คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

สำหรับข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับม.ปลาย

2	6	4
3	7	1
9	8	5

เล่มที่ 4

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-584-757-7

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 4
ISBN 974-584-757-7
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ.2537
จำนวน 3,000 เล่ม

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626
จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2, 2187000 โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 4

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 4 ผมได้นำข้อสอบแข่งขันวัฎจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 ที่สอบไปเมื่อวันที่ 13 พฤศจิกายน 2536 โดยใช้วิธีเฉลยตามแนวของคณิตศาสตร์ปรนัย สำหรับเนื้อหาในเล่มนี้ผมได้เพิ่มเติมคอลัมน์

โจทย์จากปก เพื่อให้ครูผู้สอนและนักเรียนได้เห็นแนวคิดในการสร้างสรรค์และพัฒนาโจทย์ข้อสอบในรูปแบบต่างๆ โดยมีสื่อเป็นภาพที่น่าสนใจ

ข้อสอบเพิ่มเติม เป็นการนำข้อสอบที่คัดเลือกมาจากข้อสอบสมาคมฯ ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. คณิตศาสตร์ ก. และข้อสอบอื่นๆโดยเน้นข้อสอบชนิดที่ทำโดยใช้แนวทางวิธีลัดและการตัดตัวเลือก จะใช้เวลาน้อยกว่าทำโดยวิธีจริง

เพื่อความประหยัดหน้ากระดาษผมขอรวมสารบัญมาไว้ดังนี้

สำหรับคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อๆ ไป ผมจะได้นำเสนอเนื้อหาในแนวทางการพัฒนาคุณภาพข้อสอบ, เทคนิคการจำสูตร, ข้อสอบต่างประเทศ โดยยังคงเนื้อหาหลักของหนังสือเป็นการเฉลยข้อสอบแข่งขันและข้อสอบ ENTRANCE พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

วัฏจักรคณิตศาสตร์ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 2
วันที่ 13 พฤศจิกายน พ.ศ. 2536

ตอนที่ 1

1. **บทนิยาม** เซต A เป็นเซตถ่ายทอด ก็ต่อเมื่อ
$$\forall x\ [x \in A \rightarrow x \subset A]$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

ข. สำหรับเซต A ใดๆ P(A) เป็นเซตถ่ายทอด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว　　2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

3. ก.และ ข.ถูกทั้งสองข้อ　　4. ก.และ ข.ผิดทั้งสองข้อ

ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถูก เพราะว่าเมื่อ $A = \phi$ จะได้ว่า
$x \in \phi$ เป็นเท็จ ดังนั้นข้อความ
$x \in \phi \rightarrow x \subset \phi$ จึงมีค่าความจริงเป็นจริง
สรุป $\forall x\ [x \in \phi \rightarrow x \subset \phi]$ เป็นจริง
เพราะฉะนั้น ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

ข. ผิด เช่น $A = \{1\}$ จะได้ $P(A) = \{\phi, A\}$
เพราะว่า $\{1\} \in P(A)$ แต่ $\{1\} \not\subset P(A)$
เพราะฉะนั้น P(A) ไม่เป็นเซตถ่ายทอด

2. กำหนดให้ $A' \cap B = (A \cap B')'$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \neq B'$ 2. $A' \neq B$

3. $A \cup B' \subset B'$ 4. $A \not\subset A \cap B'$

ตอบ 3.

แนวคิด จาก $A' \cap B = (A \cap B')'$

จะได้ $A' \cap B = A' \cup B$

เพราะฉะนั้น $A' = B$ ผลที่ตามมาคือ

1. $A \neq B'$ เป็นข้อความที่ผิด

2. $A' \neq B$ เป็นข้อความที่ผิด

3. $A \cup B' = B'$

ดังนั้น $A \cup B' \subset B'$ ถูกต้อง

4. $A \cap B' = A$

ดังนั้น $A \not\subset A \cap B'$ เป็นข้อความที่ผิด

วิธีลัด ลักษณะของโจทย์ข้อนี้เราสามารถใช้การแทนค่าเซต A และ B ที่เหมาะสมแล้วทำการตัดตัวเลือกได้ เช่น

$U = \{1,2\}$

เลือก $A = \{1\}$ และ $B = \{2\}$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์

นั่นคือ $A' \cap B = \{2\}$ และ $(A \cap B')' = \{2\}$

แต่ตัวเลือก

1. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$

2. ผิด เพราะว่า $A' = \{2\}$ และ $B = \{2\}$

3. ถูก เพราะว่า $A \cup B' = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$

4. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $A \cap B' = \{1\}$

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

$$\begin{aligned} a \in X &\rightarrow a \in X \cup Y \\ &\rightarrow a \in X \cap Y \\ &\rightarrow a \in Y \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $X \subset Y$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $Y \subset X$

สรุป ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

3. ให้ $U = \{1,2,3,...,100\}$ และ

$X = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(x,100) = 1\}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าใด

1. 5050 2. 3000
3. 2000 4. 1050

ตอบ 3.

แนวคิด $U = \{1,2,3,...,100\}$

$$\sum_{x \in U} x = 1 + 2 + 3 + ... + 100$$

$$= \frac{100}{2}(1+100) = 5050$$

$X = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(x,100) = 1\}$

$X' = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(x,100) \neq 1\}$

เพราะว่า $100 = 2^2 \cdot 5^2$

เพราะฉะนั้น $x \in U$ และ ห.ร.ม.$(x,100) \neq 1$ คือตัวเลข x ที่ 2 หารลงตัว หรือ 5 หารลงตัว

ให้ $A = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว$\}$

$= \{2,4,6,\ldots,100\}$

จะได้ $\sum\limits_{x \in A} x = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100$

$= \frac{50}{2}(2+100) = 2550$

ให้ $B = \{x \in U \mid 5$ หาร x ลงตัว$\}$

$= \{5,10,15,\ldots,100\}$

จะได้ $\sum\limits_{x \in B} x = 5 + 10 + 15 + \ldots + 100$

$= \frac{20}{2}(5+100) = 1050$

$A \cap B = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว และ 5 หาร x ลงตัว$\}$

$= \{10,20,30,\ldots,100\}$

$$\sum_{x \in A \cap B} x = 10 + 20 + 30 + \ldots + 100$$

$$= \frac{10}{2}(10+100) = 550$$

เพราะว่า $X' = A \cup B$ และ

$$\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x - \sum_{x \in A \cap B} x$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x \in X'} x = 2550 + 1050 - 550 = 3050$$

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in U} x - \sum_{x \in X'} x = 5050 - 3050 = 2000$$

วิธีคิด เนื่องจากจำนวนสมาชิกของ U มีไม่มากและจำนวน x ที่ ห.ร.ม.(x,100) = 1 คือตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 100 ซึ่งเราสามารถแจงนับได้ดังนี้

สมาชิกที่ใช้ได้	ผลบวก
1,3,7,9	20
11,13,17,19	60
21,23,27,29	100
31,33,37,39	140
41,43,47,49	180
51,53,57,59	220
61,63,67,69	260
71,73,77,79	300
81,83,87,89	340
91,93,97,99	380
	รวม 2000

4. ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ

$x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$ และ $z = \frac{c-a}{c+a}$ เป็นจำนวนจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x+y+z \geqslant 0$ 2. $x+y+z < 0$
3. $xyz < 0$
4. $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

ตอบ 4.

แนวคิด $1-x = 1 - (\frac{a-b}{a+b}) = \frac{2b}{a+b}$

$$1-y = 1 - (\frac{b-c}{b+c}) = \frac{2c}{b+c}$$

$$1-z = 1 - (\frac{c-a}{c+a}) = \frac{2a}{c+a}$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$1+x = 1 + (\frac{a-b}{a+b}) = \frac{2a}{a+b}$$

$$1+y = 1 + (\frac{b-c}{b+c}) = \frac{2b}{b+c}$$

$$1+z = 1 + (\frac{c-a}{c+a}) = \frac{2c}{c+a}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

สรุป $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

วิธีลัด จากวิธีทำข้างบนนี้กว่าจะได้คำตอบคงต้องเสียเวลากับการคิดตัวเลือก 1. 2. และ 3. พอสมควร

เรามาลองใช้วิธีแทนค่าตัดตัวเลือกกันดีกว่า

เมื่อ $a = 1$ $b = 1$ และ $c = 1$

จะได้ $x = 0$ $y = 0$ และ $z = 0$

พิจารณาแต่ละตัวเลือก

1. $x+y+z = 0 \geqslant 0$ ใช้ได้
2. $x+y+z = 0 < 0$ ผิดแน่นอน
3. $xyz = 0 < 0$ ผิดอีกเหมือนกัน
4. $(1-0)(1-0)(1-0) = (1+0)(1+0)(1+0)$ ใช้ได้

สรุปตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $a = 1$ $b = 2$ และ $c = 3$

จะได้ $x = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{1}{5}$ และ $z = \frac{2}{4}$

เพราะว่า $x+y+z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = -\frac{2}{60}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิดอีก

สรุปเหลือตัวเลือกเดียวคือ 4. เลือกเป็นคำตอบเลย

5. เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1,1)$
2. $(1,2)$
3. $(\frac{3}{2}, 4)$
4. $(2,\infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$

$$1-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x+1$$

$$-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x$$

$$x^4-x^2 = x^4-4x^3+4x^2$$

$$-4x^3+5x^2 = 0$$

$$x^2(-4x+5) = 0$$

ดังนั้น $x^2 = 0$ หรือ $-4x+5 = 0$

จากโจทย์จะพบว่า $x = 0$ ไม่ได้

ดังนั้น $-4x+5 = 0$

$$x = \frac{5}{4}$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $\{\frac{5}{4}\}$ เป็นสับเซตของตัวเลือก 2.

6. กำหนดให้ $U = \{f \mid f : \{1,2,3,4\} \xrightarrow{1-1} \{1,2,3,4\}\}$

$E \subset U$ มีคุณสมบัติดังนี้

$f \in E$ ก็ต่อเมื่อ (1) $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$

และ (2) ถ้า $f(3) \neq 4$ แล้ว

$[f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)]$

จำนวนสมาชิกของเซต E เท่ากับเท่าใด

1. 8 2. 10

3. 12 4. 16

ตอบ 1.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิก $f \in E$

กรณี 1 $f(3) = 4$

ขั้นที่ 1 การส่งค่า 1 ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่า 2 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่า 4 ทำได้ 1 วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

กรณี 2 $f(3) \neq 4$

ขั้นที่ 1 เพราะว่า $f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)$

เพราะฉะนั้นการส่งค่าของ 3 ทำได้วิธีเดียวคือ $f(3) = 1$

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$

เพราะฉะนั้น $f(4)$ ต้องเท่ากับ 4 ซึ่งทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าระหว่าง $\{1,2\}$ กับ $\{1,2\}$ ทำได้ $2! = 2$ วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ $(1)(1)(2) = 2$ วิธี

สรุป $n(E) = 6+2 = 8$

วิธีลัด เนื่องจากเงื่อนไขสมาชิกของเซต E มี <u>และ</u> ๓ เงื่อนไข ดังนั้นการคิดบางเงื่อนไขก็จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เช่น

ให้ $F = \{f \in U \mid f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4\}$

การนับจำนวนสมาชิก F พิจารณาดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลข 2 ตัวจาก $\{1,2,3\}$ เพื่อจับคู่กับ $\{1,2\}$ ซึ่งทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่าง $\{1,2\}$ กับตัวเลขที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ ๑ ทำได้ $2!$ วิธี

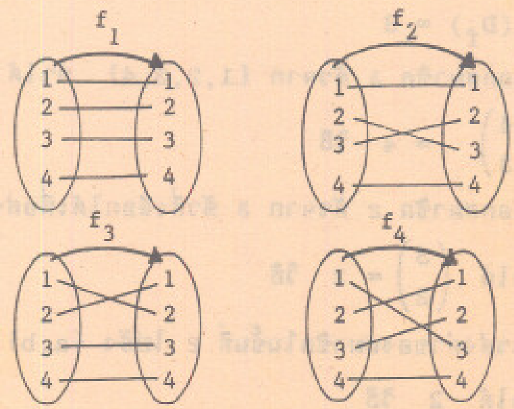
ขั้นที่ ๓ การส่งค่าของ $\{3,4\}$ กับส่วนที่เหลือทำได้ $2!$ วิธี

เพราะฉะนั้น $n(F) = (3)(2!)(2!) = 12$

เพราะว่า $E \subset F$ เพราะฉะนั้น $n(E) \leqslant 12$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้

เมื่อเราคิดเฉพาะสมาชิกใน F ที่ไม่อยู่ใน E คือ



เพราะฉะนั้น $n(E) \leqslant 12-4 = 8$

ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. ๓. และ 4. ทิ้งได้เลย

7. กำหนดให้

$U = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset \{1,2,3,4\} \times \{a,b\}\}$

$A = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f = \{a,b\}\}$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

1. 12   2. 14

3. 16   4. 56

ตอบ 4.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกของ A จำแนกเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 $n(D_f) = 2$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก $\{1,2,3,4\}$ ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่างสมาชิก 2 ตัวที่เลือกได้กับ $\{a,b\}$

ทำได้ $2! = 2$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6)(2) = 12$ วิธี

กรณีที่ 2 $n(D_f) = 3$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก $\{1,2,3,4\}$ ทำได้

$\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 3 ตัวที่เลือกได้เพื่อส่งค่าไปที่เดียวกัน

ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของสมาชิกในขั้นที่ 2 ไปยัง $\{a,b\}$

ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 ตัวเลขที่เหลือ 1 ตัว ส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(3)(2)(1) = 24$ วิธี

กรณีที่ 3 $n(D_f) = 4$

<u>กรณีที่ 3.1</u> สมาชิก 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก 4 ตัวเพื่อส่งค่า

ทำได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิกที่เลือกมาได้ทั้ง 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกันคือ

a หรือ b ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกส่วนที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(2)(1) = 8$

<u>กรณีที่ 3.2</u> สมาชิก 2 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 4 ตัวเพื่อส่งค่า

ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิกที่เลือกได้ทั้ง 2 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกันคือ

a หรือ b ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกส่วนที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6)(2)(1) = 12$ วิธี

สรุป จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับ $12+24+8+12 = 56$

วิธีลัด จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เราจะได้จำนวนสมาชิก

$n(A) \geqslant 12+24 = 36$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

๘. ให้ A เป็นเซตของประพจน์ที่มีค่าความจริง ๓ ค่า คือ 0,1,2

$f : A \longrightarrow \{0,1,2\}$ เป็นฟังก์ชันค่าความจริง

ให้ $*$ เป็นตัวเชื่อมของประพจน์ที่กำหนดโดย

$$f(p*q) = \begin{cases} 2 & , f(p) \leq f(q) \\ f(q) & , f(p) > f(q) \end{cases}$$

Δ เป็นตัวเชื่อมที่กำหนดโดย

$$f(\Delta p) = \begin{cases} 2 & , f(p) = 0 \\ 0 & , f(p) \neq 0 \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f((p*p)*(q*q)) = 2$ ทุก $p,q \in A$

ข. $f((\Delta p)*q) = 1$ ถ้า $f(p) = f(q) = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

๑. ก. ถูกเพียงข้อเดียว ๒. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

๓. ก.และ ข.ถูกทั้งสองข้อ ๔. ก.และ ข.ผิดทั้งสองข้อ

ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถูก

เพราะว่า ทุกประพจน์ p,q $f(p*p) = 2 = f(q*q)$

เพราะฉะนั้น $f((p*p)*(q*q)) = 2$

ข. ผิด

เพราะว่า $f(p) = 1 \neq 0$ ดังนั้น $f(\Delta p) = 0$

เพราะว่า $f(q) = 1 > f(\Delta p)$

เพราะฉะนั้น $f((\Delta p)*q) = 2$

9. กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$

ให้ $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

ผลบวกของสมาชิกของเซต X มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -107 2. -106
3. -105 4. -104

ตอบ 4.

แนวคิด $5^{-10} < 3^n < 5$

$$\log 5^{-10} < \log 3^n < \log 5$$

$$-10 \log 5 < n \log 3 < \log 5$$

$$-10(1 - \log 2) < (0.4771)n < 1 - \log 2$$

$$-10(1 - 0.3010) < (0.4771)n < 1 - 0.3010$$

$$-6.99 < (0.4771)n < 0.699$$

$$-14.65 < n < 1.465$$

เพราะฉะนั้น $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

$= \{-14,-13,-12,\ldots,-1,0,1\}$

ผลบวกสมาชิกของ X เท่ากับ

$$(-14) + (-13) + \ldots + (-1) + (0) + (1)$$

$$= (-14) + (-13) + \ldots + (-2)$$

$$= -(2 + 3 + 4 + \ldots + 14)$$

$$= -104$$

10. ให้ $a = 0.9$, $b = a^a$ และ $c = a^b$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a < b < c$ 2. $b < a < c$

3. $a < c < b$ 4. $b < c < a$

ตอบ 3.

แนวคิด เปรียบเทียบ $(0.9)^1$ กับ $(0.9)^{0.9}$ ดังนี้

เนื่องจาก $f(x) = (0.9)^x$ เป็นฟังก์ชันลด และ $1 > 0.9$

เพราะฉะนั้น $f(1) < f(0.9)$

นั่นคือ $(0.9)^1 < (0.9)^{0.9}$

สรุป $a < b$

ขณะนี้หากเราจะใช้วิธีตัดตัวเลือกก็สามารถตัดข้อ 2. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลด และ $a < b$

เพราะฉะนั้น $f(a) > f(b)$

นั่นคือ $a^a > a^b$

$b > c$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 3.

วิธีลัด เพราะว่า $f(1) < f(b)$

เพราะฉะนั้น $a = f(1) < a^b = f(b) = c$

จากโจทย์ข้อ 9. ให้ค่า $\log 3 = 0.4771$ เราสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ดังนี้

$$\log a = \log 0.9 = \log 9 - 1 = 2\log 3 - 1$$
$$= 2(0.4771) - 1$$
$$= -0.0458$$

$$\log b = \log a^a = a\log a$$
$$= (0.9)(-0.0458)$$
$$= -0.04122$$

เพราะว่า $-0.04122 > -0.0458$

$\log b > \log a$

เพราะฉะนั้น $b > a$

ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้

11. ให้ ℓ แทนเส้นตรงที่มีสมการ $y = 2x$ พิกัดของจุด P_0 คือ (0,2) ถ้า P_1 เป็นโพรเจกชันของ P_0 บน ℓ , P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y และ P_3 เป็นโพรเจกชันของ P_2 บน ℓ พิกัดของ P_3 คือคู่อันดับใด

1. (0.5,1)
2. (0.64,1.28)
3. (0.8,1.6)
4. (0.84,1.68)

ตอบ 2.

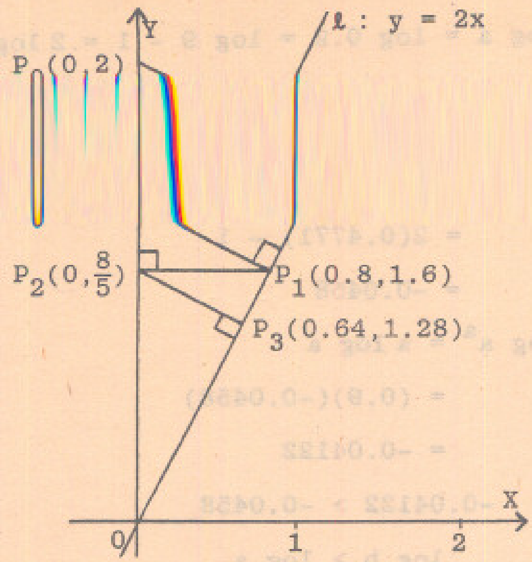
แนวคิด ℓ มีสมการเป็น $y = 2x$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ 2

เพราะว่า P_0P_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

เพราะฉะนั้น ความชัน P_0P_1 เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

สมการเส้นตรง P_0P_1 คือ $y-2 = (-\frac{1}{2})(x-0)$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$



แทนค่า $y = 2x$ จะได้ $2x = -\frac{x}{2} + 2$

$x = 0.8$

เพราะฉะนั้น $y = 1.6$

พิกัด $P_1(0.8,1.6)$

P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y

ดังนั้นพิกัด P_2 คือ $(0,1.6)$

เพราะว่า $P_2P_3 \perp \ell$ ดังนั้นความชันของเส้น P_2P_3 เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

และมีสมการเส้นตรง P_2P_3 เป็น

$$(y-1.6) = (-\frac{1}{2})(x-0)$$

$$y-1.6 = -\frac{x}{2}$$

แทนค่า $y = 2x$ เพื่อหาจุดตัด P_3 จะได้

$$2x-1.6 = -\frac{x}{2}$$

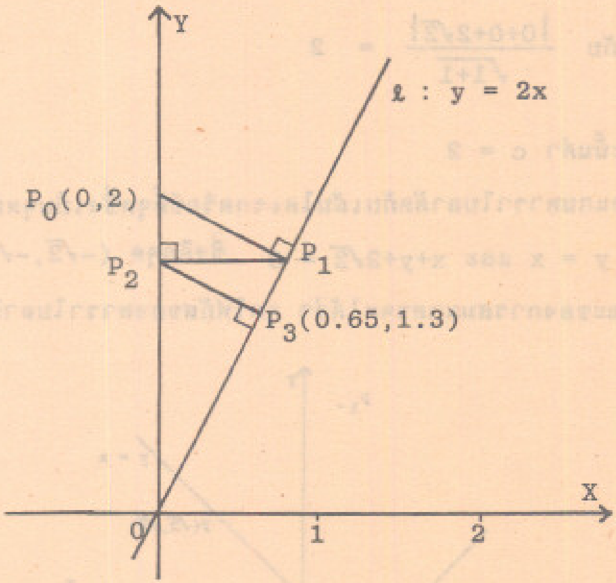
จะได้ $x = 0.64$

$y = 1.28$

สรุปพิกัดของ P_3 คือ $(0.64,1.28)$

วิธีลัด โดยการวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์โดยใช้สเกล 1 นิ้ว จะได้คำตอบเหมือนกัน

1. ลากเส้นตรง ℓ
2. เขียนจุด $P_0(0,2)$ และลากมาตั้งฉากกับ ℓ ที่ P_1
3. ลากเส้นจาก P_1 มาตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด P_2
4. ลากเส้นจากจุด P_2 มาตั้งฉากกับ ℓ ที่ P_3
5. วัดพิกัดของจุด P_3 ได้ (0.65,1.3)



เลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 2. ดีกว่า

หมายเหตุ หากใช้ไหวพริบนิดหน่อย เราวัดพิกัด P_3 ด้วยค่า $x = 0.65$ หรือ ค่า $y = 1.3$ เพียงค่าเดียวก็พอ

12. ให้ $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดปลายทั้งสองข้าง

ของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (0,0) และมี เส้นตรง $x+y+2\sqrt{2} = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์ ค่าของ $x_1+y_1+x_2+y_2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{2}$
2. $-2\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{2}$
4. $-4\sqrt{2}$

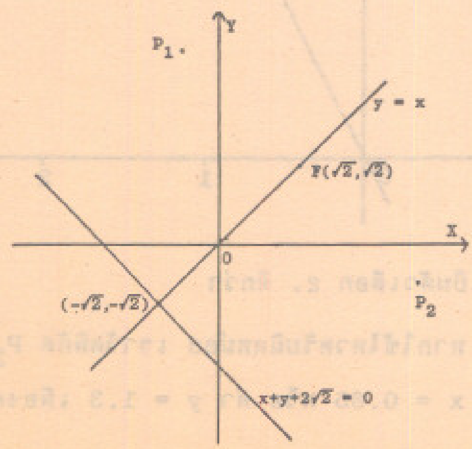
ตอบ 3.

แนวคิด ระยะทางจากจุด (0,0) ไปยังเส้นตรง $x+y+2\sqrt{2} = 0$

มีค่าเท่ากับ $\dfrac{|0+0+2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$

เพราะฉะนั้นค่า $c = 2$

เพราะว่าแกนพาราโบลาตัดกับเส้นไดเรกตริกซ์ที่จุดซึ่งเป็นจุดตัดของ เส้นตรง $y = x$ และ $x+y+2\sqrt{2} = 0$ ซึ่งคือจุด $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ด้วยลักษณะของการสมมาตรจะได้ว่า จุดโฟกัสของพาราโบลาคือ $F(\sqrt{2},\sqrt{2}$



เส้นเรตัสเรกตัมคือ เส้นที่ตั้งฉากกับแกนพาราโบลาผ่านจุด $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$

และมีความยาวเท่ากับ $|4c| = 8$ และมีความชันเท่ากับ -1

นั่นคือ $|FP_1| = 4 = |FP_2|$

และความชัน FP_1 = ความชัน $FP_2 = -1$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดที่ทำให้ $|PF| = 4$ และความชัน $PF = -1$

จะได้สมการ (1) และ (2) ดังนี้

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 16 \quad \text{———} (1)$$

$$\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = -1 \quad \text{———} (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $2(x-\sqrt{2})^2 = 16$

$$x = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

เมื่อ $x = -\sqrt{2}$ จะได้ $y = 3\sqrt{2}$

เมื่อ $x = 3\sqrt{2}$ จะได้ $y = -\sqrt{2}$

ให้ $P_1(x_1,y_1) = P_1(-\sqrt{2},3\sqrt{2})$, $P_2(x_2,y_2) = P_2(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$

สรุป $x_1+y_1+x_2+y_2 = 4\sqrt{2}$

วิธีลัด(1) จากภาพพิกัด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$

โดยสังเกตค่าตัวเลขโดยประมาณ จะได้ว่า

$$x_1 + y_1 > 0 \text{ และ } x_2 + y_2 > 0$$

เพราะฉะนั้น $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 > 0$

ดังนั้นตัวเลือก 2. และ 4. ตัดทิ้งได้

วิธีลัด(2) จากภาพประกอบที่วาดเมื่อรู้ว่า $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$

เป็นจุดโฟกัสแล้วเราลากเส้นตั้งฉากกับแกนพาราโบลาที่จุด F

และยาว 4 หน่วยไปที่จุด P_1 และ P_2

ต่อไปเราวัดระยะทางด้วยไม้บรรทัดจะได้พิกัดโดยประมาณของ P_1

และ P_2 เป็น $P_1(-1.4,4,2)$ และ $P_2(4.2,-1.4)$

ดังนั้น $x_1+y_1+x_2+y_2 = 5.4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $2\sqrt{2} = 2.8$ และ $4\sqrt{2} = 5.6$

เพราะฉะนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

ข. เมื่อ $x \in [0,2\pi)$ สมการ $\sin x + \cos x = 2$ จะมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

ค. ทุกจำนวนจริง x,y $\dfrac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan x + \tan y$ เมื่อ $\cos(x+y) \neq 0$

ง. ทุกจำนวนจริง θ $\tan(\frac{\pi}{4}+\theta) = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ เมื่อ $\tan\theta \neq 1$

ข้อความ ก - ง ถูกทั้งหมดกี่ข้อ

1. 1 ข้อ ข. 2 ข้อ

3. 3 ข้อ ง. 4 ข้อ

ตอบ 2

แนวคิด ก. ถูก แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

จาก $2-\sqrt{3} = 2-\sqrt{3}$

ดังนั้น $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4-2\sqrt{3}}{8}$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{8}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

ข. ผิด แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่า $(\sin x + \cos x)^2 = 4$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 4$$

$$2\sin x\cos x = 3$$

$$\sin 2x = 3$$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น ไม่มี $x \in [0, 2\pi)$ ที่ $\sin x + \cos x = 2$

ค. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan(x+y) = \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\tan x + \tan y = \tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ง. ถูก เพราะว่า

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}$$

$$= \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$$

14. กำหนด ΔABC มี $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$

ค่าของ $\dfrac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$
2. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $3\sqrt{3}$
4. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ตอบ 1.

แนวคิด จาก $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$

เพราะฉะนั้น $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

$$\begin{aligned}\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} &= \sin 40^\circ + \sin 80^\circ + \sin 60^\circ \\ &= 2 \sin 60^\circ \cos 20^\circ + \sin 60^\circ \\ &= \sin 60^\circ (2 \cos 20^\circ + 1)\end{aligned}$$

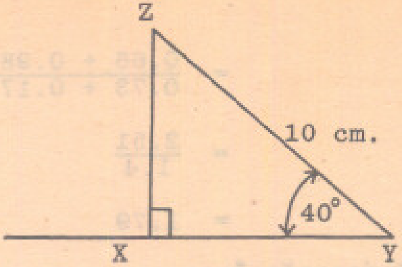
$$\begin{aligned}\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} &= \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 60^\circ \\ &= 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 60^\circ \\ &= \cos 60^\circ (2 \cos 20^\circ + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}} &= \frac{\sin 60^\circ (2 \cos 20^\circ + 1)}{\cos 60^\circ (2 \cos 20^\circ + 1)} \\ &= \tan 60^\circ \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

วิธีลัด เขียนสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ โดยมี

$\hat{X} = 90^\circ$, YZ ยาว 10 cm.

และ $\hat{Y} = 40^\circ$

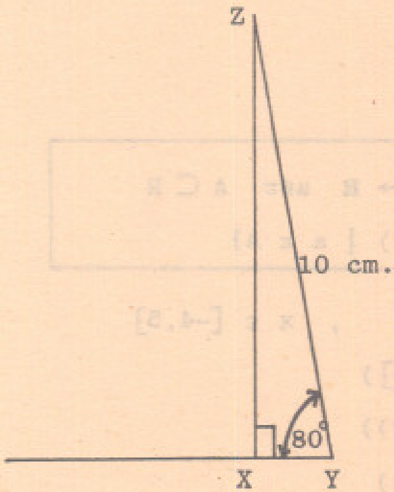


โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 6.6 cm. และ XY ยาว 7.3 cm.

$\sin 40^\circ = \sin \hat{Y} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{6.6}{10} = 0.66$

$\cos 40^\circ = \cos \hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{7.3}{10} = 0.73$

เขียนสามเหลี่ยม XYZ โดยมี $\hat{X} = 90^\circ$, YZ ยาว 10 cm.
และ $\hat{Y} = 80^\circ$



โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 9.8
XY ยาว 1.7

$\sin 80^\circ = \sin \hat{Y}$

$= \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

$= \frac{9.8}{10} = 0.98$

$\cos 80^\circ = \cos \hat{Y}$

$= \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

$= \frac{1.7}{10} = 0.17$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}}{\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 60^\circ}$$

$$= \frac{0.66 + 0.98 + 0.87}{0.73 + 0.17 + 0.5}$$

$$= \frac{2.51}{1.4}$$

$$= 1.79$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจากตัวเลือก

1. $\sqrt{3} = 1.73$

2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.365$

3. $3\sqrt{3} = 5.19$

4. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2.732}{2.83} = 0.9\dot{6}5$

สรุปเลือกข้อ 1. ดีกว่า

15. **บทนิยาม** ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $A \subset R$

$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

กำหนดให้ $f(x) = 3x^2-2x^3$, $x \in [-4,5]$

$X = f([-4,5])$

$Y = f([-4,0))$

$Z = f((0,5])$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $Y = X-Z$
2. $Y \cap Z = \phi$
3. $Z = X-Y$
4. $X = Z \cup Y$

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณากราฟของ $f(x) = 3x^2-2x^3$, $x \in [-4,5]$

$f'(x) = 6x-6x^2$

$f''(x) = 6-12x$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $6x-6x^2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x(1-x) = 0$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0,1$

เพราะว่า $f''(0) = 6 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

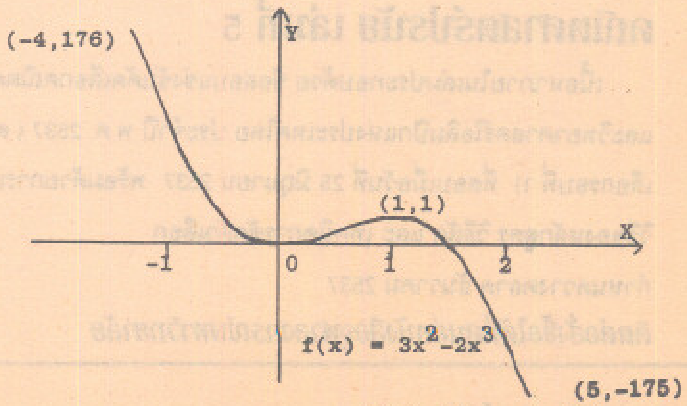
เพราะว่า $f''(1) = -6 < 0$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f''(x) = x(1-x)$

เพราะฉะนั้นเราพิจารณาฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

	$-4 \le x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x \le 5$
f'	-	0	+	0	-
f	ลด		เพิ่ม		ลด



วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 2536

จากกราฟจะได้

$X = f([-4,5])$

$= [f(5),f(-4)]$

$= [-175,176]$

$Y = f([-4,0))$

$= (f(0),f(-4)]$

$= (0,176]$

เพราะว่า $f(1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(0,5]$

เพราะฉะนั้น $Z = f((0,5])$

$= [f(5),f(1)]$

$= [-175,1]$

สรุป 1. ผิด เพราะว่า $X-Z = (1,176] \neq Y$

2. ผิด เพราะว่า $Y \cap Z = (0,1]$

3. ผิด เพราะว่า $X-Y = [-175,0] \neq Z$

4. ถูก เพราะว่า $Z \cup Y = [-175,176] = X$

16. กำหนด $U = [-8,12]$

$A = \{x \in U \mid \sin|x| = 1\}$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap C \neq C \cap B$
2. $A - B \subset C - B$
3. $C - B \subset C - A$
4. $A - B = A - C$

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาสมการ $\sin|x| = 1$

จะได้ $|x| = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \pm\frac{13\pi}{2}$

เพราะว่า $U = [-8,12]$

เพราะฉะนั้น $A = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

จากสมการ $|\sin x| = 1$

จะได้ $\sin x = 1$ หรือ $\sin x = -1$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

$= \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$

$= \{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

เพราะฉะนั้นเราสามารถพิจารณาแต่ละตัวเลือกได้ดังนี้

1. $A \cap C = \{ \frac{\pi}{2} , \frac{5\pi}{2} \}$

   $C \cap B = C$

   นั่นคือ $A \cap C \neq C \cap B$

2. $A - B = \phi$

   $C - B = \phi$

   $A - B \subset C - B$ ถูกต้อง

3. $C - A = \{- \frac{3\pi}{2} \}$

   $C - B = \phi$

   $C - B \subset C - A$ ถูกต้อง

4. $A - B = \phi$

   $A - C = \{- \frac{5\pi}{2} , - \frac{\pi}{2}\}$

   $A - B \neq A - C$

   สรุปตัวเลือก 4. ผิด

วิธีลัด เพราะว่า ถ้า $\sin x = 1$ แล้ว $|\sin x| = 1$

เพราะฉะนั้น $C \subset B$

นั่นคือ $B \cap C = C$ และ $C - B = \phi$

ดังนั้นตัวเลือก 3. ถูกต้องเสมอ เราจึงตัดตัวเลือกนี้ทิ้งก่อน

เพราะว่า ถ้า $\sin |x| = 1$

จะได้ $\sin (x) = 1$ หรือ $\sin (-x) = 1$

$\sin x = 1$ หรือ $-\sin x = 1$

นั่นคือ $|\sin x| = 1$

เพราะฉะนั้น $\boxed{A \subset B}$ แน่นอน

ดังนั้น $A \cap B = A$ และ $A - B = \phi$

ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้องจึงตัดทิ้งได้อีก

ที่เหลือเราต้องเดาจากตัวเลือก 1. หรือ 4.

17. ตารางขนาด 2×2 มีช่องว่าง 4 ช่อง ดังรูป

แต่ละช่องจะเขียนเลขใดๆ 0,1,2,..., หรือ 9 หนึ่งตัว ความน่าจะเป็นที่ช่องที่มีด้านร่วมกัน (ช่องที่ติดกันตามแนวตั้งหรือแนวนอน) มีค่าตัวเลขต่างกัน อยู่ในช่วงใด

1. (0.20,0.35]   2. (0.35,0.50]

3. (0.50,0.65]   4. (0.65,0.80]

ตอบ 4.

แนวคิด จำนวนวิธีในการเขียนตัวเลขลงในช่อง 4 ช่อง ทำได้ $10^4 = 10000$ วิธี

เหตุการณ์ที่ช่องที่มีด้านร่วมกันมีค่าตัวเลขต่างกันพิจารณาดังนี้

ช่องที่ 1	ช่องที่ 2
ช่องที่ 3	ช่องที่ 4

กรณีที่ 1 ตัวเลขทั้ง 4 ช่องต่างกัน เช่น

1	2
3	4

2	4
6	5

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 1 ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 2 ทำได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 3 ทำได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 4 ทำได้ 7 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(9)(8)(7) = 5040$

กรณีที่ 2 ตัวเลขในแนวทแยงเหมือนกันแนวเดียวเท่านั้น เช่น

3	1
1	4

2	
1	

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขเพื่อลงในแนวทแยงทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกแนวทแยงได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขลงช่องที่เหลือช่องแรกทำได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขลงช่องสุดท้ายทำได้ 8 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(2)(9)(8) = 1440$

กรณีที่ 3 ตัวเลขในแนวทแยงเหมือนกัน 2 คู่ เช่น

1	2
2	1

2	1
1	2

1	3
3	1

ขั้นตอนที่ 1 แนวทแยงมุมแรกเลือกตัวเลขได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 แนวทแยงมุมที่เหลือเลือกตัวเลขได้ 9 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(9) = 90$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่ด้านติดกันมีตัวเลขต่างกันเท่ากับ

$$5040 + 1440 + 90 = 6570$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ช่องที่มีด้านร่วมกันมีค่าตัวเลขต่างกันเท่ากับ

$$\frac{6570}{10000} = 0.6570$$

18. กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่

$$z + 4\bar{w} = 8 + 3i$$

$$3\bar{z} + 2w = 2 - 8i$$

ค่าของ $|z|^2 + |\bar{w}|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 0.65 2. 7.45

3. 12.25 4. 14.25

ตอบ 3.

แนวคิด $z + 4\bar{w} = 8 + 3i$

$$\overline{z + 4\bar{w}} = \overline{8 + 3i}$$

$$\bar{z} + 4w = 8 - 3i \qquad \text{—————— (1)}$$

$$3\bar{z} + 2w = 2 - 8i \qquad \text{—————— (2)}$$

(1) - 2(2) ; $-5\bar{z} = 4 + 13i$

$$|-5\bar{z}|^2 = 16 + 169$$

$$|\bar{z}|^2 = \frac{185}{25}$$

3(1) - (2) ; $10w = 22 - i$

$$|10w|^2 = 484 + 1$$

$$100|w|^2 = 485$$

$$|w|^2 = \frac{485}{100}$$

เพราะฉะนั้น $|z|^2 + |\bar{w}|^2 = |\bar{z}|^2 + |w|^2$

$$= \frac{185}{25} + \frac{485}{100}$$

$$= 12.25$$

19. ให้ V เป็นเซตของเวกเตอร์ กำหนดโดย

$$V = \{m\bar{i} + n\bar{j} \mid m,n \in I,\ 0 < m \leqslant 9 \text{ และ } 0 < n \leqslant 9\}$$

เซตใดต่อไปนี้มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุด

1. $A = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ x \neq y\}$
2. $B = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ |\bar{v}| \geqslant 6\}$
3. $C = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v}$ ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}\}$
4. $D = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v}$ ไม่ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}\}$

ตอบ 3.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกใน V

ขั้นที่ 1 m มีทางเลือก 9 วิธี

ขั้นที่ 2 n มีทางเลือก 9 วิธี

เพราะฉะนั้น $m\bar{i} + n\bar{j}$ มีทางเลือก $(9)(9) = 81$ วิธี

นั่นคือ $n(V) = 81$

1. การนับจำนวนสมาชิกใน A

ขั้นที่ 1 x มีทางเลือก 9 วิธี

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $y \neq x$ เพราะฉะนั้น y มีทางเลือก 8 วิธี

จำนวนสมาชิกใน A เท่ากับ $(9)(8) = 72$ ตัว

2. การนับจำนวนสมาชิกใน B

$$B' = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ |\bar{v}| < 6\}$$

เพราะว่า $|\bar{v}| < 6$

$|x\bar{i} + y\bar{j}| < 6$

$x^2 + y^2 < 36$

เพราะฉะนั้น จำนวน (x,y) ที่ $x^2+y^2 < 36$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

x	y	จำนวน (x,y)
1	1,2,3,4,5	5
2	1,2,3,4,5	5
3	1,2,3,4,5	5
4	1,2,3,4	4
5	1,2,3	3
		22

เพราะฉะนั้น $n(B') = 22$

ดังนั้น $n(B) = n(V) - n(B') = 81 - 22 = 59$

3. การนับจำนวนสมาชิกของ C

เพราะว่า $\bar{v} \parallel \bar{i} + \bar{j}$

ก็ต่อเมื่อ $x\bar{i} + y\bar{j} \parallel \bar{i} + \bar{j}$

ก็ต่อเมื่อ $\frac{x}{y} = 1$

ก็ต่อเมื่อ $x = y$

เพราะฉะนั้น $C = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$ และ $x = y\}$

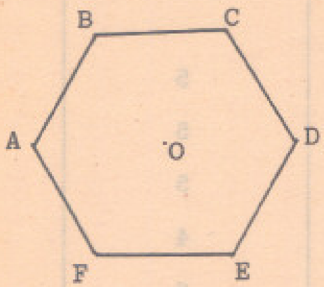
ดังนั้น $n(C) = 9$

4. เพราะว่า $D = C'$

เพราะฉะนั้น $n(D) = n(C') = n(V) - n(C)$

$= 81 - 9 = 72$

20. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และมี O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยม ดังรูป



กำหนดความยาว AO เท่ากับ 2 เซนติเมตร

เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดมากกว่า 4 เซนติเมตร

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}$ 2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$

3. $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}$ 4. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

ตอบ 1.

แนวคิด $|\overrightarrow{FD}|^2 = |\overrightarrow{FE}|^2 + |\overrightarrow{ED}|^2 - 2|\overrightarrow{FE}|\cdot|\overrightarrow{ED}|\cdot\cos 120^\circ$

$= 4 + 4 + 4 = 12$

เพราะว่า $\overline{OA} = \overline{OD}$ เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD}| = 4$

เพราะว่า $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{FD}|^2 - 2\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{FD}|\cdot\cos 150^\circ$

$= 16 + 12 - 2(4)(\sqrt{12})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 52$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| > 4$

เพื่อเป็นการศึกษาเพิ่มเติมพิจารณาตัวเลือกที่เหลือดังนี้

2. เพราะว่า ABO เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AO}| = 2$

ในทำนองเดียวกัน $|\overrightarrow{ED}| = 2$

เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = 2|\overrightarrow{AB}| = 4$

3. $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}|^2 = |\overrightarrow{FO}|^2 + |\overrightarrow{DO}|^2 - 2|\overrightarrow{FO}|\cdot|\overrightarrow{DO}|\cdot\cos 60^\circ$

$$= 4 + 4 - 2(2)(2)(\tfrac{1}{2})$$

$$= 4$$

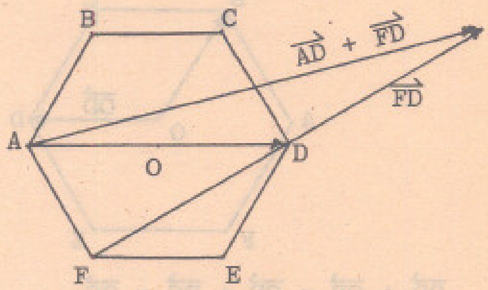
$|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}|^2 = 2$

4. ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3.

$|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{3}$

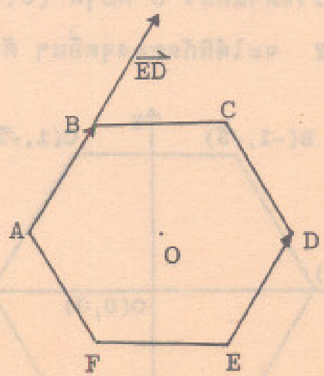
วิธีลัด 1. โดยการเขียนภาพประกอบและวัดขนาดของเวกเตอร์จะได้

1.



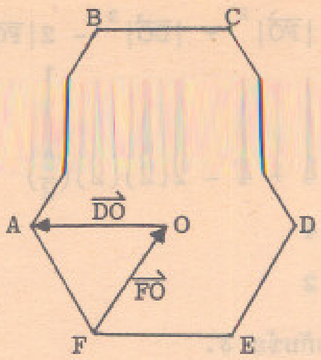
$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| = 7.2$

2.



$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = 4$

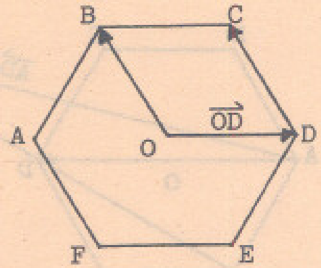
3.



$$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{FA}$$

ดังนั้น $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}| = 2$

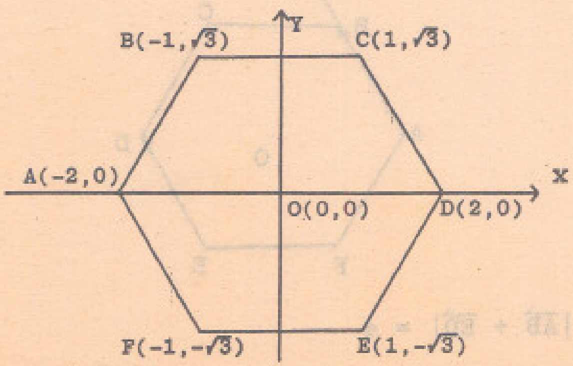
4.



$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 2$

วิธีคิด 2 โดยการวางตำแหน่ง O ทับจุด (0,0) และ D ทับจุด (2,0) บนระนาบ XY จะได้พิกัดของจุดอื่นๆ ดังนี้



1. $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2-(-2) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{FD} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 0+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| = \sqrt{49+3} = \sqrt{52} = 7.21$

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-(-2) \\ \sqrt{3}-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{ED} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = \sqrt{4+12} = 4$

3. $\overrightarrow{FO} = \begin{bmatrix} 0-(-1) \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{DO} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}| = \sqrt{1+3} = 2$

4. $\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{1+3} = 2$

สรุปตัวเลือก 1. มีขนาดยาวกว่า 4 เซนติเมตร

21. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8}$ มีค่าเป็นเช่นไร

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{12}$
4. ไม่มีลิมิต

ตอบ 3.

แนวคิด $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8} = \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{(x^{\frac{1}{3}} - 2)(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4)}$

$= \lim\limits_{x \to 8} \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4}$

$$= \frac{1}{8^{\frac{2}{3}} + 2(8^{\frac{1}{3}}) + 4}$$

$$= \frac{1}{4 + 4 + 4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

วิธีลัด โดยใช้กฎของโลปิตัล

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 2)'}{(x - 8)'}$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{12}$$

หมายเหตุ กฎโลปิตัล

ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

และ $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

22. กำหนด ฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 1000x + 1200y$

อสมการข้อจำกัด $5x + 6y \leqslant 160$

$x + y \leqslant 30$

$x \geqslant 0$

$y \geqslant 0$

ถ้า (x_o, y_o) ทำให้ P มีค่ามากที่สุด

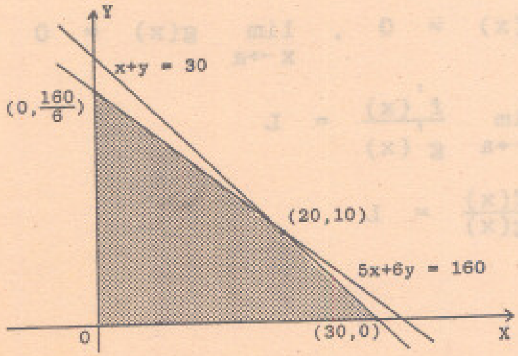
$x_o - y_o$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 10

3. 20 4. 30

ตอบ 2.

แนวคิด อาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้จากอสมการข้อจำกัดคือ



มีจุดมุมเป็น $(0,0), (30,0), (20,10)$ และ $(0, \frac{160}{6})$

จุดมุม	P = 1000x + 1200y
(0,0)	0
(30,0)	30000
(20,10)	32000
$(0,\frac{160}{6})$	32000

เพราะฉะนั้น P มีค่ามากสุดเมื่อ $(x_o,y_o) = (20,10), (0,\frac{160}{6})$

เพราะฉะนั้น $x_o - y_o = 10 , -\frac{160}{6}$

วิธีลัด เพราะว่าจุดมุมที่อาจให้ค่าสูงสุดมี 4 จุดเท่านั้น และข้อสอบเป็นแบบตัวเลือก ดังนั้นเราจะเห็นว่า (x,y) จากจุดมุมนั้น $x - y = 0 , 30 , 10 , -\frac{160}{6}$ ดังนั้นเปรียบเทียบค่า P ที่จุด (30,0) และ (20,10) ก็พอ ซึ่งจะได้ P = 32000 เมื่อจุดมุมเป็น (20,10)

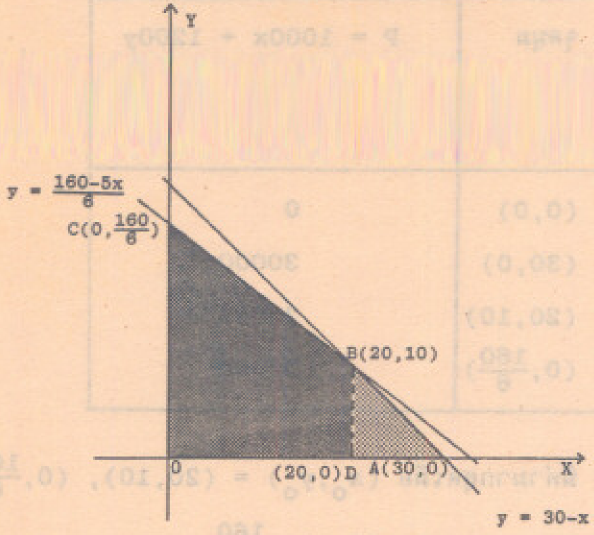
๒๓. จากอสมการข้อจำกัดในข้อ ๒๒
อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยอสมการข้อจำกัดนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย
(ตอบเฉพาะจำนวนเต็ม)

๑. 416 ๒. 434

๓. 450 ๔. 900

ตอบ ๑.

แนวคิด **วิธีที่ 1** จากข้อ ๒๒ จะได้



$$\text{พ.ท.} \square \text{ ODBC} = \int_0^{20} \left(\frac{160-5x}{6}\right) dx$$

$$= \left(\frac{160}{6}x - \frac{5x^2}{12}\right)\Bigg|_0^{20}$$

$$= \frac{160(20)}{6} - \frac{5(400)}{12}$$

$$= 533.333 - 166.667 = 366.667$$

$$\text{พ.ท. } \Delta \text{ DBA} = \int_{20}^{30} (30-x)\, dx = \left(30x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{20}^{30}$$

$$= (900-450) - (600-200) = 50$$

$$\text{พ.ท.} \square \text{ OABC} = 366.667 + 50 = 416.667$$

วิธีที่ 2 พ.ท. □ OABC = พ.ท. □ ODBC + พ.ท. Δ DAB

พ.ท. □ ODBC = $\frac{1}{2}$ × ผลบวกด้านคู่ขนาน × สูง

= $\frac{1}{2}$ × (OC + DB) × OD

$= \frac{1}{2} \times (\frac{160}{6} + 10) \times 20$

$= 266.667 + 100$

$= 366.667$

พ.ท. Δ DAB $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$= \frac{1}{2} \times AD \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10$

$= 50$

สรุปพื้นที่สี่เหลี่ยม OABC $= 366.667 + 50 = 416.667$

24. กำหนดให้ $f(x) = x^3-6x^2+11x-6$ และ $D_f = (0,3)$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f มีค่าสูงสุด และมีค่าต่ำสุด
2. f มีค่าสูงสุด แต่ไม่มีค่าต่ำสุด
3. f มีค่าต่ำสุด แต่ไม่มีค่าสูงสุด
4. f ไม่มีค่าสูงสุด และไม่มีค่าต่ำสุด

ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^3-6x^2+11x-6$

$f'(x) = 3x^2-12x+11$

$= 3(x^2-4x+4)-1$

$= 3(x-2)^2-1$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $3(x-2)^2-1 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x-2)^2 = \frac{1}{3}$

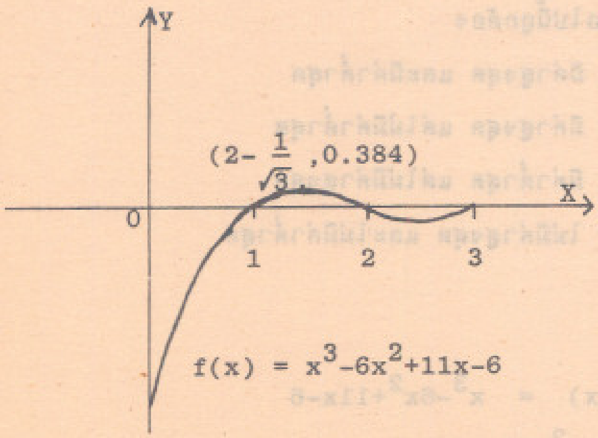
ก็ต่อเมื่อ $x-2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

ก็ต่อเมื่อ $x = 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$

การเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของ f' เป็นดังนี้

	$0<x<2-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<2+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2+\frac{1}{\sqrt{3}}<x<3$
f'	+	−	+

กราฟของ f บนช่วง (0,3) คือ



เพราะฉะนั้น f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

และ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เมื่อ $x = 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$

25. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $f^{(n)}(x)$ คือ
อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f
ค่าของ $f^{(10)}(-1)$ เท่ากับเท่าใด

1. 1
2. -1
3. 10!
4. -10!

ตอบ 4.

แนวคิด

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{x^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-9)(-10)}{x^{11}}$$

$$= \frac{(-1)^{10}(10!)}{x^{11}}$$

$$= \frac{10!}{x^{11}}$$

$$f^{(10)}(-1) = \frac{10!}{(-1)^{11}}$$

$$= -(10!)$$

26. กำหนดให้ $\frac{d}{dx}f(x) = a$ และ $\frac{d}{dx}g(x) = b$ เมื่อ a,b

เป็นค่าคงตัว และ $b \neq 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}$

2. $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = ab$

3. $\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x)$

   เมื่อ $f \circ g$ และ $g \circ f$ มีความหมาย

4. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก

   $x = 0$ ถึง $x = a$ คือ a^2

ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{a\,g(x) - b\,f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\neq \frac{a}{b}$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 4x+3$ และ $g(x) = 5x+1$

ตัวอย่ $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{4(5x+1) - 5(4x+3)}{(5x+1)^2} \neq \frac{4}{5}$

2. ผิด เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

$$= a\,g(x) + b\,f(x)$$

$$\neq ab$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x+3$ และ $g(x) = 4x+1$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = 2(x+1) + 4(2x+3) \neq 8$$

3. ถูกต้อง เพราะว่า

$\frac{d}{dx} f(x) = a$ จะได้ $f(x) = ax + k$

$\frac{d}{dx} g(x) = b$ จะได้ $g(x) = bx + c$

เมื่อ $f \circ g$ และ $g \circ f$ มีความหมายจะได้

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(bx + c) \\ &= a(bx + c) + k = abx + ac + k\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = ab$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(ax + k) \\ &= g(ax + k) + c = abx + bk + c\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = ab$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x)$

4. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = 4x+10$

จะได้ $a = \frac{d}{dx} f(x) = 4$

แต่พื้นที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$

เท่ากับ $\int_0^4 (4x+10)\,dx = (2x^2+10x\Big|_0^4 = 72 \neq 16$

27. $2^{2536} + 3^{2536}$ หารด้วย 5 เหลือเศษเป็นเท่าใด

1. 0 2. 1

3. 2 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $2^4 = 16$

เพราะฉะนั้น $2^{4k} = (16)^k$ จะมีเลขในหลักหน่วยเป็น 6 เสมอ

ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะว่า $2536 = 4(634)$

เพราะฉะนั้น $2^{2536} = 2^{4(634)}$ มีตัวเลขในหลักหน่วยเป็น 6

เพราะว่า $3^4 = 81$

เพราะฉะนั้น $2^{4k} = (81)^k$ จะมีเลขในหลักหน่วยเป็น 1 เสมอ

ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะฉะนั้น $3^{2536} = 3^{4(634)}$ มีเลขในหลักหน่วยเป็น 1

ดังนั้น $2^{2536} + 3^{2536}$ มีเลขในหลักหน่วยเป็น 7

เมื่อ $2^{2536} + 3^{2536}$ ถูกหารด้วย 5 จึงเหลือเศษ 2

28. จำนวนเฉพาะชุดหนึ่งคูณกันได้ 96577 พิสัยของจำนวนเฉพาะชุดนี้เท่ากับเท่าใด

1. 8 2. 10

3. 12 4. 16

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $96577 = 13 \times 17 \times 19 \times 23$

เพราะฉะนั้นข้อมูลคือ 13, 17, 19, 23

ดังนั้น พิสัย $= 23 - 13 = 10$

29. $\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\ldots+(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\ldots+\frac{99}{100})$

เท่ากับเท่าใด

1. 10100
2. 5050
3. 2525
4. 2475

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{3}{n+1}+\ldots+\frac{n}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}(1+2+3+\ldots+n)$$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{2}(n+1)$$

$$= \frac{n}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})+(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4})+\ldots+(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\ldots+\frac{99}{100})$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}+\ldots+\frac{99}{2}$$

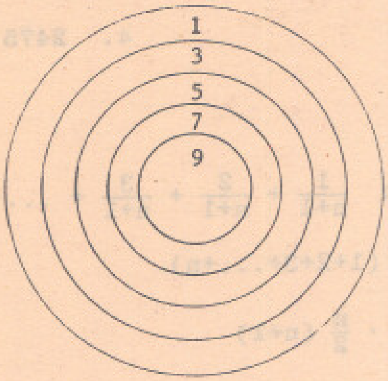
$$= \frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+99)$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{99}{2}(1+99))$$

$$= 2475$$

30. เป้ารูปวงกลมแสดงดังรูป แบ่งออกเป็น 5 อาณาบริเวณ ดังรูป

แต่ละอาณาบริเวณมีแต้มเป็น 1,3,5,7 และ 9



เด็กคนหนึ่งปาลูกดอกเข้าเป้าทั้ง 10 ครั้ง ไม่มีครั้งใดปาคาบเส้น แต้มในข้อใดเป็นแต้มรวมที่มีโอกาสที่เด็กชายคนนี้ทำได้

1. 47 2. 68

3. 87 4. 98

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าการได้แต้มของแต่ละลูกเป็นเลขคี่ และปาลูกดอกทั้งหมด 10 ครั้ง

ดังนั้น ผลบวกของแต้มเป็นเลขคี่จำนวน 10 ตัวรวมกันต้องเป็นเลขคู่

เนื่องจากแต้มสูงสุดที่เป็นไปได้คือ 9(10) = 90 แต้ม

เพราะฉะนั้นแต้มที่เป็นไปได้ในทั้ง 4 ตัวเลือกคือ 68

ตอนที่ 2

1. จำนวนเต็ม 10 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 7.7 ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เป็น 9.41 ถ้าตัดจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งออกจากข้อมูลชุดนี้ ข้อมูลที่เหลือจะมีความแปรปรวนเป็น $10\frac{4}{9}$ อยากทราบว่า ข้อมูลที่ถูกตัดออกมีค่าเป็นเท่าใด

ตอบ 8

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$ เป็นข้อมูล

เพราะว่า $\overline{X} = 7.7$ เพราะฉะนั้น

$$x_1+x_2+\ldots+x_9+x_{10} = 10\overline{X} = 77 \quad \underline{\qquad\qquad}(1)$$

เพราะว่า $S^2 = 9.41$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{X}^2 = 9.41$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 10(9.41 + \overline{X}^2)$$

$$= 10(9.41 + 59.29)$$

$$= 687 \quad \underline{\qquad\qquad\qquad}(2)$$

ให้ x_{10} เป็นข้อมูลที่ตัดออก

เพราะว่าข้อมูลที่เหลือมีความแปรปรวน $\frac{94}{9}$

เพราะฉะนั้น $$\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i^2}{9} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9}\right)^2 = \frac{94}{9} \quad \underline{\qquad\qquad}(3)$$

จาก (1) ; $$\sum_{i=1}^{9} x_i = 77 - x_{10}$$

จาก (2) ; $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 687 - x_{10}^2$

แทนค่าใน (3) จะได้

$$\frac{687 - x_{10}^2}{9} - \left(\frac{77 - x_{10}}{9}\right)^2 = \frac{94}{9}$$

$$9(687 - x_{10}^2) - (77 - x_{10})^2 = 9(94)$$

$$1683 - 9x_{10}^2 - 5929 + 154x_{10} - x_{10}^2 = 846$$

$$10x_{10}^2 - 154x_{10} + 592 = 0$$

$$x_{10} = \frac{154 \pm \sqrt{(154)^2 - 4(10)(592)}}{20}$$

$$= \frac{154 \pm 6}{20}$$

$$= 8 \text{ หรือ } 7.4$$

เพราะว่า x_{10} เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $x_{10} = 8$

2. กำหนด $A = \{x \mid x \in [0,2\pi] \text{ และ } \sin 2x \cos x = 1\}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด

ตอบ 0

แนวคิด $\sin 2x \cos x = 1$

$$2 \sin 2x \cos x = 2$$

$$\sin(2x+x) + \sin(2x-x) = 2$$

$$\sin 3x + \sin x = 2$$

เพราะว่า $-1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1$ และ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น $\sin 3x + \sin x = 2$ ก็ต่อเมื่อ

$\sin 3x = 1$ และ $\sin x = 1$

เพราะว่า $\sin 3x = 1 = \sin x$ พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้นไม่มี $x \in [0,2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin 2x \cos x = 1$

สรุป $n(A) = 0$

3. กำหนด

$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in U \text{ , } a < b \text{ หรือ } c < d \right\}$$

จำนวนสมาชิกของ M เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4536

แนวคิด $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in U \text{ และ } a < b \right\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ A

ขั้นที่ 1 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น a,b

ทำได้ $\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 2 การวางลำดับของ a,b ที่เลือกมาได้ในขั้นที่ 1

ทำได้ 1 วิธีเท่านั้น

ขั้นที่ 3 c เลือกจาก U ทำได้ 9 วิธี

ขั้นที่ 4 d เลือกจาก U ทำได้ 9 วิธี

สรุป $n(A) = (36)(1)(9)(9) = 2916$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in U \text{ และ } c < d \right\}$$

ในทำนองเดียวกันกับการนับ $n(A)$ จะได้ $n(B) = 2916$

$$A \cap B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in U,\ a < b \text{ และ } c < d \right\}$$

ขั้นที่ 1 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น a,b ทำได้

$\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลข 2 ตัวที่ได้มาจัดลำดับ $a < b$ ได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น c,d ทำได้

$\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 4 เลขที่เลือกมาได้จัดลำดับ $c < d$ ได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = (36)(1)(36)(1) = 1296$

สรุป
$$\begin{aligned} n(M) &= n(A \cup B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 2916 + 2916 - 1296 \\ &= 4536 \end{aligned}$$

4. เลขหลักหน่วยของ $3^{2537} - 2536$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 7

แนวคิด
$$\begin{aligned} 3^{2537} &= 3^{2536+1} \\ &= 3 \cdot 3^{2536} \end{aligned}$$

$$= 3\cdot 3^{4(634)}$$

$$= 3\cdot (81)^{634}$$

เพราะว่าหลักหน่วยของ 81^{634} คือ 1

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $3(81)^{634}$ คือ 3

สรุป หลักหน่วยของ $3(81)^{634} - 2536$ คือ 7

5. ให้ $f(x) = (1+2x+3x^2+\ldots+101x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{50})$

ถ้าเขียน $f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \ldots + C_{150}x^{150}$

แล้ว $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{150}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 262701

แนวคิด $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{150}$

$$= f(1)$$

$$= (1+2+3+\ldots+101)(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{51 \text{ พจน์}})$$

$$= \left[\frac{101}{2}(1+101)\right](51)$$

$$= 262701$$

6. จากโจทย์ในข้อ 5. C_{100} มีค่าเป็นเท่าใด

ตอบ 3876

แนวคิด C_{100} คือสัมประสิทธิ์ x^{100} ที่เกิดจาก

$$(101x^{100})(1) = 101x^{100}$$

$$(100x^{99})(x) = 100x^{100}$$

$$(99x^{98})(x^2) = 99x^{100}$$

$$\vdots$$

$$(52x^{51})(x^{49}) = 52x^{100}$$

$$(51x^{50})(x^{50}) = 51x^{100}$$

ดังนั้น $C_{100} = 51+52+...+99+100+101$

$= \frac{51}{2}(51+101)$

$= 3876$

7. ให้ $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+...+n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 2

แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{1}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$

เพราะฉะนั้น $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+...+n}$

$= 1 + \frac{2}{2(2+1)} + \frac{2}{3(3+1)} + \ldots + \frac{2}{n(n+1)}$

$= 1 + 2\left[\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$

$= 1 + 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$

$= 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$

$= 2 - \frac{2}{n+1}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2$

8. โยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะทำให้น้ำเป็นละลอกแผ่เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดก้อนหินตก รัศมีวงกลมวงนอกเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 50 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่า ขณะที่พื้นที่วงกลมนอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2.5π ตารางเมตรต่อวินาที นั้น เป็นเวลาหลังจากที่ก้อนหินตกถึงผิวน้ำกี่วินาที

ตอบ 5 วินาที

แนวคิด A = พื้นที่วงกลมวงนอก

r = รัศมีวงกลมวงนอก

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt} \qquad \text{———} (1)$$

ให้ t เป็นเวลาที่ต้องการหน่วยเป็นวินาที

$\frac{dr}{dt}$ = 50 เซนติเมตร/วินาที

= 0.5 เมตร/วินาที

$\frac{dA}{dt}$ = 2.5π ตารางเมตร/วินาที

$$r = (0.5)t$$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้

$$2.5\pi = 2\pi(0.5t)(0.5)$$

$$t = 5$$

9. $3\int_0^1 (x^2+2x+1)\, d(x+1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 7

แนวคิด $3\int_0^1 (x^2+2x+1)\, d(x+1)$

$$= 3\int_0^1 (x+1)^2\, d(x+1)$$

$$= 3\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1} \qquad = 2^3 - 1^3 \quad = 7$$

10. สมมติว่า ในปี พ.ศ.2538 มีอัตราเงินเฟ้อ 4.5 % และปี พ.ศ.2539 มีอัตราเงินเฟ้อ 6.5 % ถ้าขายสินค้าชนิดหนึ่งราคา 100 บาท ในปี พ.ศ.2537 สินค้านั้นจะต้องขายราคาเท่าใดใน พ.ศ.2539 จึงจะมีราคาเทียบเท่า 100 บาท ใน พ.ศ.2537 (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

ตอบ 111.2925 บาท

แนวคิด ราคาสินค้าปี พ.ศ.2537 เท่ากับ 100

อัตราเงินเฟ้อปี พ.ศ.2538 เท่ากับ 4.5 %

เพราะฉะนั้นต้องขายราคาสินค้าในปี 2538 เท่ากับ

$= 100\times1.045 \qquad = 104.5$ บาท

เพราะว่าอัตราเงินเฟ้อของปี พ.ศ.2539 เท่ากับ 6.5 %

เพราะฉะนั้นสินค้าราคา 104.5 บาท ต้องขายในราคาเท่ากับ

$= (104.5)\times1.065 \quad = 111.2925$ บาท

ตอนที่ 3 จงแสดงวิธีทำ

1. **บทนิยาม** สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ

$A \approx B$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$

ให้ $A = [0,1]$ และ $B = [0,4]$ จงพิสูจน์ว่า $A \approx B$

(ข้อแนะ : (1) จะต้องหา f ที่เป็นฟังก์ชัน ในที่นี้ให้เขียน f ในรูปสมการ $f(x) = \ldots$ แล้วแสดงการเป็นฟังก์ชัน กล่าวคือ ให้ $x_1 = x_2$ แล้วแสดงว่า $f(x_1) = f(x_2)$

(2) จะต้องแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 นั่นคือ ให้ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้วแสดงว่า $x_1 = x_2$

(3) แสดง $D_f = A$ และ $R_f = B$

ข้อพิสูจน์ (1) ให้ $f(x) = 4x$

เพราะว่า $x_1 = x_2$

$4x_1 = 4x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 4x$ เป็นฟังก์ชัน

(2) เพราะว่า $f(x_1) = f(x_2)$

$4x_1 = 4x_2$

$x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

(3) เพราะว่า $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$0 \leqslant 4x \leqslant 4$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 4$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $D_f = [0,1]$ จะได้ $R_f \subset [0,4]$

ให้ $x \in [0,4]$

$0 \leqslant x \leqslant 4$

$0 \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1$

และ $f(\frac{x}{4}) = 4(\frac{x}{4}) = x$

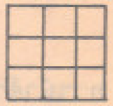
เพราะฉะนั้น $R_f = [0,4]$

สรุป $f : [0,1] \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} [0,4]$

นั่นคือ $[0,1] \approx [0,4]$

โจทย์จากปก

จากภาพที่หน้าปกเรามีวิธีสร้างข้อสอบและพัฒนารูปแบบข้อสอบที่เกี่ยวข้องกับภาพข้างต้นได้ดังนี้



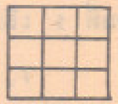
1. การนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ไปใส่ในช่องว่างของตาราง จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

   ก. 9 ข. 9^2

   ค. 9^3 ง. 9^9

ตอบ ง.

แนวคิด เพราะว่ามีช่อง 9 ช่อง แต่ละช่องมีตำแหน่งที่ต่างกัน ดังนั้นแต่ละช่องมีทางเลือกเขียนตัวเลขได้ 9 วิธี เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 9^9 วิธี



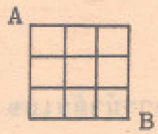
2. การนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ไปใส่ในช่องว่างของตาราง โดยที่ตัวเลขในแต่ละช่องห้ามซ้ำกัน จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

   ก. 9 ข. 9^2

   ค. 9^9 ง. 9!

ตอบ ง.

แนวคิด เนื่องจาก ช่องว่าง ในตารางจะมีตำแหน่งตามลำดับคือ
ช่องที่ 1, ช่องที่ 2, ..., ช่องที่ 9
ดังนั้นการนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ไปใส่ในช่องว่างจึงมีวิธี
เท่ากับการจัดลำดับของ 9 สิ่งที่แตกต่างกันหมด โดยจัดทีละ 9 สิ่ง
ซึ่งทำได้ 9! วิธี



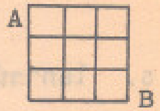
3. การนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ใส่ในช่องว่าง
ของตาราง โดยที่แต่ละช่องห้ามซ้ำกัน
จำนวนวิธีที่ตัวเลขในแนวทแยงมุม AB รวมกันเท่ากับ 24
มีค่าเท่าใด

ก. 720 ข. 1440

ค. 4320 ง. 5760

ตอบ ข.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีแต่ละขั้นตอน
ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขใส่แนวทแยงมุม AB ทำได้วิธีเดียวคือ
7, 8 และ 9
ขั้นตอนที่ 2 ตัวเลขที่เลือกมาได้สลับที่กันเองได้ 3! วิธี
ขั้นตอนที่ 3 ตัวเลขที่เหลืออีก 6 ตัวนำไปใส่ในช่องว่าง 6 ช่อง
ที่เหลือ ทำได้ 6! วิธี
สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด = (1)(3!)(6!) = (6)(720) = 4320



4. ในการนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ใส่ในช่องว่างของตาราง โดยที่แต่ละช่องห้ามซ้ำกัน จำนวนวิธีที่ตัวเลขในแนวทแยงมุม AB รวมกันเท่ากับ 20 มีค่าเท่าใด

ก. 1440 ข. 4320

ค. 5760 ง. 17280

ตอบ ง.

แนวคิด การนับแต่ละขั้นตอนเป็นดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขที่รวมกันได้ 20 มีทั้งหมด 4 วิธี คือ

{3,8,9} , {4,7,9} , {5,6,9} , {5,7,8}

ขั้นตอนที่ 2 ตัวเลข 3 ตัวที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ 1 จัดลำดับได้ 3! วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ตัวเลขที่เหลือ 6 ตัว นำไปใส่ในช่องว่าง 6 ช่องที่เหลือ ทำได้ 6! วิธี

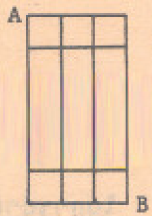
สรุปวิธีทั้งหมดเท่ากับ (4)(3!)(6!) = 17280 วิธี

ปัญหาเพิ่มเติม

4.1 จำนวนวิธีที่ผลบวกแนวทแยงมุม AB เป็นเลขคู่

4.2 จำนวนวิธีที่ผลบวกแนวทแยงมุม AB เป็นเลขคี่

4.3 จำนวนวิธีที่ผลบวกแนวทแยงมุม AB หารด้วย 10 ลงตัว



5. ในการนำตัวเลข 1,2,3,...,9 ใส่ในช่องว่างของตาราง โดยที่แต่ละช่องห้ามซ้ำกัน จำนวนวิธีที่ตัวเลขในแนวทแยงมุม AB เรียงลำดับกันเท่ากับเท่าใด

ก. 1440 ข. 2880

ค. 10080 ง. 120960

ตอบ ง.

แนวคิด ขั้นตอนการนับจำนวนวิธีคือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลข 3 ตัวจาก 9 ตัว ทำได้ $\binom{9}{3} = 84$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ตัวเลขที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ 1 นำมาเรียงแบบมากไปน้อย และน้อยไปมาก ได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 ตัวเลขที่เหลือ 6 ตัว จัดลำดับได้ 6! วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(84)(2)(6!) = 120960$ วิธี

6. $S = \{1,2,3,4,...,9\}$

$$X = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} \;\middle|\; a,b,c,d,e,f,g,h,i \in S \right.$$

ตัวเลขในตารางไม่ซ้ำกัน }

$$Y = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \\ \hline \end{array} \in X \;\middle|\; a+e+i = 20 \right\}$$

จำนวนสมาชิกใน Y เท่ากับเท่าใด

ก. 1440 ข. 4320

ค. 5760 ง. 17280

ตอบ ง.

แนวคิด ปัญหาข้อนี้แนวคิดเหมือนกับข้อ 4. หากแต่โจทย์ในข้อ 6 นี้กล่าวข้อความของโจทย์ข้อ 4. ในความหมายของเซต S,X และ Y

7. $S = \{1,2,3,4,...,9\}$

$X = \{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \mid a,b,c,d,e,f,g,h,i \in S$ และสมาชิกของเมตริกซ์ไม่ซ้ำกัน $\}$

$Y = \{ A = [a_{ij}] \in X \mid a_{11}, a_{22}$ และ a_{33} เรียงลำดับกัน $\}$

จำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับเท่าใด

ก. 1440 ข. 2880

ค. 10080 ง. 120960

ตอบ ง.

แนวคิด ปัญหาข้อนี้จะตรงกับปัญหาข้อ 5. โดยพิจารณาตาราง

a	b	c
d	e	f
g	h	i

เป็นเมตริกซ์ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

ดังนั้นจำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับจำนวนที่ตัวเลขในแนวทแยงมุม AB

เรียงลำดับกัน ซึ่งมีค่าเท่ากับ 120960

ปัญหาเพิ่มเติม จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

7.1 $\{A \in X \mid a_{11}, a_{22}, a_{33}$ เป็นจำนวนเฉพาะ$\}$

7.2 $\{A \in X \mid a_{11}, a_{22}, a_{33}$ เป็นลำดับเลขคณิต$\}$

7.3 $\{A \in X \mid a_{11}, a_{22}, a_{33}$ เป็นเลขคู่$\}$

8. กำหนดให้ $S = \{0,1,2,3,4\}$

$X = \{ [a_{ij}]_{3\times 3} \mid a_{ij} \in S \}$

$Y = \{ A \in X \mid A$ เป็นเมตริกซ์สมมาตร $\}$

จำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับเท่าใด

ก. 5^4 ข. 4^5

ค. 5^6 ง. 6^5

ตอบ ค.

แนวคิด เพราะว่าสมาชิกของ Y ต้องอยู่ในรูปแบบ

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & e & f \\ c & f & i \end{bmatrix}$$

เพราะว่า a,b,c,e,f และ i เป็นตำแหน่ง 6 ตำแหน่งที่แต่ละตำแหน่งเลือกตัวเลขได้ 5 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับ 5^6

ปัญหาเพิ่มเติม จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

8.1 $\{A \in X \mid A$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมบน$\}$

8.2 $\{A \in X \mid A = A^T\}$

8.3 $\{A \in X \mid A$ เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมล่าง$\}$

8.4 $\{A \in X \mid A$ เป็นเมตริกซ์เฉียง$\}$

ข้อแนะนำประการสุดท้ายของ **โจทย์จากปก** ขอให้ท่านผู้อ่านลองเปลี่ยนโจทย์ โดยเพิ่มจำนวนสมาชิกของ S หรือเปลี่ยนคำถามทุกข้อในความหมายของความน่าจะเป็น

ข้อสอบเพิ่มเติม

1 กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \sqrt{\frac{3}{5}}\,a + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3}\,a + \frac{4a}{\sqrt{3}}$

จะได้ว่า A^2 เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{3}{5}\,a$ ข. $\sqrt{5}\,a$

ค. $\frac{\sqrt{5}}{3}\,a^2$ ง. $\frac{3}{5}\,a^2$

ตอบ ง.

แนวคิด

$$
\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{3}{5}}\,a + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3} + \frac{4a}{\sqrt{3}} \\
&= a\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \\
&= a\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}\right) \\
&= a\,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $A^2 = \frac{3}{5}\,a^2$

วิธีลัด เพราะว่า A มี a เป็นตัวร่วม ดังนั้น A^2 มี a^2 เป็นตัวร่วม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก. และ ข. ทิ้งได้

2 ให้ $f = \{(x,y) \in R\times R \mid y = tx^2+8x+10-t$ และ $t \in R\}$

A เป็นเซตของ t ที่ทำให้ $R_f \subset R^+$

ถ้า R เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $B = (-2,4)$ แล้ว $A' \cap B$ เท่ากับข้อใด

ก. $(2,4)$ ข. $(-2,2)$

ค. $(-2,4]$ ง. $(-2,2] \cup (4,8)$

ตอบ ข.

แนวคิด ถ้ากราฟของพาราโบลา $y = ax^2+bx+c$ อยู่เหนือแกน X

แสดงว่า $ax^2+bx+c = 0$ ไม่มีราก นั่นคือ

ถ้า $ax^2+bx+c > 0$ แล้ว $b^2-4ac < 0$

พิจารณาจาก $R_f \subset R^+$ ดังนั้น $y = tx^2+8x+10-t > 0$

เพราะฉะนั้น $b^2-4ac = 8^2-4(t)(10-t) > 0$

$$4t^2-40t+64 < 0$$

$$t^2-10t+16 < 0$$

$$(t-8)(t-2) < 0$$

$$2 < t < 8$$

เพราะฉะนั้น $A = (2,8)$

สรุป $A' \cap B = ((-\infty,2] \cup [8,\infty)) \cap (-2,4) = (-2,2)$

วิธีลัด เพราะว่า $A' \cap B \subset B$ เพราะฉะนั้นตัวเลือกต้องเป็นสับเซต

ของ $(-2,4)$ ดังนั้น ตัวเลือก ค. และ ง. ตัดทิ้ง

เลือกตัวเลขที่ไม่อยู่ร่วมกันใน $(-2,2)$ กับ $(2,4)$ เช่น 0

พบว่าเมื่อ $t = 0$ จะได้ $y = 8x+10$

แต่ $f = \{(x,y) \in R\times R \mid y = 8x+10\}$ นั้น $D_f \not\subset R^+$

เพราะฉะนั้น $t = 0 \notin A$ ดังนั้น $0 \in A'$

สรุป 0 ต้องเป็นสมาชิกของ $A' \cap B$ เราจึงตัดตัวเลือก ก. ทิ้ง

3 ถ้า $f(x) = 2x-1$ และ $g(x) = \frac{6}{x}$ แล้ว

แล้ว $(f \circ g)^{-1}(x)$ เท่ากับข้อใด

ก. $\frac{12}{x} - 1$ ข. $\frac{12}{x+1}$

ค. $12 - \frac{1}{x}$ ง. $\frac{12}{x-1}$

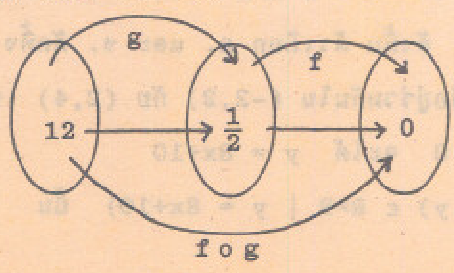
ตอบ ข.

แนวคิด เพราะว่า
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\tfrac{6}{x}) \\ &= \frac{12}{x} - 1\end{aligned}$$

ให้ $y = \frac{12}{x} - 1$ จะได้
$$\begin{aligned}y+1 &= \frac{12}{x} \\ x &= \frac{12}{y+1}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{12}{x+1}$

วิธีลัด ปัญหาข้อนี้มีลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x เราสามารถพิจารณาการส่งค่าของสมาชิกบางตัวของ g เพื่อนำมาช่วยในการตัดตัวเลือก เช่น $x = 12$



เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(x) = 12$

เมื่อนำ x = 0 แทนในสูตรของตัวเลือกจะได้ว่า

ค่าที่ได้จากสูตรตัวเลือก ก. ค. และ ง. ไม่เท่ากับ 12

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ค. และ ง. ผิดแน่นอน

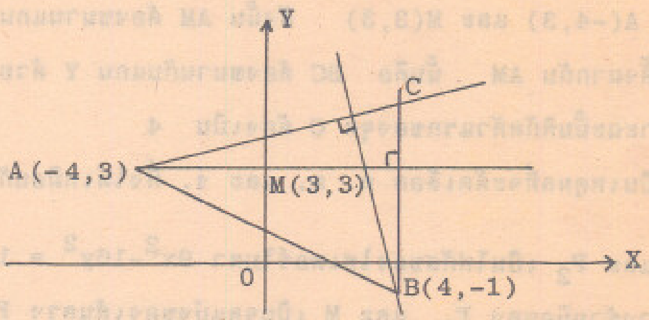
4 สามเหลี่ยม ABC มี M เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดไปยังฐาน ถ้าพิกัดของจุด A(-4,3), B(4,-1) และ M(3,3) แล้วพิกัดของ C เท่ากับพิกัดในข้อใด

ก. (3,5) ข. (4,5)

ค. (5,4) ง. (6,4)

ตอบ ข.

แนวคิด



ความชัน AB $= \frac{(-1-3)}{(4+4)} = -\frac{1}{2}$ และ $AB \perp CM$

เพราะฉะนั้นความชัน CM เท่ากับ 2 และสมการเส้นตรง CM คือ

$$y-3 = 2(x-3) \qquad \text{———} (1)$$

ความชัน BM $= \frac{(-1-3)}{(4-3)} = -4$ และ $BM \perp AC$

เพราะฉะนั้นความชัน AC เท่ากับ $\frac{1}{4}$ และสมการเส้นตรง AC คือ

$$y-3 = \frac{1}{4}(x+4) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) $2(x-3) = \frac{1}{4}(x+4)$

$x = 4$

ผลที่ตามมา y คือ 5 เพราะฉะนั้นพิกัด C คือ (4,5)

วิธีลัด 1 โดยการวัดรูปด้วยสเกล 1 นิ้วต่อหนึ่งหน่วย

ลากเส้นผ่าน BM และ CM

จาก A ลากเส้นตั้งฉากกับ BM และจาก B ลากเส้นตั้งฉากกับ AM

ตัดกันที่จุด C วัดระยะห่างของ C กับแกน Y ได้ 4

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ค. และ ง. ผิด

วิธีลัด 2 นอกจากนั้นเราสามารถใช้เหตุผลว่า

เมื่อ A(-4,3) และ M(3,3) ดังนั้น AM ต้องขนานแกน X และ BC

ต้องตั้งฉากกับ AM นั้นคือ BC ต้องขนานกับแกน Y ด้วย

เพราะฉะนั้นพิกัดตัวแรกของจุด C ต้องเป็น 4

ซึ่งเป็นเหตุผลที่จะตัดเลือก ก. ค. และ ง. ทิ้งได้เหมือนกัน

5 F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9x^2-16y^2 = 144$ กำหนด F อยู่ทางซ้ายมือของ F_2 และ M เป็นจุดแบ่งของเส้นตรง F_1F_2 ที่ทำให้ $F_1M : F_2M = 2 : 3$ ลากเส้นตรงผ่านจุด M ทำมุม 135° กับแกน X ระยะตั้งฉากจากจุดกำเนิดมายังเส้นตรงเส้นนี้จะยาวกี่หน่วย

ก. $\sqrt{2}$ ข. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

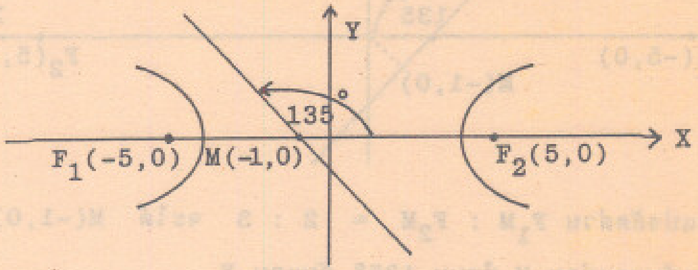
ค. 1 ง. $\frac{1}{2}$

ตอบ ข.

แนวคิด สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

เพราะฉะนั้น $a = 4$ และ $b = 3$ ดังนั้น $c = 5$

ดังนั้น $(-5,0)$ และ $(5,0)$ เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา



$F_1(-5,0)$ และ $F_2(5,0)$ จะได้ความยาว F_1F_2 เท่ากับ 10

ให้พิกัด $M(x,0)$ เพราะว่า $F_1M : F_2M = 2 : 3$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{x+5}{5-x} = \frac{2}{3}$$
$$3x+15 = 10-2x$$
$$5x = -5$$
$$x = -1$$

พิกัด M เท่ากับ $(-1,0)$

ความชันของเส้นตรงที่กำหนดคือ $m = \tan 135° = -1$

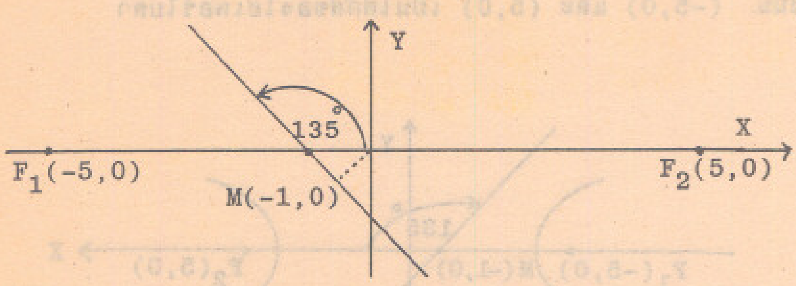
เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $y = (-1)(x+1) = -x-1$

$$x+y+1 = 0$$

ระยะตั้งฉากจาก $(0,0)$ ไปยังเส้นตรง $x+y+1 = 0$

เท่ากับ $\frac{|0+0+1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า $F_1(-5,0)$ และ $F_2(5,0)$ และ F_1F_2 ยาว 10 โดยใช้กราฟ



การแบ่งสัดส่วน $F_1M : F_2M = 2 : 3$ จะได้ M(-1,0)

ลากเส้นตรงผ่าน M ทำมุม 135° กับแกน X

วัดระยะตั้งฉากจากจุด O มายังเส้นตรงจะได้ค่าเท่ากับ 0.8

จากตัวเลือก

ก. 1.414 ข. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1.414}{2} = 0.707$

ค. 1 ง. 0.5

ตัวเลือก ก. และ ค. ตัดทิ้ง

เมื่อมั่นใจว่ารูปเราวาดถูกต้องเลือกคำตอบเป็นข้อ ข. ดีกว่า

6 ถ้า (a,b) เป็นพิกัดของจุดสัมผัสที่ได้จากการลากเส้นตรงผ่านจุด (0,4) ไปสัมผัสกราฟของวงกลม $x^2+y^2-2x+6y-30 = 0$ แล้ว a+b มีค่าเท่าไ

ก. 6 ข. $\frac{2}{5}$

ค. $\frac{24}{5}$ ง. $\frac{26}{5}$

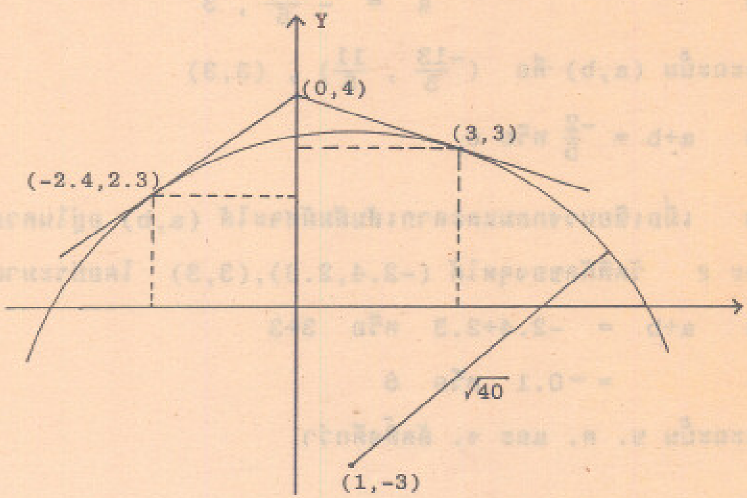
ตอบ ก.

แนวคิด เพราะว่า (a,b) อยู่บนวงกลม เพราะฉะนั้น

$$a^2+b^2-2a+6b-30 = 0 \qquad (1)$$

จากสมการวงกลมจัดรูปแล้วได้ $(x-1)^2+(y+3)^2 = 40$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลาง (1,-3) และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{40}$



ความชันของเส้นตรงที่ผ่าน (a,b) และ (1,-3) เท่ากับ $\frac{b+3}{a-1}$

ความชันของเส้นตรงที่ผ่าน (a,b) และ (0,4) เท่ากับ $\frac{b-4}{a-0}$

เพราะว่าเส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{b+3}{a-1}\right)\left(\frac{b-4}{a}\right) = -1$$

จัดรูปได้ $a^2+b^2-a-b-12 = 0 \qquad (2)$

(1)-(2) ; $-a+7b-18 = 0$

$$a = 7b-18$$

แทนค่าใน (2) จะได้

$$(7b-18)^2+b^2-(7b-18)-b-12 = 0$$

$$5b^2-26b+33 = 0$$

$$(5b-11)(b-3) = 0$$

$$b = \frac{11}{5}, 3$$

ดังนั้น $a = -\frac{13}{5}, 3$

เพราะฉะนั้น (a,b) คือ $(\frac{-13}{5}, \frac{11}{5})$, (3,3)

ดังนั้น $a+b = \frac{-2}{5}$ หรือ 6

วิธีลัด เมื่อเขียนวงกลมและลากเส้นสัมผัสจะได้ (a,b) อยู่ในควอแดรนท์ 1 และ 2 วัดพิกัดของจุดได้ (-2,4,2.3),(3,3) โดยประมาณ

ดังนั้น $a+b = -2.4+2.3$ หรือ $3+3$

$= -0.1$ หรือ 6

เพราะฉะนั้น ข. ค. และ ง. ตัดทิ้งดีกว่า

7 ถ้า $\tan(\frac{\pi}{4}+x) = a\sec 2x + b\tan 2x$ เป็นเอกลักษณ์ แล้ว a+b เท่ากับเท่าใด

ก. 0 ข. 1

ค. 2 ง. 4

ตอบ ค.

แนวคิด $$\tan(\frac{\pi}{4}+x) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan x}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan x}$$

$$= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}$$

$$= \frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}$$

$$= \frac{\cos^2 x + 2 \sin x \cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x}$$

$$= \sec 2x + \tan 2x$$

เพราะฉะนั้น $a \sec 2x + b \tan 2x = \sec 2x + \tan 2x$

สรุป $a = 1, b = 1$ ดังนั้น $a+b = 2$

วิธีลัด เพราะว่า $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = a \sec 2x + b \tan 2x$

เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า x บางค่าก็จะได้ a และ b

เช่น $x = 0$ จะได้

$$\tan(\frac{\pi}{4} + 0) = a \sec 0 + b \tan 0$$

$$1 = a$$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{6}$ จะได้

$$\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = (1)\sec\frac{\pi}{3} + b \tan\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = 2 + b\sqrt{3}$$

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 + b\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + b\sqrt{3}$$

$$\frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = 2 + b\sqrt{3}$$

$$2 + \sqrt{3} = 2 + b\sqrt{3}$$

ดังนั้น $b = 1$

สรุป $a+b = 2$

ผลงานตำราของผู้เขียน

พีชคณิตเชิงเส้น

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา เมทริกซ์ ตัวกำหนด ระบบสมการเชิงเส้น ค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง พหุนามเชิงเส้นคู่ และพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง โดยนำเสนอเนื้อหาด้วย บทนิยาม ทฤษฎีบท พร้อมการพิสูจน์

(ราคาเล่มละ 250 บาท)

ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา การหารากของสมการ $f(x)=0$ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y=f(x)$ เวกเตอร์ เมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการที่มิใช่เชิงเส้น การประยุกต์ของเวกเตอร์ และ เมทริกซ์ พร้อมโปรแกรมภาษาเบสิกที่ช่วยในการคำนวณตามหลักการที่กล่าวถึงในแต่ละเรื่องนั้น

(ราคาเล่มละ 125 บาท)

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 4

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

เนื้อหาภายในเล่มมีข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 พร้อมเฉลยด้วยวิธีตามหลักสูตร วิธีลัด และเทคนิคการตัดตัวเลือก เพิ่มเติมด้วยบทความ โจทย์จากปก เพื่อพัฒนาแนวคิดในการสร้างโจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ด้วยการเชื่อมโยงปัญหากับรูปภาพที่น่าสนใจ

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท
กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980-2, 2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 4
ISBN 974-584-757-7
9 789745 847576
C112
4000
20.00 บาท