คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

สำหรับข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับม.ปลาย

0.30103

log 2

log 3

0.47712

เล่มที่ 5

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-584-758-5

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5
ISBN 974-584-758-5
พิมพ์ครั้งที่ 1 พ.ศ.2537
จำนวน 3,000 เล่ม

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626
จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2, 2187000 โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 5

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5 นี้ขอสนับสนุนการคัดเลือกนักเรียนเพื่อเป็นตัวแทนประเทศไทยในการไปสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก จึงขอนำเสนอข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย เฉพาะวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งสอบเมื่อ

25 มิถุนายน 2537 การสอบคัดเลือกรอบแรก

3 กันยายน 2537 การสอบคัดเลือกรอบสองวันแรก

4 กันยายน 2537 การสอบคัดเลือกรอบสองวันที่สอง

เนื้อหาข้อสอบในรอบแรกจะเป็นประโยชน์อย่างมากต่อผู้จะเตรียมตัวสอบแข่งขันและสอบ ENTRANCE ส่วนข้อสอบรอบที่สองนั้นเป็นลักษณะของข้อสอบที่ต้องแสดงเหตุผลและวิธีทำ ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาความคิดในการแสดงเหตุผลของนักเรียน เพราะว่าข้อสอบลักษณะนี้มีให้นักเรียนได้ทำน้อยมาก

สิ่งที่เพิ่มเติมความแปลกใหม่สำหรับแนวทางการเขียนหนังสือเฉลยข้อสอบก็คือ ผมได้เพิ่มเติมลักษณะของ**คำถามเพิ่มเติม**ในโจทย์ข้อสอบแต่ละข้อเพื่อนักเรียนจะได้ทดลองทำโจทย์มากขึ้น

พบกันใหม่ในเล่มที่ 6

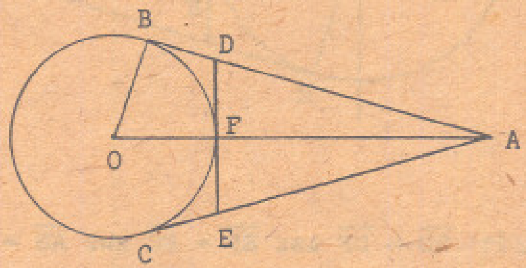
สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย (ThMo)
ประจำปี พ.ศ. 2537 (สอบคัดเลือกรอบที่ 1) วิชา คณิตศาสตร์
สอบวันที่ 25 มิถุนายน 2537 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ มี 25 ข้อ

1.

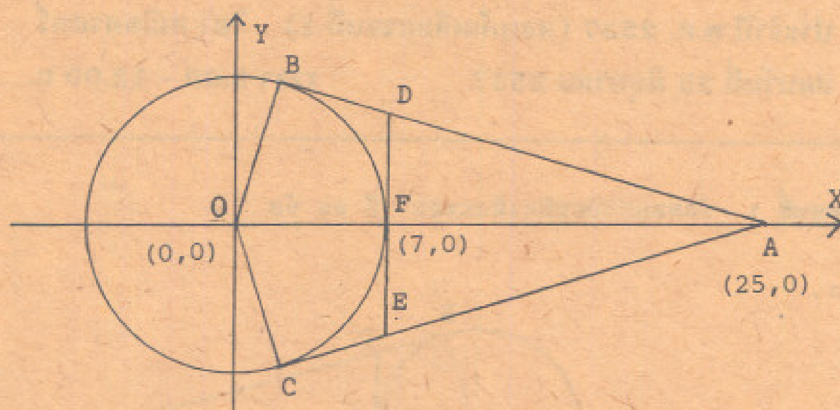


กำหนดให้ A เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ลาก $\overline{AO}$ ตัดวงกลมที่ F และจากจุด F ลากเส้นสัมผัสวงกลมตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 7 เซนติเมตร และ AF ยาว 18 เซนติเมตร แล้วความยาวเส้นรอบรูปของ $\triangle$ ADE มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 24 เซนติเมตร 2. 25 เซนติเมตร
3. 48 เซนติเมตร 4. 50 เซนติเมตร

ตอบ 3

แนวคิด วาดรูปบนพิกัดมุมฉากโดยให้ O(0,0), F(7,0) และ A(25,0)



เพราะว่า $\overline{BD} = \overline{DF}$ และ $\overline{EF} = \overline{EC}$ และ $\overline{AB} = \overline{AC}$

เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ADE เท่ากับ

$$\begin{aligned}\overline{AD} + \overline{DF} + \overline{FE} + \overline{EA} &= \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{EC} + \overline{EA} \\ &= \overline{AB} + \overline{AC} \\ &= 2\overline{AB}\end{aligned}$$

เพราะว่า $O\hat{B}A = 90^\circ$, $\overline{OB} = 7$ และ $\overline{OA} = 25$

เพราะฉะนั้น $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = 625 - 49 = 576$

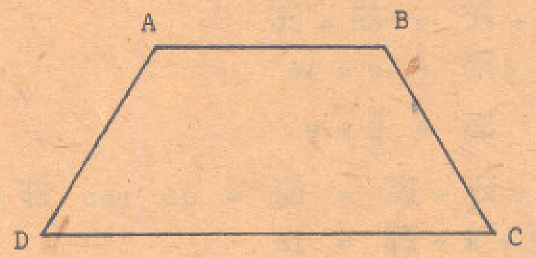
นั่นคือ $\overline{AB} = 24$

สรุปความยาวเส้นรอบรูป $\triangle$ ADE เท่ากับ 48

คำถามเพิ่มเติม

1. ความยาวเส้นรอบรูป $\square$ OCAB มีค่าเท่าใด
2. พื้นที่ $\square$ OCAB เท่ากับเท่าใด
3. พื้นที่ $\square$ OFBD เท่ากับเท่าใด
4. พื้นที่ $\triangle$ ADE เท่ากับเท่าใด

2.



ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่ง $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ และ $\overline{AD} = \overline{BC}$ และสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(i) $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$

(ii) $\overline{DC}$ ยาว 16 เซนติเมตร และ $\overline{DC}$ ยาวกว่า $\overline{AB}$

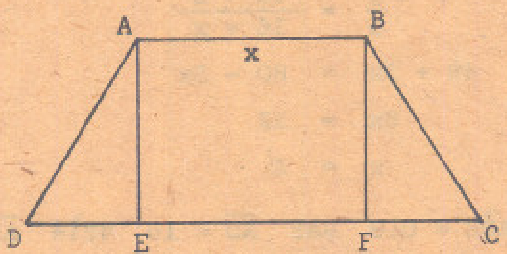
และ (iii) $\sin A\hat{D}C = 0.8$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยม ABCD มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 72 ตารางเซนติเมตร
2. 80 ตารางเซนติเมตร
3. 90 ตารางเซนติเมตร
4. 104 ตารางเซนติเมตร

ตอบ 2

แนวคิด



ลากเส้นตั้งฉากจาก A และ B มาตั้งฉากกับ DC ที่จุด E และ F ตามลำดับ

Δ ADE และ Δ BFC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน

เพราะฉะนั้น Δ ADE และ Δ BFC เหมือนกันทุกประการ

ให้ AB ยาว x

เพราะว่า $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$

$$2\,\overline{AD} = x + 16$$

เพราะฉะนั้น $\overline{AD} = \frac{x}{2} + 8$

เพราะว่า $\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{DC} = 16$ และ $\overline{EF} = \overline{AB}$

$$\overline{DE} + x + \overline{DE} = 16$$

$$2\,\overline{DE} = 16 - x$$

เพราะฉะนั้น $\overline{DE} = 8 - \frac{x}{2}$

เพราะว่า $\sin A\hat{D}E = 0.8$

เพราะฉะนั้น $\cos A\hat{D}E = \sqrt{1 - 0.64} = \sqrt{0.36} = 0.6 = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\cos A\hat{D}E = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

$$\frac{3}{5} = \frac{8 - \frac{x}{2}}{8 + \frac{x}{2}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{16 - x}{16 + x}$$

$$48 + 3x = 80 - 5x$$

$$8x = 32$$

$$x = 4$$

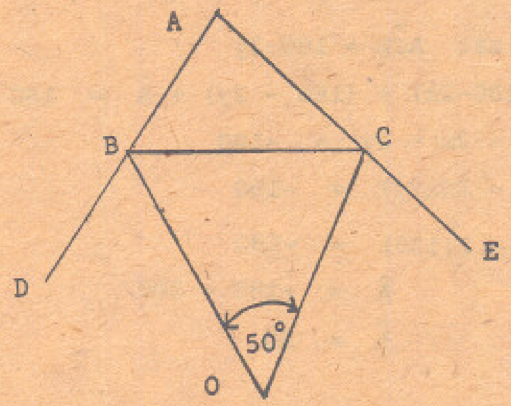
จาก $\sin A\hat{D}E = 0.8$ และ $\overline{AD} = 10$ จะได้ $\overline{AE} = 8$

สรุป พื้นที่ $\square$ ABCD $= \frac{1}{2} \cdot$ ผลบวกด้านคู่ขนาน $\cdot$ สูง

$$= \frac{1}{2}(16+4)(8)$$

$$= 80$$

3.

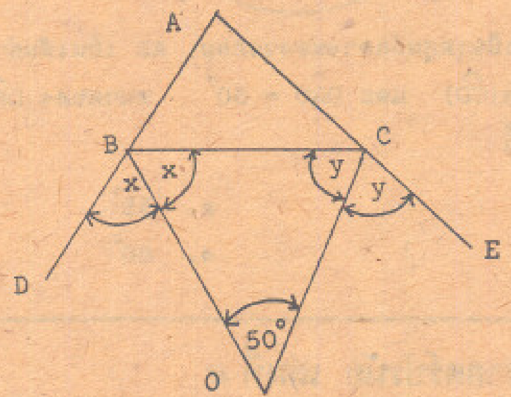


ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ รูปหนึ่ง ต่อด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ออกไปทาง B และ C ถึง D และ E ตามลำดับ $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $C\hat{B}D$ และ $B\hat{C}E$ ถ้า $B\hat{O}C = 50^\circ$ แล้ว ขนาดของ $B\hat{A}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 80°
2. 70°
3. 60°
4. 45°

ตอบ 1

แนวคิด



ให้ $C\hat{B}O = x$ และ $O\hat{C}B = y$ ดังนั้น $x+y+50 = 180$

$x+y = 130$ ________________ (1)

$\hat{ABC} = 180-2x$ และ $\hat{ACB} = 180-2y$

เพราะฉะนั้น $(180-2x) + (180 - 2y) + \hat{A} = 180$

$\hat{A} - 2x - 2y = -180$

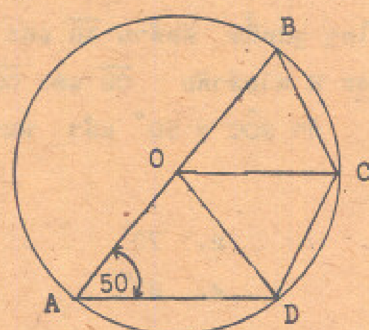
จาก (1) ; $\hat{A} - 2(x+y) = -180$

$\hat{A} - 2(130) = -180$

$\hat{A} = -180 + 260$

$\hat{A} = 80$

4.

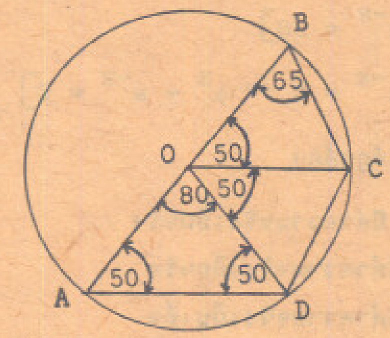


จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง, $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD})$ และ $D\hat{A}O = 50^\circ$ ขนาดของ $O\hat{B}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 50° 2. 55°
3. 65° 4. 80°

ตอบ 3

แนวคิด



Δ AOD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $O\hat{D}A = 50$ และ $A\hat{O}D = 80$

เพราะว่า $m(\widehat{BC}) = m(\widehat{CD})$

เพราะฉะนั้น $B\hat{O}C = C\hat{O}D = \frac{180-80}{2} = 50$

Δ OBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $O\hat{B}C = O\hat{C}B$

เพราะฉะนั้น $O\hat{B}C = \frac{180-50}{2} = 65$

คำถามเพิ่มเติม

จากโจทย์ข้อ 4. เรากำหนดเพิ่มเติมว่า รัศมีวงกลมเท่ากับ 4

1. ความยาวด้าน AD เท่ากับเท่าใด
2. พื้นที่ Δ OAD เท่ากับเท่าใด
3. พื้นที่ $\square$ ABCD เท่ากับเท่าใด
4. พื้นที่ $\square$ OADC เท่ากับเท่าใด
5. ความยาวด้าน CD เท่ากับเท่าใด
6. พื้นที่ Δ DOC เท่ากับเท่าใด
7. ความยาวเส้นรอบรูป $\square$ ABCD เท่ากับเท่าใด

5. ให้ $a = 1.03$ จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ R

ก. $\exists x\,[a^x + a^{-x} = 20]$

ข. $\forall x\,[a^x - a^{-x} = 0 \rightarrow a^x + a^{-x} = 0]$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ก. เท่านั้นที่มีค่าความจริงเป็นจริง
3. ข. เท่านั้นที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. ก. และ ข. มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตอบ 2 และ 3

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

$$a^x + a^{-x} = 20$$

$$a^{2x} + 1 = 20a^x$$

$$(a^x)^2 - 20a^x + 1 = 0$$

$$a^x = \frac{20 \pm \sqrt{400-4(1)(1)}}{2}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{396}}{2}$$

$$= \frac{20 \pm 2\sqrt{99}}{2}$$

$$= 10 \pm \sqrt{99}$$

$$= 10 + 3\sqrt{11}\ ,\ 10 - 3\sqrt{11}$$

จาก $a^x = 10 + 3\sqrt{11}$

$$x \log a = \log(10 + 3\sqrt{11})$$

$$x = \frac{\log(10+3\sqrt{11})}{\log a} = \frac{\log(10+3\sqrt{11})}{\log 1.03}$$

สรุป $\exists x\,[\,a^x + a^{-x} = 20\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

พิจารณาข้อความ ข.

เพราะว่า
$$a^x - a^{-x} = 0$$
$$a^x = a^{-x}$$
$$x = -x$$
$$x = 0$$

ซึ่งจะทำให้ $a^0 + a^{-0} = 1 + 1 = 2$

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[\,a^x - a^{-x} = 0 \rightarrow a^x + a^{-x} = 0\,]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

คำถามเพิ่มเติม

จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้เมื่อกำหนดให้ $a = 2$

1. $\exists x\,[\,a^x + a^{-x} = 1\,]$
2. $\exists x\,[\,a^x - a^{-x} = 1\,]$
3. $\forall x\,[\,a^x + a^{-x} = 0 \rightarrow a^x - a^{-x} = 0\,]$
4. $\forall x\,[\,a^x > a^{-x}\,]$

6. ถ้า $3x^2-13x+4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3+ax^2+bx-8$ ค่าของ $a+b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   1. -49 2. -11
   3. 22 4. 49

ตอบ 3

แนวคิด เพราะว่า $3x^2-13x+4 = (3x-1)(x-4)$ เป็นตัวประกอบของ $3x^2+ax^2+bx-8$

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $(3x-1)(x-4) = 0$

ซึ่งคือ $x = \frac{1}{3}$ และ 4 ต้องเป็นรากของสมการ $3x^3+ax^2+bx-8 = 0$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $x = \frac{1}{3}$ จะได้

$$3(\tfrac{1}{3})^3 + a(\tfrac{1}{3})^2 + b(\tfrac{1}{3}) - 8 = 0$$

$$\frac{1}{9} + \frac{a}{9} + \frac{b}{3} - 8 = 0$$

$$1 + a + 3b - 72 = 0$$

$$a + 3b = 71 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

แทนค่า $x = 4$ จะได้

$$3(4)^3 + a(4)^2 + b(4) - 8 = 0$$

$$192 + 16a + 4b - 8 = 0$$

$$16a + 4b = -184$$

$$4a + b = -46 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a = -19$ และ $b = 30$

เพราะฉะนั้น $a+b = 11$

วิธีลัด ให้ $(Ax+B)$ เป็นตัวประกอบที่ทำให้

$$(3x^2-13x+4)(Ax+B) = 3x^3+ax^2+bx-8$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x^3 และค่าคงตัวจะได้

$$3A = 3 \quad \text{และ} \quad 4B = -8$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$ และ $B = -2$

ดังนั้น $3x^3 + ax^2 + bx - 8 = (3x^3-13x+4)(x-2)$

และเมื่อ $x = 1$ จะได้

$$3+a+b-8 = (3-13+4)(1-2)$$

$$a+b-5 = 6$$

$$a+b = 11$$

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}$

ข. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $(f \circ f)(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

ตอบ 3

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

สมมติมี f ที่ทำให้ $f(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}$

$$1+\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$$

$1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น ก. ผิด

พิจารณาข้อความ ข.

เพราะว่า $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{f(x)}}$

เพราะฉะนั้นเราเลือก $f(x) = \dfrac{1}{[illegible]}$ จะเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้อง

[illegible]

$1 + \dfrac{1}{x}$

เงื่อนไขที่ต้องการ

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ถูกต้อง

คำถามเพิ่มเติม

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{f(x)}}$

2. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{(f(x))^2}}$

3. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $f(x) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{(f(x))^2}}$

4. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ

$$\frac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{(f(x))^2}}$$

5. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ

$$\frac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{f(x)}}$$

6. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ

$$\frac{1}{1 + (f(x))^2} = \frac{1}{1 - (f(x))^2}$$

๘. ให้ $x \in R^+$ และ $(x+1)^2 + \frac{1}{(x+1)^2} = 7$ แล้วค่าของ

$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + \frac{1}{(x+1)^5}$ เท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

๑. 1401 ๒. 1400

๓. 321 4. 123

ตอบ 4

แนวคิด พิจารณาเทอมทั่วไป $A^2 + \frac{1}{A^2} = 7$

จะได้
$$\left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right)^2 = 49$$
$$A^4 + 2 + \frac{1}{A^4} = 49$$
$$A^4 + \frac{1}{A^4} = 47$$
$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^2 = A^2 + 2 + \frac{1}{A^2}$$
$$= 9$$

เพราะฉะนั้น $A + \frac{1}{A} = 3$

จากสูตรการกระจาย $a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

ดังนั้น

$$A^5 + \frac{1}{A^5} = \left(A + \frac{1}{A}\right)\left(A^4 - A^3 \cdot \frac{1}{A} + A^2 \cdot \frac{1}{A^2} - A \cdot \frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^4}\right)$$

$$= \left(A + \frac{1}{A}\right)\left(A^4 - A^2 + 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^4}\right)$$

$$= \left(A + \frac{1}{A}\right)\left(A^4 + \frac{1}{A^4} + 1 - \left(A^2 + \frac{1}{A^2}\right)\right)$$

$$= (3)(47+1-7)$$

$$= 123$$

กำหนดให้ $A = x+1$

จะได้ $(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1) + \frac{1}{(x+1)^5} = (x+1)^5 + \frac{1}{(x+1)}$

$$= 123$$

คำอาบเพิ่มเติม

กำหนด $A^2 + \frac{1}{A^2} = 14$ จงหาค่าต่อไปนี้

8.1 $A + \frac{1}{A}$

8.2 $A^3 + \frac{1}{A^3}$

8.3 $A^4 + \frac{1}{A^4}$

8.4 $A^5 + \frac{1}{A^5}$

8.5 $A^6 + \frac{1}{A^6}$

8.6 $A^7 + \frac{1}{A^7}$

9. $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\pi}{4}$ 2. $-\frac{3\pi}{4}$

3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{3\pi}{4}$

ตอบ 4

แนวคิด โจทย์ข้อนี้ขอให้สังเกตวิธีทำต่อไปนี้แล้วลองดูว่า ผิดที่ใด ด้วยเหตุผลอย่างไร

ให้ $A = \tan^{-1}2$ และ $B = \tan^{-1}3$

จะได้ $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$= \frac{2+3}{1-(2)(3)}$$

$$= -1$$

เพราะฉะนั้น $A+B = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ถ้าเราเลือกคำตอบว่า $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = -\frac{\pi}{4}$ จะผิดทันที

การทำโจทย์ทำนองนี้ต้องระวังเรื่องเหตุผลเกี่ยวกับกับโดเมนและเรนจ์

เนื่องจาก $\tan^{-1} : (-\infty,\infty) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

และ $\tan^{-1}2 \in (0, \frac{\pi}{2})$

และ $\tan^{-1}3 \in (0, \frac{\pi}{2})$

ดังนั้น $0 < \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 < \pi$ นั่นคือ $0 < A+B < \pi$

เพราะว่า $\tan(A+B) = -1$ และ $0 < A+B < \pi$

เพราะฉะนั้น $A+B$ ต้องเท่ากับ $\frac{3\pi}{4}$

วิธีลัด ในการทำข้อสอบถ้าเราจำได้ว่า

$$\tan^{-1}2 > 0 \quad \text{และ} \quad \tan^{-1}3 > 0$$

จะทำให้ $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 > 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1 และ 2 ตัดทิ้งได้

ส่วนตัวเลือกที่เหลือต้องเดาแล้ว

คำถามเพิ่มเติม

$\tan^{-1}(-2) + \tan^{-1}(-3)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $-\frac{\pi}{4}$ ข. $-\frac{3\pi}{4}$

ค. $\frac{\pi}{4}$ ง. $\frac{3\pi}{4}$

10. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$x^2 \log_5(x^2+2x-3) - x\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x-3) = x^2 + x$$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4
3. 6 4. 8

ตอบ 3

แนวคิด ให้ $k = x^2+2x-3$ ดังนั้น

$$x^2\log_5 k - x\log_{\frac{1}{5}} k = x^2+x$$

$$x^2\log_5 k + x\log_5 k = x^2+x$$

$$(x^2+x)(\log_5 k) = x^2+x$$

$$(x^2+x)(1-\log_5 k) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x^2+x = 0$ หรือ $\log_5 k = 1$

กรณี $x^2+x = 0$ จะได้ $x = 0,-1$

กรณี $\log_5 k = 1$ จะได้ $k = 5$

$$x^2+2x-3 = 5$$

$$x^2+2x-8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4,2$$

เพราะว่า x^2+2x-3 ต้องมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น $x = 0$ หรือ $x = -1$ ไม่ได้

ดังนั้น $A = \{-4,2\}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A เท่ากับ 6

คำถามเพิ่มเติม

จงหาเซตคำตอบของสมการ

10.1 $x^2\log_{12}(x^2+2x-3) - x\log_{\frac{1}{12}}(x^2+2x-3) = x^2+x$

10.2 $x^2\log_{21}(x^2+2x-3) - x\log_{\frac{1}{21}}(x^2+2x-3) = x^2+x$

10.3 $x^2\log_5(x^2+3x-10) - x\log_{\frac{1}{5}}(x^2+3x-10) = x^2+x$

10.4 $x^2\log_5(x^2+3x-10) - \log_{\frac{1}{5}}(x^2+3x-10) = x^2-1$

11. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{\sqrt{x+48}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+48}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{3}}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7　　2. 16

3. 25　　4. 41

ตอบ 2

แนวคิด รูปแบบของโจทย์ข้อนี้ถ้าจำคุณสมบัติของสัดส่วน

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S}$$

ก็จะทำให้การหาคำตอบง่ายขึ้น

ดังนั้นจึงให้ $P = \sqrt{x+48}$, $Q = \sqrt{x}$

$R = \sqrt{x-4}$, $S = \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นจากโจทย์กำหนดให้เราจะได้ว่า

$$\frac{\sqrt{x+48}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x+48}{x} = \frac{x-4}{3}$$

$$3x+144 = x^2-4x$$

$$x^2-7x-144 = 0$$

$$(x-16)(x+9) = 0$$

$$x = 16 \text{ หรือ } x = -9$$

เพราะว่า $R = \sqrt{x-4}$ ดังนั้น $x \neq -9$ สรุป $x = 16$ เท่านั้น

หมายเหตุ 1. แนวคิดข้างต้นเป็นวิธีลัดแล้ว มิฉะนั้นต้องทำการคูณไขว้, ยกกำลังสองทั้งสองข้าง, จัดรูป ซึ่งจะเป็นเรื่องยุ่งยากและเสียเวลามาก

2. คุณสมบัติสัดส่วนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S}$$

$$(P+Q)(R-S) = (R+S)(P-Q)$$

$$PR - PS + QR - QS = PR - QR + PS - QS$$

$$2PS = 2QR$$

$$PS = QR$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$$

12. ถ้า $A \cdot 2^{3\log_2 6} = 648$ ค่าของ $\frac{2^{3\log_2 6}}{A}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 36
3. 72
4. 216

ตอบ 3

แนวคิด $2^{3\log_2 6} = 2^{\log_2 6^3} = 6^3 = 216$

ดังนั้น $A = \frac{648}{216} = 3$

และ $\frac{2^{3\log_2 6}}{A} = \frac{216}{3} = 72$

13. ถ้า $f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$, $x \in R$ แล้ว a จะมีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อ $f(a) = 1$

1. $\frac{101}{20}$ 2. $\frac{99}{20}$

3. 1 4. 0

ตอบ 2

แนวคิด

$$f(x) = \log(x+\sqrt{1+x^2})$$

$$1 = f(a) = \log(a+\sqrt{1+a^2})$$

$$a+\sqrt{1+a^2} = 10$$

$$\sqrt{1+a^2} = 10-a$$

$$1+a^2 = 100-20a+a^2$$

$$20a = 99$$

$$a = \frac{99}{20}$$

วิธีลัด ใช้ค่าในตัวเลือกแทนค่า

4. $f(0) = \log(1) = 0 \neq 1$

3. $f(1) = \log(1+\sqrt{2}) \neq 1$

2. $f(\frac{99}{20}) = \log(\frac{99}{20}+\sqrt{1+(\frac{99}{20})^2}) = 1$

1. $f(\frac{101}{20}) = \log(\frac{101}{20}+\sqrt{1+(\frac{101}{20})^2}) \neq 1$

ดังนั้นเราเลือก $a = \frac{99}{20}$

14. ค่าของ $(2-\frac{1}{2+1})(2-\frac{1}{2^2+1})(2-\frac{1}{2^3+1})\ \ldots\ (2-\frac{1}{2^8+1})$

ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{511}{3}$
2. 171
3. 256
4. $\frac{257}{3}$

ตอบ 2

แนวคิด

$$2-\frac{1}{2+1} = \frac{2^2+2-1}{2+1} = \frac{2^2+1}{2+1}$$

$$2-\frac{1}{2^2+1} = \frac{2^3+2-1}{2^2+1} = \frac{2^3+1}{2^2+1}$$

$$\vdots$$

$$2-\frac{1}{2^8+1} = \frac{2^9+2-1}{2^8+1} = \frac{2^9+1}{2^8+1}$$

เพราะฉะนั้น

$$(2-\frac{1}{2+1})(2-\frac{1}{2^2+1})(2-\frac{1}{2^3+1})\ \ldots\ (2-\frac{1}{2^8+1})$$

$$= (\frac{2^2+1}{2+1})(\frac{2^3+1}{2^2+1})(\frac{2^4+1}{2^3+1})\ \ldots\ (\frac{2^9+1}{2^8+1})$$

$$= \frac{2^9+1}{3}$$

$$= \frac{513}{3}$$

$$= 171$$

15. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid 3^{x-6} = 2^{x-3} \cdot 3^{-x}\}$

A เป็นสับเซตของเซตคำตอบของอสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\log(x-2) < 0$ 2. $\log(x+2) < -1$

3. $\log(x-1) < 0$ 4. $\log(x+1) < 1$

ตอบ 4

แนวคิด

$$3^{x-6} = 2^{x-3} \cdot 3^{-x}$$

$$3^{2x-6} = 2^{x-3}$$

$$(3^2)^{x-3} = 2^{x-3}$$

$$9^{x-3} = 2^{x-3}$$

เพราะฉะนั้น $x-3 = 0$ นั่นคือ $x = 3$ หรือ $A = \{3\}$

พิจารณาเซตคำตอบของตัวเลือก

1. $\{x \mid \log(x-2) < 0\} = (2,3)$

2. $\{x \mid \log(x+2) < -1\} = (-2, -\frac{19}{10})$

3. $\{x \mid \log(x-1) < 0\} = (1,2)$

4. $\{x \mid \log(x+1) < 1\} = (-1,9)$

เพราะฉะนั้น A เป็นสับเซตของเซตคำตอบในตัวเลือก 4

วิธีลัด เมื่อได้ $x = 3$ เราเอาไปแทนค่าจะทำให้ได้ตัวเลือกเร็วกว่า

1. $\log(3-2) = \log 1 = 0 \not< 0$

2. $\log(3+2) = \log 5 = 0.699 \not< -1$

3. $\log(3-1) = \log 2 = 0.301 \not< 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1, 2 และ 3 ตัดทิ้งได้

ลองคิดตัวเลือก 4 $\log(3+1) = \log 4 = 0.603 < 1$ เป็นจริง

หมายเหตุ ค่า $\log 2 = 0.301$ ข้อสอบมีให้แล้วอยู่ที่ข้อ 7 ตอนที่ 2

16. ถ้า $f(x) = x+2$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2-5$
แล้วเซตคำตอบของอสมการ $g(x) < 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-1,1]$
2. $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
3. $(-1,1)$
4. $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

ตอบ 3

แนวคิด

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g)(x) &= 3x^2-5 \\
f((f^{-1} \circ g)(x)) &= f(3x^2-5) \\
g(x) &= (3x^2-5) + 2 \\
&= 3x^2-3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
g(x) &< 0 \\
3x^2-3 &< 0 \\
x^2-1 &< 0 \\
(x+1)(x-1) &< 0 \\
-1 < x &< 1
\end{aligned}
$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(-1,1)$

คำถามเพิ่มเติม

1. $f(x) = x-4$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2-5$
จงหาเซตคำตอบของอสมการ $g(x) < 0$

2. $f(x) = x+2$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = x^2-6x+3$
จงหาเซตคำตอบของอสมการ $g(x) < 0$

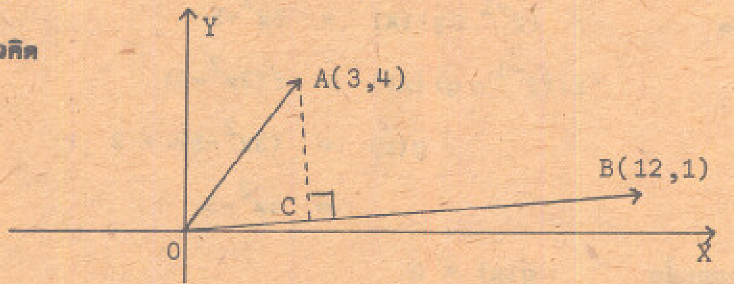
3. $f(x) = x-3$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2-5$
จงหาค่าของ $(f \circ g)(4)$

17. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$; $\overrightarrow{OB} = 12\bar{i} + \bar{j}$ ลาก AC ตั้งฉาก กับ $\overline{OB}$ ที่จุด C แล้ว $\overrightarrow{OC}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{29}(12\bar{i} + \bar{j})$
2. $\frac{29}{8}(12\bar{i} + \bar{j})$
3. $\frac{40}{147}(12\bar{i} + \bar{j})$
4. $\frac{147}{40}(12\bar{i} + \bar{j})$

ตอบ 1

แนวคิด



สมการเส้นตรงที่ผ่าน OB คือ $y = \frac{x}{12}$

เพราะว่า AC $\perp$ OB เพราะฉะนั้นความชัน AC เท่ากับ -12

สมการเส้นตรงที่ผ่าน AC คือ $y-4 = (-12)(x-3)$

แทนค่า $y = \frac{x}{12}$; $\frac{x}{12} - 4 = -12x + 36$

$$x - 48 = -144x + 432$$

$$145x = 480$$

$$x = \frac{8}{29}(12)$$

เพราะฉะนั้น $y = \frac{8}{29}$

ดังนั้นพิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{96}{29}, \frac{8}{29}\right)$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OC}$ คือ $\frac{8}{29}(12\bar{i} + \bar{j})$

หมายเหตุ เมื่อได้ $x = \frac{8}{29}(12)$ เราก็เลือกคำตอบเป็นข้อ 1. ได้แล้ว

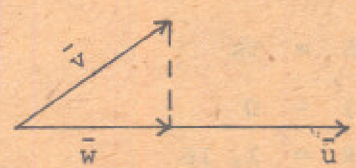
วิธีลัด 1 โดยการเขียนภาพและวัดพิกัดของ C(x,y) ด้วยไม้บรรทัด หรือสังเกตจากรูปก็ได้จะพบว่า $y < 1$

ดูที่ตัวเลือกบ้าง

1. $y = \frac{8}{29} < 1$
2. $y = \frac{29}{8} > 1$ ตัวเลือกนี้จึงตัดทิ้งได้
3. $y = \frac{40}{147} < 1$
4. $y = \frac{147}{40} > 1$ ตัวเลือกนี้จึงตัดทิ้งได้

เดาจากตัวเลือก 1. หรือ 3. ก็ยังดี

วิธีลัด 2 ใช้สูตรของภาพฉายของเวกเตอร์



$\bar{w}$ เรียกว่า ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\bar{v}$ บน $\bar{u}$

$$\bar{w} = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{|\bar{u}|^2} \cdot \bar{u}$$

ดังนั้นจากโจทย์ $\overrightarrow{OC} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OB}|^2} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$= \frac{(3\bar{i} + 4\bar{j}) \cdot (12\bar{i} + \bar{j})}{145} \cdot (12\bar{i} + \bar{j})$$

$$= \frac{40}{145} (12\bar{i} + \bar{j})$$

$$= \frac{8}{29} (12\bar{i} + \bar{j})$$

18. ให้ $A = \{x \in R \mid 2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}\}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{17}{2}$
3. $\frac{7}{2}$
4. $\frac{19}{2}$

ตอบ 3

แนวคิด ให้ $k = 2x^2-7x+7$

จากสมการ

$$
\begin{aligned}
2x^2+3 &= 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7} \\
2x^2-7x+3 &= 3\sqrt{2x^2-7x+7} \\
2x^2-7x+7-4 &= 3\sqrt{k} \\
k-4 &= 3\sqrt{k} \\
k^2-8k+16 &= 9k \\
(k-16)(k-1) &= 0 \\
k &= 1, 16
\end{aligned}
$$

$k = 1$;

$$
\begin{aligned}
2x^2-7x+7 &= 1 \\
2x^2-7x+6 &= 0 \\
(2x-3)(x-2) &= 0 \\
x &= \frac{3}{2}, 2
\end{aligned}
$$

$k = 16$;

$$
\begin{aligned}
2x^2-7x+7 &= 16 \\
2x^2-7x-9 &= 0 \\
(2x-9)(x+1) &= 0 \\
x &= -1, \frac{9}{2}
\end{aligned}
$$

ตรวจสอบค่า x โดยแทนค่าในสมการ $2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}$

พบว่าค่า x ที่ใช้ได้คือ $x = -1, \frac{9}{2}$

เพราะฉะนั้น $A = \{-1, \frac{9}{2}\}$ และผลบวกสมาชิกใน A เท่ากับ $\frac{7}{2}$

วิธีลัด ให้ $k = \sqrt{2x^2-7x+7}$

$$k^2 = 2x^2-7x+7$$

$$2x^2-7x+3 = k^2-4$$

เพราะฉะนั้น $2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}$

$$2x^2-7x+3 = 3\sqrt{2x^2-7x+7}$$

$$k^2-4 = 3k$$

$$k^2-3k-4 = 0$$

$$(k-4)(k+1) = 0$$

$$k = 4, -1$$

แต่ $k > 0$ ดังนั้น $k = 4$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น $2x^2-7x+7 = 4^2$

$$2x^2-7x-9 = 0$$

$$(2x-9)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{9}{2}, -1$$

โดยการแทนค่าเพื่อทดสอบค่า x จะได้ $x = \frac{9}{2}$ และ $x = -1$ ใช้ได้

ดังนั้น $A = \{-1, \frac{9}{2}\}$

19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติว่า

$6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$

3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{3}{4}$

ตอบ 2

แนวคิด จากสมการ $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$

จะได้ $$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$$

เพราะว่าสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนตามสมการ (1)

จะมี $\cos C$ เท่ากันทุกรูป

เพราะฉะนั้น

$$\cos C = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

หาได้โดยการแทนค่า $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$

นั่นคือ $$\cos C = \frac{9+4-16}{2(2)(3)} = -\frac{1}{4}$$

วิธีลัด จากการที่เราทราบว่าสามเหลี่ยม ABC ที่มีสัดส่วนเป็น

$$6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$$

จะได้ $$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$$

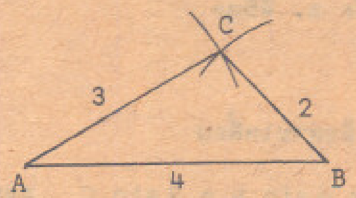
นั้นอัตราส่วนของด้าน $a : b : c = 2 : 3 : 4$

โดยการวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$ ตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 4 cm.
2. เขียนวงกลมรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ A

เขียนวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลางที่ B
และวงกลมตัดกันที่ C

3. โดยการวัดมุมโดยประมาณจะได้ $\hat{C} \cong 104^\circ$



เพราะฉะนั้น $\cos \hat{C} < 0$ แน่นอน
ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

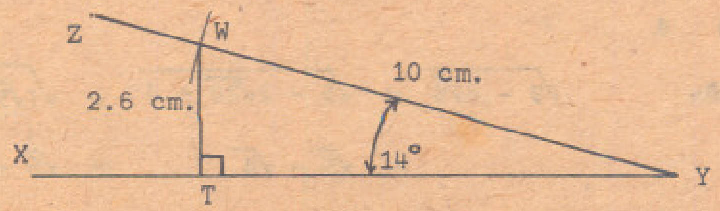
เพราะว่า $\cos 104^\circ = -\sin 14^\circ$
และ $\sin 30^\circ > \sin 14^\circ$
นั่นคือ $-\sin 30^\circ < -\sin 14^\circ$

$$-(\frac{1}{2}) < \cos 104^\circ$$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก
สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

หมายเหตุ สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากตามขั้นตอน

1. ลาก XY
2. เขียน ZY ทำมุม 14° กับ XY
3. เขียนวงกลมรัศมี 10 cm. จุดศูนย์กลางที่ Y ตัด YZ ที่ W
4. ลาก WT ตั้งฉากกับ XY
5. วัดความยาว WT ได้ 2.6 cm.



เพราะฉะนั้น $\sin 14^\circ = \frac{2.6}{10} = 0.26$

$\cos C = -\sin 14^\circ = -0.26$

สรุปเลือกคำตอบเป็นข้อ 3. ดีที่สุด

คำถามเพิ่มเติม

กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยม

1. ถ้า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ จงหา $\cos(A+B)$

2. ถ้า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ จงหา cos ของมุมที่ใหญ่ที่สุดในสามเหลี่ยม ABC

3. ถ้า $2\sin A = 3\sin B = 4\sin C$
จงหา $\cos A + \cos B + \cos C$

4. ถ้า $4\sin A = 5\sin B = 6\sin C$
จงหา $\sin A + \sin B + \sin C$

5. ถ้า $3\sin A = 5\sin B = 6\sin C$ จงหา $\sin(A-B)$

20. กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > b$ และ

$$\sqrt{11 + \sqrt{45} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$2a^2+b$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 12
2. 14
3. 52
4. 54

ตอบ 4

แนวคิด $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{20} + 4} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2}$

$= \sqrt{5} - \sqrt{4} = \sqrt{5} - 2$

$$\sqrt{11+\sqrt{45}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}} = \sqrt{11+\sqrt{45}+\sqrt{5}-2}$$

$$= \sqrt{9+4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5+2\sqrt{20}+4}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2}$$

$$= \sqrt{5}+\sqrt{4}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{5}+\sqrt{4}$

เพราะว่า $a > b$ **เพราะฉะนั้น** $a = 5$ **และ** $b = 4$

สรุป $2a^2+b = 2(25)+4 = 54$

21. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a-b+c)(a+b+c) = ac$ แล้ว ขนาดของมุม B ตรงกับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 30°
2. 60°
3. 120°
4. 150°

ตอบ 3

แนวคิด

$$(a-b+c)(a+b+c) = ac$$

$$a^2+2ac+c^2-b^2 = ac$$

$$a^2+c^2-b^2 = -ac$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos B = -\frac{1}{2}$$

$$B = 120^\circ$$

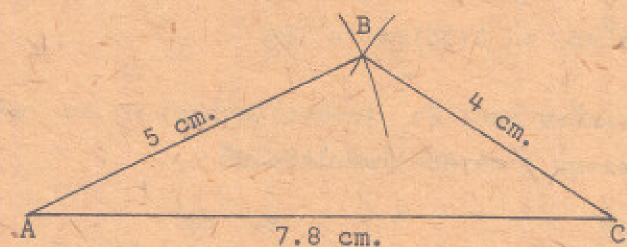
วิธีลัด ถึงแม้เราลืมสูตร $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ก็ยังมีแนวทางอื่นที่จะหา

มุม B ได้ดังนี้

เลือก $a = 4$, $c = 5$ จะได้

$$\begin{aligned}(4-b+5)(4+b+5) &= 20\\ (9-b)(9+b) &= 20\\ 81+b^2 &= 20\\ b^2 &= 61\\ b &= \sqrt{61} \cong 7.8\end{aligned}$$

ต่อไปวาดรูปสามเหลี่ยม $a = 4$, $b = 7.8$ และ $c = 5$



วัดมุม B จากรูปสามเหลี่ยมจะได้ $B = 120^\circ$
ดังนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

คำถามเพิ่มเติม

1. ถ้า $(a-b+c)(a+b+c) = bc$ แล้ว $\hat{A}$ เท่ากับเท่าใด
2. ถ้า $(a-b+c)(a+b+c) = 2ac$ แล้ว $\hat{B}$ เท่ากับเท่าใด
3. ถ้า $(a+b-c)(a+b+c) = 4ab$ แล้ว $\hat{C}$ เท่ากับเท่าใด
4. ถ้า $(a+b+c)(a+b-c) = 4ac$ แล้ว $\sin B$ และ $\cos B$ เท่ากับเท่าใด

22. ให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \{-1,0,1\} \right\}$

และ $X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$ จำนวนสมาชิกในเซต X มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 64 / 2. 57
3. 48 4. 16

ตอบ 3

แนวคิด $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \{-1,0,1\} \right\}$

$$n(M) = (3)(3)(3)(3) = 81$$

$$X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$$

$$X' = \{A \in M \mid \det A = 0\}$$

การนับจำนวนสมาชิกของ X'

วิธีที่ 1 จำแนกเป็น 4 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 4 ตัว 1 วิธี

กรณีที่ 2 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 3 ตัว เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ใส่เลข 0 ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกตัวเลข 1 หรือ -1 ใส่ตำแหน่งที่ว่างทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 2 มีเมตริกซ์ (4)(2) = 8 ตัว

กรณีที่ 3 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 2 ตัว เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 เลข 0 ที่ใช้ 2 ตัวนั้นวางเป็นแถวหรือหลัก ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 ตำแหน่งแรกที่ว่างใส่เลข 1 หรือ -1 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 ตำแหน่งที่สองที่ว่างใส่เลข 1 หรือ -1 ทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 3 มีเมตริกซ์ (4)(2)(2) = 16 ตัว

กรณีที่ 4 ไม่มีเลข 0 ในเมตริกซ์ซึ่งมีทั้งหมด 8 ตัวคือ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

สรุปจากทั้ง 4 กรณี $n(X') = 1+8+16+8 = 33$

เพราะฉะนั้น $n(X) = 81-33 = 48$

วิธีที่ 2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad-bc$

ดังนั้น $ad-bc = 0$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

เพราะฉะนั้นเราสามารถนับจำนวนสมาชิกของ X' โดยจำแนกตามกรณีของ $ad = bc$

กรณีที่ 1 $ad = bc = 0$

กรณีที่ 1.1 ใช้เลข 0 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

กรณีที่ 1.2 ใช้เลข 0 จำนวน 3 ตัว

ขั้นที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 1 หรือ -1 ใส่ตำแหน่งที่ไม่เป็นศูนย์ ทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 1.2 ทำได้ $(4)(2) = 8$ วิธี

กรณีที่ 1.3 ใช้เลข 0 จำนวน 2 ตัว

ขั้นที่ 1 $a = 0$ หรือ $d = 0$ ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 $b = 0$ หรือ $c = 0$ ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 ตำแหน่งที่เหลือ 2 ตำแหน่งเป็น 1 หรือ -1 ทำได้ $(2)(2) = 4$ วิธี

สรุปกรณีที่ 1.3 ทำได้ $(2)(2)(4) = 16$ วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 ทำได้ $1+8+16 = 25$ วิธี

กรณีที่ 2 $ad = bc = 1$

กรณีที่ 2.1 ใช้เลข 1 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

กรณีที่ 2.2 ใช้เลข -1 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

กรณีที่ 2.3 ใช้เลข -1 และ 1 อย่างละ 2 ตัว เลข -1 สองตัวนั้นอยู่ทางด้านซ้ายหรือขวาของ $ad = bc$ ทำได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 2 มี $1+1+2 = 4$ วิธี

กรณีที่ 3 $ad = bc = -1$

กรณีต้องใช้เลข 1 สองตัวและเลข -1 สองตัว

ขั้นที่ 1 a เลือกค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ ๒ d เลือกค่าได้ 1 วิธีเท่านั้น

ขั้นที่ ๓ b เลือกค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 c เลือกค่าได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ ๓ มีวิธีทั้งหมด $(2)(1)(2)(1) = 4$ วิธี

จากทั้ง ๓ กรณีจะทำได้ทั้งหมด $(25)+(4)+(4) = 33$ วิธี

สรุป $n(X') = 33$

$n(X) = 81-33 = 48$

คำถามเพิ่มเติม

๑. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \{-1,0,1\} \right\}$

$S = \{\det A \mid A \in M\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

๒. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \{0,1,2\} \right\}$

$S = \{\det A \mid A \in M\}$, $n(S)$ เท่ากับเท่าใด

$X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$, $n(X)$ เท่ากับเท่าใด

๓. $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a,b,c,d \in \{-2,-1,0,1,2\} \right\}$

$S = \{\det A \mid A \in M\}$, $n(S)$ เท่ากับเท่าใด

$X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$, $n(X)$ เท่ากับเท่าใด

$Y = \{A \in M \mid \det A = 1\}$, $n(Y)$ เท่ากับเท่าใด

23. ให้ $U = \{1,2,3,\ldots,65\}$ และ

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) = 1\}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต X ทั้งหมดมีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2145
2. 1560
3. 650
4. 585

ตอบ 2

แนวคิด $U = \{1,2,3,\ldots,65\}$

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) = 1\}$

$X' = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) \neq 1\}$

เพราะว่า $65 = 5 \cdot 13$ เพราะฉะนั้นตัวเลข x ที่ ห.ร.ม.$(x,65) \neq 1$ คือตัวเลข x ที่ 5 หาร x ลงตัว หรือตัวเลข x ที่ 13 หาร x ลงตัว

$A = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{5,10,15,\ldots,65\}$

$\sum_{y \in A} y = 455$

$B = \{x \in U \mid 13 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{13,26,39,52,65\}$

$\sum_{y \in B} y = 195$

$A \cap B = \{65\}$

เพราะฉะนั้น $X' = A \cup B$

$$\sum_{y \in X'} y = \sum_{y \in A \cup B} y = \sum_{y \in A} y + \sum_{y \in B} y - \sum_{y \in A \cap B} y$$

$$= 455 + 195 - 65$$

$$= 585$$

เพราะว่า $\sum y = 1 + 2 + \ldots + 65 = 2145$

$y \in U$

เพราะฉะนั้น $\sum_{x \in X} x = 2145 - 585 = 1560$

คำถามเพิ่มเติม

กำหนด $U = \{1,2,3,\ldots,1000\}$
จงหาจำนวนสมาชิก, ผลบวกของสมาชิก, ผลบวกกำลังสองของสมาชิกแต่ละตั
ของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) = 1\}$
2. $B = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,60) = 1\}$
3. $C = \{x \in U \mid \text{ค.ร.น.}(x,10) = 40\}$
4. $D = \{x \in U \mid \text{ค.ร.น.}(x,10) = 100\}$
5. $E = \{x \in U \mid \text{ค.ร.น.}(x,10) = 6!\}$
6. $F = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,10) = 2\}$
7. $G = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ เหลือเศษ } 4\}$
8. $H = \{x \in U \mid 7 \text{ หาร } x \text{ เหลือเศษ } 3\}$
9. $I = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ เหลือเศษ } 4 \text{ และ } 7 \text{ หาร } x \text{ เหลือเศษ } 3$
10. $J = \{x \in U \mid$ เศษที่ได้จากการหาร x ด้วย 11 เท่ากับเศษเหลือที่ได้จากการหาร x ด้วย $13\}$

หมายเหตุ ข้อสอบในลักษณะนี้สามารถนำความรู้เกี่ยวกับเซต, ระบบจำนวนเต็ม, ลำดับเลขคณิต มาทดสอบพร้อมๆ กันได้

24. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

ผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$

มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 3
3. -3
4. 5

ตอบ 1

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$\det(A - xI_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 5 & 4-x & 0 \\ 3 & 4 & -6-x \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-x)\left[(4-x)(-6-x)\right] + 3\left[20-3(4-x)\right]$$

$$= (1-x)(-24+2x+x^2) + 3(20-12+3x)$$

$$= -24+2x+x^2+24x-2x^2-x^3+60-36+9x$$

$$= 35x-x^2-x^3$$

พิจารณาสมการ $x^3+x^2-35x = 0$

$$x(x^2+x-35) = 0$$

$$x = 0, \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-35)}}{2}$$

$$= 0, \frac{-1+\sqrt{141}}{2}, \frac{-1-\sqrt{141}}{2}$$

เพราะฉะนั้นผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A-xI_3) = 0$ คือ -1

วิธีลัด 1 พิจารณาในลักษณะของสูตรทั่วไป

ให้ $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ เป็นรากของสมการ และ

$$(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a$$

จะได้ว่า $a_n = x_1x_2\ldots x_n$

$a_1 = x_1+x_2+\ldots+x_n$

ดังนั้นจากสมการ $x^3+x^2-35x = 0$

เราสรุปได้เลยว่า ผลบวกของราก $(-x_1)+(-x_2)+(-x_3) = -a_1 = -1$

วิธีลัด 2 คำตอบของสมการ $\det(A-xI_3) = 0$

เรียกว่าค่าเจาะจงของเมตริกซ์ A

ถ้า x_1, x_2, x_3 เป็นค่าเจาะจงของ A

และ $\det(A-xI_3) = a_3 + a_2x + a_1x^2 + x^3$

แล้วจะได้ว่า

(1) ผลคูณของราก $x_1x_2x_3 = \det A$

(2) ผลบวกของราก

$x_1+x_2+x_3 = a_1 =$ ผลบวกแนวทแยงมุมของเมตริกซ์

เพราะฉะนั้นจากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

เราสามารถตอบได้ว่าผลบวกของรากคือ $(1)+(4)+(-6) = -1$

คำถามเพิ่มเติม

(ก) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, (ข) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

สำหรับเมตริกซ์ A จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหา $\det(A - xI)$
2. จงหารากของสมการ $\det(A - xI) = 0$
3. $X = \{x \in R \mid \det(A - xI) = 0\}$ จงหา $n(X)$
4. จงหาผลคูณของรากของสมการ $\det(A - xI) = 0$

25. ให้ $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

ถ้า $f(2) = f(3) = f(4) = \ldots = f(n+1) = 0$

แล้ว f(1) มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $(-1)^{n-1} \cdot n!$
3. $(-1)^n \cdot n!$
4. $n! + (-1)^n$

($n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$)

ตอบ 3

แนวคิด เพราะว่า $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, ... , $f(n+1) = 0$

เพราะฉะนั้น $2,3,4,\ldots,n+1$ เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$

ดังนั้น $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-(n+1))$

สรุป

$$\begin{aligned} f(1) &= (1-2)(1-3)(1-4)\ldots(1-(n+1)) \\ &= (-1)(-2)(-3)\ldots(-n) \\ &= (-1)^n(1)(2)(3)\ldots(n) \\ &= (-1)^n n! \end{aligned}$$

วิธีลัด $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

เป็นพหุนามดีกรี n มีรากทั้งหมด n ตัว ตามโจทย์กำหนดคือ

$2,3,4,\ldots,n+1$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$ ไม่ได้อีกแล้ว

ด้วยเหตุผลเพียงเท่านี้ก็จะตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปได้

คำถามเพิ่มเติม

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

1. ถ้า $f(1) = f(2) = f(3) = \ldots = f(n) = 0$

   แล้ว a_1 และ a_n มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ถ้า $f(-1) = f(2) = f(-3) = f(4) = \ldots = f((-1)^n n) =$

   แล้ว f(0) มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 จงเติมเฉพาะคำตอบ (10 ข้อ)

1. จากตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง

คะแนน	ความถี่
1	5
2	n

จงหาค่าของจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เป็นจำนวนตรรกยะ

ตอบ 5

แนวคิด

$$s^2 = \frac{\Sigma x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{(1)^2(5)+(2)^2(n)}{5+n} - \left[\frac{(1)(5)+(2)(n)}{5+n}\right]^2$$

$$= \frac{5+4n}{5+n} - \left(\frac{5+2n}{5+n}\right)^2$$

$$= \frac{(5+4n)(5+n) - (5+2n)^2}{(5+n)^2}$$

$$= \frac{25+25n+4n^2-25-20n-4n^2}{(5+n)^2} = \frac{5n}{(5+n)^2}$$

เพราะฉะนั้น $s = \frac{\sqrt{5n}}{5+n}$

โดยการลองแทนค่า $n = 1,2,3,4,...$

จะได้ $n = 5$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่ทำให้ s เป็นจำนวนตรรกยะ

๒. ให้ $\log 2 = 0.301$

ถ้า $2^{54} = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$

เมื่อ $1 \leqslant a_n \leqslant 9$ และ $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$

แล้ว ค่าของ $a_n + a_0$ เท่ากับเท่าไร

ตอบ $n = 16$, $a_0 = 4$ และ $a_{16} = 1$, $a_{16} + a_0 = 5$

แนวคิด $\log 2^{54} = 54 \log 2 = 54(0.301) = 16.254$

เพราะฉะนั้น $10^{16} < 2^{54} < 10^{17}$

$$1 < \frac{2^{54}}{10^{16}} < 10$$

เพราะว่า $2^{54} = a_n 10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$

และ $1 \leqslant a_n \leqslant 9$

เพราะฉะนั้น $n = 16$ และ

$$1 < a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \frac{a_{14}}{10^2} + \ldots + \frac{a_1}{10^{15}} + \frac{a_0}{10^{16}} < 10$$

เพราะว่า $\log 2^{54} = 16.254$

และ $2^{54} = 10^{16}\left[a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^{16}}\right]$

เพราะฉะนั้น $\log\left(a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^{16}}\right) = 0.254$

นั่นคือ $0 \leqslant \log\left(a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \ldots + \frac{a_0}{10^{16}}\right) < \log 2$

ซึ่งเป็นได้กรณีเดียวคือ $a_{16} = 1$

เพราะว่า $2^4 = 16$

และ $2^{54} = 2^{4(13)+2}$

$= (2^4)^{13}(2^2)$

$= (16)^{13}(4)$

เนื่องจาก $(16)^{13}$ จะมีหลักหน่วยเป็น 6

ดังนั้น 2^{54} จะมีหลักหน่วยเป็น 4

สรุป $a_0 = 4$

คำถามเพิ่มเติม

1. 4^{54} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก
2. 5^{125} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก
3. หลักหน่วยของ 4^{44} มีค่าเท่าใด

3. ในการเขียนจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 - 1000 จะต้องใช้ 0 ทั้งหมดกี่ตัว

ตอบ 192

แนวคิด จำแนกเป็น

<u>กรณีที่ 1</u> จำนวนเต็ม 1 หลัก ไม่มีการใช้เลข 0

<u>กรณีที่ 2</u> จำนวนเต็ม 2 หลัก 10,11,...,99

มีการใช้เลข 0 จำนวน 9 ตัวเพื่อเขียน 10,20,30,...,90

<u>กรณีที่ 3</u> จำนวนเต็ม 3 หลัก 100,101,102,...,999

กรณีที่ 3.1 จำนวน 0 ในหลักหน่วย $\square\ \square\ \boxed{0}$

ขั้นที่ 1 หลักสิบเขียนตัวเลขได้ 10 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักร้อยเขียนตัวเลขได้ 9 วิธี

รวมวิธีทั้งหมด (10)(9) = 90 วิธี

กรณีที่ 3.2 จำนวน 0 ในหลักสิบ $\square \ \boxed{0} \ \square$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วยเขียนเลขได้ 10 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักร้อยเขียนเลขได้ 9 วิธี

รวมวิธีทั้งหมด (10)(9) = 90 วิธี

รวมกรณีที่ 3 มีการใช้เลขศูนย์ 90+90 = 180 ตัว

<u>กรณีที่ 4</u> เลขศูนย์ 3 ตัวจาก 1000

สรุปจำนวนเลขศูนย์ที่ต้องใช้เท่ากับ 9+180+3 = 192

คำถามเพิ่มเติม

จงหาคำตอบของคำถามต่อไปนี้

1. จำนวนเลข 0 ในการเขียนตัวเลข 1 - 10,000
2. จำนวนเลข 9 ในการเขียนตัวเลข 1 - 1,000
3. จำนวนเลข 1 ในการเขียนตัวเลข 1,000 - 100,000
4. ตัวเลขโดดที่ใช้น้อยที่สุดในการเขียน 100 - 999
5. ในการเขียนเลข 1 ถึง 1000 ต้องเขียนตัวเลขทั้งหมดกี่ตัว
6. ในการเขียนเลข 100 ถึง 9999 ต้องเขียนตัวเลข 0,1,2,...,8,9 อย่างละกี่ตัว
7. ตัวเลขจำนวนเต็มในช่วง 1000 ถึง 99999 ที่ประกอบด้วยเลข 0 เพียงหนึ่งตัวเท่านั้นมีทั้งหมดกี่ตัว
8. ตัวเลขจำนวนเต็มในช่วง 100 ถึง 10000 ที่ไม่มีตัวเลข 0 ปรากฏอยู่ด้วยมีทั้งหมดกี่ตัว

4. ให้ $f : I \rightarrow I$ ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุกๆ $x, y \in I$

(ii) $(f \circ f)(1) \leqslant 100$

จำนวนฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติทั้ง 2 ข้อ ข้างต้นจะมีทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน

ตอบ 21

แนวคิด เพราะว่า $f(x+y) = f(x) + f(y)$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ ต้องมีสูตรเป็น $f(x) = kx$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ต่อไปเราจะใช้เงื่อนไข (ii) เพื่อหาค่า k ที่เป็นไปได้

$$\begin{aligned}(f \circ f)(1) &= f(f(1)) \\ &= f(k) \\ &= k^2\end{aligned}$$

พิจารณา $k^2 \leqslant 100$ จะได้ $k = -10, -9, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots, 10$

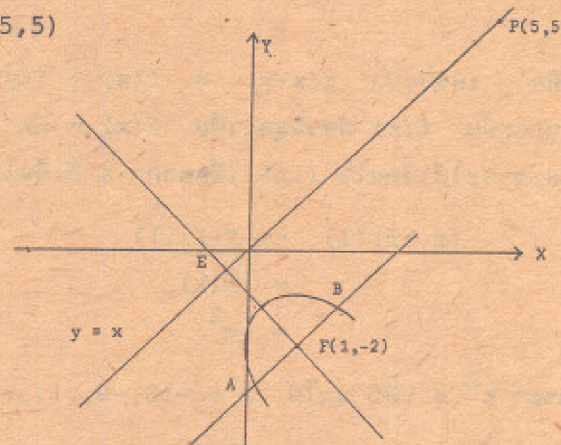
เพราะฉะนั้น $f(x) = kx$ มีได้ทั้งหมด 21 ฟังก์ชัน

5. ให้ F เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัดเป็น (1,-2) และ L เป็นเส้นตรงที่

มีสมการ $x-y = 0$ ให้ A,B เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของ latus rectum ของพาราโบลาที่มี F เป็นจุดโฟกัส และ L เป็นไดเรกตริกซ์ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABP จะเท่ากับกี่ตารางหน่วย เมื่อพิกัดของ P คือ (5,5)

ตอบ 4.5

แนวคิด



เพราะว่าความยาวของเส้นเรตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$ เมื่อ $|c|$ เป็นระยะทางจากจุดโฟกัส F ไปยังจุดยอดของพาราโบลา

ให้ E เป็นจุดตัดของแกนพาราโบลากับเส้นตรง L

ความยาวของ EF เท่ากับ $\dfrac{|(1)(1) - (1)(-2)|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $|c| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

ดังนั้นความยาว AB เท่ากับ $4\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}$

เพราะว่า P อยู่บนเส้นตรง L ดังนั้นส่วนสูงของสามเหลี่ยม ABP เมื่อให้ AB เป็นฐานเท่ากับความยาว EF ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

สรุปพื้นที่สามเหลี่ยม ABP $= \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{9}{2} = 4.5$

6. กำหนดสมการวงกลม

$$C_1 : x^2 + y^2 = 25$$

$$C_2 : (x-4)^2 + (y-8\sqrt{3})^2 = 25$$

ให้ O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ ถ้า A, B เป็นจุดตัดของวงกลม C_1 กับ C_2 พื้นที่ของสี่เหลี่ยม O_1AO_2B มีค่ากี่ตารางหน่วย

ตอบ วงกลมไม่ตัดกัน

แนวคิด C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (0,0) และมีรัศมี 5

C_2 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (4,8 3) และมีรัศมี 5

เพราะว่าระยะทางจาก (0,0) ไป $(4,8\sqrt{3})$ เท่ากับ

$$\sqrt{16+192} = \sqrt{208} = 14.42 > 10$$

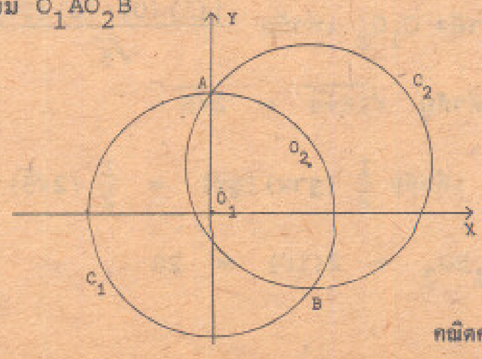
เพราะฉะนั้นวงกลม C_1 และ C_2 ไม่ตัดกัน

คำถามเพิ่มเติม

$$C_1 : x^2 + y^2 = 25$$

$$C_2 : (x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$$

จงหาพื้นที่สี่เหลี่ยม O_1AO_2B



C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (0,0) และมีรัศมี 5

C_2 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (4,2) และมีรัศมี 5

จากสมการ C_2 ; $x^2-8x+16+y^2-4y+4 = 25$

แทนค่า $x^2+y^2 = 25$;

$$
\begin{aligned}
-8x-4y+20 &= 0\\
4y &= 20-8x\\
y &= 5-2x
\end{aligned}
$$

แทนค่าในสมการ $x^2+y^2 = 25$;

$$
\begin{aligned}
x^2+(5-2x)^2 &= 25\\
x^2+4x^2-20x+25 &= 25\\
5x^2-20x &= 0\\
5x(x-4) &= 0\\
x &= 0,\ 4\\
y &= 5,-3
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นจุดตัดของ C_1 กับ C_2 คือ (0,5) และ (4,-3)

ให้ A(0,5) และ B(4,-3)

สมการเส้นตรงที่ผ่าน O_1O_2 คือ $\frac{y-0}{x-0} = \frac{2-0}{4-0}$

$$
\begin{aligned}
2y &= x\\
x-2y &= 0
\end{aligned}
$$

ระยะจาก A มายัง O_1O_2 เท่ากับ $\frac{|(1)(0)-(2)(5)|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

ระยะ O_1O_2 เท่ากับ $\sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

พื้นที่ $\Delta\, O_1O_2A$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$ (ฐาน)(สูง) $= \frac{1}{2}(2\sqrt{5})(2\sqrt{5}) = 10$

สรุปพื้นที่ $\square\, AO_1BO_2 = 2(10) = 20$

7. กำหนดให้ $\log 2 = 0.301$ และ $\log 3 = 0.4771$

ให้ $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าไร

ตอบ 106

แนวคิด

$$5^{-10} < 3^n < 5$$

$$\log (5^{-10}) < \log 3^n < \log 5$$

$$(-10) \log 5 < n \log 3 < \log 5$$

$$(-10)(1 - \log 2) < n(0.4771) < 1 - \log 2$$

$$(-10)(0.699) < n(0.4771) < 0.699$$

$$\frac{(-10)(0.699)}{0.4771} < n < \frac{0.699}{0.4771}$$

$$-14.65 < n < 1.465$$

เพราะฉะนั้น $X = \{-14,-13,-12,...,-1,0,1\}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในเซต X เท่ากับ

$$= (14)+(13)+...+(1)+(0)+(1)$$

$$= 106$$

คำถามเพิ่มเติม

จงหาผลบวกของสมาชิกในเซต X ต่อไปนี้

1. $X = \{n \in I \mid 4^{-20} < 8^n < 10\}$
2. $X = \{n \in I \mid 3^{-10} < 4^n < 5\}$
3. $X = \{n \in I \mid 5^{-5} < 2^n < 9\}$

8. ให้ $a = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$ จงหาค่าของ $\frac{180}{\pi}a$

ตอบ 45

แนวคิด

$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2}$$

$$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$$

$$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-(\frac{3}{4})(\frac{1}{7})}$$

$$= \tan^{-1}1$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\frac{180a}{\pi} = \frac{180}{\pi}(\frac{\pi}{4}) = 45$

๑. ให้ A คือเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+2 < 0$

B คือเซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{2x+1}{x-3} \geqslant 0$

จงหาเซต $(A\cup B)'$ ในรูปช่วง

ตอบ $(-\frac{1}{2}, 3]$

แนวคิด พิจารณาเซต A จาก

$$3x^2+5x+2 < 0$$
$$(3x+2)(x+1) < 0$$
$$-1 < x < -\frac{2}{3}$$

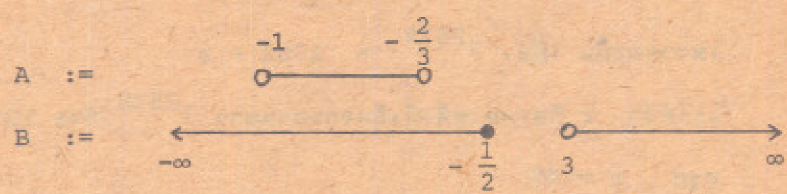
เพราะฉะนั้น $A = (-1, -\frac{2}{3})$

พิจารณาเซต B จาก $\dfrac{2x+1}{x-3} \geqslant 0$

จะได้ $x \leqslant -\frac{1}{2}$ หรือ $x > 3$

เพราะฉะนั้น $B = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (3, \infty)$

พิจารณาเส้นจำนวนจริง



$A\cup B = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (3, \infty)$

เพราะฉะนั้น $(A\cup B)' = (-\frac{1}{2}, 3]$

10. ถ้าเราเขียน

$$7^{2538} = 100x + r$$

เมื่อ x และ r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $r < 100$

ค่าของ r เท่ากับเท่าไร

ตอบ 49

แนวคิด $7^0 = 1$ $7^1 = 7$ $7^2 = 49$

$7^3 = 343$ $7^4 = 2401$

เพราะว่า จำนวนเต็มที่ลงท้ายด้วย 01 เมื่อยกกำลังด้วยจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ที่ได้ต้องลงท้ายด้วย 01 เสมอ

เพราะฉะนั้น $(7^4)^k = (2401)^k$ ลงท้ายด้วย 01 ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} 7^{2538} &= 7^{4(634)+2} \\ &= (7^4)^{634}\, 7^2 \\ &= (\ldots 01)(49) \\ &= (\ldots 49) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $7^{2538} = 100x + r$

จะได้ว่า r คือเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 7^{2538} ด้วย 100

สรุป $r = 49$

คำถามเพิ่มเติม

1. จงหาเศษที่เหลือจากการหาร 7^{2539} ด้วย 100

2. จงหาเศษที่เหลือจากการหาร 5^{125} ด้วย 100

3. จงหาเศษที่เหลือจากการหาร 25^{215} ด้วย 1000

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย (ThMo)

ฉบับที่ 1 : วันที่ 3 กันยายน 2537 เวลา 9.00 - 12.00 น.

คำชี้แจง 1. ข้อสอบฉบับที่ 1 นี้มี 4 ข้อๆ ละ 10 คะแนน

2. ทำลงในกระดาษคำตอบที่กำหนดให้

3. เริ่มทำข้อใหม่ให้ขึ้นหน้าใหม่

1. จงหาจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้สมการ

$$n = x^2-y^2+1994$$

มีคำตอบ x,y ที่เป็นจำนวนเต็ม

แนวคิด ในการหาจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $n = x^2-y^2+1994$ มีคำตอบ x,y ที่เป็นจำนวนเต็มนั้น ก่อนอื่นเราพิจารณาลักษณะของค่า $x^2-y^2 = k$ ว่า k มีค่าอยู่ในรูปใดได้บ้าง เช่น $k = 0$ มี $x = 0$ และ $y = 0$ เป็นคำตอบ

$k = 1$, $x^2-y^2 = 1$ มี $x = 1$, $y = 0$ เป็นคำตอบ

$k = -1$, $x^2-y^2 = -1$ มี $x = 0$, $y = 1$ เป็นคำตอบ

ด้วยลักษณะที่ $x^2-y^2 = -(y^2-x^2)$

ดังนั้นเราพิจารณาเฉพาะค่า $x^2-y^2 = k \geq 0$

กรณีที่ 1 $k = 1,3,5,...$ นั่นคือ k เป็นจำนวนเต็มคี่

ให้ $x-y = 1$

$x+y = k$

จะได้ $2x = 1+k$ เป็นจำนวนเต็มคู่

นอกจากนั้นหาก $k = 2(1+2m)$ แยกเป็นจำนวนคู่ A และ B ที่ทำให้

$$k = 2(1+2m) = AB$$

เพราะว่า 4 หาร AB ลงตัว

แต่ 4 หาร $k = 2+4m$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นเราไม่สามารถแยก $k = 2+4m$ ออกเป็น A และ B ที่เป็นจำนวนคู่พร้อมกัน หรือจำนวนคี่พร้อมกันที่ทำให้ $AB = k = 2+4m$

สรุป กรณี $k = 2,6,10,14,\ldots$, $k = 2+4m$, $m \in N \cup \{0\}$ จะทำให้ $x^2-y^2 = k$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า $x^2-y^2 = k$ มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $k = 1,3,5,7,9,\ldots$ หรือ $k = 0,4,8,12,16,\ldots$

เมื่อคิดกรณีที่ k เป็นจำนวนเต็มลบได้ด้วย ก็จะได้ว่า $x^2-y^2 = k$ มีคำตอบเป็นจำนวนเต็มเมื่อ $k = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots$

หรือ $k = 0, \pm4, \pm8, \pm12, \ldots$

สรุป n ที่ทำให้ $x^2-y^2 = n-1994$ มีคำตอบ x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มคือ $n-1994 = \pm1, \pm3, \pm5, \ldots$

หรือ $n-1994 = 0, \pm4, \pm8, \pm12, \ldots$

เราสามารถจัดรูป n ให้ดูง่ายขึ้นดังนี้

พิจารณา $n = 1994 \pm 1, 1994 \pm 3, 1994 \pm 5, \ldots$

$= 1994 + 1, 1994 + 3, 1994 + 5, \ldots$

หรือ $1994 - 1, 1994 - 3, 1994 - 5, \ldots$

$= \ldots, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, \ldots$

นั่นคือ n เป็นจำนวนคี่ทั้งหมด กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ n ที่ 4 หาร n แล้วเหลือเศษ 1 หรือเหลือเศษ 3

$x = \frac{1+k}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม และ $y = \frac{k-1}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ที่ทำให้ $x^2-y^2 = k$

สรุป เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มคี่ $x^2-y^2 = k$ มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 $k = 4,8,12,16,\dots$, $k = 4m$ เมื่อ $m \in N$

ให้ $x-y = 2$

$x+y = 2m$

จะได้ $2x = 2+2m$

$x = 1+m$ เป็นจำนวนเต็ม และ $y = m-1$ เป็นจำนวนเต็ม

ที่ทำให้ $x^2-y^2 = 4m = k$

สรุป เมื่อ $k = 4m$ และ m เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $x^2-y^2 = k$ มีคำตอบเป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 $k = 2,6,10,14,18,\dots$, $k = 2+4m$ เมื่อ $m \in N \cup \{0\}$

ต่อไปเราจะแสดงข้อพิสูจน์ว่า ไม่มี x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $x^2-y^2 = k$

ก่อนอื่นขอให้พิจารณาสมการ

$x+y = A$

$x-y = B$

จะได้ว่า $2x = A+B$ เป็นจำนวนคู่

และ $2y = A-B$ เป็นจำนวนคู่

นั่นคือ A และ B ต้องเป็นจำนวนคู่พร้อมกัน

หรือ A และ B ต้องเป็นจำนวนคี่พร้อมกัน

เนื่องจาก $k = 2+4m$

$= 2(1+2m)$ เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นเราไม่สามารถแยก $k = 2(1+2m)$ ออกเป็นจำนวนคี่ A และ B ที่ทำให้ $AB = k$

พิจารณา $n = 1994, 1994 \pm 4, 1994 \pm 8, 1994 \pm 12, \ldots$

$= \ldots, 1982, 1986, 1990, 1994, 1998, 2002, \ldots$

นั่นคือ n เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 2

หมายเหตุ ข้อสรุปอาจกล่าวว่า n ที่ทำให้สมการ $x^2-y^2 = n-1994$ ไม่มีคำตอบ x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มคือ จำนวนเต็มชนิดที่ 4 หาร n ลงตัว

2. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ

$\sin x$ และ $\cos x$ เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $\tan \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

แนวคิด สมมติ $\sin x$ และ $\cos x$ เป็นจำนวนตรรกยะ

พิจารณาสูตรตรีโกณมิติต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\
&= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \sin^2 A \cdot \frac{1}{\cos^2 A} \\
&= \left(\frac{1-\cos 2A}{2}\right)\left(\frac{2}{1+\cos 2A}\right) \\
&= \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A} \\
&= \frac{(1-\cos 2A)}{(1+\cos 2A)}\frac{(1+\cos 2A)}{(1+\cos 2A)} \\
&= \frac{1-\cos^2 2A}{(1+\cos 2A)^2} \\
&= \frac{\sin^2 2A}{(1+\cos 2A)^2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\tan A = \dfrac{\sin 2A}{1 + \cos 2A}$

นั่นคือ $\tan \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

เพราะว่า $\sin x$ และ $1 + \cos x$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\tan \dfrac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

สมมติ $\tan \dfrac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะว่า

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2\sin A \cos A \\ &= \frac{2\sin A}{\cos A}\cos^2 A \\ &= \frac{2\tan A}{\sec^2 A} \\ &= \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sin x = \dfrac{2\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$

เพราะว่า $2\tan \dfrac{x}{2}$ และ $1 + \tan^2 \dfrac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\sin x$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะว่า

$$\begin{aligned}\cos 2A &= \frac{\sin 2A}{\tan 2A} \\ &= \left(\frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}\right)\left(\frac{1 - \tan^2 A}{2\tan A}\right) \\ &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \dfrac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

เพราะว่า $1 - \tan^2 \frac{x}{2}$ และ $1 + \tan^2 \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\cos x$ เป็นจำนวนตรรกยะ

หมายเหตุ สูตร $\tan \frac{x}{2} = \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$

$$\sin x = \frac{2 \tan (\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

$$\cos x = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$$

เป็นเอกลักษณ์ตรีโกณมิติที่นักเรียนจำได้ก็จะเป็นประโยชน์อย่างมาก

3. ให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกและ

$f : I^+ \to I^+$ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติ

$f(f(m) + n) = m + n$ ทุกๆ $m, n \in I^+$

1. จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1

2. จงพิสูจน์ว่า $f(n) = n$ ทุกๆ $n \in I^+$

(ข้อแนะนำ : ในการพิสูจน์ว่า $f(n) = n$ ทุกๆ $n \in I^+$ ให้พิสูจน์ดังนี้

(i) แสดงว่า $f(1) = 1$

และ (ii) ถ้า $f(k) = k$ แล้ว $f(k+1) = k+1$ สำหรับทุกๆ $k \in I^+$

จาก (i) และ (ii) สรุปได้ว่า $f(n) = n$ ทุกๆ $n \in I^+$)

แนวคิด

(1) สมมติ $f(x) = f(y)$

จะได้ $f(x) + 1 = f(y) + 1$

$f(f(x) + 1) = f(f(y) + 1)$

จากนิยามของ f จะได้ $x + 1 = y + 1$

นั่นคือ $x = y$

สรุป f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1

(2) การแสดงว่า $f(1) = 1$

สมมติ $f(1) \neq 1$

เพราะว่า $f : I^+ \to I^+$ เพราะฉะนั้น $f(1) > 1$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $f(1) = k+1$

เพราะฉะนั้น $f(1) = k+1$

$= f(f(k) + 1)$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันชนิด 1-1

เพราะฉะนั้น $1 = f(k) + 1$

ซึ่งทำให้ $f(k) = 0$

เป็นข้อขัดแย้งกับ $f : I^+ \to I^+$

สรุป $f(1) = 1$ เท่านั้น

(3) การแสดงว่า ถ้า $f(k) = k$ แล้ว $f(k+1) = k+1$ สำหรับทุกๆ $k \in I^+$

ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวก

สมมติ $f(k) = k$

เพราะว่า $f(k+1) = f(f(k) + 1)$

เพราะฉะนั้น $f(k+1) = k+1$

สรุป $f(n) = n$ ทุก $n \in I^+$

4. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\hat{A} = 2\hat{B}$ จงพิสูจน์ว่า

$a^2 = b(b+c)$ เมื่อ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ ตามลำดับ

แนวคิด ให้ k เป็นค่าคงตัวที่ทำให้

$$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c} = k$$

ดังนั้น $\sin\hat{A} = ak$ และ $\sin\hat{B} = bk$

จาก $\hat{A} = 2\hat{B}$ จะได้ $\sin\hat{A} = \sin 2\hat{B} = 2\sin\hat{B}\cos$

$$ak = 2bk\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$a^2c = a^2b + bc^2 - b^3$$

$$a^2c - a^2b = b(c^2-b^2)$$

$$a^2(c-b) = b(c-b)(c+b)$$

$$a^2 = b(c-b) \qquad \text{เมื่อ } c-b \neq 0$$

ถ้า $c-b = 0$ จะได้ $b = c$ นั่นคือ $\hat{B} = \hat{C}$

จาก $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^\circ$

$$2\hat{B}+\hat{B}+\hat{B} = 180^\circ$$

$$\hat{B} = 45^\circ$$

ดังนั้น $C = 45^\circ$ และ $A = 90^\circ$

นั่นคือ $a^2 = b^2+c^2 = b^2+bc = b(b+c)$

สรุป ถ้า $\hat{A} = 2\hat{B}$ แล้ว $a^2 = b(b+c)$

คณิตศาสตร์โอลิมปิก 2537

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย (ThMo)
ฉบับที่ 2 : วันที่ 4 กันยายน 2537 เวลา 9.00 - 12.00 น.

คำชี้แจง 1. ข้อสอบฉบับที่ 2 นี้มี 4 ข้อๆ ละ 10 คะแนน
2. ทำลงในกระดาษคำตอบที่กำหนดให้
3. เริ่มทำข้อใหม่ให้ขึ้นหน้าใหม่

1. จงพิสูจน์ว่า ทุกๆ ครั้งที่เลือกจำนวนเต็มมา 3 จำนวนที่ต่างกัน จะมีจำนวนเต็ม 2 จำนวน ใน 3 จำนวนนี้เสมอเรียกว่า a,b ซึ่ง $a \neq b$ และ $a^3b - ab^3$ มี 10 เป็นตัวประกอบ

แนวคิด เพราะว่า $10 = (2)(5)$ ดังนั้นเราจำแนกตัวประกอบของ $a^3b - ab^3$ เป็น 2 กับ 5

(1.1) การพิสูจน์ว่า $a^3b - ab^3$ มี 2 เป็นตัวประกอบ

เพราะว่า $a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2)$

$$= ab(a+b)(a-b)$$

พิจารณาค่า a และ b จำแนกตามจำนวนเต็มคู่หรือจำนวนเต็มคี่

a	b	ผลที่ได้
คู่	คู่	2 หาร a ลงตัว
คู่	คี่	2 หาร a ลงตัว
คี่	คู่	2 หาร b ลงตัว
คี่	คี่	2 หาร a+b ลงตัว

สรุป ทุกกรณีของค่า a และ b 2 หาร ab(a+b)(a-b) ลงตัว

นั่นคือ 2 เป็นตัวประกอบของ $a^3b - ab^3$

(1.2) การพิสูจน์ว่า $a^3b - ab^3$ มี 5 เป็นตัวประกอบ

ในการพิจารณาว่า $a^3b - ab^3$ มี 5 เป็นตัวประกอบนั้น เราสามารถพิจารณาเฉพาะหลักหน่วยของ a และ b ก็เป็นการเพียงพอ
ดังนั้นเราจึงพิจารณาเลือกจำนวนเต็มที่เป็นเลขโดด 3 ตัวจาก 0,1,2,...,9
และจะแสดงว่า มี a และ b จาก 3 ตัวที่เลือกมานี้ มี 5 เป็นตัวประกอบของ $a^3b - ab^3$
สิ่งที่เราจะแสดงต่อไปคือ

ทุกจำนวนเต็ม $x,y,z \in \{0,1,2,...,9\}$ มี $a,b \in \{x,y,z\}$, $a \neq b$ ที่ทำให้ $a^3b - ab^3$ มี 5 เป็นตัวประกอบ
เราจะจำแนกเป็น 3 กรณีคือ

1. $0 \in \{x,y,z\}$ เลือก $a = 0$
2. $5 \in \{x,y,z\}$ เลือก $a = 5$
3. $0,5 \notin \{x,y,z\}$ เราจำแนกต่อไปอีก 5 กรณีดังนี้

<u>กรณีที่ 3.1</u> $\{x,y,z\}$ มีเลขคู่ 3 ตัว
มีวิธีต่างๆ ที่เป็นไปได้คือ

x, y, z	a	b
2, 4, 6	4	6
2, 4, 8	2	8
2, 6, 8	2	8
4, 6, 8	4	6

<u>กรณีที่ 3.2</u> {x,y,z} มีเลขคู่ 2 ตัว

ให้ x และ y เป็นเลขคู่ z เป็นเลขคี่

x, y	z	a	b	
2, 4	1	1	4	
	3	2	3	
	7	2	7	
	9	4	9	
2, 6	1	1	6	
	3	2	3	
	7	2	7	
	9	6	9	
2, 8		2	8	ทุกค่า z = 1,3,7,9
4, 6		4	6	ทุกค่า z = 1,3,7,9
4, 8	1	1	4	
	3	3	8	
	7	7	8	
	9	4	9	
6, 8	1	1	6	
	3	3	8	
	7	7	8	
	9	6	9	

กรณีที่ 3.3 {x,y,z} มีเลขคู่ 1 ตัวเท่านั้น

ให้ x เป็นเลขคู่ และ y,z เป็นเลขคี่

x	y , z	a , b
2	1 , 3	2 , 3
	1 , 7	2 , 7
	1 , 9	1 , 9
	3 , 7	3 , 7
	3 , 9	2 , 3
	7 , 9	2 , 7
4	1 , 3	1 , 4
	1 , 7	1 , 4
	1 , 9	1 , 9
	3 , 7	3 , 7
	3 , 9	4 , 9
	7 , 9	4 , 9

x	y , z	a , b
6	1 , 3	1 , 6
	1 , 7	1 6
	1 , 9	1 6
	3 , 7	3 7
	3 , 9	6 9
	7 , 9	6 9
8	1 , 3	3 , 8
	1 , 7	7 , 8
	1 , 9	1 , 9
	3 , 7	3 , 7
	3 , 9	3 , 8
	7 , 9	7 , 8

กรณีที่ 3.4 {x,y,z} ไม่มีสมาชิกเป็นเลขคู่

x , y , z	a , b
1 , 3 , 7	3 , 7
1 , 3 , 9	1 , 9
1 , 7 , 9	1 , 9
3 , 7 , 9	3 , 7

จากทุกกรณี 1, 2 และ 3 สรุปได้ว่า

ทุกจำนวนเต็ม $x,y,z \in \{0,1,...,9\}$ จะต้องมี $a,b \in \{x,y,z\}$

ที่ทำให้ $a^3b - ab^3$ มี 5 เป็นตัวประกอบ

นั่นคือ ทุกจำนวนเต็ม x,y,z จะต้องมี $a,b \in \{x,y,z\}$, $a \neq b$ ที่ทำให้

$a^3b - ab^3$ มี 5 เป็นตัวประกอบ

เนื่องจากทั้ง 2 และ 5 เป็นจำนวนเฉพาะเมื่อ $2|(a^3b - ab^3)$ และ

$5|(a^3b - ab^3)$

จะได้ว่า $10|(a^3b - ab^3)$

เพราะฉะนั้นจากการพิสูจน์ (1.1) และ (1.2) เราสรุปได้ว่า

$a^3b - ab^3$ มี 10 เป็นตัวประกอบ

2. ให้ $\{E,F,I,N,O,R,S,T,X,Y\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ถ้า
$$\begin{array}{r} FORTY \\ TEN^+ \\ TEN^+ \\ \hline SIXTY \\ \hline \end{array}$$

จงหาว่า FORTY , TEN และ SIXTY แทนจำนวนใดได้บ้าง

ตอบ $(E,F,I,N,O,R,S,T,X,Y) = (5,2,1,0,9,7,3,8,4,6)$

แนวคิด จากโจทย์ตัวอักษรหนึ่งตัวมีค่าเป็นตัวเลขได้หนึ่งค่า

พิจารณาสมการพบว่า $F+1 = S$ แน่นอน

และค่าของ I พิจารณาได้ 2 กรณีคือ $I = 0$ หรือ $I = 1$

กรณีที่ 1 เมื่อ $I = 0$

จะได้ว่า $Y+N+N = Y$ หรือ $10+Y$ นั่นคือ $N = 5$

และเมื่อพิจารณาในหลักที่สองของการบวกพบว่า

$T+E+E+1 = T$ หรือ $10+T$ หรือ $20+T$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 $I = 0$ ไม่ได้

กรณีที่ 2 เมื่อ $I = 1$

จะได้ว่า $O = 9$ และ $R+T+T > 20$

เนื่องจาก $N = 5$ ไม่ได้ ดังนั้น $N = 0$ เท่านั้น

ต่อไปพิจารณาการบวกในหลักที่ 2

$T+E+E = T$ หรือ $10+T$

ดังนั้น $E = 5$ เท่านั้น

ต่อไปพิจารณาการบวกในหลักที่ 3 ซึ่งต้องมีการทด 1 เพิ่มเข้าไปด้วยจาก
หลักที่ 2

จะได้สมการ

$$1+R+T+T = 20+X$$

สรุปขณะนี้ $\{Y,T,R,X,F,S\} = \{2,3,4,6,7,8\}$

ต้องสอดคล้องเงื่อนไข $F+1 = S$

$$1+R+2T = 20+X$$

ซึ่งเป็นไปได้กรณีเดียวคือ $F = 2$, $S = 3$, $R = 7$, $T = 8$,
$X = 4$ และ $Y = 6$

จากการจำแนกตามกรณีข้างต้นจะได้ว่า มีเพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ

$E = 5$, $F = 2$, $I = 1$, $N = 0$, $O = 9$,

$R = 7$, $S = 3$, $T = 8$, $X = 4$, $Y = 6$

3. กำหนดให้ a_i เป็นเลขโดดสำหรับทุก $i = 0,1,2,...,k$ และ $m = a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $k+1$ หลักในระบบฐาน 10 จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $0 < q < 17$ ที่ทำให้ $17|m$ ก็ต่อเมื่อ $17|(a_k a_{k-1} ... a_1 a_0 + (a_0 \times q))$

แนวคิด เลือก $q = 12$

$17|m$ ก็ต่อเมื่อ $17|a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0$

ก็ต่อเมื่อ $17|(a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0 + (a_0 \times 17 \times 7))$

ก็ต่อเมื่อ $17|((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) \times 10 + a_0 + (a_0 \times 17 \times 7))$

ก็ต่อเมื่อ $17|((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) \times 10 + a_0 (17 \times 7 + 1))$

ก็ต่อเมื่อ $17|((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) \times 10 + a_0 (120))$

ก็ต่อเมื่อ $17|((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) \times 10 + (a_0 \times q \times 10))$

ก็ต่อเมื่อ $17|(((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) + (a_0 \times q)) \times 10)$

ก็ต่อเมื่อ $17|((a_k a_{k-1} ... a_2 a_1) + (a_0 \times q))$

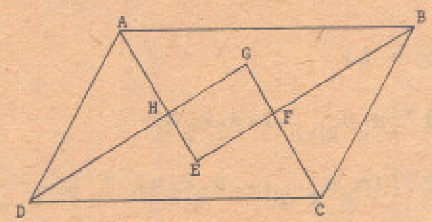
หมายเหตุ เพราะว่า ห.ร.ม. $(17,10) = 1$

สรุป มี $q = 12$ ที่ทำให้

$17|m$ ก็ต่อเมื่อ $17|(a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 + (a_0 \times q))$

4. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ตัดกันที่

E และเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{C}$ และ $\hat{D}$ ตัดกันที่จุด G และตัดเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{B}$ และ $\hat{A}$ ที่จุด F และ H ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม GE = HF



แนวคิด พิจารณาสามเหลี่ยม ADH และ BFC

$$B\hat{A}H + A\hat{D}C = 180^\circ$$
$$2H\hat{A}D + 2A\hat{D}H = 180^\circ$$
$$H\hat{A}D + A\hat{D}H = 90^\circ$$

เพราะฉะนั้น $A\hat{H}D = 180^\circ - H\hat{A}D - A\hat{D}H = 90^\circ$

ในทำนองเดียวกัน $B\hat{F}C = 90^\circ$ ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $G\hat{H}E = E\hat{F}G = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น สี่เหลี่ยม EFGH มีมุม $G\hat{H}E = E\hat{F}G = 90^\circ$

พิจารณาสามเหลี่ยม ABE และ DCG โดยใช้เหตุผลอีกแบบ

$$D\hat{G}C = 180^\circ - G\hat{D}C - D\hat{C}G = 180^\circ - \frac{1}{2}A\hat{D}C - \frac{1}{2}D\hat{C}B$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(A\hat{D}C + D\hat{C}B)$$
$$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ) = 90^\circ$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $A\hat{E}B = 90^\circ$

สรุป สี่เหลี่ยม EFGH มีมุมภายในทุกมุมเป็นมุมฉาก

นั่นคือ EFGH เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะฉะนั้น GE = HF

โจทย์จากปก

เนื้อหาของโจทย์จากปกในเล่มนี้ขอนำเสนอเรื่องเกี่ยวกับเทคนิคการจำค่า log 2 ถึง log 9 เพื่อนำไปเป็นประโยชน์ในการทำข้อสอบ

เพื่อให้เห็นประโยชน์ของการประมาณค่าของ log 2 ถึง log 9 ขอใช้ปัญหาในการเปรียบเทียบค่าว่า ค่าใดมากกว่ากันระหว่าง $\log_4 5$ กับ $\log_5 6$

สิ่งที่เราอาจคิดในใจได้คือ $\log_4 5 > 1$ และ $\log_5 6 > 1$ แต่ถ้าเราจำค่าประมาณของ log 4, log 5 และ log 6 ก็จะสามารถเปรียบเทียบได้ว่าใครมีค่ามากกว่ากัน ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะ log ของ 1,2,3,...,10

ก่อนอื่นขอเริ่มที่ log 1 = 0 และ log 10 = 1 เพราะหาค่าง่ายที่สุด

ต่อไป log 2 = 0.30103 ซึ่งสามารถจำได้โดยง่ายเมื่อเรานึกถึงใบหน้าของคน เช่น กรรมการคุมสอบโดยสังเกตที่ หู(3) ตา(0) จมูก(1) ตา(0) หู(3)

เมื่อได้ log 2 แล้วก็จะได้ค่าต่อไปนี้

$$\log 4 = 2\log 2 = 0.60206$$
$$\log 8 = 4\log 2 = 0.90309$$
$$\log 5 = 1-\log 2 = 0.69897$$

ต่อไปเราจะหา $\log 9$ เนื่องจาก $\log 8 < \log 9 < \log 10$

ดังนั้น $0.90309 < \log 9 < 1$

เพราะว่าเราสนใจแค่ค่าประมาณเท่านั้นจึงเลือก

$$\log 9 = \frac{0.90309 + 1}{2} = 0.951545$$

ผลที่ตามมาคือ $\log 3 = \frac{\log 9}{2} = 0.47577$

$$\begin{aligned} \text{และ} \quad \log 6 &= \log 2 + \log 3 \\ &= 0.3103 + 0.47577 \\ &= 0.7768 \end{aligned}$$

ต่อไปเหลือตัวสุดท้ายคือ $\log 7$ เราจะประมาณค่าโดย

$$\frac{\log 6 + \log 8}{2}$$

ดังนั้น $\log 7 = \frac{0.7768 + 0.90309}{2} = 0.839945$

จากค่าประมาณ

$$\begin{aligned} \log_4 5 &= \frac{\log 5}{\log 4} \cong \frac{0.69897}{0.60206} \\ &= \frac{0.7}{0.6} \\ &= \frac{7}{6} = 1.167 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_5 6 &= \frac{\log 6}{\log 5} \cong \frac{0.7768}{0.69897} \\ &= \frac{0.8}{0.7} \\ &= \frac{8}{7} = 1.1428 \end{aligned}$$

สรุป $\log_4 5 > \log_5 6$

หมายเหตุ ค่าจริงจากเครื่องคิดเลข $\log_4 5 = 1.1609642$,
$\log_5 6 = 1.11328$

ตารางเปรียบเทียบค่าจริงกับค่าประมาณของ

ค่าจริง	ค่าประมาณ
log 1 = 0	0
log 2 = 0.30103	0.30103
log 3 = 0.4771212	0.47577
log 4 = 0.6020599	0.60206
log 5 = 0.69897	0.69897
log 6 = 0.7781512	0.7768
log 7 = 0.845098	0.839945
log 8 = 0.9030899	0.90309
log 9 = 0.9542425	0.951545
log 10 = 1	1

ตัวอย่างข้อสอบที่เรานำประโยชน์จากการจำค่า log 2 ถึง log 9 ไปใช้ได้ เช่น

ตัวอย่างที่ 1 จากข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2534

ถ้า x และ y สอดคล้องสมการ

$$\log_k x \log_5 k = 1 \quad \text{เมื่อ } k > 1$$

และ $10^{2y} = 625$

ตามลำดับแล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $5 < x+y < 7$
2. $3 < x-y < 4$
3. $0 < xy < 10$
4. $0 < \frac{x}{y} < \frac{1}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด $\log_k x \cdot \log_5 k = 1 \quad , \quad k > 1$

$$\frac{\log x}{\log k} \cdot \frac{\log k}{\log 5} = 1$$

$$\log x = \log 5$$

$$x = 5$$

จาก $10^{2y} = 625$

$$2y = \log 625$$

$$y = \frac{1}{2} \log 625$$

$$= \log (625)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log 25$$

$$= 2 \log 5$$

เพราะว่าเราจำค่า log 5 ได้ว่า $\log 5 = 0.7$

เพราะฉะนั้น $y = 2(0.7) = 1.4$

นั่นคือ $x+y = 6.4$

$$x-y = 3.6$$

$$xy = 7$$

$$\frac{x}{y} = 3.6$$

สรุปตัวเลือก 4. เป็นตัวเลือกที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 2 ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ ปี 2531

กำหนดให้ $A = 5^{(5^5)}$, $B = 5^{55}$

$C = (55)^5$, $D = ((55)^5)^5$

จงเขียนจำนวนจากน้อยไปมาก

ตอบ $C < B < D < A$

แนวคิด พิจารณาค่า log ของ A,B,C และ D

$$\begin{aligned}
\log A &= \log 5^{(5^5)} = 5^5 \log 5 \\
&= 3125 \log 5 \\
&\cong 3125\,(0.7) \\
&= 2185.4 \\
\log B &= \log 5^{55} = 55 \log 5 \\
&\cong 55\,(0.7) \\
&= 38.5 \\
\log C &= \log (55)^5 = 5 \log 55 \\
&\cong 5\,(\log 5 + \log 11) \\
&= 5\,(0.7+1) \\
&= 8.5
\end{aligned}$$

$$\log D = \log ((55)^5)^5 = 25 \log 55$$

$$\approx 25(1.7)$$

$$= 42.5$$

ดังนั้น $\log C < \log B < \log D < \log A$

เพราะฉะนั้น $C < B < D < A$

ตัวอย่างที่ 3 ค่าของจำนวนในตัวเลือกใดมีค่ามากที่สุด

1. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ 2. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}$

3. $(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$ 4. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{8}}}$

ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาแต่ละตัวเลือกดังนี้

1. ให้ $x = (\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$

$$\log x = \sqrt{3}\log\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2$$

$$= \frac{(1.732)(0.30103)}{2}$$

$$= 0.26$$

2. ให้ $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}$

$$\log y = \frac{-1}{\sqrt{3}}\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\right)\log 2$$

$$= \frac{0.30103}{(1.732)(2)}$$

$$= 0.09$$

3. ให้ $z = (\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$

$$\log z = \sqrt{2} \log \sqrt{8}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \log 8$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{2} \log 2$$

$$= \frac{3(1.414)}{2} (0.30103)$$

$$= 0.638$$

4. ให้ $w = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{\frac{-1}{\sqrt{8}}}$

$$\log w = -\frac{1}{\sqrt{8}} \log \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= (-\frac{1}{\sqrt{8}})(-\frac{1}{2}) \log 2$$

$$= \frac{0.30103}{4\sqrt{2}}$$

$$= 0.053$$

เพราะฉะนั้น $\log w < \log y < \log x < \log z$

นั่นคือ $w < y < x < z$

สรุป $(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$ มีค่ามากสุด

ตัวอย่างที่ 4 ข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. ปี 2528

เซตคำตอบของสมการ $\log(x^2-3x-4) - \log(x+1) = 1$

เป็นเซตเดียวกับเซตคำตอบของสมการในข้อใด

1. $(x-5)(x+14) = 0$
2. $(x-14)(x+1) = 0$
3. $(x-14)(x^2+1) = 0$
4. $(x+14)(x-1) = 0$

ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาโดยการแทนค่าจะดีกว่าเช่น

จากตัวเลือก 1. เอา $x = 5$ แทนค่าในโจทย์

$\log(5^2-3(5)-4) - \log(5+1) = \log 6 - \log 6 = 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้

จากตัวเลือก 2. เพราะว่า $\log 0$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = -1$ ไม่เป็นคำตอบแน่นอน

เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ลองข้ามไปตัวเลือก 4. บ้าง เมื่อแทนค่า $x = 1$ ในโจทย์

จะได้ $\log(1-3-4)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้อีก

เหลือตัวเลือก 3. ข้อเดียวเลือกได้เลย

เกี่ยวกับผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การศึกษา

วท.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานที่ทำ

รองศาสตราจารย์ ประจำภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2528-2537)

อาจารย์สอนเสริมมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2526-2537)

ผลงานตำรา

- พีชคณิตเชิงเส้น (2537)
- ภาษาเบสิก (2531)
- คณิตศาสตร์ขั้นสูง (2532)
- ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมตริกซ์ (2537)
- คณิตศาสตร์ปรนัย

หนังสือในชุดของ

คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

เล่มที่ 1 คณิตศาสตร์ กข. ปี 2537

เล่มที่ 2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2537

เล่มที่ 3 ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ของ
สมาคมคณิตศาสตร์ ฯ ปี 2537

เล่มที่ 4 ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์
ครั้งที่ 2 ปี พ.ศ.2536

เล่มที่ 5 ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์
โอลิมปิกรอบคัดเลือก ปี 2537

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ถนนพญาไท
กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980-2, 2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5
ISBN 974-584-758-5
9 789745 847583
C112
4000
20.00 บาท