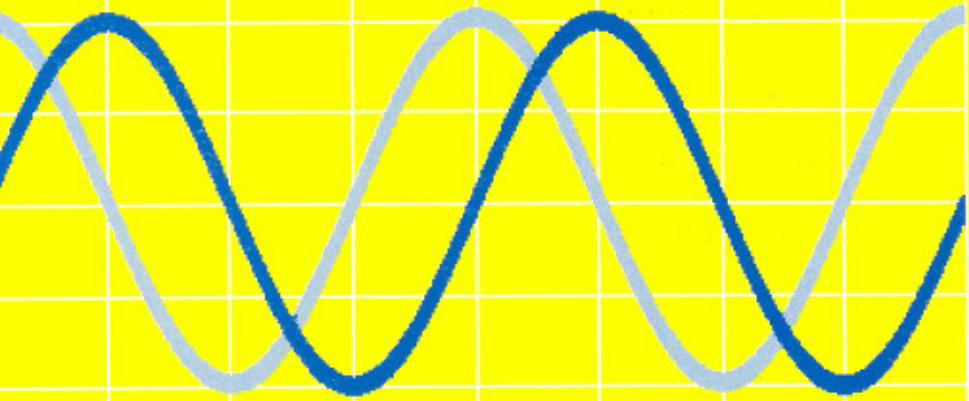
คณิตศาสตร์ปรนัย
เฉลยข้อสอบ ENTRANCE

วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก



รวมข้อสอบประจำปี
- คณิตศาสตร์ กข. 2538
- คณิตศาสตร์ ก. 2538
- คณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2538
- วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เล่มที่ 6
ISBN 974-632-413-6

โปรดอ่านตัวอย่างการตัดตัวเลือกที่ปกด้านในก่อนตัดสินใจ

ตัวอย่างการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ก. 2538 ข้อ 38

ให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า 7 หาร a เหลือเศษ 1

7 หาร b เหลือเศษ 3 และ 7 หาร c เหลือเศษ 5

แล้ว 7 หาร a(b+c) เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2

3. 4 4. 6

ตอบ 1.

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ a,b,c

ดังนั้นเลือก a,b,c ตามเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

a = 1 หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

b = 3 หารด้วย 7 เหลือเศษ 3

c = 5 หารด้วย 7 เหลือเศษ 5

จะได้ a(b+c) = (1)(3+5) = 8

เพราะฉะนั้น a(b+c) หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้

สรุปตัวเลือก 1 ถูกต้อง

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 6

วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

รวมข้อสอบประจำปี

- คณิตศาสตร์ กข. 2538
- คณิตศาสตร์ ก. 2538
- คณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2538
- วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คำนำ

คณิตสาสตร์ปรนัย เล่มที่ 6 **วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก** ผมได้จัดทำในลักษณะรวมข้อสอบประจำปี โดยนำข้อสอบ

คณิตศาสตร์ กข. 2538

คณิตศาสตร์ ก. 2538

คณิตศาสตร์(ม.ปลาย) ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ปี 2538

วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

มารวบรวมและเฉลยไว้ในเล่มเดียวกัน รูปแบบการเฉลยเหมือนเดิมคือครบทุกวิธีเท่าที่จะทำได้ นั่นคือ วิธีจริง, วิธีลัด และใช้การตัดตัวเลือก ทำให้หนังสือเล่มนี้มีเนื้อหามาก มีผลทำให้ราคาของหนังสือสูงขึ้นด้วย อย่างไรก็ตามผมจะปรับปรุงคุณภาพของหนังสือแนวนี้ให้มากขึ้นเพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านให้มากที่สุด

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 8 จะเป็นการนำข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. และคณิตศาสตร์ ก. มาทำการเฉลยในแนวทางตัดตัวเลือกเปรียบเทียบกับวิธีจริง ซึ่งคาดว่าจะเสร็จประมาณเดือน ธันวาคม 2538

สุดท้ายขอขอบคุณผู้อ่านทุกท่านที่ติดตามผลงานมาตลอด

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 6) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

1. เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. 2538 คณิตศาสตร์ กข. 2538
คณิตศาสตร์(ม.ปลาย) ของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2538
วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

ISBN 974-632-413-6

สงวนลิขสิทธิ์

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2000 เล่ม พ.ศ. 2538

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980-2,2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2153612,2153626

สารบัญ

คณิตศาสตร์ กข. 2538	1
คณิตศาสตร์ ก. 2538	97
ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ (ม. ปลาย) ของสมาคมคณิตศาสตร์ แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ พ.ศ. 2538	177
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 3	275

ผลงานเฉลยข้อสอบของผู้เขียนในชุด

คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

เล่มที่ 1	เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ กข.	พ.ศ. 2537
เล่มที่ 2	เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก.	พ.ศ. 2537
เล่มที่ 3	เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์ ฯ	พ.ศ. 2537
เล่มที่ 4	เฉลยข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2	พ.ศ. 2536
เล่มที่ 5	เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกรอบคัดเลือก	พ.ศ. 2537
เล่มที่ 6	เฉลยข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ครั้งที่ 3	พ.ศ. 2537
	เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ของ สมาคมคณิตศาสตร์ ฯ	พ.ศ. 2538
	เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ กข.	พ.ศ. 2538
	เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก.	พ.ศ. 2538
เล่มที่ 7	*คู่มือตัดตัวเลือก สำหรับคณิตศาสตร์ ม.ปลาย*	

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์ กข. 2538

วันพุธที่ 5 เมษายน 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ให้ p,q และ r เป็นประพจน์

ถ้า $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\sim p \vee q$
2. $p \rightarrow \sim r$
3. $p \wedge q$
4. $q \leftrightarrow \sim r$

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p และ q เป็นประพจน์โดยที่ $p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว $p \vee \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์ด้วย

ข. นิเสธของข้อความ $\exists x [x < 6] \rightarrow \forall x [x > 8]$ คือ $\forall x [x \geq 6] \wedge \exists x [x \leq 8]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก
2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

3. จากการสำรวจผู้ฟังเพลงจำนวน 180 คน พบว่า มีผู้ชอบเพลงไทยสากล 95 คน เพลงไทยเดิม 92 คน เพลงลูกทุ่ง 125 คน เพลงไทยสากลและเพลงไทยเดิม 52 คน เพลงไทยสากลและเพลงลูกทุ่ง 43 คน เพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 57 คน และทั้ง 180 คน จะชอบฟังเพลงอย่างน้อยหนึ่งประเภทในสามประเภทดังกล่าวข้างต้น

จำนวนคนที่ชอบฟังเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 25
3. 30
4. 35

4. ถ้า $A = \{0,1\}$ และ $B = \{0,\{1\},\{0,1\}\}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A \in P(B)$
2. $\{1\} \in P(A) \cap P(B)$
3. จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B) = 2$
4. จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B) = 8$

5. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

แล้ว โดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. ϕ
2. $(-\infty,2]$
3. $(-3,2)$
4. $(-3,2]$

6. ถ้า $r = \{(x,y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 2x\}$ แล้วเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0,2]$
2. $[0,4]$
3. $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$
4. $(-\infty,0] \cup [4,\infty)$

7. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$

และ a เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ S แล้ว a^2+1 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 5
3. 10
4. 26

8. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $(\frac{2i}{1+i})^{12}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -16

3. 16 4. 64

9. ให้ m,x,y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

ถ้า $\frac{x}{y} > z > 0$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\frac{y}{x} < \frac{1}{z}$ 2. $x > yz$

3. $\frac{my}{x} < mz$ 4. $\frac{mx}{y} > mz$

10. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $x-a$ หาร x^3+2x^2-5x-2 เหลือเศษ 4 แล้ว ผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6 2. -2

3. 2 4. 6

11. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ $(3,2)$ และ $(3,-4)$ โฟกัสที่ $(3,-6)$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$ 2. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

3. $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$ 4. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

12. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,6)$ และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2-4y-4x = 8$

1. $3x-4y+21 = 0$ 2. $4x-3y+14 = 0$

3. $7x+2y-19 = 0$ 4. $2x+7y-44 = 0$

13. เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$

เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-4,0)$
2. $(-3,1)$
3. $(-2,2)$
4. $(-1,3)$

14. กำหนดให้ $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

ค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-12\sqrt{3}}{25}$
2. $\frac{-6\sqrt{3}}{25}$
3. $\frac{6\sqrt{3}}{25}$
4. $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

15. ค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $9^{x} - 3^{x+\log_3 2} = -1$

อยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $(-3,-1)$
2. $(-1,1)$
3. $(1,2)$
4. $(2,3)$

16. กำหนดให้ $\log 3 = c$

ค่าของ $\log_{1/9} 9 + \log_3 \sqrt[3]{3} - \log 0.81$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3} - 4c$
2. $\frac{4}{3} + 4c$
3. $\frac{8}{3} - 4c$
4. $\frac{8}{3} + 4c$

17. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{3x^2+1}$

อนุพันธ์ของ $[f(x) + g(x)]$ ที่ $x = 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{7}{2}$
2. $-\frac{19}{4}$
3. $\frac{13}{2}$
4. $\frac{21}{4}$

18. ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+a_{n+1}} = 2n$

แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$

3. -2 4. 2

19. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt[3]{x^2+2}$ ที่จุด $x = 5$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $10x-27y+31 = 0$ 2. $5x-13y+14 = 0$

3. $27x-10y-105 = 0$ 4. $13x-5y-50 = 0$

20. สินค้าชนิดหนึ่งขายในราคาชิ้นละ 24 บาท ต้นทุนในการผลิต x ชิ้น เท่ากับ $16 + 6x + 0.2x^{3/2}$ บาท ถ้า N เป็นจำนวนชิ้นของสินค้าที่ผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $1 \leqslant N < 2000$ 2. $2000 \leqslant N < 4000$

3. $4000 \leqslant N < 6000$ 4. $6000 \leqslant N < 8000$

21. กำหนดให้ $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{a} \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 23$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ แล้ว $|\bar{b}|\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -0.4 2. -0.2

3. 0.2 4. 0.4

22. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & n \\ -\frac{1}{n} & n+1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad a_n = \det(M_n)$$

แล้ว $\lim_{n \to \infty} a_n$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีค่าเป็น 0
2. มีค่าเป็น 1
3. มีค่าเป็น 2
4. หาค่าไม่ได้

23. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 1 \\ x + 2y &= -2 \\ -x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ค่าของ x ที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 9
3. -9
4. -20

24. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 และ $M_{ij}(A)$ คือไมเนอร์ของ a_{ij} ถ้า $M_{23}(A) = 5$ แล้ว $M_{32}(2A^t)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10
2. 20
3. 40
4. 80

25. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ตัวแทนนักเรียนจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4,5 และ 6 ชั้นปีละ 3 คน จะต้องทำการประชุมเพื่อเตรียมการแสดงสำหรับงานคืนสู่เหย้าของโรงเรียน จำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมดนั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ตัวแทนที่มาจากชั้นปีเดียวกันต้องนั่งติดกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16
2. 54
3. 432
4. 1296

26. รากที่ 5 รากหนึ่งของ

$$3^{20} - 5\cdot3^{16}\cdot2^{3} + 5\cdot3^{12}\cdot2^{7} - 5\cdot3^{8}\cdot2^{10} + 5\cdot3^{4}\cdot2^{12} - 2^{15}$$

คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 67
2. 69
3. 71
4. 73

27. จากข้อมูลที่กำหนดให้

ข้อมูลชุด A 1, 3, 2, 2, 5, 3, 4, 4, 3

ข้อมูลชุด B 1, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 5, 3

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากันและมัธยฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่มัธยฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
3. มัธยฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
4. มัธยฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน

28. ข้อมูลเกี่ยวกับการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 6 คน เป็นดังนี้

นักเรียนคนที่	คะแนน	ค่ามาตรฐาน
1	30	-1.2
2	40	-0.8
3	45	-0.6
4	60	0
5	85	1.0
6	100	1.6

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนข้างต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{5}{12}$
3. $\frac{7}{12}$
4. $\frac{11}{12}$

29. จากการทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) และระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ดังนี้

t	1	2	3	4
s	2	8	18	32

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดนี้เป็นแบบเส้นตรง แล้วเราจะทำนายระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ขณะที่ t เท่ากับ 1.5 วินาที ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 เมตร
2. 4 เมตร
3. 5 เมตร
4. 6 เมตร

30. ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านอาทิตย์ใน พ.ศ. 2530 และ พ.ศ. 2536

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	พ.ศ. 2530	พ.ศ. 2536
สบู่ (ก้อน)	11	13
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

ในการคิดดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน จะได้ 109.97 % ถ้าเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล โดย

มีราคาต่อก้อนเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน) เมื่อราคาต่อหน่วยของสบู่คือราคาต่อไหล จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

๑. 108.97 %
๒. 109.97 %
๓. 111.63 %
๔. 112.22 %

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. พิจารณาการอ้างเหตุผลดังนี้

เหตุ ๑. ถ้าสมชายไปว่ายน้ำแล้วสมหญิงไปดูภาพยนตร์
๒. สมทรงไม่ดูโทรทัศน์
๓. ถ้าสมชายไม่ไปว่ายน้ำแล้วสมพรไม่นอนพักผ่อน
๔. สมพรนอนพักผ่อนหรือสมทรงดูโทรทัศน์

ผล p

p แทนประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้จึงจะทำให้การอ้างเหตุผลข้างต้นสมเหตุสมผล

๑. สมพรไม่นอนพักผ่อน
๒. สมชายไม่ไปว่ายน้ำ
๓. สมชายไปว่ายน้ำ และสมหญิงไม่ไปดูภาพยนตร์
๔. สมพรนอนพักผ่อนและสมหญิงไปดูภาพยนตร์

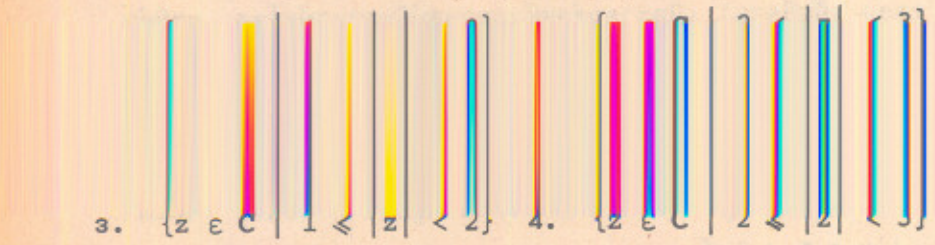
32. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง
C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประพจน์

$$\exists x\,[x^4 + 3x^2 - 10 = 0]$$

มีค่าความจริงเป็น<u>เท็จ</u>

1. เซตของจำนวนอตรรกยะ
2. $\{x \in R \mid |x| > 2\}$



3. $\{z \in C \mid 1 \leqslant |z| < 2\}$
4. $\{z \in C \mid 2 \leqslant |z| < 3\}$

33. ให้ $f(x) = 2x+2$ และ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

ถ้า $\{x \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ เท่ากับช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. $-\frac{8}{5}$
3. -1
4. 0

34. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R

ถ้า $f(x) = x^3+1$ และ $(f \circ g)(x) = x^3+3x^2+3x+2$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(-7)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. -2
3. 1
4. 3

35. ให้ r_1 และ r_2 เป็นความสัมพันธ์กำหนดโดย

$r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid y \leqslant \sqrt{x-3}\}$

$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid x+\sqrt{y^2-9} \leqslant 0 \text{ และ } y \geqslant 3\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $r_1 \subset r_2$
2. $r_2 \subset r_1$
3. $r_1 \subset r_2^{-1}$
4. $r_2 \subset r_1^{-1}$

36. ให้ a และ b เป็นรากที่ 6 ของ 1 โดยที่ $a^3 \neq b^3$

ถ้า $\overline{A}$ และ $\overline{B}$ ตามลำดับ เป็นเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน a^3 และ b^3 ในระนาบเชิงซ้อน และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองแล้ว

$\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 1

37. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ

$\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0 และ $-100 \leqslant x \leqslant 100\}$

ให้ $A = \{x \mid$ ห.ร.ม.ของ x กับ 21 เป็น $3\}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 29
2. 34
3. 68
4. 58

38. ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2-4x+2y-4 = 0$ และตัดวงกลมที่จุด A และ B ถ้าจุด C มีพิกัดเป็น $(-1,-2)$ แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$
2. 3
3. 9
4. $\frac{63}{5}$

39. ให้ A(-1,2), B(3,0) และ C(5,4) เป็นจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x-3y-1 = 0$
2. $3x-3y+1 = 0$
3. $3x-3y-2 = 0$
4. $3x-3y+2 = 0$

40. เซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$
4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

41. ถ้า $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$ และ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0$

โดยที่ $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว $\sin(\alpha+\beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$
4. 1

42. ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ (1) และ (2) ตามลำดับดังนี้

$$\log(x-2) + \log(x+2) - \log 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A = B$
2. $A \cap B = \phi$
3. A เป็นสับเซตแท้ของ B
4. B เป็นสับเซตแท้ของ A

43. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$

โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2,3)$
2. $(2,3]$
3. $(2, \frac{\pi}{2})$
4. $(2, \frac{\pi}{2}]$

44. ถ้า $\log_a(ax) + 2\log_a(a^2x) + 3\log_a(a^3x) + \ldots + 10\log_a(a^{10}x) = 11$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. a^{-10}
2. a^{-5}
3. $a^{-5/2}$
4. $a^{-5/4}$

45. ถ้า $a_n = \int_0^2 \frac{1}{x^{2n}}\,dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2n)\, a_n$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
2. มีผลบวกเป็น $\frac{2}{3}$
3. มีผลบวกเป็น $\frac{1}{2}$
4. มีผลบวกเป็น 1

46. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim_{x \to 1^-} f(x) > 0$ และ $\lim_{x \to 1^+} f(x) < 0$
3. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$
4. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$

47. กำหนดให้ $f(x) = x^3+bx^2+cx$ เมื่อ b,c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และ $f''(-1) = 6$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. f เป็นฟังก์ชันลด
3. $x = -2$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
4. $x = -1$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

48. ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{\sqrt{x}}$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และแกน X เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{20}{3}$
2. 3
3. $\frac{72}{5}$
4. 5

49. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ถ้า $X = (B + C)A$ แล้ว X^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

50. ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 4×4 โดยที่

$$A(\text{adj } A) - BA = I$$

ถ้า $\det B = 0$ แล้ว $\det A$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

51. ในการผลิตสินค้าสองชนิดโดยใช้วัตถุดิบจากแหล่ง 2 แหล่ง ตามข้อมูลต่อไปนี้

(ก) ปริมาณวัตถุดิบทั้งหมดที่มีให้ใช้จากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 มีค่าเป็น 18 หน่วย และ 10 หน่วย ตามลำดับ

(ข) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1 ต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 เป็นปริมาณ 2 หน่วย และ 1 หน่วย ตามลำดับ

(ค) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 2 ต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 เป็นปริมาณ 3 หน่วย และ 2 หน่วย ตามลำดับ

(ง) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 จะให้รายได้เป็นเงิน 300 และ 400 บาท ตามลำดับ

อยากทราบว่าเมื่อผลิตสินค้าจนมีรายได้มากที่สุดตามข้อจำกัดของวัตถุดิบที่มีอยู่แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ยังมีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2
2. ยังมีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 1 แต่ไม่มีวัตถุดิบเหลือจากแหล่งที่ 2
3. ไม่มีวัตถุดิบเหลือจากแหล่งที่ 1 แต่มีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 2
4. ไม่มีวัตถุดิบเหลือทั้งจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2

52. ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าถ่วงน้ำหนักลูกเต๋าลูกนี้จนกระทั่งทำให้ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 มีค่าเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{9}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้มคู่ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$
2. $\frac{8}{15}$
3. $\frac{13}{15}$
4. $\frac{14}{15}$

53. ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้าย มีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลง โดยเลือกเพลงจากเพลงทั้งหมด 5 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{25}$
2. $\frac{9}{25}$
3. $\frac{12}{25}$
4. $\frac{13}{25}$

54. สมชายเตรียมตัวเดินทางไปท่องเที่ยวต่างประเทศ

ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปเที่ยวประเทศอังกฤษเท่ากับ 0.5
ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับ 0.8
และความน่าจะเป็นที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศเท่ากับ 0.6
ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษและไม่ไปเที่ยว
ประเทศเยอรมันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.4
2. 0.5
3. 0.7
4. 0.9

55. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

อายุ (ปี)	จำนวนเด็ก
1 - 3	3
4 - 6	a
7 - 9	6
10 - 12	4

ถ้ามัธยฐานของอายุของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 7 ปี แล้ว a มีค่าเท่ากับ
ข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6

56. ข้อมูล 4 จำนวน มีค่าดังนี้

5, a, b, 1 โดยที่ $1 \leqslant a < b$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 5
แล้ว b-a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8

ตอนที่ 3 ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b\}$

ถ้า $S = \{r \mid r \subset A \times B\}$ และ

$F = \{r \in S \mid r$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีจำนวนสมาชิกในโดเมนเท่ากับ $2\}$.

แล้ว $n(F)$ เท่ากับเท่าใด

2. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $80 < x < 200$ และ $x = pq$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p \neq q$ ถ้า x และ y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ ค.ร.น.ของ x,y เท่ากับ 15015 แล้ว ผลบวกของค่าของ y ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดที่กำหนดให้เท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน BC, CA และ AB ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$ และ $4a^2 = 6b^2$ แล้ว $1 + 2\sin^2(3\hat{A} - 2\hat{B})$ เท่ากับเท่าใด

4. ให้ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$

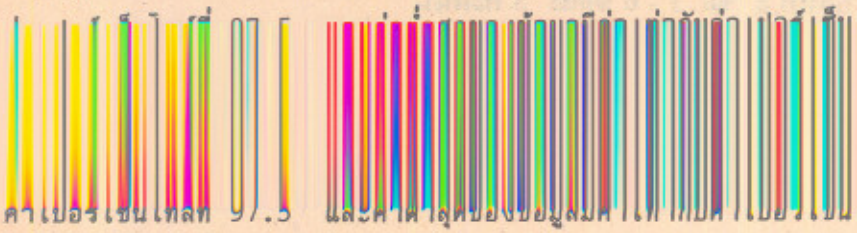
B เป็นจุดที่วงรีตัดแกน Y และอยู่เหนือแกน X

ถ้า F_1, B, F_2 ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และ F_1BF_2 เป็นสามเหลี่ยมที่พื้นที่เท่ากับ $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ หน่วย แล้ว k มีค่าเท่าใด

5. ให้ α เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 + 4\sqrt{5}$ β เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 - 4\sqrt{5}$ ถ้า $\alpha + \beta$ และ $\alpha\beta$ เป็นจำนวนจริงแล้ว

$\alpha + \beta$ มีค่าเท่าใด

๑. ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ค่าสูงสุดของข้อมูลมีค่าเท่ากับ



ควอร์ไทล์ที่ 33 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลเท่ากับ 10 แล้ว พิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังนี้

Z	.44	1.96
A	.17	.475

เฉลยข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์ กข. 2538

วันพุธที่ 5 เมษายน 2538

ตอนที่ 1

1.2	2.4	3.1	4.3	5.4	6.3	7.2	8.1	9.1	10.2
11.4	12.2	13.3	14.4	15.2	16.1	17.1	18.1	19.1	20.2
21.4	22.3	23.4	24.3	25.3	26.4	27.2	28.2	29.3	30.4

ตอนที่ 2

31.4	32.2	33.1	34.1	35.4	36.1	37.4	38.3	39.1	40.3
41.4	42.1	43.2	44.2	45.1	46.4	47.1	48.3	49.1	50.3
51.3	52.2	53.4	54. —	55.3	56.2				

ตอนที่ 3

1. 12	2. 270	3. 3
4. 2.25	5. 3	6. 24

เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2538

วันพุธที่ 5 เมษายน 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่า $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \wedge \sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

และ $(q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า $p \wedge \sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะฉะนั้น p มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นั่นคือ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า $q \vee r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น r มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สรุป p เป็นจริง , q เป็นเท็จ , r เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้นค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเลือก 2. $p \rightarrow \sim r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวเลือก 3. $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเลือก 4. $q \leftrightarrow \sim r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

2. ตอบ 4.

แนวคิด **ข้อความ ก ผิด**

ตัวอย่างเช่น p มีค่าความจริงเป็นเท็จ

q มีค่าความจริงเป็นจริง

จะได้ว่า $p \to q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แต่ $p \vee \sim q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อความ ข ผิด

เพราะว่า $p \to q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

เพราะฉะนั้นนิเสธของข้อความ $p \to q$ คือ $\sim(p \to q)$

$$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$$

$$\equiv p \wedge \sim q$$

ให้ p แทนข้อความ $\exists x\,[x < 6]$

q แทนข้อความ $\forall x\,[x > 8]$

เพราะว่า $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$ คือ $p \to q$

เพราะฉะนั้น นิเสธของ $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$

คือ $\sim(p \to q)$

เพราะว่า $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

$$\equiv \exists x\,[x < 6] \wedge \sim[\forall x\,[x > 8]]$$

$$\equiv \exists x\,[x < 6] \wedge \exists x\,[x \leqslant 8]$$

สรุปนิเสธของ $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$

ไม่ใช่ $\forall x\,[x \geqslant 6] \wedge \exists x\,[x \leqslant 8]$

วิธีลัด ใช้เหตุผลค่าความจริงจะดีกว่า

เพราะว่า $\exists x [x < 6]$ เป็นจริง

$\forall x [x > 8]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\exists x [x < 6] \rightarrow \forall x [x > 8]$ เป็นเท็จ .....(1)

เพราะว่า $\forall x [x \geqslant 6]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\forall x [x \geqslant 6] \wedge \exists x [x \leqslant 8]$ เป็นเท็จ .....(2)

จาก (1) และ (2) นิเสธของ $\exists x [x < 6] \rightarrow \forall x [x > 8]$

ไม่ใช่ $\forall x [x \geqslant 6] \wedge \exists x [x \leqslant 8]$

3. **ตอบ** 1.

แนวคิด ให้ A = เซตของคนชอบเพลงไทยสากล ; $n(A) = 95$

B = เซตของคนชอบเพลงไทยเดิม ; $n(B) = 92$

C = เซตของคนชอบเพลงลูกทุ่ง ; $n(C) = 125$

จากโจทย์ คนชอบเพลงไทยสากลและเพลงไทยเดิม 52 คน

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 52$

คนชอบเพลงไทยสากลและเพลงลูกทุ่ง 43 คน

เพราะฉะนั้น $n(A \cap C) = 43$

คนชอบเพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 57 คน

เพราะฉะนั้น $n(B \cap C) = 57$

เพราะว่าคนทั้ง 180 คน จะชอบเพลงอย่างน้อยหนึ่งประเภทในสามประเภท

เพราะฉะนั้น $n(A \cup B \cup C) = 180$

เพราะว่า $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

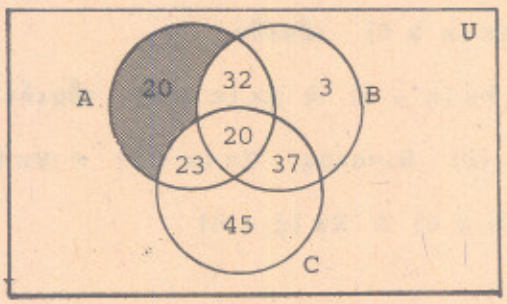
$- n(A \cap C) - n(B \cap C)$

$+ n(A \cap B \cap C)$

เพราะฉะนั้น $180 = 95 + 92 + 125 - 52 - 43 - 57 + n(A \cap B \cap C)$

ดังนั้น $n(A \cap B \cap C) = 20$

การหาสมาชิกในแต่ละส่วนของเซต A, B, C ควรใช้แผนภาพของเวนน์ช่วยในการคำนวณจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด



สรุป คนที่ชอบฟังเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียวเท่ากับ 20 คน

4. **ตอบ** 3.

แนวคิด เพื่อประโยชน์ต่อการศึกษาพิจารณาทุกตัวเลือกดังนี้

1. **ผิด** เพราะว่า $\{0,1\}$ ไม่เป็นสับเซตของ B

เพราะฉะนั้น $A \notin P(B)$

2. **ผิด** เพราะว่า $\{1\}$ ไม่เป็นสับเซตของ B

เพราะฉะนั้น $\{1\} \notin P(B)$

ดังนั้น $\{1\} \notin P(A) \cap P(B)$

3. **ถูกต้อง** เพราะว่า $A \cap B = \{0\}$

และ $P(A \cap B) = \{\phi, \{0\}\}$

เพราะฉะนั้น $n(P(A \cap B)) = 2$

4. ตอบ เพราะว่า $A \cup B = \{0,1,\{1\},\{0,1\}\}$

ดังนั้น $n(A \cup B) = 4$

เพราะฉะนั้น $n(P(A \cup B)) = 2^4 = 16$

5. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$

พิจารณา $(3+x)(2-x) \geq 0$

$(x+3)(x-2) \leq 0$

$-3 \leq x \leq 2$

เพราะฉะนั้น $D_f = [-3,2]$

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

พิจารณา $x+3 > 0$

$x > -3$

เพราะฉะนั้น $D_g = (-3,\infty)$

เพราะว่า $D_{fg} = D_f \cap D_g$

เพราะฉะนั้น $D_{fg} = [-3,2] \cap (-3,\infty)$

$= (-3,2]$

การคัดตัวเลือก 1. คำถามข้อนี้ก็คือเซตคำตอบของอสมการ

$(3+x)(2-x) \geq 0$ และ $x+3 > 0$

ตรงกับตัวเลือกใด

หรือ $A = \{x \in R \mid (3+x)(2-x) \geq 0$ และ $x+3 > 0\}$ คือเซตในข้อใด

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $(3+2)(2-2) \geq 0$ และ $2+3 > 0$

เพราะฉะนั้น $2 \in A$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = -3$ ทำให้ $-3+3 = 0 \not> 0$

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 2 หาค่า fg ที่จุดบางจุดในตัวเลือก เช่น $x = 2$

$(fg)(2) = f(2)\,g(2) = (0)(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$

ดังนั้น 2 เป็นสมาชิกของโดเมน fg

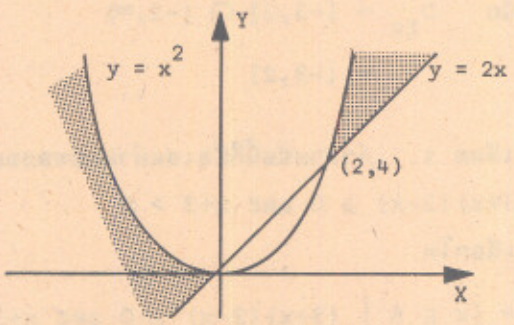
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เลือก $x = -3$ จะได้ว่า $g(-3)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-3 \notin D_{fg}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

6. **ตอบ** 3.

แนวคิด พิจารณาอาณาบริเวณ $y \leq x^2$ และ $y \geq 2x$ จากกราฟ



จุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 2x$ คือ $(2,4)$ และ $(0,0)$

เพราะว่า $r = \{(x,y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 2x\}$ และดูจากกราฟ

เพราะฉะนั้น $D_r = (-\infty,0] \cup [2,\infty)$

และ $R_r = (-\infty,\infty)$

เพราะว่า $R_{r^{-1}} = D_r$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ r^{-1} คือ $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $0 \leq (-1)^2$ และ $0 \geq 2(-1)$

เพราะฉะนั้น $(-1,0) \in r$ ดังนั้น $(0,-1) \in r^{-1}$

แสดงว่า $-1 \in R_{r^{-1}}$

แต่ -1 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 1. และ 2.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $(2,4) \in r$ เพราะฉะนั้น $(4,2) \in r^{-1}$

ดังนั้น $2 \in R_{r^{-1}}$ แต่ 2 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

7. **ตอบ** 2.

แนวคิด **วิธีที่ 1** พิจารณาอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$\frac{x-1}{x+2} - 2 > 0$$

$$\frac{(x-1) - 2(x+2)}{x+2} > 0$$

$$\frac{x-1-2x-4}{x+2} > 0$$

$$\frac{-x-5}{x+2} > 0$$

$$\frac{x+5}{x+2} < 0$$

$$-5 < x < -2$$

เพราะฉะนั้น $S = (-5,-2)$

เพราะว่าขอบเขตบนน้อยสุดของ S คือ -2

เพราะฉะนั้น $a = -2$ และ $a^2+1 = (-2)^2+1 = 5$

วิธีที่ 2 จำแนกค่า x เป็น 2 กรณีคือ $x < -2$ หรือ $x > -2$

<u>กรณีที่ 1</u> $x < -2$ จะได้ $x+2 < 0$

จาก $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$x-1 < 2(x+2)$$

$$x-1 < 2x+4$$

$$-5 < x$$

เพราะฉะนั้น $x \in (-\infty,-2) \cap (-5,\infty) = (-5,-2)$

<u>กรณีที่ 2</u> $x > -2$ จะได้ $x+2 > 0$

จาก $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$x-1 > 2(x+2)$$

$$x-1 > 2x+4$$

$$-5 > x$$

เพราะฉะนั้น $x \in (-2,\infty) \cap (-\infty,-5) = \phi$

สรุป $S = \{x \mid \frac{x-1}{x+2} > 2\}$

$= (-5,-2)$

8. ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่ 1 $(2i)^{12} = 2^{12} i^{12} = 2^{12} = 4096$

$(1+i)^2 = -2i$

$(1+i)^{12} = ((1+i)^2)^6 = (-2i)^6$

$= (-2)^6 i^6 = (64)(-1) = -64$

เพราะว่า $(\frac{2i}{1+i})^{12} = \frac{(2i)^{12}}{(1+i)^{12}} = \frac{4096}{-64} = -64$

เพราะฉะนั้นส่วนจริงของ $(\frac{2i}{1+i})^{12}$ มีค่าเท่ากับ -64

วิธีที่ 2 $2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$(2i)^{12} = 2^{12}(\cos \frac{12\pi}{2} + i \sin \frac{12\pi}{2}) = 2^{12}$

$1+i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos \frac{12\pi}{4} + i \sin \frac{12\pi}{4})$

$= 2^6 \cos 3\pi = -2^6$

เพราะฉะนั้น $(\frac{2i}{1+i})^{12} = \frac{2^{12}}{-2^6} = -2^6 = -64$

9. ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้จัดอยู่ในประเภทโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการเลือกค่า m,x,y,z ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. ถูกต้อง เพราะว่า $\frac{x}{y} > z > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{(\frac{x}{y})} < \frac{1}{z}$

นั่นคือ $\frac{y}{x} < \frac{1}{z}$

เพื่อประโยชน์แก่ผู้อ่านจะยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าตัวเลือกที่เหลือผิด

2. เลือก $x = -4$, $y = -1$ และ $z = 1$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $(-4) \not< (-1)(1)$

3. เลือก $x = -4$, $y = -1$, $z = 1$ และ $m = -2$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $\frac{(-2)(-1)}{(-4)} \not< (-2)(1)$

4. เลือก $x = -4$, $y = -1$, $z = 1$ และ $m = -2$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $\frac{(-2)(-4)}{(-1)} = -8 \not< -2 = (-2)(1)$

10. ตอบ 2.

แนวคิด

> จากทฤษฎีบทเศษเหลือ (ดูได้ที่หน้า 77 ค.014)
>
> ถ้า $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
>
> แล้วเศษที่เหลือจากการหาร $f(x)$ ด้วย $x-k$ คือ $f(k)$

ให้ $f(x) = x^3+2x^2-5x-2$

เพราะว่า $x-a$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ 4

และเศษที่เหลือจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-a)$ คือ $f(a)$

เพราะฉะนั้น $f(a) = 4$

การหาค่า a ทำดังนี้ จาก $f(a) = 4$

$$a^3+2a^2-5a-2 = 4$$

$$a^3+2a^2-5x-6 = 0$$

ลองแทนค่า $a = -1$; $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$

เพราะฉะนั้น $(a+1)$ หาร a^3+2a^2-5a-6 ลงตัว

และ $a^3+2a^2-5a-6 = (a+1)(a^2+a-6)$

$0 = (a+1)(a+3)(a-2)$

เพราะฉะนั้น a ที่ทำให้ $a^3+2a^2-5a-6 = 0$ คือ $a = -1,-3,2$

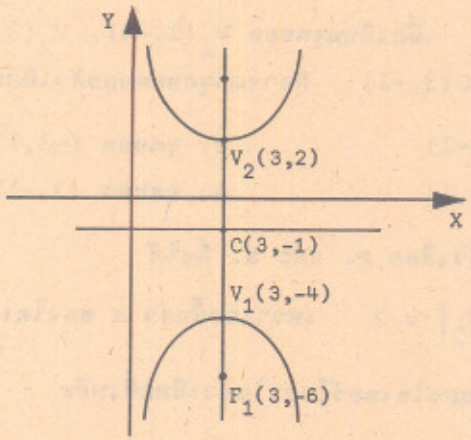
สรุป a ที่ทำให้ $x-a$ หาร x^3+2x^2-5x-2 เหลือเศษ 4 คือ

$a = -1,-3,2$

และผลบวกของค่า a ทั้งหมดเท่ากับ $(-1)+(-3)+2 = -2$

11. ตอบ 4.

แนวคิด เขียนจุดตามโจทย์กำหนดเพื่อสะดวกในการคำนวณ



เพราะว่าจุดยอดคือ $V_1(3,-4)$, $V_2(3,2)$

ดังนั้นจุดกึ่งกลางระหว่าง V_1, V_2 คือ $(3,-1)$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือ $C(3,-1)$

... และ a,b,c ของไฮเพอร์โบลาคือ

$$a = |CV_1| = 3$$

$$c = |CF_1| = 5$$

$$b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

เพราะว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y

เพราะฉะนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

ซึ่งตรงกับตัวเลือก 4.

การคัดตัวเลือก เมื่อเขียนจุดยอด $V_1(3,-4)$, $V_2(3,2)$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางคือ C(3,-1) พิจารณาจุดยอดของตัวเลือก

1. จุดยอด (3,-1)
2. จุดยอด (-3,1)
3. จุดยอด (-3,1)
4. จุดยอด (3,-1)

เพราะฉะนั้นคัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $|CV_1| = 3$ เพราะฉะนั้นค่า a ของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 3

พิจารณาค่า a ของไฮเพอร์โบลาในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 1. $a = 4$

ตัวเลือก 4. $a = 3$

เพราะฉะนั้นคัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

12. ตอบ 2.

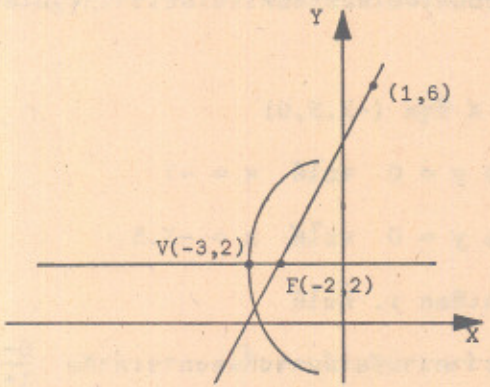
แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2-4y-4x = 8$

$$y^2-4y+4 = 4x+12$$

$$(y-2)^2 = 4(1)(x+3)$$

เพราะฉะนั้นพาราโบลาเปิดทางด้านขวา, แกนพาราโบลาขนานแกน X, จุดยอด $(-3,2)$, ค่า $c = 1$ และโฟกัส $(-2,2)$

วาดรูปดูเพื่อช่วยให้คำนวณได้ง่ายขึ้น



เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด $(1,6)$ และ $F(-2,2)$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $\frac{y-6}{x-1} = \frac{2-6}{-2-1} = \frac{4}{3}$

$$3(y-6) = 4(x-1)$$

$$3y-18 = 4x-4$$

$$4x-3y+14 = 0$$

การคัดตัวเลือก จากรูปกราฟของเส้นตรงมีความชันเป็นบวก พิจารณาความชันเส้นตรงแต่ละตัวเลือก

1. ความชัน $= \frac{3}{4}$ 2. ความชัน $= \frac{4}{3}$

3. ความชัน $= -\frac{7}{2}$ 4. ความชัน $= -\frac{2}{7}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด $(-2,2)$ ลองแทนค่า $x = -2$, $y = 2$

ในตัวเลือก 1. $3(-2) - 4(2) + 21 = -6-8+21 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ข้อสังเกต 1. ประโยชน์ที่เห็นได้อย่างชัดเจนเมื่อเราวาดรูปโดยใช้สเกลจริง

จากรูปเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(-3.5,0)$

จากตัวเลือก 1. เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = -7$

จากตัวเลือก 2. เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = -3.5$

ด้วยเหตุผลนี้เราก็ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

2. เพราะว่าความชันเส้นตรงที่ต้องการเท่ากับ $\frac{6-2}{1+2} = \frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

13. **ตอบ** 3.

แนวคิด $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$

$$\tan(\arctan(1+x) + \arctan(1-x)) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(\arctan(1+x)) + \tan(\arctan(1-x))}{1 - \tan(\arctan(1+x))\tan(\arctan(1-x))} = 1$$

$$\frac{(1+x) + (1-x)}{1 - (1+x)(1-x)} = 1$$

$$2 = 1 - (1+x)(1-x)$$

$$2 = 1 - (1-x^2)$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ซึ่งเป็นสับเซตของ $(-2,2)$

14. ตอบ 4.

แนวคิด วิธีที่ 1

จากสูตร $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

เพราะฉะนั้น $2\sin(2\alpha)\sin(2\beta)$

$= \cos(2\alpha-2\beta) - \cos(2\alpha+2\beta)$

$= \cos(2(\alpha-\beta)) - \cos(2(\alpha+\beta))$

$= [2\cos^2(\alpha-\beta) - 1] - [2\cos^2(\alpha+\beta) - 1]$

$= 2[\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)]$

ดังนั้น $\sin(2\alpha)\sin(2\beta)$

$= \cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)$

$= [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)][\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$= \left[\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right) - \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\right)\right]\left[\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right) + \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\right)\right]$

$= \left[\frac{8\sqrt{3}}{10}\right]\left[\frac{6}{10}\right]$

$= \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

$= \frac{12\sqrt{3}}{25}$

วิธีที่ 2 $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

$$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$(1)+(2)$; $2\cos\alpha\cos\beta = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} + \frac{3+4\sqrt{3}}{10} = \frac{6}{10}$

$(2)-(1)$; $2\sin\alpha\cos\beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} - \frac{3-4\sqrt{3}}{10} = \frac{8\sqrt{3}}{10}$

เพราะฉะนั้น $\sin(2\alpha)\sin(2\beta)$

$= (2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\beta\cos\beta)$

$= (2\sin\alpha\sin\beta)(2\cos\alpha\cos\beta)$

$= (\frac{8\sqrt{3}}{10})(\frac{6}{10})$

$= \frac{12\sqrt{3}}{25}$

15. **ตอบ** 2.

แนวคิด **เพราะว่า** $3^{x+\log_3 2} = 3^x(3^{\log_3 2}) = 3^x(2)$

เพราะฉะนั้น $9^x - 3^{x+\log_3 2} = -1$

$9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$

$(3^x-1)^2 = 0$

$$3^x = 1$$

$$x = 0$$

สรุป x ที่สอดคล้องกับสมการ $9^x - 3^{x+\log_3 2} = 1$ คือ $x = 0$

เป็นสมาชิกของเซต $(-1,1)$ ในตัวเลือก 2.

16. ตอบ 1.

แนวคิด $\log_{\frac{1}{9}} 9 = -1$

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_3 3 = \frac{1}{3}$$

$$\log 0.81 = \log \frac{81}{100} = \log 81 - \log 100$$

$$= \log 3^4 - 2 = 4\log 3 - 2$$

$$= 4c - 2$$

สรุป $\log_{\frac{1}{9}} 9 + \log_3 \sqrt[3]{3} - \log 0.81 = -1 + \frac{1}{3} - (4c-2)$

$$= (2 - \frac{2}{3}) - 4c$$

$$= \frac{4}{3} - 4c$$

17. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x+1)' - (2x-1)'(3x+1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(3) - (2)(3x+1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-1)(3) - (2)(4)}{(2-1)^2} = -5$$

$$g(x) = \sqrt{3x^2+1} = (3x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(3x^2+1)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot (6x)$$

$$g'(1) = \frac{6}{2\sqrt{3+1}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

อนุพันธ์ของ $[f(x)+g(x)]$ ที่ $x = 1$ คือ $[f(1)+g(1)]'$

เพราะว่า $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

เพราะฉะนั้น $[f(1)+g(1)]' = f'(1) + g'(1)$

$$= -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

18. ตอบ 1.

แนวคิด ให้พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $a_1 = a$

เพราะฉะนั้น $a_n = ar^{n-1}$

จาก $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+a_{n+1}} = 2n$

จะได้ $\frac{a}{a+ar} + \frac{ar}{ar+ar^2} + \ldots + \frac{ar^{n-1}}{ar^{n-1}+ar^n} = 2n$

$$\frac{1}{1+r} + \frac{r}{r+r^2} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}+r^n} = 2n$$

$$\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \cdots + \frac{1}{1+r} = 2n$$

$$n\left[\frac{1}{1+r}\right] = 2n$$

$$\frac{1}{1+r} = 2$$

$$1 = 2+2r$$

$$2r = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบจัดอยู่ในประเภทโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ a, r และ n นอกจากนั้นตัวเลือกยังสามารถนำขึ้นมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ด้วย

ลองเลือก $n = 1$ และ $a = 2$

ตัวเลือก 1. $r = -\frac{1}{2}$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2(-\tfrac{1}{2}) = -1$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{2}{2+(-1)} = 2 = 2(1)$$

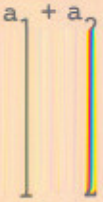
เพราะฉะนั้นยังตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไม่ได้

ตัวเลือก 2. $r = \frac{1}{2}$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = 2(\tfrac{1}{2}) = 1$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \neq 2(1)$$



เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $r = -2$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = (2)(-2) = -4$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{2}{2+(-4)} = -1 \neq 2(1)$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

ตัวเลือก 4. $r = 2$

$$a_1 = 2$$

$$a_2 = (2)(2) = 4$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{2}{2+4} = \frac{1}{3} \neq 2(1)$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

19. **ตอบ** 1.

แนวคิด $y = \sqrt[3]{x^2+2} = (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+2)'$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2x)$$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt[3]{x^2+2}$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx}(x=5) = \frac{1}{3}(5^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2(5))$$

$$= \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}(10)$$

$$= \frac{10}{27}$$

การหาจุดบนเส้นโค้งเมื่อ $x = 5$ จะได้ $y = \sqrt[3]{5^2+2} = \sqrt[3]{27} = 3$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสผ่านจุด $(5,3)$ และมีความชัน $\frac{10}{27}$

มีสมการเป็น $y-3 = (\frac{10}{27})(x-5)$

$$27y-81 = 10x-50$$

$$10x-27y+31 = 0$$

การตัดตัวเลือก เมื่อเรารู้ว่าความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ $\frac{10}{27}$

ต่อไปดูความชันของแต่ละตัวเลือกพบว่า

1. ความชัน $= \frac{10}{27}$
2. ความชัน $= \frac{5}{13}$
3. ความชัน $= \frac{27}{10}$
4. ความชัน $= \frac{13}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้ง

20. ตอบ 2.

แนวคิด ในการผลิต x ชิ้นต้นทุนเท่ากับ $16+6x+0.2x^{\frac{3}{2}}$ บาท

ขายได้เงินทั้งหมดเท่ากับ $24x$ บาท

ให้ $f(x)$ = กำไรในการผลิต x ชิ้น $= 24x - (16+6x+0.2x^{\frac{3}{2}})$

$$f(x) = 18x - 16 - 0.2x^{\frac{3}{2}}$$

จะได้ $f'(x) = 18 - 0.3x^{\frac{1}{2}}$

$$f''(x) = -0.3(\tfrac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-0.15}{\sqrt{x}}$$

การหาค่าวิกฤต $f'(x) = 0$

$$18 - 0.3x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$0.3\sqrt{x} = 18$$

$$\sqrt{x} = 60$$

$$x = 3600$$

เพราะว่า $f''(3600) = \frac{-0.15}{\sqrt{3600}} < 0$

เพราะฉะนั้น $f(3600)$ เป็นค่าสูงสุด

นั่นคือ $N = 3600$ ทำให้ได้กำไรสูงสุด

หมายเหตุ การแสดงว่า $f(3600)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ถ้า $x < 3600$ แล้ว $\sqrt{x} < 60$

$$0.3\sqrt{x} < 18$$

$$0 < 18 - 0.3\sqrt{x}$$

$$0 < f'(x)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,3600)$

ถ้า $x > 3600$ แล้ว $\sqrt{x} > 60$

$$0.3\sqrt{x} > 18$$

$$0 > 18 - 0.3\sqrt{x}$$

$$0 > f'(x)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(3600,\infty)$

สรุป $f(3600)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

21. ตอบ 4.

แนวคิด $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ จะได้ $|\bar{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

จาก $\bar{a}\cdot(\bar{a} - \bar{b}) = 23$

$$\bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b} = 23$$

$$|\bar{a}|^2 - \bar{a}\cdot\bar{b} = 23$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|^2 - 23 = 5^2 - 23 = 2$$

เพราะว่า $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

$$|\bar{b}|\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \frac{2}{5} = 0.4$$

การคัดตัวเลือก จาก $|\bar{a}|^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = 25$

และ $\bar{a}\cdot(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b}$

$$23 = 25 - \bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2$$

เพราะฉะนั้น θ เป็นมุมแหลม , $\cos\theta > 0$

ดังนั้น $|\bar{b}|\cos\theta > 0$ เพราะฉะนั้นคัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

22. ตอบ 3.

แนวคิด $M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & n \\ -\frac{1}{n} & n+1 \end{bmatrix}$

$$a_n = \det(M_n) = \frac{1}{n}(n+1) + 1 = 1 + \frac{1}{n} + 1 = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$$

23. ตอบ 4.

แนวคิด วิธีที่ 1 โดยการใช้กฎของคราเมอร์

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{(1)(4-0) - (4)(-4-0) + (1)(6-6)}{(2)(4-0) - (4)(2-0) + (1)(-3+2)}$$

$$= \frac{4+16+0}{8-8-1}$$

$$= -20$$

วิธีที่ 2

$$2x + 4y + z = 1 \quad \text{.....(1)}$$

$$x + 2y = -2 \quad \text{.....(2)}$$

$$-x - 3y + 2z = 3 \quad \text{.....(3)}$$

(-2)(1) ; $-4x - 8y - 2z = -2$ .....(4)

(3)+(4) ; $-5x - 11y = 1$ .....(5)

2(5) ; $-10x - 22y = 2$ .....(6)

11(2) ; $11x + 22y = -22$ .....(7)

(6)+(7) ; $x = -20$

24. ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เพื่อให้เข้าใจโดยง่ายขออธิบายด้วยการเขียนสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$M_{23}(A)$ คือดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการตัดแถว 2 และหลัก 3 ทิ้งไป

$$M_{23}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 5$

เพราะว่า $2A^t = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & 2a_{41} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{32} & 2a_{42} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} & 2a_{43} \\ 2a_{14} & 2a_{24} & 2a_{34} & 2a_{44} \end{bmatrix}$

และโดยการตัดแถวที่ 3 และหลักที่ 2 ของเมตริกซ์ $2A^t$ ทิ้ง

เพราะฉะนั้น $M_{32}(2A^t) = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{31} & 2a_{41} \\ 2a_{12} & 2a_{32} & 2a_{42} \\ 2a_{14} & 2a_{34} & 2a_{44} \end{vmatrix}$

$$= 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= 8 \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}^t \right|$$

$$= 8(5)$$

$$= 40$$

วิธีที่ 2 โดยการใช้เหตุผล เมื่อ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

เพราะว่าเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ทิ้ง

เท่ากับเมตริกซ์ที่ได้จาก A^t โดยการตัดแถวที่ j และหลักที่ i ทิ้ง

เพราะฉะนั้น $M_{ij}(A) = M_{ji}(A^t)$

เพราะว่า $M_{ij}(kA)$ = ดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ kA ทิ้งไป

เพราะฉะนั้น $M_{ij}(kA) = k^{n-1} M_{ij}(A)$

โดยการใช้เหตุผลข้างต้นกับข้อสอบข้อนี้

$$\begin{aligned} M_{32}(2A^t) &= 2^{4-1} M_{32}(A^t) \\ &= 8M_{23}(A) \\ &= 8(5) \\ &= 40 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก เราสามารถเลือกเมตริกซ์ที่สอดคล้องกับโจทย์เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกดังนี้

เพราะว่า $M_{23}(A) = 5$

เพราะฉะนั้นเราเลือก $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ก็จะได้ว่า $M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$ ตามโจทย์กำหนด

46

เพราะว่า $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$2A^t = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $M_{32}(2A^t) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 40$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

25. ตอบ 3.

แนวคิด การจัดลำดับพิจารณาเป็นขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จัดลำดับกลุ่มนักเรียนทั้งสามกลุ่มในแนววงกลมทำได้ (3-1)! วิธี

ขั้นที่ 2 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดลำดับได้ 3! วิธี

ขั้นที่ 3 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดลำดับได้ 3! วิธี

ขั้นที่ 4 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 6 จัดลำดับได้ 3! วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด = (3-1)! 3! 3! 3! = 432

26. ตอบ 4.

แนวคิด ให้ $K = 3^{20}-5\cdot3^{16}\cdot2^3+5\cdot3^{12}\cdot2^7-5\cdot3^8\cdot2^{10}+5\cdot3^4\cdot2^{12}-2^{15}$

เพราะว่า K มีพจน์อยู่ 6 พจน์

เพราะฉะนั้นเราควรพิจารณาผลบวกนี้ในรูปของ

$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

โดยการเปรียบเทียบกับผลบวกของไจทย์

เราเลือกให้ $a^5 = 3^{20} = (3^4)^5$; $a = 3^4$

และ $b^5 = -2^{15} = (-2^3)^5$; $b = -2^3$

จาก a และ b จะได้ว่า

$3^{20}-5\cdot3^{16}\cdot2^3+5\cdot3^{12}\cdot2^7-5\cdot3^8\cdot2^{10}+5\cdot3^4\cdot2^{12}-2^{15}$

$= (3^4)^5-5(3^4)^4(2^3)+10(3^4)^3(2^3)^2-10(3^4)^2(2^3)^3$

$+5(3^4)(2^3)^4-(2^3)^5$

$= (3^4-2^3)^5$

เพราะฉะนั้น $K = (3^4-2^3)^5$

สรุป รากที่ 5 ตัวหนึ่งของ K คือ $3^4-2^3 = 81-8 = 73$

27. ตอบ 2.

แนวคิด ข้อมูลชุด A ; 1,2,2,3,3,3,4,4,5

มัธยฐาน = 3

$\overline{X}_A = \frac{27}{9} = 3$

ข้อมูลชุด B ; 1,1,1,2,2,2,3,4,5,5,5,5

มัธยฐาน = 2

$$\bar{X}_B = \frac{36}{12} = 3$$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 2.

28. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่า ค่ามาตรฐานของคะแนน $x = 60$ มีค่าเท่ากับ $z = 0$

เพราะฉะนั้นจากสูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $0 = \frac{60 - \bar{x}}{s}$

นั่นคือ $\bar{x} = 60$

เพราะว่า ค่ามาตรฐานของคะแนน $x = 85$ มีค่าเท่ากับ $z = 1$

เพราะฉะนั้น $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$$1 = \frac{85 - 60}{s}$$

$$s = 25$$

สรุปสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

29. **ตอบ** 3.

แนวคิด จากข้อมูลเราให้ s เป็นตัวแปรตาม t เป็นตัวแปรอิสระ

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลเป็นแบบเส้นตรง $\hat{s} = mt + c$

ซึ่งมีสมการปกติเป็น

$$m \Sigma t + nc = \Sigma s$$

$$m \Sigma t^2 + c \Sigma t = \Sigma st$$

t	s	t^2	st
1	2	1	2
2	8	4	16
3	18	9	54
4	32	16	128
$\Sigma t = 10$	$\Sigma s = 60$	$\Sigma t^2 = 30$	$\Sigma st = 200$

เพราะฉะนั้น $10m + 4c = 60$ .....(1)

$30m + 10c = 200$ .....(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $m = 10$, $c = -10$

เพราะฉะนั้น $\hat{s} = 10t - 10$

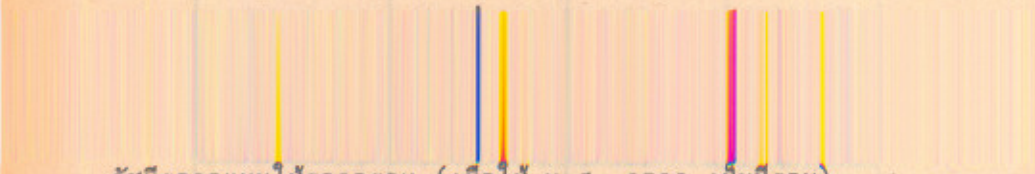
เมื่อ $t = 1.5$ จะได้ $\hat{s} = 10(1.5) - 10 = 5$

30. ตอบ 4.

แนวคิด เมื่อเปลี่ยนหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล จะได้ข้อมูลดังนี้

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	พ.ศ. 2530	พ.ศ. 2536
สบู่ (โหล)	132	156
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

จากข้อมูลในตารางที่ได้ใหม่



ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน)

$$= \left[\frac{156 + 210 + 80 + 50}{132 + 190 + 75 + 45}\right] \times 100$$

$$= \left(\frac{496}{442}\right) \times 100$$

$$= 112.22\ \%$$

หมายเหตุ แนวทางในการเฉลยข้างต้นเป็นการคำนวณตามตัวเลขที่เปลี่ยนไป โดยไม่สนใจว่าหน่วยของสินค้าทั้ง 4 ชนิด สอดคล้องสัมพันธ์กันหรือไม่

ซึ่งในความเป็นจริงนั้น สินค้าที่มีลักษณะการใช้และการขายคล้ายกันนั้น การกำหนดราคาต่อหน่วยควรจะเหมือนกันหรือสอดคล้องกัน เช่น 1 ก้อน, 1 หลอด, 1 ขวด, 1 ถัง, 1 ถุง

เนื่องจาก ราคาต่อหน่วยของสบู่ให้คิดเป็นโหล

ดังนั้นราคาต่อหน่วยของยาย้อมผม, แชมพู, ยาสีฟัน เราก็ควรจะคิดราคาต่อหน่วยเป็นโหล ซึ่งการคิดแบบนี้จะมีผลทำให้คำตอบเป็น 109.97 % เหมือนเดิม

อย่างไรก็ตาม จากโจทย์บังคับให้เราเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล

ดังนั้นคำตอบตามตัวเลขที่คำนวณข้างต้นจึงมีค่าเท่ากับ 112.22 %

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ตอบ 4.

แนวคิด ให้ q แทนประพจน์ "สมชายไปว่ายน้ำ"
r แทนประพจน์ "สมหญิงไปดูภาพยนตร์"
s แทนประพจน์ "สมทรงดูโทรทัศน์"
t แทนประพจน์ "สมพรนอนพักผ่อน"

เหตุ 1. ถ้าสมชายไปว่ายน้ำแล้วสมหญิงไปดูภาพยนตร์ คือ $q \to r$
2. สมทรงไม่ดูโทรทัศน์ คือ $\sim s$
3. ถ้าสมชายไม่ไปว่ายน้ำแล้วสมพรไม่นอนพักผ่อน คือ $\sim q \to \sim t$
4. สมพรนอนพักผ่อนหรือสมทรงดูโทรทัศน์ คือ $t \vee s$

พิจารณาประพจน์ของแต่ละตัวเลือก

1. สมพรไม่นอนพักผ่อน คือ $\sim t$
2. สมชายไม่ไปว่ายน้ำ คือ $\sim q$
3. สมชายไปว่ายน้ำและสมหญิงไม่ไปดูภาพยนตร์ คือ $q \wedge \sim r$
4. สมพรนอนพักผ่อนและสมหญิงไปดูภาพยนตร์ คือ $t \wedge r$

จากเหตุที่กำหนดให้ $q \to r$, $\sim s$, $\sim q \to \sim t$ และ $t \vee s$ เป็นจริง

เพราะว่า $\sim s$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น s เป็นเท็จ

เพราะว่า $t \vee s$ เป็นจริง และ s เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น t เป็นจริง

หมายเหตุ เมื่อคิดเลขถึงตรงนี้ เราสามารถตัดตัวเลือก 1.ทิ้งได้ ด้วยเหตุผลว่า t เป็นจริง ดังนั้น $\sim t$ ต้องเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (\sim t)$

ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาต่อไป t เป็นจริง ดังนั้น $\sim t$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $\sim q \to \sim t$ เป็นจริง และ $\sim t$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $\sim q$ เป็นเท็จ

> **หมายเหตุ** ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีกแล้ว เพราะว่า
>
> $[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (\sim q)$
>
> ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาต่อไป $\sim q$ เป็นเท็จ ดังนั้น q เป็นจริง

เพราะว่า $q \to r$ เป็นจริง และ q เป็นจริง เพราะฉะนั้น r เป็นจริง

สรุป $t \wedge r$ เป็นจริง และ $q \wedge \sim r$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น

$[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (q \wedge \sim r)$ ไม่สมเหตุสมผล

$[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (t \wedge r)$ สมเหตุสมผล

สรุป P คือข้อความในตัวเลือก 4.

32. **ตอบ** 2.

แนวคิด พิจารณาอสมการ $x^4+3x^2-10 = 0$

$$(x^2+5)(x^2-2) = 0$$

$$x^2 = -5, 2$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt{5}i, -\sqrt{5}i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $\{x \in C \mid x^4+3x^2-10 = 0\} = \{\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

พิจารณาตัวเลือก 1 U = เซตของจำนวนอตรรกยะ ; $\sqrt{2} \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U[x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

พิจารณาตัวเลือก 2 $U = \{x \in R \mid |x| > 2\} = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

เพราะว่า $\sqrt{5}i, -\sqrt{5}i, \sqrt{2}, -\sqrt{2} \notin U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U[x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นเท็จ

เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านขอพิจารณาตัวเลือกที่เหลือดังนี้

ตัวเลือก 3 $U = \{z \in C \mid 1 \leq |z| < 2\}$

เพราะว่า $1 \leq |\sqrt{2}| < 2$ นั่นคือ $\sqrt{2} \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U[x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

ตัวเลือก 4 $U = \{z \in C \mid 2 \leq |z| < 3\}$

เพราะว่า $2 \leq |\sqrt{5}i| < 3$ นั่นคือ $\sqrt{5}i \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U[x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

33. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาโดเมนของ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ จาก

$$4-x^2 \geq 0$$
$$x^2-4 \leq 0$$
$$(x+2)(x-2) \leq 0$$
$$-2 \leq x \leq 2$$

เพราะฉะนั้น $D_g = [-2,2]$

เพราะว่า $D_f = (-\infty,\infty)$ และ $D_g \cap D_f = [-2,2]$

เพราะฉะนั้นเราพิจารณาค่า x ที่ $f(x) \leq g(x)$ เมื่อ $-2 \leq x \leq 2$ เท่านั้น

กรณีที่ 1 $-2 \leq x \leq -1$

จะได้ $-4 \leq 2x \leq -2$

$-2 \leq 2x+2 \leq 0$

เพราะฉะนั้น $2x+2 < \sqrt{4-x^2}$ แน่นอน

กรณีที่ 2 $-1 < x \leq 2$

$-2 < 2x \leq 4$

$0 < 2x+2 \leq 2$

พิจารณา $0 < 2x+2 \leq \sqrt{4-x^2}$

$4x^2+8x+4 \leq 4-x^2$

$5x^2+8x \leq 0$

$x(5x+8) \leq 0$

$-\frac{8}{5} \leq x \leq 0$

จากกรณีที่ 2 จะได้ $x \in (-1,2] \cap [-\frac{8}{5},0]$

นั่นคือ $x \in (-1,0]$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$$\{x \mid f(x) \leq g(x)\} = [-2,-1] \cup (-1,0] = [-2,0]$$

เพราะฉะนั้น $a = -2$ และ $b = 0$ ทำให้ $a+b = -2$

34. ตอบ 1.

แนวคิด การหา f^{-1} ; สมมติ $y = x^3+1$

$$x^3 = y-1$$

$$x = (y-1)^{\frac{1}{3}}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$

เพราะว่า $(f^{-1} \circ (f \circ g))(x) = f^{-1}((f \circ g)(x))$

$$((f^{-1} \circ f) \circ g)(x) = f^{-1}(x^3+3x^2+3x+2)$$

$$g(x) = (x^3+3x^2+3x+2-1)^{\frac{1}{3}}$$

$$g(x) = \left[(x+1)^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$g(x) = x+1$$

เพราะฉะนั้น $(g \circ f^{-1})(-7) = g(f^{-1}(-7))$

$$= g((-7-1)^{\frac{1}{3}})$$

$$= g(-2)$$

$$= -2+1$$

$$= -1$$

วิธีลัด $(f \circ g)(x) = x^3+3x^2+3x+2$

$$= x^3+3x^2+3x+1+1$$

$$f(g(x)) = (x+1)^3 + 1$$

เพราะว่า $f(x) = x^3+1$ ดังนั้น $f((x+1)) = (x+1)^3+1 = f(g(x))$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะฉะนั้น $g(x) = x+1$

เพราะว่า $f(-2) = -7$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-7) = -2$

สรุป $(g \circ f^{-1})(-7) = g(f^{-1}(-7)) = g(-2) = -1$

35. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่าวิธีจริง

และเพื่อให้ง่ายขึ้นเราใช้เงื่อนไขเท่ากับในการเลือกสมาชิกของ r_1 และ r_2

พิจารณา $y = \sqrt{x-3}$ ค่า (x,y) ที่เป็นไปได้คือ

$(x,y) = (3,0), (4,1), (7,2), (12,3), \ldots$

เพราะฉะนั้น $(3,0),(4,1),(7,2) \in r_1$

พิจารณา $x + \sqrt{y^2-9} = 0$ และ $y = 3$ ค่าของ (x,y) ที่เป็นไปได้คือ $(x,y) = (0,3)$ เพราะฉะนั้น $(0,3) \in r_2$

การตัดตัวเลือก 1 เพราะว่า $(x,y) = (3,0) \in r_1$

และ $y = 0 \neq 3$ ดังนั้น $(3,0) \notin r_2$ เพราะฉะนั้น $r_1 \not\subset r_2$

การตัดตัวเลือก 2 เพราะว่า $(x,y) = (0,3) \in r_2$

และ $3 \neq \sqrt{0-3}$ ดังนั้น $(0,3) \notin r_1$ เพราะฉะนั้น $r_2 \not\subset r_1$

การตัดตัวเลือก 3 เลือก $(4,1)$ จาก r_1

ต่อไปดูว่า $(4,1) \in r_2^{-1}$ ได้หรือไม่

สมมติ $(4,1) \in r_2^{-1}$ ดังนั้น $(1,4) \in r_2$

เพราะว่า $(x,y) \in r_2$ ได้นั้น $0 \geqslant x$ เพราะฉะนั้น $(1,4) \notin r_2$

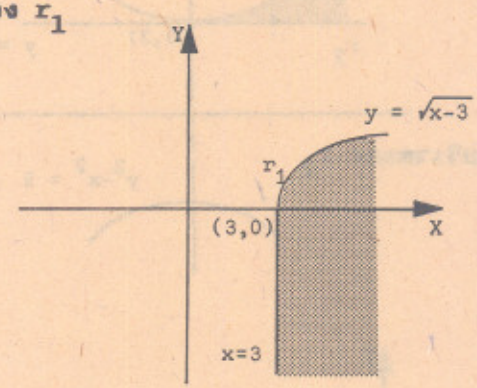
นั่นคือ $(4,1) \notin r_2^{-1}$

สรุป $r_1 \not\subset r_2^{-1}$

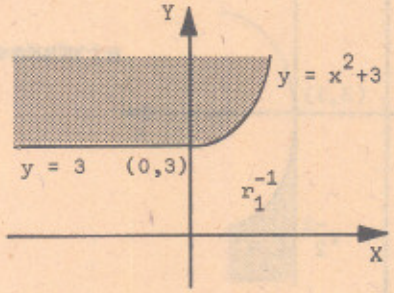
ต่อไปเหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวเลือกเป็นคำตอบได้เลย

ต่อไปลองเปรียบเทียบกับวิธีจริง ซึ่งการหาคำตอบโดยวิธีจริงนั้นการเขียนกราฟแสดงบริเวณ r_1, r_2, r_1^{-1} และ r_2^{-1} เป็นวิธีที่เหมาะสมวิธีหนึ่ง

กราฟแสดงบริเวณของ r_1



กราฟแสดงบริเวณของ r_1^{-1}



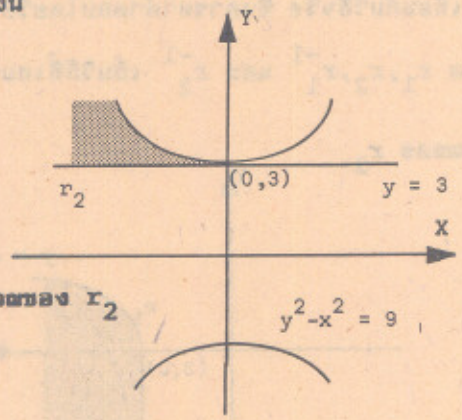
พิจารณา $x + \sqrt{y^2-9} = 0$

$x = -\sqrt{y^2-9}$

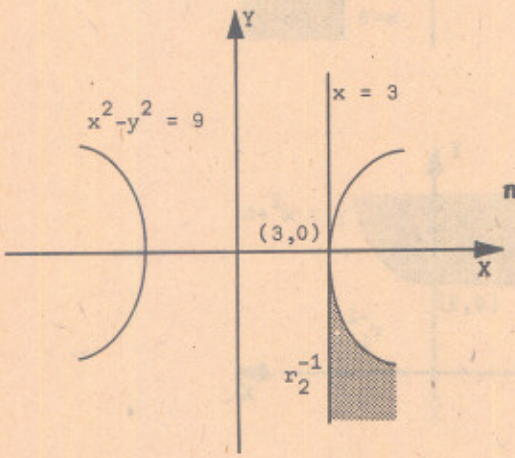
$$x^2 = y^2-9$$

$$y^2-x^2 = 9$$

เพราะฉะนั้นพิจารณากราฟแสดงบริเวณของ r_2 จากไฮเพอร์โบลา $y^2-x^2 = 9$ ดังนี้



กราฟแสดงบริเวณของ r_2



กราฟแสดงบริเวณของ r_2^{-1}

จากกราฟทั้ง 4 รูป จะได้ว่า $r_1 \not\subset r_2$, $r_2 \not\subset r_1$, $r_1 \not\subset r_2^{-1}$

แต่ $r_2 \subset r_1^{-1}$

36. ตอบ 1.

แนวคิด การหารากที่ 6 ของ 1

$$z^6 = 1$$
$$= \cos 0 + i\sin 0$$
$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$
$$z = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$
$$= \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$

สำหรับค่า $k = 0,1,2,\ldots,5$

$$z = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$$
$$z^3 = \left[\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right]^3 = \cos\frac{3k\pi}{3} + i\sin\frac{3k\pi}{3}$$
$$= \cos k\pi + i\sin k\pi$$
$$= \cos k\pi$$

เพราะฉะนั้น $\{z^3 \mid z$ เป็นรากที่ 6 ของ $1\}$

$$= \{\cos k\pi \mid k = 0,1,2,\ldots,5\}$$
$$= \{1,-1\}$$

ดังนั้นค่าของ a,b ที่เป็นรากที่ 6 ของ 1 โดยที่ $a^3 \neq b^3$

จะต้องได้ว่า $a^3, b^3 \in \{1,-1\}$

ให้ $a^3 = 1$, $b^3 = -1$

วิธีลัด การหาค่า a^3 และ b^3 สามารถทำได้ดังนี้

ให้ a,b เป็นรากที่ 6 ของ 1

ดังนั้น $a^6 = 1$ และ $b^6 = 1$

$(a^3)^2 = a^6 = 1$ และ $(b^3)^2 = b^6 = 1$

$a^3 = \pm 1$ และ $b^3 = \pm 1$

เพราะว่า $a^3 \neq b^3$ เพราะฉะนั้นให้ $a^3 = 1$, $b^3 = -1$

เวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน $a^3 = 1$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0,0) และจุดปลายที่จุด (1,0)

เพราะฉะนั้น $\overline{A} = \overline{i}$

เวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน $b^3 = -1$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0,0) และจุดปลายที่จุด (-1,0)

เพราะฉะนั้น $\overline{B} = -\overline{i}$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \dfrac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|\cdot|\overline{B}|} = \dfrac{(\overline{i})\cdot(-\overline{i})}{|\overline{i}|\cdot|-\overline{i}|} = -1$

37. ตอบ 4.

แนวคิด

ให้ $U = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0 และ $-100 \leq x \leq 100\}$

$A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,21) = 3\}$

$= \{x \in U \mid 3|x$ และ $7 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid 3|x\} - \{x \in U \mid 3|x$ และ $7|x\}$

$= \{x \in U \mid 3|x\} - \{x \in U \mid 21|x\}$

ให้ $B = \{x \in U \mid 3|x\}$

$= \{3(-33), 3(-32), 3(-31), \ldots, 3(32), 3(33)\}$

$n(B) = 66$

$C = \{x \in U \mid 21|x\} = \{21(-4), 21(-3), \ldots, 21(4)\}$

$n(C) = 8$

เพราะว่า $A = B - C$ เพราะฉะนั้น $n(A) = n(B - C)$

$= n(B) - n(C)$

$= 66 - 8$

$= 58$

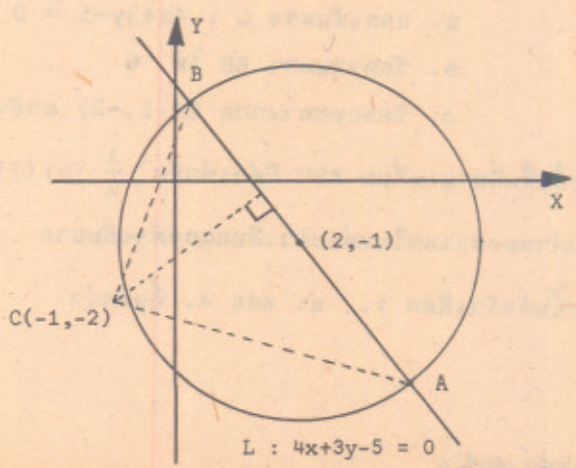
38. ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$

$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$

เป็นสมการวงกลมรัศมี 3 และจุดศูนย์กลางที่ (2,-1)



เพราะว่า L ผ่านจุด (2,-1) และมีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง L คือ $y+1 = (-\frac{4}{3})(x-2)$

$3y+3 = -4x+8$

$4x+3y-5 = 0$

เส้นตรง L ผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม (2,-1) และตัดวงกลมที่จุด A,B

เพราะฉะนั้นความยาว AB = ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม = 6

ความสูงของสามเหลี่ยม ABC = ระยะทางจากจุด C มายังเส้นตรง L

$$= \frac{|4(-1) + 3(-2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{15}{5} = 3$$

สรุปพื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot$ สูง $= \frac{1}{2}(6)(3) = 9$

การตัดตัวเลือก
1. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง (2,-1) และรัศมี 3
2. ลากเส้นตรง L : $4x+3y-5 = 0$
3. วัดความยาว AB ได้ 6
4. วัดระยะทางจาก C(-1,-2) มายัง L ได้ 3

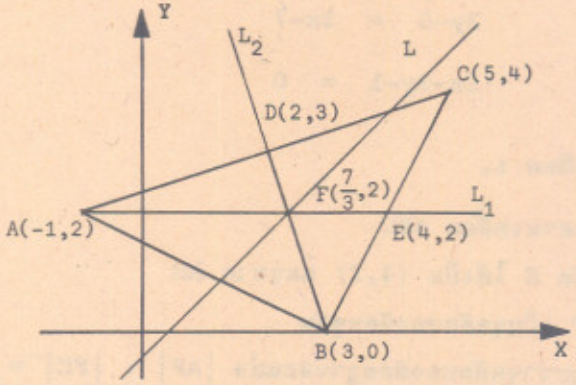
เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}(6)(3) = 9$

เพราะว่าค่าของตัวเลขในแต่ละตัวเลือกแตกต่างกันมาก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งดีกว่า

39. ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ต้องวาดรูปและเขียนจุดจะทำให้คิดง่ายขึ้น



จุดกึ่งกลางของด้าน AC คือ $(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}) = (2,3)$

จุดกึ่งกลางของด้าน BC คือ $(\frac{3+5}{2}, \frac{0+4}{2}) = (4,2)$

L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A(-1,2) และ E(4,2)

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง L_1 คือ $y = 2$

L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด B(3,0) และ D(2,3) คือ

$$\frac{y-0}{x-3} = \frac{3-0}{2-3}$$

$$-y = 3x-9$$

$$3x+y-9 = 0$$

การหาจุดตัด L_1 และ L_2 แทนค่า $y = 2$ ลงในสมการ L_2

$$3x+2-9 = 0$$

$$x = \frac{7}{3}$$

เพราะฉะนั้นมัธยฐานตัดกันที่จุดที่ L_1 ตัดกับ L_2 คือ $F(\frac{7}{3}, 2)$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, \frac{7}{3})$ และมีความชันเท่ากับ 1 คือ

$$y-2 = (1)(x-\frac{7}{3})$$

$$3y-6 = 3x-7$$

$$3x-3y-1 = 0$$

การตัดตัวเลือก 1.

1. เขียนสามเหลี่ยม ABC
2. หาพิกัด E ได้เป็น (4,2) และลาก AE
3. ให้ F เป็นจุดตัดของมัธยฐาน
4. เพราะว่าจุดตัดของมัธยฐานจะแบ่ง $|AF| : |FE| = 2 : 1$ และ $|AE| = 5$

   เพราะฉะนั้นพิกัด F คือ $(-1+2(\frac{5}{3}), 2) = (\frac{7}{3}, 2)$
5. เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด F มีความชัน 1

   เพราะฉะนั้นลากเส้นตรงผ่านจุด F และทำมุม 45° กับแกน X
6. จากรูปที่ได้พบว่าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (0.3,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,-0.3)

พิจารณาจุดตัดแกน X และแกน Y ของตัวเลือก

1. $(0, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, 0)$
2. $(0, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, 0)$
3. $(0, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 0)$
4. $(0, \frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 0)$

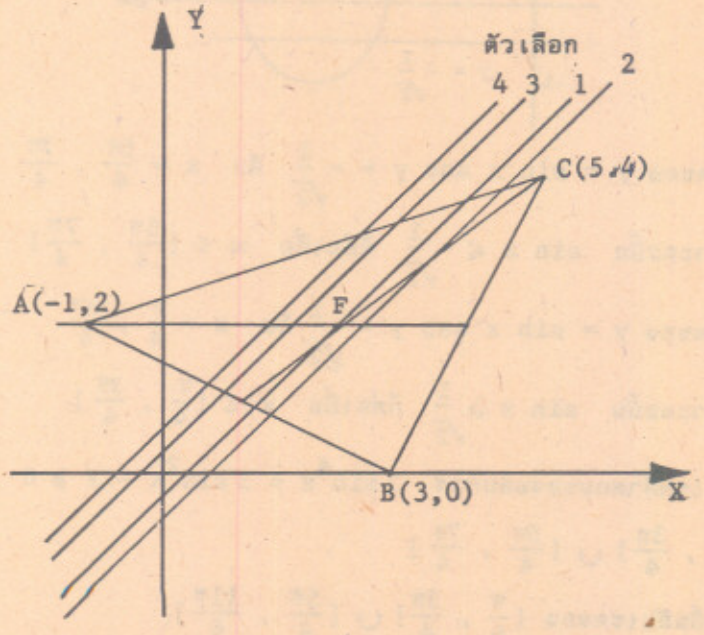
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

การตัดตัวเลือก 2 จากการที่เราทราบว่า $F(\frac{7}{3}, 2)$ ต้องอยู่บนเส้นตรง เพราะฉะนั้นเราใช้การแทนค่า $x = \frac{7}{3}$, $y = 2$ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

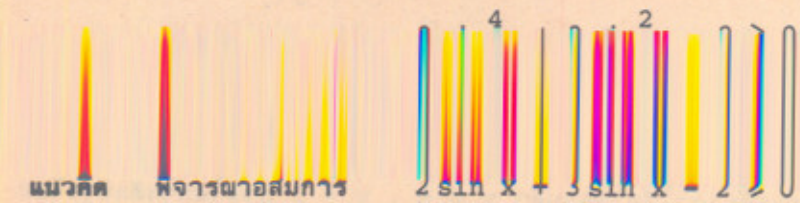
1. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) - 1 = 0$
2. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) + 1 \neq 0$
3. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) - 2 \neq 0$
4. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) + 2 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 3 คำถามและตัวเลือกแบบนี้วาดรูปทั้งโจทย์และเส้นตรงในตัวเลือกก็ตัดตัวเลือกทิ้งได้แล้ว



40. ตอบ 3.



แนวคิด พิจารณาอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$

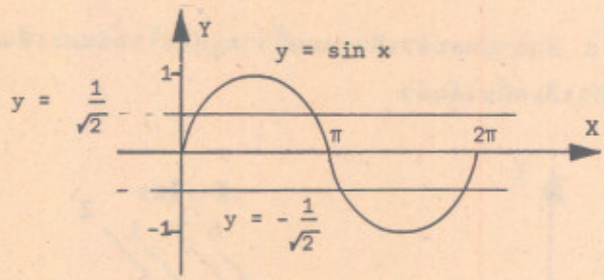
$$(2\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 2) \geq 0$$

เพราะว่า $\sin^2 x + 2 > 0$ เพราะฉะนั้น $2\sin^2 x - 1 \geq 0$

$$\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ หรือ } \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

พิจารณาจากกราฟ $y = \sin x$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



จุดตัดของ $y = \sin x$ และ $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $x = \frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ก็ต่อเมื่อ $x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

จุดตัดของ $y = \sin x$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ก็ต่อเมื่อ $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$ คือ

$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

ซึ่งเป็นสับเซตของ $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$

การตัดตัวเลือก เลือกค่า x ที่แทนค่าได้ง่ายๆ เช่น

$x = \frac{3\pi}{2}$ ทำให้ $2\sin^4\frac{3\pi}{2} + 3\sin^2\frac{3\pi}{2} - 2 = 2+3-2$

$= 3 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3\pi}{2}$ ได้ แต่ $\frac{3\pi}{2}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบไม่เป็นสับเซตของตัวเลือก 1. แน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $x = \frac{5\pi}{4}$ หรือ $\frac{7\pi}{4}$ เพื่อจะได้จำแนกตัวเลือกได้

เพราะว่า $2\sin^4\frac{7\pi}{4} + 3\sin^2\frac{7\pi}{4} - 2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 2 = 0 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{7\pi}{4}$ ได้ แต่ $\frac{7\pi}{4}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

41. **ตอบ** 4.

แนวคิด จากสูตร $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

เพราะฉะนั้น $2\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$

$$3[1 - 2\sin^2\alpha] - 2[1 - 2\sin^2\beta] = -3$$

$$3 - 6\sin^2\alpha - 2 + 4\sin^2\beta = -3$$

$$-6\sin^2\alpha + 4\sin^2\beta = -4$$

$$3\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta = 2 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

จากโจทย์ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

เพราะฉะนั้น แทนค่า $\sin\alpha = 2\sin\beta$ ใน (1)

$$3[2\sin\beta]^2 - 2\sin^2\beta = 2$$

$$12\sin^2\beta - 2\sin^2\beta = 2$$

$$10\sin^2\beta = 2$$

$$\sin^2\beta = \frac{1}{5}$$

เพราะว่า $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

และ $\sin\alpha = 2\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

นอกจากนั้น $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ และ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

สรุป $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= 1$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\alpha,\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\sin(\alpha+\beta) = 0$ ได้

ก็ต่อเมื่อ ($\alpha = 0$ และ $\beta = 0$) หรือ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ และ $\beta = \frac{\pi}{2}$)

แต่ $3\cos 0 - 2\cos 0 = 3-2 = 1 \neq -3$

และ $3\cos 2(\frac{\pi}{2}) - 2\cos 2(\frac{\pi}{2}) = -3+2 = -1 \neq -3$

เพราะฉะนั้น $\sin(\alpha+\beta) = 0$ ไม่ได้ เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

42. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาเซต A $\log(x-2) + \log(x+2) - \log 5 = 0$

$$\log(x-2)(x+2) = \log 5$$

$$(x-2)(x+2) = 5$$

$$x^2-4 = 5$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3, -3$$

เพราะว่า $x = -3$ ไม่ได้ ($\log(-3-2)$ หาค่าไม่ได้)

เพราะฉะนั้น $A = \{3\}$

พิจารณาเซต B $(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 x) = 1$

$$\frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 5} = 1$$

$$\frac{\log x}{\log 3} = 1$$

$$\log x = \log 3$$

$$x = 3$$

เพราะฉะนั้น $B = \{3\}$

สรุป $A = B$ ถูกต้อง

43. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $h(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)}$

$$g(x) = \log_5(x-2)$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$

$$= h(x) + g(x)$$

ดังนั้น $D_f = D_h \cap D_g$

พิจารณาโดเมนของ h $h(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)}$

$$0 \leq \arcsin(\log_3 x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \log_3 x \leq 1$$

$$1 \leq x \leq 3$$

เพราะฉะนั้น $D_h = [1,3]$

พิจารณาโดเมนของ g $g(x) = \log_5(x-2)$

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$

เพราะฉะนั้น $D_g = (2,\infty)$

สรุป $D_f = D_h \cap D_g = [1,3] \cap (2,\infty) = (2,3]$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 < 2$

เพราะฉะนั้น $(2, \frac{\pi}{2}) = \phi$ และ $(2, \frac{\pi}{2}] = \phi$

ลองแทนค่า x ที่หา f(x) ได้ง่าย เช่น x = 3

เพราะว่า $f(3) = \sqrt{\arcsin(\log_3 3)} - \log_5(3-2)$

$= \sqrt{\arcsin 1} - 0$

$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

เพราะฉะนั้น $3 \in D_f$

เพราะว่า 3 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 1., 3. และ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้ง

44. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\log_a(ax) + 2\log_a(a^2x) + 3\log_a(a^3x) + \ldots + 10\log_a(a^{10}x)$$

$$= \log_a a + \log_a x + 2\log_a a^2 + 2\log_a x + \ldots + 10\log_a a^{10} + 10\log_a x$$

$$= \left[\log_a a + 4\log_a a + 9\log_a a + \ldots + 100\log_a a\right] + \left[1 + 2 + 3 + \ldots + 10\right]\log_a x$$

$$= \left[1 + 4 + 9 + \ldots + 100\right] + 55\log_a x$$

$$= 385 + 55\log_a x$$

เพราะฉะนั้น

$$385 + 55\log_a x = 110$$

$$55\log_a x = -275$$

$$\log_a x = \frac{-275}{55} = -\frac{55}{11} = -5$$

$$\log_a x = -5$$

$$x = a^{-5}$$

การตัดตัวเลือก โจทย์ข้อนี้ถ้าพิจารณาในลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ดังนั้นการแทนค่า a บางค่าจะทำให้คิดเลขได้ง่ายกว่าการทำแบบแรก ตัวอย่างเช่น a = 10 จะทำให้คิดเลขง่าย

$$\log(10x) + 2\log(10^2x) + 3\log(10^3x) + \ldots + 10\log(10^{10}x) = 110$$

ลองจัดรูปอีกแบบหนึ่งเพื่อให้แตกต่างจากแบบแรก

$$\log(10x) + \log(10^4x^2) + \log(10^9x^3) + \ldots + \log(10^{100}x^{10}) = 110$$

$$\log(10^{1+4+9+\ldots+100}\, x^{1+2+3+\ldots+10}) = 110$$

$$\log(10^{385}x^{55}) = 110$$

$$10^{385}x^{55} = 10^{110}$$

$$x^{55} = 10^{-275} = (10^{-5})^{55}$$

$$x = 10^{-5}$$

ตรงกับตัวเลือก 2. เมื่อ $a = 10$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

45. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ $F_n(x) = \int \frac{1}{x^{2n}}\,dx = \int x^{-2n}\,dx = \frac{x^{-2n+1}}{-2n+1} + K$

เพราะว่า $a_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^{2(1)}}\,dx = F_1(2) - F_1(0)$

และ $F_1(0) = \frac{0^{-2+1}}{-2+1} + K$ หาค่าไม่ได้

ในทำนองเดียวกัน $a_2, a_3, a_4, \ldots$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $(1-2n)a_n$ หาค่าไม่ได้ทุกค่า $n = 1,2,3,\ldots$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2n)a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

46. ตอบ 4.

แนวคิด $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{|1-x|}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{-(1-x)}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}$

$= \lim_{x \to 1^+} -(\sqrt{x}+1) = -2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{|x|-1}{\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-(1-x)}{\sqrt{1-x}}$

$= \lim_{x \to 1^-} -\sqrt{1-x} = 0$

ผลสรุปแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้ 1. ผิด 2. ผิด

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0-2 = -2 \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

4. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0-2 = -2$ ถูกต้อง

47. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6x + 2b$

เพราะว่า $f''(-1) = 6$

เพราะฉะนั้น $6(-1) + 2b = 6$

$2b = 12$

$b = 6$

จาก $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$= 3x^2 + 12x + c$

เพราะว่า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤต

เพราะฉะนั้น $f'(-2) = 0$

$3(-2)^2 + 12(-2) + c = 0$

$12 - 24 + c = 0$

$c = 12$

สรุป $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

และ $f''(x) = 6x + 12$

เพราะว่า $f'(x) = 3(x^2+4x+4) = 3(x+2)^2$

เพราะฉะนั้น $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty,\infty)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,\infty)$

48. ตอบ 3.

แนวคิด การหาสูตร $f^{-1}(x)$

จากโจทย์ $f(x) = \sqrt{x}$ ให้ $y = \sqrt{x}$

$$y^2 = x$$

$$x = y^2$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = x^2$

และ $$g(x) = \frac{f^{-1}(x) + 1}{\sqrt{x}} = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

เพราะว่า $x^{\frac{3}{2}} > 0$ และ $x^{-\frac{1}{2}} > 0$ เมื่อ $x \in [1,4]$

เพราะฉะนั้น $g(x) > 0$ ทุกค่า $x \in [1,4]$

และพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และแกน X มีค่าเท่ากับ $\int_1^4 g(x)\,dx$

ให้ $$G(x) = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

$$G(4) = \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}} = \frac{84}{5} + C$$

$$G(1) = \frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + 2(1)^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{5} + C$$

เพราะฉะนั้น $$\int_1^4 g(x)\,dx = G(4) - G(1) = \frac{84}{5} - \frac{12}{5}$$

$$= \frac{72}{5}$$

49. ตอบ 1.

แนวคิด $X = (B + C)A$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

การตัดตัวเลือก เมื่อได้ X แล้วเราสามารถใช้เหตุผลตัดตัวเลือกได้ โดยการเอาเมตริกซ์ในตัวเลือกมาคูณกับ X ว่าได้ I หรือไม่ เช่น

ตัวเลือก 1. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้าเป็นแบบนี้ถือว่าโชคดีมากๆ ที่ตัวเลือกที่ต้องการอยู่ตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้น $X^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

ส่วนตัวเลือกที่เหลือตัดทิ้งไปหมดเลย

50. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

เพราะฉะนั้น $AA^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A \cdot \text{adj}(A))$

$$I = \frac{1}{\det(A)} (A \cdot \text{adj}(A))$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I$$

$$A \cdot \text{adj}(A) - BA = \det(A) \cdot I - BA$$

เพราะว่า $A \cdot \text{adj}(A) - BA = I$

เพราะฉะนั้น $I = \det(A) \cdot I - BA$

$$BA = \det(A) \cdot I - I$$

$$BA = (\det(A) - 1) \cdot I$$

$$\det(BA) = (\det(A) - 1)^4 \cdot \det(I)$$

$$\det(B)\det(A) = (\det(A) - 1)^4$$

$$0 = (\det(A) - 1)^4$$

สรุป $\det(A) = 1$

หมายเหตุ มิติของ A และ B เป็น $n \times n$ ก็ได้

51. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ x_1 = จำนวนสินค้าชนิดที่ 1

x_2 = จำนวนสินค้าชนิดที่ 2

รายได้ $P = 300x_1 + 400x_2$

วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 มีการนำมาใช้เท่ากับ $2x_1 + 3x_2$

เพราะว่าวัตถุดิบแหล่งที่ 1 มี 18 หน่วย

เพราะฉะนั้น $2x_1 + 3x_2 \leqslant 18$

วัตถุดิบจากแหล่งที่ 2 มีการนำมาใช้เท่ากับ $x_1 + 2x_2$

เพราะว่าวัตถุดิบแหล่งที่ 2 มี 10 หน่วย

เพราะฉะนั้น $x_1 + 2x_2 \leqslant 10$

สรุปปัญหากำหนดการเชิงเส้นคือ

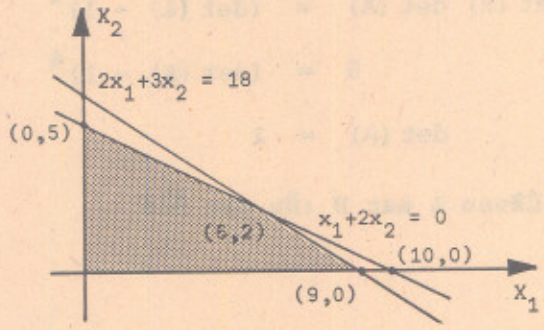
การหาค่าสูงสุดของ $P = 300x_1 + 400x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 3x_2 \leqslant 18$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 10$

$x_1 \geqslant 0$ และ $x_2 \geqslant 0$

กราฟแสดงบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ



จุดมุมของบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ (0,0), (9,0), (0,5) และ (6,2)

จุดมุม (x_1,x_2)	$P = 300x_1 + 400x_2$
(0,0)	0
(9,0)	2700
(0,5)	2000
(6,2)	2600

เพราะฉะนั้น $x_1 = 9$, $x_2 = 0$ ทำให้รายได้ P มีค่ามากที่สุด

เท่ากับ 2700 บาท

เพราะว่า $x_1 = 9$ และ $x_2 = 0$

เพราะฉะนั้น วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 ถูกใช้หมด

และวัตถุดิบจากแหล่งที่ 2 เหลือ 10 หน่วย

สรุปตัวเลือก 3. เป็นจริง

52. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ P_n = ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม n , $n = 1,2,\ldots,6$

ให้ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต $P_1,P_2,\ldots,P_6$

เพราะว่าผลบวกของความน่าจะเป็น $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = 1$

และ $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = \frac{6}{2}\left[2P_1 + (6-1)d\right]$

เพราะฉะนั้น $\frac{6}{2}\left[2P_1 + 5d\right] = 1$

$$2P_1 + 5d = \frac{1}{3}$$

$$d = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3} - 2P_1\right]$$

เพราะว่า $P_1 = \frac{1}{9}$ เพราะฉะนั้น $d = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right] = \frac{1}{45}$

ดังนั้น $P_n = \frac{1}{9} + (n-1)(\frac{1}{45})$, $n = 1,2,\ldots,6$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มคู่ $= P_2 + P_4 + P_6$

$$= \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right] + \left[\frac{1}{9} + \frac{3}{45}\right] + \left[\frac{1}{9} + \frac{5}{45}\right]$$

$$= \frac{24}{45}$$

$$= \frac{8}{15}$$

53. ตอบ 4.

แนวคิด เหตุการณ์ที่ผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คนเลือกร้องเพลงเดียวกัน คือเหตุการณ์ที่ตรงข้ามกับทุกคนร้องเพลงต่างกัน

ให้ E = เหตุการณ์ที่ทุกคนร้องเพลงต่างกัน

เพราะฉะนั้น E' = เหตุการณ์ที่มีอย่างน้อย 2 คนร้องเพลงเดียวกัน

S = เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เพราะว่ามีนักร้อง 3 คน แต่ละคนเลือกร้องเพลงได้ 5 เพลง

เพราะฉะนั้น $n(S) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

การนับสมาชิกของ E

ขั้นที่ 1 นักร้องคนที่ 1 เลือกร้องเพลงได้ 5 เพลง
ขั้นที่ 2 นักร้องคนที่ 2 เลือกร้องเพลงได้ 4 เพลง
ขั้นที่ 3 นักร้องคนที่ 3 เลือกร้องเพลงได้ 3 เพลง

เพราะฉะนั้น $n(E) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

สรุป $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{125}$

$P(E') = 1 - P(E)$

$= 1 - \frac{60}{125}$

$= \frac{65}{125}$

$= \frac{13}{25}$

54. ตอบ คำตอบขึ้นอยู่กับการแปลข้อความภาษาไทย

แนวคิด กำหนดเหตุการณ์ต่างๆ ดังนี้

E = เหตุการณ์ที่จะไปเที่ยวประเทศอังกฤษ

E' = เหตุการณ์ที่จะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษ

G = เหตุการณ์ที่จะไปเที่ยวประเทศเยอรมัน

G' = เหตุการณ์ที่จะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมัน

จากข้อกำหนดของโจทย์

ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปเที่ยวประเทศอังกฤษเท่ากับ 0.5

เพราะฉะนั้น $P(E) = 0.5$, $P(E') = 0.5$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับ 0.8

เพราะฉะนั้น $P(G') = 0.8$

และ $P(G) = 1 - P(G') = 1 - 0.8 = 0.2$

สำหรับคำว่า "ไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศ"

ผู้เขียนขอให้ความหมายนี้ตรงกับเหตุการณ์ที่สมชายไปเที่ยวทั้งประเทศอังกฤษและประเทศเยอรมัน นั่นคือเหตุการณ์ $E \cap G$

เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) = 0.6$

เพราะว่า $E \cap G \subset E$ เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) \leq P(E)$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งว่า $0.6 \not\leq 0.5$

หมายเหตุ สำหรับปัญหาที่กำหนดให้ $P(E) = 0.5$

$P(G') = 0.8$

และ $P(E \cup G) = 0.6$

จงหาค่าของ $P(E' \cap G')$ มีวิธีหาค่าดังนี้

$$P(E' \cap G') = P((E \cup G)')$$
$$= 1 - P(E \cup G)$$
$$= 1 - 0.6$$
$$= 0.4$$

55. **ตอบ** 3.

แนวคิด จำนวนเด็กทั้งหมด $N = 3+a+6+4 = 13+a$

อายุ (ปี)	จำนวนเด็ก	ความถี่สะสม
1 - 3	3	3
4 - 6	a	3 + a
7 - 9	6	9 + a
10 - 12	4	13 + a

เพราะว่ามัธยฐานเท่ากับ 7 และ

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M}\right] I$$

$L = 6.5$

$\Sigma f_L = 3 + a$

$f_M = 6$

$I = 3$

ดังนั้น $$7 = 6.5 + \left[\frac{\frac{13+a}{2} - (3+a)}{6}\right] (3)$$

$$= 6.5 + \left[\frac{13 + a - 6 - 2a}{12}\right] (3)$$

$$= 6.5 + \left[\frac{7 - a}{4}\right]$$

$$28 = 26 + 7 - a$$

$$a = 5$$

การคัดตัวเลือก ข้อสอบนี้จัดอยู่ในประเภทที่เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อดูว่า a เท่าใดจึงทำให้มัธยฐานเท่ากับ 7

ตัวเลือก 1 $a = 3$, $N = 16$, $\frac{N}{2} = 8$

X	f	F
1 - 3	3	3
4 - 6	3	6
7 - 9	6	12
10 - 12	4	16

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M} \right] I$$

$$= 6.5 + \left[\frac{8 - 6}{6} \right] (3)$$

$$= 6.5 + 1$$

$$= 7.5 \neq 7$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2 $a = 4$, $N = 17$, $\frac{N}{2} = 8.5$

X	f	F
1 - 3	3	3
4 - 6	4	7
7 - 9	6	13
10 - 12	4	17

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M} \right] I$$

$$= 6.5 + \left[\frac{8.5 - 7}{6} \right] (3)$$

$$= 6.5 + 0.75$$

$$= 7.25 \neq 7$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $a = 5$, $N = 18$, $\frac{N}{2} = 9$

X	f	F
1 - 3	3	3
4 - 6	5	8
7 - 9	6	14
10 - 12	4	18

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M} \right] I$$

$$= 6.5 + \left[\frac{9 - 8}{6} \right] (3)$$

$$= 6.5 + 1.5$$

$$= 7$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

56. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น $\frac{5+a+b+1}{4} = 4$

$$a+b+6 = 16$$

$$a+b = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

เพราะว่าความแปรปรวนเท่ากับ 5

เพราะฉะนั้น $\frac{(5-\bar{x})^2 + (a-\bar{x})^2 + (b-\bar{x})^2 + (1-\bar{x})^2}{4} = 5$

$$(5-4)^2 + (a-4)^2 + (b-4)^2 + (1-4)^2 = 20$$

$$(a-4)^2 + (b-4)^2 = 10 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

แทนค่า $b = 10-a$ ใน (2)

$$(a-4)^2 + (10-a-4)^2 = 10$$

$$(a-4)^2 + (6-a)^2 = 10$$

$$a^2-8a+16+36-12a+a^2 = 10$$

$$2a^2-20a+42 = 0$$

$$a^2-10a+21 = 0$$

$$(a-3)(a-7) = 0$$

$$a = 3, 7$$

จาก (1) ; $a = 3$ จะได้ $b = 7$

$a = 7$ จะได้ $b = 3$

เพราะว่า $1 \leqslant a < b$

เพราะฉะนั้น $a = 3$ และ $b = 7$

สรุป $b-a = 7-3 = 4$

การคัดตัวเลือก

เมื่อเราทราบว่า $a+b = 10$ ลองคำนวณค่า a,b จาก b-a ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $b-a = 2$

จาก $a+b = 10$

ดังนั้น $2b = 12$

$$b = 6$$

$$a = 4$$

ความแปรปรวนของข้อมูล 5,4,6,1

คือ $\frac{(5-4)^2 + (4-4)^2 + (4-6)^2 + (1-4)^2}{4} \neq 5$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. $b-a = 4$

จาก $a+b = 10$

ดังนั้น $2b = 14$

$$b = 7$$

$$a = 3$$

ความแปรปรวนของข้อมูล 5,3,7,1

คือ $\frac{(5-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2 + (1-4)^2}{4} = 5$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

ส่วนตัวเลือก 3. และ 4. ตัดทิ้งได้

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 1)

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข.

ปี พ.ศ. 2537 พร้อมเฉลย ด้วยวิธีจริง วิธีลัด และ วิธีตัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 3 ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. **ตอบ** 12

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกของ F มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก {1,2,3} ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

สมมติสมาชิกที่เลือกได้คือ x,y

ต่อไปพิจารณาวิธีการส่งค่าจาก {x,y} ไปยัง {a,b}

ขั้นที่ 2 การส่งค่าของ x ไปยัง {a,b} ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของ y ไปยัง {a,b} ทำได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นโดยกฎการนับจำนวนวิธีจะได้ว่า

$$n(F) = (3)(2)(2)$$
$$= 12$$

2. **ตอบ** 270

แนวคิด เพราะว่า $15015 = 15 \cdot 1001$

$= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 143$

$= 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น.$(x,y) = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

เพราะว่า $x \leq$ ค.ร.น.(x,y) และ $y \leq$ ค.ร.น.(x,y)

เพราะฉะนั้น $x \leq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ และ $y \leq 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.(x,y) = 1

เพราะว่า [ค.ร.น.(x,y)][ห.ร.ม.(x,y)] = xy

เพราะฉะนั้น [3·5·7·11·13][1] = xy

นั่นคือ xy = 3·5·7·11·13

เพราะว่า 80 < x < 200 และ x = pq เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง p ≠ q

ดังนั้นกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้ของค่า x คือ 7·13 , 11·13

เมื่อ x = 7·13 จะได้ y = 3·5·11 = 165

เมื่อ x = 11·13 จะได้ y = 3·5·7 = 105

สรุป ผลบวกของค่าของ y ทั้งหมดเท่ากับ 165+105 = 270

3. **ตอบ** 3

แนวคิด จาก $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$

$$a^2-ab-ac+ab-b^2-bc+ac-bc-c^2 = -3bc$$

$$a^2-b^2-c^2-2bc = -3bc$$

$$a^2-b^2-c^2 = -bc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่า $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

เพราะฉะนั้น $a^2-b^2-c^2 = -2bc\cos\hat{A}$

จาก (1) ; $-bc = -2bc\cos\hat{A}$

เพราะฉะนั้น $\cos\hat{A} = \frac{1}{2}$

$$\hat{A} = 60^\circ$$

เพราะว่า $4a^2 = 6b^2$ เพราะฉะนั้น $a = \frac{\sqrt{6}}{2} b$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$

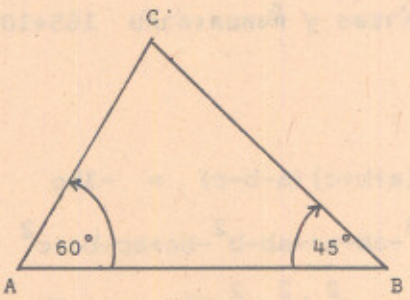
$$\frac{\sin 60^\circ}{(\frac{\sqrt{6}}{2} b)} = \frac{\sin \hat{B}}{b}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{2}{\sqrt{6}} \sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\hat{B} = 45^\circ$ หรือ 135°

ถ้า $\hat{B} = 135^\circ$ แล้ว $\hat{A} + \hat{B} = 195^\circ > 180^\circ$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $B = 45^\circ$ เท่านั้น



เพราะว่า $3\hat{A} - 2\hat{B} = 3(60^\circ) - 2(45^\circ)$

$= 180^\circ - 90^\circ$

$= 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $1 + 2\sin^2(3\hat{A} - 2\hat{B}) = 1 + 2\sin^2 90^\circ$

$= 1 + 2$

$= 3$

4. ตอบ 2.25

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$

$$kx^2 + 4(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 8 + 1$$

$$kx^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{k}})^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงรีคือ $(0, \frac{1}{2})$

การหาพิกัดจุดตัดแกน Y ของวงรี ทำได้โดยแทนค่า $x = 0$ ลงในสมการ $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$ จะได้

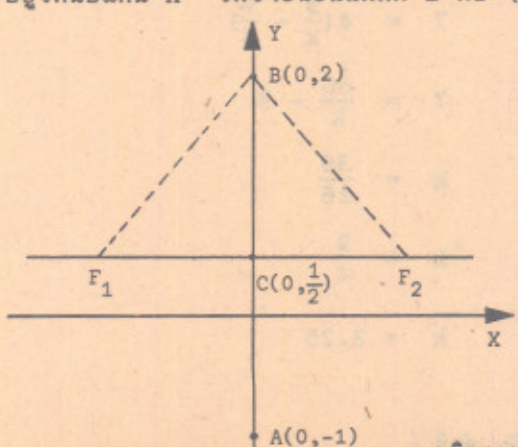
$$4y^2 - 4y = 8$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

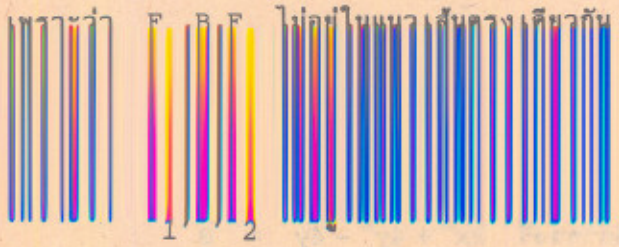
เพราะฉะนั้นจุดตัดแกน Y คือ (0,2) และ (0,-1)

เพราะว่า B อยู่เหนือแกน X เพราะฉะนั้นพิกัด B คือ (0,2)



เพราะว่า $B(0,2)$ เป็นจุดบนวงรี และ $|BC| = \frac{3}{2}$

เพราะว่า F_1 B F_2 ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน



เพราะฉะนั้นแกนเอกขนานแกน X

$$a = \frac{3}{\sqrt{k}} \quad \text{และ} \quad b = \frac{3}{2}$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

พื้นที่สวมเหลี่ยม $F_1BF_2 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |F_1F_2|$

$$\frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2}) \cdot 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$\sqrt{7} = 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$7 = 4(\frac{9}{k} - \frac{9}{4})$$

$$7 = \frac{36}{k} - 9$$

$$k = \frac{36}{16}$$

$$k = \frac{9}{4}$$

$$k = 2.25$$

5. **ตอบ** 3

แนวคิด เพราะว่า α เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 + 4\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $\alpha^3 = 9 + 4\sqrt{5}$

เพราะว่า β เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 - 4\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $\beta^3 = 9 - 4\sqrt{5}$

การหาค่าของ $\alpha\beta$

$$\alpha^3\beta^3 = (9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})$$

$$(\alpha\beta)^3 = 81 - 80 = 1$$

เพราะว่า $\alpha\beta$ เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $\alpha\beta = 1$

การหาค่า $\alpha+\beta$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} = 18$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$18 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha\beta)$$

$$18 = (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2 - 3(1))$$

แทนค่า $x = \alpha+\beta$ จะได้ $18 = x(x^2-3)$

$$x^3 - 3x - 18 = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+6) = 0$$

จะได้ $x-3 = 0$ หรือ $x^2+3x+6 = 0$

เพราะว่า $\alpha+\beta$ เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนจริง และ

$$x^2 + 3x + 6 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{15}{4}$$

$$= (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} \neq 0$$

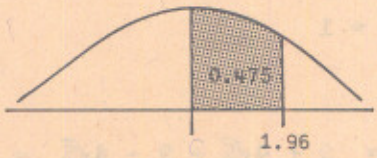
เพราะฉะนั้น $x-3 = 0$ นั่นคือ $x = 3$

สรุป $\alpha+\beta = 3$

6. **ตอบ** 24

แนวคิด ให้ x เป็นคะแนนสูงสุดที่ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5

จากภาพโค้งของคะแนนมาตรฐาน z



คะแนนมาตรฐาน $z = 1.96$ ทำให้พื้นที่ใต้โค้งปกติจาก $-\infty$ ถึง 1.96

มีค่าเท่ากับ 0.975

เพราะฉะนั้น เปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5 ของคะแนนมาตรฐาน $z = 1.96$

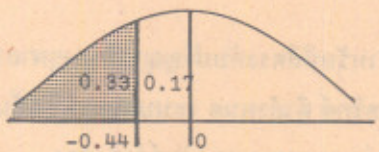
จาก $$z = \frac{x - \bar{x}}{10}$$

$$1.96 = \frac{x - \bar{x}}{10}$$

เพราะฉะนั้น $x - \bar{x} = 19.6$ .....(1)

ให้ y เป็นคะแนนต่ำสุดที่ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33

จากภาพโค้งของคะแนนมาตรฐาน z



คะแนนมาตรฐาน $z = -0.44$ ทำให้พื้นที่ใต้โค้งปกติจาก $-\infty$ ถึง -0.44 มีค่าเท่ากับ 0.33

เพราะฉะนั้นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 ของคะแนนมาตรฐาน $z = -0.44$

จาก $$z = \frac{y - \bar{x}}{10}$$

$$-0.44 = \frac{y - \bar{x}}{10}$$

เพราะฉะนั้น $y - \bar{x} = -4.4$

สรุป พิสัย = คะแนนสูงสุด - คะแนนต่ำสุด

$= x - y$

$= (x - \bar{x}) - (y - \bar{x})$

$= 19.6 - (-4.4)$

$= 24$

ผลงานตำราของผู้เขียน

พีชคณิตเชิงเส้น

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา เมทริกซ์ ตัวกำหนด ระบบสมการเชิงเส้น ค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง พหุนามเชิงเส้นคู่ และพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง

ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา การหารากของสมการ $f(x) = 0$ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เวกเตอร์ เมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการที่มิใช่เชิงเส้น การประยุกต์ของเวกเตอร์และเมทริกซ์ พร้อมโปรแกรมคอมพิวเตอร์

พีชคณิตระดับอุดมศึกษา

เป็นหนังสือระดับปริญญาตรีของ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย เซต ฟังก์ชัน กลุ่ม กลุ่มสมมาตร กลุ่มวิธีเรียงสับเปลี่ยน สมบัติของจำนวนเต็ม ทฤษฎีเกี่ยวกับการหารลงตัว ฟังก์ชันถ่ายแบบ ฟังก์ชันถอดแบบ และทฤษฎีบทหลักมูลของการถอดแบบ

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO

เป็นหนังสือคู่มือในการใช้งานโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO ซึ่งเป็นโปรแกรมช่วยในการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ทำการวิเคราะห์ความไว วิเคราะห์ปัญหาคู่ควบ คำนวณในรูปแบบของตารางซิมเพลกซ์

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์ ก. 2538

วันจันทร์ที่ 10 เมษายน 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ข้อความ (ก) และข้อความ (ข) ในข้อใดต่อไปนี้สมมูลกัน

   1. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไปเที่ยว
      (ข) ดำไม่ไปเที่ยวหรือแดงไปโรงเรียน

   2. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไม่ไปเที่ยว
      (ข) แดงไปโรงเรียนหรือดำไปเที่ยว

   3. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไม่ไปเที่ยว
      (ข) ถ้าดำไปเที่ยวแล้วแดงไปโรงเรียน

   4. (ก) ถ้าแดงไม่ไปโรงเรียนแล้วดำไปเที่ยว
      (ข) ถ้าดำไม่ไปเที่ยวแล้วแดงไปโรงเรียน

2. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ทำให้ประพจน์ $\forall x [x^2+2x-3 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   1. $(-\infty,-3)$
   2. $(-2,1)$
   3. $(0,10)$
   4. $(1,\infty)$

3. กำหนดความสัมพันธ์

   $r_1 = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x}\}$ และ $r_2 = \{(x,y) \mid x = 3\}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. r_1^{-1} และ r_2^{-1} เป็นฟังก์ชัน

2. r_1^{-1} เป็นฟังก์ชัน แต่ r_2^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. r_1^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ r_2^{-1} เป็นฟังก์ชัน

4. r_1^{-1} และ r_2^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

4. ให้ I คือเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $A = \{x \in I \mid x = 2k, k \in I\}$ และ

$B = \{x \in I \mid 2x^2-7x-4 \leq 0\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 8
3. 16
4. 32

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x+2}$ และ $g(x) = 3x+1$

แล้ว $f \circ g^{-1}(4)$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{3}{2}$

6. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $a^2-b^2 > 0$ แล้ว $|a| > |b|$
2. $a^2 + b^2 \geq 2ab$
3. $|a-b| \geq |a| - |b|$
4. $\sqrt{a^2+b^2} \leq |a+b|$

7. เซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{x^2}{x+1} > x$$

เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-2)$
2. $(-10,-1)$
3. $(-2,1)$
4. $(1,\infty)$

8. มีลูกแก้ว 2 กอง กองหนึ่งเป็นลูกแก้วสีแดงจำนวน 143 ลูก อีกกองหนึ่งสีเหลืองจำนวน 338 ลูก ต้องการแบ่งลูกแก้วทั้งสองกองนี้ ออกเป็นกองเล็กๆ โดยมีจำนวนลูกแก้วกองละเท่าๆ กัน และมีจำนวนลูกแก้วในกองเล็กๆ เหล่านั้นมากที่สุด

ถ้ากองลูกแก้วสีแดงแบ่งได้ x กอง และสีเหลืองแบ่งได้ y กอง แล้ว x+y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11
2. 13
3. 26
4. 37

9. เส้นตรงที่ผ่านจุด (4,-3) และจุด (-2,6) มีระยะตัดแกน x = a และและระยะตัดแกน y = b แล้ว a,b คือข้อใดต่อไปนี้

1. a = 2 , b = 3
2. a = 3 , b = 2
3. a = -2 , b = 3
4. a = -2 , b = -3

10. ให้ A เป็นวงกลม $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ และ B เป็นวงกลม $x^2+y^2-2x-4y+1 = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. วงกลม A ตัดกับวงกลม B
2. วงกลม A สัมผัสกับวงกลม B
3. วงกลม A ไม่ตัดและไม่สัมผัสกับวงกลม B
4. วงกลม B อยู่ภายในวงกลม A

11. ให้ A และ B เป็นจุดยอดของวงรี $49x^2 + 25y^2 - 1225 = 0$.

และ C เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2+20x = 0$ แล้ว

AC + BC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $5\sqrt{2}$
2. $10\sqrt{2}$
3. $\sqrt{74}$
4. $2\sqrt{74}$

12. ข้อความต่อไปนี้ข้อใดถูก

1. sin x มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $[\frac{-3\pi}{2}, -\pi]$
2. cos x มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $[\frac{-3\pi}{2}, -\pi]$
3. tan x มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
4. cot x มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

13. ค่าของ $3\tan^2(\pi + \frac{\pi}{6}) + \frac{4}{3}\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{8}\sec^3(\pi + \frac{\pi}{3})$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 3
3. $\frac{5}{2}$
4. $\frac{5+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

14. ถ้า $\cos\theta = \frac{4}{5}$ และ $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ แล้ว

ค่าของ $5\tan\theta + 4\sec^2\theta$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 8
3. 10
4. 20

15. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7-\sqrt{10}}{3}$
2. $\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$
3. $\frac{8-\sqrt{10}}{3}$
4. $\frac{8-2\sqrt{10}}{3}$

16. ถ้า $3\log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$ แล้ว x มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1,9)$
2. $(-2,7)$
3. $(1,10)$
4. $(2,12)$

17. จำนวนจริง x ที่ทำให้ $3^{2x+1} - 8(3^x) = 3$ เป็นสมาชิกของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1,0)$
2. $(-\frac{1}{2},1)$
3. $(\frac{1}{2},2)$
4. $(1,3)$

18. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 5 & \text{เมื่อ } x = 2 \\ x^3 & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 8$
2. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 8$
3. $f(2)$ หาค่าได้
4. f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

19. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{2x+1}$ และให้ g เป็นอนุพันธ์ของ f

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_f = D_g$
2. $D_g \subset D_f$ และ $D_g \neq D_f$
3. $D_f \subset D_g$ และ $D_f \neq D_g$
4. $D_f \cap D_g = \{-\frac{1}{2}\}$

20. กำหนดให้ $f(x) = x^4-2x^2$ $f(x)$ มีค่าลดลงในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1,0)$
2. $(0,1)$
3. $(1,2)$
4. $(2,\infty)$

21. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2-3$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f ถ้า $F(0) = 4$ แล้ว $F(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3

22. กำหนดให้ A และ B เป็น 2×2 เมตริกซ์ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $\det(A) = \det(B)$ แล้ว $A = B$
2. $\det(A^2) = 2\det(A)$
3. $\det(\frac{A}{2}) = \frac{1}{2}\det(A)$
4. $\det(AB) = \det(B)\det(A)$

23. ระบบสมการหนึ่งมี x, y และ z เป็นตัวแปร เมตริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของตัวแปรและค่าคงตัวของระบบสมการดังกล่าวคือ

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$x+y+z$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. -2
3. 1
4. 2

24. ครอบครัวๆ หนึ่งประกอบด้วย พ่อแม่และลูก 2 คน ถ้าครอบครัวนี้ต้องการขับรถไปชมงานมีโอไอแฟร์ โดยใช้รถยนต์ที่มี 4 ที่นั่ง โดยพ่อหรือแม่เป็นคนขับ จะมีจำนวนวิธีที่จะจัดสมาชิกในครอบครัวนั่งในรถยนต์คันนี้ได้เท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 8
3. 6
4. 4

25. ต้องการสร้างรหัสจากตัวอักษร A, B โดยกำหนดให้แต่ละรหัสอาจมีตัวอักษร 1 ตัว หรือ 2 ตัว หรือ 3 ตัว หรือ 4 ตัว เท่านั้น จะสร้างรหัสได้ทั้งหมดเท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. 16
2. 24
3. 30
4. 32

26. ในการแข่งขันฟุตบอลของทีมโรงเรียนต่างๆ จำนวน 50 ทีม ถ้าจัดการแข่งขันแบบพบกันหมด จำนวนครั้งของการจัดการแข่งขันทั้งหมดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1176
2. 1225
3. 2450
4. 2540

27. ข้อมูลชุดหนึ่งจัดเป็นอันตรภาคชั้นได้ดังนี้

2.5 - 2.9 3.0 - 3.4 3.5 - 3.9 4.0 - 4.5 4.5 - 4.9

ความกว้างของอันตรภาคชั้นคือข้อใดต่อไปนี้

1. ผลต่างระหว่าง 3.85 และ 3.55
2. ผลต่างระหว่าง 2.9 และ 2.5
3. ผลต่างระหว่าง 4.45 และ 4.00
4. ผลต่างระหว่าง 3.7 และ 3.2

28. กำหนดให้ $A = \frac{X_{max} - X_{min}}{2}$ $B = \frac{X_{max} + X_{min}}{2}$

$C = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ ต่อไปนี้ข้อใดถูก

1. A ใช้วัดค่ากลาง และ B ใช้วัดการกระจาย
2. A ใช้วัดค่ากลาง และ C ใช้วัดการกระจาย
3. B ใช้วัดค่ากลาง และ A ใช้วัดการกระจาย
4. C ใช้วัดค่ากลาง และ B ใช้วัดการกระจาย

29. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยตัวเลข 5 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ a ค่ามัธยฐานเท่ากับ b ถ้าให้ X_i แทนข้อมูลค่าที่ i, i = 1,2,3,4,5

และ $A = \sum_{i=1}^{5} (X_i - a)^2$, $B = \sum_{i=1}^{5} (X_i - b)^2$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \leqslant B$
2. $A \geqslant B$
3. $A < B$
4. $A > B$

30. สมมติว่าข้อมูลที่กำหนดให้เป็นดัชนีราคาผู้บริโภคของจังหวัดหนึ่งโดยมี ปี 2533 เป็นปีฐาน และเงินเดือนที่ศักดิ์ได้รับในปีต่างๆ

ปี	2533	2535	2537
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100	108.9	114.8
เงินเดือน	1,950	2,100	2,350

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าของเงิน 114.8 บาท ในปี 2537 มีค่าเทียบเท่ากับเงิน 100 บาท ในปี 2533

ข. รายได้ที่แท้จริงของศักดิ์ในปี 2537 เท่ากับ $\frac{2,350}{114.8}$ เมื่อใช้ปี 2533 เป็นปีฐาน

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. กำหนดให้ประพจน์ $[(A \rightarrow B) \rightarrow (C \wedge D)]$ และประพจน์ $[\sim(C \vee D)]$ มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งคู่ ค่าความจริงของประพจน์ A, B, C, D ในข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. A จริง และ B จริง
2. A เท็จ และ C จริง
3. B จริง และ C เท็จ
4. B เท็จ และ D เท็จ

32. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็มลบ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\forall x \left[\frac{|x|}{x} = 1 \right]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\exists x [x^2 - x - 6 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $\exists x [\log (x+2) = \log |x|]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $\forall x [||x|+1| = |x-1|]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

33. กำหนดให้ $f = \{(1,2),(3,4),(5,3),(6,1)\}$

$g = \{(2,1),(3,5),(4,6),(5,4)\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $g^{-1} \circ f = \{(3,5),(6,2)\}$

ข. $gf^{-1} = \{(2,1),(3,25),(4,18)\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

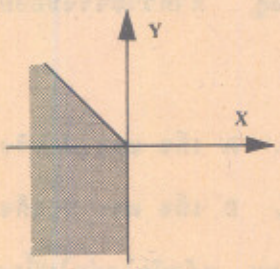
1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

34. ถ้า $A = \{(x,y) \in R \times R \mid |y| \geq x\}$

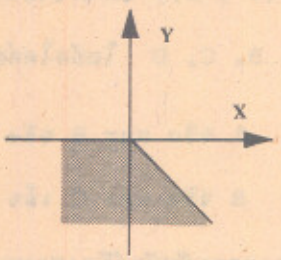
และ $B = \{(x,y) \in R \times R \mid |x| \geq y\}$

แล้วส่วนที่แรเงาของกราฟในข้อใดต่อไปนี้แทนเซต $A \cap B$

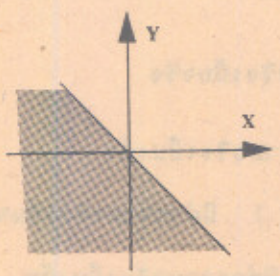
1.



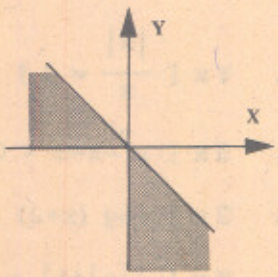
2.



3.



4.



35. ถ้า $f, g : R \to R$ โดย $g(x) = 3x$ และ $(f \circ g)(x) = -x^2$ แล้ว $(g \circ f)(-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3
2. $-\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{3}$
4. 3

36. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2-x-x^2$$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x^2} = x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \cup B = R$
2. $A \cap B = (0,1)$
3. $A - B = \phi$
4. $B - A = (1,\infty)$

37. เซตคำตอบของอสมการ $2x+2 < |x| < 7x+8$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1,0)$
2. $(-\frac{2}{3}, 1)$
3. $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$
4. $(0,2)$

38. ให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า 7 หาร a เหลือเศษ 1 7 หาร b เหลือเศษ 3 และ 7 หาร c เหลือเศษ 5 แล้ว 7 หาร $a(b+c)$ เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 4
4. 6

39. ถ้าพาราโบลามีจุดยอดที่ (0,0) มีแกน X เป็นแกนสมมาตร และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $4x+3y = 8$ กับ $2x+y = 2$ แล้ว พาราโบลาจะผ่านจุดใดต่อไปนี้

1. $(\frac{1}{4}, -2)$
2. $(-\frac{1}{4}, 2)$
3. $(2, -\frac{1}{4})$
4. $(-2, \frac{1}{4})$

40. ให้ไฮเพอร์โบลา H มีจุดโฟกัสที่จุด $F_1(-3,0)$ และ $F_2(3,0)$ และถ้า P เป็นจุดใดๆ บน H แล้ว $|PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{5}$ สมการของวงรีที่มีจุดยอดร่วมกับ H และมีความยาวแกนโทเท่ากับความยาวแกนสังยุคของ H มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $4x^2+5y^2 = 20$
2. $5x^2+4y^2 = 20$
3. $5x^2+9y^2 = 45$
4. $9x^2+5y^2 = 45$

41. ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมีพื้นที่ 20 ตารางหน่วย มุม $\hat{BAD}$ กาง 120° ถ้า AB ยาว 5 หน่วย แล้ว เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมรูปนี้มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 18
2. 20
3. $10 + 8\sqrt{3}$
4. $10 + \frac{16}{\sqrt{3}}$

42. ถ้า $\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{5}{3}$ แล้ว $\sin\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{30}{34}$
2. $\frac{15}{34}$
3. $\frac{25}{30}$
4. $\frac{15}{30}$

43. กำหนดให้ $A = \{x \mid \sqrt{x-4} = 2-\sqrt{x-8}\}$

$B = \{x \mid (\log_a x)(\log_2 a) = \log_5 125 \text{ , } a > 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \cap B = \phi$
2. $A = B$
3. $A \subset B$ และ $A \neq B$
4. $B \subset A$ และ $A \neq B$

44. เซตคำตอบของอสมการ

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(x^2+2)} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\log_2(4x-1)}$$

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(\frac{1}{4}, 2)$
2. $(1,3)$
3. $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup [2,\infty)$
4. $(-\infty,1] \cup [3,\infty)$

45. ถ้า b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{เมื่อ } -\infty < x < 1 \\ x+b & \text{เมื่อ } 1 \leqslant x < +\infty \end{cases}$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ แล้วอนุพันธ์ของ f ที่จุด $x = b$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f'(b) = 0$
2. $f'(b) = 1$
3. $f'(b) = 2$
4. ไม่มีอนุพันธ์

46. ถ้าเส้นตรงผ่านจุดกำเนิด และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2+2$ ในควอดรันท์ที่หนึ่ง แล้วสมการของเส้นตรงนี้คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $y = 3x$
2. $y = 4x$
3. $y = 2\sqrt{2x}$
4. $y = 3\sqrt{2x}$

47. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $y = \frac{x^2 - a^2}{x-b}$

ถ้าเมื่อ $x = 0$, $y = 1$ และ $y' = 1$ แล้ว a และ b เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $a = b$
2. $a = -b$
3. $a = |b|$
4. $|a| = b$

48. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -4 & y \end{bmatrix}$ และ

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ถ้า $\det(-\frac{1}{2}AB) = \det(C^{-1})$

แล้วค่าของ $y + 2x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{2}{5}$
4. $\frac{1}{10}$

49. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{matrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix}$

B เป็นเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการดำเนินการดังนี้

$B_1 = A_1$ และ $B_2 = A_2 - 2A_1$ $B_3 = A_3 - 3A_1$

ค่าของ $b_{23} + b_{33}$ เท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. -3
2. -1
3. 1
4. 3

50. กำหนดจุด 15 จุด บนเส้นรอบวง ถ้าลากเส้นเชื่อมจุดแต่ละคู่ จำนวนจุดตัดภายในวงกลมของเส้นตรงเหล่านี้ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\binom{15}{2}$
2. $\binom{15}{4}$
3. $\binom{15}{2}\binom{15}{2}$
4. $\binom{15}{2}\binom{15}{4}$

51. บ้านพักและโรงเรียนของสมศักดิ์อยู่ริมน้ำ เขาจึงเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านโดยทางเรือ ถ้ากำหนดว่าเรือที่สมศักดิ์จะใช้บริการได้มีเรือด่วน 10 ลำ เรือหางยาว 8 ลำ ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์จะเดินทางไปโรงเรียนและกลับบ้านด้วยเรือด่วนลำเดียวกัน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{18}$
2. $\frac{1}{18^2}$
3. $\frac{10}{18}$
4. $\frac{10}{18^2}$

52. สำหรับเหตุการณ์ X ใดๆ ให้ P(X) แทนความน่าจะเป็นของ X ให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $P(A \cap B') = P(A \cap B) = P(B \cap A') = \frac{1}{4}$

แล้ว $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

ข. ถ้า $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \phi$ โดยที่

$P(A \cup B) = P(A \cup C) = P(B \cup C)$ และ

$P(A \cup B \cup C) = 1$ แล้ว $P(A) = \frac{1}{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

53. จากข้อมูลในตารางต่อไปนี้

จำนวนวันที่หยุด	จำนวนนักเรียน
0 - 2	8
3 - 5	12
6 - 8	10
9 - 11	0
12 - 14	10

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. มัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตน้อยกว่ามัธยฐาน
3. มัธยฐานมากกว่าฐานนิยม
4. ฐานนิยมมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต

54. ข้อมูล 5 จำนวน ที่มีค่าแตกต่างกันทั้งหมดมีดังนี้ a, 6, 2, 5, 4
ถ้าข้อมูลชุดนี้มีสมบัติดังนี้

พิสัย = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
และ $a < 2$ หรือ $a > 6$

แล้วค่า a ที่เป็นไปได้ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มี 1 ค่า โดยที่ $a < 2$
2. มี 1 ค่า โดยที่ $a > 6$
3. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{97}{12}$
4. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{107}{12}$

55. ตารางแสดงผลการวิเคราะห์ข้อมูลน้ำหนักและส่วนสูงของเด็กแรกเกิด ณ โรงพยาบาลแห่งหนึ่งในเดือนมกราคม 2538

	น้ำหนัก (กรัม)	ความยาว (ซ.ม.)
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	3105	52
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	345	13

ข้อใดต่อไปนี้เป็นการเปรียบเทียบที่ถูกต้องสำหรับการกระจายของข้อมูล 2 ชุด

1. การกระจายของน้ำหนักน้อยกว่าการกระจายของความยาว
2. การกระจายของน้ำหนักมากกว่าการกระจายของความยาว
3. การกระจายของน้ำหนักเท่ากับการกระจายของความยาว
4. เปรียบเทียบการกระจายไม่ได้เพราะข้อมูลมีหน่วยต่างกัน

56. ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคหมวดต่างๆ ในปี พ.ศ. 2529, 2532 และ 2536 โดยใช้ปี พ.ศ. 2529 เป็นปีฐาน มีดังนี้

สินค้าและบริการ	ปี พ.ศ.		
	2529	2532	2536
หมวดอาหาร	100	117.7	130.2
หมวดเครื่องนุ่งห่ม	100	110.3	136.6
หมวดเคหสถานเครื่องใช้ในบ้าน	100	111.4	119.6
หมวดการบันเทิง การศึกษา	100	113.5	142.3

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหารปี พ.ศ.2532 แพงกว่าราคาหมวดอาหาร

2. ราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหารปี พ.ศ.2536 ถูกกว่าราคาหมวดอาหาร

3. เมื่อใช้ปี พ.ศ.2529 เป็นปีฐาน ราคาหมวดเครื่องนุ่งห่มเพิ่มขึ้นในปี พ.ศ.2532 เท่ากับ 10.3

4. เมื่อใช้ปี พ.ศ.2529 เป็นปีฐาน ราคาหมวดเครื่องนุ่งห่มเพิ่มขึ้นในปี พ.ศ.2536 เท่ากับ 26.3

<u>ตอนที่ 3</u> ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. ถ้าเส้นตรง $3x+4y = 12$ ตัดแกน X ที่จุด A ตัดแกน Y ที่จุด B และจุด C คือจุด (5,2) แล้ว ΔABC มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

2. คำตอบทั้งหมดของสมการ $16^{(\log_{x^2}\sqrt{x})} = x^4 - 5x^2 + 6$ มีกี่จำนวน

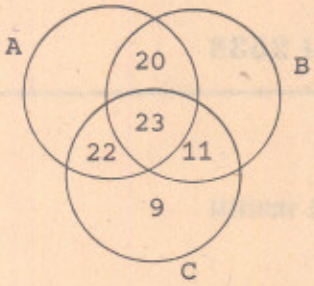
3. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่ $f(-1) = 2$ และ $f'(-1) = -5$ ถ้า $y = (x^3-2x^2)f(x)$ แล้วค่าของ $\frac{dy}{dx}$ ที่จุด $x = -1$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. ต้องการจัดคน 7 คน ให้นั่งรอบโต๊ะทกเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งจัดเก้าอี้ไว้รอบโต๊ะ 6 ตัว โดยเก้าอี้แต่ละตัววางห่างกันเป็นระยะเท่ากัน และเก้าอี้หนึ่งตัวนั่งได้ 1 คน จะมีจำนวนวิธีจัดดังกล่าวได้กี่วิธี

5. ในการสอบแข่งขันชิงทุนการศึกษาเพื่อไปศึกษาต่อต่างประเทศครั้งหนึ่ง สมชายสอบได้ 700 คะแนน สมศักดิ์สอบได้ 650 คะแนน ถ้าคะแนนมาตรฐานของสมชายและสมศักดิ์ คือ 3 และ 2.5 ตามลำดับ แล้วค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในการสอบครั้งนี้มีค่าเท่าไร

๖. สำหรับเซต X ใดๆ ให้ $|X|$ แทนจำนวนสมาชิกของ X

ให้ A, B, C เป็นเซตซึ่ง $|A \cup B \cup C| = 100$ และมีสมบัติดังแผนภาพนี้



ถ้า $|A| - |B| = 6$ แล้ว $|(B \cup C) - A|$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

เฉลยข้อสอบวิชา คณิตศาสตร์ ก.

วันจันทร์ที่ 10 เมษายน 2538

ตอนที่ 1

1.4	2.2	3.1	4.2	5.1	6.4	7.3	8.4	9.1	10.3
11.4	12.—	13.1	14.3	15.2	16.1	17.3	18.4	19.2	20.2
21.3	22.4	23.4	24.1	25.3	26.2	27.4	28.3	29.1	30.2

ตอนที่ 2

31.4	32.3	33.1	34.—	35.2	36.4	37.1	38.1	39.2	40.1
41.4	42.1	43.2	44.2	45.3	46.3	47.4	48.4	49.1	50.2
51.4	52.3	53.3	54.2	55.1	56.3				

ตอนที่ 3

1. 5.5	2. 1	3. 29
4. 840	5. 100	6. 30

เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2538

วันจันทร์ที่ 10 เมษายน 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ตอบ 4.

แนวคิด ให้ p แทนข้อความ "แดงไปโรงเรียน"
q แทนข้อความ "ดำไปเที่ยว"

ตัวเลือก 1. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไปเที่ยว $= p \to q$
(ข) ดำไม่ไปเที่ยวหรือแดงไปโรงเรียน $= \sim q \vee p$

เพราะว่า เมื่อ $p = T$ และ $q = F$ จะได้ $p \to q = T \to F = F$
แต่ $\sim q \vee p = \sim F \vee T = T$
เพราะฉะนั้น (ก) และ (ข) ไม่สมมูลกัน

ตัวเลือก 2. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไม่ไปเที่ยว $= p \to \sim q$
(ข) แดงไปโรงเรียนหรือดำไปเที่ยว $= q \vee p$

เพราะว่า เมื่อ $p = T$ และ $q = T$ จะได้ $p \to \sim q = T \to \sim T = F$
แต่ $q \vee p = T \vee T = T$
เพราะฉะนั้น (ก) และ (ข) ไม่สมมูลกัน

ตัวเลือก 3. (ก) ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วดำไม่ไปเที่ยว $= p \to \sim q$
(ข) ถ้าดำไปเที่ยวแล้วแดงไปโรงเรียน $= q \to p$

เพราะว่า เมื่อ $p = T$ และ $q = T$ จะได้ $p \to \sim q = T \to \sim T = F$
แต่ $q \to p = T \to T = T$
เพราะฉะนั้น (ก) และ (ข) ไม่สมมูลกัน

ข้อแนะนำ เมื่อมั่นใจว่าคิดเลขไม่ผิดก็ควรจะเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้แล้ว

ตัวเลือก 4. (ก) ถ้าแดงไม่ไปโรงเรียนแล้วดำไปเที่ยว = $\sim p \to q$

(ข) ถ้าดำไม่ไปเที่ยวแล้วแดงไปโรงเรียน = $\sim q \to p$

โดยการตีตารางค่าความจริง

p	q	$\sim p \to q$	$\sim q \to p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

เพราะฉะนั้น (ก) และ (ข.) สมมูลกัน

2. ตอบ 2.

แนวคิด คำถามที่ถามว่า เอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ $\forall x\,[x^2+2x-3 < 0]$ เป็นจริงเหมือนกับคำถามว่า เซตคำตอบของอสมการ $x^2+2x-3 < 0$ คือสับเซตของตัวเลือกใด

ให้ $U = \{x \in R \mid x^2+2x-3 < 0\}$

$= \{x \in R \mid (x+3)(x-1) < 0\}$

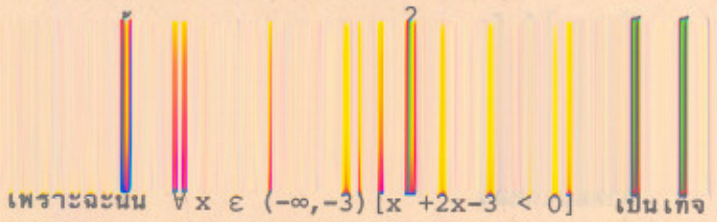
$= (-3,1)$

เพราะว่า $(-2,1) \subset (-3,1)$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in (-2,1)\ [x^2+2x-3 < 0]$ เป็นจริง

การตัดตัวเลือก เราใช้วิธีเลือกตัวเลขในช่วงของตัวเลือกมาแทนค่า

เช่น $-10 \in (-\infty,-3)$ และ $(-10)^2+2(-10)-3 = 77 \neq 0$



เพราะฉะนั้น $\forall x \in (-\infty,-3)[x^2+2x-3 < 0]$ เป็นเท็จ

$9 \in (0,10)$, $9 \in (1,\infty)$ และ $(9)^2+2(9)-3 = 96 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in (0,10)[x^2+2x-3 < 0]$ เป็นเท็จ

และ $\forall x \in (1,\infty)[x^2+2x-3 < 0]$ เป็นเท็จ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3, และ 4. ทิ้งได้

3. **ตอบ** 1.

แนวคิด $r_1 = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x}\}$

<u>การแสดงว่า r_1 เป็นฟังก์ชัน 1-1</u>

สมมติ $r_1(a) = r_1(b)$

$\sqrt{a} = \sqrt{b}$

$a = b$

เพราะฉะนั้น r_1 เป็นฟังก์ชัน 1-1 ซึ่งทำให้ r^{-1} เป็นฟังก์ชัน

และ $r^{-1} = \{(x,y) \mid y = x^2$ และ $x \geq 0\}$

<u>การตัดตัวเลือก</u> เมื่อทำได้ถึงขั้นตอนนี้ทำให้เราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

จาก $r_2 = \{(x,y) \mid x = 3\}$

จะได้ $r_2^{-1} = \{(x,y) \mid y = 3\}$

เพราะฉะนั้น r_2^{-1} เป็นฟังก์ชัน

สรุป ตัวเลือก 1. r_1^{-1} และ r_2^{-1} เป็นฟังก์ชัน ถูกต้อง

4. ตอบ 2.

แนวคิด $A = \{x \in I \mid x = 2k, k \in I\}$

$= \{0,2,-2,4,-4,...\}$

= เซตของจำนวนเต็มคู่

$B = \{x \in I \mid 2x^2-7x-4 \leq 0\}$

$= \{x \in I \mid (2x+1)(x-4) \leq 0\}$

$= \{x \in I \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq 4\}$

$= \{0,1,2,3,4\}$

$A \cap B = \{0,2,4\}$

เพราะฉะนั้น $n(P(A \cap B)) = 2^3 = 8$

5. ตอบ 1.

แนวคิด การหาสูตร $g^{-1}(x)$

เมื่อ $y = g(x)$

$y = 3x+1$

$x = \frac{1}{3}(y-1)$

เพราะฉะนั้น $g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-1)$

เพราะว่า $g^{-1}(4) = \frac{1}{3}(4-1) = 1$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g^{-1})(4) = f(g^{-1}(4))$

$= f(1)$

$= \frac{1}{1+2}$

$= \frac{1}{3}$

6. ตอบ 4.

แนวคิด

1. ถูกต้อง สมมติ $a^2-b^2 > 0$

$$a^2 > b^2$$

$$\sqrt{a^2} > \sqrt{b^2}$$

เพราะฉะนั้น $|a| > |b|$

2. ถูกต้อง จาก $(a-b)^2 \geq 0$

$$a^2-2ab+b^2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $a^2+b^2 \geq 2ab$

3. ถูกต้อง เพราะว่า $|(a-b)+b| \leq |(a-b)|+|b|$

$$|a| \leq |a-b|+|b|$$

เพราะฉะนั้น $|a|-|b| \leq |a-b|$

4. ผิด ตัวอย่างเช่น $a = 1$, $b = -1$

จะได้ $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$

แต่ $|a+b| = 0$

ดังนั้น $\sqrt{a^2+b^2} \not\leq |a+b|$

7. ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{x^2}{x+1} > x$

$$\frac{x^2}{x+1} - x > 0$$

$$\frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\frac{-x}{x+1} > 0$$

$$\frac{x}{x+1} < 0$$

$$-1 < x < 0$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \frac{x^2}{x+1} > x\} = (-1,0)$

เพราะว่า $(-1,0) \subset (-2,1)$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบที่ต้องการ

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์ถามว่า $\{x \mid \frac{x^2}{x+1} > x\}$ เป็นสับเซต ของตัวเลือกใด

ดังนั้นการแทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เลือก $x = -0.5$; $\frac{(-0.5)^2}{-0.5+1} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5 > -0.5$

เพราะฉะนั้น -0.5 ต้องอยู่ในเซตคำตอบของอสมการ

เพราะว่า $-0.5 \notin (-\infty,-2)$, $-0.5 \notin (-10,-1)$ และ $-0.5 \notin (1,\infty)$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1., 2, และ 4. ทิ้งได้

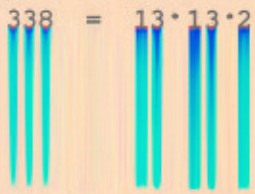
8. **ตอบ** 4.

แนวคิด ลูกแก้วในแต่ละกองต้องมีสีเดียวกันคือ สีแดงทั้งกองหรือสีเหลือง ทั้งกอง

การแบ่งสิ่งของในที่นี้คือการหา ห.ร.ม.ของตัวเลข 143 และ 338

เพราะว่า $143 = 11 \cdot 13$

$338 = 13 \cdot 13 \cdot 2$



เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.$(143,338) = 13$

x = จำนวนกองของลูกแก้วสีแดง

$= \frac{143}{13}$

$= 11$

y = จำนวนกองของลูกแก้วสีเหลือง

$= \frac{338}{13}$

$= 26$

เพราะฉะนั้น $x+y = 11+26$

$= 37$

๑. ตอบ 1.

แนวคิด สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4,-3),(-2,6)$ คือ

$$\frac{y-(-3)}{x-4} = \frac{6-(-3)}{-2-4}$$

$$\frac{y+3}{x-4} = \frac{9}{-6}$$

$$\frac{y+3}{x-4} = -\frac{3}{2}$$

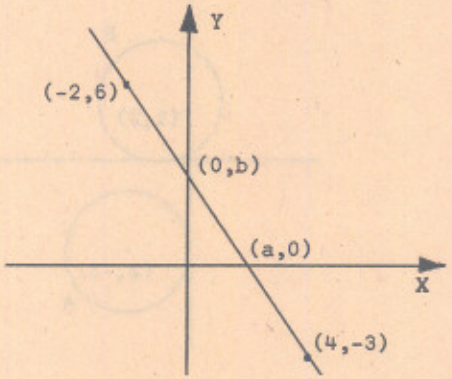
$$2y+6 = -3x+12$$

$$3x+2y-6 = 0$$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = 2$ ดังนั้น $a = 2$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 3$ ดังนั้น $b = 3$

การตัดตัวเลือก วาดรูปโดยการลากเส้นตรงผ่านจุด (4,-3),(-2,6) แล้วดูระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y



จากรูป ระยะตัดแกน X ; $a > 0$

ระยะตัดแกน Y ; $b > 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

จากรูป $a < b$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

10. ตอบ 3.

แนวคิด วงกลม A : $(x-2)^2+(y+3)^2 = 4$

เป็นวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลาง (2,-3)

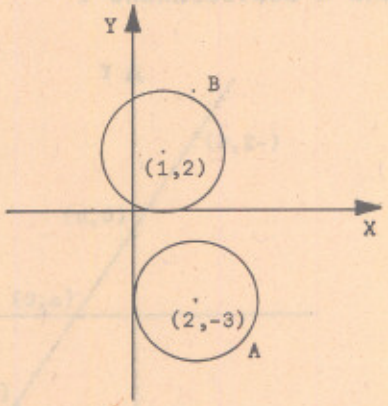
จัดรูปสมการวงกลม B : $x^2+y^2-2x-4y+1 = 0$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4) = -1+1+4$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$$

เป็นวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลาง (1,2)

เขียนกราฟของวงกลม A และ B ดังนี้



ผลสรุปจากกราฟสามารถตอบคำถามได้ดีที่สุดคือ 3. วงกลม A ไม่ตัดและไม่สัมผัสกับวงกลม B ถูกต้อง

11. ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $49x^2 + 25y^2 - 1225 = 0$

$$49x^2 + 25y^2 = 1225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$$

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y จุดศูนย์กลาง (0,0)

$a = 7$, $b = 5$, จุดยอด (0,-7), (0,7)

และ $c^2 = a^2 - b^2$

$= 49 - 25$

$= 24$

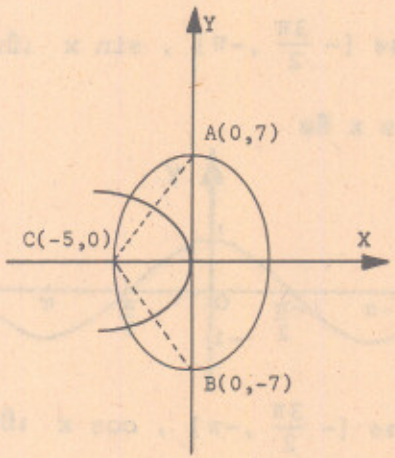
$c = 2\sqrt{6}$

จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2 + 20x = 0$

$y^2 = -20x$

$y^2 = 4(-5)x$

เป็นพาราโบลามีจุดยอด (0,0) , แกนพาราโบลาขนานแกน X และเป็นรูปพาราโบลาเปิดทางซ้าย , $c = -5$, จุดโฟกัสคือ (-5,0)



สรุป A(0,7) , B(0,-7) และ C(-5,0)

ความยาว AC $= \sqrt{(0+5)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{74}$

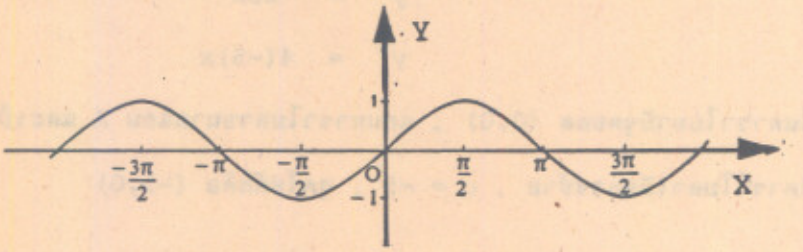
ความยาว BC $= \sqrt{(0+5)^2 + (-7-0)^2} = \sqrt{74}$

เพราะฉะนั้น ความยาว AC + BC $= 2\sqrt{74}$

12. ตอบ ตัวเลือกที่ให้มาผิดทุกข้อ

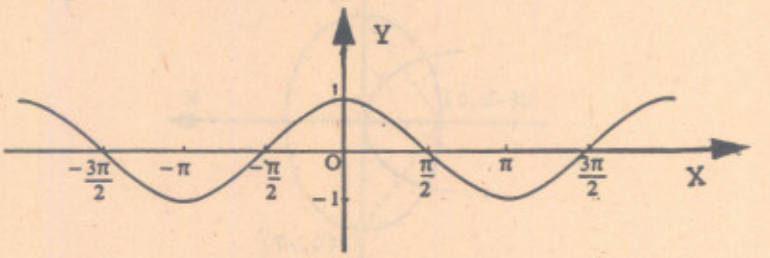
แนวคิด สำหรับปัญหานี้ใช้กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติช่วยหาคำตอบดีที่สุด

กราฟของ $y = \sin x$ คือ



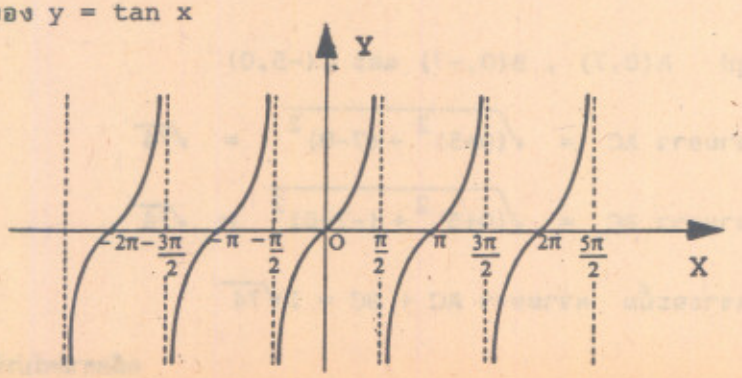
เพราะฉะนั้น บนช่วง $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$, $\sin x$ เป็นฟังก์ชันลด

กราฟของ $y = \cos x$ คือ



เพราะฉะนั้น บนช่วง $[-\frac{3\pi}{2}, -\pi]$, $\cos x$ เป็นฟังก์ชันลด

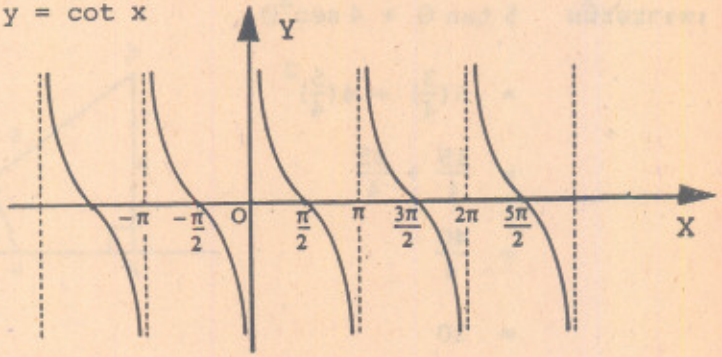
กราฟของ $y = \tan x$



จากกราฟเห็นได้ชัดเจนว่า บนช่วง $(\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\tan x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แต่เมื่อพิจารณาบนช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ จะเห็นว่า $\frac{\pi}{2} < \pi$ และ $\tan \pi = 0$ แต่ $\tan \frac{\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นสรุปไม่ได้ว่า $\tan x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

กราฟของ $y = \cot x$



ในทำนองเดียวกัน $\cot \pi$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นสรุปไม่ได้ว่า $\cot x$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

13. ตอบ 1.

แนวคิด

$$\tan (\pi + \frac{\pi}{6}) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos (2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec (\pi + \frac{\pi}{3}) = -\sec \frac{\pi}{3} = -2$$

$$3 \tan^2 (\pi + \frac{\pi}{6}) + \frac{4}{3} \cos^2 (2\pi - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{8} \sec^3 (\pi + \frac{\pi}{3})$$

$$= 3 (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \frac{4}{3} (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + \frac{1}{8} (-2)^3 = 1 + 1 - 1$$

$$= 1$$

14. ตอบ 3.

แนวคิด $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังภาพ

จะได้ว่า $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ และ $\sec\theta = \frac{5}{4}$

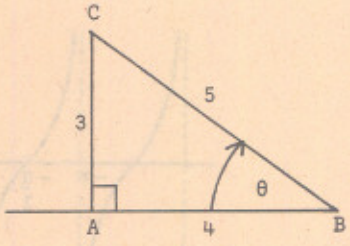
เพราะฉะนั้น $5\tan\theta + 4\sec^2\theta$

$= 5(\frac{3}{4}) + 4(\frac{5}{4})^2$

$= \frac{15}{4} + \frac{25}{4}$

$= \frac{40}{4}$

$= 10$



15. ตอบ 2.

แนวคิด $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$

$= \frac{5 - 2\sqrt{2}\sqrt{5} + 2}{5-2}$

$= \frac{7 - 2\sqrt{10}}{3}$

การตัดตัวเลือก ใช้การประมาณค่าสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ค่าของโจทย์ $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \simeq \frac{2.2-1.4}{2.2+1.4} = \frac{0.8}{3.6} = 0.2$

ค่าในแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{7-\sqrt{10}}{3} \simeq \frac{7-3.2}{3} = 1.3$

2. $\frac{7 - 2\sqrt{10}}{3} \simeq \frac{7 - 6.4}{3} = 0.2$

3. $\frac{8 - \sqrt{10}}{3} \simeq \frac{8 - 3.2}{3} = 1.6$

4. $\frac{8 - 2\sqrt{10}}{3} \simeq \frac{8 - 6.4}{3} = 0.5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้ง

หมายเหตุ ถ้านักเรียนไม่แน่ใจลองแทนค่า $\sqrt{5} = 2.24$, $\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{10} = 3.16$ ก็ได้

16. ตอบ 1.

แนวคิด $3 \log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$

$6 \log_4 x = 4(\log_4 x)^2$

แทนค่า $A = \log_4 x$ จะได้ $6A = 4A^2$

$4A^2 - 6A = 0$

$A(2A - 3) = 0$

$A = 0, \frac{3}{2}$

ดังนั้น $\log_4 x = 0 , \frac{3}{2}$

$x = 4^0 , 4^{\frac{3}{2}}$

$x = 1, 8$

นั่นคือ x มีค่าอยู่ในช่วง (-1,9)

หมายเหตุ เห็นได้ชัดเจนว่า เมื่อ $x = 1$ จะได้

$$3\log_4 1^2 = 0 \text{ และ } 4(\log_4 1)^2 = 0$$

เพราะฉะนั้นช่วงในตัวเลือกต้องมี 1 เป็นสมาชิก

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

17. ตอบ 3.

แนวคิด
$$3^{2x+1} - 8(3^x) = 3$$
$$3(3^x)^2 - 8(3^x) - 3 = 0$$
$$[3(3^x) + 1][3^x - 3] = 0$$

เพราะว่า $3(3^x) + 1 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $3^x - 3 = 0$

$$3^x = 3$$
$$x = 1$$

สรุป $x = 1$ เป็นสมาชิกของช่วง $(\frac{1}{2}, 2)$ ในตัวเลือก 3.

18. ตอบ 4.

แนวคิด 1. <u>ถูกต้อง</u>

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2+4 = 8$$

2. <u>ถูกต้อง</u>

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x^3 = 8$$

3. <u>ถูกต้อง</u> เพราะว่า $f(2) = 5$ หาค่าได้

4. <u>ผิด</u> เพราะว่า $\lim_{x \to 2} f(x) = 8 \neq f(2)$

19. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{2x+1}$

<u>การหาโดเมน f</u> พิจารณา $2x+1 \geqslant 0$

$$2x \geqslant -1$$

$$x \geqslant -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $D_f = [-\frac{1}{2}, \infty)$

$$g(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$= \frac{d}{dx}((2x+1)^{\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(2x+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

<u>การหาโดเมนของ g</u> เพราะว่า $2x+1 > 0$

$$x > -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $D_g = (-\frac{1}{2}, \infty)$ สรุป $D_g \subset D_f$ และ $D_g \neq D_f$

การตัดตัวเลือก จากนิยาม $g(x) = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

เพราะฉะนั้น $D_g \subset D_f$ เสมอ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $f(-\frac{1}{2}) = 0$ แต่ $g(\frac{1}{2})$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $D_f \neq D_g$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

20. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^4-2x^2$

$f'(x) = 4x^3-4x$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง [a,b] ก็ต่อเมื่อ $f'(x) < 0$ บนช่วง [a,b]

เพราะฉะนั้นพิจารณา $f'(x) < 0$

$4x^3-4x < 0$

$x(x^2-1) < 0$

$x(x+1)(x-1) < 0$

ต่อไปดูตารางเครื่องหมายของ $x(x+1)(x-1)$ บนช่วง $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ และ $(1,\infty)$

		x=-1		x=0		x=1	
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x	-	-	-	0	+	+	+
x-1	-	-	-	-	-	0	+
f'	-	0	+	0	-	0	+

เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ บนช่วง $(-\infty,-1) \cup (0,1)$

พิจารณาจากตัวเลือกจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (0,1)

การตัดตัวเลือก ลองแทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. $f(-0.9) = (-0.9)^4 - 2(-0.9)^2 = 0.6561-1.62 = -0.9636$

$f(-0.1) = (-0.1)^3 - 2(-0.1)^2 = 0.0001-0.02 = -0.0199$

ดังนั้น $f(-0.9) < f(-0.1)$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-1,0)$

3. $f(1.1) = (1.1)^4 - 2(1.1)^2 = 1.4641-2.42 = -0.9559$

$f(1.2) = (1.2)^4 - 2(1.2)^2 = 2.0736-2.88 = -0.8064$

ดังนั้น $f(1.1) < f(1.2)$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(1,2)$

4. $f(3) = 3^4 - 2(3)^2 = 81-18 = 63$

$f(4) = 4^4 - 2(4)^2 = 256-32 = 224$

ดังนั้น $f(3) < f(4)$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(2,\infty)$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3, และ 4, ทิ้งได้

21. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = 3x^2-3$

เพราะว่า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f

เพราะฉะนั้น $F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x^2-3)\,dx = x^3-3x+K$

เพราะว่า $F(0) = 4$ เพราะฉะนั้น $4 = 0-0+K$; $K = 4$

ดังนั้น $F(x) = x^3-3x+4$

เพราะฉะนั้น $F(1) = 1-3+4$

$= 2$

22. ตอบ 4.

แนวคิด เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านขอเฉลยอย่างละเอียดดังนี้

1. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

จะได้ $\det(A) = 4 = \det(B)$ แต่ $A \neq B$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A^2) = 1$ แต่ $2\det(A) = 2(1) = 2$

ดังนั้น $\det(A^2) \neq 2\det(A)$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\frac{A}{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A) = 4$, $\det(\frac{A}{2}) = 1$

ดังนั้น $\det(\frac{A}{2}) \neq \frac{1}{2}\det(A)$

4. ถูกต้อง เพราะว่าเป็นคุณสมบัติของค่าดีเทอร์มินันท์

หมายเหตุ ถ้านักเรียนจำคุณสมบัติของเมตริกซ์ได้ว่า

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$
$$= \det(B)\det(A)$$

ก็สามารถเลือกตัวเลือก 4. ได้ทันทีโดยไม่ต้องสนใจตัวเลือก 1., 2. และ 3. ซึ่งจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด

23. ตอบ 4.

แนวคิด จากเมตริกซ์ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$

จะได้ $x + 2y = -1$ .....(1)

$-y + z = 3$ .....(2)

$2z = 4$ .....(3)

ดังนั้น $z = 2$

จาก (2) ; $y = z-3 = 2-3 = -1$

จาก (1) ; $x = -1-2y = -1+2 = 1$

สรุป $x+y+z = 1-1+2 = 2$

วิธีลัด จากสมการ (1) และ (2) เมื่อนำมาบวกกันจะได้

$x+y+z = 2$

24. ตอบ 1.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีพิจารณาดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกคนขับรถจากพ่อหรือแม่ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 คน 3 คนที่เหลือจัดลำดับได้ 3! วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(2)(3!) = 12$ วิธี

25. ตอบ 3.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีจำแนกเป็น 4 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 รหัสประกอบด้วยอักษร 1 ตัว มีได้ 2 วิธี คือ A, B

กรณีที่ 2 รหัสประกอบด้วยอักษร 2 ตัว มี 4 วิธี คือ AA, AB, BA, BB

กรณีที่ 3 รหัสประกอบด้วยอักษร 3 ตัว

ตัวที่ 1 มีทางเลือก 2 วิธี

ตัวที่ 2 มีทางเลือก 2 วิธี

ตัวที่ 3 มีทางเลือก 2 วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 3 เท่ากับ 8 วิธี

กรณีที่ 4 รหัสประกอบด้วยอักษร 4 ตัว

ในทำนองเดียวกันกับกรณีที่ 3 จะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 4 มีค่าเท่ากับ $2^4 = 16$ วิธี

จากทั้ง 4 กรณีจะได้ว่า จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $2+4+8+16 = 30$ วิธี

26. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าการเลือกทีม 2 ทีมใดๆ ออกมาจาก 50 ทีม จะได้การแข่งขันหนึ่งครั้ง

เพราะฉะนั้นจำนวนการแข่งขันทั้งหมดเท่ากับ $\binom{50}{2} = \frac{50!}{48!\,2!} = 1225$

27. ตอบ 4.

แนวคิด จากข้อมูลที่กำหนดให้ มีความกว้างของอันตรภาคชั้นเท่ากันทุกชั้น ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2.95 - 2.45 = 0.5$

พิจารณาค่าในตัวเลือก

1. $3.85 - 3.55 = 0.3$
2. $2.9 - 2.5 = 0.4$
3. $4.45 - 4.00 = 0.45$
4. $3.7 - 3.2 = 0.5$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4.

28. ตอบ 3.

แนวคิด การทำโจทย์ข้อนี้ใช้แนวคิดแบบตัดตัวเลือกควบคู่ไปกับวิธีจริง

จะดีที่สุด เพราะว่า $C = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$ คือส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ ซึ่งใช้ใน

การวัดการกระจายของข้อมูล เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

จากหนังสือ ค.012 หน้า 216 $B = \frac{X_{max} + X_{min}}{2}$

เรียกว่า ค่ากึ่งกลางพิสัย ใช้สำหรับวัดค่ากลางของข้อมูล

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

สำหรับค่า A ผู้เขียนได้อ่านหนังสือ ค.011 - ค.016 แล้วไม่พบว่า

มีกล่าวถึงค่า A ว่าใช้วัดค่ากลาง หรือ A ใช้วัดการกระจาย

แต่ค่าของ A เท่ากับค่าของพิสัยหารด้วย 2 และพิสัยใช้วัดการกระจาย

ของข้อมูล

ดังนั้นจึงขอสรุปด้วยเหตุผลว่า ข้อมูลทั่วไป $\frac{X_{max} - X_{min}}{2}$ ยิ่งมีค่าน้อย

แสดงว่าข้อมูลทุกตัวแตกต่างกันไม่มาก นั่นคือ A ยิ่งมีค่าน้อยยิ่งดี

เพราะฉะนั้น A ใช้วัดการกระจาย สรุปตัวเลือก 3. ถูกต้อง

29. ตอบ 1.

แนวคิด จากหนังสือ ค. 012 หน้า 197

$\sum_{i=1}^{n} (X_i - M)^2$ น้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ $M = \bar{X}$

จากโจทย์ a คือค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{5} (X_i - a)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{5} (X_i - b)^2$

นั่นคือ $A \leqslant B$

การตัดตัวเลือก เห็นได้ชัดเจนว่าเมื่อ $a = b$ จะได้ว่า

$$\sum_{i=1}^{5} (X_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{5} (X_i - b)^2$$

$$A = B$$

ตัวอย่างเช่น ข้อมูลคือ 1,2,3,4,5

จะได้ $a = 3$ และ $b = 3$

นั่นคือเป็นไปได้ที่ $A = B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

30. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. จากสูตร

ค่าของเงินในช่วงเวลาที่ต้องการ

$$= \frac{\text{จำนวนเงินในช่วงเวลานั้น ๆ}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคของช่วงเวลานั้น}} \times 100$$

เพราะฉะนั้น ค่าของเงิน 114.8 บาทในปี 2537 $= \frac{114.8}{114.8} \times 100$

$= 100$

สรุป ค่าของเงิน 114.8 บาท ในปี 2537 มีค่าเทียบเท่ากับเงิน 100 บาท ในปี 2533

เพราะฉะนั้น ข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข. เมื่อเทียบค่าเงินโดยใช้ปี 2533 เป็นปีฐาน

รายได้ที่แท้จริงของศักดิ์ในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2533

$$= \frac{\text{จำนวนเงินเดือนในปี 2537}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537}} \times 100$$

$$= \frac{2350}{114.8} \times 100 \neq \frac{2350}{114.8}$$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิด

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $[\sim(C \vee D)]$ เป็นจริง

จะได้ $C \vee D$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น C เป็นเท็จ , D เป็นเท็จ

ขณะนี้เราสามารถตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้แล้ว

เพราะว่า $(A \to B) \to (C \wedge D)$ เป็นจริง , $C \wedge D$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $A \to B$ เป็นเท็จ

นั่นคือ A เป็นจริง และ B เป็นเท็จ

สรุปตัวเลือก 4. ถูกต้อง

32. ตอบ 3.

แนวคิด เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนเต็มลบ

1. <u>**ผิด**</u> เพราะว่า $\frac{|-1|}{-1} = -1$

เพราะฉะนั้น $\forall x \left[\frac{|x|}{x} = 1 \right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

2. ผิด

เพราะว่า $x^2-x-6 < 0$

$(x-3)(x+2) < 0$

$-2 < x < 3$

และ x เป็นจำนวนเต็มลบ

เพราะฉะนั้น $\{x \in I^- \mid x^2-x-6 < 0\} = \{-1\}$

ดังนั้นมี $x = -1$ ที่ทำให้ $(-1)^2-(-1)-6 = -4 < 0$

เพราะฉะนั้น $\exists x [x^2-x-6 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

3. ถูกต้อง

เพราะว่า $\log (x+2) = \log |x|$

$x+2 = |x|$

และ $x < 0$

เพราะฉะนั้น $x+2 = -x$

$2x = -2$

$x = -1$

นั่นคือมี $x = -1$ ทำให้ $\log (-1+2) = \log |-1|$

เพราะฉะนั้น $\exists x [\log (x+2) = \log |x|]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

4. ผิด

$||x|+1| = |x-1|$

$||x|+1|^2 = |x-1|^2$

$|x|^2 + 2|x| + 1 = x^2-2x+1$

$$2|x| = -2x$$

$$|x| = -x$$

เพราะว่า $x < 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = -x$ เป็นจริง

นั่นคือ $\forall x [||x|+1| = |x-1|]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

33. ตอบ 1.

แนวคิด

(1) **ถูกต้อง**

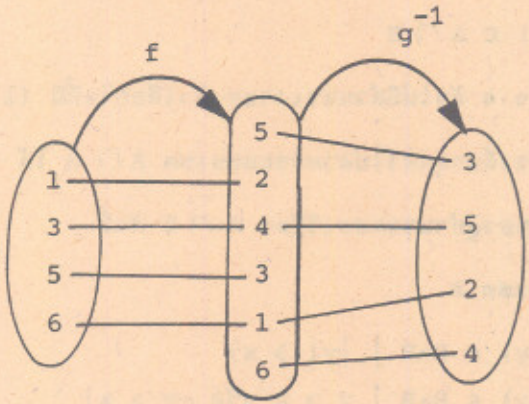
$$f = \{(1,2),(3,4),(5,3),(6,1)\}$$

$$f^{-1} = \{(2,1),(4,3),(3,5),(1,6)\}$$

$$g = \{(2,1),(3,5),(4,6),(5,4)\}$$

$$g^{-1} = \{(1,2),(5,3),(6,4),(4,5)\}$$

พิจารณาแผนภูมิการส่งค่าของ $g^{-1} \circ f$



เพราะฉะนั้น $g^{-1} \circ f = \{(3,5),(6,2)\}$

(ข) **ถูกต้อง**

$$D_{gf^{-1}} = D_g \cap D_{f^{-1}} = \{2,3,4,5\} \cap \{1,2,3,4\}$$
$$= \{2,3,4\}$$

$$(gf^{-1})(2) = g(2)\, f^{-1}(2) = (1)(1) = 1$$

$$(gf^{-1})(3) = g(3)\, f^{-1}(3) = (5)(5) = 25$$

$$(gf^{-1})(4) = g(4)\, f^{-1}(4) = (6)(3) = 18$$

เพราะฉะนั้น $gf^{-1} = \{(2,1),(3,25),(4,18)\}$

34. ตอบ ตัวเลือกที่ถูกต้องไม่ได้ให้มา

แนวคิด ตัวเลือกเป็นกราฟใช้การเลือกจุดที่เป็นสมาชิกของ A, B มาช่วยในการตัดตัวเลือกเป็นวิธีที่ดีที่สุด

เพราะว่า $|1| \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(1,1) \in A$ และ $(1,1) \in B$

นั่นคือ $(1,1) \in A \cap B$

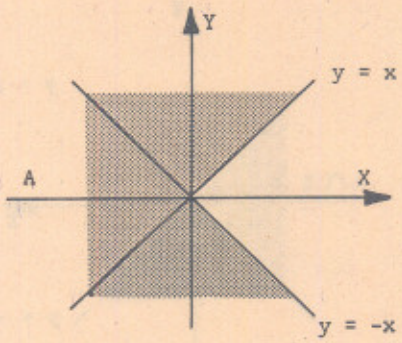
จากตัวเลือกทั้ง 4 ตัวไม่มีส่วนแรเงาของตัวเลือกใดที่มี $(1,1)$ เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัวเลือกทุกตัวไม่สามารถแทนเซต $A \cap B$ ได้

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงวิธีหา $A \cap B$ ดังนี้

การหาบริเวณเซต A

$$A = \{(x,y) \in R \times R \mid |y| \geq x\}$$
$$= \{(x,y) \in R \times R \mid y \geq x \text{ หรือ } -y \geq x\}$$
$$= \{(x,y) \in R \times R \mid y \geq x\} \cup \{(x,y) \in R \times R \mid -y \geq x\}$$



รูปที่ 1

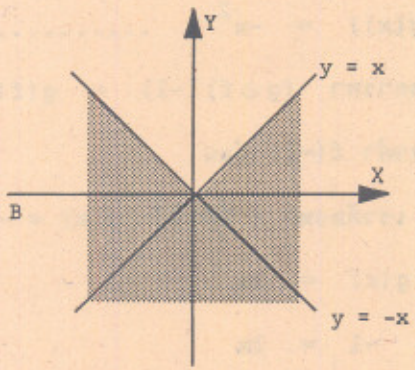
ส่วนที่แรเงาคือบริเวณของ A

การหาบริเวณเซต B

$$B = \{(x,y) \in R\times R \mid |x| \geq y\}$$

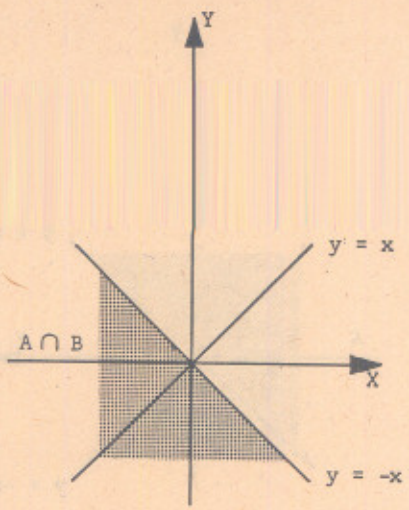
$$= \{(x,y) \in R\times R \mid x \geq y \text{ หรือ } -x \geq y\}$$

$$= \{(x,y) \in R\times R \mid x \geq y\} \cup \{(x,y) \in R\times R \mid -x \geq y\}$$



รูปที่ 2

อาณาบริเวณของเซต B



รูปที่ 3

อาณาบริเวณของเซต $A \cap B$ คือ ส่วนที่แรเงาและจุดบนเส้นตรง $y = x$

จะเห็นได้ว่า ตัวเลือกที่ 3 ใกล้เคียงกับกราฟของ $A \cap B$ ในรูปที่ 3

หากแต่ว่าในรูปตัวเลือก 3. ไม่มีจุดบนเส้นตรง $y = x$

35. ตอบ 2.

แนวคิด $(f \circ g)(x) = -x^2$

$f(g(x)) = -x^2$ .....(1)

เพราะว่าเราต้องการหา $(g \circ f)(-1) = g(f(-1))$

เพราะฉะนั้นต้องหาค่า $f(-1)$ ก่อน

จากสมการ (1) เราต้องหา x ที่ทำให้ $g(x) = -1$

เพราะว่า $g(x) = 3x$

$-1 = 3x$

$x = -\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $g(-\frac{1}{3}) = -1$

แทนค่าใน (1) ; $f(g(-\frac{1}{3})) = -(-\frac{1}{3})^2$

$f(-1) = -\frac{1}{9}$

$g(f(-1)) = g(-\frac{1}{9})$

เพราะฉะนั้น $(g \circ f)(-1) = 3(-\frac{1}{9}) = -\frac{1}{3}$

36. ตอบ 4.

แนวคิด **การหาเซต A**

แทนค่า $V = 2-x-x^2$

ดังนั้น $\sqrt{V^2} = V$

$|V| = V$

เพราะฉะนั้น $V \geqslant 0$

นั่นคือ $2-x-x^2 \geqslant 0$

$x^2+x-2 \leqslant 0$

$(x+2)(x-1) \leqslant 0$

$-2 \leqslant x \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น $A = [-2,1]$

การหาเซต B

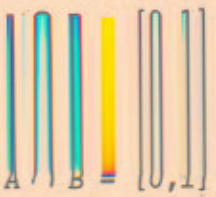
$\sqrt{x^2} = x$

$|x| = x$

$x \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $B = [0,\infty)$

ดังนั้น $A \cup B = [-2,\infty)$



$A \cap B = [0,1]$

$A - B = [-2,0)$

$B - A = (1,\infty)$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ ตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่าแบบง่ายๆ เช่น $x = 0$ จะได้

$$\sqrt{(2-0-0^2)^2} = 2-0-0^2$$

และ $\sqrt{0^2} = 0$

เพราะฉะนั้น $0 \in A \cap B$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -3$; $2-3-3^2 < 0$ ดังนั้น $-3 \notin A$

และ $\sqrt{(-3)^2} \neq -3$ ดังนั้น $-3 \notin B$

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cup B$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -2$; $\sqrt{(2+2-2^2)^2} = 2+2-2^2$ ดังนั้น $-2 \in A$

แต่ $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$ ดังนั้น $-2 \notin B$

เพราะฉะนั้น $-2 \in A - B$ นั่นคือ $A - B \neq \phi$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

37. ตอบ 1.

แนวคิด จำแนกกรณีของ x ออกเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 $x < 0$

$$2x+2 < |x| < 7x+8$$

$$2x+2 < -x < 7x+8$$

$$2x+2 < -x \quad \text{และ} \quad -x < 7x+8$$

$$3x < -2 \quad \text{และ} \quad 0 < 8x+8$$

$$x < -\frac{2}{3} \quad \text{และ} \quad -1 < x$$

$$x \in (-\infty,-\tfrac{2}{3}) \quad \text{และ} \quad x \in (-1,\infty)$$

$$x \in (-\infty,-\tfrac{2}{3}) \cap (-1,\infty)$$

$$x \in (-1,-\tfrac{2}{3})$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบในกรณีที่ 1 คือ $(-\infty,0) \cap (-1,-\frac{2}{3})$

$$= (-1,-\tfrac{2}{3})$$

กรณีที่ 2 $x \geq 0$

$$2x+2 < |x| < 7x+8$$

$$2x+2 < x < 7x+8$$

$$2x+2 < x \quad \text{และ} \quad x < 7x+8$$

$$x+2 < 0 \quad \text{และ} \quad -6x < 8$$

$$x < -2 \quad \text{และ} \quad x > -\frac{4}{3}$$

$$x \in (-\infty,-2) \quad \text{และ} \quad x \in (-\tfrac{4}{3},\infty)$$

$$x \in (-\infty,-2) \cap (-\frac{4}{3},\infty)$$

$$x \in \phi$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของกรณีที่ 2 คือ ϕ

สรุป $\{x \mid 2x+2 < |x| < 7x+8\} = (-1,-\frac{2}{3})$ เป็นสับเซตของ $(-1,0)$ จากตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้ เช่น $x = -0.9$

จะได้ $2(-0.9)+2 = 0.2$

$|-0.9| = 0.9$

$7(-0.9)+8 = 1.7$

เพราะฉะนั้น $2(-0.9)+2 < |-0.7| < 7(-0.9)+8$

แสดงว่า $x = -0.9$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

38. ตอบ 1.

แนวคิด การหาเศษเหลือของ $a(b+c)$ หารด้วย 7 ทำได้ดังนี้

เพราะว่า 7 หาร a เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $a = 7k+1$

เพราะว่า 7 หาร b เหลือเศษ 3

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $b = 7m+3$

เพราะว่า 7 หาร c เหลือเศษ 5

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $c = 7n+5$

เพราะว่า $a(b+c) = (7k+1)[(7m+3)+(7n+5)]$

$= (7k+1)(7(m+n)+8)$

$= (7k+1)(7(m+n+1)+1)$

ให้ $m+n+1 = d$

ดังนั้น $a(b+c) = (7k+1)(7d+1)$

$= 49kd + 7k + 7d + 1$

$= 7(7kd + k + d)+1$

เพราะว่า 7 หาร $7(7kd + k + d)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 7 หาร $a(b+c)$ เหลือเศษ 1

การคัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ a,b,c ดังนั้นเลือก a,b,c ตามเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

$a = 1$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

$b = 3$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 3

$c = 5$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 5

จะได้ $a(b+c) = (1)(3+5)$

$= 8$

เพราะฉะนั้น $a(b+c)$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 1.

39. ตอบ 2.

แนวคิด การหาจุดตัดของสมการเส้นตรง

$4x+3y = 8$ .....(1)

$2x+y = 2$ .....(2)

2(2); $4x+2y = 4$ .....(3)

(1)-(3) $y = 4$

เพราะฉะนั้น $x = -1$

จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองคือ $(-1,4)$

หมายเหตุ จากตรงนี้สามารถใช้วิธีคัดตัวเลือกได้แล้ว (ลองข้ามไปอ่านวิธีคัดตัวเลือก)

รูปแบบของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด (0,0) และแกน X เป็นแกน

สมมาตรคือ $y^2 = 4cx$

เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด (-1,4)

เพราะฉะนั้น $(4)^2 = 4c(-1)$

$16 = -4c$

$c = -4$

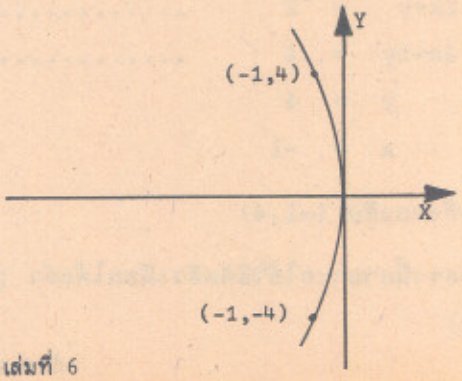
สมการพาราโบลาคือ $y^2 = -16x$

พิจารณาค่าจุด (x,y) ในแต่ละตัวเลือก

1. $(-2)^2 \neq (-16)(\frac{1}{4})$
2. $(2)^2 = (-16)(-\frac{1}{4})$
3. $(-\frac{1}{4})^2 \neq (-16)(2)$
4. $(\frac{1}{4})^2 \neq (-16)(-2)$

เพราะฉะนั้นพาราโบลา $y^2 = -16x$ ผ่านจุด $(-\frac{1}{4}, 2)$

การตัดตัวเลือก เมื่อเราทราบว่าจุดยอดพาราโบลาคือ (0,0) แกน X เป็นแกนสมมาตร และผ่านจุด (-1,4) ทำให้เราสามารถวาดรูปคร่าวๆ ของพาราโบลาได้ดังนี้



เพราะฉะนั้นจุด (x,y) บนพาราโบลาต้องมีค่า $x < 0$

ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

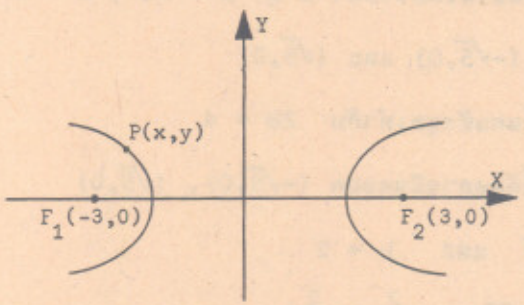
จากเหตุเกี่ยวกับลักษณะของพาราโบลาพบว่า เมื่อ (x,y) อยู่บนพาราโบลา

และ $x = -2 < -1$ จะต้องทำให้ $|y| > 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

40. ตอบ 1.

แนวคิด วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์เท่าที่ทำได้ก่อน



เมื่อ P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนไฮเพอร์โบลา H

จากโจทย์ เพราะว่า $F_1(-3,0)$ และ $F_2(3,0)$

เป็นจุดโฟกัส เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางคือ (0,0)

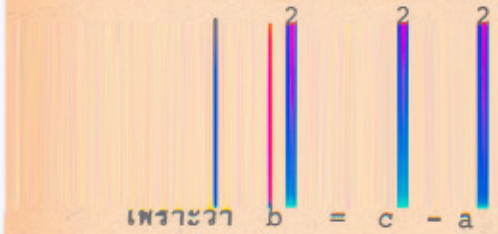
เพราะว่า $2a = |PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $a = \sqrt{5}$

เพราะว่า c = ระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังโฟกัส

= ระยะจาก (0,0) ไปยัง (3,0)

= 3



เพราะว่า $b^2 = c^2 - a^2$

$= 9 - 5$

$= 4$

เพราะฉะนั้น $b = 2$

สรุป ไฮเพอร์โบลามีสมการเป็น $\frac{x^2}{(\sqrt{5})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลา H มี $a = \sqrt{5}$, $b = 2$

จุดยอดที่ $(-\sqrt{5},0)$ และ $(\sqrt{5},0)$

ความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b = 4$

สรุปวงรีที่ต้องการมีจุดยอด $(-\sqrt{5},0)$, $(\sqrt{5},0)$

$a = \sqrt{5}$ และ $b = 2$

สมการวงรีคือ $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$

$4x^2+5y^2 = 20$

ตรงกับตัวเลือกที่ 1.

การตัดตัวเลือก จากรูป จะเห็นว่าจุดยอดของไฮเพอร์โบลา H อยู่บนแกน X เพราะฉะนั้นแกนเอกของวงรีต้องทับแกน X

พิจารณาแกนเอกของแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$; แกนเอกทับแกน X

2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$; แกนเอกทับแกน Y

3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$; แกนเอกทับแกน X

4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$; แกนเอกทับแกน Y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

จากรูป ถ้า (x,0) เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา H

แล้ว $-3 < x < 3$

ดังนั้น ถ้า (x,0) เป็นจุดยอดของวงรีแล้ว $-3 < x < 3$

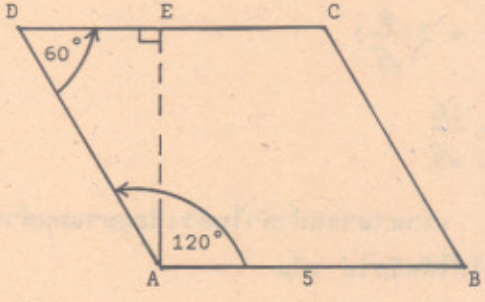
แต่จากตัวเลือก 1. จุดยอดของวงรีคือ $(\sqrt{5},0),(-\sqrt{5},0)$

3. จุดยอดของวงรีคือ $(3,0),(-3,0)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

41. ตอบ 4.

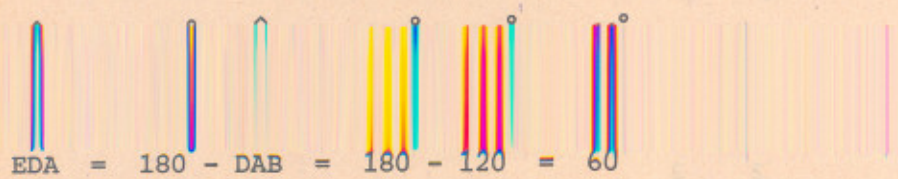
แนวคิด ควรจะวาดรูปเพื่อช่วยในการคำนวณ



พื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = $|AB| \times |AE|$

$20 = 5|AE|$

$|AE| = 4$



$EDA = 180 - DAB = 180 - 120 = 60$

$$\sin E\hat{D}A = \frac{|AE|}{|AD|}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{4}{|AD|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{|AD|}$$

$$|AD| = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

เพราะว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $|AD| = |BC| = \frac{8}{\sqrt{3}}$ และ $|AB| = |CD| = 5$

สรุปความยาวเส้นรอบรูป ABCD เท่ากับ

$$|AB|+|BC|+|CD|+|AD|$$

$$= 2|AB| + 2|AD|$$

$$= 2(5) + 2(\frac{8}{\sqrt{3}})$$

$$= 10 + \frac{16}{\sqrt{3}}$$

การตัดตัวเลือก เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าย้อนกลับเพื่อดูว่า ตัวเลือกนั้นใช้ได้หรือไม่ เช่น

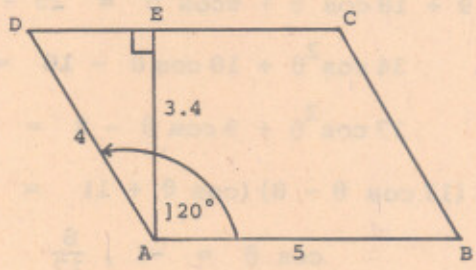
$$|AB|+|BC|+|CD|+|DA| = 18$$

$$5+|AD|+5+|AD| = 18$$

$$2|AD| = 8$$

$$|AD| = 4$$

ต่อไปลองวาดรูป



โดยการวัด $|AE| = 3.4$

ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับ $|AB| \times |AE|$

$$= 5(3.4)$$

$$\neq 20$$

แสดงว่าตัวเลือก 1. ใช้ไม่ได้

ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 2. และ 3. ก็ใช้ไม่ได้

ข้อนี้กว่าจะได้คำตอบโดยการตัดตัวเลือกต้องทำถึง 3 ตัวเลือกจึงจะได้คำตอบที่ต้องการ

42. ตอบ 1.

แนวคิด

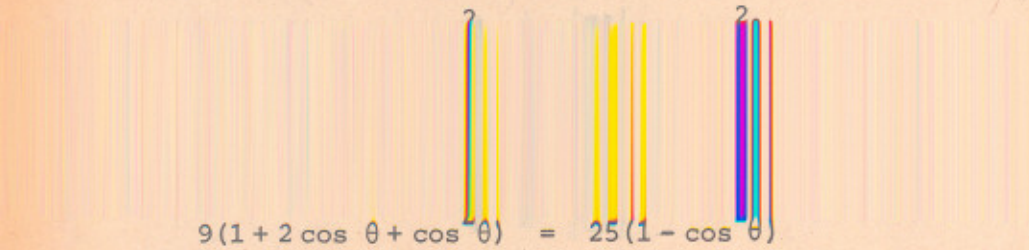
$$\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{5}{3}$$

$$3(1+\cos\theta) = 5\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$9(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) = 25\sin^2\theta$$



$$9(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) = 25(1 - \cos^2\theta)$$

$$9 + 18\cos\theta + 9\cos^2\theta = 25 - 25\cos^2\theta$$

$$34\cos^2\theta + 18\cos\theta - 16 = 0$$

$$17\cos^2\theta + 9\cos\theta - 8 = 0$$

$$(17\cos\theta - 8)(\cos\theta + 1) = 0$$

$$\cos\theta = -1 , \frac{8}{17}$$

$$\cos\theta = \frac{8}{17}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - (\frac{8}{17})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{289 - 64}{289}} = \frac{15}{17}$$

$$= \frac{30}{34}$$

หมายเหตุ ถ้า $\cos\theta = -1$ แล้ว $\sin\theta = 0$

ทำให้ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้นจึงตัดกรณี $\cos\theta = -1$ ทิ้งไปได้

การตัดตัวเลือก เราสามารถนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก เช่น จากขั้นตอนที่เราได้สมการ (1)

$$3(1 + \cos\theta) = 5\sin\theta$$

ลองแทนค่าจากตัวเลือก ๑. $\sin\theta = \frac{30}{34}$

จะได้ $\sin\theta = \frac{15}{17}$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - (\frac{15}{17})^2} = \frac{8}{17}$$

สองแทนค่าในสมการ (1) $3(1 + \frac{8}{17}) = 3(\frac{25}{17}) = \frac{75}{17}$

$$5(\frac{30}{34}) = 5(\frac{15}{17}) = \frac{75}{17}$$

เพราะฉะนั้น $\sin\theta = \frac{30}{34}$ ใช้ได้ เราจึงเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

การแทนค่าในโจทย์ข้อนี้นับว่าโชคดีมากที่ตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

ส่วนตัวเลือกที่เหลือ $\sin\theta = \frac{15}{34}, \frac{25}{30}, \frac{15}{30}$ จะใช้ไม่ได้

43. ตอบ 2.

แนวคิด **การหาเซต A**

$$\sqrt{x-4} = 2 - \sqrt{x-8}$$

$$x-4 = 4 - 4\sqrt{x-8} + (x-8)$$

$$0 = -4\sqrt{x-8}$$

$$x-8 = 0$$

$$x = 8$$

$$A = \{8\}$$

การหาเซต B

$$(\log_a x)(\log_2 a) = \log_5 125$$

$$\frac{\log x}{\log a} \cdot \frac{\log a}{\log 2} = \log_5 5^3$$

$$\frac{\log x}{\log 2} = 3$$

$$\log x = 3 \log 2$$

$$\log x = \log 2^3$$

$$x = 2^3$$

$$x = 8$$

เพราะฉะนั้น $B = \{8\}$

สรุป $A = B$

44. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $(\frac{1}{3})^{\log_2 (x^2+2)} > (\frac{1}{3})^{\log_2 (4x-1)}$

และ $f(x) = (\frac{1}{3})^x$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $\log_2 (x^2+2) < \log_2 (4x-1)$

เพราะว่า $f(x) = \log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $x^2+2 < 4x-1$

$$x^2-4x+3 < 0$$

$$(x-3)(x-1) < 0$$

$$1 < x < 3$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(1,3)$

การตัดตัวเลือก ให้เลือก x ที่ทำให้ log หาค่าไม่ได้ เช่น $x = -10$

จะได้ $\log_2 (4x-1) = \log_2 (-41)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = -10$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบของอสมการ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

45. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$

$$\lim_{x \to 1^-} 1-x^2 = \lim_{x \to 1^+} x+b$$

$$0 = 1+b$$

$$b = -1$$

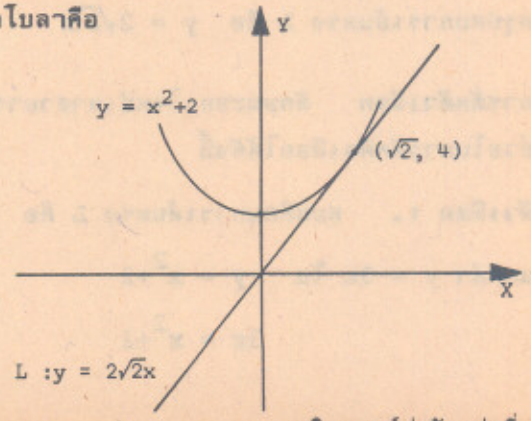
สรุป $$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{เมื่อ } -\infty < x < 1 \\ x-1 & \text{เมื่อ } 1 \leqslant x < \infty \end{cases}$$

เพราะว่า $$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{เมื่อ } -\infty < x < 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } 1 < x < \infty \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $f'(b) = f'(-1) = -2(-1) = 2$

46. ตอบ 3.

แนวคิด กราฟของพาราโบลาคือ



ให้ m เป็นความชันของเส้นตรง L ที่ผ่านจุด (0,0) และสัมผัสพาราโบลา

$y = x^2+2$

สมการเส้นตรง L คือ $y = mx$

การหาจุดสัมผัสของ $y = mx$ และ $y = x^2+2$

$$mx = x^2+2$$

$$x^2-mx+2 = 0$$

เพราะว่า $y = mx$ สัมผัสกับ $y = x^2+2$

เพราะฉะนั้น $x^2-mx+2 = 0$ มีราก 1 ตัวเท่านั้น

นั่นคือ $b^2-4ac = 0$

$$(-m)^2-4(1)(2) = 0$$

$$m^2 = 8$$

$$m = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

เพราะว่าเส้นตรง L สัมผัสพาราโบลา $y = x^2+2$ ในควอดรันท์ 1

เพราะฉะนั้น $m = 2\sqrt{2}$ เท่านั้น

สรุปสมการเส้นตรง L คือ $y = 2\sqrt{2}x$

การตัดตัวเลือก ลักษณะของโจทย์เราสามารถนำตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้ดังนี้

ตัวเลือก 1. สมมติสมการเส้นตรง L คือ $y = 3x$

แทนค่า $y = 3x$ ใน $y = x^2+2$

$$3x = x^2+2$$

$$x^2-3x+2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 2$$

เพราะฉะนั้น L ตัดพาราโบลา 2 จุดคือ (1,3) และ (2,6)

เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. สมมติ L : $y = 4x$

$$y = x^2+2$$

$$4x = x^2+2$$

$$x^2-4x+2 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4(1)(2)}}{2} = \frac{4 \mp 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้น L ตัดพาราโบลา 2 จุดอีกแล้ว เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ตัวเลือก 3. สมมติ L : $y = 2\sqrt{2}x$

$$y = x^2+2$$

$$2\sqrt{2}x = x^2+2$$

$$x^2-2\sqrt{2}x+2 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4(1)(2)}}{2} = \sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้น L สัมผัสพาราโบลา $y = x^2+2$ ที่จุด $(\sqrt{2},4)$

ดังนั้นเลือกข้อ 3. เป็นคำตอบได้เลย

หมายเหตุ $y = 3\sqrt{2}x$ ตัดพาราโบลา 2 จุด

47. ตอบ 4.

แนวคิด เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 1$ และ $y' = 1$

เพราะฉะนั้น $1 = \frac{0-a^2}{0-b}$; $b = a^2$

เพราะว่า $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\frac{x^2-a^2}{x-b}) = \frac{d}{dx}(\frac{x^2-b}{x-b})$

$$= \frac{(x-b)(2x) - (x^2-b)(1)}{(x-b)^2}$$

เพราะฉะนั้น $1 = \frac{(0-b)(0) - (0-b)(1)}{b^2} = \frac{1}{b}$

$b = 1$

เพราะว่า $a^2 = b = 1$ เพราะฉะนั้น $a = 1$ หรือ -1

สรุป $b = |a|$

การตัดตัวเลือก ลองเลือก a,b ที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

$a = 1$, $b = 1$

จะได้ $y(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ และ $y'(x) = 1$

ซึ่ง $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $a = -1$, $b = 1$

จะได้ $y(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ และ $y'(x) = 1$

ซึ่ง $y(0) = 1$ และ $y'(0) = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

48. ตอบ 4.

แนวคิด $\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -2+12 = 10$

$\det(B) = \begin{vmatrix} 2 & x \\ -4 & y \end{vmatrix} = 2y+4x$

$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7-5 = 2$

$\det(C^{-1}) = \frac{1}{\det(C)} = \frac{1}{2}$

$\det(-\frac{1}{2}AB) = (-\frac{1}{2})^2 \det(AB)$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\det(A)\det(B)$

$= \frac{1}{4}(10)(2y+4x)$

$= 5y+10x$

เพราะฉะนั้น $5y+10x = \frac{1}{2}$

$y+2x = \frac{1}{10}$

49. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $B_1 = A_1$

เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{bmatrix}$

เพราะว่า $B_2 = A_2 - 2A_1$

เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $B_3 = A_3 - 3A_1$

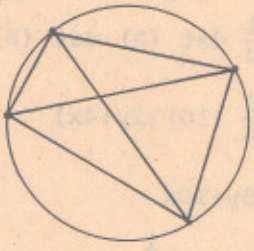
เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

สรุป $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $b_{23} + b_{33} = (-1)+(-2) = -3$

50. ตอบ 2.

แนวคิด สำหรับจุด 4 จุดใดๆ บนเส้นรอบวงของวงกลม
เมื่อเราลากเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมและเส้นทแยงมุม
จะเห็นได้ว่ามีจุดตัด 1 จุด



เพราะฉะนั้นจุดตัดภายในวงกลมที่เกิดจากการโยงจุดบนเส้นรอบวง
15 จุด มีได้มากที่สุดเท่ากับ $\binom{15}{4}$ จุด

51. ตอบ 4.

แนวคิด S = แซมเปิลสเปซของการเดินทางไปและกลับของศักดิ์

การนับจำนวนสมาชิกของ S เป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 การเดินทางไปเลือกเรือได้ 18 วิธี
ขั้นที่ 2 การเดินทางกลับเลือกเรือได้ 18 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(S) = 18 \times 18 = 324$

A = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์นั่งเรือไปและกลับด้วยเรือด่วนลำเดียวกัน

การนับจำนวนสมาชิกของ A เป็นดังนี้

ขั้นที่ 1 การเดินทางไปด้วยเรือด่วนเลือกได้ 10 วิธี

ขั้นที่ 2 การเดินทางกลับต้องนั่งเรือลำเดิมที่นั่งไปเลือกได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(A) = 10$

สรุป $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{324} = \frac{10}{18^2}$

52. ตอบ 3.

แนวคิด ก. ผิด แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $P(A \cap B') = P(A \cap B) = P(B \cap A') = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $P(A) = P((A \cap B) \cup (A \cap B')$

$= P(A \cap B) + P(A \cap B') - P([(A \cap B) \cap (A \cap B')])$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - P(\phi)$

$= \frac{1}{2}$

และ $P(B) = P((B \cap A) \cup (B \cap A'))$

$= P(B \cap A) + P(B \cap A') - P([(B \cap A) \cap (B \cap A')])$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - P(\phi)$

$= \frac{1}{2}$

เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นข้อความ (ก) ผิด

ข. ถูก แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $A \cap B = B \cap C = A \cap C = \phi$

และ $P(A \cup B) = P(A \cup C) = P(B \cup C)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(\phi)$

$= P(A) + P(B)$

ในทำนองเดียวกัน $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$

ดังนั้น $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

$= P(A \cup C)$

$= P(A) + P(C)$

นั่นคือ $P(B) = P(C)$

เพราะว่า $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

$= P(B \cup C)$

$= P(B) + P(C)$

$P(A) = P(C)$

สรุป $P(A) = P(B) = P(C)$

เพราะว่า $1 = P(A \cup B \cup C)$

$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C)$

$+ P(A \cap B \cap C)$

$= P(A) + P(B) + P(C)$

$= P(A) + P(A) + P(A)$

$= 3P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A) = \frac{1}{3}$

53. ตอบ 3.

แนวคิด จากข้อมูล

จำนวนวันที่หยุด	จำนวนนักเรียน	ความถี่สะสม
0 - 2	8	8
3 - 5	12	20
6 - 8	10	30
9 - 11	0	30
12 - 14	10	40
	N = 40	

การหามัธยฐาน

จาก $N = 40$ จะได้ $\frac{N}{2} = 20$

เพราะว่ามัธยฐาน = คะแนนของข้อมูลตัวที่ 20

และข้อมูลตัวที่ 20 ตรงกับขีดจำกัดบนของอันตรภาคชั้น 3 - 5

เพราะฉะนั้น มัธยฐาน = 5.5

การหาฐานนิยม

อันตรภาคชั้น 3 - 5 มีความถี่มากที่สุด

$$\text{ฐานนิยม} = L + \left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right] I$$

$L = 2.5$

$d_1 = 12 - 8 = 4$

$d_2 = 12 - 10 = 2$

$I = 5.5 - 2.5 = 3$

$$\text{ฐานนิยม} = 2.5 + \left[\frac{4}{4+2}\right](3) = 2.5 + 2 = 4.5$$

เลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้แล้ว แต่เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านเราจะหา $\bar{X}$ ต่อไป

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i x_i}{40}$$

$$= \frac{(1)(8) + (4)(12) + (7)(10) + (10)(0) + (13)(10)}{40}$$

$$= 6.4$$

54. ตอบ 2.

แนวคิด

กรณีที่ 1 $a < 2$

ข้อมูลเรียงจากน้อยไปมากคือ a, 2, 4, 5, 6

พิสัย = 6 - a

$$\bar{X} = \frac{a + 2 + 4 + 5 + 6}{5} = \frac{18 + a}{5}$$

เพราะว่า พิสัย $= \bar{X}$ เพราะฉะนั้น $6 - a = \frac{18 + a}{5}$

$$30 - 5a = 18 + a$$

$$6a = 12$$

$$a = 2$$

สรุป $a < 2$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 $a > 6$

ข้อมูลเรียงจากน้อยไปมากคือ 2, 4, 5, 6, a

พิสัย $= a - 2$

$$\bar{X} = \frac{2 + 4 + 5 + 6 + a}{5} = \frac{18 + a}{5}$$

เพราะว่า พิสัย $= \bar{X}$ เพราะฉะนั้น $a - 2 = \frac{18 + a}{5}$

$$5a - 10 = 18 + a$$

$$4a = 28$$

$$a = 7$$

จากทั้ง 2 กรณี เราสรุปว่า a มีได้ 1 ค่าเท่านั้น คือ $a = 7$

55. ตอบ 1.

แนวคิด จากข้อมูลที่กำหนดให้

สัมประสิทธิ์การแปรผันของน้ำหนัก $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{345}{3015} = 0.114$

สัมประสิทธิ์การแปรผันของความยาว $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{13}{52} = 0.25$

สรุป การกระจายของน้ำหนักน้อยกว่าการกระจายของความยาว

56. ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด

ปี 2532 ราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหาร $= \frac{110.3+111.4+113.5}{3}$

$= \frac{335.2}{3}$

$= 111.73 < 117.7$

เพราะฉะนั้นราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหารปี 2532 ถูกกว่าราคาหมวดอาหาร

2. ผิด

ปี 2536 ราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหาร $= \frac{136.6+119.6+142.3}{3}$

$= \frac{398.5}{3}$

$= 132.83 > 130.2$

เพราะฉะนั้นราคาเฉลี่ยของหมวดที่ไม่ใช่อาหารปี 2536 แพงกว่าราคาหมวดอาหาร

3. ถูกต้อง

กำหนดปี พ.ศ. 2529 เป็นปีฐาน

ดัชนีราคาหมวดเครื่องนุ่งห่มของปี พ.ศ. 2529 = 100

ดัชนีราคาหมวดเครื่องนุ่งห่มของปี พ.ศ. 2532 = 110.3

เพราะฉะนั้นค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ 110.3 - 100 = 10.3

4. ผิด

กำหนดปี พ.ศ. 2529 เป็นปีฐาน

ดัชนีราคาหมวดเครื่องนุ่งห่มของปี พ.ศ. 2536 = 136.3

เพราะฉะนั้นค่าเพิ่มขึ้นเท่ากับ 136.3 - 100 = 36.3

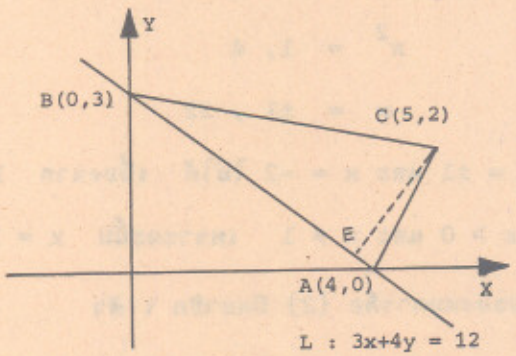
ตอนที่ 3 ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. **ตอบ** 5.5

แนวคิด สมการเส้นตรง L : $3x+4y = 12$

$y = 0$ จะได้ $x = 4$ จุด A คือ (4,0)

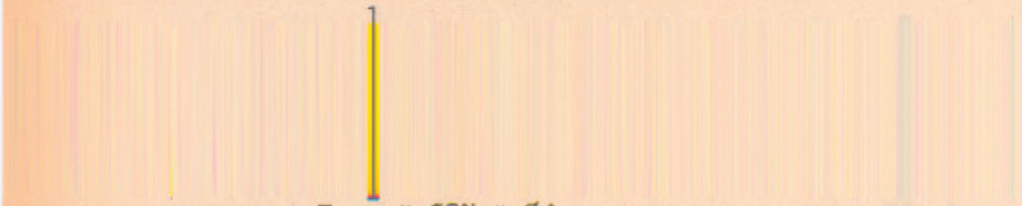
$x = 0$ จะได้ $y = 3$ จุด B คือ (0,3)



ความยาว AB $= \sqrt{(0-4)^2 + (3-0)^2} = 5$

ระยะ CE $= \dfrac{|3(5) + 4(2) - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|15 + 8 - 12|}{5} = \dfrac{11}{5}$

เพราะฉะนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC



$$= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$= \frac{1}{2} \times |AB| \times |CE|$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{11}{5} = 5.5$$

2. **ตอบ** 1

แนวคิด เพราะว่า $\log_{x^2} \sqrt{x} = \log_{x^2} (x^2)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$

และ $16^{(\log_{x^2} \sqrt{x})} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$

เพราะฉะนั้น $2 = x^4-5x^2+6$

$$x^4-5x^2+4 = 0$$

$$(x^2-4)(x^2-1) = 0$$

$$x^2 = 1, 4$$

$$x = \pm 1, \pm 2$$

เพราะว่า $x = \pm 1$ และ $x = -2$ ไม่ได้ เนื่องจาก $\log_{x^2} \sqrt{x}$ หาค่าได้เมื่อ $x > 0$ และ $x \neq 1$ เพราะฉะนั้น $x = 2$ เท่านั้น

สรุปเซตคำตอบของสมการคือ {2} มีสมาชิก 1 ตัว

3. **ตอบ** 29

แนวคิด จากสูตรอนุพันธ์ของผลคูณของฟังก์ชัน

จาก $y = (x^3-2x^2) f(x)$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3-2x^2)\frac{d}{dx}f(x) + f(x)\frac{d}{dx}(x^3-2x^2)$$

$$= (x^3-2x^2)f'(x) + f(x)(3x^2-4x)$$

เมื่อ $x = -1$ จะได้

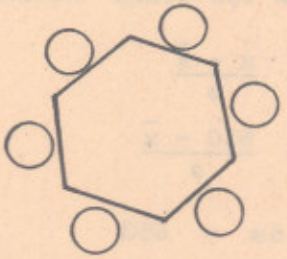
$$\frac{dy}{dx}(x=-1) = \left[(-1)^3 - 2(-1)^2\right]f'(-1) + f(-1)\left[3(-1)^2 - 4(-1)\right]$$

$$= (-1-2)(-5) + (2)(3+4)$$

$$= 29$$

4. **ตอบ** 840

แนวคิด



การนับจำนวนวิธีทำดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกคน 6 คน จาก 7 คน เข้ามานั่ง

ทำได้ $\binom{7}{6} = 7$ วิธี

ขั้นที่ 2 จัดลำดับคน 6 คนที่เลือกได้ให้นั่งในแนววงกลมทั้งหมด

ทำได้ $(6-1)! = 120$ วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= 7 \times 120 = 840$ วิธี

5. ตอบ 100

แนวคิด ให้ $\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เพราะว่าสมชายสอบได้ 700 คะแนน คิดเป็น $z = 3$

เพราะฉะนั้น $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$3 = \frac{700 - \bar{x}}{s}$

$\bar{x} + 3s = 700$ .....(1)

เพราะว่าสมศักดิ์สอบได้ 650 คะแนน คิดเป็น $z = 2.5$

เพราะฉะนั้น $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$2.5 = \frac{650 - \bar{x}}{s}$

$\bar{x} + 2.5s = 650$ .....(2)

(1) - (2) ; $0.5s = 50$

$s = 100$

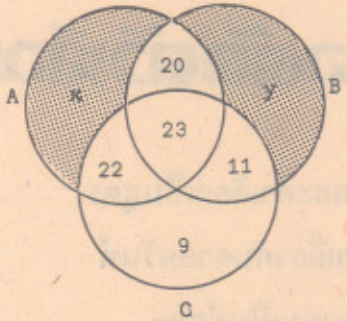
สรุปส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 100

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 3)

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปีการศึกษา 2536 พร้อมเฉลย ด้วยวิธีจริง วิธีลัด และ วิธีตัดตัวเลือก

6. **ตอบ** 30

แนวคิด ให้ x,y เป็นจำนวนสมาชิกของส่วนที่เหลือซึ่งแสดงด้วยแผนภาพเวนน์ดังนี้



เพราะว่า $|A \cup B \cup C| = 100$

เพราะฉะนั้น $x + 20 + y + 23 + 22 + 11 + 9 = 100$

$x + y = 15$ .....(1)

เพราะว่า $|A| - |B| = 6$

เพราะฉะนั้น $(x + 20 + 23 + 22) - (y + 20 + 23 + 11) = 6$

$x - y = -5$ .....(2)

(1) + (2) ; $2x = 10$

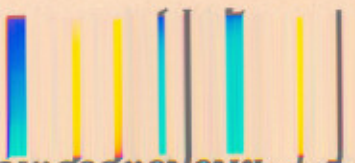
$x = 5$

$y = 10$

จากแผนภาพของเวนน์จะได้ว่า $|(B \cup C) - A| = y + 11 + 9$

$= 10 + 11 + 9$

$= 30$



คณิตศาสตรปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
2. เหตุผลเกี่ยวกับควอดรันท์
3. เซตคำตอบเป็นข้อใด
4. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด
5. โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
6. ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้
7. เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้
8. นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก
9. ความชันก็ตัดตัวเลือกได้
10. คว่ำหงาย-เปิดซ้ายขวา
11. ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก
12. นำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าของโจทย์
13. ใช้ยกตัวอย่างเพื่อการสรุปผล
14. โจทย์เสริมทักษะในการตัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ระดับ ม. ปลาย

ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

สอบเมื่อวันอาทิตย์ที่ 15 มกราคม พ.ศ. 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 40 ข้อละ 2 คะแนน

1. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

   ก) $\exists x\,[\sin x + \cos x = 2]$

   ข) $\exists x\,[\sin x + \cos x > 2]$

   ค) $\forall x\,[x^2-3x+3 > 0]$

   ง) $\exists x\,[x^2-8x+18 \leqslant 0]$

2. กำหนด p,q,a,b,x และ y เป็นประพจน์โดยที่ a และ b มีค่าความจริงเป็นจริง x และ y มีค่าความจริงเป็นเท็จ และไม่ทราบค่าความจริงของ p และ q จงพิจารณาประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   (1) $(x \to p) \to (b \to y)$

   (2) $[(x \to q) \to q] \to q$

   (3) $\sim(x \vee q) \to (\sim x \wedge \sim q)$

   (4) $[p \to (a \vee x)] \to [(p \to a) \to x]$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก) ประพจน์ในข้อ (1) - (4) เป็นจริงเพียง 1 ข้อ

   ข) ประพจน์ในข้อ (1) - (4) เป็นจริงเพียง 2 ข้อ

   ค) ประพจน์ในข้อ (1) - (4) เป็นจริงเพียง 3 ข้อ

   ง) ประพจน์ในข้อ (1) - (4) เป็นจริงทั้ง 4 ข้อ

3. ให้ (a,b) แทน $\{\{a\},\{a,b\}\}$ ถ้า $a \in A$ และ $b \in B$ แล้ว

ข้อความใดบ้างถูกต้อง

(1) $(a,b) \subset P(A \cup B)$

(2) $(a,b) \in P(P(A \cup B))$

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

4. ให้ A และ B เป็นเซต ข้อความใดบ้างถูกต้อง

(1) $P(A - B) \subset [P(A) - P(B)] \cup \{\phi\}$

(2) $[P(A) - P(B)] \cup \{\phi\} \subset P(A - B)$

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน $A \subset D_f$ และ $B \subset R_f$ เมื่อ D_f และ R_f แทนโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน f ตามลำดับ

นิยาม $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$

และ $f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$

กำหนด $f(x) = x^4 + 2$

$A = [-2,1]$

$B = [0,18]$

$C = f(A) \cap f^{-1}(B)$

จะได้ว่า C เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

ก) $[-2,0]$ ข) $[0,1]$

ค) $[1,3]$ ง) $[3,4]$

6. กราฟของความสัมพันธ์ในข้อใดตัดกัน 1 จุด

ก) $y = x^2$ กับ $y = 2-x^2$

ข) $2x+y = 0$ กับ $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

ค) $y = x^2$ กับ $10x + y = 0$

ง) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$ กับ $(x-9)^2 + (y-5)^2 = 16$

7. จำนวนเต็มบวกจำนวนหนึ่งมีตัวเลข 5 หลัก หารด้วย 72 ลงตัว ตัวเลขหลักพัน หลักร้อยและหลักสิบ คือ 1, 5 และ 8 ตามลำดับ ถ้า p เป็นตัวเลขหลักหมื่น และ q เป็นตัวเลขหลักหน่วยแล้ว $p + q$ เท่ากับเท่าไร

ก) 11 ข) 12 ค) 13 ง) 14

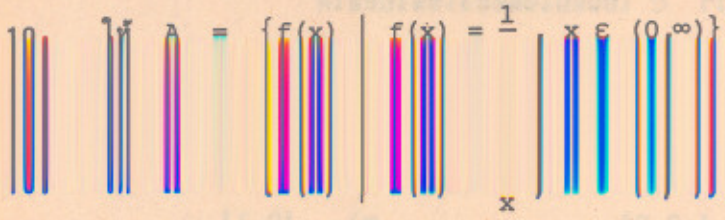
8. A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|$ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A ตรงกับข้อใด

ก) -4 ข) 1 ค) 2 ง) 4

9. $1 + \sqrt{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม a และ b เป็นสมาชิกของเซตในข้อใด

ก) $(-\infty,-24]$ ข) $(-24,8]$

ค) $(8,100]$ ง) $(100,\infty)$



ข้อความใดบ้างถูกต้อง

(1) A ไม่มีขอบเขตล่างค่ามากสุด

(2) A ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

11. กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และ $\sin\theta = \frac{5}{13}$

ค่าของ $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} + \frac{13}{24}\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}\right)$ เท่ากับเท่าใด

ก) $\frac{98}{13}$ ข) $\frac{72}{13}$

ค) $-\frac{22}{13}$ ง) $-\frac{72}{65}$

12. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $0 < x < \frac{\pi}{2}$ แล้ว ค่าของ x ที่สอดคล้องสมการ $\sin 5x - \sin 3x = 0$ คือ $0, \frac{\pi}{8}$ และ $\frac{3\pi}{8}$

(2) $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

13. ค่าสูงสุดของ $12\cos\theta - 5\sin\theta + 4 + \frac{\sqrt{3}\tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$ คือข้อใด

ก) 5.5 ข) 12.5 ค) 13.5 ง) 17.5

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin(\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{5}{13})$ มีค่าเท่ากับ $-\frac{16}{65}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\log a_1, \log a_2, \ldots, \log a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตแล้ว $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

(2) ถ้า a,b,c เป็นทั้งลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต โดยที่ a,b และ c ต่างไม่เท่ากับศูนย์แล้ว $\frac{3a+b-2c}{3b-c} = 3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

16. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้ $\sum_{k=1}^{n} k = 120$ แล้ว

$\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{4 - 12k^2 + 9k^4} - 4k^2)$ เท่ากับเท่าใด

ก) -8678 ข) -8650

ค) -1270 ง) -1242

17. อนุกรม $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2 - 1} + \ldots$

มีสมบัติตรงกับข้อใด

ก) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ 0.48

ข) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ 0.5

ค) เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ 0.6

ง) เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

18. กำหนด $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 10$ และ a_2, a_3, a_4 เป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง แล้ว $\sum_{n=1}^{12} a_n$ เท่ากับเท่าใด

ก) 450 ข) 450 หรือ -210

ค) -210 หรือ 10 ง) 10 หรือ 450

19. **ทฤษฎีบท** ให้ $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับซึ่ง $a_n \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ n และ $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n \to \infty} a_n} = \sqrt{L}$$

$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1-2n})$ ตรงกับข้อใด

ก) ไม่มีค่า

ข) มีค่าเท่ากับ 0

ค) มีค่าเท่ากับ 0.5

ง) มีค่าเท่ากับ 1

20. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมด และ f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ ให้ g เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)(x^2-4)}{x-2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ a & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$$

ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f ตัดกับเส้นตรง $y = x+3$ ที่ $x = 2$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก) ไม่มีค่า a ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

ข) ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้ไม่เพียงพอที่จะหาค่าของ a ได้ที่ทำให้ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

ค) ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $a = 8$

ง) ฟังก์ชัน g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $a = 20$

21. กำหนดให้ $f(x) = |x| - x^2$ และ $g(x) = |x-x^2| - 4$

ค่าของ $(f \circ g)'(2)$ เท่ากับเท่าใด

ก) 3

ข) -3

ค) 9

ง) -9

22. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์อันดับ 1 และ 2 ได้

(1) $f'(x) = 4g'(x)$

(2) f และ g ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว

ตัวเลือกในข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก) ถ้ากราฟของ f เป็นเส้นตรง แล้วกราฟของ g เป็นเส้นตรง

ข) ถ้า f เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2 และผ่านจุด (0,0) แล้วกราฟของ g ผ่านจุด (0,0)

ค) $f''(x) - 4g''(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R$

ง) ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R แล้ว g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R

23. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ทุกจำนวนจริง x ข้อใดต่อไปนี้ถูก

ก) อินเวอร์สของ f กำหนดโดย $f^{-1}(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ทุกจำนวนจริง x

ข) f ไม่มีอินเวอร์ส

ค) $f(\ln 7) = 7$

ง) $f(1+x) \neq f(1) + f(x)$ ทุกจำนวนจริง x

24. มีกล่องอยู่ 2 ใบ กล่องใบแรกมีลูกบอลสีขาว 5 ลูก กล่องใบที่สองมีลูกบอกสีดำอีก 5 ลูก มีการสุ่มหยิบลูกบอลจากแต่ละกล่องๆ ละ 1 ลูก เมื่อสลับลูกบอลกันแล้วใส่คืนลงไปในกล่องแต่ละใบ หลังจากกระทำครั้งแรก แล้ว กล่องใบแรกจะมีลูกบอลสีขาว 4 ลูก สีดำ 1 ลูก หากกระ

ทำดังนี้ต่อไปอีกสามครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่กล่องใบแรกมีลูกบอลสีขาว 5 ลูก

ก) $\frac{16}{3125}$ ข) $\frac{21}{3125}$

ค) $\frac{89}{15625}$ ง) $\frac{153}{15625}$

25. นักเรียนชั้น ม.4 ทั้งหมดของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ปรากฏว่าเป็นผู้ที่จบ ม.3 มาจากโรงเรียนเอกชน 40 % นอกนั้นมาจากโรงเรียนรัฐบาล ผลการสอบประจำภาคเรียนที่ 1 ผลปรากฏว่า ผู้ที่ได้เกรดเฉลี่ย 4.00 มีทั้งสิ้น 24 % เป็นผู้จบมาจากโรงเรียนเอกชนจำนวน 30 % ถ้าสุ่มเลือกนักเรียนชั้น ม.4 ของโรงเรียนนี้มาคนหนึ่ง ปรากฏว่าเป็นผู้ที่สอบได้เกรดเฉลี่ย 4.00 จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จบ ม.3 มาจากโรงเรียนเอกชน

ก) $\frac{1}{2}$ ข) $\frac{3}{7}$

ค) $\frac{5}{12}$ ง) $\frac{7}{12}$

26. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งมีคะแนนเต็ม 100 คะแนน มีนักเรียนเข้าสอบ 4372 คน คะแนนสอบของนักเรียนนำมาแจกแจงได้ดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนคน
ต่ำกว่า 25	222
25 – 34	913
35 – 44	1045
45 – 54	947
55 – 64	663
65 – 74	416
มากกว่า 74	166

ข้อใดถูกต้อง

(1) Q_3 ตรงกับคนที่สอบได้ 59.4 คะแนน

(2) ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนสูงสุดเรียงลำดับลงมาถึงลำดับที่ 1000 สอบได้ นอกนั้นสอบตกแล้ว คนที่สอบได้คนสุดท้ายจะได้ 58.2 คะแนน

ก) ข้อ (1) เท่านั้นถูกต้อง

ข) ข้อ (2) เท่านั้นถูกต้อง

ค) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ถูกต้อง

ง) ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็ไม่ถูกต้อง

27. กำหนดให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล n จำนวน มีค่าเป็น M และผลบวกของ (n-9) จำนวน มีค่าเป็น S แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ 9 จำนวนที่เหลือเท่ากับเท่าไร

ก) $\frac{nS + M}{9}$ ข) $\frac{nS - M}{9}$

ค) $\frac{nM + S}{9}$ ง) $\frac{nM - S}{9}$

28. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 6 คน ปรากฏว่ามี 3 คนเท่านั้นที่ได้คะแนนเท่ากันและได้คะแนนมากกว่าอีก 3 คนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยฐาน พิสัย และ Q_1 ของคะแนนนักเรียนกลุ่มนี้เป็น 9, 8.5, 6 และ 6 ตามลำดับแล้ว สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของคะแนนเป็นเท่าไร

ก) 0.12 ข) 0.22

ค) 0.32 ง) 0.42

29. สมการของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $7x-14y-20 = 0$ และอยู่ในควอดรันต์ที่สี่ วงกลมสัมผัสกับเส้นตรง $4x-3y-10 = 0$ และ $3x-4y-5 = 0$ คือข้อใด

ก) $49x^2 + 49y^2 - 140x + 70y + 116 = 0$

ข) $49x^2 + 49y^2 - 140x + 70y + 44 = 0$

ค) $49x^2 + 49y^2 - 84x + 98y + 60 = 0$

ง) $49x^2 + 49y^2 - 84x + 98y - 36 = 0$

30. สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $2x+y-7 = 0$ และผ่านจุด $(6,-1)$ แกนของพาราโบลามีสมการ $y-3 = 0$ คือข้อใด

ก) $2y^2+12y-x+16 = 0$ ข) $y^2+6y-x+11 = 0$

ค) $y^2-6y-4x+17 = 0$ ง) $y^2-6y-2x+13 = 0$

31. ถ้า $P(x,y)$ เป็นจุดใดๆ ซึ่งห่างจากจุด $(2,-4)$ เป็นสามเท่าของระยะห่างจากเส้นตรง $x+1 = 0$ แล้ว กราฟของจุด P มีสมการคือข้อใด

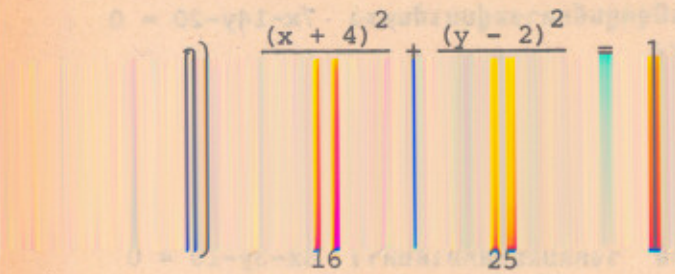
ก) $8x^2 + 9x^2 - 38x + 72y + 179 = 0$

ข) $8x^2 - y^2 + 22x - 8y - 11 = 0$

ค) $x^2 - 8y^2 - 8x + 22y - 11 = 0$

ง) $9x^2 + 8y^2 + 72x - 38y + 179 = 0$

32. สมการของวงรี มีจุดศูนย์กลางและโฟกัสจุดหนึ่งห่างจากเส้นตรง $y-10 = 0$ เท่ากับ 8 และ 11 หน่วย ตามลำดับ แกนเอกของวงรีมีสมการ $x+4 = 0$ และถ้าวงรีผ่านจุด $(-8,2)$ แล้ว สมการของวงรีคือข้อใด



ข) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{18} = 1$

ค) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$

ง) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{21} = 1$

33. กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกัน และมีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $\frac{2}{5}\bar{u} + (6-3x^2)\bar{v} = 100\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}$

แล้ว ค่าของ x อยู่ในช่วงใด

ก) $(-4,1)$ ข) $(-2,2)$

ค) $(-\infty,1)$ ง) $(-1,\infty)$

34. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

ก) ถ้า $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{u} + \bar{v}|$ จะได้ $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$

ข) ถ้า $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ แล้ว $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$

ค) กำหนดให้ $\bar{u} = (2y-3)\bar{i} + 5\bar{j}$ และ $\bar{v} = 5\bar{i} - (x+3)\bar{j}$

ถ้า $\bar{u} = -2\bar{v}$ แล้ว $x = -\frac{1}{2}$ และ $y = \frac{13}{2}$

ง) กำหนดให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}$

ค่าของโคไซน์ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $-\frac{3}{5}$

35. กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{4\times4}$ เมื่อ $a_{ij} = 2^{i+j}$,

$i = 1,2,3,4$ และ $j = 1,2,3,4$ ค่า det(A) เท่ากับเท่าใด

ก) 0 ข) 2

ค) 4 ง) 8

36. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 2^4 & 0 & 0 & 0 \\ 2^8 & 2^{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 0 & 0 & 5^4 & 5^6 & 5^8 \\ 0 & 0 & 5^6 & 5^8 & 5^{12} \end{bmatrix}$

det(A) เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

ก) 16 หลัก ข) 17 หลัก

ค) 18 หลัก ง) 19 หลัก

37. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \{x \mid x$ เป็นไอแฟกเตอร์ของสมาชิกเมตริกซ์ $A\}$

จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับเท่าใด

ก) 0 ข) 1

ค) 2 ง) 4

38. กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3 และ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\text{adj}(AA^{-1}) = \text{adj}(A)\ \text{adj}(A^{-1})$

(2) $\text{adj}(A^{-1}) = (\text{adj}(A))^{-1}$

(3) $\text{adj}(kA) = k\ \text{adj}(A)$ ทุกจำนวนจริง k

ตัวเลือกที่สรุปเกี่ยวข้องกับข้อความ (1) - (3) ได้ถูกต้องคือ

ก) มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อ

ข) มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อ

ค) มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อ

ง) ข้อความ (1), (2) และ (3) ผิดทุกข้อ

39. ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ และ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ และ $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$

(3) ถ้า $\frac{z-1}{z+1}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ แล้ว $|z| = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก) (1) หรือ (2) หรือ (3) ถูกเพียงข้อเดียวเท่านั้น

ข) (1) และ (2) เท่านั้นที่ถูก

ค) (1) และ (3) เท่านั้นที่ถูก

ง) (2) และ (3) เท่านั้นที่ถูก

40. ถ้า z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 = (\frac{1+i}{1-i})^{27}$ และ $z_2 = 2i^{150} - i^{177}$ ค่าของ $z_1 + \bar{z}_2 + z_2^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

ก) $\frac{1}{5}(i - 12)$ ข) $\frac{1}{5}(11i - 12)$

ค) $\frac{1}{5}(i + 12)$ ง) $\frac{1}{5}(11i + 12)$

ตอนที่ 2 ข้อ 1 - 8 ข้อละ 2.5 คะแนน

1. ร้านค้าปลีกแห่งหนึ่งรับขนมสองชนิดมาจากผู้ขายส่ง โดยนำมาบรรจุกล่องเอง

ขนมชนิดที่ 1 ใช้ถุงพลาสติกกล่องละ 2 ถุง บรรจุกล่องละ 1 ชิ้น

ขนมชนิดที่ 2 ใช้ถุงพลาสติกกล่องละ 1 ถุง บรรจุกล่องละ 3 ชิ้น

กล่องที่ใช้ขนาดเท่ากันทุกกล่อง และถุงพลาสติกที่ใช้ขนาดเดียวกันทุกถุง

ผู้ขายส่งกำหนดเงื่อนไขว่า ร้านค้าปลีกต้องซื้อถุงพลาสติกและกล่องจากผู้ขายส่งด้วย โดยที่จำนวนถุงพลาสติกที่ซื้อในแต่ละวันต้องไม่น้อยกว่า 40 ถุง จำนวนขนมทั้งสองชนิดรวมกันในแต่ละวันต้องไม่น้อยกว่า 70 ชิ้น และจำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 1 มากกว่าจำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 2 ได้ไม่เกินวันละ 30 กล่อง

ถ้าจำนวนเงินที่ได้จากการขายขนมสองชนิดนี้เท่ากันทุกวันคือวันละ 1500 บาท และขนมชนิดที่ 1 ราคาต้นทุนชิ้นละ 15 บาท ในขณะที่ขนมชนิดที่ 2 ราคาต้นทุนชิ้นละ 10 บาท ร้านค้าปลีกแห่งนี้ต้องขายขนมชนิดที่ 2 วันละกี่ชิ้นจึงจะได้กำไรมากที่สุด

2. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [1,4] และ $-x^2 \leq f(x) < 0$ ทุกค่า x บน [1,4]

ถ้า g เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย

$$g(x) = f(x) + x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ทุกค่า } x \text{ บน } [1,4]$$

และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จากเส้นตรง $x = 1$ เส้นตรง $x = 4$ และแกน X มีค่าเท่ากับ 3

แล้ว พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ g จากเส้นตรง $x = 1$ เส้นตรง $x = 4$ และแกน X มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ให้ $y = \frac{1}{f(x)} - x + \sqrt{2x-2}$

ถ้าเส้นตรง $4y = 3x+1$ เป็นเส้นสัมผัสเส้นโค้ง

$$y = \frac{1}{f(x)} - x + \sqrt{2x-2}$$

ที่จุด $(3, \frac{5}{2})$ แล้ว $f'(3)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. จงหาจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ ทั้งหมดที่ x และ y สอดคล้องกับสมการ

$$\log_2 (2^y x) - 3i = 2 + i \log_2 (x^y)$$

5. ถ้า $f(x) = \sqrt{3x}$ เมื่อ $x \geq 0$

$a_1 = \sqrt{3}$ และสำหรับแต่ละ $n \geq 2$ ให้ $a_n = f(a_{n-1})$

แล้ว $\lim_{n \to \infty} \left[\log_3 (a_n^2) - \left[\frac{1}{2} \log_3 (a_{n-1})\right]^2\right]$ มีค่าเท่าใด

6. จงหาค่าของ $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{20}{2}$

7. สับเซตทั้งหมดของ $S = \{1,2,3,\ldots,30\}$ ซึ่งมีสมาชิก 3 ตัว และ 3 หารผลบวกของสมาชิกทั้งสามลงตัวมีอยู่ทั้งหมดเป็นจำนวนที่สับเซต

8. จำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 42 ลงตัว และมีตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวก 42 ตัว พอดี มีอยู่ทั้งสิ้นกี่จำนวน

เฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ของสมาคมฯ

วันอาทิตย์ที่ 15 มกราคม พ.ศ. 2538

ตอนที่ 1

1.ค.	2.ข.	3.ค.	4.ก.	5.ค.	6.ง.	7.ค.	8.ค.
9.ข.	10.ข.	11.ข.	12.ง.	13.ง.	14.ค.	15.ก.	16.ค.
17.ข.	18.ง.	19.ค.	20.ง.	21.ค.	22.ข.	23.ก.	24.ง.
25.ก.	26.ข.	27.ง.	28.ข.	29.ก.	30.ค.	31.ข.	32.ก.
33.ข.	34.ค.	35.ก.	36.ง.	37.ข.	38.ข.	39.ค.	40.ก

ตอนที่ 2

1. 60	2. 20	3. -5/49	4. (8,-1),(0.5,1)
5. 1.75	6. 1330	7.1360	8. 6

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย ข้อสอบแข่งขันคัดเลือกคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี พ.ศ. 2537 (สอบคัดเลือกรอบที่ 1) ที่เมื่อวันที่ 25 มิถุนายน 2537 พร้อมด้วยการเฉลยตามวิธีของหลักสูตร วิธีลัด และ เทคนิคการตัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ ระดับ ม. ปลาย

ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

สอบเมื่อวันอาทิตย์ที่ 15 มกราคม พ.ศ. 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 40 ข้อละ 2 คะแนน

1. ตอบ ค.

แนวคิด (ก) ค่าความจริงเป็นเท็จ

(ข) ค่าความจริงเป็นเท็จ

โดยใช้เหตุผลร่วมกันดังนี้

เพราะว่า $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$

$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \leq \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $\sin x + \cos x$ คือ $\sqrt{2}$

นั่นคือ ไม่มีค่า x ที่ทำให้ $\sin x + \cos x \geq 2$

(ค) ค่าความจริงเป็นจริง

เพราะว่า $x^2-3x+3 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$

เพราะฉะนั้น $x^2-3x+3 > 0$ ทุกค่า $x \in \mathbf{R}$

(ง) ค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า $x^2-8x+18 = x^2-8x+(4)^2+2$

$= (x-4)^2 + 2 \geq 2$

เพราะฉะนั้น ไม่มี x ที่ทำให้ $x^2-8x+18 \leq 0$

2. ตอบ ข.

แนวคิด

(ก) ค่าความจริงของ $(x \to p) \to (b \to y)$

= ค่าความจริงของ $(F \to p) \to (T \to F)$

= ค่าความจริงของ $T \to F$ ($\because$ $F \to p$ เป็นจริงเสมอ)

= F

เพราะฉะนั้น $(x \to p) \to (b \to y)$ เป็นเท็จ

(ข) ค่าความจริงของ $[(x \to q) \to q] \to q$

= ค่าความจริงของ $[(F \to q) \to q] \to q$

= ค่าความจริงของ $[T \to q] \to q$ ($\because$ $F \to q$ เป็นจริงเสมอ)

เพราะว่า $[T \to T] \to T$ และ $[T \to F] \to F$ เป็นจริงทั้งคู่

เพราะฉะนั้น $[(x \to q) \to q] \to q$ เป็นจริง

(ค) ค่าความจริงของ $\sim(x \vee q) \to (\sim x \wedge \sim q)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\sim(x \vee q) \equiv \sim x \wedge \sim q$

เพราะฉะนั้น $\sim(x \vee q) \to (\sim x \wedge \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

(ง) ค่าความจริงของ $[p \to (a \vee x)] \to [(p \to a) \to x]$

= ค่าความจริงของ $[p \to (T \vee F)] \to [(p \to T) \to F]$

= ค่าความจริงของ $[p \to T] \to [T \to F]$

= ค่าความจริงของ $T \to F$

= F

เพราะฉะนั้น $[p \to (a \vee x)] \to [(p \to a) \to x]$ เป็นเท็จ

3. ตอบ ค.

แนวคิด จากโจทย์กำหนด $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

$a \in A$ และ $b \in B$ ดังนั้น $a,b \in A \cup B$

เพราะฉะนั้น $\{a,b\} \subset A \cup B$

เพราะว่า $\{a\} \subset A \cup B$ ดังนั้น $\{a\} \in P(A \cup B)$

เพราะว่า $\{a,b\} \subset A \cup B$ ดังนั้น $\{a,b\} \in P(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น $\{\{a\},\{a,b\}\} \subset P(A \cup B)$

นั่นคือ $(a,b) \subset P(A \cup B)$

สรุป (1) ถูกต้อง

เพราะว่า $(a,b) \subset P(A \cup B)$

เพราะฉะนั้น $(a,b) \in P(P(A \cup B))$

สรุป (2) ถูกต้อง

4. ตอบ ก.

แนวคิด (1) ถูกต้องด้วยเหตุผลดังนี้

ถ้า $P(A-B) = \phi$ แล้ว $P(A-B) \subset [P(A) - P(B)] \cup \{\phi\}$.

สมมติ $P(A-B) \neq \phi$

ให้ $C \in P(A-B)$ และ $C \neq \phi$

ดังนั้น $C \subset A-B$

$C \subset A$ และ $C \cap B = \phi$

เพราะฉะนั้น $C \in P(A)$

เพราะว่า $C \cap B = \phi$

เพราะฉะนั้น $C \notin P(B)$

หมายเหตุ	ถ้า $C \in P(B)$ แล้ว $C \subset B$
	ซึ่งจะทำให้ $C \cap B \neq \phi$

เพราะว่า $C \in P(A)$ และ $C \notin P(B)$

เพราะฉะนั้น $C \in [P(A) - P(B)] \cup \{\phi\}$

ถ้า $C = \phi$ แล้ว $C \in [P(A) - P(B)] \cup \{\phi\}$

สรุป $P(A-B) \subset [P(A) - P(B)] \cup \{\phi\}$

(๒) ผิด ตัวอย่างเช่น

$A = \{1,2\}$

$B = \{1\}$

$P(A) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$P(B) = \{\phi, \{1\}\}$

$P(A-B) = P(\{2\}) = \{\phi, \{2\}\}$

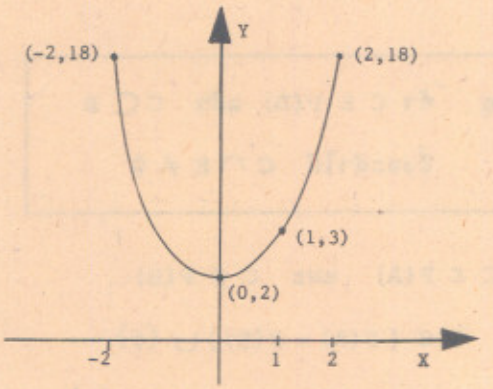
$P(A) - P(B) = \{\{2\}, \{1,2\}\}$

เพราะว่า $\{\{2\}, \{1,2\}\} \cup \{\phi\} \notin \{\phi, \{2\}\}$

เพราะฉะนั้น $[P(A) - P(B)] \cup \{\phi\} \notin P(A-B)$

5. ตอบ ค.

แนวคิด $f(x) = x^4+2$ มีกราฟดังนี้



$$A = [-2,1]$$

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

$$= \{ x^4+2 \mid x \in [-2,1]\}$$

$$= [2,18]$$

$$B = [0,18]$$

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}$$

$$= \{x \mid x^4+2 \in [0,18]\}$$

$$= [-2,2]$$

$$C = f(A) \cap f^{-1}(B)$$

$$= [2,18] \cap [-2,2]$$

$$= \{2\}$$

เพราะฉะนั้น C เป็นสับเซตของ [1,3] ในตัวเลือก ค.

6. ตอบ ง.

แนวคิด <u>พิจารณาตัวเลือก ก.</u> $x^2 = 2-x^2$

$$2x^2 = 2$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

เพราะฉะนั้นมีจุดตัด 2 จุดคือ (1,1), (-1,1)

<u>พิจารณาตัวเลือก ข.</u> $(x+3)^2 + (y-3)^2 = 9$

แทนค่า $y = -2x$

$$(x+3)^2 + (-2x-3)^2 = 9$$

$$x^2+6x+9+4x^2+12x+9 = 9$$

$$5x^2+18x+9 = 0$$

$$(5x+3)(x+3) = 0$$

$$x = \frac{-3}{5}, -3$$

เพราะฉะนั้นมีจุดตัด 2 จุดคือ $(-\frac{3}{5}, \frac{6}{5})$ และ (-3,6)

<u>พิจารณาตัวเลือก ค.</u> $x^2 = y = -10x$

$$x^2 = -10x$$

$$x^2+10x = 0$$

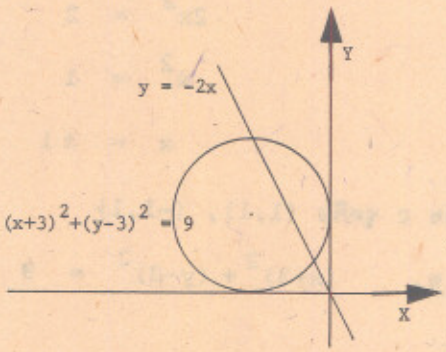
$$x = 0, -10$$

เพราะฉะนั้นมีจุดตัด 2 จุดคือ (0,0) และ (-10,100)

สรุปเลือกตัวเลือก ง. เป็นคำตอบ

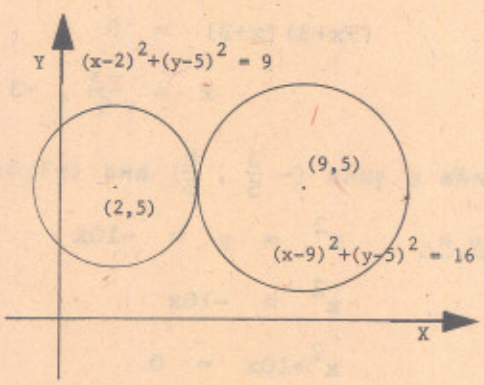
วิธีลัด การดูว่าเส้นโค้งตัดกันกี่แห่งใช้วิธีวาดรูปดูจะเร็วกว่าการแก้สมการ

[redacted] เมื่อวาดกราฟดูจะตัดกัน 2 จุด



ดังนั้นตัดตัวเลือก ข. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปดูที่ตัวเลือก ง.



จากรูปจะเห็นว่าตัดที่จุด (5,5) เท่านั้น

จึงเลือกตัวเลือก ง. เป็นคำตอบได้เลย

7. ตอบ ค.

แนวคิด ตัวเลขที่โจทย์กำหนดคือ

p	1	5	8	q

ให้ $x = p158q$

$= p\times10^4 + 1\times10^3 + 5\times10^2 + 8\times10^1 + q$

$= p\times10^4 + 1000 + 500 + 80 + q$

$= 1580 + p\times10^4 + q$

$= 1580 + 1000p + q$

<u>การพิจารณาค่าที่เป็นไปได้ของ q</u>

$q = x - 1580 - 1000p$

เพราะว่า $72 = 2^3\cdot3^2$ เพราะฉะนั้น $4|x$

เพราะว่า $4|x$ และ $4|1580$ และ $4|1000p$

เพราะฉะนั้น $4|q$ ลงตัว

ดังนั้นค่าที่เป็นไปได้ของ q คือ 4 หรือ 8 หรือ 0

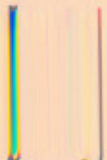
ข้อสังเกต ลองดูที่ตัวเลือกบ้างจะพบว่า ถ้า $q = 0$ แล้ว p จะมากกว่า 10 ดังนั้น $q \neq 0$ แน่นอน

ลองใช้เหตุผลบ้างก็ได้เพื่อการทำข้อสอบแบบเติมคำตอบ

สมมติ $8|q$

เพราะว่า $72|x$ เพราะฉะนั้น $8|x$

เพราะว่า $8 \mid x$ และ $8 \mid q$ และ $8 \mid 1000$



เพราะฉะนั้น $8 \mid (x - q - 1000p)$

แต่ $x - q - 1000p = 1580$ ซึ่ง 8 หาร 1580 ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น $q = 8$ ไม่ได้

ทำนองเดียวกัน $q = 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้น $q = 4$ เท่านั้น

ข้อสังเกต เพราะว่าข้อสอบแบบตัวเลือกทำให้เราหาค่า p ได้ง่าย เช่น

ก. $p+q = 11$ จะได้ $p = 7$ ดังนั้น $x = 71584$

ข. $p+q = 12$ จะได้ $p = 8$ ดังนั้น $x = 81584$

ค. $p+q = 13$ จะได้ $p = 9$ ดังนั้น $x = 91584$

ง. $p+q = 14$ จะได้ $p = 10$ ดังนั้น ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งได้

เพราะว่า $72 \nmid 71584$, $72 \nmid 81584$ แต่ $72 \mid 91584$

เพราะฉะนั้นเลือกข้อ ค. เป็นคำตอบ

ต่อไปใช้เหตุผลในการหาตัว p อีกเผื่อไว้ทำข้อสอบแบบเติมคำ

เพราะว่า $q = 4$

เพราะฉะนั้น $x = 1580 + 1000p + 4$

$$1000p = x - 1584$$

เอา 8 หารตลอด จะได้ $\frac{x}{8}$ เป็นจำนวนเต็ม

$$125p = \frac{x}{8} - 198$$

เพราะว่า $72 \mid x$ เพราะฉะนั้น 9 หาร $\frac{x}{8}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 9 หาร $\frac{x}{8}$ - 198 ลงตัว

นั่นคือ 9 ต้องหาร 125p ลงตัว

เพราะว่า $125p = 5^3p$ และ $9|5^3p$

เพราะฉะนั้น 9 หาร p ลงตัว

แต่ $p \in \{0,1,2,\ldots,9\}$

เพราะฉะนั้น p ต้องเท่ากับ 9 เท่านั้น

สรุป p+q = 9+4 = 13

หมายเหตุ การใช้เหตุผลว่า $mn|mk$ ก็ต่อเมื่อ $n|k$ จะทำให้คิดเลขง่ายขึ้นดังนี้

$\longleftrightarrow$ $72|x$

$\longleftrightarrow$ $72|(1584+1000p)$

$\longleftrightarrow$ $72|8(198+125p)$

$\longleftrightarrow$ $9|(198+125p)$

การใช้เหตุผลว่า ถ้า $m|(n+k)$ และ $m|n$ แล้ว $m|k$ จะทำให้คิดเลขง่ายขึ้นดังนี้

เพราะว่า $9|198$ และ $9|(198+125p)$

เพราะฉะนั้น $9|125p$

ต่อไปใช้เหตุผลว่า ถ้า $m|nk$ และ ห.ร.ม.$(m,n) = 1$ แล้ว $m|k$

เพราะว่า ห.ร.ม.$(9,125) = 1$ และ $9|125p$

เพราะฉะนั้น $9|p$

สรุป $p = 9$

วิธีตัดตัวเลือก $x = \boxed{p}\,158\,\boxed{q}$ และ $72 \mid x$

เพราะฉะนั้น x เป็นเลขคู่

พิจารณาตัวเลือก ก. $p+q = 11$

p	q	x
3	8	31588
5	6	51586
7	4	71584
9	2	91582

31588, 51586, 71584, 91582 หารด้วย 72 ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันก็จะตัดตัวเลือก ข. ทิ้งได้

และเมื่อมาถึงตัวเลือก ค. ก็จะได้ $x = 91584$

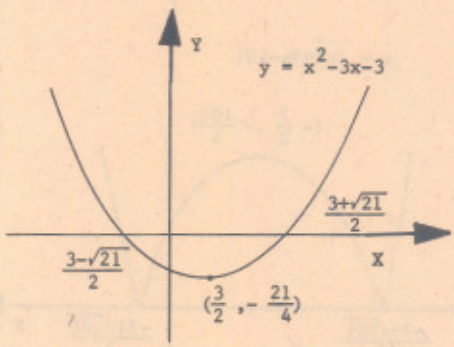
คำถามเพิ่มเติม $S = \{0,1,2,\ldots,9\}$

กำหนดให้ $p,q \in S$

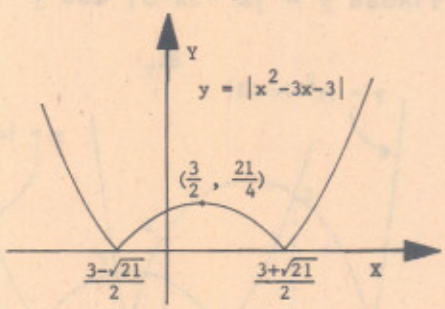
1. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 72 หาร p851q ลงตัว
2. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 42 หาร 85p11q ลงตัว
3. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 33 หาร p3333q ลงตัว
4. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 66 หาร p6666q ลงตัว
5. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 35 หาร 22pq22 ลงตัว
6. จงหาค่า p,q ที่ทำให้ 12 หาร 12pq7 ลงตัว

8. ตอบ ค.

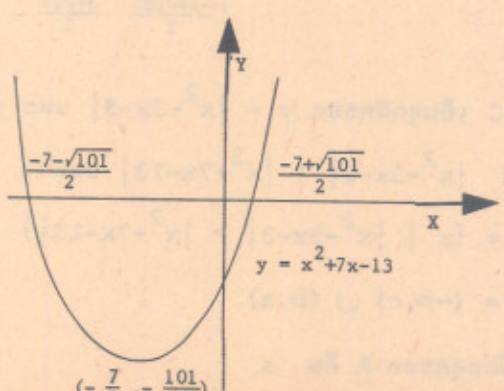
แนวคิด กราฟของ $y = x^2-3x-3$ คือ



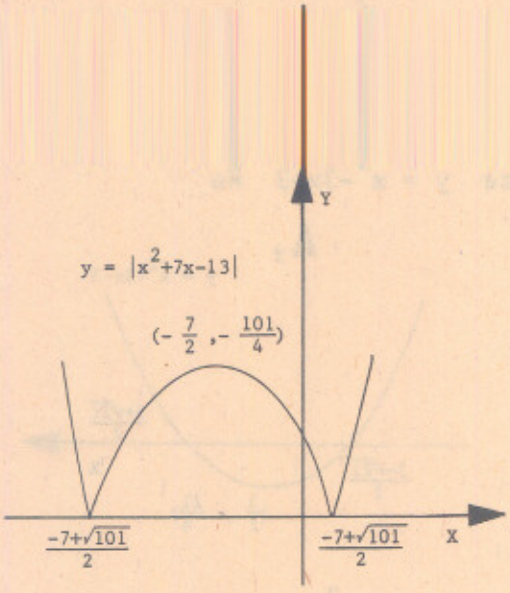
เพราะฉะนั้นกราฟของ $y = |x^2-3x-3|$ คือ



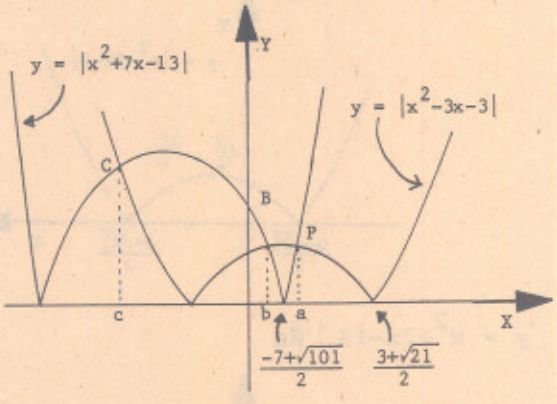
กราฟของ $y = x^2+7x-13$ คือ



เพราะฉะนั้นกราฟของ $y = |x^2+7x-13|$ คือ



ต่อไปเขียนกราฟของ $y = |x^2-3x-3|$ และ $y = |x^2+7x-13|$ พร้อมกัน



P, B และ C เป็นจุดตัดของ $y = |x^2-3x-3|$ และ $y = |x^2+7x-13|$

เพราะฉะนั้น $|x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|$ บนช่วง $(-\infty,c)$ และ (b,a)

สรุป $A = \{x \mid |x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|\}$

$= (-\infty,c) \cup (b,a)$

ขอบเขตบนน้อยสุดของ A คือ a

การหาค่า a หาได้จากจุดตัดของเส้นโค้ง $y = |x^2-3x-3|$ และ

$$y = |x^2+7x-13|$$

พิจารณาจุดตัดบนช่วง $\frac{-7+\sqrt{101}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{21}}{2}$

$$y = |x^2-3x-3| = -(x^2-3x-3)$$

$$y = |x^2+7x-13| = x^2+7x-13$$

$$-(x^2-3x-3) = x^2+7x-13$$

$$-x^2+3x+3 = x^2+7x-13$$

$$-2x^2-4x+16 = 0$$

$$x^2+2x-8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4, 2$$

เพราะฉะนั้น $a = 2$

สรุปขอบเขตบนน้อยสุดของ A คือ 2

วิธีลัด

$$|x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|$$

$$(x^2-3x-3)^2 > (x^2+7x-13)^2$$

$$x^4-6x^3+3x^2+18x+9 > x^4+14x^3+23x^2-182x+169$$

$$-20x^3-20x^2+200x-160 > 0$$

$$x^3+x^2-10x+8 < 0$$

ให้ $f(x) = x^3+x^2-10x+8$

เพราะว่า $f(1) = 0$

และ $f(-4) = -64+16+40+8 = 0$

เพราะฉะนั้น $x^3+x^2-10x+8 = (x-1)(x-2)(x+4)$

นั่นคือ $(x-1)(x-2)(x+4) < 0$

		$x=-4$		$x=1$		$x=2$	
$x-1$	-	-	-	0	+	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	0	+
$x+4$	-	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

นั่นคือ $f(x) < 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \in (-\infty,-4) \cup (1,2)$

สรุป $A = \{x \mid |x^2-3x-3| > |x^2+7x-13|\}$

$= (-\infty,-4) \cup (1,2)$

มีขอบเขตบนเท่ากับ 2.

<u>หมายเหตุ</u> เราทำตามวิธีลัดได้เพราะว่า $f(x)$ สามารถแยกตัวประกอบได้ง่าย

9. ตอบ ข.

แนวคิด เพราะว่า $1+\sqrt{3}$ เป็นคำตอบของ $3x^3+ax^2+bx+12 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$3(1+\sqrt{3})^3 + a(1+\sqrt{3})^2 + b(1+\sqrt{3}) + 12 = 0$$

$$3(1+3\sqrt{3}+9+3\sqrt{3}) + a(1+2\sqrt{3}+3) + b + b\sqrt{3} + 12 = 0$$

$3(10+6\sqrt{3}) + a(4+2\sqrt{3}) + b + b\sqrt{3} + 12 = 0$

$30 + 18\sqrt{3} + 4a + 2a\sqrt{3} + b + b\sqrt{3} + 12 = 0$

$(18 + 2a + b)\sqrt{3} + 42 + 4a + b = 0$

$(18 + 2a + b)\sqrt{3} = -42 - 4a - b$ .....(1)

เพราะว่า a,b เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(18 + 2a + b)$ และ $(-42 - 4a - b)$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้นสมการ (1) เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$18 + 2a + b = 0$$

และ $$-42 - 4a - b = 0$$

นั่นคือ $$-24 - 2a = 0$$

$$a = -12$$

และ $$b = -42-4a$$

$$= -42+48$$

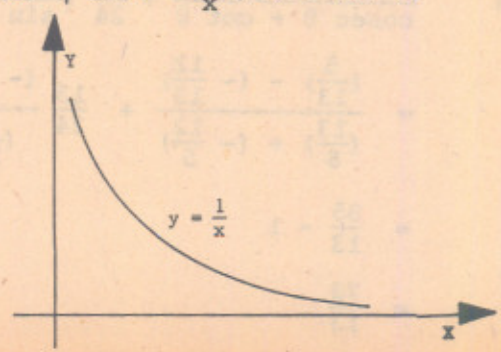
$$= 6$$

สรุป $a,b \in (-24,8]$

10. ตอบ ข.

แนวคิด $A = \{f(x) \mid f(x) = \frac{1}{x}, x \in (0,\infty)\}$

สังเกตจากกราฟ



จะได้ $A = (0,\infty)$

เพราะฉะนั้นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A คือ 0

แต่ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A ไม่มี

ดังนั้นตัวเลือกที่ถูกต้องคือ ตัวเลือก ข.

11. ตอบ ข.

แนวคิด $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

$= 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\cos\theta = \frac{12}{13}$ หรือ $-\frac{12}{13}$

เพราะว่า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = -\frac{12}{13}$

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{(-\frac{12}{13})}{(\frac{5}{13})} = -\frac{12}{5}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{13}{5}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2(\frac{5}{13})(-\frac{12}{13}) = -\frac{120}{169}$

สรุป $\frac{\sin\theta - \cos\theta}{\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta} + \frac{13}{24}(\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta})$

$= \frac{(\frac{5}{13}) - (-\frac{12}{13})}{(\frac{13}{5}) + (-\frac{12}{5})} + \frac{13}{24}\frac{(-\frac{120}{169})}{(\frac{5}{13})} = \frac{(\frac{17}{13})}{(\frac{1}{5})} - 1$

$= \frac{85}{13} - 1$

$= \frac{72}{13}$

12. ตอบ ง.

แนวคิด ข้อความ (1) ผิด

เพราะว่า $0 < x < \frac{\pi}{2}$ แสดงว่า $x \neq 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้

ข้อความ (2) ผิด ด้วยเหตุผลดังนี้

$$\frac{\sin x + \sin y}{\cos x - \cos y} = \frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$$= -\cot\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\neq \cot\frac{x-y}{2}$$

หมายเหตุ ถ้าจำสูตรไม่ได้ขอแนะนำให้ลองแทนค่าด้วยมุมบางมุมจะดีกว่า

ตัวอย่างเช่น $x = 60^\circ$ และ $y = 0^\circ$

$$\frac{\sin 60^\circ + \sin 0^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 0^\circ} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = \frac{1}{\sqrt{3} - 2}$$

$$\cot\left(\frac{60^\circ - 0^\circ}{2}\right) = \cot 30^\circ$$

$$= \sqrt{3}$$

$$\frac{\sin 60^\circ - \sin 0^\circ}{\cos 60^\circ - \cos 0^\circ} \neq \cot\left(\frac{60^\circ - 0^\circ}{2}\right)$$

13. ตอบ ง.

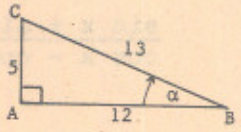
แนวคิด

$$12\cos\theta - 5\sin\theta = 13\left(\frac{12}{13}\cos\theta - \frac{5}{13}\sin\theta\right)$$

$$= 13\left[\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta\right]$$

$$= 13\cos(\alpha+\theta)$$

เมื่อ $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ และ $\cos\alpha = \frac{12}{13}$



เพราะว่าค่าสูงสุดของ $\cos(\alpha+\theta)$ คือ 1

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดของ $12\cos\theta - 5\sin\theta$ คือ 13

$$\frac{\sqrt{3}\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\tan 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

สรุปค่าสูงสุดของ $12\cos\theta - 5\sin\theta + 4 + \frac{\sqrt{3}\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$ เท่ากับ

$$13 + 4 + \frac{1}{2} = 17.5$$

การคัดตัวเลือก ลองแทนค่า $\theta = 0$ จะได้

$$12\cos 0 - 5\sin 0 + 4 + \frac{\sqrt{3}\tan 15^\circ}{1 - \tan 15^\circ}$$

$$= 12 + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tan 30^\circ$$

$$= 12 + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 16.5$$

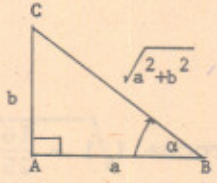
เพราะฉะนั้นคัดตัวเลือก ก., ข. และ ค. ทิ้งได้

หมายเหตุ $a\sin\theta + b\sin\theta$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$

$a\sin\theta + b\cos\theta$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $-\sqrt{a^2+b^2}$

ข้อพิสูจน์ $a\sin\theta + b\cos\theta$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right)$$



$$= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta)$$

เมื่อ $\alpha = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

เพราะฉะนั้น $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\theta)$

เพราะว่า $-1 \leqslant \sin(\alpha+\theta) \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น ค่าสูงสุดของ $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}$

และ ค่าต่ำสุดของ $a\sin\theta + b\cos\theta = -\sqrt{a^2+b^2}$

14. ตอบ ค.

แนวคิด ข้อความ (1) ถูกต้อง ด้วยเหตุผลดังนี้

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi-\pi}{12}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ข้อความ (2) ถูกต้อง ด้วยเหตุผลดังนี้

$$\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right)$$

$$= \sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arccos\frac{5}{13}\right) - \sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \sin\left(\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{25}{169}}\right)\right)\cos\left(\arccos\left(\sqrt{1 - \frac{16}{25}}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{13} - \sin\left(\arcsin\frac{12}{13}\right)\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{13} - \left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{20 - 36}{65}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

15. ตอบ ก.

แนวคิด ข้อความ (1) ถูกต้อง ด้วยเหตุผลดังนี้

$\log a_1 , \log a_2 , \log a_3 , \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มี d เป็นผลต่างร่วม

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ จะได้ว่า

$$\log a_{n+1} - \log a_n = d$$

$$\log \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = d$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 10^d$$

นั่นคือ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ 10^d

เพราะฉะนั้น $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

ข้อความ (2) ผิด ตัวอย่างเช่น $a = 1 , b = 1 , c = 1$

จะได้ว่า 1,1,1 เป็นลำดับเลขคณิตและลำดับเรขาคณิต

แต่ค่าของ $\frac{3a+b-2c}{3b-c} = \frac{3+1-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1 \neq 3$

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 1)

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข.

ปี พ.ศ. 2537 พร้อมเฉลย ด้วยวิธีจริง วิธีลัด และ วิธีตัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

16. ตอบ ค.

แนวคิด $\sum_{k=1}^{n} k = 120$

$$\frac{n}{2}(n+1) = 120$$

$$n(n+1) = 240$$

$$n^2+n-240 = 0$$

$$(n+16)(n-15) = 0$$

$$n = -16, 15$$

เพราะว่า $n > 0$ **เพราะฉะนั้น** $n = 15$

เพราะว่า $4-12k^2+9k^4 = (2-3k^2)^2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{4-12k^2+9k^4} = \sqrt{(2-3k^2)^2}$

$$= |2-3k^2|$$

เพราะว่า $k \geq 1$ **เพราะฉะนั้น** $|2-3k^2| = -(2-3k^2)$

$$= 3k^2-2$$

สรุป $\sum_{k=1}^{15} (\sqrt{4-12k^2+9k^4} - 4k^2) = \sum_{k=1}^{15} ((3k^2-2) - 4k^2)$

$$= \sum_{k=1}^{15} (-k^2) - \sum_{k=1}^{15} 2$$

$$= -(\frac{15}{6}(15+1)(30+1)) - 2(15)$$

$$= -1270$$

17. ตอบ ข.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(n-\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

ให้ $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1}$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2+\frac{1}{2}}\right)$$

$$+ \ldots + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{2}{2n-1} - \frac{2}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2 - \frac{2}{2n+1}\right]$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \ldots + \frac{1}{4n^2-1} + \ldots$

$$= \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4}\left[2 - \frac{2}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

18. ตอบ ง.

ดังนั้น $a_2 = 10+d$

$a_3 = 10+2d$

$a_4 = 10+3d$

เพราะว่า $a_2 < a_3 < a_4$ หรือ $a_2 > a_3 > a_4$

เพราะฉะนั้น $(10+d)^2 + (10+2d)^2 = (10+3d)^2$

หรือ $(10+d)^2 = (10+2d)^2 + (10+3d)^2$

กรณีที่ 1 $(10+d)^2 + (10+2d)^2 = (10+3d)^2$

$100+20d+d^2+100+40d+4d^2 = 100+60d+9d^2$

$100 - 4d^2 = 0$

$d^2 = 25$

$d = 5, -5$

เพราะว่า $a_3 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $d \neq -5$

ดังนั้น $d = 5$ ซึ่งทำให้

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = \frac{12}{2}(2a_1 + (12-1)d)$$

$$= 6(2(10) + 11(5))$$

$$= 450$$

กรณีที่ 2 $(10+d)^2 = (10+2d)^2 + (10+3d)^2$

$100+20d+d^2 = 100+40d+4d^2+100+60d+9d^2$

$$0 = 100+80d+12d^2$$

$$3d^2+20d+25 = 0$$

$$(3d+5)(d+5) = 0$$

$$d = -\frac{5}{3}, -5$$

เพราะว่า $a_3 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $d \neq -5$

ดังนั้น $d = -\frac{5}{3}$ ซึ่งทำให้

$$\sum_{n=1}^{12} a_n = \frac{12}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$= 6(2(10) + (11)(-\frac{5}{3}))$$

$$= 120 - 110$$

$$= 10$$

สรุป $\sum_{n=1}^{12} a_n$ เท่ากับ 10 หรือ 450

19. ตอบ ค.

แนวคิด โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1} - 2n = \sqrt{n^2+n+1} - n + \sqrt{n^2+1} - n$$

$$= (\sqrt{n^2+n+1} - n)\frac{(\sqrt{n^2+n+1} + n)}{(\sqrt{n^2+n+1} + n)} + (\sqrt{n^2+1} - n)\frac{(\sqrt{n^2+1} + n)}{(\sqrt{n^2+1} + n)}$$

$$= \frac{n^2+n+1-n^2}{\sqrt{n^2+n+1} + n} + \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1} + n}$$

$$= \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{1}{n})(n+1)}{(\frac{1}{n})(\sqrt{n^2+n+1} + n)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

$$= \frac{1-0}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1} + \sqrt{n^2+1} - 2n)$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1} + n} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n} \right)$$

$$= \frac{1}{2} + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

20. ตอบ ง.

แนวคิด เพราะว่ากราฟของฟังก์ชัน f ตัดกับเส้นตรง $y = x+3$ ที่ $x = 2$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 2+3 = 5$

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 5$

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x)(x^2-4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \to 2} f(x)(x+2)$$

$$= \lim_{x \to 2} f(x) \lim_{x \to 2} (x+2)$$

$$= f(2)(2+2)$$

$$= 20$$

เพราะว่า $\lim_{x \to 2} g(x) = 20$

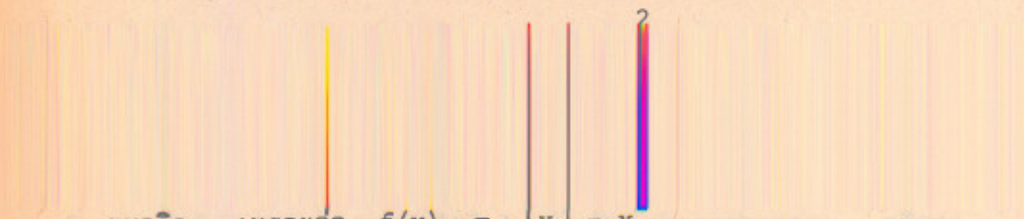
เพราะฉะนั้นเลือก $a = 20$ ก็จะทำให้ $g(2) = 20$

นั่นคือ $g(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เมื่อเลือก $a = 20$

สรุปตัวเลือก ก., ข. และ ค. ผิด

ตัวเลือกที่ถูกต้องคือ ตัวเลือก ง.

21. ตอบ ค.



แนวคิด เพราะว่า $f(x) = |x| - x^2$

$$f(x) = \begin{cases} -x-x^2 & , \ -\infty < x \leq 0 \\ x-x^2 & , \ 0 < x < \infty \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \begin{cases} -1-2x & , \ -\infty < x < 0 \\ 1-2x & , \ 0 < x < \infty \end{cases}$

เพราะว่า $g(x) = |x-x^2| - 4$

$= |x(1-x)| - 4$

$= |x(x-1)| - 4$

$= |x||x-1| - 4$

$$= \begin{cases} (-x)(-(x-1)) - 4 & , \ -\infty < x < 0 \\ (x)(-(x-1)) - 4 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ (x)(x-1) - 4 & , \ 1 < x < \infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2-x-4 & , \ -\infty < x < 0 \\ -x^2+x-4 & , \ 0 \leq x \leq 1 \\ x^2-x-4 & , \ 1 < x < \infty \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $g'(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \ -\infty < x < 0 \\ -2x+1 & , \ 0 < x < 1 \\ 2x-1 & , \ 1 < x < \infty \end{cases}$

สรุป $(f \circ g)'(2) = f'(g(2)) \cdot g'(2)$

$= f'(-2) \cdot (2(2) - 1)$

$= 3f'(-2)$

$= (3) \cdot (-1-2(-2))$

$= 9$

22. ตอบ ข.

แนวคิด จากข้อความ (1) $f'(x) = 4g'(x)$

จะได้ $\int f'(x)\,dx = \int 4g'(x)\,dx$

$f(x) + k_1 = 4g(x) + k_2$

$f(x) = 4g(x) + K \quad$ (เมื่อ $K = k_2 - k_1$)

<u>พิจารณาตัวเลือก ก.</u>

สมมติกราฟของ f เป็นเส้นตรง เพราะฉะนั้นจะต้องมี m และ c ที่ทำให้

$f(x) = mx + c$

ดังนั้น $mx + c = 4g(x) + K$

นั่นคือ $g(x) = \frac{m}{4}x + \frac{c-K}{4}$

เพราะฉะนั้นกราฟของ g เป็นเส้นตรง

สรุปตัวเลือก ก. ถูกต้อง

<u>พิจารณาตัวเลือก ข.</u>

สมมติ $f(x) = ax^2 + bx + c$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (0,0) ดังนั้น $f(0) = 0$ นั่นคือ $c = 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) = ax^2 + bx = 4g(x) + K$

$$4g(x) = ax^2 + bx - K$$

$$g(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{b}{4}x - \frac{K}{4}$$

$$g(0) = -\frac{K}{4}$$

เพราะฉะนั้น $g(0)$ อาจไม่เท่ากับ 0 ก็ได้

สรุปตัวเลือก ข. ผิด

เพื่อเป็นประโยชน์ต่อผู้อ่านขอพิจารณาตัวเลือกที่เหลือดังนี้

เพราะว่า $f'(x) = 4g'(x)$

$f''(x) = 4g''(x)$

เพราะฉะนั้น $f''(x) - 4g''(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R$

สรุปตัวเลือก ค. ถูกต้อง

ต่อไปสมมติ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in R$

$4g'(x) > 0$

$g'(x) > 0$

นั่นคือ g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R ด้วย

สรุปตัวเลือก ง. ถูกต้อง

23. ตอบ ก.

แนวคิด ตัวเลือก ก. ถูกต้อง

ให้ $$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2y = e^x - e^{-x}$$

$$2ye^x = e^{2x} - 1$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$= \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2+1}}{2}$$

$$= y \pm \sqrt{y^2+1}$$

เพราะว่า $e^x > 0$

เพราะฉะนั้น $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$ เท่านั้น

$$x = \ln (y + \sqrt{y^2+1})$$

นั่นคือ $f^{-1}(x) = \ln (x + \sqrt{x^2+1})$ ทุกค่า $x \in R$

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านพิจารณาตัวเลือกที่เหลือด้วยดังนี้

ตัวเลือก ข. ผิด

ด้วยเหตุผลในตัวเลือก ก. f^{-1} หาได้

ตัวเลือก ค. ผิด

เพราะว่า $f(\ln 7) = \frac{e^{\ln 7} - e^{-\ln 7}}{2}$

$= \frac{7 - (\frac{1}{7})}{2} \neq 7$

ตัวเลือก ง. ผิด

เพราะว่า มี $x = 0$ ทำให้ $f(0) = 0$

$f(1+0) = f(1)$

เพราะฉะนั้น $f(1+0) = f(1) + f(0)$

24. ตอบ ง.

แนวคิด ให้ (x,y) เป็นคู่ลำดับแสดงจำนวนลูกบอลในกล่องที่ 1 โดยที่

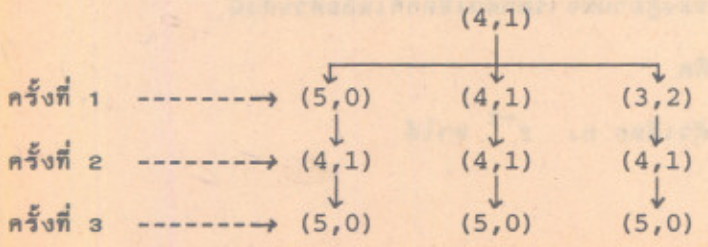
x = จำนวนลูกบอลสีขาวในกล่องที่ 1

y = จำนวนลูกบอลสีดำ ในกล่องที่ 1

เมื่อเริ่มต้น (x,y) มีค่าเป็น (5,0)

หลังการกระทำครั้งแรก (x,y) มีค่าเป็น (4,1)

จากขั้นตอนนี้หากกระทำต่อไปอีก 3 ครั้ง ผลของค่า (x,y) ต่างๆ ที่เป็นไปได้ของลูกบอลในกล่องที่ 1 แสดงด้วยแผนภูมิต้นไม้ดังนี้



หมายเหตุ กรณีอื่นๆ จะทำให้จำนวนลูกบอลสีขาวในกล่องที่หนึ่งไม่ได้สีขาว 5 ลูก เมื่อสิ้นสุดครั้งที่ 3 ตัวอย่างเช่น

$(4,1) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (2,3) \longrightarrow (1,4)$

$(4,1) \longrightarrow (5,0) \longrightarrow (4,1) \longrightarrow (3,2)$

$(4,1) \longrightarrow (4,1) \longrightarrow (3,2) \longrightarrow (2,3)$

กรณีที่จะได้ลูกบอลสีขาว 5 ลูกในกล่องที่ 1 มีได้ 3 กรณีเท่านั้น ซึ่งความน่าจะเป็นของแต่ละกรณีหาได้ดังนี้

กรณีที่ 1 ครั้งที่ 1 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (5,0)
ครั้งที่ 2 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (4,1)
ครั้งที่ 3 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (5,0)

$P((x,y) = (5,0)$ ในครั้งที่ 1)

$=$ P(สีดำในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออก และสีขาวในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{1}{5})(\frac{1}{5})$

$= \frac{1}{25}$

$P((x,y) = (4,1)$ ในครั้งที่ 2)

$= 1$

(เพราะว่าลูกบอลสีดำและสีขาวต้องมีการสลับกันแน่นอน)

$P((x,y) = (5,0)$ ในครั้งที่ 3)

$=$ P(ลูกบอลสีดำในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและลูกบอลสีขาวในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{1}{5})(\frac{1}{5})$

$= \frac{1}{25}$

เพราะฉะนั้น

P(ครั้งที่ 1 ได้ (5,0) และครั้งที่ 2 ได้ (4,1) และครั้งที่ 3 ได้ (5,0))

$= (\frac{1}{25})(1)(\frac{1}{25})$

$= \frac{1}{625}$

กรณีที่ 2 ครั้งที่ 1 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (3,2)
ครั้งที่ 2 ลูกบอลในกล่องที่ 2 เป็น (4,1)
ครั้งที่ 3 ลูกบอลในกล่องที่ 3 เป็น (5,0)

P((x,y) = (3,2) ในครั้งที่ 1)

= P(สีขาวในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและสีดำในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{4}{5})(\frac{4}{5})$

$= \frac{16}{25}$

P((x,y) = (4,1) ในครั้งที่ 2)

= P(สีดำในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและสีขาวในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{2}{5})(\frac{2}{5})$

$= \frac{4}{25}$

P((x,y) = (5,0) ในครั้งที่ 3)

= P(สีดำในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและสีขาวในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{1}{5})(\frac{1}{5})$

$= \frac{1}{25}$

เพราะฉะนั้น

P(ครั้งที่ 1 ได้ (3,2) และครั้งที่ 2 ได้ (4,1) และครั้งที่ 3 ได้ (5,0))

$= (\frac{16}{25})(\frac{4}{25})(\frac{1}{25})$

$= \frac{64}{15625}$

กรณีที่ 3 ครั้งที่ 1 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (4,1)
ครั้งที่ 2 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (4,1)
ครั้งที่ 3 ลูกบอลในกล่องที่ 1 เป็น (5,0)

P((x,y) = (4,1) ในครั้งที่ 1)

= P(สีดำในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและสีดำในกล่อง 2 ถูกหยิบออก
หรือสีขาวในกล่องที่ 1 ถูกหยิบออกและสีขาวในกล่องที่ 2 ถูกหยิบออก)

$= (\frac{1}{5})(\frac{4}{5}) + (\frac{4}{5})(\frac{1}{5})$

$= \frac{8}{25}$

ในทำนองเดียวกัน P((x,y) = (4,1) ในครั้งที่ 2) $= \frac{8}{25}$

P((x,y) = (5,0) ในครั้งที่ 3) $= \frac{1}{25}$

เพราะฉะนั้น

P(ครั้งที่ 1 ได้ (4,1) และครั้งที่ 2 ได้ (4,1) และครั้งที่ 3 ได้ (5,0))

$= (\frac{8}{25})(\frac{8}{25})(\frac{1}{25})$

$= \frac{64}{15625}$

สรุป ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกบอลสีขาว 5 ลูกในกล่องที่ 1 หลังจากกระทำต่อไปอีกสามครั้ง เท่ากับ

P(กรณีที่ 1) + P(กรณีที่ 2) + P(กรณีที่ 3)

$= \frac{1}{625} + \frac{64}{15625} + \frac{64}{15625} = \frac{153}{15625}$

25. ตอบ ก.

แนวคิด จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดจำแนกข้อมูลออกมาในลักษณะตารางได้ดังนี้

ข้อมูลนักเรียน ม. 4

	ได้เกรดเท่ากับ 4.00	ได้เกรดไม่เท่ากับ 4.00	
มาจากโรงเรียนเอกชน	a = 12	b = 28	40%
มาจากโรงเรียนรัฐบาล	c = 12	d = 48	60%
	24%	76%	100%

เพราะว่า ผู้จบมาจากโรงเรียนเอกชนจำนวน 30% ได้เกรดเฉลี่ย 4.00

เพราะฉะนั้น $a = (0.3)(40) = 12$

ดังนั้น $b = 40-a = 28$

$c = 24-a = 12$

$d = 60-c = 60-12 = 48$

ในการสุ่มเลือกนักเรียน ม.4 เมื่อเราพบว่าเป็นผู้ที่ได้เกรด 4.00 แสดงว่าขณะนี้ขนาดของแซมเปิลสเปซที่ต้องใช้ขณะนี้คือ จำนวนผู้ได้เกรด 4.00 ทั้งหมด ซึ่งเท่ากับ 24%

ต่อไปความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จบ ม. 3 มาจากโรงเรียนเอกชนจึงเท่ากับ

$$= \frac{\text{จำนวนนักเรียน ม.3 ที่มาจากโรงเรียนเอกชนและได้เกรดเท่ากับ 4.00}}{\text{จำนวนนักเรียนที่ได้เกรด 4.00 ทั้งหมด}}$$

$$= \frac{12\%}{24\%}$$

$$= 0.5$$

26. ตอบ ข.

แนวคิด จากข้อมูลที่กำหนดให้จะได้ตารางดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนคน	ความถี่สะสม
ต่ำกว่า 25	222	222
25 - 34	913	1135
35 - 44	1045	2180
45 - 54	947	3127
55 - 64	663	3790
65 - 74	416	4206
มากกว่า 74	166	4372

$N = 4372$

Q_3 ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{3}{4}(N) = \frac{3}{4}(4372) = 3279$

ข้อมูลตัวที่ 3279 ตกในอันตรภาคชั้นที่ 5

เพราะฉะนั้น $Q_3 = L + \frac{(\frac{3}{4}N - 3127)}{663} \cdot I$

$= 54.5 + \frac{(3279-3127)(10)}{663}$

$= 54.5 + 2.293$

$= 56.793$

สรุป ข้อความ (1) ผิด

ในการพิจารณาข้อความ (2) ควรทำการหาความถี่สะสมแบบเรียงจากคะแนนมากไปหาน้อยดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนคน	ความถี่สะสม
ต่ำกว่า 25	222	4372
25 - 34	913	4150
35 - 44	1045	3237
45 - 54	947	2192
55 - 64	663	1245
65 - 74	416	582
มากกว่า 74	166	166

เมื่อเรียงคะแนนจากมากไปน้อย คนที่ 1000 อยู่ในอันตรภาคชั้น 55 - 64

คะแนนของคนที่ 1000 นี้เท่ากับ

$$U - \frac{(1000-582)I}{663}$$

$$= 64.5 - \frac{(418)(10)}{663}$$

$$= 64.5 - 6.30$$

$$= 58.2$$

สรุป ข้อความ (2) ถูกต้อง

27. ตอบ ง.

แนวคิด ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นข้อมูล

เพราะว่า $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = M$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = nM$

เพราะว่า $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + a_{10} + a_{11} + \ldots + a_n$

$= a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + S$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + \ldots + a_9 + S = nM$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_9 = nM - S$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_9}{9} = \frac{nM - S}{9}$$

วิธีลัด 1 ให้ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 9 จำนวน

เพราะว่า $n(\text{ค่าเฉลี่ยทั้งหมด}) = \sum_{i=1}^{n} x_i = S + 9\bar{x}$

เพราะฉะนั้น $nM = S + 9\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{nM - S}{9}$$

วิธีลัด 2 ข้อสอบข้อนี้จัดอยู่ในประเภทโจทย์เป็นสูตรตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นแทนค่าด้วยข้อมูลตัวเลขก็จะตัดตัวเลือกได้ ตัวอย่างเช่น

$n = 12$ ข้อมูลทั้งหมดคือ

$\underbrace{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}_{9 \text{ จำนวน}} , \underbrace{10 , 11 , 12}_{n-9 \text{ จำนวน}}$

($= \frac{1+2+\ldots+12}{12} = \frac{78}{12} = 6.5$

$= 10+11+12 = 33$

าเฉลี่ยเลขคณิตของ $1,2,3,\ldots,9$ คือ $\frac{45}{9} = 5$

ทนค่าที่ตัวเลือก

. $\frac{nS + M}{9} = \frac{12(33) + 6.5}{9} \neq 5$

ข. $\frac{nS - M}{9} = \frac{12(33) - 6.5}{9} \neq 5$

ค. $\frac{nM + S}{9} = \frac{12(6.5) + 33}{9} \neq 5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก., ข, และ ค. ทิ้งได้

ง. $\frac{nM - S}{9} = \frac{2(6.5) - 33}{9} = \frac{45}{9} = 5$

28. ตอบ ข.

แนวคิด ให้ a,b,c,d,e,f เป็นคะแนนของนักเรียน 6 คนที่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก นั่นคือ $a \leq b \leq c \leq d \leq e \leq f$

เพราะว่ามีคะแนนของ 3 คนเท่ากัน และได้มากกว่าอีก 3 คนที่เหลือ

เพราะฉะนั้น $a \leq b \leq c < d = e = f$

เพราะว่าฐานนิยมเท่ากับ 9

เพราะฉะนั้น $d = e = f = 9$

เพราะว่า พิสัยเท่ากับ 6

เพราะฉะนั้น $f-a = 6$

$9-a = 6$

$a = 3$

เพราะว่าข้อมูลมี 6 ตัว และมัธยฐานเท่ากับ 8.5

เพราะฉะนั้น $\frac{c+d}{2} = 8.5$

$c+9 = 17$

$c = 8$

ขณะนี้ข้อมูลทั้ง 6 ตัวคือ 3,b,8,9,9,9

Q_1 คือข้อมูลลำดับที่ $\frac{6+1}{4} = 1.75$ และ $Q_1 = 6$ ดังนั้น

$3 + (0.75)(b-3) = 6$

$$\frac{3}{4}(b-3) = 3$$

$$3b-9 = 12$$

$$b = 7$$

ข้อมูลทั้ง 6 ตัวคือ 3,7,8,9,9,9

$$\bar{x} = \frac{3+7+8+9+9+9}{6} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2} = 7.5$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ $MD = \frac{\sum_{i=1}^{6} |x_i - \bar{x}|}{6}$

$$= \frac{|3-7.5|+|7-7.5|+|8-7.5|+|9-7.5|+|9-7.5|+|9-7.5|}{6}$$

$$= \frac{10}{6}$$

$$= \frac{5}{3}$$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{MD}{\bar{x}} = \frac{(\frac{5}{3})}{(\frac{15}{2})} = 0.22$

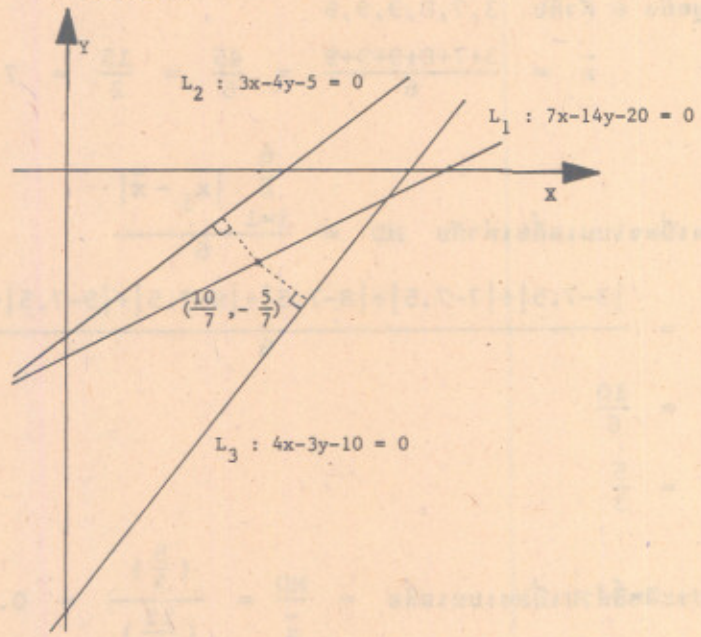
คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 4)

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2536 พร้อมเฉลย ด้วยวิธีจริง วิธีลัด และ วิธีตัดตัวเลือก

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

29. ตอบ ก.

แนวคิด วาดรูปดูก่อน



ให้ (h,k) อยู่ในควอดรันต์ที่สี่ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่อยู่บนเส้นตรง

L_1 : 7x-14y-20 = 0

เพราะว่า (h,k) ต้องห่างจาก L_2 และ L_3 เท่ากัน

เพราะฉะนั้น $$\frac{|4h-3k-10|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3h-4k-5|}{\sqrt{16+9}}$$

$$|4h-3k-10| = |3h-4k-5| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

เพราะว่า (h,k) อยู่บนเส้นตรง L_1 เพราะฉะนั้น $7h-14k-20 = 0$

แทนค่า $h = \frac{20+14k}{7}$ ในสมการ (1)

$$\left|4\left(\frac{20+14k}{7}\right) - 3k - 10\right| = \left|3\left(\frac{20+14k}{7}\right) - 4k - 5\right|$$

$$|4(20+14k) - 21k - 70| = |3(20+14k) - 28k - 35|$$

$$|35k - 10| = |14k - 25|$$

ถ้า $35k - 10 = 14k - 25$ จะได้ $k = -\frac{15}{21} = -\frac{5}{7}$

ถ้า $35k - 10 = -(14k-25)$ จะได้ $k = \frac{35}{49} = \frac{5}{7}$

เพราะว่า (h,k) อยู่ในควอดรันต์ที่ 4 เพราะฉะนั้น $k = -\frac{5}{7}$

ดังนั้น $h = \frac{20+14k}{7} = \frac{20}{7} + 2k = \frac{20}{7} - \frac{10}{7} = \frac{10}{7}$

ต่อไปการหารัศมีของวงกลมซึ่งเท่ากับระยะทางจากจุด $(\frac{10}{7}, -\frac{5}{7})$ ไปยังเส้นตรง L_2 เท่ากับ

$$\frac{\left|4\left(\frac{10}{7}\right) - 3\left(-\frac{5}{7}\right) - 10\right|}{\sqrt{16+9}}$$

$$= \frac{\left|\frac{40}{7} + \frac{15}{7} - 10\right|}{5}$$

$$= \frac{|40 + 15 - 70|}{35}$$

$$= \frac{15}{35}$$

$$= \frac{3}{7}$$

สรุปสมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$\left(x - \frac{10}{7}\right)^2 + \left(y + \frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{3}{7}\right)^2$$

$$(7x-10)^2 + (7y+5)^2 = 9$$

$$49x^2 - 140x + 100 + 49y^2 + 70y + 25 = 9$$

$$49x^2 + 49y^2 - 140x + 70y + 116 = 0$$

วิธีคิด ในตัวเลือกแต่ละข้อถ้าเราจำสูตรของจุดศูนย์กลางของวงกลมจากรูปแบบ

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

มีจุดศูนย์กลางที่ $(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$

เมื่อเอา 49 หารทุกสมการในตัวเลือกจะได้

		จุดศูนย์กลาง
ก.	$x^2 + y^2 - \frac{20}{7}x + \frac{10}{7}y + \frac{116}{49} = 0$	$(\frac{10}{7}, \frac{-5}{7})$
ข.	$x^2 + y^2 - \frac{20}{7}x + \frac{10}{7}y + \frac{44}{49} = 0$	$(\frac{10}{7}, \frac{-5}{7})$
ค.	$x^2 + y^2 - \frac{12}{7}x + 2y + \frac{60}{49} = 0$	$(\frac{6}{7}, -1)$
ง.	$x^2 + y^2 - \frac{12}{7}x + 2y - \frac{36}{49} = 0$	$(\frac{6}{7}, -1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ค. และ ง. ทิ้งได้

ในทางกลับกันถึงแม้เราจะยังไม่รู้ว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $(\frac{10}{7}, \frac{-5}{7})$

โดยวิธีแก้สมการข้างต้น เราก็ยังสามารถหาพิกัดของจุดศูนย์กลางจากตัวเลือกไปเขียนกราฟก็จะพบว่า $(\frac{6}{7}, -1)$ ห่างจาก L_2 และ L_3 ไม่เท่ากัน

ดังนั้นตัดตัวเลือก ค. และ ง. ได้เหมือนกัน

จากสมการ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

มีรัศมีวงกลมเท่ากับ $\sqrt{-C + \frac{A}{4}^2 + \frac{B}{4}^2}$

จากตารางเราพิจารณาเฉพาะตัวเลือก ก. และ ข.

ตัวเลือก ก. $-C + \frac{A}{4}^2 + \frac{B}{4}^2 = -\frac{116}{49} + \frac{400}{(49)4} + \frac{100}{49(4)}$

$= -\frac{116}{49} + \frac{100}{49} + \frac{25}{49}$

$= \frac{9}{49}$

เพราะฉะนั้นรัศมี $= \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$

ตัวเลือก ข. $-C + \frac{A}{4}^2 + \frac{B}{4}^2 = -\frac{44}{49} + \frac{400}{49(4)} + \frac{100}{49(4)}$

$= \frac{81}{49}$

เพราะฉะนั้นรัศมี $= \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$

ดูจากรูปจะเห็นว่า ระยะจาก $(\frac{10}{7}, \frac{-5}{7})$ ไปยัง L_2 มีค่าไม่เกิน 1

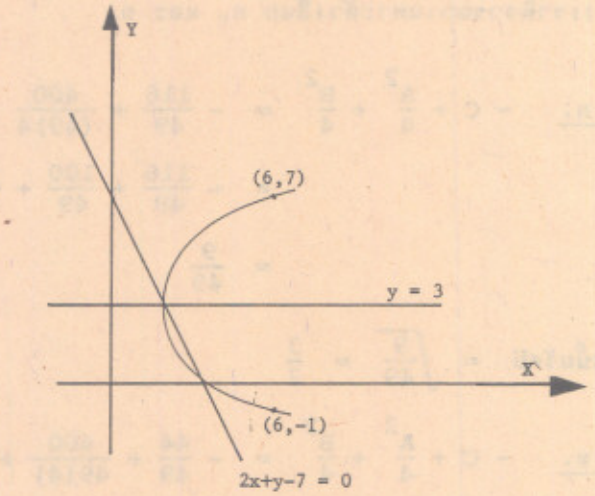
ดังนั้นตัดตัวเลือก ข. ทิ้งได้

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 2

เนื้อหาภายในเล่มปรนะกอบด้วย เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก ปี 2537 ครบทุกข้อด้วยรูปแบบการเฉลยตามวิธีจริง วิธีลัด และเทคนิควิธีในการตัดตัวเลือก

30. ตอบ ค.

แนวคิด การทำโจทย์ภาคตัดกรวยควรวาดรูปก่อนเท่า ที่จะทำได้เป็นวิธีที่ดีที่สุด



เพราะว่าจุดยอดต้องอยู่บนแกนของพาราโบลา และต้องอยู่บนเส้นตรง

$$2x+y-7 = 0$$

เพราะฉะนั้นจุดยอดอยู่บนจุดตัดของเส้นตรง $2x+y-7 = 0$ และ $y = 3$

นั่นคือ $2x+3-7 = 0$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

จุดยอดของพาราโบลาคือ (2,3)

รูปแบบทั่วไปของพาราโบลาที่มีแกนพาราโบลาขนานแกน X คือ

$$(y-h)^2 = 4c(x-k)$$

$$(y-3)^2 = 4c(x-2)$$

เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด (6,-1)

สมการพาราโบลาคือ $(y-3)^2 = 4(x-2)$

$$y^2-6y+9 = 4x-8$$

$$y^2-6y-4x+17 = 0$$

วิธีลัด 1 นำจุดที่กำหนดให้แทนค่าในตัวเลือกจาก $x = 6$, $y = -1$

ก. $2(-1)^2 + 12(-1) - 6 + 16 = 0$

ข. $(-1)^2 + 6(-1) - 6 + 11 = 0$

ค. $(-1)^2 - 6(-1) - 4(6) + 17 = 0$

ง. $(-1)^2 - 6(-1) - 2(6) + 13 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ง. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปจัดรูปสมการที่เหลือ

ก. $2y^2 + 12y + 16 = x$

$$y^2 + 6y + 8 = \frac{x}{2}$$

$$(y+3)^2 = \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{2}(x+2)$$

มีจุดยอดเป็น $(-2,-3)$ ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรง $y-3 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก. ทิ้งได้อีก

ข. $y^2 + 6y - x + 11 = 0$

$$y^2 + 6y + 9 = x-2$$

$$(y+3)^2 = x-2$$

มีจุดยอดเป็น $(-3,2)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $y-3 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข. ทิ้ง

ข้อสังเกต แนะนำให้จำคุณสมบัตินี้ไปใช้ก็จะทำให้ได้คำตอบเร็วขึ้น

ถ้าสัมประสิทธิ์ของ y^2 และ y มีเครื่องหมายเหมือนกัน
แล้วพิกัดของจุดยอด (h,k) จะต้องมีค่า $k < 0$

เมื่อนำมาใช้กับโจทย์ข้อนี้ก็จะได้ว่า พิกัดจุดยอดของตัวเลือก ก. และ ข.
มีค่า $k < 0$ ซึ่งไม่อยู่บนเส้นตรง $y-3 = 0$ แน่นอน

วิธีลัด 2 ต่อไปจะใช้เหตุผลในการตัดตัวเลือกอีกแบบ

จากการที่ $y-3 = 0$ เป็นแกนพาราโบลาจะได้ว่า จุดยอดต้องมีพิกัดเป็น $(h,3)$
ดังนั้นเราลองแทนค่า $y = 3$ ในตัวเลือกเพื่อหาค่า x

ก. $2(3)^2 + 12(3) - x + 16 = 0 \longrightarrow x = 70$

ข. $(3)^2 + 6(3) - x + 11 = 0 \longrightarrow x = 38$

ค. $(3)^2 - 6(3) - 4x + 17 = 0 \longrightarrow x = 2$

ง. $(3)^2 - 6(3) - 2x + 13 = 0 \longrightarrow x = 2$

เพราะว่า $(70,3)$, $(38,3)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $2x+y-7 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก. และ ข. ทิ้ง
ด้วยเหตุผลแบบนี้ก็จะเหลือตัวเลือก ค. ตัวเดียวอีกแล้ว

วิธีลัด 3 จากการที่พาราโบลาผ่านจุด $(6,-1)$ และมีเส้นตรง $y = 3$
เป็นแกนพาราโบลา
เพราะฉะนั้นพาราโบลาต้องผ่านจุด $(6,7)$ ด้วย
แทนค่า $x = 6$, $y = 7$ ในตัวเลือก

ก. $2(49) + 12(7) - 6 + 16 \neq 0$

ข. $49 + 42 - 6 + 11 \neq 0$

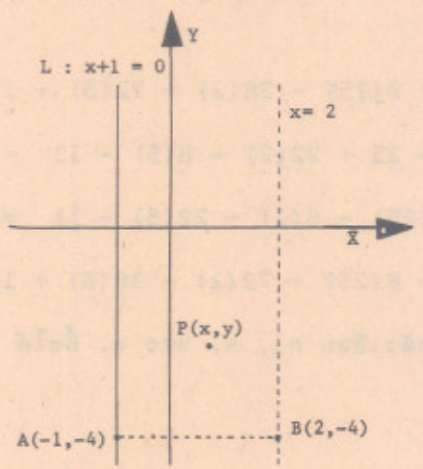
ค. $49 - 42 - 24 + 17 = 0$

ง. $49 - 42 - 12 + 13 \neq 0$

เพราะฉะนั้นการใช้จุด (6,7) ตัดตัวเลือกทิ้งได้ดีที่สุด

31. ตอบ ข.

แนวคิด วาดรูปดูก่อนเพื่อช่วยในการคำนวณ



ระยะจาก P(x,y) ไปยังจุด (2,-4) เท่ากับ $\sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2}$

ระยะจาก P(x,y) ไปยังเส้นตรง L : x+1 = 0 เท่ากับ

$$\frac{|x+1|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x+1|$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{(x-2)^2 + (y+4)^2} = 3|x+1|$

ดังนั้น $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 9(x+1)^2$

$x^2-4x+4+y^2+8y+16 = 9x^2+18x+9$

$8x^2-y^2+22x-8y-11 = 0$

วิธีลัด ข้อสอบที่มีคำถามเกี่ยวกับสมการที่เป็นการเคลื่อนที่ของจุด P(x,y)

และมีคำตอบเป็นแบบตัวเลือก ให้ลองหาจุดที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่น จุดบนเส้นตรง $x = 2$ จะห่างจากเส้นตรง L เท่ากับ 3 หน่วย เพราะฉะนั้นเลือก P(2,5) หรือ P(2,-13) ก็จะห่างจาก B เท่ากับ 9 หน่วย (บางคนอาจจะเลือกใช้จุด P(-7,-4) ก็ได้แล้วแต่ว่าจะสังเกตเห็นจุดใดก่อน) ต่อไปก็นำพิกัดของจุดไปแทนค่าในตัวเลือก เช่น P(2,5) แทน $x = 2$, $y = 5$ ในตัวเลือก

ก. $8(4) + 9(25) - 38(2) + 72(5) + 179 \neq 0$

ข. $8(4) - 25 + 22(2) - 8(5) - 11 = 0$

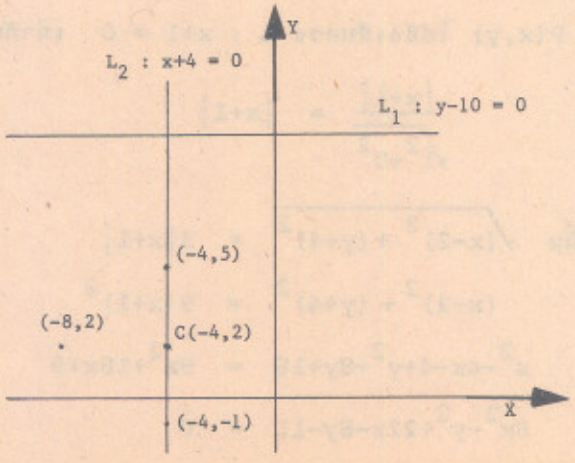
ค. $4 - 8(25) - 8(2) + 22(5) - 11 \neq 0$

ง. $9(4) + 8(25) + 72(2) - 38(5) + 179 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก., ค. และ ง. ทิ้งได้

32. ตอบ ก.

แนวคิด เริ่มต้นเราเขียนกราฟดูก่อนเท่าที่ทำได้จากโจทย์กำหนดให้



เพราะว่า $L_2 : x+4 = 0$ เป็นแกนเอก

เพราะฉะนั้นพิกัดของจุดยอดของวงรีคือ $C(-4,k)$

เพราะว่าจุดยอด $C(-4,k)$ ห่างจากเส้นตรง $L_1 : y-10 = 0$ อยู่ 8 หน่วย

และโฟกัส F ของวงรีห่างจากเส้นตรง L_1 อยู่ 11 หน่วย

เพราะฉะนั้น C กับ F ห่างกัน 3 หน่วย

ดังนั้นพิกัดของ F คือ $(-4,k+3)$ หรือ $(-4,k-3)$

เพราะว่า $C(-4,k)$ ห่างจาก $L_1 : y-10 = 0$ อยู่ 8 หน่วย

เพราะฉะนั้น $k = 2$ หรือ $k = 18$

กรณีที่ 1 $k = 2$

จะได้ $(-4,2)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงรี และครึ่งแกนโทยาวเท่ากับ

$(-4-(-8)) = 4$ เพราะฉะนั้น $b = 4$

เพราะว่าจุดศูนย์กลางห่างจากโฟกัส 3 หน่วย ดังนั้น $c = 3$

เพราะว่า $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 \\ &= 16 + 9 \\ &= 25 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นสมการวงรีคือ $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ ซึ่งตรงกับตัวเลือก ก.

เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านในกรณีที่ข้อสอบอาจเป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ เราจึงดูกรณีต่อไปด้วย

กรณีที่ 2 $k = 18$

จะได้ $(-4,18)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงรีและจุดโฟกัส F คือ $(-4,21)$

$$\frac{(x+4)^2}{a^2} + \frac{(y-18)^2}{b^2} = 1$$

และ $a^2 - b^2 = c^2 = 9$

เพราะว่าวงรีผ่านจุด $(-8,2)$ ดังนั้น

$$\frac{(-8+4)^2}{a^2} + \frac{(2-18)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{16}{a^2} + \frac{256}{b^2} = 1$$

แทนค่า $a^2 = 9 + b^2$

$$\frac{16}{9+b^2} + \frac{256}{b^2} = 1$$

$$16b^2 + 256(9+b^2) = (9+b^2)b^2$$

$$16b^2 + 2304 + 256b^2 = 9b^2 + b^4$$

$$b^4 - 263b^2 - 2304 = 0$$

$$b^2 = \frac{263 + \sqrt{(-263)^2 - 4(1)(2304)}}{2}$$

$$= \frac{263 + \sqrt{69169 + 9216}}{2}$$

$$= \frac{263 + \sqrt{78385}}{2}$$

$$= \frac{263 + 279.97}{2}$$

$$= 271.4866$$

เพราะฉะนั้น $a^2 = 9 + b^2$

$$= 9 + 271.4866$$

$$= 280.4866$$

เพราะฉะนั้นสมการวงรีในกรณีที่ 2 เมื่อ k = 18 คือ

$$\frac{(x+4)^2}{280.4866} + \frac{(y-18)^2}{271.4866} = 1$$

สรุปวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์มีได้ 2 แบบ

วิธีลัด 1 จากโจทย์กำหนดให้ว่าจุดศูนย์กลางและโฟกัสห่างจาก

$L_1 : y-10 = 0$ เท่ากับ 8 และ 11 ตามลำดับ

แสดงว่า $c = 3$ นั่นคือ $c^2 = 9$

ด้วยค่า $c^2 = 9$ นี้เรานำมาช่วยตัดตัวเลือกได้แล้ว

ตัวเลือก	a^2	b^2	a^2-b^2
ก	25	16	9
ข	18	16	2
ค	20	16	4
ง	21	16	5

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข., ค. และ ง. ทิ้งได้

วิธีลัด 2 ดูจากตัวเลือกจุดศูนย์กลางมีได้แบบเดียวเท่านั้นคือ (-4,2)

เพราะว่าวงรีผ่านจุด (-8,2) ดังนั้น $b = 4$

เพราะว่า $c = 3$ ดังนั้น $a^2 = b^2+c^2 = 16+9 = 25$

ซึ่งจะได้สมการวงรีเป็น

$$\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

33. ตอบ ข.

แนวคิด

$$\frac{2}{5}\bar{u} + (6-3x^2)\bar{v} = 100\bar{u} + \frac{2}{3}\bar{v}$$

$$(\frac{2}{5} - 100)\bar{u} = (\frac{2}{3} - 6 + 3x^2)\bar{v}$$

$$-\frac{489}{5}\bar{u} = (\frac{2}{3} - 6 + 3x^2)\bar{v}$$

$$\bar{u} = \frac{-5}{489}(\frac{2}{3} - 6 + 3x^2)\bar{v}$$

เพราะว่า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ขนานกัน และมีทิศทางเดียวกัน

เพราะฉะนั้น

$$\frac{-5}{489}(\frac{2}{3} - 6 + 3x^2) > 0$$

$$\frac{2}{3} - 6 + 3x^2 < 0$$

$$2 - 18 + 9x^2 < 0$$

$$9x^2 < 16$$

$$x^2 < \frac{16}{9}$$

$$-\frac{4}{3} < x < \frac{4}{3}$$

นั่นคือ $x \in (-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) \subset (-2,2)$

34. ตอบ ค.

แนวคิด พิจารณาตัวเลือกแต่ละตัว

ตัวเลือก ก. ถูกต้อง ด้วยเหตุผล

สมมติ

$$|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{u} + \bar{v}|$$

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u} + \bar{v}|^2$$

$$(\bar{u} - \bar{v})\cdot(\bar{u} - \bar{v}) = (\bar{u} + \bar{v})\cdot(\bar{u} + \bar{v})$$

$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$

$$-2\bar{u}\cdot\bar{v} = 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$-4\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

<u>ตัวเลือก ข.</u> ถูกต้อง ด้วยเหตุผล

ให้ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

จาก $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$

$= |\bar{u}|^2 + 0 + |\bar{v}|^2$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$

<u>ตัวเลือก ค.</u> ผิด เพราะว่า $\bar{u} = -2\bar{v}$

$(2y-3)\bar{i} + 5\bar{j} = -2(5\bar{i} - (x+3)\bar{j})$

$= -10\bar{i} + 2(x+3)\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $2y-3 = -10$ และ $5 = 2(x+3)$

นั่นคือ $y = \frac{-7}{2}$ และ $x = \frac{-1}{2}$

<u>ตัวเลือก ง.</u> ถูกต้อง ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\ |\bar{v}|}$$

$$= \frac{(-1)(6) + (3)(-2)}{\sqrt{1+9}\ \sqrt{36+4}}$$

$$= \frac{-12}{\sqrt{10}\ \sqrt{40}} = \frac{-12}{20}$$

$$= -\frac{3}{5}$$

35. ตอบ ก.

แนวคิด $A = [a_{ij}]_{4\times4}$

$$= \left[2^{i+j}\right]_{4\times4}$$

$$= \begin{bmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 2^3 & 2^4 & 2^5 & 2^6 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \\ 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 \end{bmatrix}$$

แถวที่ 2 ของ A ลบทิ้งด้วย 2 เท่าของแถวที่ 1 ของ A ได้เป็น B

ดังนั้น

$$B = \begin{bmatrix} 2^2 & 2^3 & 2^4 & 2^5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^4 & 2^5 & 2^6 & 2^7 \\ 2^5 & 2^6 & 2^7 & 2^8 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\det(B) = 0$

โดยคุณสมบัติของการแปลงแถวจะได้ว่า $\det(A) = \det(B)$

เพราะฉะนั้น $\det(A) = 0$

หมายเหตุ ใช้เหตุผลว่า มีสมาชิกในแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ A เป็นสัดส่วนกัน ดังนั้น $\det(A) = 0$ จะได้คำตอบเร็วกว่า

36. ตอบ ง.

แนวคิด สำหรับเมตริกซ์ใดๆ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้นโดยการดึงตัวร่วมของแต่ละแถวออกมาจะได้

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 2^4 & 0 & 0 & 0 \\ 2^8 & 2^{16} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 0 & 0 & 5^4 & 5^6 & 5^8 \\ 0 & 0 & 5^6 & 5^8 & 5^{12} \end{vmatrix}$$

$$= (2)(2^8)(5^2)(5^4)(5^6) \begin{vmatrix} 1 & 2^3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2^8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 5^2 \\ 0 & 0 & 1 & 5^2 & 5^4 \\ 0 & 0 & 1 & 5^2 & 5^6 \end{vmatrix}$$

$$= 2^9 \cdot 5^{12} \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 625 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 15625 \end{vmatrix}$$

โดยใช้คุณสมบัติของการแปลงแถวและค่ากำหนด

แถว 2 ถูกลบด้วยแถวที่ 1 , แถว 5 ถูกลบด้วยแถวที่ 4

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 256 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 625 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 15625 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 248 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix}$$

แถว 4 ถูกลบด้วยแถวที่ 3 จะได้

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 248 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 625 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 248 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 600 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix}$$

$$= (1)(248)(1)(20)(15000)$$

$$= (248)(300000)$$

สรุป $\det(A) = (2^9)\cdot(5^{12})\cdot(248)\cdot(300000)$

$= 2^9\cdot 5^9\cdot 5^3\cdot(248)\cdot(300000)$

$= 10^9\cdot 5^3\cdot(2^3\cdot 31)\cdot(3\cdot 10^5)$

$= 10^9\cdot(5^3\cdot 2^3)\cdot(93)\cdot 10^5$

$= 10^{17}\cdot 93$

$= 9{,}300{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$

นั่นคือ $\det(A)$ เป็นจำนวนเต็ม 19 หลัก

หมายเหตุ ถ้าเมตริกซ์จัตุรัส A อยู่ในรูป

$$A = \left[\begin{array}{c:c} X & 0 \\ \hdashline 0 & Y \end{array}\right]$$

เมื่อ X และ Y เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ 0 เป็นเมตริกซ์ศูนย์

แล้ว $\det(A) = \det(X)\cdot\det(Y)$

จากโจทย์ ให้ $X = \begin{bmatrix} 2 & 2^4 \\ 2^8 & 2^{16} \end{bmatrix}$

$$Y = \begin{bmatrix} 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^4 & 5^6 & 5^8 \\ 5^6 & 5^8 & 5^{12} \end{bmatrix}$$

จะได้ $A = \left[\begin{array}{c:cc} X & & 0 \\ \hdashline & & \\ 0 & & Y \end{array}\right]$

$$\det(X) = 2^{17} - 2^{12}$$

$$= 2^{12}\cdot(2^5-1)$$

$$= 2^{12}\cdot 31$$

$$\det(Y) = \begin{vmatrix} 5^2 & 5^3 & 5^4 \\ 5^4 & 5^6 & 5^8 \\ 5^6 & 5^8 & 5^{12} \end{vmatrix} = 5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5^2 \\ 1 & 5^2 & 5^4 \\ 1 & 5^2 & 5^6 \end{vmatrix}$$

$$= 5^{12}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 25 & 625 \\ 1 & 25 & 15625 \end{vmatrix} = 5^{12} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 20 & 600 \\ 0 & 20 & 15600 \end{vmatrix}$$

$$= 5^{12} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 0 & 20 & 600 \\ 0 & 0 & 15000 \end{vmatrix}$$

$$= 5^{12}\cdot(1)(20)(15000)$$

$$= 5^{12}\cdot 300000$$

สรุป $\det(A) = \det(X)\cdot\det(Y)$

$$= 2^{12}\cdot 31\cdot 5^{12}\cdot 300000$$

$$= 10^{12}\cdot 93\cdot 10^5$$

$$= 10^{17}\cdot 93$$

นั่นคือ $\det(A)$ เป็นจำนวนเต็ม 19 หลัก

37. ตอบ ข.

แนวคิด เพราะว่าแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของเมตริกซ์ A เหมือนกัน เพราะฉะนั้นโคแฟกเตอร์ทุกตัวของสมาชิกในแถวที่ 3, 4 และ 5 จึงมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างเช่น

$$\text{โคแฟกเตอร์ของ } a_{41} = (-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่าแถวที่ 3, 4 และ 5 เหมือนกัน เพราะฉะนั้นโคแฟกเตอร์ทุกตัวของสมาชิกในแถวที่ 1, 2 จึงมีค่าเป็นศูนย์

ตัวอย่างเช่น

$$\text{โคแฟกเตอร์ของ } a_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

สรุปโคแฟกเตอร์ของสมาชิกทุกตัวใน A เป็นศูนย์

นั่นคือ $B = \{0\}$ และ $n(B) = 1$

38. ตอบ ข.

$|A| \neq 0$; $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } (A)$

$$A = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{adj } (A^{-1})$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{|A|} \text{adj } (A) \frac{1}{|A^{-1}|} \text{adj } (A^{-1})$$

$$I = \frac{1}{|A|} \frac{1}{|A^{-1}|} \text{adj } (A) \text{ adj } (A^{-1})$$

$$= \text{adj } (A) \text{ adj } (A^{-1})$$

เพราะว่า $I^{-1} = \frac{1}{|I|} \text{adj } (I)$

$$I = \text{adj } (I)$$

และ $AA^{-1} = I$

เพราะฉะนั้น $\text{adj } (AA^{-1}) = I = \text{adj } (A) \text{ adj } (A^{-1})$

ข้อความ (2) ถูกต้อง

เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj } (A)$ และ $A = \frac{1}{|A^{-1}|} \text{adj } (A^{-1})$

เพราะฉะนั้น $\text{adj } (A) = |A| \ A^{-1}$

$$(\text{adj } (A))^{-1} = (|A| \ A^{-1})^{-1}$$

$$= \frac{1}{|A|} A$$

$$= \frac{1}{|A|}\ \frac{1}{|A^{-1}|}\ \text{adj}\ (A^{-1})$$

$$= \text{adj}\ (A^{-1})$$

สรุป $(\text{adj}\ (A))^{-1} = \text{adj}\ (A^{-1})$

ข้อความ (3) ผิด

เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \text{adj}\ (A)$

ดังนั้น $(kA)^{-1} = \frac{1}{|kA|}\ \text{adj}\ (kA)$

และ $|kA|(kA)^{-1} = \text{adj}\ (kA)$

เพราะว่า A มีมิติ 3×3 และ $(kA)^{-1} = (\frac{1}{k})A^{-1}$

เพราะฉะนั้น $k^3|A|(\frac{1}{k})A^{-1} = \text{adj}\ (kA)$

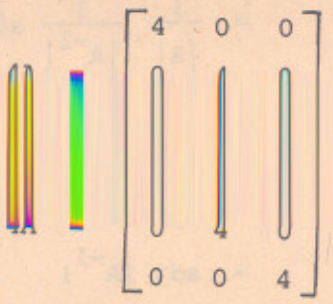
$$k^2|A|A^{-1} = \text{adj}\ (kA)$$

เพราะว่า $|A|A^{-1} = \text{adj}\ (A)$

เพราะฉะนั้น $k^2\ \text{adj}\ (A) = \text{adj}\ (kA)$

ดังนั้นลองเลือก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k = 4$

จะได้ $\text{adj}\ (A) = A$



$$\text{adj}\,(4A) = \text{adj}\left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{bmatrix}$$

$$= 64A$$

$$= 64\,\text{adj}\,(A)$$

สรุป $\text{adj}\,(4A) \neq 4\,\text{adj}\,(A)$

39. ตอบ ค.

แนวคิด ข้อความ (1) ถูกต้อง

เพราะว่าโดยคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนจะได้ว่า

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

และ $$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

ข้อความ (2) ผิด เพราะว่า $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

ตัวอย่างเช่น $z_1 = -4$, $z_2 = 4$

จะได้ $|z_1 + z_2| = 0 < 8 = |z_1| + |z_2|$

ข้อความ (3) ถูกต้อง พิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $\frac{z-1}{z+1}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้

ดังนั้นต้องมี k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$$\frac{z-1}{z+1} = ki$$

$$\frac{z-1}{z+1} + 1 = 1 + ki$$

$$\frac{2z}{z+1} = 1 + ki$$

$$\frac{z+1}{z} = \frac{2}{1+ki}$$

$$\frac{z+1}{z} - 1 = \frac{2}{1+ki} - 1$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1-ki}{1+ki}$$

$$z = \frac{1+ki}{1-ki}$$

$$|z| = \frac{|1+ki|}{|1-ki|} = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+k^2}} = 1$$

40. ตอบ ก.

แนวคิด การหาค่า z_1

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 = \frac{1+2i-1}{1-2i-1} = \frac{2i}{-2i} = -1$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{26} = (-1)^{13} = -1$$

$$z_1 = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{27} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{26}\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$$

$$= (-1)\,\frac{(1+i)}{(1-i)}\,\frac{(1+i)}{(1+i)}$$

$$= \frac{(-1)(1+2i-1)}{1+1}$$

$$= \frac{-2i}{2}$$

$$= -i$$

<u>การหาค่า</u> z_2

เพราะว่า $i^4 = 1$

$$i^{150} = i^{4(37)+2} = (i^4)^{37}(i^2) = -1$$

$$i^{177} = i^{4(44)+1} = (i^4)^{44}(i) = i$$

เพราะฉะนั้น $z_2 = -2-i$

$$\bar{z}_2 = -2+i$$

$$z_2^{-1} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{-2+i}{5}$$

สรุป $z_1 + \bar{z}_2 + z_2^{-1} = (-i) + (-2+i) + \left(\frac{-2+i}{5}\right)$

$$= \frac{-12}{5} + \frac{i}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(i-12)$$

ตอนที่ 2 ข้อ 1 - 8 ข้อละ 2.5 คะแนน

1. ตอบ 60

แนวคิด ให้ x_1 = จำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 1

x_2 = จำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 2

การหาฟังก์ชันจุดประสงค์ P

ต้นทุนจากขนมชนิดที่ 1 = $(15)(x_1)(1) = 15x_1$

ต้นทุนจากขนมชนิดที่ 2 = $(10)(x_2)(3) = 30x_2$

เพราะฉะนั้น กำไร P = $1500 - 15x_1 - 30x_2$

การหาเงื่อนไขข้อจำกัด

เพราะว่าจำนวนถุงพลาสติกในแต่ละวันต้องไม่น้อยกว่า 40 ถุง และจำนวนถุงพลาสติกในขนมชนิดที่ 1 เท่ากับ $(2)(x_1)$ จำนวนถุงพลาสติกในขนมชนิดที่ 2 เท่ากับ $(1)(x_2)$

เพราะฉะนั้น $(2)x_1 + (1)x_2 \geq 40$

เพราะว่าขนมทั้งสองชนิดรวมกันต้องไม่น้อยกว่า 70 ชิ้น และจำนวนขนมชนิดที่ 1 เท่ากับ x_1 ชิ้น จำนวนขนมชนิดที่ 2 เท่ากับ $(3)(x_2)$ ชิ้น

เพราะฉะนั้น $(x_1) + (3)(x_2) \geq 70$

เพราะว่าจำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 1 มากกว่าจำนวนกล่องของขนมชนิดที่ 2 ได้ไม่เกินวัน 30 กล่อง

เพราะฉะนั้น $x_1 - x_2 \leq 30$

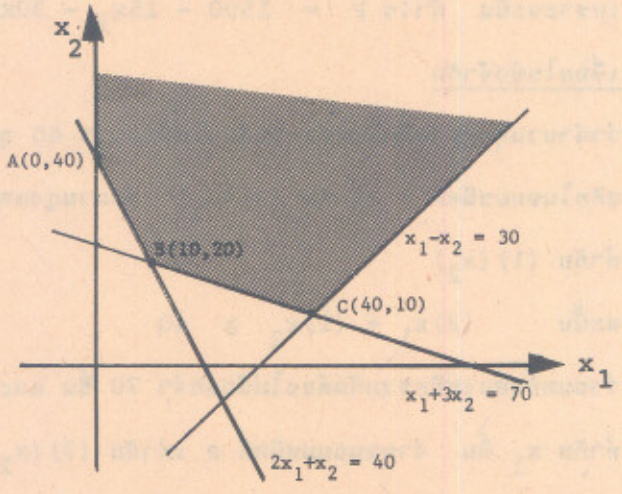
สรุปปัญหากำหนดการเชิงเส้นคือ

หาค่าต่ำสุดของ $P = 1500 - 15x_1 - 30x_2$

ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

$$2x_1 + x_2 \geqslant 40$$
$$x_1 + 3x_2 \geqslant 70$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 30$$
$$x_1 \geqslant 0 \text{ และ } x_2 \geqslant 0$$

กราฟของบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ บริเวณของส่วนที่แรเงา



พิกัดของจุดมุมต่างๆ หาได้จากการตัดกันของสมการเส้นตรง

A(0,40) , B(10,20) และ C(40,10)

ต่อไปหาค่า P ที่จุดมุม A, B และ C

จุดมุม (x_1,x_2)	$P = 1500-15x_1-10x_2$
A(0,40)	300
B(10,20)	750
C(40,10)	600

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดของ P เท่ากับ 750 เมื่อ $x_1 = 10$, $x_2 = 20$

สรุปต้องขายขนมชนิดที่ 2 วันละ $3x_2 = 3(20) = 60$ ชิ้น

2. ตอบ 20

แนวคิด เพราว่า $-x^2 \leqslant f(x) < 0$ ทุกค่า x บน [1,4]

เพราะฉะนั้น $0 \leqslant f(x) + x^2 < x^2$

$$0 \leqslant f(x) + x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} < x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$0 \leqslant g(x) < x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ทุกค่า x บน [1,4]}$$

เพราะว่าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ f จากเส้นตรง $x = 1$ และเส้นตรง $x = 4$ และแกน X มีค่าเท่ากับ 3 และ $-x^2 \leqslant f(x) < 0$

เพราะฉะนั้น $\int_1^4 f(x)\,dx = -3$

เพราะว่า $0 \leqslant g(x)$ ทุก x บน [1,4]

เพราะฉะนั้นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของ g จากเส้นตรง $x = 1$ และเส้นตรง $x = 4$ และแกน X เท่ากับ

$$\int_1^4 g(x)\,dx = \int_1^4 \left(f(x) + x^2 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \int_1^4 f(x)\,dx + \int_1^4 x^2\,dx + \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\int_1^4 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} = 21$$

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left(\frac{\sqrt{x}}{(\frac{1}{2})}\right)\Big|_1^4 = 2(2-1) = 2$$

เพราะฉะนั้น $\int_1^4 g(x)\,dx = (-3)+(21)+2 = 20$

3. ตอบ $f'(3) = \frac{-5}{49}$

แนวคิด เพราะว่าเส้นโค้ง $y = \frac{1}{f(x)} - x + \sqrt{2x-2}$ ผ่านจุด $(3, \frac{5}{2})$

เพราะฉะนั้น $\frac{5}{2} = \frac{1}{f(3)} - 3 + \sqrt{6-2}$

$$= \frac{1}{f(3)} - 3 + 2$$

$$= \frac{1}{f(3)} - 1$$

$$f(3) = \frac{2}{7}$$

$$y = \frac{1}{f(x)} - x + \sqrt{2x-2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)} - x + \sqrt{2x-2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) - \frac{dx}{dx} + \frac{d}{dx}\sqrt{2x-2}$$

$$= \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} - 1 + \frac{1}{2}(2x-2)^{-\frac{1}{2}}(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2x-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด $(3, \frac{5}{2})$ และความชันเส้นสัมผัสที่จุดนั้นเท่ากับความชันเส้นตรงซึ่งเท่ากับ $\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx}(x = 3) = \frac{3}{4}$

จากสมการ (1) จะได้ $\frac{3}{4} = \frac{-f'(3)}{(f(3))^2} - 1 + \frac{1}{\sqrt{6-2}}$

$$\frac{3}{4} = \frac{-f'(3)}{(\frac{2}{7})^2} - 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{-49}{4} f'(3) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{-49}{4} f'(3)$$

$$f'(3) = \frac{-5}{49}$$

4. ตอบ $8-i$ และ $\frac{1}{2} + 3i$

แนวคิด เพราะว่า $\log_2(2^y x) - 3i = 2 + i\log_2(x^y)$

เพราะฉะนั้น $\log_2(2^y x) = 2$ และ $-3 = \log_2(x^y)$

ดังนั้น $2 = \log_2(2^y x)$

$2 = \log_2 2^y + \log_2 x$

$2 = y + \log_2 x$

$\log_2 x = 2-y$

จาก $-3 = y\log_2 x$

จะได้ $\log_2 x = \frac{-3}{y}$

เพราะฉะนั้น $\frac{-3}{y} = 2-y$

$-3 = 2y-y^2$

$y^2-2y-3 = 0$

$(y-3)(y+1) = 0$

$y = -1, 3$

จาก $\log_2 x = 2-y$

$y = -1$ จะได้ $\log_2 x = 2-(-1) = 3$ นั่นคือ $x = 8$

$y = 3$ จะได้ $\log_2 x = 2-(3) = -1$ นั่นคือ $x = \frac{1}{2}$

สรุป $x+yi$ ที่เป็นไปได้คือ $8-i$ และ $\frac{1}{2} + 3i$

5. ตอบ 1.75

แนวคิด $a_1 = \sqrt{3}$

$$a_2 = f(a_1) = f(\sqrt{3}) = \sqrt{3\sqrt{3}}$$

$$a_3 = f(a_2) = f(\sqrt{3\sqrt{3}}) = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\ldots$$

ให้ $L = \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}\ldots$

เพราะฉะนั้น $L = \sqrt{3L}$

$$L^2 = 3L$$

$L = 3$ หรือ $L = 0$

เพราะว่า $L \neq 0$ เพราะฉะนั้น $L = 3$

สรุป $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = \lim_{n\to\infty} a_n$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_{n-1} = 3$

พิจารณา $\lim_{n\to\infty} \log_3(a_n^2) = \log_3 (\lim_{n\to\infty} a_n)^2$

$$= \log_3 3^2$$

$$= 2$$

และ $\lim_{n \to \infty} \log_3 a_{n-1} = \log_3 (\lim_{n \to \infty} a_{n-1})$

$= \log_3 3$

$= 1$

สรุป $\lim_{n \to \infty} \left[\log_3 (a_n^2) - \{ \frac{1}{2} \log_3 (a_{n-1}) \}^2 \right]$

$= \lim_{n \to \infty} \log_3 a_n^2 - \{ \frac{1}{2} \lim_{n \to \infty} \log_3 (a_{n-1}) \}^2$

$= 2 - \frac{1}{4}$

$= 1.75$

6. ตอบ 1330

แนวคิด

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{20}{2}$$

$= \frac{2!}{2!0!} + \frac{3!}{2!1!} + \ldots + \frac{20!}{2!18!}$

$= \frac{1}{2!} \left[\frac{2!}{0!} + \frac{3!}{1!} + \frac{4!}{2!} + \frac{5!}{3!} + \ldots + \frac{20!}{18!} \right]$

$= \frac{1}{2!} \left[(1)(2) + (2)(3) + (3)(4) + (4)(5) + \ldots + (19)(20) \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{19} n(n+1) \right]$

$= \frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{19} (n^2+n) \right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{19} n^2 + \sum_{n=1}^{19} n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{19}{6}(19+1)(38+1) + \frac{19}{2}(19+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2470 + 190\right]$$

$$= 1330$$

หมายเหตุ 1. ในกรณีที่ตัวเลขไม่มากใช้วิธีคิดโดยตรงจะง่ายกว่าเช่น

$$\binom{2}{2} = 1 \ , \ \binom{3}{2} = 3 \ , \ \binom{4}{2} = 6 \ , \ \binom{5}{2} = 10 \ , \ \ldots \ , \ \binom{20}{2} = 190$$

ก็จะได้ผลบวก $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{20}{2} = 1330$ เหมือนกัน

2. เพื่อเป็นการเพิ่มพูนความรู้ขอให้พิจารณาในลักษณะของสูตรทั่วไปดังนี้

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{3}$$

ซึ่งสูตรนี้พิสูจน์ได้โดยง่ายคือ

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{n}{2} = \frac{1}{2}\left((1)\cdot(2) + (2)\cdot(3) + \ldots + (n-1)\cdot n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)}{6}\cdot(n-1+1)\cdot(2n-2+1) + \frac{(n-1)}{2}(n-1+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(n-1)(n)(2n-1)}{6} + \frac{(n-1)n}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)}{4}\left[\frac{2n-1+3}{3}\right]$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$= \binom{n+1}{3}$$

เพราะฉะนั้น $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{20}{2} = \binom{21}{3} = \frac{19 \cdot 20 \cdot 21}{6} = 133$

3. เพื่อประโยชน์สำหรับผู้ต้องการรู้หลายรูปแบบขอแนะนำสูตร

$$\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n-1)(n)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

เพราะฉะนั้น

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \ldots + \binom{19}{2} + \binom{20}{2}$$

$$= \binom{2}{2} + 3^2 + 5^2 + \ldots + 19^2$$

$$= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + 19^2$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (2n-1)^2$$

$$= \sum_{n=1}^{10} (4n^2-4n+1)$$

$$= 4\sum_{n=1}^{10} n^2 - 4\sum_{n=1}^{10} n + 10$$

$$= 4\left(\frac{10}{6}(10+1)(20+1)\right) - 4\left(\frac{10}{2}(10+1)\right) + 10$$

$$= 1540 - 220 + 10$$

$$= 1330$$

คำถามเพิ่มเติม จงหาค่าของผลบวกต่อไปนี้

1. $\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \ldots + \binom{199}{2} + \binom{200}{2}$

2. $\binom{2}{2} - \binom{3}{2} + \binom{4}{2} - \binom{5}{2} + \ldots + \binom{202}{2} - \binom{203}{2}$

3. $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \ldots + \binom{300}{3}$

4. $x_n = \binom{n+1}{2}$; $n = 1,2,3,\ldots,100$

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$

5. $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \ldots + \binom{40}{4}$

7. ตอบ 1360 สับเซต

แนวคิด ตัวอย่างของสับเซตที่มีสมาชิก 3 ตัวของ S ที่ผลบวกในเซตนั้นหารด้วย 3 ลงตัว เช่น $\{1,2,3\}$, $\{1,2,6\}$, $\{3,6,9\}$ เป็นต้น

ให้ $A = \{\{x,y,z\} \subset S \mid 3|(x+y+z)\}$

การนับจำนวนสมาชิกใน A เราจำแนกสมาชิกของ S ออกเป็น 3 ส่วนคือ

$S_1 = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,28\}$

$S_2 = \{2,5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$

$S_3 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30\}$

ต่อไปพิจารณาด้วยเหตุผลว่า $\{x,y,z\} \subset S$ และ $3|(x+y+z)$ จำแนกเป็นกรณีต่างๆ คือ

1. $x,y,z \in S_1$ ทำได้ $\binom{10}{3} = 120$ วิธี

2. $x,y,z \in S_2$ ทำได้ $\binom{10}{3} = 120$ วิธี

3. $x,y,z \in S_3$ ทำได้ $\binom{10}{3} = 120$ วิธี

4. x,y,z มาจาก S_1, S_2 และ S_3 อย่างละตัว ทำได้

$$\binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{10}{1} = 1000 \text{ วิธี}$$

ข้อสังเกต x,y,z มี 2 ตัวมาจาก S_1 หรือ S_2 หรือ S_3 ไม่ได้

สรุป $n(A) = 120+120+120+1000 = 1360$

คำถามเพิ่มเติม กำหนด $S = \{1,2,3,\ldots,60\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{\{x,y,z,w\} \subset S \mid 4|(x+y+z+w)\}$
2. $B = \{\{x,y\} \subset S \mid 4|(x+y)\}$
3. $C = \{\{a,b,c,d,e\} \subset S \mid 5|(a+b+c+d+e)\}$
4. $D = \{\{x,y\} \subset S \mid 5|(x+y)\}$
5. $E = \{(x,y) \mid x,y \in S \text{ และ } 2|(x+y)\}$
6. $F = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in S \text{ และ } 3|(x+y+z)\}$

8. ตอบ 6

แนวคิด ให้ x เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 42 ลงตัว

เพราะว่า $42 = 2\cdot3\cdot7$ ให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ $2^a|x$, $3^b|x$ และ $7^c|x$ ต่อไปเราจะแสดงว่าตัวประกอบของ x มี 2^a, 3^b และ 7^c เท่านั้น

สมมติ มี $y \neq 1$ ที่ทำให้ $x = 2^a\cdot3^b\cdot7^c\cdot y$

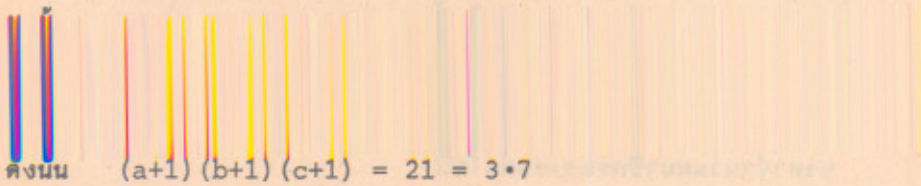
จำนวนเต็มบวกที่หาร $x = 2^a\cdot3^b\cdot7^c\cdot y$ ลงตัว หาได้ตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จำนวนตัวประกอบของ 2 มี (a+1) วิธี
ขั้นที่ 2 จำนวนตัวประกอบของ 3 มี (b+1) วิธี
ขั้นที่ 3 จำนวนตัวประกอบของ 7 มี (c+1) วิธี
ขั้นที่ 4 จำนวนตัวประกอบของ y มี 2 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวกของ x มี

$$(a+1)(b+1)(c+1)2 \text{ วิธี}$$

เพราะว่า $(a+1)(b+1)(c+1)2 = 42$ และ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$



ดังนั้น $(a+1)(b+1)(c+1) = 21 = 3 \cdot 7$

เพราะฉะนั้นต้องมี a หรือ b หรือ c อย่างน้อยหนึ่งตัวต้องเป็นศูนย์

แต่เพราะว่า $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ หาร x ลงตัว

เพราะฉะนั้น a,b และ c ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 1 จึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

สรุปที่เราสมมติว่า $y \neq 1$ นั้นไม่จริง เพราะฉะนั้น $y = 1$

นั่นคือ $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$

เพราะว่า $(a+1)(b+1)(c+1) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = (1+1)(2+1)(6+1)$

เพราะฉะนั้นค่าต่างๆ ที่เป็นไปได้ของ a,b,c คือ 1 หรือ 2 หรือ 6 โดยที่ a,b,c ไม่มีค่าซ้ำกัน

จำนวนค่าของ a เลือกได้ 3 วิธี
จำนวนค่าของ b เลือกได้ 2 วิธี
จำนวนค่าของ c เลือกได้ 1 วิธี

ดังนั้นจำนวนค่าของ a,b และ c ต่างๆ กันเลือกได้ $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ วิธี

สรุป ค่า x ที่เป็นไปได้มี 6 จำนวน

คำถามเพิ่มเติม

1. จำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 42 ลงตัว และมีตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวก 105 ตัวพอดี มีทั้งสิ้นกี่จำนวน
2. จำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 210 ลงตัวและมีตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวก 210 ตัวพอดี มีทั้งสิ้นกี่จำนวน
3. จำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 210 ลงตัวและมีตัวหารที่เป็นจำนวนเต็มบวก 16 ตัวพอดี มีทั้งสิ้นกี่จำนวน

ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3
วันที่ 26 พฤศจิกายน พ.ศ. 2537

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนด $P = \{p \in I^+ \mid p \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A = \{pq \mid p \in P \wedge q \in P \wedge pq \in P\} \neq \phi$
2. $B = \{p+q \mid p \in P \wedge q \in P \wedge p+q \in P\} = \phi$
3. มี $p \in P$ ที่ทำให้ $C = \{pq \mid q \in P\} \subset E$ เมื่อ E เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่
4. ไม่มีจำนวนเฉพาะสองจำนวนที่แตกต่างกันที่หาร 4000 ได้ลงตัว

2. **บทนิยาม** เซต A เป็นเซตสามัญ ก็ต่อเมื่อ $A \notin A$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $B = \{x \mid x \subset B\}$ ไม่เป็นเซตสามัญ

ข. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและเป็นเซตสามัญแล้ว $P(A)$ เป็นเซตสามัญ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

3. กำหนดให้ $U = \{1,2,3,\ldots,200\}$

และ $A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,200) = 2\}$

ผลบวกของสมาชิกของ $U-A$ เท่ากับเท่าใด

1. 5000
2. 10100
3. 16100
4. 20100

4. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|x| \neq \pi$ และ $|y| \neq \pi$

และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{x+y+\pi}$

ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $|x| = |y|$
2. ถ้า $x < 3$ แล้ว $y < -3$
3. $x+y = 0$
4. ถ้า $x = 2^{10}$ แล้ว $y < \frac{1}{2^{10}}$

5. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid x^2-3|x|+2 \geq 0\}$

และ $B = (-2,1]$

$A \cap B'$ คือเซตใดต่อไปนี้

1. $\{-2\} \cup [2,\infty)$
2. $(-\infty,-3) \cup (1,\infty)$
3. $(-\infty,-1] \cup (1,\infty)$
4. $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

6. **บทนิยาม** สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ M_n เรียกว่าจำนวนเมอร์เซ็นน์ ก็ต่อเมื่อ $M_n = 2^n-1$

ให้ $A = \{M_n \mid n$ เป็นจำนวนเต็ม และ $1 \leq n \leq 8\}$

A มีสมาชิกที่เป็นจำนวนเฉพาะกี่จำนวน

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6

7. กำหนดให้ $A = \{f \mid f : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3\}\}$

สุ่มเลือกสมาชิกของเซต A มาหนึ่งตัว ความน่าจะเป็นที่ได้ฟังก์ชันทั่วถึง {1,2,3} เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{36}{81}$
2. $\frac{18}{81}$
3. $\frac{36}{64}$
4. $\frac{18}{64}$

8. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2y+x^2+2x-y = 0\}$

$R_r - D_r$ คือเซตใด

1. ϕ
2. $\{-1\}$
3. $\{1\}$
4. $\{-1,1\}$

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset R \times R$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $(f \circ f)(x) = x$ แล้ว

$f(x) = \frac{1}{x}$ หรือ $f(x) = x$ ทุก $x \neq 0$

ข. ถ้า $f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x} - 1$ แล้ว

$(\sqrt{x^2+1} - 1)\, f(x) = x^2$ ทุก $x > 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

10. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
3. $\sim \exists x [P(x)] \rightarrow \sim \forall x [P(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $\exists x \forall y [P(x,y)] \rightarrow \forall y \exists x [P(x,y)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง

11. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. <u>เหตุ</u> 1. $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$

2. $\sim r \rightarrow (s \vee t)$

3. $\sim s \wedge \sim t$

<u>ผล</u> $\therefore$ $p \rightarrow q$

ข. <u>เหตุ</u> 1. ถ้าสมศรีขับรถมากว่า 5 ปีแล้ว สมศรีมีใบขับขี่รถยนต์ตลอดชีพ

2. สมศรีไม่มีใบขับขี่รถยนต์ตลอดชีพ

<u>ผล</u> $\therefore$ สมศรีขับรถไม่ถึง 5 ปี

การอ้างเหตุผลใดบ้างที่สมเหตุสมผล

1. ก. เท่านั้น
2. ข. เท่านั้น
3. ทั้ง ก. และ ข.
4. ไม่ใช่ทั้ง ก. และ ข.

12. กำหนด $A_i = \left[\frac{1}{i} , \frac{2i}{i+1} \right]$ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ขอบเขตล่างของ A_i ทุก $i \in I^+$ คือ 1
2. ทุก $i \in I^+$ A_i ไม่มีขอบเขตล่าง
3. ทุก $i \in I^+$ A_i ไม่มีขอบเขตบน
4. 3 เป็นขอบเขตบนของ A_i ทุก $i \in I^+$

13. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 1
2. -1
3. 0
4. $\sqrt[3]{4}$

14. กำหนดให้ $f(x)$ $= \begin{cases} ax^2+b & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ ax & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

$a + \frac{b}{2}$ มีค่าเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ $f(x)$ ต่อเนื่องที่ 2

1. 1
2. -1
3. 0
4. 2

15.

สำหรับ $f(x) \in R - \{0\}$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \frac{d}{dx} f(x)$$

ให้ $y = ((x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10})$

ค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 0$ เท่ากับเท่าใด

1. 60
2. 13
3. -7
4. 0

16. ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$

$$A = \frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\ldots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2\ldots a_n}$$

ค่าต่ำสุดของ A เท่ากับเท่าใด

1. 1
2. 2^n
3. $(2.5)^n$
4. 3^n

17. กำหนด $A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + 10(10!)$

ถ้าเขียน A ในรูปจำนวนเต็มบวกแล้ว A ประกอบด้วยเลข 9 กี่ตัว

1. 1 ตัว
2. 2 ตัว
3. 3 ตัว
4. 4 ตัว

18. กำหนด $A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$ $B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}}$ $C = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A < B < C$
2. $B < A$ และ C ไม่มีความหมาย
3. $C < B < A$
4. $A < B$ และ C ไม่มีความหมาย

19. พื้นที่วงกลมที่ผ่านจุด A(1,1) B(4,2) และ C(3,5) เท่ากับเท่าใด

1. 5π
2. 4π
3. 3π
4. 2π

20. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\bar{i} + \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\bar{j}$
2. $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)\bar{i} + \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)\bar{j}$
3. $\sin\frac{\pi}{4}\bar{i} - \cos\frac{\pi}{4}\bar{j}$
4. $\sin(-\theta)\bar{i} + \cos(-\theta)\bar{j}$

21. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R^+ ไป R^+ ซึ่งสอดคล้อง

เงื่อนไขต่อไปนี้ $f(\tan\theta) = \sec^2\theta$

$g(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta$

$(g \circ f)(\sqrt{2})$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{2}$
3. $3\sqrt{2}$ 4. $6\sqrt{2}$

22. พิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 5x+6y$

ภายใต้อสมการข้อจำกัด $x \geq 0$

$y \geq 0$

$x-2y-6 \geq 0$

และ $x-y+5 \leq 0$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. P มีค่าสูงสุด

ข. P มีค่าต่ำสุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว 2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ 4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

23. ผลบวกของกำลังของตัวแปร x ในการกระจาย $(x^4-16)^{21}$ เท่ากับเท่าใด

1. 924 2. 1848
3. 2772 4. 2940

24. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \text{adj}\ (A^t)$

ผลบวกของสมาชิกใน B เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. -2
3. 4
4. -4

25. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า $\text{adj}\ (AB) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $a+b+c+d$ เท่ากับเท่าไร

1. -18
2. 18
3. -22
4. 22

26. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข

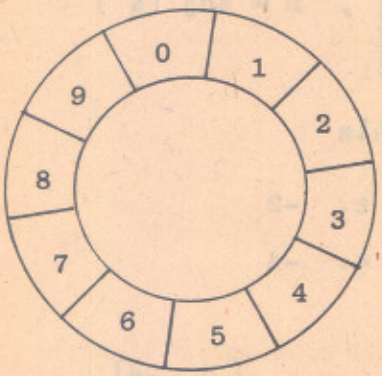
$$f(x) + 4g(x) = 4x^2-3$$

$$xf'(x) - g'(x) = 3x+1$$

ค่าของ $f''(0) + g''(0)$ เท่ากับเท่าใด

1. 4
2. 5
3. -4
4. -5

27.



ในการเปิดตู้เซฟด้วยการหมุนรหัส ตัวเลขที่ประกอบด้วยตัวเลข 6 ตัว ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยมีจำนวนเลขคู่เท่ากับจำนวนเลขคี่ รหัสที่ถูกต้องนั้นต้องขึ้นอยู่กับทิศทางการหมุนว่า จากตัวเลขหนึ่งไปยังอีกตัวเลขหนึ่งหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือหมุนตามเข็มนาฬิกา

จงหาจำนวนวิธีในการสร้างรหัสตู้เซฟนี้

1. 23,040
2. 32,000
3. 72,000
4. 2,304,000

28. กำหนดให้ $S = \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 4}{9} + \frac{\log 8}{27} + \ldots$

โดยที่ ลำดับของเศษเป็นลำดับเลขคณิต

และ ลำดับของส่วนเป็นลำดับเรขาคณิต

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $0 < S < 0.5$
2. $0.5 < S < 0.75$
3. $0.75 < S < 1.25$
4. $1.25 < S$

29. การแข่งขันฟุตบอลโลกที่ประเทศสหรัฐอเมริกา รอบแรก สาย A ประกอบด้วยทีม สหรัฐอเมริกา โรมาเนีย โคลัมเบีย และสวิตเซอร์แลนด์ ภายในสาย A แข่งแบบพบกันหมด ซึ่งต้องแข่งขันทั้งหมด 6 นัด โดยมีกติกาการให้คะแนนดังนี้ ทีมชนะได้ 3 คะแนน ทีมแพ้ได้ 0 คะแนน หากคู่ใดเสมอกันจะได้ทีมละ 1 คะแนน

ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมสหรัฐอเมริกา$\}$

$B = \{y \mid y$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมโรมาเนีย$\}$

$C = \{z \mid z$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมโคลัมเบีย$\}$

$D = \{w \mid w$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมสวิตเซอร์แลนด์$\}$

$S = \{(x,y,z,w) \mid x \in A, y \in B, z \in C, w \in D\}$

เมื่อสิ้นสุดการแข่งขันรอบแรกสาย A ความน่าจะเป็นที่ทุกทีมได้คะแนนเท่ากันเป็นเท่าใด

1. 0.0014
2. 0.0055
3. 0.0096
4. 0.0151

30. กำหนดให้ $A = \{2,4,8,\ldots\}$ $B = \{1,3,5,\ldots\}$

$S = \{(x,y) \in A \times B \mid xy$ หาร $10!$ ลงตัว$\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

1. 56
2. 120
3. 210
4. 240

ตอนที่ 2 ข้อ 1 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

1. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $f(x) = |4-x^2|$, $x \in [-6,5]$

ถ้า A และ B เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f แล้ว

A+B เท่ากับเท่าใด

3. ถ้า a เป็นรากของสมการ $x^5 = 1$ และ $a \neq 1$ แล้ว

$a^4 + a^3 + a^2 + a$ เท่ากับเท่าใด

4. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = 1-i$ จงหาค่า d ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ z^d เป็นจำนวนเต็ม และ $32 | z^d$

5. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$B = \{f \mid f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} A\}$$

$$C = \{f \in B \mid f(k) \neq k \text{ , } k = 1,2,3\}$$

จำนวนสมาชิกของ C เท่ากับเท่าใด

6. ถ้า $\frac{4x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 - x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2-1}$ แล้ว

$A + B + C$ เท่ากับเท่าใด

7. พื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \cos x$ และแกน X เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ เท่ากับเท่าใด

(**ข้อแนะ** $\int \cos x \, dx = \sin x + c$)

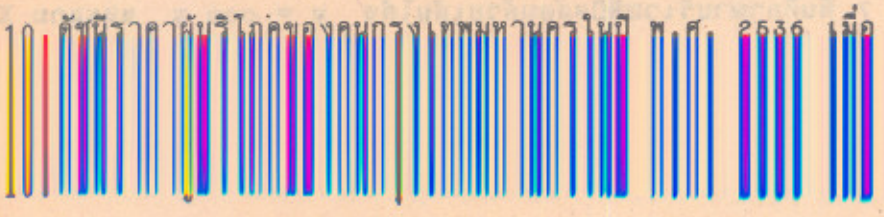
8. ในการสอบแข่งขันวัฏจักร วิชาคณิตศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ ของศักดิ์เทพ และสุมาลย์ มีคะแนนดังนี้

วิชา	คะแนนสอบของศักดิ์เทพ	คะแนนสอบของสุมาลย์	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
คณิตศาสตร์	70	79	40	3
เคมี	70	70	45	4
ฟิสิกส์	70	61	50	5

ถ้า A เป็นค่ามาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของศักดิ์เทพ
และ B เป็นค่ามาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของสุมาลย์
แล้ว B – A เท่ากับเท่าใด (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

9. ข้อมูลชุดหนึ่ง คือ 2,4,6,8,10
สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับเท่าใด
(ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

10. ดัชนีราคาผู้บริโภคของกรุงเทพมหานครในปี พ.ศ. 2536 เมื่อ



เทียบกับปี พ.ศ. 2529 เท่ากับ 133.6 ถ้านายลำใย มีอาชีพขายน้ำลำใย มีรายได้เฉลี่ยในปี พ.ศ. 2536 เดือนละ 12,000 บาท ถ้าในปี พ.ศ. 2529 ทองราคาบาทละ 4491.02 บาท รายได้ของนายลำใย 1 เดือนในปี พ.ศ. 2536 จะซื้อทองในปี พ.ศ. 2529 ได้กี่บาท (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

ตอนที่ 3 แสดงข้อพิสูจน์ 10 คะแนน

กำหนดให้ a_1, a_2, a_3 เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ a_1 เป็นจำนวนเต็ม และผลต่างร่วมเท่ากับ 2

จงพิสูจน์ว่า $3 \mid a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

ตอนที่ 1

1.3	2.2	3.3	4.2	5.4	6.2	7.1	8.4
9.4	10.2	11.1	12.4	13.1	14.3	15.3	16.4
17.4	18.3	19.1	20.2	21.4	22.4	23.1	24.3
25.1	26.2	27.4	28.1	29.3	30.4		

ตอนที่ 2

1. -1	2. 32	3. -1	4. 12	5. 64
6. 5	7. 2	8. 0.40	9. 0.47	10. 2

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1. ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด

เพราะว่า ถ้า $p \in P$ และ $q \in P$ แล้ว pq ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

เพราะฉะนั้น $A = \phi$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $2 \in P$, $3 \in P$ และ $2+3 = 5 \in P$

เพราะฉะนั้น $5 \in B$ นั่นคือ $B \neq \phi$

3. ถูกต้อง เลือก $p = 2$, $2 \in P$ และ $C = \{2q \mid q \in P\}$

จะเป็นสับเซตของ E

4. ผิด เพราะว่ามี 2 และ 5 ที่ $2|4000$ และ $5|4000$

2. ตอบ 3.

แนวคิด ก. ถูกต้อง

เพราะว่า $B \subset B$ เพราะฉะนั้น $B \in B$

ดังนั้น B ไม่เป็นเซตสามัญ

ข. ถูกต้อง

เพราะว่า $P(A)$ เป็นเซตจำกัด และ $P(A) \notin P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A)$ เป็นเซตสามัญ

หมายเหตุ สมมติ $P(A)$ ไม่เป็นเซตสามัญ

เพราะฉะนั้น $P(A) \in P(A)$ จะได้ $P(A) \subset A$

เพราะว่า $A \in P(A)$ และ $P(A) \subset A$ เพราะฉะนั้น $A \in A$

จึงขัดแย้งกับ A เป็นเซตสามัญ สรุป $P(A)$ ต้องเป็นเซตสามัญ

3. ตอบ 3.

$$\sum_{x \in U} x = \frac{200}{2}(1 + 200)$$

$$= 20100$$

$$A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,200) = 2\}$$

$$= \{2(1),2(3),2(5),2(7),\ldots,2(99)\}$$

$$- \{2(5),2(15),2(25),\ldots,2(95)\}$$

$$\sum_{x \in A} x = 2(1) + 2(3) + \ldots + 2(99)$$

$$- (2(5) + 2(15) + \ldots + 2(95))$$

$$= 2(1+3+\ldots+99) - 10(1+3+5+\ldots+19)$$

$$= 2\left(\frac{50}{2}(1+99)\right) - 10\left(\frac{10}{2}(1+19)\right)$$

$$= 5000 - 1000$$

$$= 4000$$

เพราะฉะนั้น $$\sum_{x \in U-A} x = \sum_{x \in U} x - \sum_{x \in A} x$$

$$= 20100 - 4000$$

$$= 16100$$

4. ตอบ 2.

แนวคิด $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{x+y+\pi}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+\pi} - \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{\pi-x-y-\pi}{\pi(x+y+\pi)}$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{\pi(x+y+\pi)} = 0$$

$$(x+y)\left[\frac{1}{xy} + \frac{1}{\pi(x+y+\pi)}\right] = 0$$

กรณี 1 $x+y = 0$ จะได้ $y = -x$

หรือ $|y| = |x|$

กรณี 2 $\frac{1}{xy} + \frac{1}{\pi(x+y+\pi)} = 0$

$$\frac{1}{xy} = -\frac{1}{\pi(x+y+\pi)}$$

$$xy = -\pi(x+y+\pi)$$

$$xy + \pi x + \pi y + \pi^2 = 0$$

$$x(y+\pi) + \pi(y+\pi) = 0$$

$$(x+\pi)(y+\pi) = 0$$

$x = -\pi$ หรือ $y = -\pi$

เพราะว่าโจทย์กำหนดว่า $|x| \neq \pi$ และ $|y| \neq \pi$

เพราะฉะนั้นกรณี 2 เป็นไปไม่ได้

สรุป $x+y = 0$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น $|x| = |y|$ ถูกต้อง

เพราะว่า $x = -y$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x < 3$

จะได้ $-y < 3$ นั่นคือ $y > -3$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ไม่ถูกต้อง

วิธีลัด ทดลองแทนค่า $x = 1$ แล้วหาค่า y ที่เป็นไปได้

$$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{1+y+\pi}$$

$$\frac{\pi y + \pi + y}{\pi y} = \frac{1}{1+y+\pi}$$

$$(\pi y + \pi + y)(1 + y + \pi) = \pi y$$

$$\pi y + \pi y^2 + \pi^2 y + \pi + \pi y + \pi^2 + y + y^2 + \pi y = \pi y$$

$$(\pi + 1)y^2 + (\pi + \pi^2 + \pi + 1)y + \pi + \pi^2 = 0$$

$$(\pi + 1)y^2 + (\pi + 1)^2 y + \pi(\pi + 1) = 0$$

$\pi + 1$ หารตลอด

$$y^2 + (\pi + 1)y + \pi = 0$$

$$(y + \pi)(y + 1) = 0$$

$$y = -1$$

เพราะว่า $x = 1 < 3$ แต่ $y = -1 \not< -3$

สรุปตัวเลือก 2. ผิด

5. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาอสมการ $x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$

เมื่อ $x \leq 0$ $\quad x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x+1) \geq 0$$

$-\infty < x \leq -2$ หรือ $-1 \leq x < \infty$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x \leq 0$ จะได้ $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,0]$

เมื่อ $x > 0$ $x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$

$x^2 - 3x + 2 \geq 0$

$(x-2)(x-1) \geq 0$

$-\infty < x \leq 1$ หรือ $2 \leq x < \infty$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x > 0$ จะได้ $x \in (0,1] \cup [2,\infty)$

สรุป $A = ((-\infty,-2] \cup [-1,0]) \cup ((0,1] \cup [2,\infty))$

$= (-\infty,-2] \cup [-1,1] \cup [2,\infty)$

เพราะว่า $B' = (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

เพราะฉะนั้น $A \cap B' = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

วิธีลัด จาก $B' = (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

เพราะฉะนั้น $-1 \notin A \cap B'$

เราจึงตัดตัวเลือก ๓. ทิ้งได้

เพราะว่า $(-2)^2 - 3|-2| + 2 = 0 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $-2 \in A$ นั่นคือ $-2 \in A \cap B'$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ๒. ทิ้งได้

เพราะว่า $(-3)^2 - 3|-3| + 2 = 2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $-3 \in A$ และ $-3 \in A \cap B'$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ๑. ทิ้งได้อีก

6. ตอบ 2.

แนวคิด $M_1 = 1$ $\quad M_5 = 31$

$M_2 = 3$ $\quad M_6 = 63$

$M_3 = 7$ $\quad M_7 = 127$

$M_4 = 15$ $\quad M_8 = 255$

$A = \{M_n \mid 1 \leq n \leq 8\}$

$= \{1,3,7,15,31,63,127,255\}$

จำนวนเฉพาะที่อยู่ใน A คือ 3,7,31,127

7. ตอบ 1.

แนวคิด $A = \{f \mid f : \{a,b,c,d\} \to \{1,2,3\}\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ A

ขั้นที่ 1 f(a) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 f(b) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 f(c) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 4 f(d) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่จะส่งค่าของ f ทำได้ $(3)(3)(3)(3) = 3^4$ วิธี

นั่นคือ $n(A) = 81$

$B = \{f \mid f \in A$ และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง$\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ B

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 4 ตัว ใน {a,b,c,d}

ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิก 2 ตัวที่เลือกได้ถูกส่งค่าไปที่เดียวกัน ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกสมาชิก 2 ตัวที่เหลือในขั้นตอนที่ 1 กับสมาชิก 2 ตัวที่ที่เหลือใน $\{1,2,3\}$ จับคู่กัน ทำได้ 2 วิธี

สรุป $n(B) = (6)(3)(2) = 36$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชันทั่วถึง $= \frac{n(B)}{n(A)} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

8. ตอบ 4.

แนวคิด การหา D_r เราพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้

โดยหา y ในพจน์ของ x จากสมการ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$$y - x^2y = 2x + x^2$$

$$y(1 - x^2) = 2x + x^2$$

$$y = \frac{2x + x^2}{1 - x^2}$$

เพราะฉะนั้น $D_r = R - \{1,-1\}$

การหา R_r เราพิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้

โดยหา x ในพจน์ของ y จากสมการ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$$(y+1)x^2 + 2x - y = 0$$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{4 - 4(y+1)(-y)}}{2(y+1)}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + y(y+1)}}{2(y+1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + y(y+1)}}{y+1}$$

พิจารณา $1 + y(y+1) = y^2 + y + 1$

$$= y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $y \neq -1$ แล้ว $x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + y(y+1)}}{y+1}$ หาค่าได้

ที่ต้องให้ความสำคัญคือ $y = -1$ ได้หรือไม่โดยดูจากสมการเดิม

$$x^2y + x^2 + 2x - y = 0$$

เราลองทำโดยแทนค่า $y = -1$ จะได้

$$-x^2 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

แสดงว่า $(\frac{-1}{2}, -1) \in r$ นั่นคือ $R_r = R$

เพราะฉะนั้น $R_r - D_r = R - [R - \{-1,1\}]$

$$= \{-1,1\}$$

9. ตอบ 4.

แนวคิด ก. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = -\frac{1}{x}$

จะได้ $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= f(-\frac{1}{x})$$

$$= x$$

นั่นคือ $(f \circ f)(x) = x$ โดยที่ $f(x) \neq \frac{1}{x}$ และ $f(x) \neq x$ ก็ได้

ข. ผิด ตัวอย่างเช่น เลือก $x = 4$

$$(\sqrt{4^2+1} - 1)\, f(4) = (\sqrt{17} - 1)(\sqrt{4} - 1)$$
$$= (\sqrt{17} - 1)(2 - 1)$$
$$= \sqrt{17} - 1$$
$$\neq 4^2$$

นั่นคือ $(\sqrt{x^2+1} - 1)\, f(x) \neq x^2$ เมื่อ $x = 4$

10. ตอบ 2.

แนวคิด 1. เป็นจริง สมมติ $\forall x [P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\forall x [P(x)]$ เป็นจริง และ $\forall x [Q(x)]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)]$ เป็นจริง

สมมติ $\forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)]$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\forall x [P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

สรุป $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)]$ เป็นจริง

2. ผิด ให้ U เป็นเซตจำนวนเต็ม

$P(x)$ แทนข้อความ x เป็นเลขคู่

$Q(x)$ แทนข้อความ x เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $\forall x [P(x) \vee Q(x)]$ เป็นจริง

$\forall x [P(x)]$ เป็นเท็จ

$\forall x [Q(x)]$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)]$ เป็นเท็จ

3. เป็นจริง

$\sim\exists x\,[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\,[\sim P(x)]$

$\sim\forall x\,[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\,[\sim P(x)]$

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[\sim P(x)] \longrightarrow \exists x\,[\sim P(x)]$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sim\exists x\,[P(x)] \longrightarrow \sim\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริง

4. เป็นจริง

สมมติ $\exists x \forall y\,[P(x,y)] \longrightarrow \forall y \exists x\,[P(x,y)]$ เป็นเท็จ

นั่นคือมีกรณีของ x และ y ที่ทำให้ $\forall y \exists x\,[P(x,y)]$ เป็นเท็จ

และ $\exists x \forall y\,[P(x,y)]$ เป็นจริง .....(1)

เพราะว่า $\sim(\forall y \exists x\,[P(x,y)])$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\exists y \forall x\,[\sim P(x,y)]$ เป็นจริง .....(2)

เพราะว่าข้อความ (1) และ (2) ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้นจากที่สมมติไว้ไม่จริง

นั่นคือ $\exists x \forall y\,[P(x,y)] \longrightarrow \forall y \exists x\,[P(x,y)]$ เป็นจริง

11. ตอบ 1.

แนวคิด ก. สมเหตุสมผล

เพราะว่า $[[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [\sim r \rightarrow (s \vee t)] \wedge [\sim s \wedge \sim t]] \rightarrow [p \rightarrow q]$ เป็นสัจนิรันดร์

หมายเหตุ การแสดงข้อความข้างต้นเป็นสัจนิรันดร์ทำได้โดย

1. ตีตารางค่าความจริง 2^5 กรณี

2. แสดงข้อพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $[[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [\sim r \rightarrow (s \vee t)] \wedge [\sim s \wedge \sim t]] \rightarrow [p \rightarrow q]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ

$p \rightarrow (q \wedge \sim r)$, $\sim r \rightarrow (s \vee t)$ และ $\sim s \wedge \sim t$ เป็นจริง

$\sim s \wedge \sim t$ เป็นจริง จะได้ $\sim s$ และ $\sim t$ เป็นจริง

นั่นคือ s และ t เป็นเท็จ

ดังนั้น $s \vee t$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $\sim r \rightarrow (s \vee t)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\sim r$ เป็นเท็จ ดังนั้น r ต้องเป็นจริง

ผลที่ตามมาคือ $q \wedge \sim r$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

สรุป $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ เป็นเท็จ ซึ่งจะขัดแย้งกับ $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ เป็นจริง

ข. ไม่สมเหตุสมผล

ให้ p แทนข้อความ สมศรีขับรถมากว่า 5 ปี

q แทนข้อความ สมศรีมีใบขับขี่ตลอดชีพ

เพราะฉะนั้น เหตุ (1) คือ $p \rightarrow q$

(2) คือ $\sim q$

ผล คือ $\sim p$

เพราะว่า $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์

ต่อไปเราต้องพิจารณาคำกล่าว "สมศรีขับรถไม่ถึง 5 ปี" นั่นไม่ตรงกับ

ความหมายของ $\sim p$

เพราะว่า $\sim p$ นั้นหมายถึง สมศรีขับรถมานานน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 ปี

เพราะฉะนั้น การอ้างเหตุผลในข้อนี้ถือว่าไม่สมเหตุสมผล

12. ตอบ 4.

แนวคิด

1. ผิด ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ 1 ไม่เป็นขอบเขตล่างของ A_2

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ มีขอบเขตล่าง เช่น 0, $\frac{1}{2}$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ มี 2 เป็นขอบเขตบน

4. ถูกต้อง เพราะว่า $2i \leq 2i + 2$

$$2i \leq 2(i+1)$$

$$\frac{2i}{i+1} \leq 2 \quad \text{ทุกค่า } i \in I^+$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2i}{i+1} < 3$ ทุกค่า $i \in I^+$

นั่นคือ 3 เป็นขอบเขตบนของ A_i ทุกค่า $i \in I^+$

13. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ $a = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$ และ $b = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

จากสูตร $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$= (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) + 3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(a+b)$$

$$= 4 + 3\sqrt[3]{4-5}\ (a+b)$$

$$= 4 + 3(-1)(a+b)$$

ให้ $x = a+b$

$$x^3 = 4-3x$$

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+4) = 0$$

เพราะว่า $x^2+x+4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $x-1 = 0$ เท่านั้น

นั่นคือ $x = 1$

$$a+b = 1$$

14. ตอบ 3.

แนวคิด a และ b ที่ทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ คือ a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 2^+} ax^2+b = \lim_{x \to 2^-} ax$$

$$4a+b = 2a$$

$$2a+b = 0$$

$$a + \frac{b}{2} = 0$$

15. ตอบ 3.

แนวคิด

ให้ $|y| = |(x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10}|$

$$\ln|y| = \ln|(x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10}|$$

$$= 2\ln(x^2+1) + 3\ln|x+1| + 10\ln|x-1|$$

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{d}{dx}(2\ln(x^2+1) + 3\ln|x+1| + 10\ln|x-1|)$$

$$= 2\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) + 3\frac{d}{dx}\ln|x+1| + 10\frac{d}{dx}\ln|x-1$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x^2+1)}\frac{d}{dx}(x^2+1) + \frac{3}{(x+1)}\frac{d}{dx}(x+1) + \frac{10}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)}(2x) + \frac{3}{(x+1)}(1) + \frac{10}{(x-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{4x}{x^2+1} + \frac{3}{x+1} + \frac{10}{x-1}\right)$$

เมื่อ $x = 0$ จะได้

$$y = (1)^2(1)^3(-1)^{10} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (1)\left(\frac{0}{0+1} + \frac{3}{0+1} + \frac{10}{0-1}\right)$$

$$= 3 - 10$$

$$= -7$$

16. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาค่า $\frac{x^2+x+1}{x}$ เมื่อ $x > 0$

เพราะว่า $(x-1)^2 \geq 0$

$$x^2-2x+1 \geq 0$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

เพราะฉะนั้น $1 + x + \frac{1}{x} \geq 3$

สรุป $\frac{x^2+x+1}{x} \geq 3$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ จะได้

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)}{a_1} \cdot \frac{(a_2^2 + a_2 + 1)}{a_2} \cdots \frac{(a_n^2 + a_n + 1)}{a_n} \geq 3^n$$

นั่นคือ $$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1)\ldots(a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq 3^n$$

วิธีคิด โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นลอง $n = 1$ จะได้

$$A = \frac{a_1^2 + a_1 + 1}{a_1}$$

$$= a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$$

เพราะฉะนั้น $A > 1$ แน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

พิจารณา A ในรูปแบบ $x + 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$

ให้ $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ หรือ -1

แต่ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ เท่านั้น

เพราะว่า ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $f'(x) < 0$

ถ้า $1 < x < \infty$ แล้ว $f'(x) > 0$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

นั่นคือ $x + 1 + \frac{1}{x}$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $n = 1$

เพราะฉะนั้นตอบตัวเลือก 4. ได้เลย

จากโจทย์ข้อนี้เราอาจทำแบบไม่ต้องใช้แคลคูลัสก็ได้ เช่น เมื่อ $n = 1$

เราดูว่า $x + 1 + \frac{1}{x} = 2^1$ ได้หรือไม่

โดยใช้เหตุผลดังนี้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + 1 = x$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

นั่นคือไม่มี x ที่ทำให้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2$

เพราะฉะนั้น 2 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ $A = a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$

ต่อไปลอง $x + 1 + \frac{1}{x} = 2.5$

$$x + \frac{1}{x} = 1.5$$

$$x^2 - 1.5x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 4}}{2}$$

นั่นคือไม่มี x ที่ทำให้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2.5$

เพราะฉะนั้น 2.5 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ $A = a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$

เหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวอีกแล้ว

17. ตอบ 4.

แนวคิด $A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + 10(10!)$

$$= 1 + 2(2) + 3(6) + 4(24) + 5(120) + 6(720) + 7(5040) + 8(40320) + 9(362880) + 10(3628800)$$

$$= 1 + 4 + 18 + 96 + 600 + 4320 + 35280 + 322560 + 3265920 + 36288000$$

$$= 39916799$$

เพราะฉะนั้นในจำนวนเต็ม A มีเลข 9 อยู่ 4 ตัว

หมายเหตุ โดยการจัดรูป

$$A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + 10(10!)$$

$$= [2(1!) - 1(1!)] + [3(2!) - 2!] + [5(4!) - 4!]$$

$$+ \ldots + [11(10!) - 10!]$$

$$= [2! - 1!] + [3! - 2!] + [5! - 4!] + \ldots + [11! - 10!]$$

$$= 11! - 1!$$

$$= 39916800 - 1$$

$$= 39916799$$

18. ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1**

$$A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$$

$$\log A = \log \left(\frac{1}{\sqrt[8]{8!}}\right)$$

$$= \log 1 - \log \left(\sqrt[8]{8!}\right)$$

$$= -\frac{1}{8} \log (8!)$$

$$= -\frac{1}{8} (\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 8)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}}$$

$$\log B = \log \left(\frac{1}{\sqrt[9]{9!}}\right)$$

$$= \log 1 - \log \sqrt[9]{9!}$$

$$= -\frac{1}{9} \log (9!)$$

$$= -\frac{1}{9} (\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 9)$$

เพราะว่า $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.47$,
$\log 4 = 0.6$, $\log 5 = 0.7$, $\log 6 = 0.77$,
$\log 7 = 0.84$, $\log 8 = 0.9$, $\log 9 = 0.94$

เพราะฉะนั้น $\log A = -\frac{1}{8}(0+0.3+0.47+0.6+0.7+0.77+0.84+0.9)$

$= -\frac{1}{8}(4.58)$

$= -0.5725$

$\log B = -\frac{1}{9}(0+0.3+0.47+\ldots+0.84+0.9+0.94)$

$= -\frac{1}{9}(5.52)$

$= -0.61$

ดังนั้น $\log B < \log A$

นั่นคือ $B < A$

จาก $\log A = -0.5725$ จะได้ $0 < A < 1$

จาก $\log B = -0.61$ จะได้ $0 < B < 1$

และ $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

เพราะฉะนั้น $C < B < A$

หมายเหตุ จากเครื่องคำนวณ $A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}} = 0.26565$

$B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}} = 0.24547$

วิธีที่ 2 การแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt[9]{9!}} < \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$ อาจทำได้ดังนี้

สำหรับ $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$1 < n+1$$

$$2 < n+1$$

$$\vdots$$

$$n < n+1$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdots n < (n+1)^n$$

$$n! < (n+1)^n$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $(n!)^n$ จะได้

$$(n!)^n n! < (n!)^n (n+1)^n$$

$$(n!)^{n+1} < ((n+1)!)^n$$

$$\left[(n!)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left[((n+1)!)^n\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}$$

เมื่อ $n = 8$ จะได้

$$(8!)^{\frac{1}{8}} < (9!)^{\frac{1}{9}}$$

นั่นคือ $$\frac{1}{\sqrt[9]{9!}} < \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$$

สรุป $B < A$

การแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}} = 0$ ต้องใช้เหตุผลดังนี้

พิจารณาลำดับ $a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n!}}$

จะได้ว่า $\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < 1$ ทุกค่า $n \in I^+$

นั่นคือ $a_{n+1} < a_n < 1$

เพราะว่า a_n เป็นลำดับที่มีค่าน้อยลงเรื่อย และ $a_n \geq 0$ ทุกค่า n

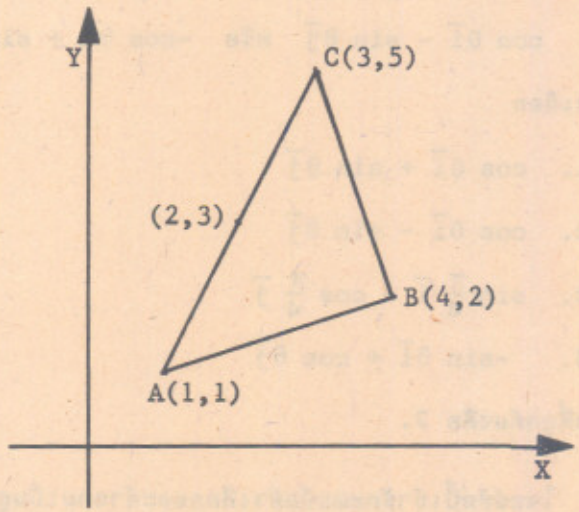
เพราะฉะนั้น $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

นั่นคือ $C = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

สรุป $C < B < A$

19. ตอบ 1.

แนวคิด เขียนกราฟแสดงพิกัดของจุด A, B และ C



ความชัน AB $= \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$

ความชัน BC $= \frac{5-2}{3-4} = \frac{3}{-1}$

เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C = 90^\circ$

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{B} = 90^\circ$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C ต้องอยู่ที่จุด

กึ่งกลางของจุด A และ C ซึ่งพิกัดของจุดนั้นคือ $(\frac{3+1}{2}, \frac{5+1}{2}) = (2,3)$

เพราะฉะนั้นรัศมีของวงกลมเท่ากับ $\sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

พื้นที่วงกลมที่ต้องการมีค่าเท่ากับ $(\sqrt{5})^2\pi = 5\pi$

20. ตอบ 2.

แนวคิด เวกเตอร์ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยอยู่แล้ว

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ คือ

$\cos\theta\bar{i} - \sin\theta\bar{j}$ หรือ $-\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$

ดูค่าที่ตัวเลือก

1. $\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$
2. $\cos\theta\bar{i} - \sin\theta\bar{j}$
3. $\sin\frac{\pi}{4}\bar{i} - \cos\frac{\pi}{4}\bar{j}$
4. $-\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$

ตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 2.

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้เข้าลักษณะข้อตัวเลือกและคำถามเป็นสูตรในพจน์ของ θ

ดังนั้นเลือกค่า θ ที่คิดเลขง่ายๆ ก็จะตัดตัวเลือกได้

เลือก $\theta = \frac{\pi}{2}$ แทนค่าในโจทย์และตัวเลือก

โจทย์ $\sin \frac{\pi}{2} \bar{i} + \cos \frac{\pi}{2} \bar{j} = \bar{i}$

ตัวเลือก 1. $\bar{j}$ ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

2. $-\bar{j}$ ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

4. $-\bar{i}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

ต่อไปลอง $\theta = \frac{\pi}{4}$ แทนค่าที่โจทย์และตัวเลือกเฉพาะข้อ 1. และ 2.

โจทย์ $\sin \frac{\pi}{4} \bar{i} + \cos \frac{\pi}{4} \bar{j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}$

ตัวเลือก 1. $\sin (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \bar{i} + \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \bar{j}$

$= \sin \frac{\pi}{4} \bar{i} + \cos \frac{\pi}{4} \bar{j}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}$ ซึ่งไม่ตั้งฉากกับ $\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{j}$

แน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้เลย

21. ตอบ 4.

แนวคิด หาสูตร f และ g ในพจน์ของ f(x) และ g(x) ก่อน

เพราะว่า $f(\tan \theta) = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 1+x^2$

เพราะว่า $g(\sec \theta) = \sec \theta \tan \theta$

$= \sec \theta \sqrt{\sec^2\theta - 1}$

เพราะฉะนั้น $g(x) = x \sqrt{x^2-1}$

สรุป $(g \circ f)(\sqrt{2}) = g(f(\sqrt{2}))$

$= g(1+2)$

$= g(3)$

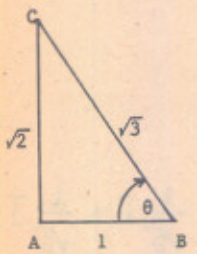
$= 3\sqrt{9-1}$

$= 6\sqrt{2}$

วิธีที่ 2 ใช้อัตราส่วนของด้านสามเหลี่ยมมุมฉากช่วยในการหาค่า

การหาค่า $f(\sqrt{2}) = f(\tan\theta)$; $\tan\theta = \sqrt{2}$

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ



จะได้ $\tan\theta = \sqrt{2}$ และ $\sec\theta = \sqrt{3}$

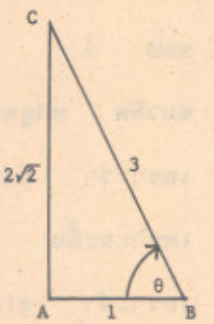
เพราะฉะนั้น $f(\sqrt{2}) = f(\tan\theta)$

$= \sec^2\theta$

$= 3$

การหาค่า $g(3) = g(\sec\theta)$; $\sec\theta = 3$

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ



เพราะว่า $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $g(3) = g(\sec\theta)$

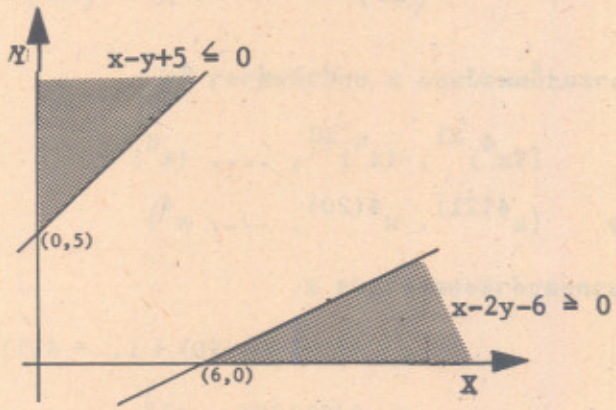
$= \sec\theta \tan\theta$

$= (3)(2\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

สรุป $(g \circ f)(\sqrt{2}) = g(f(\sqrt{2})) = g(3) = 6\sqrt{2}$

22. ตอบ 4.

แนวคิด เขียนรูปเพื่อหาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้



เพราะว่า $A = \{(x,y) \mid x-2y-6 \geqslant 0 \text{ และ } x-y+5 \leqslant 0\} = \phi$

เพราะฉะนั้นไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

สรุป P ไม่มีค่าสูงสุด และ P ไม่มีค่าต่ำสุด

23. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $(a+b)^{21} = \sum_{r=0}^{21} \binom{21}{r} a^{21-r} b^r$

เพราะฉะนั้น $(x^4 - 16)^{21} = \binom{21}{0} (x^4)^{21} + \binom{21}{1} (x^4)^{20} (-16)$

$$+ \binom{21}{2} (x^4)^{19} (-16)^2 + \ldots$$

$$+\binom{21}{20}(x^4)^1(-16)^{20}+\binom{21}{21}(x^4)^0(-16)^{21}$$

เพราะฉะนั้นพจน์ของ x ยกกำลังต่างๆ คือ

$$\{(x^4)^{21}, (x^4)^{20}, \ldots, (x^4)^1\}$$

หรือ $\{x^{4(21)}, x^{4(20)}, \ldots, x^4\}$

ผลบวกของกำลังของตัวแปร x

$$= 4(21) + 4(20) + \ldots + 4(1)$$

$$= 4(21+20+\ldots+1)$$

$$= 4\left(\frac{21}{2}\right)(21+1)$$

$$= 924$$

24. ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\,(A)$

เพราะฉะนั้น $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|} \cdot \text{adj}\,(A^T)$

$$\text{adj}\,(A^T) = |A^T|(A^T)^{-1}$$

$$= |A|(A^{-1})^T$$

$$= |A|\left(\frac{1}{|A|}\,\text{adj}\,(A)\right)^T$$

$$= (\text{adj}\,(A))^T$$

เพราะว่าผลบวกของสมาชิกใน adj (A) และ $(\text{adj}\,(A))^T$ เท่ากัน

เพราะฉะนั้นหาเมตริกซ์ adj (A) ก็จะได้ผลบวกของสมาชิกใน B

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}\,(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{adj}\,(A^T)$$

$$= (\text{adj}\,(A))^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลบวกสมาชิกใน B $= -7+5+8+23-20-12-4+10+1$

$= 4$

วิธีที่ 2 $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}\,(A^T) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

จะได้ $B = \begin{bmatrix} -7 & 23 & -4 \\ 5 & -20 & 10 \\ 8 & -12 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นผลบวกสมาชิกใน B เท่ากับ 4

25. ตอบ 1.

แนวคิด $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -15 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}\,(AB) = \begin{bmatrix} -15 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -15 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a + b + c + d = -15 + 2 - 2 - 3$$

$$= -18$$

26. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) + 4g(x) = 4x^2 - 3$

$f'(x) + 4g'(x) = 8x$ .....(1)

$f''(x) + 4g''(x) = 8$ .....(2)

$xf'(x) - g'(x) = 3x + 1$ .....(3)

$xf''(x) + f'(x) - g''(x) = 3$ .....(4)

จาก (1) ; $f'(0) + 4g'(0) = 0$

จาก (3) ; $-g'(0) = 1$

เพราะฉะนั้น $f'(0) = 4$

จาก (2) ; $f''(0) + 4g''(0) = 8$

จาก (4) ; $f'(0) - g''(0) = 3$

$g''(0) = f'(0) - 3 = 1$

$f''(0) = 8 - 4g''(0) = 4$

เพราะฉะนั้น $f''(0) + g''(0) = 5$

27. ตอบ 4.

แนวคิด <u>ขั้นที่ 1</u> เลือกเลขคู่ 3 ตัวจาก 5 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกเลขคี่ 3 ตัวจาก 5 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> เลข 6 ตัวที่เลือกได้นำมาจัดลำดับได้ 6! วิธี

ขั้นที่ 4 จากเลขตัวแรกไปยังตัวถัดไปมีวิธีการหมุนได้ 2 แบบ

เพราะฉะนั้นทำให้เกิดวิธีต่างกัน 2^5 วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{5}{3}\binom{5}{3} 6! 2^5$

$= (10)(10)(720)(32)$

$= 2304000$

28. ตอบ 1.

แนวคิด $S = \frac{\log 2}{3} + \frac{\log 4}{9} + \frac{\log 8}{27} + \ldots$

$= \frac{\log 2}{3} + \frac{2\log 2}{3^2} + \frac{3\log 2}{3^3} + \ldots$

$= \log 2\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots\right]$

ให้ $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \ldots$ .....(1)

$3A = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots$ .....(2)

(2)-(1) ; $2A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots$

$= \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$A = \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $S = \log 2\,(\frac{3}{4}) = (0.3)(\frac{3}{4}) = 0.225$

29. ตอบ 3.

แนวคิด การนับผลการแข่งขันทั้งหมดที่เป็นไปได้ ต้องพิจารณาดังนี้
เพราะว่าการแข่งขันมีทั้งหมด 6 นัด และแต่ละนัดมีผล 3 แบบ
เพราะฉะนั้นจำนวนผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 3^6 วิธี
เหตุการณ์ที่ทุกทีมมีคะแนนเท่ากันมี 2 กรณีเท่านั้นคือ

$(x,y,z,w) = (3,3,3,3)$

หรือ $(x,y,z,w) = (4,4,4,4)$

กรณี 1 $(x,y,z,w) = (3,3,3,3)$
ผลการแข่งขันในลักษณะนี้เกิดได้ 1 วิธีเท่านั้น ซึ่งเหตุการณ์นั้นคือ
ผลการแข่งขันเสมอกันทั้งหมด 6 นัด

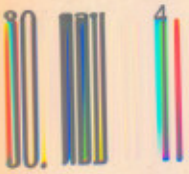
กรณี 2 $(x,y,z,w) = (4,4,4,4)$
เกิดเมื่อทุกทีมมีผลเป็น ชนะ 1 ครั้ง , แพ้ 1 ครั้ง และเสมอ 1 ครั้ง
การนับจำนวนวิธีพิจารณาดังนี้ เนื่องจากการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมดทั้ง 4 ทีม
ดังนั้นการเริ่มต้นนับผลการแข่งขันจะนับจากทีมใดก่อนก็ได้ใน 4 ทีม
ในที่นี้ขอเริ่มต้นที่ทีมสหรัฐ

ขั้นที่ 1 ทีมสหรัฐมีวิธีชนะทีมใดในหนึ่งทีมที่เหลือทำได้ 3 วิธี
ขั้นที่ 2 ทีมสหรัฐมีวิธีที่จะ แพ้ กับทีมที่เหลือได้ 2 วิธี
ขั้นที่ 3 ทีมที่เหลือต้องเสมอกับสหรัฐทำได้ 1 วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 2 เท่ากับ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ทุกทีมได้คะแนนเท่ากันมีค่าเป็น

$$\frac{(1)+(6)}{3^6} = 0.0096$$



แนวคิด เพราะว่า $10! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$

$= 2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot2\cdot5$

$= 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$

สำหรับเลขจำนวนคู่ $x \in A$ เราจะได้ว่า

$[\, x \mid 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ ก็ต่อเมื่อ $x \mid 2^8 \,]$

สำหรับเลขจำนวนคี่ $y \in B$ เราจะได้ว่า

$[\, y \mid 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ ก็ต่อเมื่อ $y \mid 3^4\cdot5^2\cdot7 \,]$

พิจารณาจำนวนวิธีของ $x \in A$ ที่ $x \mid 2^8$ คือ

$x = 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^8$

มีทั้งหมด 8 วิธี

การนับจำนวนของ $y \in B$ ที่ $y \mid 3^4\cdot5^2\cdot7$

<u>ขั้นที่ 1</u> จำนวนพจน์ของ 3 ใน y มี 5 วิธี คือ $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$

<u>ขั้นที่ 2</u> จำนวนพจน์ของ 5 ใน y มี 3 วิธี คือ $5^0, 5^1, 5^2$

<u>ขั้นที่ 3</u> จำนวนพจน์ของ 7 ใน y มี 2 วิธี คือ $7^0, 7^1$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีของ $y \mid 3^4\cdot5^2\cdot7$ คือ $(5)\cdot(3)\cdot(2) = 30$

สรุป $n(S) = (8)\cdot(30) = 240$

ตอนที่ 2 ข้อ 1 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ตอบ -1

แนวคิด
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x}$$

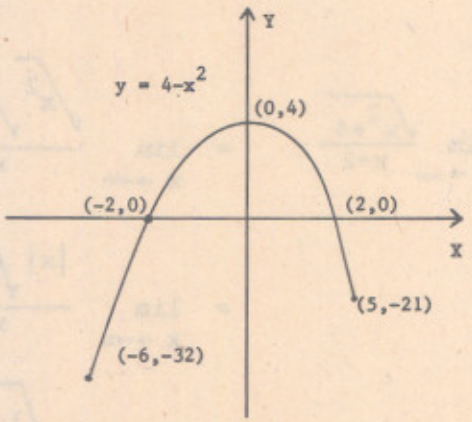
$$= \lim_{x \to -\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{|x|} = 0$$

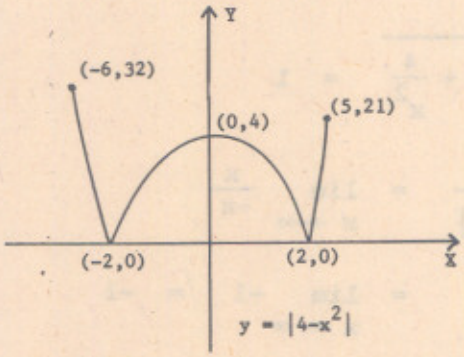
สรุป
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \frac{1}{-1+0} = -1$$

2. ตอบ 32

แนวคิด เพราะว่ากราฟของ $y = 4-x^2$ บนช่วง $[-6,5]$ คือ



เพราะฉะนั้นกราฟของ $f(x) = |4-x^2|$, $x \in [-6,5]$ คือ



ค่าสูงสุดของ f คือ B = 32

ค่าต่ำสุดของ f คือ A = 0

เพราะฉะนั้น A+B = 32

3. ตอบ -1

แนวคิด $x^5-1 = 0$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

เพราะว่า a เป็นรากของสมการ $x^5 = 1$ และ $a \neq 1$

เพราะฉะนั้น $a-1 \neq 0$ และ

$$(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1) = 0$$

ดังนั้น $a^4+a^3+a^2+a+1 = 0$

$$a^4+a^3+a^2+a = -1$$

4. ตอบ 12

แนวคิด $z = 1-i$

$$z^2 = (1-i)^2 = -2i$$

$$z^3 = (1-i)(-2i) = 2i-2$$

$$z^4 = (-2i)^2 = -4$$

เพราะฉะนั้น z^n เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ n เป็น k เท่าของ 4

$$z^4 = -4$$

$$z^8 = 16$$

$$z^{12} = -64$$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด $d = 12$

5. ตอบ 64

แนวคิด ให้ $S_1 = \{f \in B \mid f(1) = 1\}$

$S_2 = \{f \in B \mid f(2) = 2\}$

$S_3 = \{f \in B \mid f(3) = 3\}$

การนับสมาชิกใน S_1

เพราะว่า $f(1) = 1$

เพราะฉะนั้นการส่งค่าของ f จาก {2,3,4,5} ไป {2,3,4,5}

ที่เป็นการจับคู่กันแบบ 1 ต่อ 1 ทำได้ $4! = 24$

เพราะฉะนั้น $n(S_1) = 24$

ในทำนองเดียวกัน $n(S_2) = 24$

$n(S_3) = 24$

จาก $C = \{f \in B \mid f(k) \neq k, k = 1,2,3\}$

$= \{f \in B \mid f(1) \neq 1$ และ $f(2) \neq 2$ และ $f(3) \neq 3\}$

$= \{f \in B \mid f(1) \neq 1\} \cap \{f \in B \mid f(2) \neq 2\} \cap \{f \in B \mid f(3) \neq 3\}$

$= S_1' \cap S_2' \cap S_3'$

$= (S_1 \cup S_2 \cup S_3)'$

เพราะว่า $C = (S_1 \cup S_2 \cup S_3)'$

เพราะฉะนั้น $n(C) = n(B) - n(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

เพราะว่าจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก {1,2,3,4,5} ไป {1,2,3,4,5}

มีเท่ากับ $5!$

เพราะฉะนั้น $n(B) = 5! = 120$

$$n(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = n(S_1) + n(S_2) + n(S_3) - n(S_1 \cap S_2) - n(S_2 \cap S_3) - n(S_1 \cap S_3) + n(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$$

$S_1 \cap S_2 = \{f \in B \mid f(1) = 1 \text{ และ } f(2) = 2\}$

$n(S_1 \cap S_2)$ = จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{3,4,5\}$ ไป $\{3,4,5\}$

$= 3!$

$= 6$

ในทำนองเดียวกัน

$n(S_1 \cap S_3) = n(S_2 \cap S_3) = 6$

$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{f \in B \mid f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3\}$

$n(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$ = จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{4,5\}$ ไป $\{4,5\}$

$= 2!$

$= 2$

เพราะฉะนั้น $n(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 24+24+24-6-6-6+2 = 56$

สรุป $n(C) = n(B) - n(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

$= 120-56$

$= 64$

6. ตอบ 5

แนวคิด $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2-1} = \frac{Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3}{x^2(x^2-1)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{4x^3+x^2-x-1}{x^4-x^2} = \frac{Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3}{x^4-x^2}$

ซึ่งจะได้ว่า $4x^3+x^2-x-1 = Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3$

$= (A+C)x^3 + Bx^2 - Ax - B$

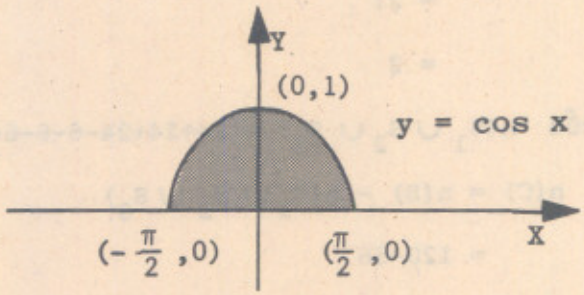
โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ x^3 ; $A+C = 4$

x^2 ; $B = 1$

สรุป $A+B+C = 5$

7. ตอบ 2

แนวคิด เขียนกราฟคูบริเวณ



เพราะฉะนั้น พื้นที่ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

$$= \sin x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1-(-1)$$

$$= 2$$

8. ตอบ 0.4

แนวคิด <u>การหาคะแนนมาตรฐานของศักดิ์เทพ</u>

คณิตศาสตร์ $z = \frac{70-40}{3} = 10$

เคมี $z = \frac{70-45}{4} = 6.25$

ฟิสิกส์ $z = \frac{70-50}{5} = 4$

เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของศักดิ์เทพเท่ากับ

$$A = \frac{10+6.25+4}{3} = 6.75$$

<u>การหาคะแนนมาตรฐานของสุมาลย์</u>

คณิตศาสตร์ $z = \frac{79-40}{3} = 13$

เคมี $z = \frac{70-45}{4} = 6.25$

ฟิสิกส์ $z = \frac{61-50}{5} = 2.2$

เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของสุมาลย์เท่ากับ

$$B = \frac{13+6.25+2.2}{3} = 7.15$$

สรุป $B-A = 7.15 - 6.75$

$= 0.4$

9. ตอบ 0.47

แนวคิด $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} (x_i - \bar{x})^2}{5}$$

$$= \frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$$

$$s = 2\sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{6}$

$$= \frac{1.414}{3}$$

$$= 0.47$$

10. ตอบ 2

แนวคิด รายได้ของนายลำไยในปี 2536 เดือนละ 12000 บาท

อัตราเงินเฟ้อของปี 2536 เทียบกับปี 2526 เท่ากับ 133.6

เพราะฉะนั้นจำนวนเงิน 12000 ในปี 2536

มีค่าเท่ากับเงินในปี 2529 คือ $\frac{12000 \times 100}{133.6} = 8982.04$

เพราะฉะนั้นเงิน 8982.04 บาท ในปี 2529

จะซื้อทองราคาบาทละ 4491.02 ในปี 2529 ได้

เท่ากับน้ำหนักทอง $\frac{8982.04}{4491.02} = 2$ บาท

<u>ตอนที่ 3</u> แสดงข้อพิสูจน์ 10 คะแนน

ให้ $a_1 = a$

$a_2 = a+2$

และ $a_3 = a+4$

ต่อไปเป็นการแสดงว่า $3 \mid a(a+2)(a+4)$

จำแนกตามกรณีของค่า a ดังนี้

$a = \ldots,-5,-2,1,4,7,10,\ldots = 3n+1 \quad , \quad n \in I$

$a = \ldots,-4,-1,2,5,8,11,\ldots = 3n+2 \quad , \quad n \in I$

$a = \ldots,-3,0,3,6,9,12,\ldots = 3n \quad , \quad n \in I$

กรณีที่ 1 $a = 3n \ , \ n \in I$

จะได้ $3 \mid (3n(3n+1)(3n+2))$

กรณีที่ 2 $a = 3n+1 \ , \ n \in I$

$a(a+2)(a+4) = (3n+1)(3n+1+2)(3n+1+4)$

เพราะว่า $3 \mid (3n+3)$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a(a+2)(a+4)$

กรณีที่ 3 $a = 3n+2 \ , \ n \in I$

$a(a+2)(a+4) = (3n+2)(3n+2+2)(3n+4+2)$

$= (3n+2)(3n+4)(3n+6)$

เพราะว่า $3 \mid (3n+6)$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a(a+2)(a+4)$

สรุป $3 \mid a(a+2)(a+4)$ ทุกค่า $a \in I$

ตัวอย่างการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ กข. 2538 ข้อ 43

กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$

โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2, 3)$ 2. $(2, 3]$

3. $(2, \frac{\pi}{2})$ 4. $(2, \frac{\pi}{2}]$

ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{\pi}{2} = 1.57 < 2$

เพราะฉะนั้น $(2, \frac{\pi}{2}) = \phi$ และ $(2, \frac{\pi}{2}] = \phi$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $f(3) = \sqrt{\arcsin(\log_3 3)} + \log_5(3-2)$

$= \sqrt{\arcsin(1)} + 0$

$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

เพราะฉะนั้น 3 ต้องอยู่ในโดเมนของ f

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

สรุปเหลือตัวเลือก 2. ตัวเดียวอีกแล้ว

ตัวอย่างการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ กข. 2538 ข้อ 6

ถ้า $r = \{ (x,y) \mid y \leqslant x^2 \text{ และ } y \geqslant 2x \}$

แล้วเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0 , 2]$
2. $[0 , 4]$
3. $(-\infty , 0] \cup [2 , \infty)$
4. $(-\infty , 0] \cup [4 , \infty)$

ตอบ 3.

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $(2,4) \in r$

เพราะฉะนั้น $(4,2) \in r^{-1}$

นั่นคือ 2 ต้องอยู่ในเรนจ์ของ r^{-1}

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้ง

เพราะว่า $(-1,0) \in r$ เพราะฉะนั้น $(0,-1) \in r^{-1}$

นั่นคือ -1 ต้องอยู่ในเรนจ์ของ r^{-1}

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

สรุปเหลือตัวเลือก 3. ตัวเดียวอีกแล้ว

กรุณาอ่านตัวอย่างการตัดตัวเลือกที่ปกด้านในก่อนตัดสินใจ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 6
เฉลยข้อสอบ ENTRANCE

วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบคณิตศาสตร์ที่มีผู้เข้าสอบมากที่สุดจำนวน 4 ชุด 213 ข้อนั่นคือ

- คณิตศาสตร์ กข. 2538
- คณิตศาสตร์ ก. 2538
- คณิตศาสตร์ (ม.ปลาย) ของสมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2538
- วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

โดยมีแนวทางการเฉลยครบทั้งวิธีจริง วิธีลัด และใช้เหตุผลในการตัดตัวเลือก

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980,2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่ม 6
ISBN 974-632-413-6
9 789746 324137
C112
7010 90.00 บาท