2^6 \\
&= (\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)^6 + (\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)^6 \\
&= (\cos 720^\circ + i\sin 720^\circ) + (\cos 1440^\circ + i\sin 1440^\circ) \\
&= \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ + \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ \\
&= 1 + 0 + 1 + 0 = 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = (-1)^2 + (2)^2 = 5$

วิธีลัด เพราะว่า $z_1 = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ$

$$z_1^3 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

$$z_2 = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ$$

$$z_2^3 = \cos 720^\circ + i \sin 720^\circ = 1$$

$$z_1 z_2 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$$

เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 = (z_1^5 + z_2^5)^2 + (z_1^6 + z_2^6)^2$

$$= (z_1^3 \ z_1^2 + z_2^3 \ z_2^2)^2 + (1+1)^2$$

$$= (z_1^2 + z_2^2)^2 + 4$$

$$= z_1^4 + 2 z_1^2 z_2^2 + z_2^4 + 4$$

$$= z_1 + 2(1) + z_2 + 4$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i + 4$$

$$= 5$$

25. ถ้า $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ และ $B = \{z-2 \mid z \in A\}$

โดยที่ C คือเซตของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ว่า $A \cap B$ เป็นสับเซตของข้อใด

ก. $\{(x+yi) \in C \mid x,y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 9\}$

ข. $\{(x+yi) \in C \mid x,y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 64\}$

ค. $\{(x+yi) \in C \mid x,y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 65\}$

ง. $\{(x+yi) \in C \mid x,y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 81\}$

ตอบ ค.

แนวคิด ให้ $z = (a,b)$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า $|z| = 3$ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{a^2+b^2} = 3$

หรือ $|z| = 3$ ก็ต่อเมื่อ $a^2+b^2 = 9$

ดังนั้น $A = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid a^2+b^2 = 9\}$

พิจารณา $(c,d) \in B$

ก็ต่อเมื่อ $(c,d) = (a-2,b)$ และ $(a,b) \in A$

ก็ต่อเมื่อ $c = a-2$ และ $d = b$ และ $a^2+b^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $c+2 = a$ และ $d = b$ และ $a^2+b^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $(c+2)^2+d^2 = 9$

ดังนั้น $B = \{(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid (c+2)^2+d^2 = 9\}$

พิจารณา $(x,y) \in A\cap B$ ก็ต่อเมื่อ $(x,y) \in A$ และ $(x,y) \in B$

ก็ต่อเมื่อ $x^2+y^2 = 9$ และ $(x+2)^2+y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $x^2+y^2 = 9$ และ $x^2+4x+4+y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $4x+4 = 0$ และ $x^2+y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $x = -1$ และ $y = \pm\sqrt{8}$

เพราะฉะนั้น $A\cap B = \{(-1,\sqrt{8}),(1,-\sqrt{8})\}$

เนื่องจาก $x^4+y^4 = 65$ สำหรับทุกๆ (x,y) ใน $A\cap B$

ดังนั้น $A\cap B$ เป็นสับเซตของ

$$\{x+yi \in C \mid x^4+y^4 = 65\}$$

วิธีลัด ให้ $z = x + yi$; $x, y \in R$

$$|z| = 3$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

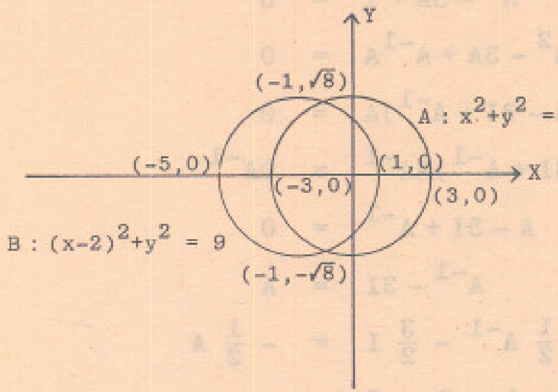
ดังนั้นเซตของจุดใน $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ คือจุดบนวงกลม

รัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ (0,0)

เมื่อ $z \in A$ จะได้ว่า $z-2$ เป็นการเลื่อนจุดทุกจุดบนเซต A

ไปทางซ้ายมือ 2 หน่วย นั่นคือจุดในเซต B คือจุดบนวงกลม

รัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ (-2,0)



จุดตัดของ A และ B ได้จากการแก้สมการ

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 9$$

ได้จุดตัดเป็น $(-1,\sqrt{8})$ และ $(-1,-\sqrt{8})$

เพราะว่า $(-1)^4 + (\sqrt{8})^4 = 1 + 64 = 65$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ข. และ ง. ตัดทิ้งได้

26. กำหนด A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3 ซึ่งมี $\det(A) = 4$

ถ้า $A^2 - 3A + I = 0$ เมื่อ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ และ 0 เป็นเมตริกซ์ศูนย์ แล้ว $\det(B)$ เท่ากับเท่าไร เมื่อ $B = \frac{1}{2}A^{-1} - \frac{3}{2}I$

ก. $\frac{1}{2}$ ข. $-\frac{1}{2}$

ค. 4 ง. -2

ตอบ ข.

แนวคิด

$$
\begin{aligned}
A^2 - 3A + I &= 0 \\
A^2 - 3A + A^{-1}A &= 0 \\
(A - 3I + A^{-1})A &= 0 \\
(A - 3I + A^{-1})AA^{-1} &= 0A^{-1} \\
A - 3I + A^{-1} &= 0 \\
A^{-1} - 3I &= A \\
\frac{1}{2}A^{-1} - \frac{3}{2}I &= -\frac{1}{2}A
\end{aligned}
$$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2}A^{-1} - \frac{3}{2}I \\
&= -\frac{1}{2}A
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น
$$
\begin{aligned}
\det(B) &= \det\left(-\frac{1}{2}A\right) \\
&= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \det(A) \\
&= -\frac{1}{8}(4) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

27. **บทนิยาม** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมตริกซ์ซึ่งสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อน เมตริกซ์สังยุคของ A คือ $\overline{A} = [\overline{a}_{ij}]_{m\times n}$ เมื่อ $\overline{a}_{ij}$ คือสังยุคของ a_{ij}

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

กำหนด A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ m×n ซึ่งสมาชิกทุกตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อน และ k เป็นจำนวนเชิงซ้อน

(1) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$

(2) $\overline{kA} = \overline{k}\,\overline{A}$

(3) $\overline{A^t} = (\overline{A})^t$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

ข. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

ตอบ ค.

แนวคิด ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

(1) ถูกต้องด้วยเหตุผลดังนี้

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

$$\overline{A + B} = [\overline{a_{ij} + b_{ij}}]_{m\times n}$$

$$= \left[\bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij} \right]_{m\times n}$$

$$= [\bar{a}_{ij}]_{m\times n} + [\bar{b}_{ij}]_{m\times n}$$

$$= \bar{A} + \bar{B}$$

(2) ถูกต้องด้วยเหตุผลดังนี้ $kA = [ka_{ij}]_{m\times n}$

$$\overline{kA} = [\overline{k\,a_{ij}}]_{m\times n}$$

$$= [\bar{k}\,\bar{a}_{ij}]_{m\times n}$$

$$= \bar{k}\,\bar{A}$$

(3) ถูกต้องด้วยเหตุผลดังนี้ $A^t = [a_{ji}]_{n\times m}$

$$\bar{A}^t = [\bar{a}_{ji}]_{n\times m}$$

$$= [\bar{a}_{ij}]^t_{n\times m}$$

$$= (\bar{A})^t$$

28. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$

$A = \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^2 = |\bar{u}|\}$

$B = \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^3 = |\bar{v}|\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) $A - B = \phi$

(2) $A = B$

(3) $B - A = \phi$

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

ก. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

ข. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

ตอบ ง.

แนวคิด $A = \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^2 = |\bar{u}|\}$

$= \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^2 = \sqrt{9+16}\}$

$= \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^2 = 5\}$

$= \{\bar{w} \mid |\bar{w}| = \sqrt{5}\}$

$B = \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^3 = |\bar{v}|\}$

$= \{\bar{w} \mid |\bar{w}|^3 = 5\}$

$= \{\bar{w} \mid |\bar{w}| = \sqrt[3]{5}\}$

เพราะฉะนั้น $A - B = A \neq \phi$

$A \neq B$

$B - A = B \neq \phi$

สรุป ข้อความ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

29. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ที่มีลิมิตเป็น 3 และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี $b_1 = 5$ อัตราส่วนร่วม $= r$ และ $b_n = a_n - a_{n-1}$ ทุกค่า $n \in \{2,3,4,\ldots\}$ ถ้าอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว คู่อันดับ (a_1, r) สอดคล้องกับสมการในข้อใด

ก. $(x-5)(3y+2) = 0$ ข. $x-5 = 3(1-y) + 5$

ค. $x = \dfrac{3-8y}{1-y}$ ง. $x = \dfrac{5}{y-1} + 3$

ตอบ ค.

แนวคิด จาก $b_n = a_n - a_{n-1}$ ทุกค่า $n \geq 2$

จะได้ว่า สำหรับทุก $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} b_i &= b_1 + b_2 + \ldots + b_n \\ &= 5+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_n-a_{n-1}) \\ &= 5 + a_n - a_1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{\infty} b_i = 5 + \lim_{n\to\infty} a_n - a_1$

$$\frac{5}{1-r} = 5 + 3 - a_1$$

$$a_1 = 8 - \frac{5}{1-r}$$

$$= \frac{8 - 8r - 5}{1-r}$$

$$= \frac{3 - 8r}{1-r}$$

นั่นคือ (a_1, r) สอดคล้องเงื่อนไข (x,y) ในสมการ

$$x = \frac{3 - 8y}{1-y}$$

๓๐. กำหนดให้ สำหรับจำนวนจริงบวก a ใดๆ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

แล้ว $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[3n]{2} - 1}$ ตรงกับข้อใด

ก. ไม่มีค่า

ข. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$

ค. มีค่าเท่ากับ ๒

ง. มีค่าเท่ากับ ๓

ตอบ ง.

แนวคิด $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[3n]{2} - 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}} - 1}{2^{\frac{1}{3n}} - 1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2^{\frac{1}{3n}} - 1)(2^{\frac{2}{3n}} + 2^{\frac{1}{3n}} + 1)}{2^{\frac{1}{3n}} - 1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(2^{\frac{2}{3n}} + 2^{\frac{1}{3n}} + 1\right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^{\frac{2}{3}}} + \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2^{\frac{1}{3}}} + 1$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$= 3$$

31. กำหนดให้ $y = f(u)$, $u = \dfrac{1}{\sqrt{2x} + 1}$ และเมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = -3$ ถ้า $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-[1 + (\sqrt{2x} + 1)^2]}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x} + 1)^2}$ แล้ว เมื่อ $u = \frac{1}{2}$ ค่าของ y เท่ากับเท่าใด

ก. -2 ข. $-\dfrac{11}{6}$

ค. $-\dfrac{27}{4}$ ง. $-\dfrac{3}{2}$

ตอบ ข.

แนวคิด

$$\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{2x} + 1}\right]$$

$$= \frac{(-1)\left(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\right)}{(\sqrt{2x} + 1)^2}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x} + 1)^2}$$

จาก $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$$\frac{-[1+(\sqrt{2x}+1)^2]}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x}+1)^2} = \frac{dy}{du} \cdot \left[\frac{-1}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x}+1)^2}\right]$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{dy}{du} = 1-(\sqrt{2x}+1)^2$

$$= 1 + u^{-2}$$

ดังนั้น $y = \int (1+u^{-2})\,du = u - \dfrac{1}{u} + k$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = -3$ และ $u = \dfrac{1}{3}$

ดังนั้น $-3 = \dfrac{1}{3} - 3 + k$

$$k = -\frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $u = \dfrac{1}{2}$

จะได้ $y = \dfrac{1}{2} - 2 - \dfrac{1}{3}$

$$= -\frac{11}{6}$$

วิธีลัด $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-[1+(\sqrt{2x}+1)^2]}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x}+1)^2}$

$$y = \int \frac{-[-1+(\sqrt{2x}+1)^2]}{\sqrt{2x}\,(\sqrt{2x}+2)^2}\,dx$$

แทนค่า $V = \sqrt{2x} + 1$

$$V-1 = \sqrt{2x}$$

$$(V-1)^2 = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(V-1)^2 = 2$$

$$2(V-1)dV = 2\,dx$$

$$dx = (V-1)\,dV$$

$$y = \int \frac{-[1+V^2](V-1)}{(V-1)V^2}\,dV$$

$$= -\int V^{-2}\,dV - \int dV$$

$$= \frac{1}{V} - V + k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}+1} - \sqrt{2x} - 1 + k$$

เพราะว่า $x = 2$ จะได้ $y = -3$

เพราะฉะนั้น $-3 = \frac{1}{3} - 2 - 1 + k$

$$k = -\frac{1}{3}$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{\sqrt{2x}+1} - \sqrt{2x} - 1 - \frac{1}{3}$

เมื่อ $u = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2x}+1}$

$$\sqrt{2x} + 1 = 2$$

$$x = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $y = \frac{1}{1+1} - 1 - 1 - \frac{1}{3} = -\frac{11}{6}$

32. ให้ k เป็นจำนวนจริง และ $f_k : R-\{2\} \rightarrow R$ กำหนดโดย

$$f_k(x) = \frac{k|x^2-4|}{x-2} \quad \text{ทุกค่า } x \in R-\{2\}$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim_{x \to 2^-} f_k(x) = -4k$

และ $\lim_{x \to 2^+} f_k(x) = 4k$

(2) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim_{x \to 2} f_k(x) = |4k|$

(3) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim_{x \to 2} f_k(x)$ ไม่มีค่า

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

ข. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

ตอบ ก.

แนวคิด เพราะว่า $f_k(x) = \frac{k|x^2-4|}{x-2} = \frac{k|x-2|\cdot|x+2|}{x-2}$

$$= \begin{cases} k|x+2| & , x > 2 \\ -k|x+2| & , x < 2 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 2^-} f_k(x) = \lim_{x \to 2^-} -k|x+2| = -4k$

และ $\lim_{x \to 2^+} f_k(x) = \lim_{x \to 2^+} k|x+2| = 4k$

เพราะฉะนั้น ข้อ (1) ถูกต้อง

นอกจากนี้จะเห็นว่า

$\lim\limits_{x \to 2^-} f_k(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x)$ ก็ต่อเมื่อ $-4k = 4k$

ก็ต่อเมื่อ $-k = k$

ก็ต่อเมื่อ $k = 0$

เพราะฉะนั้น ข้อ (2) และข้อ (3) ผิด

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้เป็นสูตรในพจน์ของ k อีกแล้ว

เลือก $k = 0$ จะได้

$$f_k(x) = f_o(x) = 0 \quad \text{ทุกค่า } x \in R-\{2\}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} f_o(x) = 0$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น (3) ผิด ซึ่งทำให้เราต้องเลือก ค. ทิ้งได้

เลือก $k = 1$ จะได้

$$f_k(x) = f_1(x) = \frac{|x^2-4|}{x-2} \quad \text{ทุกค่า } x \in R-\{2\}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f_1(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{|x^2-4|}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} \frac{|x-2|\cdot|x+2|}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2^-} -|x+2| = -4 \neq |4(1)|$$

เพราะฉะนั้น (2) ผิด ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก ข. ทิ้งได้

ตอนนี้ก็เหลือตัวเลือก ก. กับ ง. เท่านั้น เดาจาก 2 ข้อ ย่อมดีกว่าเดาจาก 4 ข้อแน่นอน

33. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{x}-1} & \text{เมื่อ } x > \frac{1}{4} \\ \dfrac{1}{|4x|+1} & \text{เมื่อ } x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = \frac{1}{4}$

(2) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = -\frac{1}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) เท่านั้นที่ถูกต้อง

ข. ข้อ (2) เท่านั้นที่ถูกต้อง

ค. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ถูกต้อง

ง. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ไม่ถูกต้อง

ตอบ ก.

แนวคิด (1) ถูกต้อง เพราะว่า

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{4}^-} \frac{1}{|4x|+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{4x+3}+2}{\sqrt{4x+3}+2}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{4x-1}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{4x+3}+2)} \cdot \frac{(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{4}^+} \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{4x+3}+2} = \frac{1+1}{2+2} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} f(x) = \frac{1}{2} = f(\frac{1}{4})$

นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ $x = \frac{1}{4}$

(2) ผิด เพราะว่า

จาก $f(x) = \frac{1}{|4x| + 1}$ เมื่อ $x \leq \frac{1}{4}$

ดังนั้น $f(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{|4(-\frac{1}{4})| + 1} = \frac{1}{2}$

และ $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{4}} \frac{1}{|4x| + 1} = \frac{1}{2}$

จึงได้ว่า f ต่อเนื่องที่ $x = -\frac{1}{4}$

34. ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x,y) ใดๆ เป็น $\frac{1}{2\sqrt{x}} + x$ และสมการ $y = \frac{3}{2}x - 1$ เป็นสมกา เส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด (1,a) แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้เป็นจุดบนเส้นโค้ง

ก. $(4, \frac{47}{3})$ ข. (4,16)

ค. (4,9) ง. (4,10)

ตอบ ก.

แนวคิด โจทย์กำหนด $y'' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + x$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x$$

จะได้ $y' = \int y'' \, dx$

$$= \int (\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} + x) \, dx$$

$$= x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^2}{2} + c_1$$

จาก $y = \frac{3}{2} x - 1$ เป็นสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด $(1,a)$

จะได้ $y'(1) = \frac{3}{2}$ และ $a = \frac{3}{2}(1) - 1 = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} + c_1$ ซึ่งจะได้ว่า $c_1 = 0$

จาก $y' = x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}$ ได้ $y = \int y' \, dx$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}) \, dx$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{6} + c_2$$

จากการที่เส้นโค้งผ่านจุด $(1, \frac{1}{2})$

จะได้ $\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + c_2$ นั่นคือ $c_2 = \frac{3-(4+1)}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

ดังนั้นสมการเส้นโค้งคือ $y = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{6} - \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $x = 4$ จะได้ $y = \frac{2}{3} 4^{\frac{3}{2}} + \frac{4^3}{6} - \frac{1}{3}$

$$= \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{64}{6} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{47}{3}$$

35. กำหนดให้

รายการสินค้า	ราคาสินค้า (บาท)		ปริมาณ (ตัน)
	2535	2536	2536
A	110	115	200
B	215	220	300
C	325	320	400
D	430	450	250

เราต้องการหาดัชนีราคาของปี 2536 โดยให้ปี 2535 เป็นปีฐาน ดัชนีในข้อใดที่เราหาไม่ได้

ก. ดัชนีราคารวมอย่างง่าย

ข. ดัชนีราคาสัมพัทธ์เฉลี่ยอย่างง่าย

ค. ดัชนีราคาของลาสไพเยอเรส

ง. ดัชนีราคารวมของพาเช่อ

ตอบ ค.

แนวคิด (ก) จากสูตรดัชนีราคารวมอย่างง่าย

$$I_{36} = \frac{\Sigma P_{36}}{\Sigma P_{35}} \times 100$$

ใช้ราคารวมของปี 2535 และราคารวมของปี 2536 เท่านั้น ข้อมูลที่ให้จึงเพียงพอที่จะหาดัชนีราคารวมอย่างง่าย

(ข) จากสูตรดัชนีราคาสัมพัทธ์เฉลี่ยอย่างง่าย

$$I_{36} = \frac{\Sigma \left(\frac{P_{36}}{P_{35}} \times 100\right)}{4}$$

ใช้ราคาของปี 2535 และราคาของปี 2536 และจำนวนรายการสินค้าเท่านั้น ข้อมูลที่ให้จึงเพียงพอที่จะหาดัชนีราคาสัมพัทธ์เฉลี่ยอย่างง่าย

(ค) จากสูตรดัชนีราคารวมของลาสไพเยอเรส

$$I_{36} = \frac{\Sigma P_{36} Q_{35}}{\Sigma P_{35} Q_{35}} \times 100$$

ต้องใช้ปริมาณปีฐานคือ ปี 2535 ซึ่งไม่มีในข้อมูลที่ให้มา ดังนั้นด้วยข้อมูลที่ให้จึง ไม่ เพียงพอที่จะหาดัชนีราคารวมของลาสไพ-เยอเรส

(ง) จากสูตรดัชนีราคารวมของพาเช่อ

$$I_{36} = \frac{\Sigma P_{36} Q_{36}}{\Sigma P_{35} Q_{36}} \times 100$$

ใช้ราคาของปี 2535 และราคาปี 2536 และปริมาณสินค้าในปี 2536 เท่านั้น ข้อมูลที่ให้จึงเพียงพอที่จะหาดัชนีราคารวมของพาเช่อ

36. วิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรคราวละ 4 ตัว จากคำ BOOKKEEPER

มีจำนวนวิธีเท่ากับเท่าใด

ก. 5040 ข. 758

ค. 360 ง. 90

ตอบ ข.

แนวคิด จากคำ BOOKKEEPER มีอักษร

อักษร	จำนวน
E	3
O	2
K	2
B	1
P	1
R	1

การเรียงสับเปลี่ยนคราวละ 4 ตัว จำแนกเป็น 4 กรณีคือ

กรณีที่ 1 ซ้ำกัน 3 ตัว ต่างกัน 1 ตัว

ขั้นตอนที่ 1 เลือกอักษร EEE มาทั้งหมดทำได้ 1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกอักษรอีก 1 ตัวมาจาก 5 แบบที่แตกต่างกัน

ทำได้ $\binom{5}{1} = 5$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำตัวอักษรที่ได้มาจัดลำดับทำได้ $\frac{4!}{3!1!} = 4$ วิธี

รวมจำนวนวิธีเท่ากับ $(1)(5)(4) = 20$ วิธี

กรณีที่ 2 ซ้ำกันเป็นคู่ๆ จำนวน 2 คู่

ขั้นตอนที่ 1 เลือกอักษรชนิดที่ซ้ำกันได้เป็นคู่ๆ ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำตัวอักษรที่ได้มาจัดลำดับทำได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

รวมจำนวนวิธีเท่ากับ $(3)(6) = 18$ วิธี

กรณีที่ 3 ซ้ำกัน 2 ตัว อีก 2 ตัวแตกต่างกัน

ขั้นตอนที่ 1 เลือกอักษรที่ซ้ำกันได้ 2 ตัว ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกอักษรอีก 2 แบบจาก 5 แบบที่เหลือมาอย่างละตัว

ทำได้ $\binom{5}{2} = 10$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำอักษรที่ได้มาจัดลำดับทำได้ $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ วิธี

รวมจำนวนวิธีเท่ากับ $(3)(10)(12) = 360$ วิธี

กรณีที่ 4 แตกต่างกันทั้งหมด 4 แบบ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกอักษรมาอย่างละแบบทำได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดลำดับอักษร 4 ตัวที่เลือกออกมา

ทำได้ $4! = 24$ วิธี

รวมจำนวนวิธีเท่ากับ $(15)(24) = 360$ วิธี

สรุปจากทุกกรณีจะได้จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ

$$20 + 18 + 360 + 360 = 758 \text{ วิธี}$$

37. ถุงใบหนึ่งใส่ดินสอ 5 แท่ง สีต่างกันทั้ง 5 แท่ง หยิบดินสอจากถุงครั้งละ 1 แท่ง แล้วใส่คืนลงถุงก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป ทำเช่นนี้ 4 ครั้ง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดมีค่ามากที่สุด จากการหยิบดินสอออกจากถุง 4 ครั้ง

ก. หยิบได้ดินสอสีต่างกัน 4 สี

ข. หยิบได้ดินสอสีต่างกัน 3 สี

ค. หยิบได้ดินสอสีต่างกัน 2 สี

ง. หยิบได้ดินสอสีเดียวกัน

ตอบ ข.

แนวคิด ก. จำนวนวิธีหยิบได้ดินสอสีต่างกัน 4 สี มีวิธีนับดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การหยิบครั้งที่ 1 เลือกได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 การหยิบครั้งที่ 2 เลือกได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 การหยิบครั้งที่ 3 เลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกได้แค่ 2 วิธีเท่านั้น

รวมจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ (5)(4)(3)(2) = 120 วิธี

ข. จำนวนวิธีหยิบได้ดินสอสีต่างกัน 3 สี มีวิธีนับดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกสีที่จะหยิบซ้ำ 2 แท่งก่อนทำได้ $\binom{5}{1} = 5$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกสีอีก 2 สีจาก 4 สีที่เหลือทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ลำดับของการหยิบเปรียบเหมือนการจัดลำดับของ 4 สิ่ง มีซ้ำกันอยู่ 2 สี ทำได้ $\frac{4!}{2!1!1!} = 12$ วิธี

รวมจำนวนวิธีเท่ากับ (5)(6)(12) = 360 วิธี

เกี่ยวกับผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การศึกษา

วท.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานที่ทำ

รองศาสตราจารย์ ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
กรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2528-2537)
อาจารย์สอนเสริมมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2526-2537)

ผลงานตำรา

- พีชคณิตเชิงเส้น (2537)
- ภาษาเบสิก (2531)
- คณิตศาสตร์ชั้นสูง (2532)
- ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมตริกซ์ (2537)
- คณิตศาสตร์ปรนัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 3

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยเฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม.ปลาย) ประจำปีการศึกษา 2536 ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ที่สอบเมื่อวันที่ 9 มกราคม 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และเทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท
กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980-2, 2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 3
ISBN 974-584-756-9
9 789745 847569
C112
4000 20.00 บาท