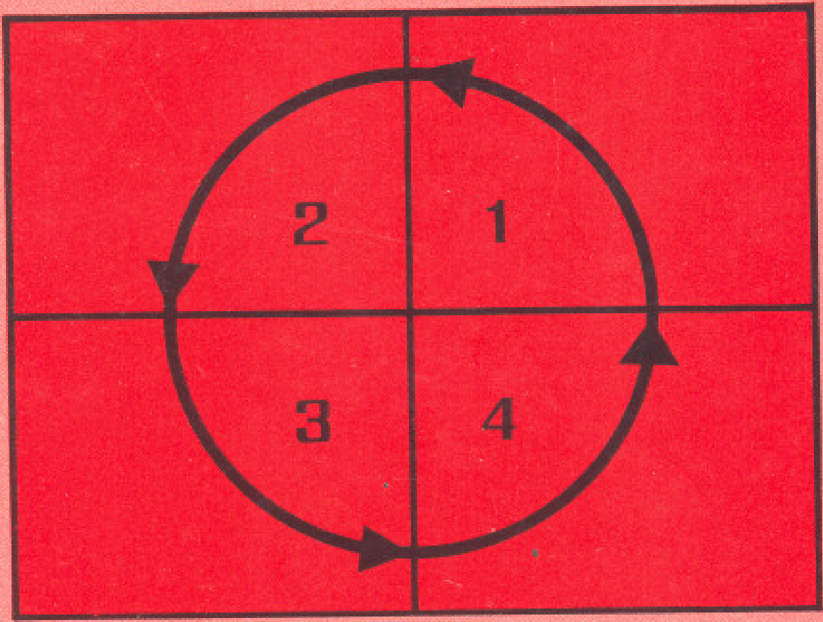
คณิตศาสตร์ปรนัย

คู่มือตัดตัวเลือก



สำหรับข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข.
และข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เล่มที่ 7

ISBN 974-031-222-7

เกี่ยวกับผู้เขียน

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

การศึกษา วท.บ. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วท.ม. (คณิตศาสตร์) จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ที่ทำงาน ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

งานพิเศษ อาจารย์สอนเสริมมหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช (2527-2538)

อาจารย์พิเศษมหาวิทยาลัยหอการค้าไทย (2528-2529)

กรรมการสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2527-2538)

บรรณาธิการวารสารคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ (2535-2536)

ผลงานตำรา ภาษาเบสิก (2531)

คณิตศาสตร์ขั้นสูง (2532)

พีชคณิตระดับอุดมศึกษา (2537)

พีชคณิตเชิงเส้น (2537)

ระเบียบวิธีคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์ (2537)

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO (2538)

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 7

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 7) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

1. คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย

ISBN 974 - 031 - 222 - 7

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 3000 เล่ม พ.ศ. 2538

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980,2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2153612,2153626

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7 **คู่มือตัดตัวเลือก** นี้ผู้เขียนได้รวบรวมแนวคิดในการตัดตัวเลือกของข้อสอบต่างๆที่มีการสอบจริงๆเพื่อผู้อ่านจะได้เกิดทักษะการคิดแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการเร็วที่สุด

สิ่งที่สำคัญที่ผู้อ่านควรทราบก็คือ แนวคิดหรือหลักการตัดตัวเลือกไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอน เพราะว่าการที่เราจะทำการตัดตัวเลือกทิ้งไปได้นั้นต้องประกอบด้วยทั้งข้อสอบและตัวเลือกต้องมีความสอดคล้องกันอย่างไรก็ตามสำหรับข้อสอบ ENTRANCE และข้อสอบแข่งขันต่างๆ ที่ผ่านๆ มาจัดได้ว่าสามารถใช้วิธีตัดตัวเลือกได้ผมจึงได้นำมารวบรวมให้เห็นเป็นตัวอย่างในหนังสือเล่มนี้

พบกันใหม่ในเล่มต่อไป

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย

วิธีจริง	ดีที่สุด
วิธีจริงกับวิธีลัด	ดีที่สุดและเร็วกว่า
วิธีจริงกับวิธีลัดและวิธีตัดตัวเลือก	ดีที่สุดและเร็วที่สุด

สารบัญ

1.

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ข้อสอบในลักษณะนี้มักจะกำหนดโจทย์ในรูปแบบของผลบวก ผลคูณเช่น อนุกรมเลขคณิต อนุกรมเรขาคณิต ผลบวกของฟังก์ชันตรีโกณ ซึ่งอาจเป็นสูตรในพจน์ของ θ หรือ x หรือ n แล้วตัวเลือกก็จะเป็นสูตรในพจน์ของ θ, x หรือ n ด้วย

ดังนั้นเมื่อเราแทนค่า θ, x หรือ n ที่เหมาะสมก็จะสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้

เทคนิคการจำสูตรค่ากำหนด det(A)

$$ceg + afh + bdi$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right|\begin{array}{cc} a & b \\ d & e \\ g & h \end{array}$$

$$aei + bfg + cdh$$

ผลบวกข้างบน = $ceg + afh + bdi$

ผลบวกข้างล่าง = $aei + bfg + cdh$

ค่ากำหนด = ผลบวกข้างล่าง – ผลบวกข้างบน

= ล่าง – บน

= ล – บ

= ลบ

เพราะฉะนั้นขอให้นึกถึงคำว่า ลบ จะทำให้จำง่ายขึ้น

ตัวอย่างที่ 1.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2528

ผลลัพธ์ของ $\frac{1+\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}$ ตรงกับข้อใด

1. 1
2. $1 + \cos x + \sin x$
3. $2 \operatorname{cosec} x$
4. $2 \sec x$

ตอบ 3.

แนวคิด เลือก $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้ค่าของโจทย์

$$\frac{1 + \cos \frac{\pi}{2}}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 + \cos \frac{\pi}{2}} = \frac{1+0}{1} + \frac{1}{1+0} = 2$$

พิจารณาค่าตัวเลือก

1. 1
2. $1 + \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2$
3. $2 \operatorname{cosec} \frac{\pi}{2} = 2$
4. $2 \sec \frac{\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้

เราตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

เลือก $x = \frac{3\pi}{2}$ จะได้ค่าของโจทย์

$$\frac{1 + \cos \frac{3\pi}{2}}{\sin \frac{3\pi}{2}} + \frac{\sin \frac{3\pi}{2}}{1 + \cos \frac{3\pi}{2}} = \frac{1+0}{-1} + \frac{-1}{1-0}$$

$$= -2$$

พิจารณาเฉพาะตัวเลือก 2. กับ 3. เท่านั้น

2. $1 + \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 = 0$

3. $2\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -2$

ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีกแล้ว

ตัวอย่างที่ 1.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

$\dfrac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{\tan\theta - \sin\theta\cos\theta}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\cot^2\theta$
2. $2\cot\theta$
3. $2\cos^2\theta\sec^2\theta$
4. $2\cos\theta\operatorname{cosec}\theta$

ตอบ 1.

แนวคิด เลือก $\theta = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6})^2 - 1}{\tan\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \frac{\frac{1}{4} + 2(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{3}{4} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{4-3}{4\sqrt{3}})}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{1}{4\sqrt{3}})}$$

$$= 6$$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{6}$ ในตัวเลือก

1. $2\cot^2\frac{\pi}{6} = 2(\sqrt{3})^2 = 6$

2. $2\cot\frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$

3. $2\cos^2\frac{\pi}{6}\ \sec^2\frac{\pi}{6} = 2(\frac{3}{4})(\frac{4}{3}) = 2$

4. $2\cos\frac{\pi}{6}\ \mathrm{cosec}\frac{\pi}{6} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(2) = 2\sqrt{3}$

สรุปเราตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

ข้อสังเกต 1. เพราะว่า $2\cos\theta\ \mathrm{cosec}\,\theta = 2\cot\theta$ ตัวเลือก 2. และ 4. เหมือนกัน

2. ตัวเลือก 2. เป็นค่าคงตัวเนื่องจาก

$$2\cos^2\theta\ \sec^2\theta = 2$$

ด้วยเหตุผลแบบนี้เราอาจตัดตัวเลือก 2. 3. 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.4 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0,1$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว

$f(\sec^2\theta)$ มีค่าเท่าใด

1. $\sin^2\theta$ 2. $\cos^2\theta$

3. $\tan^2\theta$ 4. $\cot^2\theta$

ตอบ 1.

แนวคิด เลือก $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $\sec\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$

$$f(\sec^2\frac{\pi}{4}) = f(2) = f(\frac{2}{2-1}) = \frac{1}{2}$$

ลองแทนค่าที่ตัวเลือก

1. $\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

2. $\cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

3. $\tan^2\frac{\pi}{4} = 1$

4. $\cot^2\frac{\pi}{4} = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เลือก $\theta = \frac{\pi}{3}$ จะได้ $\sec^2\frac{\pi}{3} = 2^2 = 4$

$$f(\sec^2\frac{\pi}{3}) = f(4) = f\left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}-1}\right) = \frac{1}{(\frac{4}{3})} = \frac{3}{4}$$

แทนค่าเฉพาะตัวเลือก 1. และ 2.

1. $\sin^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4}$

2. $\cos^2 \frac{\pi}{3} = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.5 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $f(x) = x|x|$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

1. $|x|\sqrt{|x|}$
2. $\frac{1}{x|x|}$
3. $\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$
4. $\sqrt{x|x|}$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2}$

แทนค่า $x = \frac{1}{4}$ ในตัวเลือก

1. $|\frac{1}{4}|\sqrt{|\frac{1}{4}|} = \frac{1}{8}$

2. $\frac{1}{(\frac{1}{4})|\frac{1}{4}|} = 16$

3. $\frac{|\frac{1}{4}|\sqrt{|\frac{1}{4}|}}{(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2}$

4. $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.6 ข้อสอบแข่งขัน

จงหาตำแหน่งของจำนวนจริง θ บนวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่ง

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1$$

1. อยู่บนเส้นตรง $y = x$
2. อยู่บนแกน X
3. อยู่บนแกน Y
4. อยู่บนกราฟพาราโบลา $y^2 = x$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ ทำให้ $\sin^4\frac{\pi}{2} - \cos^4\frac{\pi}{2} = 1$

และตำแหน่ง $\theta = \frac{\pi}{2}$ ไม่อยู่บนแกน X และไม่อยู่บนเส้นตรง $y = x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\theta = (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, $n \in I$ จะอยู่บนแกน Y

และ $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1-0 = 1$

ดังนั้นเราเลือกตัวเลือก 3. ได้เลย

หมายเหตุ ลองคิดตัวเลือก 4. ดูบ้างก็ได้

หาจุดตัดของ $x^2+y^2 = 1$ และ $y^2 = x$ ได้โดย

$$x^2+x = 1$$

$$x^2+x-1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ จะได้ $y^2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ และ $y^4 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4}$

$$x^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \quad \text{และ} \quad x^4 = \frac{36+24\sqrt{5}+20}{16}$$

$$= \frac{56+24\sqrt{5}}{16}$$

$$= \frac{14+6\sqrt{5}}{4}$$

ดังนั้น $x^4 - y^4 \neq 1$

นั่นคือ θ ไม่อยู่บนจุดตัดของวงกลมหนึ่งหน่วยกับพาราโบลา

ตัวอย่างที่ 1.7 ข้อสอบแข่งขัน

สามเหลี่ยม ABC มี a,b,c เป็นด้านตรงข้ามมุม A,B และ C ตามลำดับ และวงกลมที่ล้อมรอบมีรัศมี R จงเขียน $\dfrac{a+b+c}{2R}$ ในรูปของมุม A และ B

1. $\dfrac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin (A+B)$

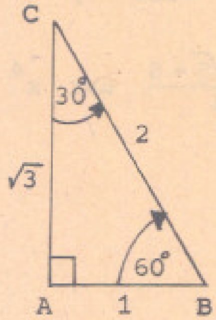
2. $\dfrac{a+b+c}{2R} = \dfrac{\sin A \sin B \sin (A+B)}{\sin A + \sin B + \sin (A+B)}$

3. $\dfrac{a+b+c}{2R} = \dfrac{\sin A + \sin B - \sin (A+B)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A+B)}$

4. $\dfrac{a+b+c}{2R} = \dfrac{\sin A + \sin B + \sin (A+B)}{2\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A+B)}}$

ตอบ 1.

แนวคิด ลองกับรูปสามเหลี่ยม



$a+b+c = 3+\sqrt{3}$

ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นวงกลมล้อมรอบมีรัศมี R = 1

เพราะฉะนั้น $\dfrac{a+b+c}{2R} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

แทนค่าในแต่ละตัวเลือกด้วยค่าใน Δ ABC ข้างต้น

1. $\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin(90^\circ+60^\circ) = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}$

$= \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

2. $\dfrac{\sin 90^\circ \sin 60^\circ \sin(90^\circ+60^\circ)}{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin(90^\circ+60^\circ)} = \dfrac{(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2})}{(\frac{3+\sqrt{3}}{2})}$

$= \dfrac{(\sqrt{3})(2)}{(4)(3+\sqrt{3})}$

$\neq \dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

3. $$\frac{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ - \sin (90^\circ+60^\circ)}{\sin^2 90^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin (90^\circ+60^\circ)} = \frac{(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2})}{1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3})}{2}$$

$$\neq \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

4. $$\frac{\sin 90^\circ + \sin 60^\circ + \sin (90^\circ+60^\circ)}{2\sqrt{\sin^2 90^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin (90^\circ+60^\circ)}} = \frac{(\frac{3 + \sqrt{3}}{2})}{2\sqrt{2}}$$

$$\neq \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.8 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \geqslant 0$ และ $b \geqslant 0$ ข้อใดถูกต้อง

1. $\frac{a + b}{2} = ab$
2. $\frac{a + b}{2} \leqslant ab$
3. $\frac{a + b}{2} \neq ab$
4. $\frac{a + b}{2} \leqslant ab$

ตอบ 4.

แนวคิด ลอง $a = 2$ และ $b = 8$

$$\frac{2 + 8}{2} = 5 \text{ และ } \sqrt{(2)(8)} = 4$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 2. ผิดเราจึงตัดทิ้งได้

เลือก a = 2 และ b = 2 จะได้

$$\frac{2+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{(2)(2)}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.9 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \in I^+$ ให้ D_n แทนช่วงเปิด

โดยที่ $D_n = (0, \frac{1}{n})$

ถ้า $s < t$ แล้ว $D_s \cup D_t$ เท่ากับข้อใด

1. $D_s \cap D_t$
2. D_t
3. D_s
4. D_t'

ตอบ 3.

แนวคิด ลองแทนค่า s = 1 และ t = 2

จากโจทย์ $D_s = D_1 = (0,1)$

$D_t = D_2 = (0, \frac{1}{2})$

$D_s \cup D_t = (0,1)$

พิจารณาค่าในตัวเลือก

1. $D_s \cap D_t = (0, \frac{1}{2}) \neq (0,1)$
2. $D_t = (0, \frac{1}{2}) \neq (0,1)$
3. $D_s = (0,1)$
4. $D_t' \neq (0,1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 1.10 ข้อสอบ ENTRANCE

ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$ และ $\overrightarrow{BC} = \bar{w}$

พื้นที่ของสามเหลี่ยมเท่ากับ

1. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{v}\cdot\bar{v})(\bar{w}\cdot\bar{w}) - (\bar{v}\cdot\bar{w})^2}$

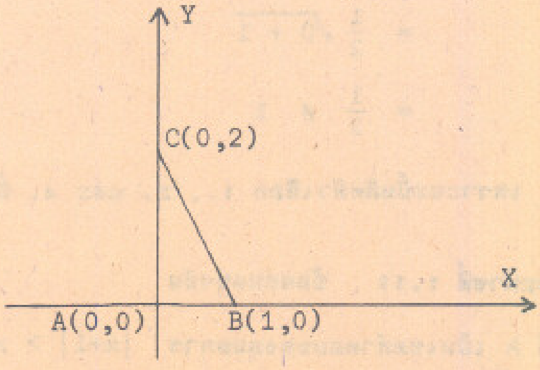
2. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v}) + (\bar{w}\cdot\bar{w})^2}$

3. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v}) + (\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{v})(\bar{v}\cdot\bar{w}) + (\bar{u}\cdot\bar{w})^2}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรใช้เลือกกรณีตัวอย่างเช่น



ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมดังภาพ

$\bar{u} = \overrightarrow{AB} = \bar{i}$, $\bar{v} = \overrightarrow{AC} = 2\bar{j}$ และ $\bar{w} = \overrightarrow{BC} = -\bar{i} + 2\bar{j}$

พ.ท. Δ ABC $= \frac{1}{2}(1)(2) = 1$

แทนค่า $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ ในตัวเลือก

1. $\frac{1}{2}\sqrt{(2\bar{j}\cdot 2\bar{j})((-\bar{i}+2\bar{j})\cdot(-\bar{i}+2\bar{j})) - (\bar{j}\cdot(-\bar{i}+2\bar{j}))^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(4)(5)-4} = 2 \neq 1$$

2. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{i}\cdot\bar{i})(2\bar{j}\cdot 2\bar{j}) + ((-\bar{i}+2\bar{j})(-\bar{i}+2\bar{j}))^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(1)(4)+25} \neq 1$$

3. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{i}\cdot\bar{i})(2\bar{j}\cdot 2\bar{j}) + (\bar{i}\cdot 2\bar{j})^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

4. $\frac{1}{2}\sqrt{(\bar{i}\cdot 2\bar{j})(2\bar{j}\cdot(-\bar{i}+2\bar{j}) + (\bar{i}\cdot(-\bar{i}+2\bar{j}))^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{0+1}$$

$$= \frac{1}{2} \neq 1$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.11 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x+1| > x + |x-1|$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซต A

1. $\forall x[|x+3| < 1]$
2. $\forall x[\frac{x(x+3)^2}{x-1} < 0]$
3. $\forall x[x^2-4 > 0]$
4. $\forall x[(x-5)|x| < 0]$

ตอบ 4.

แนวคิด จากโจทย์ $x = 1$ ได้ แสดงว่า $1 \in A$
พิจารณาตัวเลือก

1. เป็นเท็จ , เพราะว่า $|1+3| \nless 1$

2. เป็นเท็จ , เพราะว่า $\frac{x(x+3)^2}{x-1}$ หาค่าไม่ได้

3. เป็นเท็จ , เพราะว่า $0-4 \ngtr 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.12 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{A + B \cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

แล้ว $A + B$ เท่ากับข้อใด

1. 1	2. 3
3. 2	4. 4

ตอบ 2.

แนวคิด ลองแทนค่า $x = 0$ จะได้

$$\frac{1 + \tan 0}{1 - \tan 0} = \frac{A + B \cos 0 \sin 0}{\cos^2 0 - \sin^2 0}$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$

ลองแทนค่า $x = \frac{\pi}{3}$

$$\frac{1+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{3}} = \frac{1+B\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1+B(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{4+\sqrt{3}B}{-2}$$

$$\frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = \frac{4+\sqrt{3}B}{-2}$$

$$4+2\sqrt{3} = 4+\sqrt{3}B$$

เพราะฉะนั้น $B = 2$

สรุป $A + B = 3$

ตัวอย่างที่ 1.13 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ข้อความในข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = |\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2$

2. $\bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{4}(|\bar{u}+\bar{v}|^2 - |\bar{u}-\bar{v}|^2)$

3. $\frac{1}{2}|\bar{u}-\bar{v}| = |\sin\frac{1}{2}\theta|$

4. $\frac{1}{2}|\bar{u}-\bar{v}| = |\sin^2\frac{\theta}{2}|$

ตอบ 4.

แนวคิด เลือก $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = \bar{j}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ลองแทนค่าในตัวเลือก

1. $(\bar{i} + \bar{j})\cdot(\bar{i} - \bar{j}) = 0 = |\bar{i}|^2 - |\bar{j}|^2$

2. $\bar{i} \cdot \bar{j} = 0$

   $\frac{1}{4}(|\bar{i} + \bar{j}|^2 - |\bar{i} - \bar{j}|^2) = 0$

3. $\frac{1}{2}|\bar{i} - \bar{j}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

   $|\sin\frac{\pi}{4}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\frac{1}{2}|\bar{i} + \bar{j}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

   $|\sin^2\frac{\pi}{4}| = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

ตัวอย่างที่ 1.14 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า Δ มีมุมเป็น A, B, C และมีด้านตรงข้ามมุมเป็น a, b, c ตามลำดับ

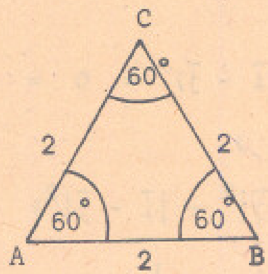
กำหนด S = พ.ท.ของ $\triangle$ จงหา $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$

1. $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$ 2. $\dfrac{(a + b + c)^2}{4S}$

3. $\dfrac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}$ 4. $\dfrac{(ab + bc + ca)^2}{4S}$

ตอบ 2.

แนวคิด เลือกสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



$$a = b = c = 2 \quad , \quad \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{3}$$

แทนค่าในโจทย์ $\quad S = \frac{1}{2}(2)(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

$$\cot\frac{\hat{A}}{2} + \cot\frac{\hat{B}}{2}\cot\frac{\hat{C}}{2} = \cot\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{6}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

พิจารณาค่าจากตัวเลือก

1. $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S} = \dfrac{4+4+4}{4\sqrt{3}} = \dfrac{12}{4\sqrt{3}} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \neq 3\sqrt{3}$

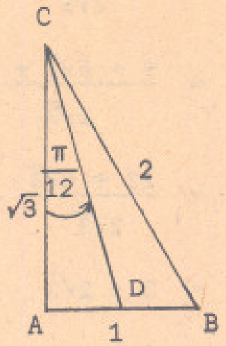
2. $\dfrac{(a+b+c)^2}{4S} = \dfrac{(2+2+2)^2}{4\sqrt{3}} = \dfrac{36}{4\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$

3. $\dfrac{3(a^2+b^2+c^2)}{4S} = 3\sqrt{3}$

4. $\dfrac{(ab+bc+ca)^2}{4S} = \dfrac{(4+4+4)^2}{4\sqrt{3}} \neq 3\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือกสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ



$a = 2\ ,\ b = \sqrt{3}\ ,\ c = 1$

$\hat{A} = \frac{\pi}{2}\ ,\ \hat{B} = \frac{\pi}{3}\ ,\ \hat{C} = \frac{\pi}{6}$

$S = \frac{1}{2}(1)(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cot\frac{\hat{A}}{2} + \cot\frac{\hat{B}}{2} + \cot\frac{\hat{C}}{2} = \cot\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{12}$$

$$= 1 + \sqrt{3} + \cot\frac{\pi}{12}$$

อยากรู้ $\cot\frac{\pi}{12}$ เท่ากับเท่าไรจะพิสูจน์สูตรตรีโกณก็ได้ แต่ขณะนี้ขอให้ลองลากเส้นแบ่งครึ่งมุม C มาตัดด้าน AB ที่ D โดยการวัด AD ยาว 0.5

เพราะฉะนั้น $\cot\frac{\pi}{12} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{AC}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{0.5} = 2\sqrt{3}$

ดังนั้นค่าจากโจทย์ $\cot\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{6} + \cot\frac{\pi}{12} \simeq 1 + 3\sqrt{3} = 6.2$

ดูที่ตัวเลือกที่เหลือ

2. $$\frac{(2+\sqrt{3}+1)^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{(3+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9+6\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12+6\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 3+2\sqrt{3}$$

$$= 6.5$$

3. $$\frac{3(2\sqrt{3}+\sqrt{3}+2)^2}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{3(2+3\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(4+12\sqrt{3}+27) > 26$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

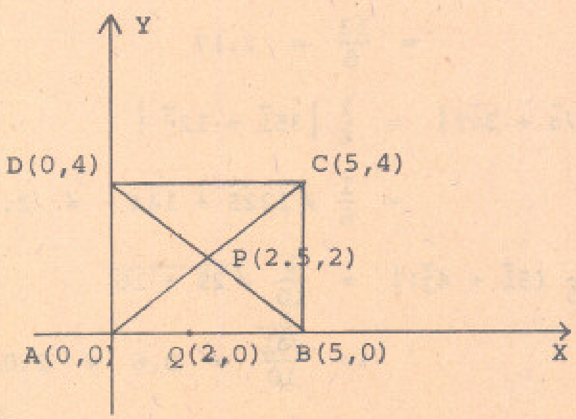
ตัวอย่างที่ 1.15 ข้อสอบแข่งขัน

ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน P เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกัน จุด Q อยู่บนด้าน AB ทำให้ AQ : QB = 2 : 3 ถ้าให้ $\bar{u}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\bar{v}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ แล้ว $\overrightarrow{PQ}$ เท่ากับ

1. $\frac{1}{6}(\bar{u} - 3\bar{v})$
2. $\frac{1}{6}(7\bar{u} + 3\bar{v})$
3. $-\frac{1}{10}(\bar{u} + \bar{v})$
4. $\frac{1}{10}(\bar{u} + 5\bar{v})$

ตอบ 4.

แนวคิด เลือกพิกัดของ A,B,C และ D ให้คิดเลขง่ายๆ แล้วเขียนรูปได้เลย



หมายเหตุ สี่เหลี่ยมผืนผ้าก็เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังนั้นเราสามารถนำมาช่วยตัดตัวเลือกได้

โดยการเลือกค่าให้เหมาะสมดังภาพ

$$\bar{u} = \overrightarrow{AB} = 5\bar{i}$$

$$\bar{v} = \overrightarrow{AD} = 4\bar{j}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0.5\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \simeq \frac{4.12}{2} = 2.06$$

ลองดูขนาดของเวกเตอร์ในตัวเลือก

1. $\left|\frac{1}{6}(\bar{u} - 3\bar{v})\right| = \left|\frac{1}{6}(5\bar{i} - 12\bar{j})\right| = \frac{1}{6}\sqrt{25 + 144}$

$$= \frac{13}{6} = 2.17$$

2. $\left|\frac{1}{6}(7\bar{u} + 3\bar{v})\right| = \frac{1}{6}\left|35\bar{i} + 12\bar{j}\right|$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{1225 + 144} \neq 2.06$$

3. $\left|-\frac{1}{10}(5\bar{i} + 4\bar{j})\right| = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 16}$

$$= \frac{\sqrt{41}}{10} = 0.6 \neq 2.06$$

4. $\left|\frac{1}{10}(5\bar{i} + 20\bar{j})\right| = \frac{1}{10}\sqrt{25 + 40} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

จากตัวอย่างของสี่เหลี่ยม ABCD ข้างต้นเพียงพอที่จะสรุปได้ว่า ตัวเลือก 1, 2, 3 ผิดแน่นอน เราจึงตัดทิ้งได้

หมายเหตุ ดูเครื่องหมายของสัมประสิทธิ์ $\bar{i}$ กับ $\bar{j}$ ก็ได้

	$\bar{i}$	$\bar{j}$
$\overrightarrow{PQ}$	+	+
ตัวเลือก 1	+	-
ตัวเลือก 2	+	+
ตัวเลือก 3	-	-
ตัวเลือก 4	+	+

จากตารางเครื่องหมายนี้ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้
ต่อไปดูเฉพาะสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 1.16 ข้อสอบแข่งขัน

$-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(2n+1)$
2. $-n(2n+1)$
3. $n(2n-1)$
4. $-n(2n-1)$

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้เข้าลักษณะโจทย์เป็นสูตรตัวเลือกเป็นสูตรอย่างชัดแจ้ง

ลองเลือก $n = 1$ จะได้ $-1^2 + 2^2 = -1 + 4 = 3$

ดูที่ตัวเลือกเมื่อ $n = 1$

1. $(1)(2(1)+1) = 3$

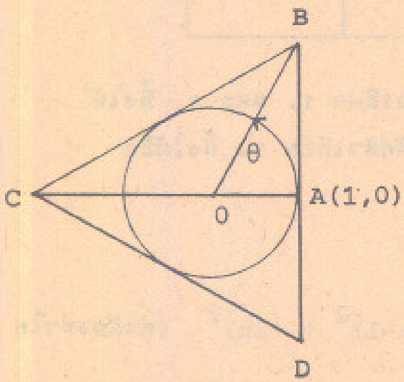
2. $-(1)(2(1)+1) = -3 \neq 3$

3. $(1)(2(1)-1) = 1 \neq 3$

4. $-(1)(2(1)-1) = -1 \neq 3$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.17 ข้อสอบแข่งขัน

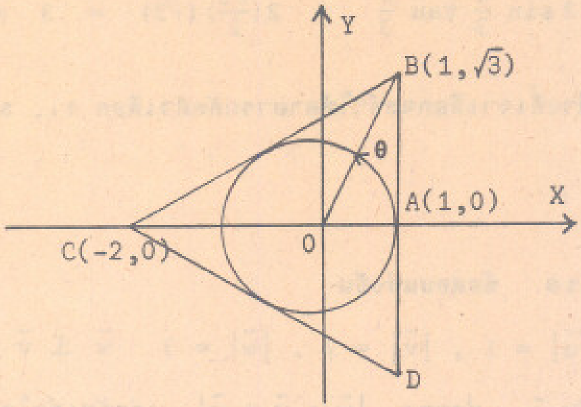


จากรูป BD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง BD สัมผัสวงกลมที่จุด A(1,0) OB ทำมุม θ เรเดียน กับ OA โดยที่ $\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ BC และ DC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งพบส่วนต่อของ AO ที่ C พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. $2\cos\theta \cot\theta$
2. $-\tan^2\theta \tan 2\theta$
3. $-\tan^2\theta \cot 2\theta$
4. $2\sin\theta \tan\theta$

ตอบ 2.

แนวคิด ข้อนี้โจทย์เป็นสูตรกำหนดโดยใช้รูปประกอบและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ θ เพื่อให้งานง่ายขึ้นเราเอาแกน X ทับเส้น CA และแกน Y ผ่านจุด O



เลือกให้ OB ยาว ๒ หน่วย จะได้ $O\hat{B}A = \frac{\pi}{3}$ และสามเหลี่ยม BCD เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าโดยมีพิกัด C เป็น (-2,0)

จากโจทย์เมื่อ $B\hat{O}A = \frac{\pi}{3}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{3}$ ด้วย

เพราะว่าพื้นที่ Δ BCD เท่ากับ $\frac{1}{2} \cdot$ ฐาน $\cdot$ สูง

$$= \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AC$$

$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3})(3)$$

$$= 3\sqrt{3}$$

ต่อไปเอา $\theta = \frac{\pi}{3}$ แทนในตัวเลือก

๑. $2\cos\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} = 2(\frac{1}{2})(\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 3\sqrt{3}$

๒. $-\tan^2\frac{\pi}{3}\tan\frac{2\pi}{3} = (-1)(\sqrt{3})^2(-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

๓. $-\tan^2\frac{\pi}{3}\cot\frac{2\pi}{3} = (-1)(\sqrt{3})^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 3\sqrt{3}$

$$4. \quad 2\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3}\right) = 3 \neq 3\sqrt{3}$$

จากกรณีตัวอย่างที่เราเลือกจะทำให้สามารถตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.18 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{w}| = 3$ $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$ 2. $2\sqrt{5}$

3. 5 4. 20

ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์ข้อนี้เข้ากฎเกณฑ์ของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นเราเพียงแต่เลือก $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้ ตัวอย่างเช่นเลือก

$$\bar{u} = \bar{i}$$

$$\bar{v} = 2\bar{j}$$

$$\bar{w} = 3\bar{i}$$

จะได้ว่า $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{w}| = 3$ และ $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

พิจารณาค่า $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}| = |\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{i}| = |4\bar{i} + 2\bar{j}|$

$$= \sqrt{16 + 4}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

จากเหตุผลเพียงเท่านี้เราตัดตัวเลือก 1. 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.19 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ U ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถ้า $A - B = B$ แล้ว $A \cap B = \phi$
2. ถ้า $A - B = A$ แล้ว $A \cap B \neq \phi$
3. ถ้า $A \subset B \cup C$ แล้ว $B' \cup C' \subset A'$
4. ถ้า $A \subset B \cap C$ แล้ว $A' \subset B' \cup C'$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์แบบนี้ใช้ยกตัวอย่างเซตก็สามารถตัดตัวเลือกทิ้ง หรือบางครั้งอาจได้คำตอบที่ต้องการเลยก็ได้ เช่น เลือก $A = U$, $B = \phi$, $C = U$

1. ถ้า $U - \phi = \phi$ แล้ว $U \cap \phi = \phi$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ถ้า $U - \phi = U$ แล้ว $U \cap \phi \neq \phi$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. ถ้า $U \subset \phi \cup U$ แล้ว $U \cup \phi \subset \phi$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. ถ้า $U \subset \phi \cap U$ แล้ว $\phi \subset U \cup \phi$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปลองเลือก $U = \{1,2,3\}$, $A = \{1\}$, $B = \{1,2\}$, $C = U$

เราพิจารณาเฉพาะตัวเลือก 1. กับ 4.

1. $A - B = \phi$, $B = \{1,2\}$

เพราะฉะนั้น (ถ้า $A-B = B$ แล้ว $A \cap B = \phi$) มีค่าความจริงเป็นจริง

4. $A = \{1\}$, $B \cap C = \{1,2\}$, $A' = \{2,3\}$, $B' \cup C' = \{1$

เพราะฉะนั้น (ถ้า $A \subset B \cap C$ แล้ว $A' \subset B' \cup C'$) มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

หมายเหตุ 1. การทำโจทย์ที่ถามว่าตัวเลือกใดต่อไปนี้ผิด หรือตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง วิธีทำส่วนใหญ่ก็ต้องทำการยกตัวอย่างแสดง หรือต้องทำการพิสูจน์ข้อความ

2. จากตัวเลือก 1. ถ้าจำสูตรได้จะพบว่า

$$A - B = A \cap B' \subset B'$$

เพราะฉะนั้น $A - B = B$ เป็นเท็จเสมอ

ดังนั้น (ถ้า $A-B = B$ แล้ว $A \cap B = \phi$) เป็นจริงเสม

ตัวอย่างที่ 1.20 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $x, y \in R^+$ ค่าน้อยที่สุดของ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1　　　　2. 4

3. 6　　　　4. 8

ตอบ 2.

แนวคิด ลองเลือก $x = y = 1$ แทนค่าในโจทย์ จะได้

$$\frac{(1)^2(1) + (1) + (1)(1)^2 + (1)}{(1)(1)} = 4$$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อนได้

ที่เหลือก็คือตัวเลือก 1. และ 2. ต้องเดา

หมายเหตุ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} \geqslant 4$ ทุกค่า $x, y \in R^+$

พิสูจน์ได้ดังนี้

$$\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} = (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y})$$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned} (k - 1)^2 &\geqslant 0 \\ k^2 - 2k + 1 &\geqslant 0 \\ k^2 + 1 &\geqslant 2k \\ k + \frac{1}{k} &\geqslant 2 \quad \text{ทุกค่า } k \in R^+ \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) \geqslant 2 + 2 = 4$

นั่นคือ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} \geqslant 4$ เสมอ

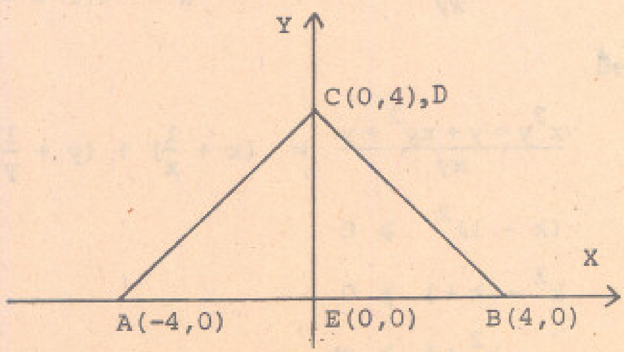
ตัวอย่างที่ 1.21 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ลาก BD ตั้งฉากกับด้าน AC และ CE ตั้งฉากกับด้าน AB ถ้าให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แทนเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$ ตามลำดับ แล้วเวกเตอร์ $\overrightarrow{DE}$ จะเท่ากับ

1. $(\bar{u}\cdot\bar{v})\left(\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} - \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right)$
2. $(\bar{u}\cdot\bar{v})\left(\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} + \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right)$
3. $(\bar{u}\cdot\bar{v})\left(\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} + \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)$
4. $(\bar{u}\cdot\bar{v})\left(\dfrac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)$

ตอบ

แนวคิด จากคำว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง เราเลือกเป็นสามเหลี่ยมดังรูป เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้เลย



ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าดังภาพ

$BD \perp AC$ และ $CE \perp AB$

จะได้พิกัด E(0,0) และ C กับ D เป็นจุดเดียวกัน

$$\bar{u} = \overrightarrow{AB} = 8\bar{i} \quad , \quad |\bar{u}|^2 = 64$$

$\bar{v} = \overrightarrow{AC} = 4\bar{i} + 4\bar{j}$, $|\bar{v}|^2 = 32$

$\overrightarrow{DE}$ คือ $-4\bar{j}$

$\bar{u} \cdot \bar{v} = 32$

พิจารณาตัวเลือก

1. $(\bar{u} \cdot \bar{v})\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right) = 32\left(\frac{\bar{u}}{64} - \frac{\bar{v}}{32}\right)$

$= \frac{\bar{u}}{2} - \bar{v}$

$= 4\bar{i} - 4\bar{i} - 4\bar{j}$

$= -4\bar{j}$

2. $(\bar{u} \cdot \bar{v})\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|^2} + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\right) = 32\left(\frac{\bar{u}}{64} + \frac{\bar{v}}{32}\right)$

$= \frac{\bar{u}}{2} + \bar{v}$

$\neq -4\bar{j}$

3. $(\bar{u} \cdot \bar{v})\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right) = 32\left(\frac{\bar{u}}{8} + \frac{\bar{v}}{\sqrt{32}}\right)$

$\neq -4\bar{j}$

4. $(\bar{u} \cdot \bar{v})\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right) \neq 4\bar{j}$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2., 3, และ 4. ทิ้งได้

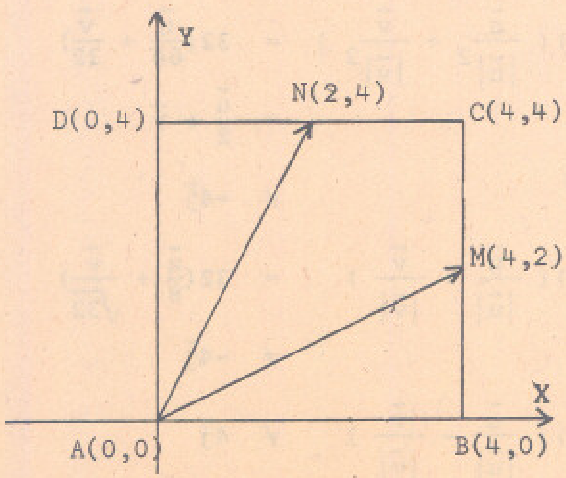
ตัวอย่างที่ 1.22 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M,N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ CD ตามลำดับ ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{AM}$ และ $\bar{v} = \overrightarrow{AN}$ แล้ว $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$
2. $\frac{3}{2}\bar{u} - \bar{v}$
3. $\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$
4. $\frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v}$

ตอบ 4.

แนวคิด เขียนรูปในพิกัดมุมฉากเพื่อหาเวกเตอร์ต่างๆ ซึ่งในการตัดตัวเลือกนั้นเราสามารถใช้รูปนี้ได้



จากกราฟ $\bar{u} = \overrightarrow{AM} = 4\bar{i} + 2\bar{j}$

$\bar{v} = \overrightarrow{AN} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$

และ $\overrightarrow{AB} = 4\bar{i}$

ต่อไปดูที่ตัวเลือก

1. $\frac{3}{2}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v} = (\frac{3}{2}(4) - 1)\bar{i} + (\frac{3}{2}(2) - 2)\bar{j}$

$= 5\bar{i} + \bar{j}$

$\neq \overrightarrow{AB}$

2. $\frac{3}{2}\bar{u} - \bar{v} = (\frac{3}{2}(4) - 2)\bar{i} + (\frac{3}{2}(2) - 4)\bar{j}$

$= 4\bar{i} - \bar{j}$

$\neq \overrightarrow{AB}$

3. $\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v} = (\frac{2}{3}(4) - 1)\bar{i} + (\frac{2}{3}(2) - 2)\bar{j}$

$\neq \overrightarrow{AB}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1., 2. และ 3. ตัดทิ้งได้

ลองดูตัวเลือก 4. บ้าง

$$\frac{4}{3}\bar{u} - \frac{2}{3}\bar{v} = (\frac{4}{3}(4) - (\frac{2}{3})2)\bar{i} + (\frac{4}{3}(2) - (\frac{2}{3})4)\bar{j}$$

$$= 4\bar{i}$$

$$= \overrightarrow{AB}$$

หมายเหตุ วิธีจริงต้องใช้การจัดรูป

ตัวอย่างที่ 1.23 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข.

กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้ $\cos\theta$ เป็นเท่าใด

1. $1 - \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
2. $1 + \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
3. $-1 + \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
4. $-1 - \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้จัดอยู่ในประเภทโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นเรายกตัวอย่างเวกเตอร์บางตัวก็จะตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = i$, $\bar{v} = i$ จะได้มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\theta = 0$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta$ จากโจทย์มีค่าเท่ากับ 1

พิจารณาค่าในตัวเลือก

เนื่องจาก $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = 0$

เพราะฉะนั้นค่าที่เหลือในตัวเลือกเป็นดังนี้

1. 1
2. 1
3. -1
4. -1

สรุปขณะนี้เราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือก $\bar{u} = \bar{i}$ และ $\bar{v} = \bar{j}$

มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งทำให้ $\cos\theta = 0$

พิจารณาเฉพาะตัวเลือก 1. และ 2.

$$1.\quad 1 - \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} - \frac{\bar{j}}{|\bar{j}|}\right)\right|^2 = 1 - \frac{1}{2}\left|(\bar{i} - \bar{j})\right|^2$$

$$= 1 - 1$$

$$= 0$$

$$2.\quad 1 + \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{i}}{|\bar{i}|} - \frac{\bar{j}}{|\bar{j}|}\right|^2 = 1 + \frac{1}{2}\left|(\bar{i} - \bar{j})\right|^2$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

การพิสูจน์ว่า $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

ให้ $\bar{a}, \bar{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

$$\cos\theta = \frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \bar{a}\cdot\bar{b}$$

พิจารณา $|\bar{a} - \bar{b}|^2 = |a|^2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + |\bar{b}|^2$

$$= 1 - 2\bar{a}\cdot\bar{b} + 1$$

$$= 2 - 2\bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$2\bar{a}\cdot\bar{b} = 2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 1 - \frac{1}{2}|\bar{a} - \bar{b}|^2$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}|\bar{a} - \bar{b}|^2$$

ให้ $\bar{a} = \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ และ $\bar{b} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

มุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เท่ากับมุมระหว่าง $\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}$ กับ $\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

เพราะฉะนั้น $$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$$

2.

เหตุผลเกี่ยวกับควอดรันท์

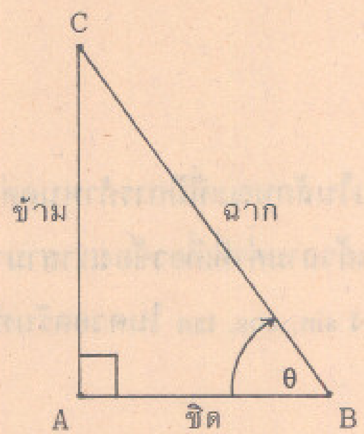
ข้อสอบในลักษณะที่มีการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณหรือมุม แล้วถามค่าที่เกี่ยวข้องเราสามารถใช้เหตุผลเกี่ยวกับเครื่องหมายของ sin, cos, tan ในควอดรันท์ต่างๆ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ข้อสังเกต เครื่องหมายของ sin $\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array}$

เครื่องหมายของ cos $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array}$

เครื่องหมายของ tan $\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array}$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติกับสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

สูตรเหล่าควรท่องจำให้ได้

ตัวอย่างที่ 2.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2529

ถ้า $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับเท่าไร

1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{4}{5}$

3. $-\frac{3}{5}$ 4. $-\frac{4}{5}$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\tan\theta < 0$

เพราะฉะนั้น $\theta \in Q_2$ หรือ $\theta \in Q_4$

เพราะว่า $\sin\theta < 0$

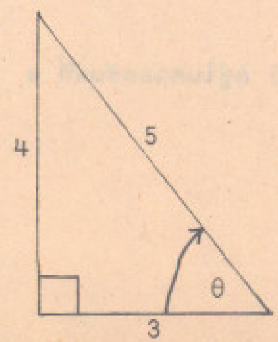
เพราะฉะนั้น $\theta \in Q_3$ หรือ $\theta \in Q_4$

สรุป θ ต้องอยู่ใน Q_4

ดังนั้น $\cos\theta > 0$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปจะพิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวด้านดังนี้



นั่นคือ ถ้า $\tan\theta = \frac{4}{3}$ แล้ว $\cos\theta = \frac{3}{5}$

เพราะฉะนั้น ถ้า $\tan\theta = -\frac{4}{3}$ และ $\theta \in Q_4$

จะต้องได้ว่า $\cos\theta = \frac{3}{5}$

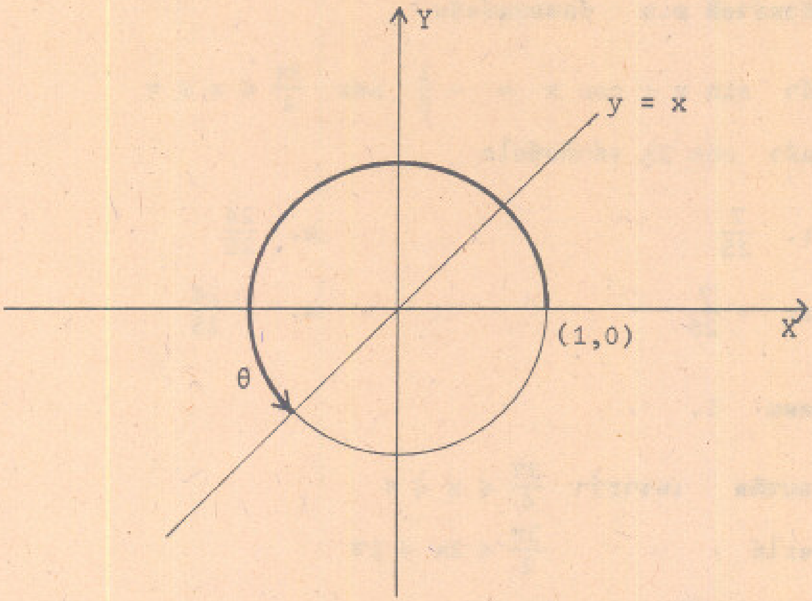
ตัวอย่างที่ 2.2 **คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533**

ถ้า θ เป็นความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา $(\theta > 0)$ จากจุด $(1,0)$ ไปยังเส้นตรง $y = x$ ในควอดรันต์ที่ 3 แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า θ อยู่ในควอดรันต์ที่ 3



ค่า sin และค่า cos เป็นลบ
ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2. ได้เลย

ตัวอย่างที่ 2.3 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$ และ $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$

แล้ว $\cos 2x$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{7}{25}$
2. $\frac{24}{25}$
3. $-\frac{7}{25}$
4. $-\frac{24}{25}$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$

จะได้ $\frac{3\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant 2\pi$

เพราะฉะนั้น $\cos 2x \geqslant 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

ที่เหลือต้องใช้วิธีจริง จาก $\frac{3\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant 2\pi$

และ $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$$

$$\sin 2x = -\frac{24}{25}$$

เพราะฉะนั้น $\cos 2x = \frac{7}{25}$

ตัวอย่างที่ ๒.4 ข้อสอบแข่งขัน

จงหาสมการของวงกลมที่ผ่านจุดตัดของวงกลม $x^2+y^2+6x+2y-27 = 0$ กับ $x^2+y^2-10x-2y+13 = 0$ และวงกลมนั้นมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = x$

1. $3x^2+3y^2+2x+2y-41 = 0$ ๒. $3x^2+3y^2-2x-2y-41 = 0$

3. $3x^2+3y^2+4x+4y-31 = 0$ 4. $3x^2+3y^2-4x-4y-31 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

$$x^2+y^2+6x+2y-27 = 0$$

$$(x+3)^2+(y+1)^2 = 27+9+1 = 37$$

$$(x+3)^2+(y+1)^2 = (\sqrt{37})^2 \simeq (6.1)^2$$

$$x^2+y^2-10x-2y+13 = 0$$

$$(x-5)^2+(y-1)^2 = -13+25+1 = 13$$

$$(x-5)^2+(y-1)^2 = (\sqrt{13})^2 \simeq (3.6)^2$$

จากรูป A, B เป็นจุดตัดของวงกลม
แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C
ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ผ่านจุด C และตัดเส้นตรง L ที่จุด D
เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการอยู่ในควอดรันท์ 3. มีค่าโดยประมาณ (-0.3,-0.3)

พิจารณาตัวเลือกพบว่าวงกลมในแต่ละตัวเลือกมีจุดศูนย์กลางเป็น

1. $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

2. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

3. $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$

4. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. กับ 4. ตัดทิ้งได้แน่นอน
ส่วนตัวเลือก 1. กับ 3. เมื่อดูจากรูป เราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งดีกว่า
แล้วเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบที่ต้องการ

วิธีที่ 2 เพราะว่า CD ต้องตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ด AB
ดังนั้นจุดตัดของ L กับ CD เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย
สมการเส้นตรง CD คือ

$$\frac{y+1}{x+3} = \frac{1+1}{5+3} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$4y+4 = x+3$$

$$x-4y-1 = 0$$

จาก L : $y = x$ จะได้

$$x-4x-1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

สรุป $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ เป็นจุดศูนย์กลางแน่นอน
เพราะว่าตัวเลือก 2., 3. และ 4. จุดศูนย์กลางไม่ใช่ $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$
เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. ได้ทันที

ตัวอย่างที่ 2.5 ข้อสอบแข่งขัน

วงกลมซึ่งมีกราฟของฟังก์ชัน $|2y-x+4| + ||x|-x| + ||y|+y| = 0$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จะสัมผัสกับเส้นตรง $2y+x+5 = 0$ ที่จุดใด

1. $(-1,-2)$
2. $(1,-3)$
3. $(0,-2.5)$
4. $(2,-3,5)$

ตอบ 2.

แนวคิด $|2y-x+4| + ||x|-x| + ||y|+y| = 0$

จะได้ $2y-x+4 = 0$

$|x|-x = 0$

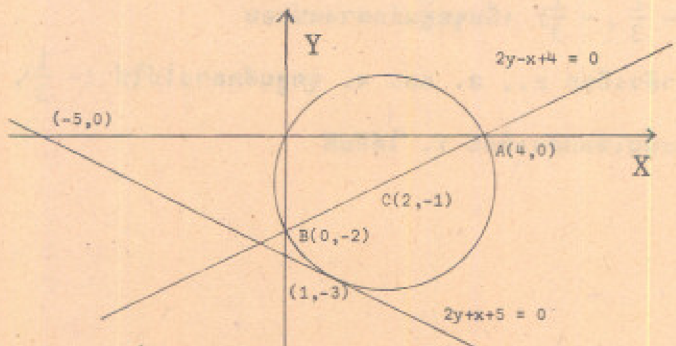
และ $|y|+y = 0$

เพราะว่า $|x| = x$ ก็ต่อเมื่อ $x \geqslant 0$

และ $|y| = -y$ ก็ต่อเมื่อ $y \leqslant 0$

เพราะฉะนั้นกราฟของ $|2y-x+4| + ||x|-x| + ||y|+y| = 0$

คือกราฟของเส้นตรง $2y-x+4 = 0$ ในควอดรันท์ 4



จากกราฟพบว่าเส้นตรง $2y+x+5 = 0$ สัมผัสวงกลมในควอดรันท์ 4

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งไปก่อน

ดูจากรูปพิกัดของจุดสัมผัส $x = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ข้อสังเกต เขียนจุด (1,-3) กับ (2,-3.5) ดูก็ได้ว่าอยู่บนวงกลมหรือไม่

พบว่า (2,-3.5) ไม่อยู่บนวงกลม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้เหมือนกัน

การนับจำนวนสมาชิกของลำดับเลขคณิต

1. บวกตลอด

2. หารตลอด

ตัวอย่าง A={ 3,7,11,15,...511 } มีสมาชิกกี่ตัว

เอา 1 บวกตลอด 4,8,12,16,...,512

เอา 4 หารตลอด 1,2, 3, 4,...,128

เพราะฉะนั้น $n(A)=128$

ผลบวกของลำดับเลขคณิต

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

ตัวอย่าง 3+7+11+15+....511 เท่ากับเท่าใด

{ 3,7,11,15,...511 } มีทั้งหมด 128 ตัว

เพราะฉะนั้น $3+7+11+15+...+511 = \frac{128}{2}(3+511) = 32707$

สมบัติของรากพหุนาม

รากของสมการ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

คือ $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

m, n เป็นรากของสมการ

$$x^2 + ax + b = 0$$

ก็ต่อเมื่อ

$$m + n = -a$$

$$mn = b$$

ℓ, m, n เป็นรากของสมการ

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

ก็ต่อเมื่อ $$\ell + m + n = -a$$

$$\ell m + \ell n + mn = b$$

$$\ell mn = -c$$

3.

เซตคำตอบเป็นข้อใด

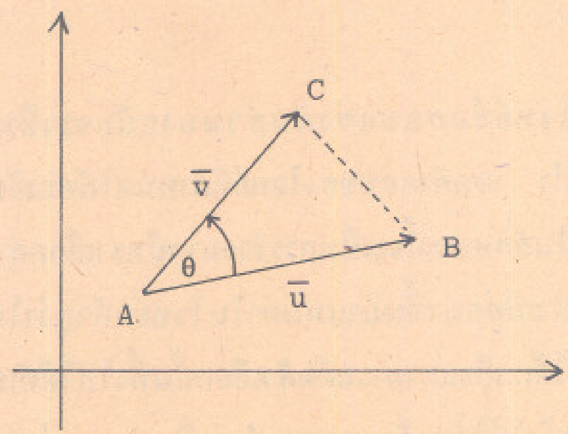
โจทย์ข้อสอบแข่งขันส่วนมากมักจะเป็นคำถามในลักษณะว่า เซตคำตอบของโจทย์ที่กำหนดให้ตรงกับตัวเลือกใด ข้อสอบในลักษณะนี้จะเป็นการง่ายมากถ้าเราเลือกค่าที่คิดเลขได้ง่ายจากตัวเลือกนำขึ้นมาแทนค่าในโจทย์แล้วดูว่าใช้ได้หรือไม่ ถ้าใช้ไม่ได้เราก็จะสามารถตัดตัวเลือกนั้นทิ้งไปได้ทันที แต่ถ้าแทนค่าแล้วใช้ได้เราก็จะทดลองนำค่าอื่นมาแทนค่าต่อไป

<u>เวกเตอร์ VS พื้นที่สามเหลี่ยม</u>

$$\bar{u} = (a,b)$$

$$\bar{v} = (c,d)$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = ac + bd$$



$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\,|\bar{v}|}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right|$

ตัวอย่างที่ 3.1 **คณิตศาสตร์ ก. ปี 2531**

เซตคำตอบของสมการ $|x+2| = -2x+5$ คือเซตในข้อใด

1. $\{x \mid \frac{x-1}{x-7} = 0\}$
2. $\{x \mid \frac{x-7}{x-1} = 0\}$
3. $\{x \mid (x-1)(x-7) = 0\}$
4. $\{x \mid x^2-1 = 0\}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์ข้อนี้จริงๆ แล้วตัวเลือกก็คือ

1. $\{1\}$
2. $\{7\}$
3. $\{1,7\}$
4. $\{1,-1\}$

ลองแทนค่าในโจทย์ด้วย $x = 7$ จะพบว่า

$$|7+2| \neq -2(7)+5$$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $x = -1$ จะพบว่า

$$|-1+2| \neq -2(-1)+5$$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 3.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2531

เซตคำตอบของอสมการ $\frac{7}{2-x} \leqslant 3$ คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty,-\frac{1}{3}]$
2. $[-\frac{1}{3},2)$
3. $(-\infty,-\frac{1}{3}]\cup(2,\infty)$
4. ข้อ 1, 2 และ 3 ไม่มีข้อใดถูก

ตอบ 3.

แนวคิด พยายามเลือกค่าที่แทนค่าในโจทย์ได้ง่ายๆ และสามารถจำแนกตัวเลือกได้ เช่น

$x = -\frac{1}{3}$ ไม่ควรใช้เพราะมีในทุกตัวเลือก

ลองใช้ค่า $x = 0$ จะพบว่า $\frac{7}{2-0} = 3.5 \nleqslant 3$

ดังนั้น $x = 0$ ไม่ได้

เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ต่อไปลอง $x = 3$ จะพบว่า $\frac{7}{2-3} = -7 \leqslant 3$

ดังนั้น $x = 3$ ใช้ได้

แต่ $x = 3$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 1.

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ขณะนี้เหลือตัวเลือก 3. และ 4. เท่านั้น

จะเดาเลยก็ได้หรือจะใช้วิธีจริงดังนี้

$$\frac{7}{2-x} \leqslant 3$$

$$\frac{7}{2-x} - 3 \leqslant 0$$

$$\frac{7-6+3x}{2-x} \leqslant 0$$

$$\frac{3x-1}{2-x} \leqslant 0$$

$$\frac{3x-1}{x-2} \geqslant 0$$

เซตคำตอบคือ $(-\infty,-\frac{1}{3}] \cup (2,\infty)$

ตัวอย่างที่ 3.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2532

เซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$ คือเซตในข้อใด

1. เซตว่าง
2. $(-\infty,-10) \cup [-10,-1] \cup [3,10] \cup (10,\infty)$
3. $(-\infty,-1) \cup (3,\infty)$
4. ข้อ 1, 2, 3 ไม่มีข้อใดถูก

ตอบ 2.

แนวคิด ลองเลือก $x = 3$ แทนค่าในโจทย์จะได้

$$\left|\frac{3}{3-1} - 1\right| = \left|\frac{3}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $x = 3$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ
เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และตัวเลือก 3. ทิ้ง
เหลือกตัวเลือก 2. และ 4. คงต้องเดาหรืออาจใช้วิธีจริงโดยการแก้อสมการ

$$\left|\frac{x}{x-1} - 1\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x-1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x-1} \leqslant \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{x-1} \quad \text{และ} \quad \frac{x}{x-2} \leqslant \frac{3}{2}$$

$$0 \leqslant \frac{x}{x-1} - \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \frac{x}{x-1} - \frac{3}{2} \leqslant 0$$

$$\frac{x+1}{x-1} \geqslant 0 \quad \text{และ} \quad \frac{x-3}{x-1} \geqslant 0$$

$(x \leqslant -1$ หรือ $x > 1)$ และ $(x < 1$ หรือ $x \geqslant 3)$

สรุปเซตคำตอบคือ $[(-\infty,-1] \cup (1,\infty)] \cap [(-\infty,1) \cup [3,\infty)]$

$= (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$

ซึ่งตรงกับตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 3.4 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

เซตคำตอบของอสมการ

$$\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x^2$$

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,1]$
2. $[0,1]$
3. $[1,\infty)$
4. $(-\infty,0) \cup [1,\infty)$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $x \leqslant 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งไปก่อน

เพราะว่าเมื่อ $x = 2$

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 = -1 \not< -2 = \log_{\frac{1}{2}} 2^2$$

เพราะฉะนั้น $x = 2$ ไม่ได้ เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 3.5 ข้อสอบแข่งขัน

เซตคำตอบของอสมการ $x\sin^2 x + \cos^2 x - x\sin x + x < 2$ คือ

1. $(-\infty,1)$
2. $(-2\pi,2\pi)$
3. $(-1,\infty)$
4. ϕ

ตอบ 1.

แนวคิด โดยการเลือก $x = 0$ แทนค่าในโจทย์จะได้ว่า

$$0\sin^2 0 + \cos^2 0 - 0\sin 0 + \sin 0 + 0 = 1 < 2$$

แสดงว่า $x = 0$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $x = 1$ จะได้

$$(1)\sin^2 1 + \cos^2 1 - (-1)\sin(1) + \sin 1 + 1 = 2 \not< 2$$

แสดงว่า $x = 1$ ไม่ได้ ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้อีก

ลองดูว่า $x = -2\pi$ ได้หรือไม่ โดยการแทนค่าอีก

$$(-2\pi)\sin^2(-2\pi) + \cos^2(-2\pi) - (2\pi)\sin(-2) + \sin(-2\pi) + (-2\pi)$$

$$= 1 - 2\pi < 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 2\pi$ ได้ ทำให้เราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 3.6 ข้อสอบแข่งขัน

เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{1}{x+\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x-\sqrt{x}} \leqslant 1$

อินเตอร์เซกกับเซตในข้อใดได้เซตว่าง

1. $(-\infty,0] \cup [1,3)$
2. $(-\infty,1) \cup (7,11)$
3. $(1,3] \cup (5,\infty)$
4. $(-5,5)$

ตอบ 1.

แนวคิด ลองเอาตัวเลขในช่วงของตัวเลือกเข้ามาแทนค่าในโจทย์ โดยเลือกตัวเลขที่คิดได้ง่ายๆ เช่น $x = 4$

$$\frac{1}{4+\sqrt{4}} + \frac{1}{4-\sqrt{4}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \leqslant 1$$

แสดงว่า $x = 4$ ได้ แต่ $4 \in (-5,5)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ลอง $x = 9$; $\dfrac{1}{9+\sqrt{9}} + \dfrac{1}{9-\sqrt{9}} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} \leqslant 1$

แสดงว่า $x = 9$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ลอง $x = 10$; $\dfrac{1}{10+\sqrt{10}} + \dfrac{1}{10-\sqrt{10}} \leqslant 1$

แสดงว่า $x = 10$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

หมายเหตุ โดยการแก้อสมการจะได้

พิจารณาเมื่อ $x > 0$

$$\frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \leqslant 1$$

$$\frac{x-\sqrt{x}+x-\sqrt{x}}{x^2-x} \leqslant 1$$

$$\frac{2x}{x(x-1)} \leqslant 1$$

$$\frac{2}{x-1} - 1 \leqslant 0$$

$$\frac{3-x}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{x-3}{x-1} \geqslant 0$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการคือ $(0,1) \cup [3,\infty)$

ตัวอย่างที่ 3.7 ข้อสอบแข่งขัน

เซตในข้อใดเป็นเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{2x^3+x^2-2x-1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$$

1. $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2}, 1) \cup (1,\infty)$
2. $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2}, \infty)$
3. $(-\infty,-3) \cup [-1,-\frac{1}{2}] \cup (1,\infty)$
4. $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2}, 1)$

ตอบ 1.

แนวคิด เลือก $x = 0$ แทนค่าในโจทย์ จะได้ $\frac{1}{3} \geqslant 0$ เป็นจริง เพราะฉะนั้นเซตคำตอบต้องมี 0 เป็นสมาชิก

ดังนั้นตัวเลือกที่ตัดทิ้งได้คือ ตัวเลือก 3.

จากโจทย์จะเห็นว่า $x = 1$ ไม่ได้ (เพราะว่า $1^2+2(1)-3 = 0$)

แต่ 1 อยู่ในตัวเลือก 2.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ขณะนี้เหลือตัวเลือก 1. กับ 4.

ลอง $x = 2$ แทนค่าในโจทย์

$$\frac{16+4-4-1}{4+4-3} = \frac{15}{3} = 3 \geqslant 0$$

แสดงว่า $x = 2$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 3.8 ข้อสอบแข่งขัน

อินเตอร์เซกชันระหว่างเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{8}{x-1} + 3 \leqslant x$$

กับเซตในข้อใดเป็นเซตว่าง

1. $[1,5]$
2. $(-\infty,5)$
3. $[1,5)$
4. $[-1,1) \cup [5,\infty)$

ตอบ 3.

แนวคิด ลองแทนค่า $x = 20$ ในโจทย์

$$\frac{8}{20-1} + 3 \leqslant 20$$

แสดงว่า $x = 20$ ได้ และ 20 อยู่ในตัวเลือก 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ลองดู $x = 5$ แทนค่าในโจทย์

$$\frac{8}{5-1} + 3 = 5 \leqslant 5$$

แสดงว่า $x = 5$ ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

พิจารณาตัวเลือกที่เหลือคือ 2. กับ 3.

เลือก $x = 0$ แทนค่าในโจทย์

$$\frac{8}{0-1} + 3 = -5 \leqslant 0$$

แสดงว่า $x = 0$ ได้ และ $0 \in (-\infty,5)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 3.9 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

ให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้วเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \geqslant 3$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{1}{16}]$ 2. $[0, \frac{1}{16}]$

3. $(0, \frac{1}{4}]$ 4. $[0, \frac{1}{4}]$

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อนี้ต้องคิดเลขนิดหนึ่งก่อน

$$f(x) = \sqrt{x} + x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

โจทย์ถามว่า $f'(x) \geqslant 3$ มีเซตคำตอบเป็นตัวเลือกใด

จากเงื่อนไข $\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \geqslant 3$

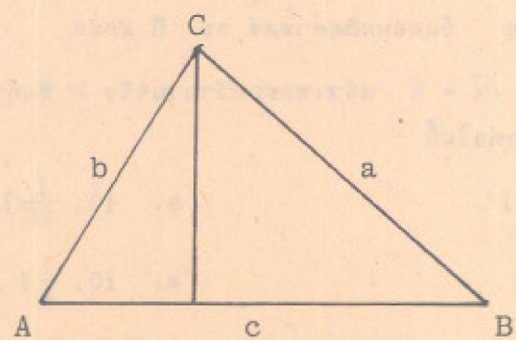
แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ๒. และ 4. ทิ้งไปก่อน

ลองแทนค่า $x = \frac{1}{4}$ จะได้

$$\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} + 1 = 2 \ngeqslant 3$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ๓. ทิ้งได้



พื้นที่สามเหลี่ยม ABC

$$\frac{1}{2}\, ab \sin C = \frac{1}{2}\, ac \sin B = \frac{1}{2}\, bc \sin A$$

4.

เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด

การทำโจทย์ลักษณะนี้เราต้องพิจารณาเลือกค่าที่สอดคล้องตามที่โจทย์กำหนด แล้วดูว่าค่าที่ได้นั้นไม่อยู่ในตัวเลือกใด เราก็ตัดตัวเลือกนั้นทิ้งไปได้ทันที

คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน

z,w เป็นจำนวนเชิงซ้อน

1. $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
2. $|z| = |\bar{z}|$
3. $|-z| = |z|$
4. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
5. $|z^{-1}| = |z|^{-1}$
6. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ $, |w| \neq 0$
7. $|z+w| \leqslant |z|+|w|$
8. $|z-w| \geqslant \big| |z|-|w| \big|$

สูตรผลบวกของอนุกรม

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2$$

ตัวอย่างที่ 4.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2532

เซตคำตอบของอสมการ $x^2+2x-3 \leqslant 0$ เป็นสับเซตของเซตคำตอบในข้อใด

1. $|2x-3| \geqslant 1$
2. $|x-4| \leqslant 5$
3. $x-1 \leqslant 0$
4. $x^2 \neq 9$

ตอบ 3.

แนวคิด จากโจทย์จะพบว่า $x = -1$ จะทำให้

$$(-1)^2+2(-1)-3 = -4 \leqslant 0$$

ดังนั้น $x = -1$ ได้ แต่จากตัวเลือก 1. พบว่า

$$|2(-1)-3| = 5 \not\geqslant 1$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $x = -2$ จะทำให้ $(-2)^2+2(-2)-3 = -3 \leqslant 0$

ดังนั้น $x = -2$ ใช้ได้

แต่จากตัวเลือก 2. $|-2-4| = 6 \not\leqslant 5$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ต่อไปลองแทนค่า $x = -3$ จะทำให้ $(-3)^2+2(-3)-3 = 0 \leqslant 0$

ดังนั้น $x = -3$ ใช้ได้ แต่ $(-3)^2 = 9$

เพราะฉะนั้น -3 ไม่อยู่ในตัวเลือก 4. เราจึงตัดทิ้งได้อีก

สรุปเหลือตัวเลือกตัวเดียวอีกแล้ว

ตัวอย่างที่ 4.2 คณิตศาสตร์ ก ปี 2534

เซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x+1}{x+2} - 3\right| > 4$ เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-3,-2)$
2. $(-2,-1)$
3. $(-3.5,-1)$
4. $(-1.5,0)$

ตอบ 3.

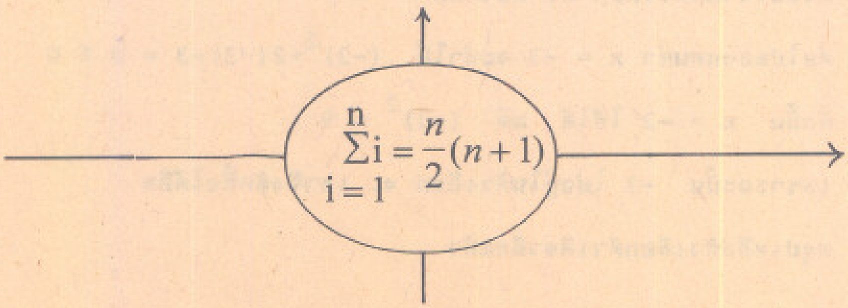
แนวคิด พิจารณาค่า x จากโจทย์พบว่า $x = -3$ ทำให้

$$\left|\frac{-3+1}{-3+2} - 3\right| = 5 > 4$$

เพราะฉะนั้น $x = -3$ ได้

พิจารณาตัวเลือกพบว่า มีตัวเลือก 3. เท่านั้นที่มี -3 เป็นสมาชิก

สรุปตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้



ตัวอย่างที่ 4.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 4x^2 - 9y^2 = 0\}$

ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ r และเป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก R ไปทั่วถึง R

1. $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 3y = 2|x|\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 3y = x\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 3y = 2x\}$
4. $\{(x,y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid 2x = 3|y|\}$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $3y = 2|x|$ จะได้ $y = \frac{2}{3}|x|$

นั่นคือ (3,2),(-3,2) เป็นสมาชิกของตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า (3,-2) และ (3,2) อยู่ในตัวเลือก 4.

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ไม่เป็นฟังก์ชัน เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า (3,1) อยู่ในตัวเลือก 3. แต่ $4(3)^2 - 9(1)^2 \neq 0$

นั่นคือ $(3,1) \notin r$

สรุป ตัวเลือก 2. ตัดทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 4.4 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

เซตคำตอบของสมการ $x^2+x-2 = |x-1|$ เป็นสับเซตของเซตในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. $(-4,2)$ 2. $(-2,4)$

3. $(-5,1)$ 4. $(1,5)$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $x = 1$ จะได้ $1+1-2 = |1-1|$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ เป็นคำตอบ

เราจึงตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปต้องทำโดยวิธีจริง

$$x^2+x-2 = x-1 \quad \text{หรือ} \quad x^2+x-2 = 1-x$$

$$x^2-1 = 0 \quad \text{หรือ} \quad x^2+2x-3 = 0$$

$$(x+1)(x-1) = 0 \quad \text{หรือ} \quad (x+3)(x-1) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = -3$ เป็นคำตอบ

เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 4.5 ข้อสอบแข่งขัน

ค่าของ θ ซึ่งทำให้ $\sin\theta + \cos\theta \leqslant 0$ จะอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0,\pi]$
2. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}]$
4. $[\pi, 2\pi]$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ทำให้

$$\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0 \leqslant 0$$

แต่ $\frac{3\pi}{4}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 3. และตัวเลือก 4.

เราจึงตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

ต่อไปลอง $x = \frac{5\pi}{4}$ จะได้ $\sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2} \leqslant 0$

แต่ $\frac{5\pi}{4}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 1. เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 4.6 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

เซตคำตอบของสมการ $\log_2 x + 4\log_x 2 = 5$

เป็นสับเซตของตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. $[1,3] \cup [5,9]$ 2. $[-1,5]$

3. $[-1,3] \cup [8,16]$ 4. $[3,18]$

ตอบ 3.

แนวคิด เห็นได้ชัดเจนว่า $x = 2$ ได้ และ $2 \notin [3,18]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

ลองดูเลข 4, 8, 16 พบว่า $x = 16$ ทำให้

$$\log_2 16 + 4\log_{16} 2 = 4 + \log_{16} 16 = 5$$

แสดงว่า $x = 16$ ได้

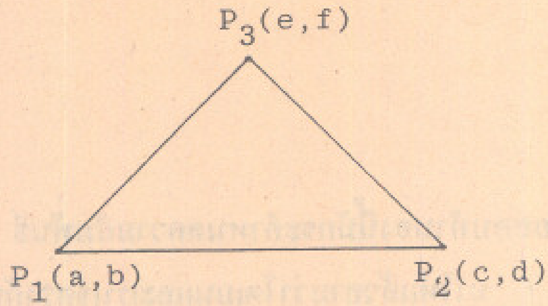
เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้อีก

5.

โดเมนและเรนจ์คือเซตใด

ข้อสอบทำนองนี้มักจะกำหนดความสัมพันธ์ r หรือฟังก์ชัน f มาให้แล้วถามว่าโดเมนและเรนจ์ตรงกับตัวเลือกใดหรือเป็นสับเซตของตัวเลือกใด ในการตัดตัวเลือกเราสามารถพิจารณาค่าของ x หรือ y บางค่าที่สอดคล้องกับโจทย์มาช่วยในการตัดตัวเลือกได้

สมการวงกลมที่ผ่านจุด 3 จุด



หาได้จากสมการดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ 4×4

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+b^2 & a & b & 1 \\ c^2+d^2 & c & d & 1 \\ e^2+f^2 & e & f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่างที่ 5.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

ให้ $f = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

$g = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{x+1}\}$

โดเมนและเรนจ์ของ f+g ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x \neq -1\}$ และ $\{y \mid y \geq 0\}$
2. $\{x \mid x \neq -1\}$ และ $\{y \mid y > 0\}$
3. $\{x \mid x \in R\}$ และ $\{y \mid y \neq 0\}$
4. $\{x \mid x \in R\}$ และ $\{y \mid y \in R\}$

ตอบ ไม่มีตัวเลือก

แนวคิด เพราะว่า −1 ไม่อยู่ในโดเมนของ g
เพราะฉะนั้น −1 ไม่อยู่ในโดเมนของ f+g
ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้
เพราะว่าตัวเลือก 1. และ 2. มีโดเมนเหมือนกัน
ดังนั้นในส่วนของเรนจ์เราดูแค่ว่า y = 0 ได้หรือไม่ก็พอ โดยพิจารณาดังนี้

$$(f+g)(x) = 0$$

$$x^2 + \frac{1}{x+1} = 0$$

$$x^3+x^2+1 = 0$$ ซึ่งเป็นสมการพหุนามดีกรี 3

ต้องมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งค่า
เพราะฉะนั้นมี x ที่ทำให้ $(f+g)(x) = 0$
นั่นคือ เรนจ์ของ f+g ต้องมี 0 เป็นสมาชิก
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก
เพราะฉะนั้นเหลือตัวเลือก 1. ตัวเดียวที่ยังไม่ตัดทิ้ง

หมายเหตุ เรนจ์ของ f+g ที่แท้จริงคือ $(-\infty,\infty)$

เพราะว่าทุกค่า y จะมี x ที่ทำให้

$$x^2 + \frac{1}{x+1} = y \quad \text{เสมอ}$$

ตัวอย่างที่ 5.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

ให้ $r = \{(x,y) \mid y = \sqrt{x-1}\}$

โดเมนและเรนจ์ของ r ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x > 1\}$ และ $\{y \mid y \in R\}$
2. $\{x \mid x \geqslant 1\}$ และ $\{y \mid y > 0\}$
3. $\{x \mid x \geqslant 1\}$ และ $\{y \mid y > 0\}$
4. $\{x \mid x \geqslant 1\}$ และ $\{y \mid y \geqslant 0\}$

ตอบ 4.

แนวคิด สังเกตจากสูตร $y = \sqrt{x-1}$ แสดงว่า $x = 1$ ได้ ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปเลย

เพราะว่า $y = \sqrt{x-1} \geqslant 0$ เสมอ

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้อีก

ข้อสังเกต เพราะว่า $(1,0) \in r$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 5.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

กำหนดให้ $r = \{(x,y) \mid y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\}$

แล้วเรนจ์ของ r คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{y \mid y \geqslant 2\}$
2. $\{y \mid y > 2$ หรือ $y < -2\}$
3. $\{y \mid y > 1\}$
4. $\{y \mid y \neq 1\}$

ตอบ 3.

แนวคิด ลองแทนค่าง่ายๆ เช่น $x = \sqrt{5}$ จะได้

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{5-4}} = 2$$

ดังนั้น $y = 2$ ได้ ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \sqrt{104}$ จะได้ $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{104-4}} = 1.1$

เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

เพราะว่า $1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} \neq 0$

เพราะฉะนั้น y ต้องไม่เท่ากับ 0 เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

เหลือตัวเลือก 3. ตัวเดียวอีกแล้ว

หมายเหตุ วิธีจริงคือ $y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2-4}} > 1$

เพราะฉะนั้น $R_r = (1,\infty)$

ตัวอย่างที่ 5.4 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ถ้า $f(x) = \sqrt{-(|2x-1|-3)}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $D_f \subset (-4,0)$
2. $D_f \subset (-3,1)$
3. $D_f \subset (-2,3)$
4. $D_f \subset (0,4)$

ตอบ 3.

แนวคิด เอาแทนค่าง่ายๆ ก่อนเช่น $x = 0$ จะได้ $f(0) = \sqrt{2}$ แสดงว่า $0 \in D_f$ เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง ต่อไปแทนค่า $x = 1$ จะได้ $f(1) = \sqrt{2}$ แสดงว่า $1 \in D_f$ เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก เลือก 3. เป็นคำตอบเลย

ตัวอย่างที่ 5.5 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

กำหนดให้ $f = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2y-x^2-y = 0\}$

โดเมนและเรนจ์ของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $D_f = R - \{-1,1\}$; $R_f = R - (0,1]$
2. $D_f = R - \{-1,1\}$; $R_f = R - [0,1)$
3. $D_f = R - \{1\}$; $R_f = R - [0,1)$
4. $D_f = R - \{1\}$; $R_f = R - (0,1)$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $(0,0) \in f$ เพราะฉะนั้น $0 \in D_f$ และ $0 \in R_f$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปพิจารณาเฉพาะค่า $x = -1$ ได้หรือไม่

เพราะว่า ถ้า $x = -1$ จะได้ $y-1-y = 0$

$-1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x \neq -1$ นั่นคือ $-1 \notin D_f$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

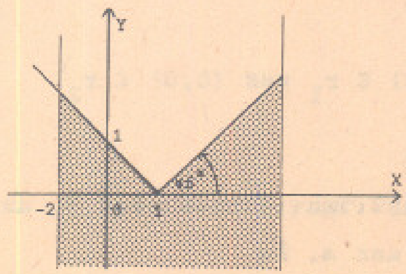
ตัวอย่างที่ 5.6 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

ให้ $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2-5x-14 \leqslant 0\}$

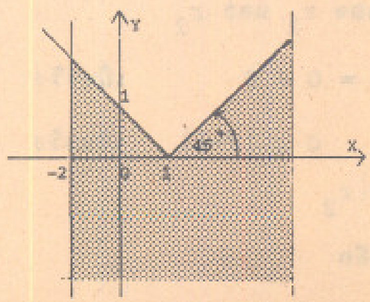
$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid y \leqslant |x-1|\}$

แล้วกราฟ $r_1 \cap r_2$ คือกราฟในตัวเลือกใด

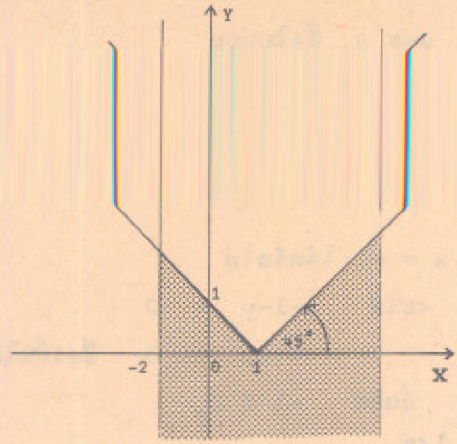
1.



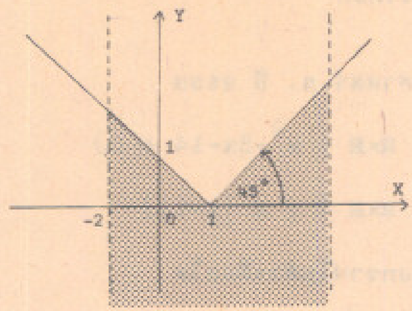
2.



3.



4.



ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $(0,0) \in r_1$ และ $(0,0) \in r_2$

ดังนั้น $(0,0) \in r_1 \cap r_2$

เพราะว่า (0,0) ไม่อยู่ในบริเวณแรเงาของตัวเลือก 3. และ 4.
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

จากตัวเลือก 1. และ 2. พิจารณาจุด (7,0) ว่าอยู่ใน $r_1 \cap r_2$ ได้หรือไม่

ลองแทนค่า x = 7 ในเงื่อนไขของ r_1 และ r_2

$7^2-5(-7)-14 = 0 \leqslant 0$ เป็นจริง

$0 \leqslant |7-1|$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $(7,0) \in r_1 \cap r_2$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 5.7 ข้อสอบแข่งขัน

ฟังก์ชันต่อไปนี้ คู่ใดเป็นฟังก์ชันเดียวกัน

1. $f_1 = \{(x,y) \mid x = \sqrt{y} - 2\}$, $f_2 = \{(x,y) \mid y = (x+2)^2\}$

2. $g_1 = \{(x,y) \mid y = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}\}$, $g_2 = \{(x,y) \mid y = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}\}$

3. $h_1 = \{(x,y) \mid xy - x = 1\}$, $h_2 = \{(x,y) \mid x = \dfrac{1}{y-1}\}$

4. $F_1 = \{(x,y) \quad y = \dfrac{1}{1+\sqrt{x}}\}$, $F_2 = \{(x,y) \mid y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การดูว่าคู่ใดไม่เป็นฟังก์ชันเดียวกัน ดูง่ายกว่าโดยทดลองเลือกคู่ลำดับ (x,y) ไปแทนค่าในเงื่อนไขของฟังก์ชัน เช่น

พิจารณาตัวเลือก 3 ก่อน

$(0,1) \in h_1$ แต่ $(0,1) \notin h_2$ ดังนั้น $h_1 \neq h_2$

ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ต่อไปดูที่ตัวเลือก 4

ลองใช้เหตุผลโดเมนไม่เท่ากันบ้าง

เพราะว่า $x = 1$ อยู่ใน D_{F_1} ได้ แต่ $x = 1$ อยู่ใน D_{F_2} ไม่ได้

เพราะฉะนั้น $F_1 \neq F_2$ เราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ทำนองเดียวกัน $1 \in D_{g_1}$ แต่ $1 \notin D_{g_2}$ ดังนั้น $g_1 \neq g_2$

เราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 5.8 ข้อสอบแข่งขัน

เซตคำตอบของสมการ

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+3}$$

เป็นสับเซตของตัวเลือกในข้อใด

1. $(-\infty,0]$ 2. $[1,\infty)$
3. $[-1,\infty)$ 4. $[-4,1]$

ตอบ 3.

แนวคิด คำถามและตัวเลือกในลักษณะนี้ เราสามารถนำข้อจำกัดของค่าที่เป็นไปได้มาช่วยในการตัดตัวเลือกใด

จาก $\sqrt{x+1}$; $x + 1 \geqslant 0$

$x \geqslant -1$

จาก $\sqrt{4-x}$; $4 - x \geqslant 0$

$x \leqslant 4$

จาก $\sqrt{2x+3}$; $2x + 3 \geqslant 0$

$x \geqslant -1.5$

เพราะฉะนั้นค่า x ที่เป็นไปได้คือ $-1 \leqslant x \leqslant 4$

เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่ตัดทิ้งได้คือ ตัวเลือก 1.,2. และ 4.

หมายเหตุ การหารากทำได้ดังนี้

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+3}$$

$$(x+1) + 2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} + (4-x) = 2x+3$$

$$2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x} = 2x-2$$

$$(x+1)(4-x) = x-1$$

$$(x+1)(4-x) = x^2-2x+1$$

$$4x-x^2+4-x = x^2-2x+1$$

$$2x^2-5x-3 = 0$$

$$(2x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, 3$$

เพราะฉะนั้นมีราก 2 รากเครื่องหมายต่างกัน

สมบัติเกี่ยวกับเมตริกซ์

A, B เป็นเมตริกซ์ $n \times n$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

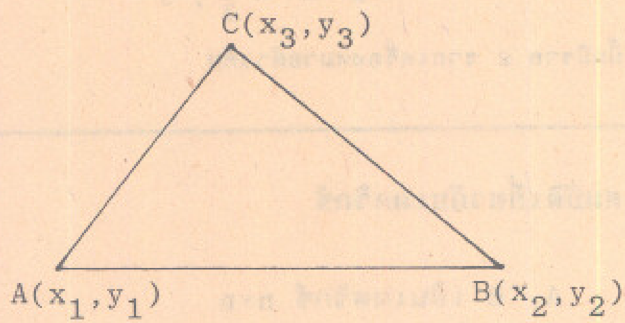
$$\det(A^n) = (\det A)^n$$

$$\det(kA) = k^n \det A$$

$$\det(-A) = (-1)^n \det A$$

การหาพื้นที่สามเหลี่ยม

สูตรพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อรู้พิกัดของจุดยอดทั้งสามจุด



พื้นที่สามเหลี่ยม ABC

$$= \frac{1}{2}\left|\det\left(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix}\right)\right|$$

6.

ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้

โจทย์เกี่ยวกับประพจน์ เช่น ประพจน์ที่กำหนดให้สมมูลตรงกับตัวเลือกใด หรือประพจน์ที่กำหนดให้นิเสธตรงกับตัวเลือกใด โจทย์ในทำนองนี้เราสามารถยกตัวอย่างค่าความจริงบางค่าของประพจน์ p, q หรือ r เพื่อเปรียบเทียบกับค่าความจริงของตัวเลือกเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก

ฟังก์ชัน log ที่น่าจดจำค่าให้ได้

$$\log(2) = 0.301$$

$$\log(3) = 0.477$$

$$\log(4) = 0.602$$

$$\log(5) = 0.699$$

$$\log(6) = 0.778$$

$$\log(7) = 0.845$$

$$\log(8) = 0.903$$

$$\log(9) = 0.954$$

เทคนิคการจำค่า log(2) - log(9)

ดูได้จากคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

ตัวอย่างที่ 6.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

นิเสธของประพจน์ $p \rightarrow q$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \wedge \sim q$
2. $p \wedge \sim q$
3. $\sim p \rightarrow \sim q$
4. $p \rightarrow \sim q$

ตอบ 2.

แนวคิด เลือก p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ
จะได้ว่าโจทย์ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
พิจารณาตัวเลือก

1. $\sim T \wedge \sim F$ เป็นเท็จ
2. $T \wedge \sim F$ เป็นจริง
3. $\sim T \rightarrow \sim F$ เป็นจริง
4. $T \rightarrow \sim F$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เลือก p เป็นจริง และ q เป็นจริง
จะได้ว่าโจทย์ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง
พิจารณาตัวเลือกเฉพาะ 2., 3., 4.

2. $T \wedge \sim T$ เป็นเท็จ
3. $\sim T \rightarrow \sim T$ เป็นจริง
4. $T \rightarrow \sim T$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

เลือก p เป็นเท็จ และ q เป็นเท็จ
จากโจทย์จะได้ $p \rightarrow q$ เป็นจริง
พิจารณาตัวเลือก 2. และ 4.

2. $F \wedge \sim F$ เป็นเท็จ

4. $F \rightarrow \sim F$ เป็นจริง

เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 6.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

กำหนดให้ประพจน์ $A \rightarrow B$ สมมูลกับประพจน์ $\sim B \rightarrow \sim A$

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $r \rightarrow (p \wedge q)$

1. $r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
2. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow r$
3. $\sim r \rightarrow \sim(p \wedge q)$
4. $(\sim p \vee \sim q) \rightarrow \sim r$

ตอบ 4.

แนวคิด ลองแทนค่าโดยเลือก r เป็นจริง p เป็นเท็จ q เป็นจริง ค่าความจริงของโจทย์ $r \rightarrow (p \wedge q)$ คือ $T \rightarrow (F \wedge T)$ เป็น F

ดูค่าความจริงของตัวเลือก

1. $T \rightarrow (\sim F \vee \sim T)$ เป็น T
2. $(\sim F \vee \sim T) \rightarrow T$ เป็น T
3. $\sim T \rightarrow \sim(F \wedge T)$ เป็น T
4. $(\sim F \vee \sim T) \rightarrow \sim T$ เป็น F

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้ง

$\sin(2\pi-\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(2\pi-\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(2\pi-\theta) = -\tan(\theta)$	$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$ $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi-\theta) = -\tan(\theta)$

ตัวอย่างที่ 6.3 ข้อสอบแข่งขัน

ข้อความ

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)] \rightarrow [t \rightarrow s \wedge \sim s]$

สมมูลกับข้อความใดต่อไปนี้

1. $\sim q \vee t$ 2. $(p \wedge q) \vee t$

3. $\sim(q \wedge t)$ 4. $\sim(p \wedge q) \vee s$

ตอบ 3.

แนวคิด ลอง p เป็น T , q เป็น F , t เป็น F และ s เป็น T
แทนค่าในโจทย์จะได้

$[(T \wedge F) \vee (\sim T \wedge F)] \wedge [(T \rightarrow F) \leftrightarrow (\sim F \rightarrow \sim T)] \rightarrow [F \rightarrow T \wedge \sim T]$

มีค่าความจริงเป็น T

ลองดูที่ตัวเลือก

1. $\sim F \vee F$ เป็น T
2. $(T \wedge F) \vee F$ เป็น F
3. $\sim(F \wedge F)$ เป็น T
4. $\sim(T \wedge F) \vee T$ เป็น T

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งไปก่อนได้

ลอง p เป็น T , q เป็น T , t เป็น F และ s เป็น F
แทนค่าในโจทย์จะได้

$[(T \wedge T) \vee (\sim T \wedge T)] \wedge [(T \rightarrow F) \leftrightarrow (\sim F \rightarrow \sim T)] \rightarrow [F \rightarrow (F \wedge \sim F)]$

มีค่าความจริงเป็น T

ลองดูที่ตัวเลือก

1. $\sim T \vee F$ เป็น F

3. $\sim(T \wedge F)$ เป็น F

4. $\sim(T \wedge T) \vee F$ เป็น F

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ โดยสูตร $(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge q \equiv q$

$[t \rightarrow (s \wedge \sim s)] \equiv \sim t$

เพราะฉะนั้น

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)] \rightarrow [t \rightarrow s \wedge \sim s]$

$\equiv q \rightarrow \sim t$

$\equiv \sim q \vee \sim t \equiv \sim(q \wedge t)$

__สมบัติการหารลงตัว__

1. ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

2. a,b เป็นจำนวนเต็มบวก

   ถ้า $a|b$ แล้ว $a<b$

3. m,n เป็นจำนวนเต็มบวก p เป็นจำนวนเฉพาะ

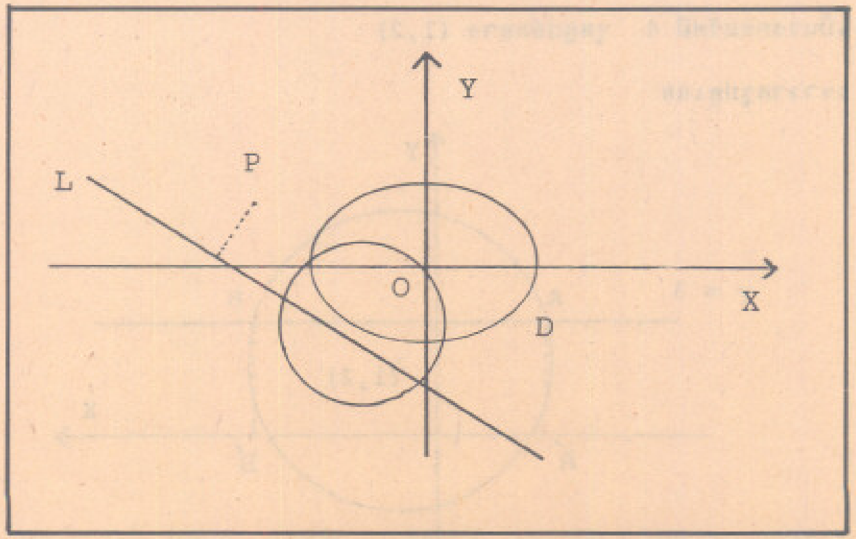
   ถ้า $p|(mn)$ แล้ว ($p|m$ หรือ $p|n$)

4. ถ้า ห.ร.ม.$(m,n)=d$ และ ค.ร.น.$(m,n)=c$ แล้ว $dc=mn$

7.

เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้

โจทย์เกี่ยวกับเรื่องพิกัดของจุด เส้นตรง และภาคตัดกรวย หากเราสามารถวาดรูปดูกราฟได้ก็จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้



ตัวอย่างที่ 7.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ถ้าเส้นตรง $y = 3$ ตัดวงกลม $x^2-2x+y^2-4y-11 = 0$ ที่จุด A และ B แล้วโพรเจคชัน (projection) ของเส้นตรง AB บนแกน X ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{12}$
2. $\sqrt{15}$
3. $\sqrt{30}$
4. $\sqrt{60}$

ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูปวงกลม

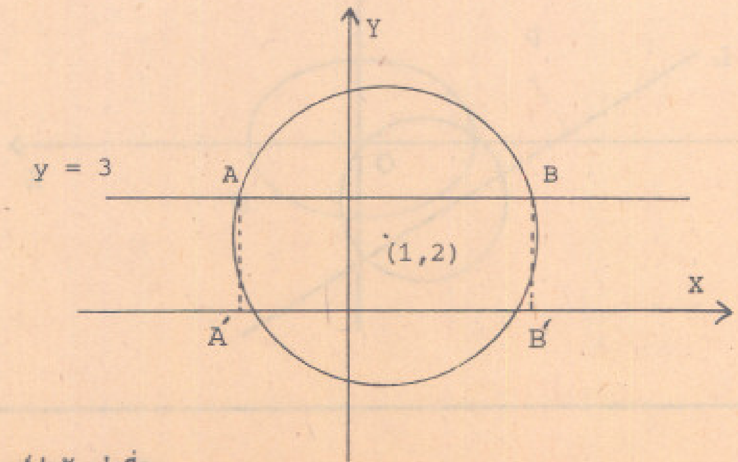
$$x^2-2x+y^2-4y-11 = 0$$

$$(x^2-2x+1) + (y^2-4y+4) = 11+1+4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$

เป็นวงกลมรัศมี 4 จุดศูนย์กลาง (1,2)

เราวาดรูปดูเลย



โพรเจคชันของจุด A และ B บนแกน X ก็คือ A' และ B' ระยะ $A'B'$ เท่ากับความยาวเส้นตรง AB ดังนั้นเมื่อเราใช้ไม้โปรวัดก็จะได้ค่าที่ทำให้ตัดตัวเลือกได้

จากการวัดค่าความยาว AB ได้ 7.8

ซึ่งใกล้เคียงกับ $\sqrt{60}$ มากที่สุด

เราจึงตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 7.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ความยาวของระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (1,10) กับ (-9,4) ไปยังจุดโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น $11y^2 + 36x^2 = 396$ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$
2. $2\sqrt{3}$
3. $2\sqrt{5}$
4. $2\sqrt{7}$

ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปวงรีเพื่อหาจุดโฟกัส

$$11y^2 + 36x^2 = 396$$

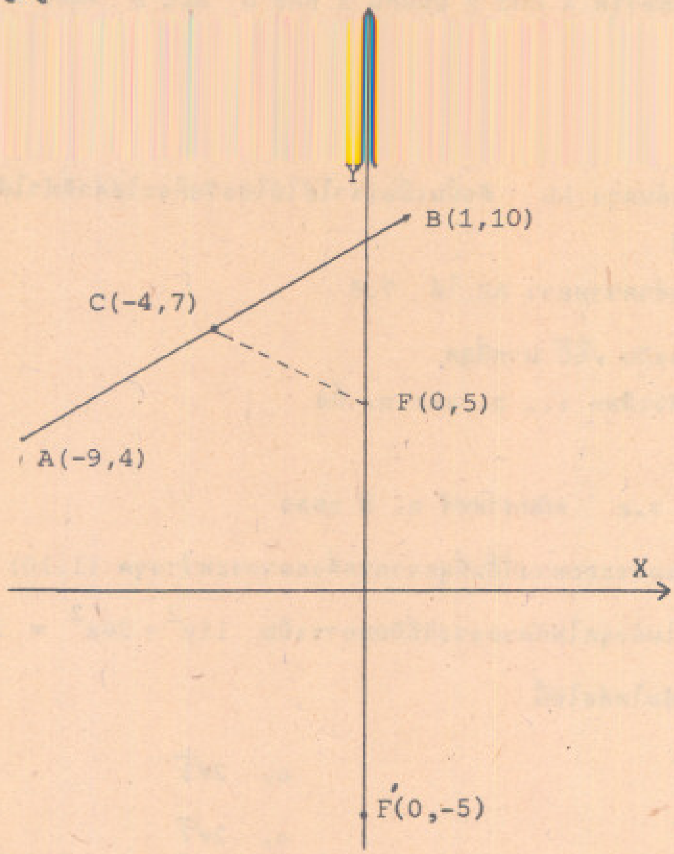
$$\frac{y^2}{6^2} + \frac{x^2}{(\sqrt{11})^2} = 1$$

มีจุดศูนย์กลาง (0,0) แกนเอกทับแกน X แกนโททับแกน Y

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{36 - 11} = \sqrt{25} = 5$$

เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสคือ F(0,5) และ $F'(0,-5)$

วาดรูปดู



จุดกึ่งกลาง AB คือ $\left(\frac{1-9}{2}, \frac{4+10}{2}\right) = (-4,7)$

วัดความยาว CF ได้เท่ากับ 4.5

เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $2\sqrt{2} \cong 2(1.414) = 2.828$

2. $2\sqrt{3} \cong 2(1.732) = 3.464$

3. $2\sqrt{5} \cong 2(2.236) = 4.472$

4. $2\sqrt{7} \cong 2(2.646) = 5.292$

สรุปเลือกข้อ 3. ดีกว่า

ตัวอย่างที่ 7.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ถ้าพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0,0) โดยมีแกน Y เป็นแกนสมมาตรและไดเรกตริกซ์ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งมีสมการเป็น $x^2+y^2-12y+27 = 0$ แล้วจุดโฟกัสและสมการของไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาคือข้อใดต่อไปนี้

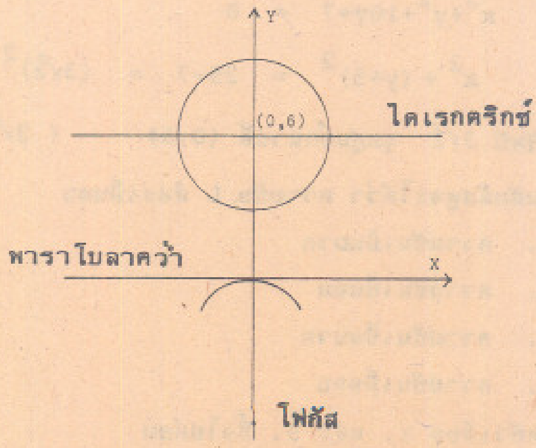
1. (0,-6) และ $y+6 = 0$
2. (0,-6) และ $y-6 = 0$
3. (0,6) และ $y-6 = 0$
4. (0,6) และ $y+6 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

$$x^2+y^2-12y+27 = 0$$
$$x^2+y^2-12y+36 = -27+36$$
$$x^2+(y-6)^2 = 3^2$$

เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลาง (0,6) และรัศมียาว 3



จากรูปพบว่า จุดโฟกัสของพาราโบลาต้องอยู่บนแกน Y ทางด้านลบ

เราจึงตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อนได้
ต่อไปจากโจทย์บอกว่า ไดเรกตริกซ์ผ่านจุด (0,6) ดังนั้น $y = 6$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์
เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 7.4 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

ถ้าเส้นตรง L สัมผัสวงกลม $x^2+y^2+10y+7 = 0$ ที่จุด (3,-2) แล้ว สมการของเส้นตรง L คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x-y-5 = 0$
2. $x+y-1 = 0$
3. $3x-7y-23 = 0$
4. $3x+7y+5 = 0$

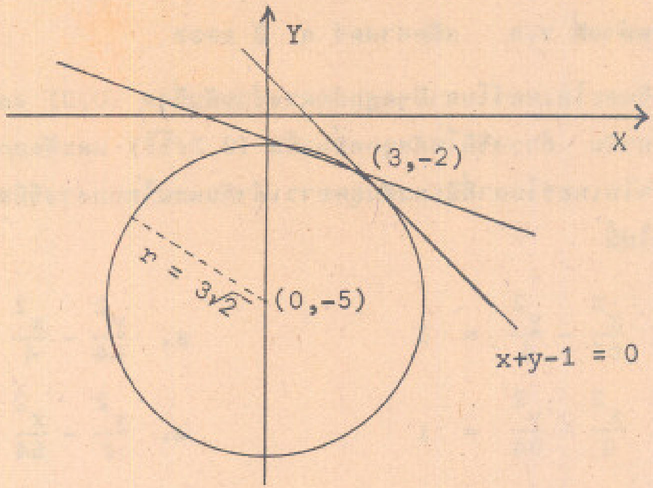
ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลมแล้วเขียนรูป

$$x^2+y^2+10y+7 = 0$$
$$x^2 + (y+5)^2 = 25-7 = (3\sqrt{2})^2$$

เป็นวงกลมรัศมี $3\sqrt{2}$ จุดศูนย์กลางที่ (0,5) ($3\sqrt{2} \simeq 4.2$)

ลองลากเส้นสัมผัสดูจะได้ว่า ความชัน L ต้องเป็นลบ
ตัวเลือก 1. ความชันเป็นบวก
ตัวเลือก 2. ความชันเป็นลบ
ตัวเลือก 3. ความชันเป็นบวก
ตัวเลือก 4. ความชันเป็นลบ
ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งไปก่อน



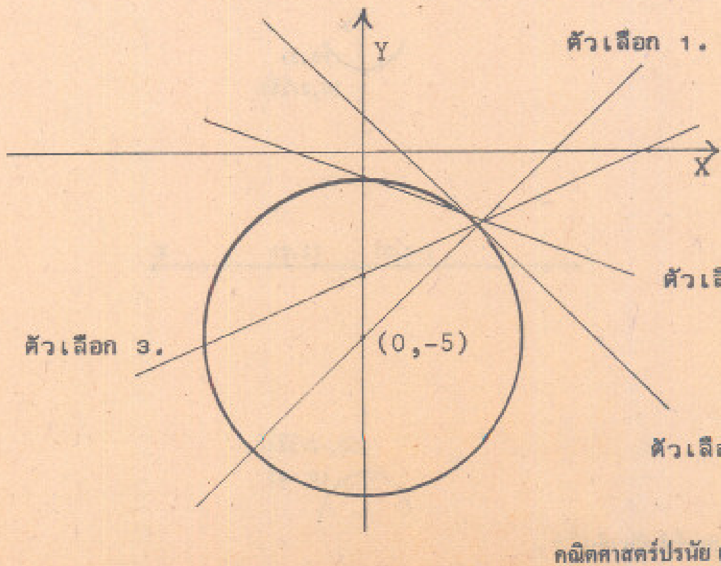
ต่อไปเขียนเส้นตรงตามตัวเลือก 2. และ 4. ดังรูป

จะพบว่าเส้นตรงในตัวเลือก 4. ตัดกับวงกลม 2 จุด

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

หมายเหตุ 1. สอบคราวหน้าอย่าลืมเอาวงเวียนเข้าสอบด้วย

2. ลองเขียนเส้นตรงทั้ง 4 ตัวเลือกก็ตัดตัวเลือกได้เหมือนกัน



ตัวอย่างที่ 7.5 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

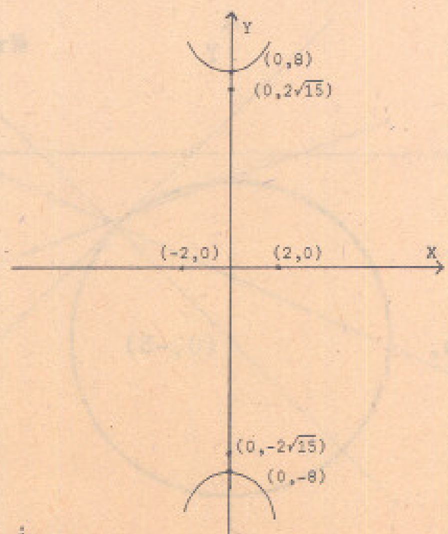
วงรีและไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุด (0,0) และมีจุดยอดเป็นจุดเดียวกัน ถ้าวงรีมีโฟกัสจุดหนึ่งเป็น $(0,2\sqrt{15})$ และตัดแกน X ที่จุด (-2,0) แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรีมีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{4} = 1$ 2. $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{4} = 1$

3. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{64} = 1$ 4. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{64} = 1$

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์เท่าที่ทำได้ก่อน
จากรูปเห็นได้ชัดเจนว่าแกนของไฮเพอร์โบลาคือ แกน Y
แต่ตัวเลือก 1. และ 3. แกนไฮเพอร์โบลาเป็นแกน X
เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้



พิจารณาบนวงรีจะได้ $c = 2\sqrt{15}$, $b = 2$

ดังนั้น $a = \sqrt{60+4} = \sqrt{64} = 8$

เพราะฉะนั้น a ของไฮเพอร์โบลาคือ $a = 8$

พิจารณาเฉพาะตัวเลือก 2. และ 4.

2. a ของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 8

4. a ของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 2

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 7.6 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

วงกลม 2 วง จุดศูนย์กลางที่ P และ Q มีรัศมีรวมกันเป็น 1 หน่วย ตัดกันที่จุด A และ B ถ้ามุม $P\hat{A}B$ และมุม $B\hat{A}Q$ เป็น 60° และ 45° ตามลำดับ แล้วรัศมีของวงกลมทั้ง 2 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $3 - \sqrt{6}$, $\sqrt{6} - 2$ 2. $\sqrt{2} - 1$, $2 - \sqrt{2}$

3. $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$ 4. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

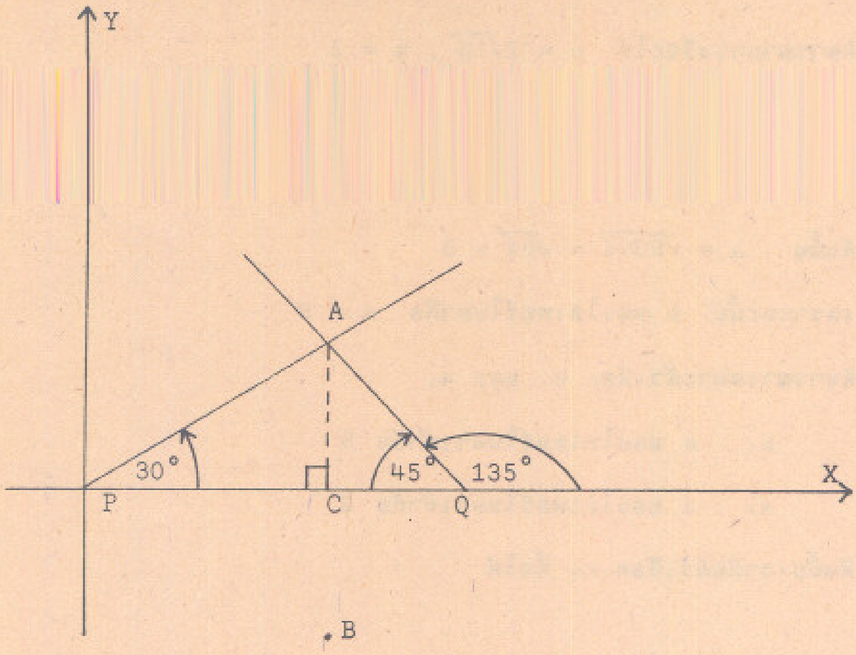
ตอบ 2.

แนวคิด ตัวเลือก 3. ตัดทิ้งได้เลยเพราะว่า $2 - \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$

ต่อไปเขียนรูปใหญ่ๆ โดยให้ P(0,0) และ Q อยู่บนแกน X ทางด้านขวาก็ได้ให้ A อยู่ในควอแดรนท์ที่ 1

เพราะว่า AB ตั้งฉากกับแกน X

ดังนั้น $A\hat{P}Q = 30^\circ$ และ $P\hat{Q}A = 45^\circ$



ลากเส้นตรงผ่านจุด P ทำมุม 30° กับแกน X

ลากเส้นตรงผ่านจุด Q ทำมุม 135° กับแกน X

จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองจะตัดกันที่ A

จาก A ลากเส้นลงมาตั้งฉากกับแกน X ที่ C

วัดระยะทาง AP ได้ 6.6 เซนติเมตร

วัดระยะทาง AQ ได้ 4.7 เซนติเมตร

จากโจทย์บอกว่า AP รวมกับ AQ ยาว 1 หน่วย

ดังนั้นเราลองเทียบบัญญัติไตรยางศ์ดูจะได้ว่า

$$AP + AQ = 6.6 + 4.7 = 11.3$$

ถ้าต้องการให้ $AP + AQ = 1$

จะต้องให้ $AP = \dfrac{6.6}{11.3} = 0.584$

และ $AQ = \dfrac{4.7}{11.3} = 0.416$

หมายเหตุ ถึงแม้รูปกราฟจะวัดได้ต่างกัน แต่เมื่อเทียบบัญญัติไตรยางค์แล้ว ค่า AP = 0.584 และ AQ = 0.416 เหมือนกัน

เปรียบเทียบกับตัวเลือก

1. $3 - \sqrt{6} = 3 - 2.45 = 0.55$

$\sqrt{6} - 2 = 2.45 - 2 = 0.45$

2. $\sqrt{2} - 1 = 1.414 - 1 = 0.41$

$2 - \sqrt{2} = 2 - 1.414 = 0.586$

4. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{1.414}{2} = 0.29$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

ข้อแนะนำ ขอให้ลองวาดรูปดูเองก็จะได้ผลทำนองเดียวกัน

<u>เส้นตรง</u>

L : aX+bY+c = 0

M : mX+nY+k = 0

L ขนานกับ M ก็ต่อเมื่อ ความชัน L เท่ากับ ความชัน M

L ขนานกับ M ก็ต่อเมื่อ an = bm

L ตั้งฉากกับ M ก็ต่อเมื่อ am+bn=0

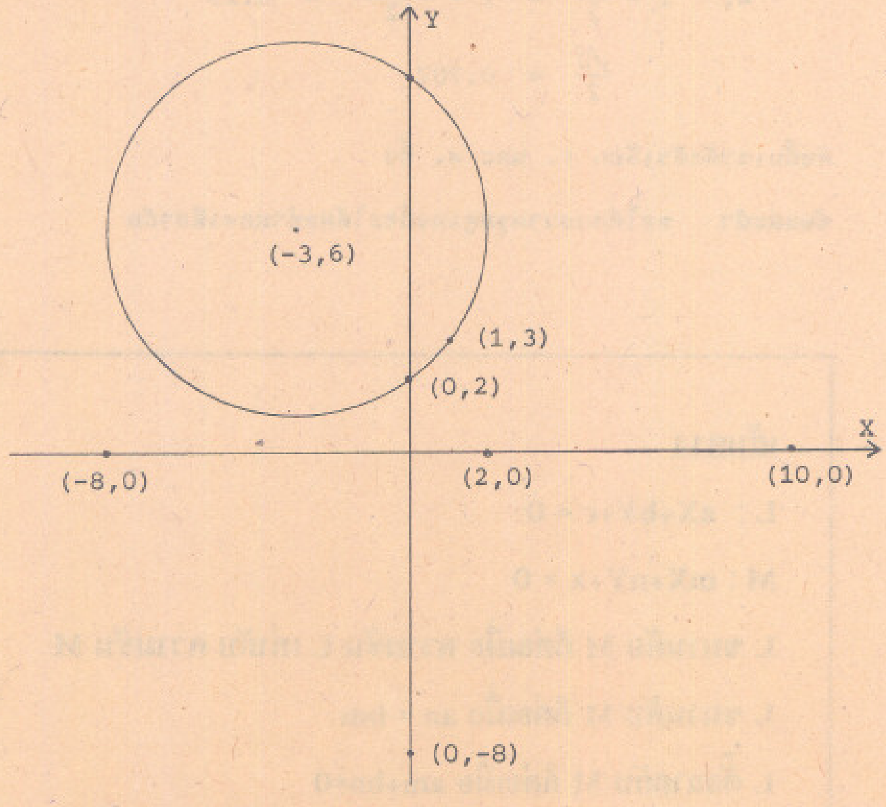
ตัวอย่างที่ 7.8 **คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534**

วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (-3,6) และผ่านจุด (1,3) จะตัดแกน X หรือแกน Y ที่จุดในข้อใดต่อไปนี้

1. (0,2) และ (0,10)
2. (2,0) และ (10,0)
3. (2,0) และ (-8,0)
4. (0,2) และ (0,-8)

ตอบ 1.

แนวคิด วาดรูปแล้วตัดตัวเลือกได้ทันที



ตัวเลือกที่ตัดทิ้งคือ 2., 3. และ 4.

ตัวอย่างที่ 7.9 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

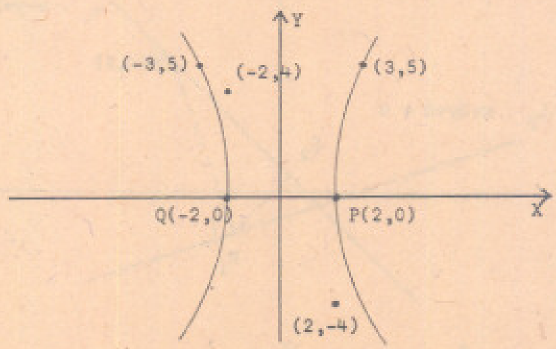
ให้ P และ Q เป็นโพรเจคชันของจุด (2,-4) และ (-2,4) บนแกน X ตามลำดับ ถ้ากราฟของไฮเพอร์โบลามีจุด P และ Q เป็นจุดยอดและผ่านจุด (-3,5) แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนกราฟของไฮเพอร์โบลานี้

1. $(1,\sqrt{17})$
2. $(2,2\sqrt{3})$
3. $(3,\sqrt{27})$
4. $(4,2\sqrt{15})$

ตอบ 4.

แนวคิด เขียนรูปตามโจทย์เท่าที่ได้ก่อน

พิกัด P คือ (2,0) และพิกัด Q คือ (-2,0)



จากรูปจุด (x,y) ที่อยู่บนไฮเพอร์โบลาได้นั้น $x \leqslant -2$ หรือ $x \geqslant 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้ง

เพราะว่า ถ้า $x = 2$ แล้ว $y = 0$ จึงจะอยู่บนไฮเพอร์โบลาได้

เพราะฉะนั้น $(2,2\sqrt{3})$ ไม่อยู่บนไฮเพอร์โบลาแน่นอน

เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่า ถ้า (-3,5) อยู่บนไฮเพอร์โบลาแล้ว (3,5) ต้องอยู่บนไฮเพอร์โบลาด้วย เพราะฉะนั้น $(3,\sqrt{27})$ ไม่อยู่บนกราฟของไฮเพอร์โบลา เราจึงตัดตัวเลือกนี้ทิ้งได้อีก

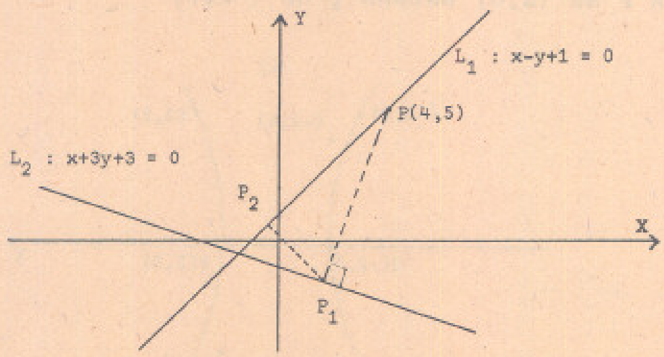
ตัวอย่างที่ 7.10 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

ให้ $P(4,5)$ เป็นจุดอยู่บนเส้นตรง L_1 ที่มีสมการเป็น $x-y+1 = 0$ และ P_1 เป็นโพรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง L_2 ที่มีสมการเป็น $x+3y+3 = 0$ ดังนั้นโพรเจคชันของจุด P_1 บน L_1 คือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$
2. $(-\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$
3. $(-\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$
4. $(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ก่อน



ลากเส้นจาก P มาตั้งฉากกับ L_2 ที่ P_1

ลากเส้นจาก P_1 ไปตั้งฉากกับ L_1 ที่จุด P_2

จะได้ P_2 เป็นจุดที่ต้องการ

เขียนรูปให้โตอีกนิด เช่นใช้ 1 นิ้วต่อหนึ่งหน่วย แล้ววัดพิกัดเพื่อหาค่าของ x และ y ได้ค่าเป็น $x = -0.39$

$y = 0.58$

เลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

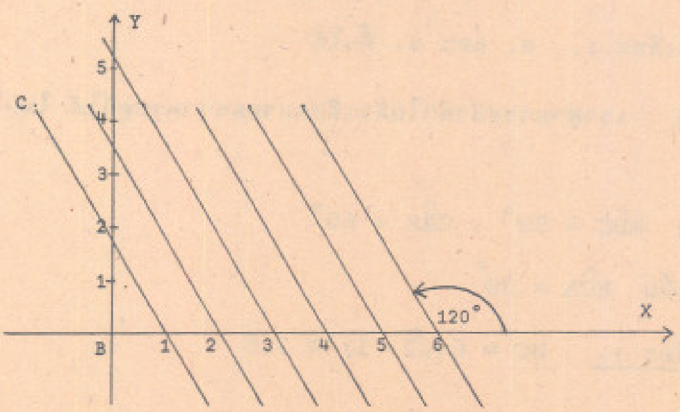
ตัวอย่างที่ 7.10 **คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534**

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีมุม ABC เป็นมุมฉาก และมุม CAB กาง 60 องศา ถ้าผลบวกของความยาวด้าน AB กับ AC เท่ากับ 6 หน่วย แล้วด้าน CB จะยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6(\sqrt{2}-1)$ หน่วย
2. 2 หน่วย
3. $2\sqrt{2}$ หน่วย
4. $2\sqrt{3}$ หน่วย

ตอบ 4.

แนวคิด



1. ให้ B อยู่ที่ (0,0) ดังนั้นให้จุด A อยู่บนแกน X ระหว่าง (0,0) กับ (6,0)
2. ลากเส้น L_1 ผ่านจุด (6,0) และทำมุม 120 กับแกน X

เพราะว่า AC ต้องขนานกับ L_1

3. ลองลากเส้นให้ขนานกับ L_1 และผ่านจุด (5,0),(4,0),...,(1,0)

เพราะว่า $AB + AC = 6$ หน่วย

เพราะฉะนั้นพิกัดของจุด A ต้องอยู่ระหว่าง (2,0) กับ (3,0)
โดยการวัดระยะทาง จุด C ต้องอยู่ระหว่าง (0,3.4) กับ (0,5.2)
เพราะฉะนั้น $3.4 < BC < 5.2$

ดูค่าที่ตัวเลือกบ้าง

1. $6(\sqrt{2} - 1) = 6(1.414 - 1) = 2.484$
2. 2
3. $2\sqrt{2} = 2(1.414) = 2.828$
4. $2\sqrt{3} = 2(1.732) = 3.464$

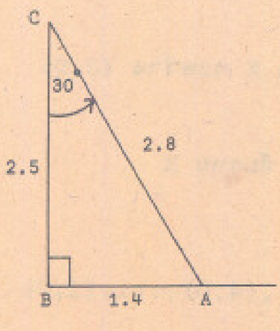
สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

หมายเหตุ เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาลองวาดรูปดูก็ได้ โดยใช้เหตุผลดังนี้

เพราะว่า $A\hat{B}C = 90^\circ$, $C\hat{A}B = 60^\circ$

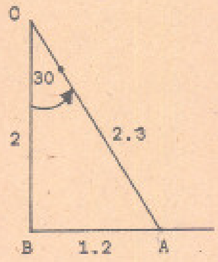
เพราะฉะนั้น $B\hat{C}A = 30^\circ$

<u>จากตัวเลือก 1.</u> $BC = 6(\sqrt{2} - 1) \cong 2.5$



วัดระยะ AB ได้ 1.4 ระยะ AC ได้ 2.8
ดังนั้น $AB + AC \neq 6$
เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

<u>จากตัวเลือก 2.</u>   BC = 2

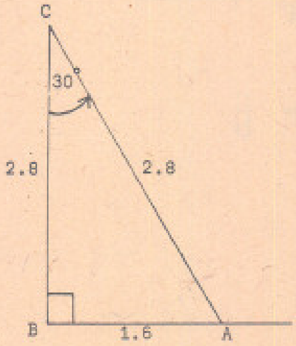


วัดระยะ AB ได้ 1.2   ระยะ AC ได้ 2.3

ดังนั้น AB + AC $\neq$ 6

เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

<u>จากตัวเลือก 3.</u>   BC = $2\sqrt{2}$ = 2.8



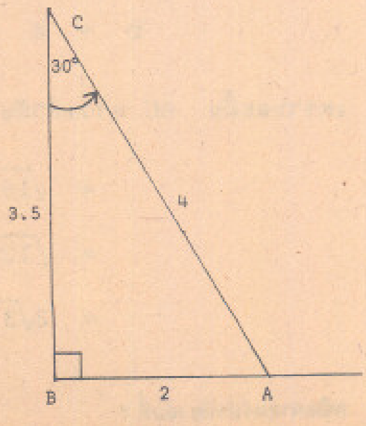
วัดระยะ AB ได้ 1.6   ระยะ AC ได้ 2.8

ดังนั้น AB + AC $\neq$ 6

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

เหลือตัวเลือก 4. ตัวเลือกเดียวลองวัดรูปดูก็ได้ หรือเลือกเป็นคำตอบเลย

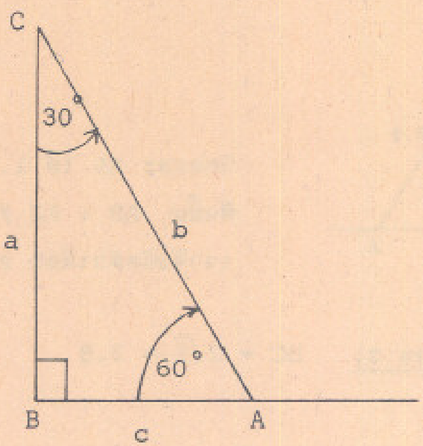
<u>จากตัวเลือก 4.</u>   BC = $2\sqrt{3}$ = 3.5



วัดระยะ AB ได้ 2   ระยะ AC ได้ 4

เพราะฉะนั้น AB + AC = 6

ข้อสังเกต วิธีจริงคือ



$$\cos A = \cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{c}{b}$$

$$b = 2c$$

เพราะว่า $b + c = 6$

$$2c \quad c = 6$$

$$c = 2$$

$$b = 4$$

เพราะฉะนั้น BC ยาวเท่ากับ $\sqrt{b^2 - c^2}$

$$= \sqrt{16 - 4}$$

$$= \sqrt{12}$$

$$= 2\sqrt{3}$$

ตัวอย่างที่ 7.11 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y = \frac{1}{4}x^2$ และสัมผัสกับเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลานี้คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+y^2-2x-3 = 0$
2. $x^2+y^2-2y-3 = 0$
3. $x^2+y^2-2x-1 = 0$
4. $x^2+y^2-2y-1 = 0$

ตอบ 2.

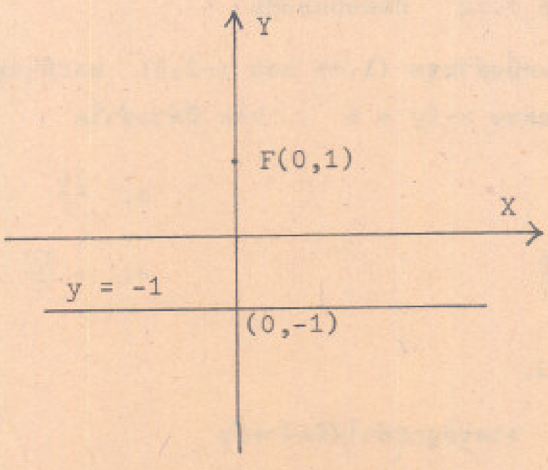
แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา $y = \frac{1}{4}x^2$

$$x^2 = 4y$$

$$= 4(1)y$$

เป็นพาราโบลาหงาย จุดยอด (0,0) และโฟกัส (0,1)

สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = -1$



เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงกลมที่ต้องการคือ (0,1) และรัศมียาว 2

พิจารณาตัวเลือกพบว่า จุดศูนย์กลางของแต่ละตัวเลือกคือ

1. (1,0) 2. (0,1)

3. (1,0) 4. (0,1)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

เพราะว่าวงกลมผ่านจุด (0,-1) เรานำไปแทนค่าในตัวเลือก 2. และ 4. จะได้

2. $0^2+(-1)^2-2(-1)-3 = 0$

4. $0^2+(-1)^2-2(-1)-1 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 7.12 ข้อสอบแข่งขัน

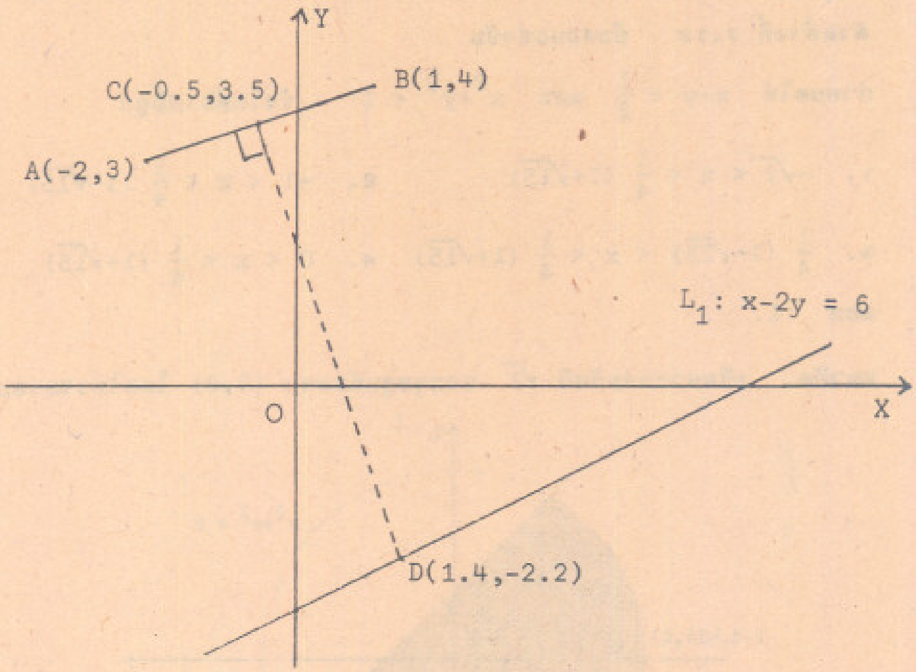
วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด (1,4) และ (-2,3) และมีจุดศูนย์กลาง (h,k) อยู่บนเส้นตรง $x-2y = 6$, h+k มีค่าเท่าใด

1. $\frac{26}{7}$ 2. $\frac{16}{7}$

3. $-\frac{6}{7}$ 4. $-\frac{10}{7}$

ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปดูจะทำให้คิดง่ายขึ้น



แบ่งครึ่งคอร์ด AB ที่จุด C คือ $(\frac{1-2}{2}, \frac{3+4}{2}) = (-0.5, 3.5)$

ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB ที่จุด C มาตัดเส้นตรง L_1 ที่จุด D

วัดพิกัดจุด D ได้เป็น (1.4,-2.2)

เพราะฉะนั้น $h = 1.4$, $k = -2.2$

$h+k = 1.4-2.2 = -0.8$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ได้ทันที

ดูค่าตัวเลือก 3. และ 4.

3. -0.857

4. -1.429

สรุปตัดตัวเลือก 4. ทิ้งดีกว่า

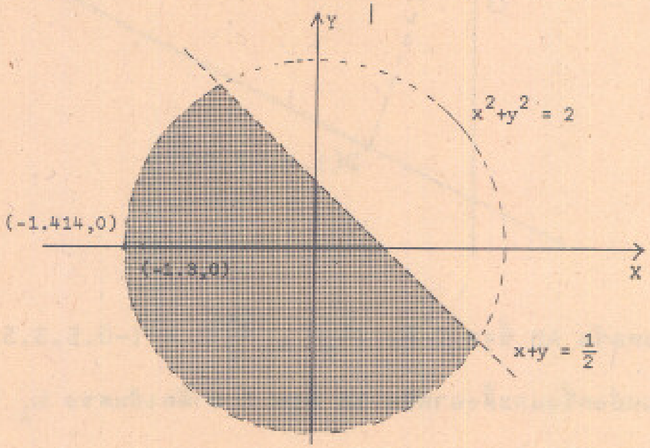
ตัวอย่างที่ 7.13 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $x+y < \frac{1}{2}$ และ $x^2+y^2 < 2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $-\sqrt{2} < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$
2. $-1 < x < \frac{1}{4}(1-\sqrt{15})$
3. $\frac{1}{4}(1-\sqrt{15}) < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$
4. $0 < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$

ตอบ 1.

แนวคิด เขียนวงกลมรัศมี $\sqrt{2}$ และจุดศูนย์กลาง (0,0) โดยไม่รวมขอบ



บริเวณที่ $x+y < \frac{1}{2}$ และ $x^2+y^2 < 2$ คือบริเวณที่แรเงา

เห็นได้ชัดเจนว่า $x = 0$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อนได้

จากรูป $x = -1.3$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

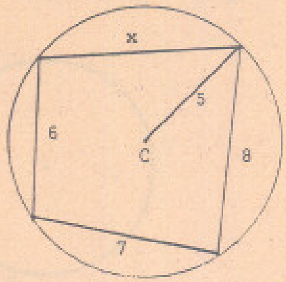
ต่อไปลองพิจารณา $\frac{1}{4}(1+\sqrt{15}) = \frac{1}{4}(1+3.87) = 1.22$

และ $\frac{1}{4}(1-\sqrt{15}) = \frac{1}{4}(1-3.87) = -0.72$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 7.14 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมดังรูปแล้ว x จะมีค่าเท่าใด



1. 7

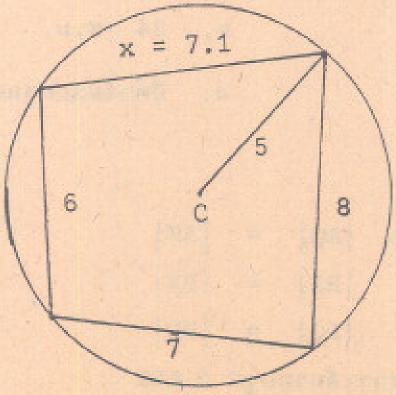
2. 8

3. 9

4. 10

ตอบ 1.

แนวคิด เขียนวงกลมรัศมี 5 และใช้วงเวียนตัดวงกลมให้ได้คอร์ดยาว 8,7,6 ตามลำดับ

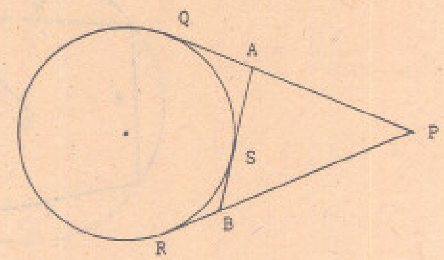


โดยการวัดได้ x = 7.1

เลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

ตัวอย่างที่ 7.15 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลม $\overline{PQ}$ และ $\overline{PR}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม A,B เป็นจุดบน $\overline{PQ}$ และ $\overline{PR}$ ตามลำดับ ที่ทำให้ $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลมที่ S



ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 5 ซ.ม. และระยะห่าง (ระยะที่ใกล้ที่สุด) ระหว่างจุด P และวงกลมเป็น 6 ซ.ม. แล้ว เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม APB มีความยาวเท่าใด

1. 23 ซ.ม.
2. 24 ซ.ม.
3. 25 ซ.ม.
4. มีค่าไม่แน่นอนแล้วแต่ตำแหน่งของจุด

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $|AQ| = |AS|$

และ $|BS| = |BR|$

และ $|PQ| = |PR|$

เพราะฉะนั้น ความยาวเส้นรอบรูป Δ ABP

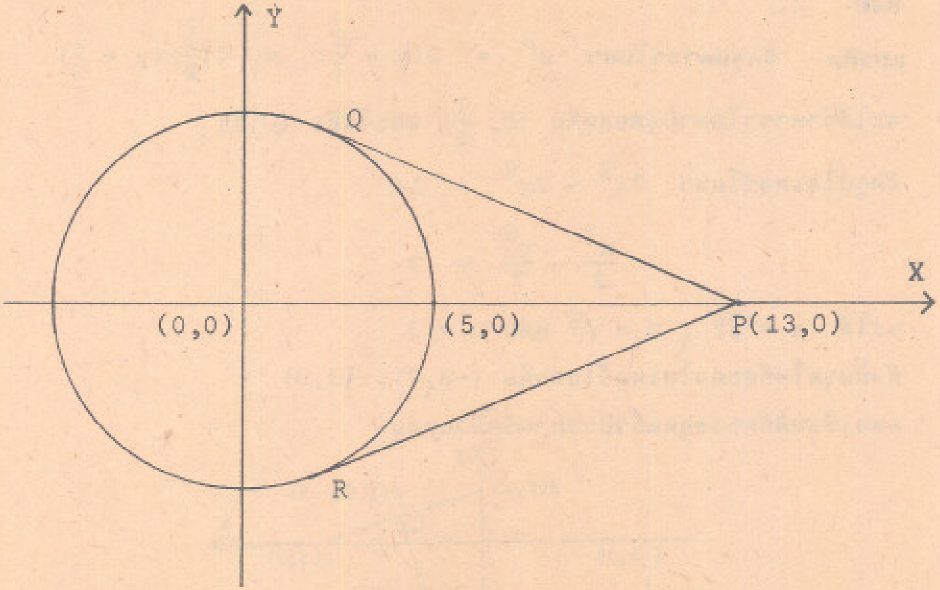
$$= |AP| + |AS| + |BS| + |BP|$$
$$= |AP| + |AQ| + |BR| + |BP|$$
$$= |AQ| + |PR|$$
$$= 2|PQ|$$

ดังนั้นเราวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์เพื่อวัดความยาว AB ได้ดังนี้

ให้ จุดศูนย์กลาง O อยู่ที่ (0,0)

เขียนวงกลมรัศมี 5

จะได้พิกัด P เป็น (13,0)



วัดความยาว PQ ได้ 12

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

<u>หมายเหตุ</u> วาดรูปแล้ววัดระยะทางตามโจทย์ก็จะได้ความยาวเส้นรอบรูป Δ APB เท่ากับ 24 ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้ โดยไม่ต้องพิสูจน์ว่า ความยาวเส้นรอบรูป Δ APB = $2|PQ|$

ตัวอย่างที่ 7.16 **ข้อสอบแข่งขัน**

วงกลมซึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 2y-1$ และโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $7x^2-2y^2 = 14$ มีรัศมียาวเท่าใด

1. 3 2. 4

3. 5 4. 6

ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปพาราโบลา $x^2 = 2(y-\frac{1}{2}) = 4(\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})$

จะได้ว่าพาราโบลามีจุดยอดคือ $(0, \frac{1}{2})$ และโฟกัส $(0,1)$

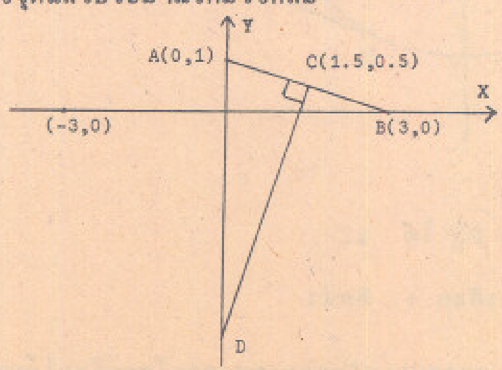
จัดรูปไฮเพอร์โบลา $7x^2 - 2y^2 = 14$

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$$

จะได้ $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{7}$ และ $c = 3$

ดังนั้นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาคือ $(-3,0)$, $(3,0)$

ลองเขียนพิกัดของจุดแล้วประมาณรัศมีวงกลม



ลากเส้นแบ่งครึ่งระยะ AB และตั้งฉากกับ AB มาตัดกับแกน Y ที่จุด D

จะได้ว่าจุด D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

วัดระยะ AD ได้เท่ากับ 5 เซนติเมตร ดังนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

ตัวอย่างที่ 7.17 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนด $P(1,0)$, $Q(2,-1)$ และ $R(-1,-2)$ เป็นจุดสามจุดในระนาบพิกัดฉาก ถ้า A,B และ C เป็นจุดอีกสามจุดในระนาบเดียวกันที่ทำให้รูปสี่เหลี่ยม AQPR, BRQP และ CPRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้ว ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นกี่หน่วย

1. $8\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$
2. $10\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
3. $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$
4. 40

ตอบ 3.

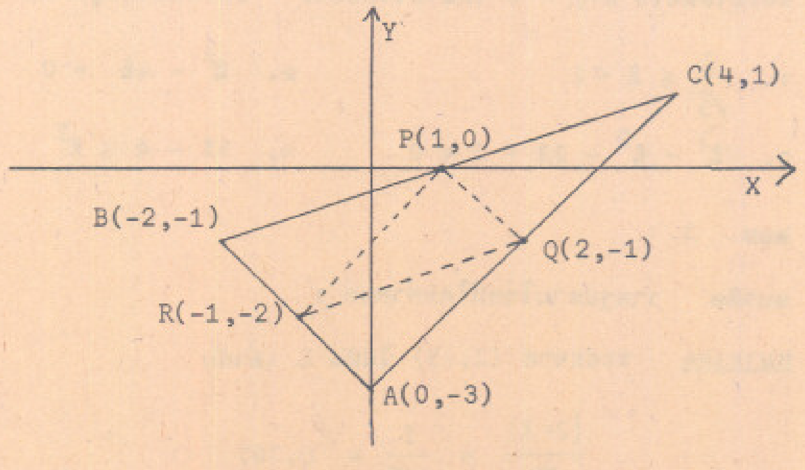
แนวคิด

โดยการเลื่อนพิกัดของจุดเพื่อให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์พบว่า

A ต้องมีพิกัดเป็น $(0,-3)$

B ต้องมีพิกัดเป็น $(-2,-1)$

C ต้องมีพิกัดเป็น $(4,1)$



โดยการวัดจะได้ AB ยาว 2.8 เซนติเมตร

AC ยาว 5.8 เซนติเมตร

BC ยาว 6.5 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับ $2.8+5.8+6.5 = 15.1$

พิจารณาค่าจากตัวเลือก

1. $8\sqrt{2} + 4\sqrt{10} \cong 8(1.4) + 4(3.2) = 11.2 + 12.8 = 24$
2. $10\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \cong 10(1.4) + 2(3.2) = 14 + 6.4 = 20.4$
3. $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \cong 6(1.4) + 2(3.2) = 8.4 + 6.4 = 15$
4. 40

จากค่าตัวเลขข้างต้นทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 7.18 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ ℓ เป็นความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ (2,-3) และมีเส้นตรง $x+y = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

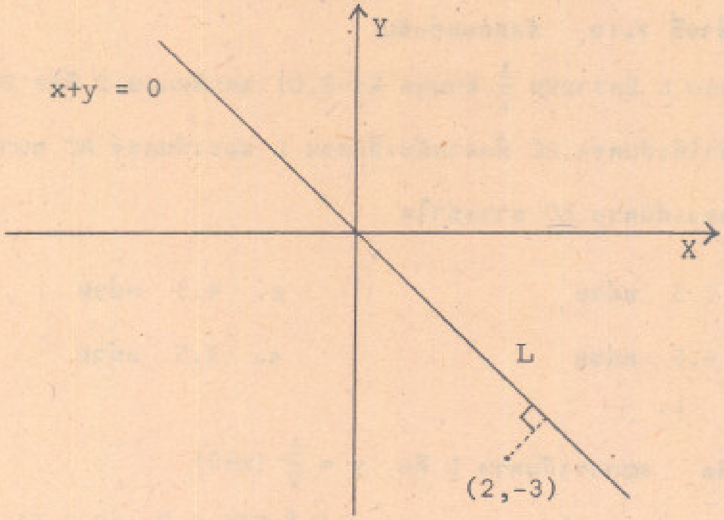
1. $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \ell < 1$
2. $\ell^3 - 4\ell = 0$
3. $\ell^3 - \ell^2 - 2\ell + 2 = 0$
4. $5\ell - 4 \leqslant \ell^2$

ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์โดยกำหนด 1

<u>หมายเหตุ</u> ระยะจาก (2,-3) ไปยัง L เท่ากับ

$$\frac{|2-3|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$$



วัดระยะทางจาก (2,-3) มายังเส้นตรง $x+y = 0$ ได้ 0.7

เพราะฉะนั้นค่า c ของพาราโบลาเท่ากับ $\frac{0.7}{2} = 0.35$

ความยาวเรตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c| = 1.4$ ดังนั้น $\ell = 1.4$

เพราะว่า $1.4 \not< 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

พิจารณาตัวเลือก 4.

$$5(1.4) - 4 = 7 - 4 = 3 \not< 1.96 = (1.4)^2$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ได้อีก

พิจารณา $(1.4)^3 - 4(1.4) = 2.744 - 5.6 = 2.856$

และ $(1.4)^3 - (1.4)^2 - 2(1.4) + 2 = 2.744-1.96-2.8+2$

$$= -0.016$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งดีกว่า

ตัวอย่างที่ 7.19 ข้อสอบแข่งขัน

เส้นตรง L มีความชัน $\frac{1}{2}$ ผ่านจุด A(-3,0) และตัดแกน Y ที่จุด B C เป็นจุดที่ทำให้เส้นตรง BC ตั้งฉากกับเส้นตรง L และเส้นตรง AC ขนานกับแกน Y ส่วนของเส้นตรง AC ยาวเท่าใด

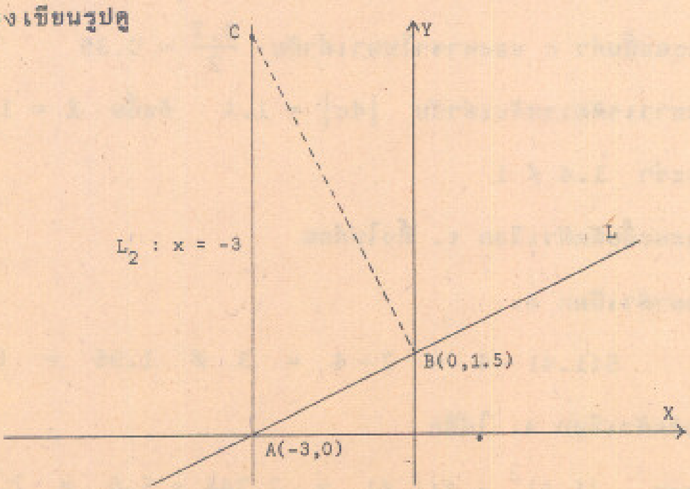
1. 7.5 หน่วย
2. 4.5 หน่วย
3. 6.5 หน่วย
4. 3.5 หน่วย

ตอบ 1.

แนวคิด สมการเส้นตรง L คือ $y = \frac{1}{2}(x+3)$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = 1.5$ ดังนั้นพิกัด B คือ (0,1.5)

ต่อไปต้องเขียนรูปดู



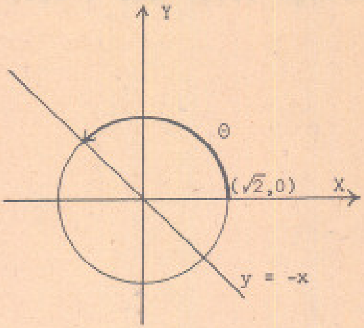
C ต้องอยู่ในแนวเส้นตรง L_2 ที่มีสมการเป็น $x = -3$

ลากเส้นจาก B และตั้งฉากกับ L ไปตัด L_2 ที่จุด C

วัดระยะทาง AC ได้ 7.5 เซนติเมตร

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

ตัวอย่างที่ 7.20 ข้อสอบแข่งขัน



จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0,0) ตัดแกน X ที่จุด $(\sqrt{2},0)$ ส่วนโค้งของวงกลมที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $(\sqrt{2},0)$ และสิ้นสุดที่จุดตัดของกราฟของเส้นตรง $y = -x$ กับวงกลมในควอดรันท์ที่ 2 ยาว θ หน่วย

จงพิจาณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก

ข. $\tan\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

ค. $\sin\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ ก. เป็นจริงเพียงข้อเดียว
2. ข้อ ค. เป็นจริงเพียงข้อเดียว
3. ข้อ ข. เป็นจริงเพียงข้อเดียว
4. ข้อ ก. - ค. เป็นเท็จทั้งสามข้อ

ตอบ 2.

แนวคิด เส้นรอบวงกลมที่กำหนดให้ยาว $= 2\pi r = 2\pi\sqrt{2}$

จากสัดส่วนความยาวดังภาพ

ดังนั้น θ ยาวเท่ากับ $\frac{3}{8}$ ของความยาวเส้นรอบวง

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{3}{8}2\pi\sqrt{2} = \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \cong 3.3326$

เพราะว่า $\theta = 3.3326$ อยู่ในควอดรันท์ 3

เพราะฉะนั้น $\cos\theta < 0$ จะได้ ก. เป็นเท็จ

$\tan\theta > 0$ จะได้ ข. เป็นเท็จ

$\sin\theta < 0$ จะได้ ค. เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 7.21 ข้อสอบแข่งขัน

จงหาจุดบนวงกลม $x^2+y^2 = 1$ ซึ่งห่างจากจุด (1,3) และ (-2,2) เท่ากัน

1. $(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ กับ $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$
2. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ กับ $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$
3. $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ กับ $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$
4. $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ กับ (0,1)

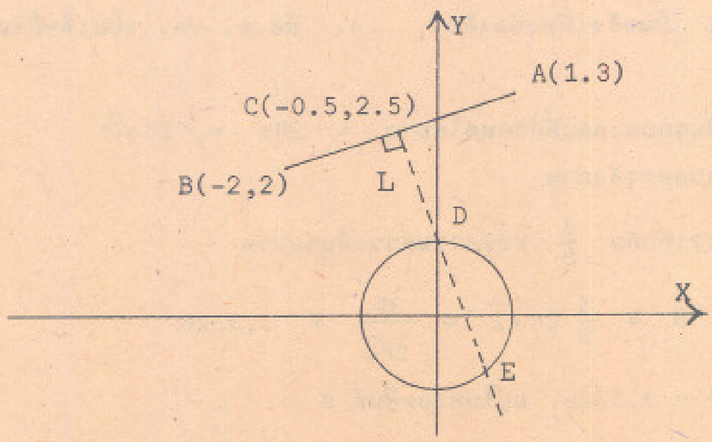
ตอบ 4.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เขียนวงกลมและจุด A(1,3), B(-2,2) ก่อน

แบ่งครึ่ง AB ที่ $C(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$ ลากเส้นตรง L ผ่านจุด C และตั้งฉากกับ AB

จุดที่ห่างจาก A และ B เท่ากัน ต้องอยู่บนเส้นตรง L และอยู่บนวงกลมคือ

จุด D และ E



เพราะว่าเส้นตรง L ตัดวงกลมที่จุด (0,1)

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

วิธีที่ 2 โจทย์ข้อนี้จะใช้วิธีนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าก็ได้เช่น

$$\sqrt{(1 - \frac{5}{13})^2 + (3 + \frac{12}{13})^2} \neq \sqrt{(-2 - \frac{5}{13})^2 + (2 - \frac{12}{13})^2}$$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ได้

ในทำนองเดียวกันเราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ได้ด้วย

แต่เมื่อลองกับค่าในตัวเลือก 4. พบว่า

$$\sqrt{(1 - \frac{3}{5})^2 + (3 + \frac{4}{5})^2} = \sqrt{(-2 - \frac{3}{5})^2 + (2 + \frac{4}{5})^2}$$

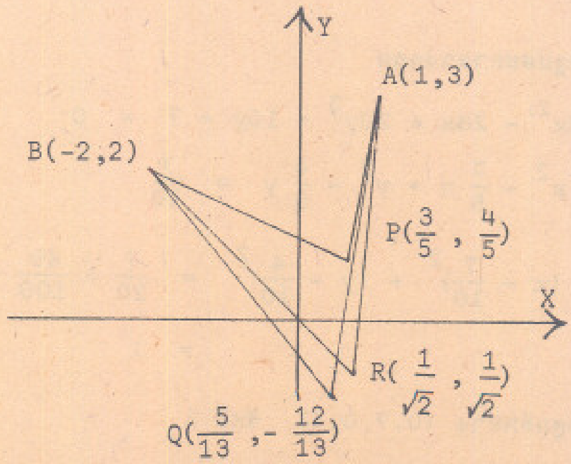
และ

$$\sqrt{(1 - 0)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (2 - 1)^2}$$

นั่นคือตัวเลือก 4. เป็นตัวเลือกที่ต้องการ

รู้อย่างนี้เริ่มแทนค่าที่ตัวเลือก 4. ก่อนก็สบายแล้ว

วิธีที่ 3 โจทย์ข้อนี้ใช้วิธีเขียนจุดแล้ววัดระยะทางก็จะตัดตัวเลือกได้



โดยการวัดด้วยไม้บรรทัด

$AP \neq BP$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$AQ \neq BQ$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$AR \neq BR$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

สรุปเลือกตัวเลือก 4.

ตัวอย่างที่ 7.22 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดเส้นตรง $3x+4y = 13$ จงหาระยะที่ใกล้ที่สุดของจุดบนวงกลม $20x^2 - 28x + 20y^2 - 16y - 7 = 0$ กับเส้นตรงนี้

1. 0.36 หน่วย
2. 1.86 หน่วย
3. 0.86 หน่วย
4. 2.86 หน่วย

ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

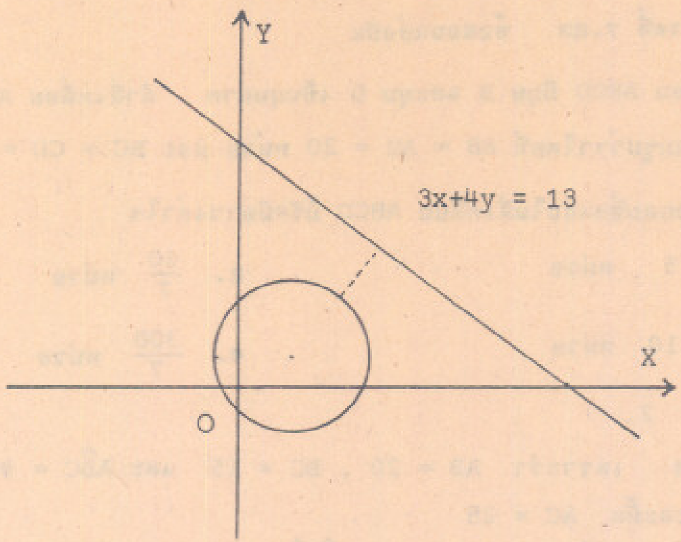
$$20x^2 - 28x + 20y^2 - 16y - 7 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{5}x + y^2 - \frac{4}{5}y = \frac{7}{20}$$

$$(x - \frac{7}{10})^2 + (y - \frac{4}{10})^2 = \frac{7}{20} + \frac{49}{100} + \frac{16}{100}$$

$$= 1$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (0.7,0.4) รัศมี 1



โดยการวัดระยะทางใกล้สุดเท่ากับ 0.8

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

<u>หมายเหตุ</u> ระยะจากจุด (0.7,0.4) ไปยังเส้นตรง $3x+4y-13 = 0$

$$\text{เท่ากับ} \quad \left|\frac{3(0.7)+4(0.4)-13}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|$$

$$= \frac{|2.1+1.6-13|}{5}$$

$$= \frac{9.3}{5}$$

$$= 1.86$$

เพราะฉะนั้นระยะใกล้สุดเท่ากับ $1.86 - 1 = 0.86$

ตัวอย่างที่ 7.23 ข้อสอบแข่งขัน

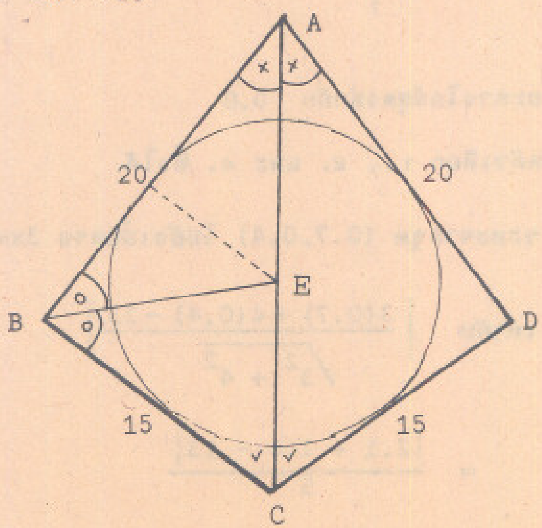
สี่เหลี่ยม ABCD มีมุม B และมุม D เป็นมุมฉาก ถ้าสี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดยที่ AB = AD = 20 หน่วย และ BC = CD = 15 หน่วย แล้ววงกลมซึ่งแนบในสี่เหลี่ยม ABCD มีรัศมียาวเท่าไร

1. 5 หน่วย
2. $\frac{60}{7}$ หน่วย
3. 10 หน่วย
4. $\frac{300}{7}$ หน่วย

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า AB = 20 , BC = 15 และ $A\hat{B}C = 90$

เพราะฉะนั้น AC = 25



แบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ แล้วลากเส้นมาตัด AC ที่ E จะได้ว่า E เป็นจุดศูนย์กลางของ วงกลมที่สัมผัสภายในสี่เหลี่ยม ABCD

วัดระยะตั้งฉากจาก E มายัง AB ได้ 8.1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.. 3. และ 4. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 7.24 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $u = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ ข้อความในข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง

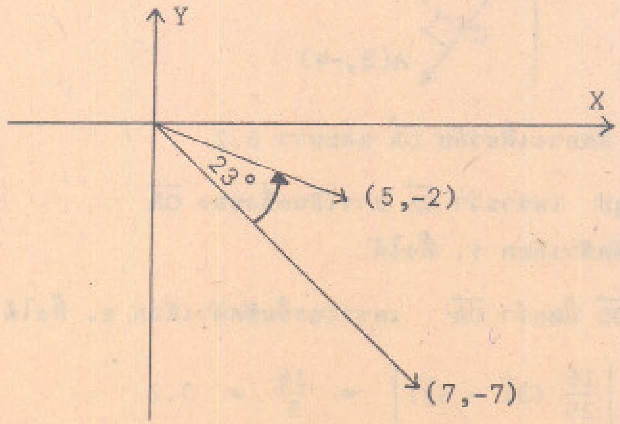
1. เวกเตอร์ $2\bar{u} + \bar{v}$ ทำมุม 30° กับเวกเตอร์ $\bar{u} + 2\bar{v}$
2. เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{u} - 2\bar{v}$ คือ $6\bar{i} + \bar{j}$
3. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ $\bar{u} + \bar{v}$ คือ $-\frac{4}{5}\bar{i} + \frac{3}{5}\bar{j}$
4. $|\bar{u} - \bar{v}| \geqslant |\bar{u} - \bar{v}|$

ตอบ 1.

แนวคิด วาดรูปของเวกเตอร์แล้ววัดมุม

1) $2\bar{u} + \bar{v} = 7\bar{i} - 7\bar{j}$

$\bar{u} + 2\bar{v} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$



จากการวัดมุมของ $2\bar{u} + \bar{v}$ และ $\bar{u} + 2\bar{v}$ โดยใช้ไม้โปรได้ 23°

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

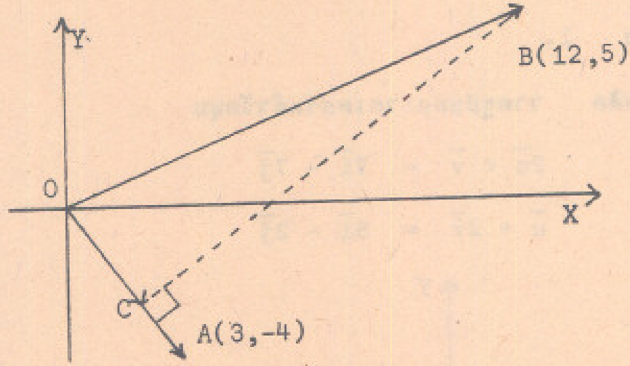
ตัวอย่างที่ 7.25 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนด $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 12\bar{i} + 5\bar{j}$ ลาก BC ตั้งฉากกับ OA ที่จุด C เวกเตอร์ $\overrightarrow{OC}$ เท่ากับ

1. $\frac{5}{16}(3\bar{i} - 4\bar{j})$
2. $\frac{16}{5}(3\bar{i} - 4\bar{j})$
3. $\frac{16}{25}(3\bar{i} - 4\bar{j})$
4. $\frac{25}{26}(3\bar{i} - 4\bar{j})$

ตอบ 3.

แนวคิด



ตามรูป $\overrightarrow{OC}$ ทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{OA}$ และยาว 3.2

พิจารณาจากรูป เพราะว่า $\overrightarrow{OA}$ ยาวเกินครึ่งของ $\overrightarrow{OA}$
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $\overrightarrow{OC}$ สั้นกว่า $\overrightarrow{OA}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\left|\frac{16}{25}(3\bar{i} - 4\bar{j})\right| = \frac{16}{5} = 3.2$

และ $\left|\frac{25}{26}(3\bar{i} - 4\bar{j})\right| = 4.8$

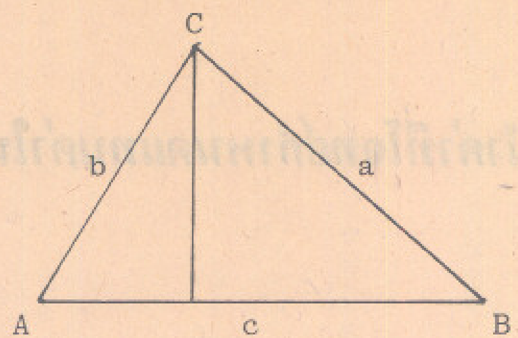
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งดีกว่า

8.

นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก

การแทนค่าตัดตัวเลือกนั้นสามารถพบเห็นได้เป็นส่วนมากในการทำข้อสอบแบบปรนัย พบทั้งในเนื้อหาอสมการ ทั้งในการแก้สมการ นอกจากนั้นการแทนค่าตามข้อกำหนดของโจทย์ก็สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เพียงแต่พิจารณานำค่าที่โจทย์กำหนดนั้นไปช่วยในการตัดตัวเลือกให้เหมาะสมเท่านั้น

กฎของไซนและโคไซน



กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

กฎของโคไซน์

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

ตัวอย่างที่ 8.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ข้อใดเป็นสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0,0) จุดโฟกัสที่ (5,0) และ (-5,0) และมีจุด (0,-4) เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนสังยุค

1. $16x^2-9y^2-144 = 0$ 2. $9x^2-16y^2-144 = 0$

3. $16y^2-9x^2-144 = 0$ 4. $9y^2-16x^2-144 = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด จากโจทย์ (0,-4) เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนสังยุค แสดงว่า (0,-4) ต้องอยู่บนไฮเพอร์โบลา

ลองแทนค่า x = 0 , y = -4 ในตัวเลือก

1. $16(0)^2-9(-4)^2-144 \neq 0$

2. $9(0)^2-16(-4)^2-144 \neq 0$

3. $16(-4)^2-9(0)^2-144 \neq 0$

4. $9(-4)^2-16(0)^2-144 = 0$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

$\sin(\pi+\theta) = -\sin(\theta)$ $\cos(\pi+\theta) = -\cos(\theta)$ $\tan(\pi+\theta) = \tan(\theta)$	$\sin(2\pi+\theta) = \sin(\theta)$ $\cos(2\pi+\theta) = \cos(\theta)$ $\tan(2\pi+\theta) = \tan(\theta)$

ตัวอย่างที่ 8.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

ถ้า $f = \{(x,y) \mid y = \frac{2x+1}{3}\}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน และ $f^{-1}(3) = 4$

2. f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน และ $f^{-1}(3) = 4$

3. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน และ $f^{-1} = \{(x,y) \mid x = \frac{2y-1}{3}\}$

4. f^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน และ $f^{-1} = \{(x,y) \mid y = \frac{3x-1}{2}\}$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

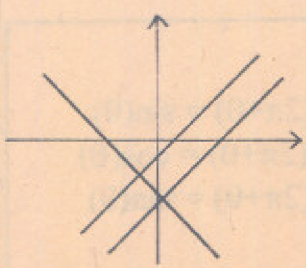
เพราะฉะนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชันแน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปลองแทนค่าเลยว่า $f(4) = 3$ หรือไม่ในโจทย์

เพราะว่า $f(4) = \frac{2(4)+1}{3} = 3$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. ได้เลย



$L := \quad y = mx + c$

$M := \quad y = nx + k$

$L \parallel M \longleftrightarrow m=n$

$L \perp M \longleftrightarrow mn=-1$

ตัวอย่างที่ 8.3 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดระบบสมการ $x^2 + y^2 = 17$

$$x + y = 5$$

ถ้า $A = \{(a,b),(c,d)\}$ เป็นเซตคำตอบของระบบสมการข้างต้น

$a + b + c + d$ เท่ากับข้อใด

1. 4 2. 6

3. 8 4. 10

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า (a,b) และ (c,d) ต้องสอดคล้องเงื่อนไข $x+y = 5$

เพราะฉะนั้น $a + b + c + d = 5 + 5 = 10$

หมายเหตุ หากทำวิธีจริง $(x + y)^2 = 25$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 25$$

$$2xy = 25 - 17 = 8$$

$$y = \frac{4}{x}$$

จะได้ $5 = x + y = x + \frac{4}{x}$

$$5x = x^2 + 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x = 1 , 4$$

$$y = 4 , 1$$

$A = \{(1,4),(4,1)\}$

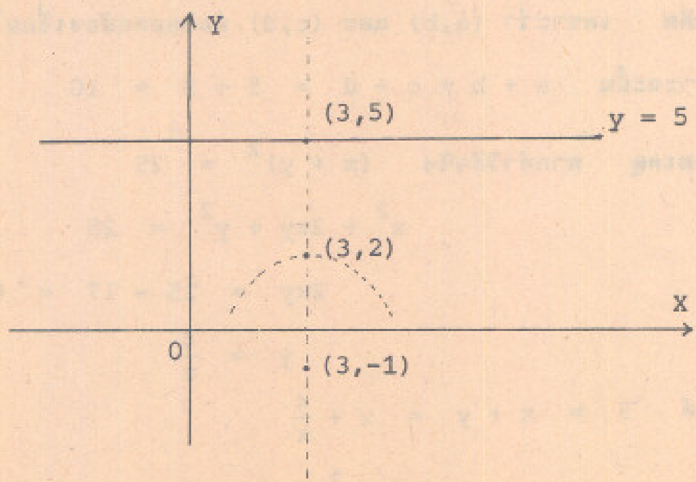
ตัวอย่างที่ 8.4 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

สมการพาราโบลา ซึ่งมีเส้นตรง $y = 5$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ และมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2-6x+2y-6 = 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2-6x+12y-15 = 0$
2. $x^2-6x-12y+33 = 0$
3. $x^2-6x+12y+21 = 0$
4. $x^2-6x-12y-3 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด จุดศูนย์กลางวงกลม $x^2+y^2-6x+2y-6 = 0$ คือ $(3,-1)$



เพราะว่าจุดยอดพาราโบลาต้องอยู่ระหว่างไดเรกตริกซ์กับ $(3,-1)$
เพราะฉะนั้นจุดยอดคือ $(3,2)$
เพราะว่าพาราโบลาต้องผ่านจุด $(3,2)$ เรานำค่าไปใช้แทนในตัวเลือกเพื่อช่วยตัดตัวเลือกได้

1. $9 - 18 + 24 - 15 = 0$
2. $9 - 18 - 24 + 33 = 0$

3. $9 - 18 + 24 + 21 \neq 0$

4. $9 - 18 - 24 - 3 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

จากรูปที่เราวาดไว้จะเห็นว่า พาราโบลาที่เราต้องการนั้นจะเป็นพาราโบลาคว่ำ

ดูที่ตัวเลือกบ้าง

1. $12y = -x^2 + 6x + 15$ เป็นพาราโบลาคว่ำ

2. $12y = x^2 - 6x + 33$ เป็นพาราโบลาหงาย

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

หมายเหตุ วิธีจริงจะทราบจากรูปว่า โฟกัสของพาราโบลาคือ (3,2) และค่า $c = -3$

ดังนั้น
$$(x - 3)^2 = 4(-3)(y - 2)$$
$$x^2 - 6x + 9 = -12y + 24$$
$$x^2 - 6x + 12y - 15 = 0$$

สูตรความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

$$y = mx + c$$

$$m = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2}$$

$$c = \overline{y} - m\overline{x}$$

คุณสมบัติของเมตริกซ์และค่ากำหนด

$$A^{-1} = \frac{\text{adj }(A)}{|A|}$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(AB)^T = A^T B^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$\text{adj }(AB) = \text{adj }(B)\ \text{adj }(A)$$

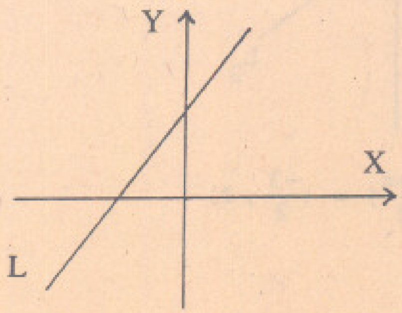
$$\det(\text{adj } A) = |A|^{n-1}$$

9.

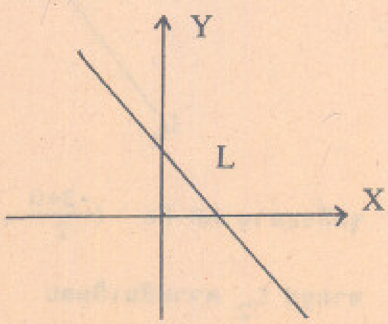
ความชันก็ตัดตัวเลือกได้

โจทย์ที่เกี่ยวกับสมการเส้นตรง สมการเส้นตั้งฉาก เส้นสัมผัสเส้นโค้ง มักจะมีความชันเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นขอให้จำแต่เพียงว่า เส้นตรงเอียงในลักษณะใด จะมีความชันเป็นบวกหรือลบ ก็สามารถนำเหตุผลทำนองนี้ไปตัดตัวเลือกได้

ข้อควรจำ



ความชันเป็นบวก



ความชันเป็นลบ

ตัวอย่างที่ 9.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด A(0,4) และตัดแกน X ที่จุด B(-3,0)

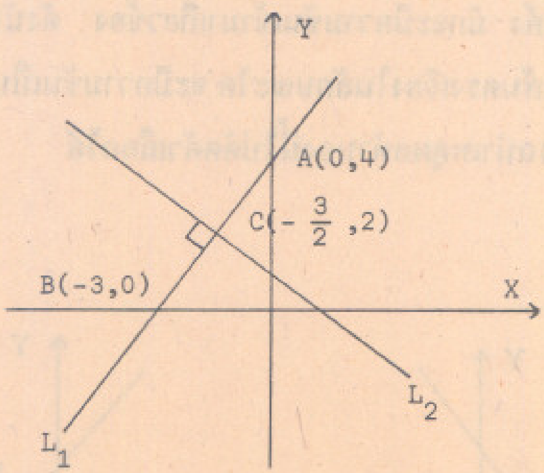
ถ้าเส้นตรง L_2 ลากผ่านจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรง AB และตั้งฉากกับ L_1

ดังนั้นสมการของเส้นตรง L_2 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $3x - 4y - \frac{7}{2} = 0$
2. $3x + 4y + \frac{25}{2} = 0$
3. $6x + 8y - 7 = 0$
4. $6x - 8y + 25 = 0$

ตอบ 3.

แนวคิด ก่อนอื่นวาดรูปเท่าที่โจทย์กำหนด



จุดกึ่งกลาง AB คือ $(\frac{-3+0}{2}, \frac{0+4}{2}) = (\frac{-3}{2}, 2)$

จากรูป L_2 ความชันเป็นลบ

พิจารณาตัวเลือกได้เลย

1. ความชันเป็นบวก 2. ความชันเป็นลบ

3. ความชันเป็นลบ 4. ความชันเป็นบวก

เราตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปแทนค่า $x = \frac{-3}{2}$, $y = 2$ ในตัวเลือกที่เหลือ

2. $3(\frac{-3}{2}) + 4(2) + \frac{25}{2} \neq 0$

3. $6(\frac{-3}{2}) + 8(2) - 7 = 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

หมายเหตุ จากรูป L_2 ตัดแกน Y ทางด้านบวก

แสดงว่า ถ้า $x = 0$ แล้ว $y > 0$

ตัวเลือก 2. $y = \frac{-25}{8}$ เมื่อ $x = 0$

ตัวเลือก 3. $y = \frac{7}{8}$ เมื่อ $x = 0$

ดังนั้นเราได้คำตอบโดยไม่ต้องคำนวณจุดกึ่งกลาง AB ก็ได้

ตัวอย่างที่ 9.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2535

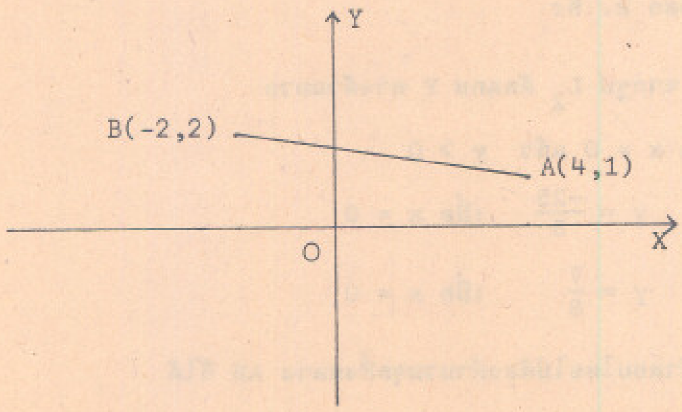
ถ้าเส้นตรง $3x + ky + 4 = 0$ ขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (4,1) และ (-2,2) แล้ว k มีค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 12   2. 18

3. $-\frac{1}{2}$ 4. -12

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ A(4,1) และ B(-2,2) แล้วเขียนกราฟ



เพราะฉะนั้นความชันของส่วนของเส้นตรง AB เป็นลบ

สมการ $3x + ky + 4 = 0$ มีความชันเป็นลบเมื่อ $k > 0$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าความชันของ $3x + ky + 4 = 0$ คือ $-\frac{3}{k}$

และความชันของ AB คือ $\frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$

เพราะฉะนั้น $k = 18$

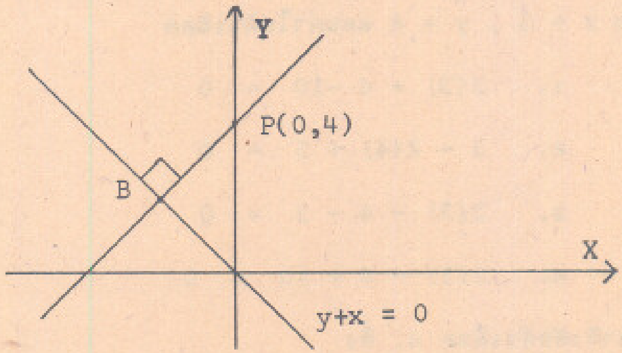
ตัวอย่างที่ 9.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

ให้ P มีโคออดิเนตเป็น (0,4) และ B เป็นโพรเจคชันของจุด P บนเส้นตรง $y+x = 0$ สมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ B คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $y+x-4 = 0$
2. $y-x-4 = 0$
3. $y+2x-4 = 0$
4. $y-2x-4 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์ก่อน



ตามภาพ ความชัน BP เป็นบวกแน่นอน

พิจารณาความชันของเส้นตรงในแต่ละตัวเลือก

1. ความชัน = -1
2. ความชัน = 1
3. ความชัน = -2
4. ความชัน = 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งก่อน

เพราะว่าความชัน BP เท่ากับ 1

เพราะฉะนั้นเลือก 2. ได้เลย

ตัวอย่างที่ 9.4 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางระหว่างจุด (2,3) และ (4,5) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,1) และ (-1,2) คือข้อใดต่อไปนี้

1. $2x+y-10 = 0$
2. $x-2y+5 = 0$
3. $2x-y-2 = 0$
4. $2x-y+10 = 0$

ตอบ 3.

แนวคิด จุดกึ่งกลางของ A(2,3) และ B(4,5) คือ C มีพิกัดเป็น

$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (3,4)$

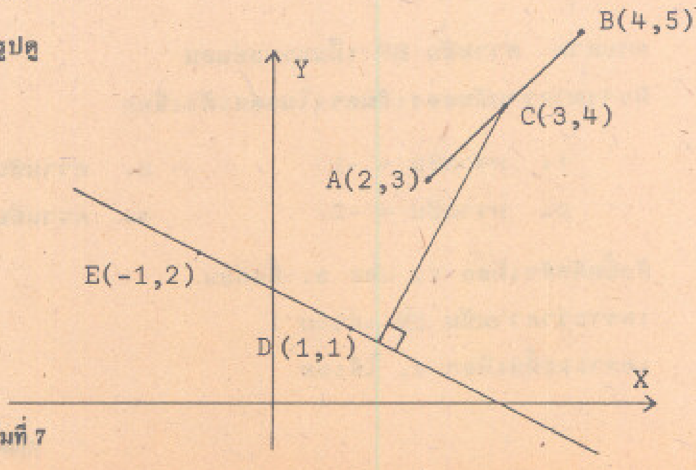
ดังนั้น C(3,4) ต้องอยู่บนเส้นตรงที่เป็นตัวเลือก

นำ x = 3 , y = 4 แทนค่าในตัวเลือก

1. $2(3) + 4 - 10 = 0$
2. $3 - 2(4) + 5 = 0$
3. $2(3) - 4 - 2 = 0$
4. $2(3) - 4 + 10 \neq 0$

เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ต่อไปลองเขียนรูปดู



ความชันเส้นตรงที่ผ่านจุด C และตั้งฉากกับ DE ต้องมีความชันเป็นบวก

ดูความชันที่ตัวเลือก 1., 2. และ 3.

1. ความชันเป็นลบ
2. ความชันเป็นบวก
3. ความชันเป็นบวก

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า AD ตัดแกน X ที่ (1,0) (โดยประมาณ)

จากตัวเลือก 2. $x = -5$ เมื่อ $y = 0$

จากตัวเลือก 3. $x = 1$ เมื่อ $y = 0$

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งดีกว่า

หมายเหตุ วิธีจริง ความชัน DE คือ $\frac{1-2}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้นความชัน AD คือ 2

สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ $y-4 = 2(x-3)$

$$2x-y-2 = 0$$

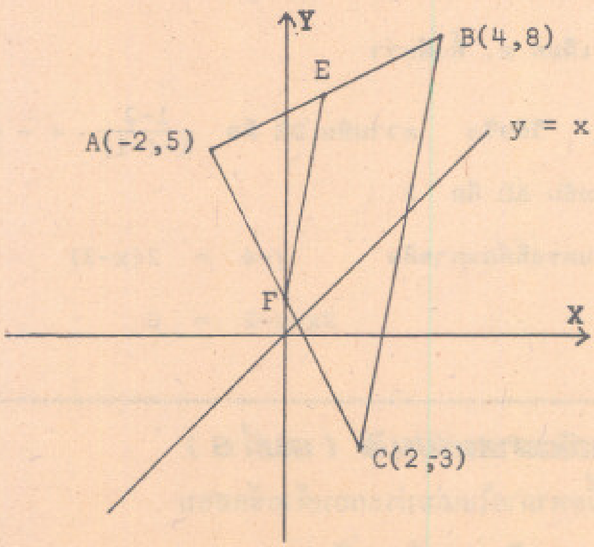
ตัวอย่างที่ 9.5 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดอยู่ที่ A(-2,5), B(4,8) และ C(2,-3) แล้วสมการเส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้านสองด้าน ซึ่งต่างก็สั้นกว่าด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยม ABC คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $4x+2y-17 = 0$
2. $11x-2y+2 = 0$
3. $x-2y+2 = 0$
4. $x+2y-8 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด



จากรูป ด้านที่สั้นกว่าคือ AB และ AC

ให้ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

และ F เป็นจุดกึ่งกลางของ AC

จากรูป ความชัน EF เป็นบวก

พิจารณาความชันเส้นตรงของตัวเลือก

1. ความชันเป็นลบ , $m = -2$

2. ความชันเป็นบวก , $m = \frac{11}{2}$

3. ความชันเป็นบวก , $m = \frac{1}{2}$

4. ความชันเป็นลบ , $m = -2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า EF มีความชันมากกว่าเส้นตรง $y = x$
เพราะฉะนั้นความชันของ EF ต้องมากกว่า 1
ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

หมายเหตุ EF ขนานกับ BC

และความชัน BC คือ $\frac{8-(-3)}{4-2} = \frac{11}{2}$

ตัวอย่างที่ 9.6 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนด $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ และ $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

เส้นโค้ง C มีสมการเป็น $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$
เส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ คือสมการในข้อใด

1. $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$
2. $x - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$
3. $2x - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0$
4. $\sqrt{2}x - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด เรานำค่าที่โจทย์กำหนดให้ไปใช้ก่อนคือ $C(\frac{\pi}{4}, 1)$ ต้องอยู่

บนเส้นสัมผัส ดังนั้นแทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 1$ ในตัวเลือก

1. $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 1 + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$

2. $x - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} - 2 + 2 - \frac{\pi}{2} \neq 0$

3. $2x - y + 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4} - 1 + 2 - \frac{\pi}{4} \neq 0$

4. $\sqrt{2}x - y + 1 - \sqrt{2}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} - 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปต้องหา $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^2 x + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{d\sin^2 x}{dx} + 0$$

$$= 2\sin x \frac{d}{dx}\sin x$$

$$= 2\sin x \cos x$$

เพราะฉะนั้นความชันที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ ต้องเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx}(x = \frac{\pi}{4}) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$$

เพราะว่า ความชันของเส้นตรงในตัวเลือกที่เหลือคือ

1. ความชันเส้นตรง = 1

4. ความชันเส้นตรง = $\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 9.7 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

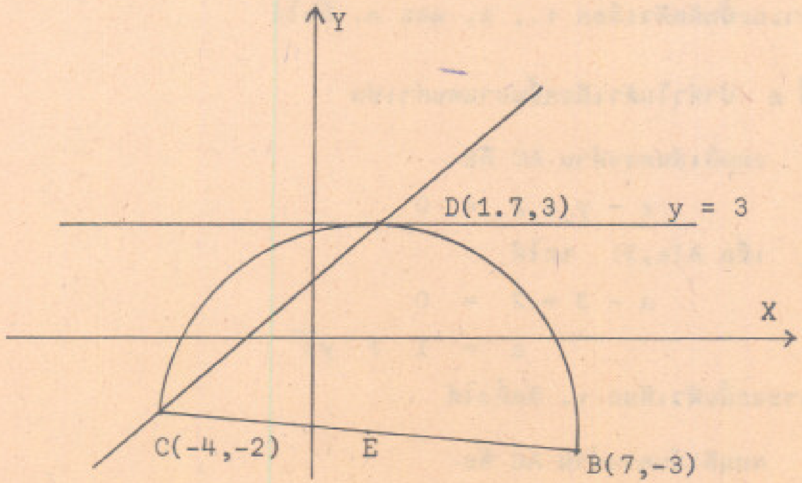
กำหนดให้ A(a,3), B(7,-3) และ C(-4,-2) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า $a > \tan 60^\circ$ แล้ว สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ C คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x - y + 2 = 0$
2. $5x - 6y + 8 = 0$
3. $5x - 4y + 12 = 0$
4. $7x - 5y + 18 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ก่อน

เพราะว่า A(a,3) เพราะฉะนั้น A ต้องอยู่บนเส้นตรง $y = 3$



เพราะว่า $a > \tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.732$

เพราะฉะนั้น $a > 1.732$

นั่นคือ A(a,3) ต้องอยู่ทางขวามือของจุด (1.7,3) บนเส้นตรง $y = 3$

เพราะฉะนั้นเราจะสังเกตจากรูปได้ว่า เส้นตรงที่ผ่าน AC ต้องมีความชันเป็นบวก และความชัน AC ต้องน้อยกว่าความชัน CD

ความชันของ CD เท่ากับ $\dfrac{3-(-2)}{1.7-(-4)}$

$$= \frac{5}{5.7} = 0.88$$

ดูค่าความชันจากตัวเลือก

1. $m = 1$

2. $m = \frac{5}{6} = 0.83$

3. $m = \frac{5}{4} = 1.25$

4. $m = \frac{7}{5} = 1.4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีที่ 2 นำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าเช่น

1. สมมติเส้นตรงผ่าน AC คือ

$$x - y + 2 = 0$$

เมื่อ $A(a,3)$ จะได้

$$a - 3 + 2 = 0$$

$$a = 1 \ngtr \sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้

2. สมมติเส้นตรงผ่าน AC คือ

$$5x - 6y + 8 = 0$$

เมื่อ $A(a,3)$ จะได้

$$5a - 18 + 8 = 0$$

$$a = 2 > \tan 60^\circ$$

แสดงว่า $a = 2$ ได้

ต่อไปดูว่า $\hat{A}$ เป็นมุมฉากหรือไม่

จาก A(2,3) จะได้ ความชัน AC คือ $\frac{5}{6}$

และความชัน AB คือ $\frac{3-(-3)}{2-7} = -\frac{6}{5}$

เพราะฉะนั้น $CA \perp BA$ แน่นอน

สรุปตัวเลือก 2. นี้สอดคล้องกับความต้องการของโจทย์เราจึงเลือกเป็นคำตอบได้ โดยไม่ต้องทำตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีที่ 3 โจทย์บังคับว่า $\hat{A}$ เป็นมุมฉาก

แสดงว่าต้องมีวงกลมผ่าน A, B และ C โดยที่ BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ต่อไปหาจุดกึ่งกลาง BC ได้เป็น $E(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$

เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่ E รัศมีเท่ากับ $|EC|$

จะได้ว่า จุดที่วงกลมสัมผัสเส้นตรง $y = 3$ คือจุด A

วัดพิกัด A โดยประมาณได้เป็น A(1.8,3)

ต่อไปนำตัวเลือกมาหาค่า x เมื่อ $y = 3$ จะได้

1. $x = y-2$
$= 3-2 = 1 \neq 1.8$

2. $x = \frac{6y-8}{5} = \frac{6(3)-8}{5} = 2 \simeq 1.8$

3. $x = \frac{4y-12}{5} = \frac{4(3)-12}{5} = 0 \neq 1.8$

4. $x = \frac{5y-18}{7} = \frac{5(3)-18}{7} = -\frac{3}{7} \neq 1.8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

วิธีที่ 4 ลองดูวิธีจริงบ้าง

$$\hat{A} = 90^\circ$$

จะได้ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$$\left[(-4-a)\bar{i} + (-2-3)\bar{j}\right] - \left[(7-a)\bar{i} + (-3-3)\bar{j}\right] = 0$$

$$(-4-a)(7-a) + (-5)(-6) = 0$$

$$-28 + 4a - 7a + a^2 + 30 = 0$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-2)(a-1) = 0$$

$$a = 1, 2$$

เพราะว่า $a > \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $a = 2$

สมการที่ผ่าน $A(2,3)$ และ $C(-4,-2)$ คือ

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-4\ 2}$$

$$-6(y-3) = -5(x-2)$$

$$-6y+18 = -5x+10$$

$$5x-6y+8 = 0$$

10.

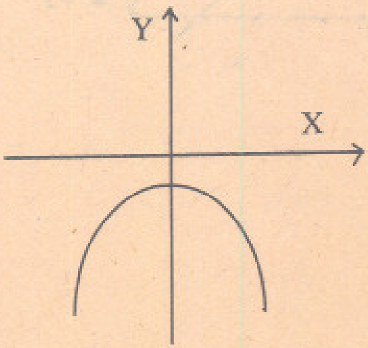
คว่ำหงาย-เปิดซ้ายขวา

คำถามเกี่ยวกับพาราโบลา เราสามารถนำเหตุผลเกี่ยวกับการคว่ำหรือหงาย เปิดทางซ้ายหรือขวาของพาราโบลา

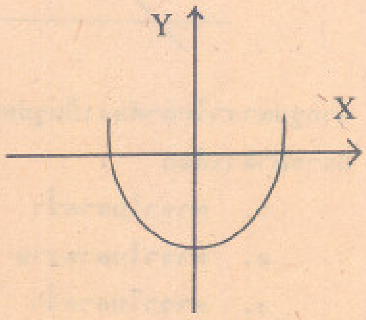
เช่น $y = x^2$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

$x = y^2$ เป็นรูปพาราโบลาเปิดทางขวา

หรือ $y = 4 - x^2$ เป็นรูปพาราโบลาคว่ำ



พาราโบลาคว่ำ



พาราโบลาหงาย

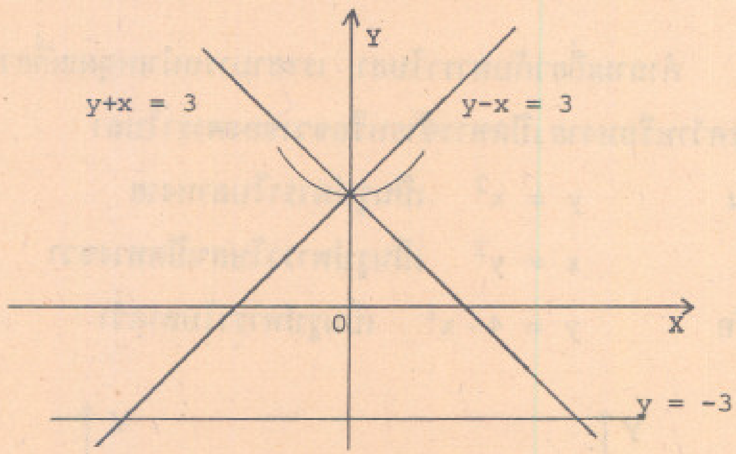
ตัวอย่างที่ 10.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2536

สมการของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่จุดตัดกันของเส้นตรง $y-x = 3$ และ $y+x = 3$ ไดเรกตริกซ์คือเส้นตรง $y+3 = 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 = -16y$
2. $x^2 = 16y$
3. $x^2 = -12y$
4. $x^2 = 12y$

ตอบ 4.

แนวคิด กราฟจากโจทย์กำหนดคือ



จากรูปพาราโบลาต้องเป็นรูปหงายแน่นอน

พิจารณาตัวเลือก

1. พาราโบลาคว่ำ
2. พาราโบลาหงาย
3. พาราโบลาคว่ำ
4. พาราโบลาหงาย

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งไปก่อน

เพราะว่าจุดโฟกัสห่างจากไดเรกตริกซ์ 6 หน่วย

ดังนั้นค่า $c = 3$

จากตัวเลือก 2. จะได้ $c = 4$ $(x^2 = 16y = 4(4)y)$

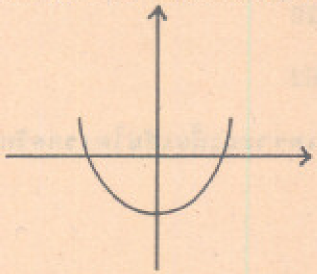
จากตัวเลือก 4. จะได้ $c = 3$ $(x^2 = -12y = 4(3)y)$

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

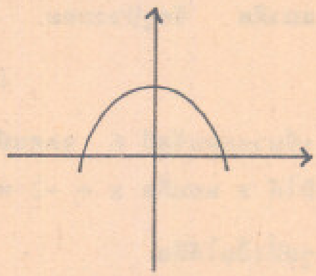
หมายเหตุ การดูว่าพาราโบลาคว่ำหรือหงายให้จัดรูป

$$y = ax^2 + bx + c$$

ถ้า $a > 0$ แล้วพาราโบลาหงาย



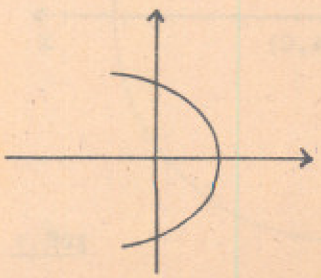
ถ้า $a < 0$ แล้วพาราโบลาคว่ำ



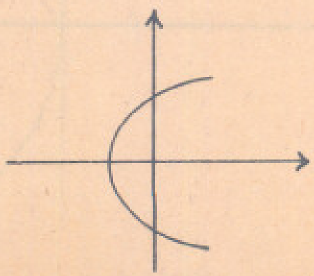
การดูว่าพาราโบลาเปิดทางซ้ายหรือเปิดทางขวาให้จัดรูป

$$x = Ay^2 + By + C$$

ถ้า $A < 0$ แล้วพาราโบลาเปิดทางซ้าย



ถ้า $A > 0$ แล้วพาราโบลาเปิดทางขวา



ตัวอย่างที่ 10.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2534

ถ้าพาราโบลามีจุดยอดที่จุด (0,0) และมีเส้นไดเรกตริกซ์ซึ่งขนานกับแกน Y และสัมผัสวงกลม $x^2-8x+y^2 = 20$ แล้วสมการของพาราโบลาคือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2 = 8x$ และ $y^2 = 40x$
2. $y^2 = -8x$ และ $y^2 = 40x$
3. $y^2 = 8x$ และ $y^2 = -40x$
4. $y^2 = -8x$ และ $y^2 = -40x$

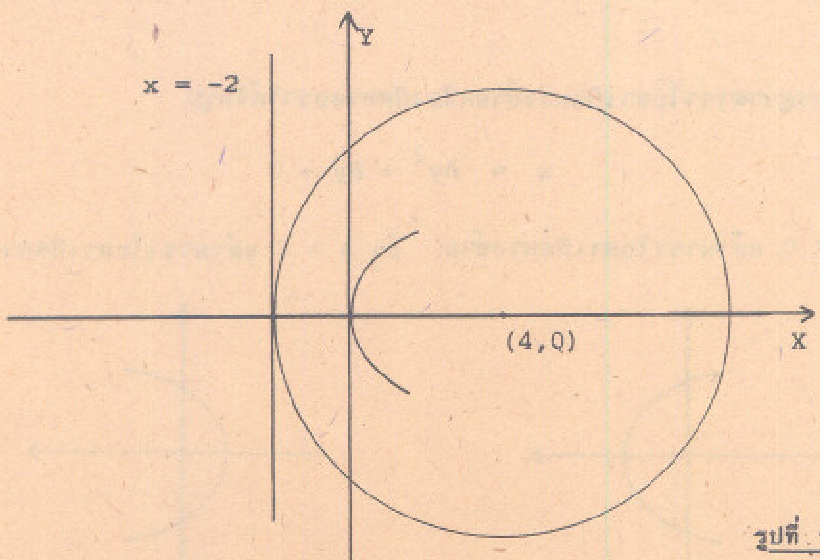
ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปวงกลม

$$x^2-8x+y^2 = 20$$
$$(x-4)^2+y^2 = 6^2$$

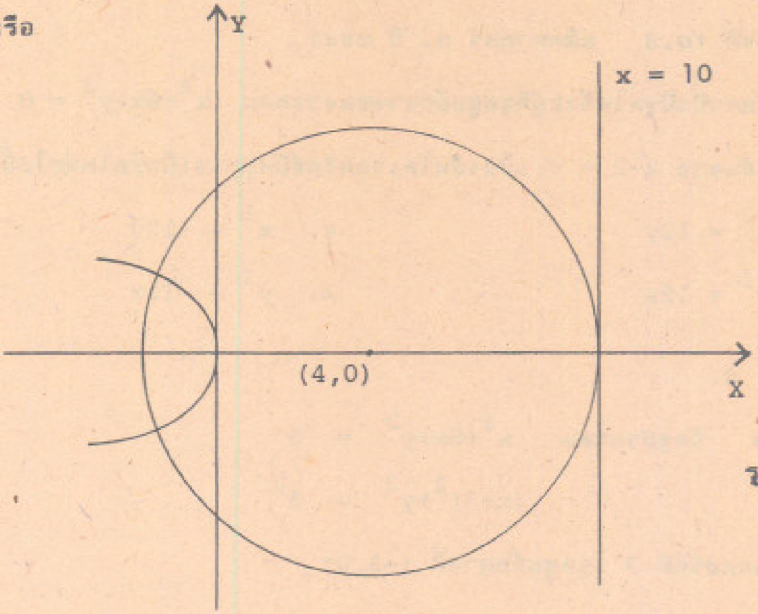
เป็นวงกลมรัศมี 6 จุดศูนย์กลางที่ (4,0) เพราะฉะนั้นเส้นไดเรกตริกซ์มีได้ 2 แบบคือ x = -2 หรือ x = 10

รูปที่เป็นได้คือ



รูปที่ 1

หรือ



รูปที่ 2

จากรูปที่ 1 และรูปที่ 2 พาราโบลาต้องเปิดทางซ้ายหรือเปิดทางขวาอย่างละรูป

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปดูกันเลยว่า $y^2 = 8x$ ถูกหรือผิด

$y^2 = 8x = 4(2)x$ เป็นรูปที่เปิดทางขวา และ $c = 2$ ตรงกับรูปที่ 1 นั้น ค่า $c = 10$ เพราะฉะนั้นเราจึงต้องตัดตัวเลือก 4 ทิ้งไปเลย

หมายเหตุ สมการพาราโบลา (คว่ำ-หงาย) หรือ (เปิดทางซ้าย-เปิดทางขวา ดูได้จากกำลังของตัวแปร x และ y

1. ถ้า y มีกำลังหนึ่ง และ x มีกำลังสอง แล้ว พาราโบลา (คว่ำ-หงาย)
2. ถ้า y มีกำลังสอง และ x มีกำลังหนึ่ง แล้ว พาราโบลา (เปิดทางซ้าย-เปิดทางขวา)

ตัวอย่างที่ 10.3 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

พาราโบลาซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+6x+y^2 = 0$ และมีเส้นตรง $x-3 = 0$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 = 12y$ 2. $x^2 = -12y$

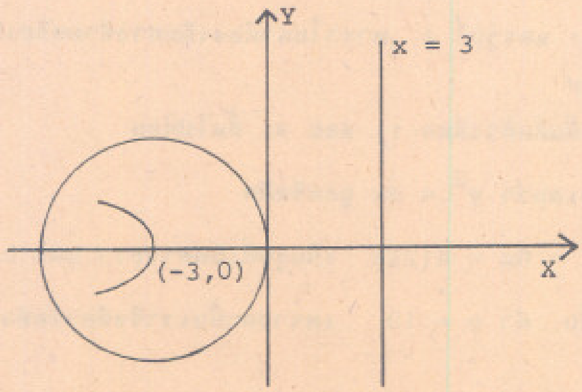
3. $y^2 = 12x$ 4. $y^2 = -12x$

ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูปวงกลม

$$x^2+6x+y^2 = 0$$
$$(x+3)^2+y^2 = 3^2$$

เป็นวงกลมรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ (-3,0)



จากรูปพาราโบลาที่ต้องการมีลักษณะเปิดทางซ้าย

ดูที่ตัวเลือกบ้าง

1. หงาย 2. คว่ำ

3. เปิดทางขวา 4. เปิดทางซ้าย

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้เลย

11.

ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก

การทำโจทย์ข้อสอบบางครั้งเราอ่านโจทย์และตัดตัวเลือกทันทีจะไม่ได้ ต้องใช้วิธีค่อยๆ ทำงานตามเงื่อนไขของโจทย์ไปก่อน แล้วค่อยๆ หาเหตุผลมาตัดตัวเลือกเท่าที่ทำได้ เช่น

- เรารู้ว่าสมการเป็นวงกลมแน่ โดยดูแต่สัมประสิทธิ์
- ความชันเป็นลบแน่ๆ โดยดูจากกราฟ
- จุด P ไม่อยู่บนเส้นตรงแน่ๆ โดยดูจากกราฟ ฯลฯ

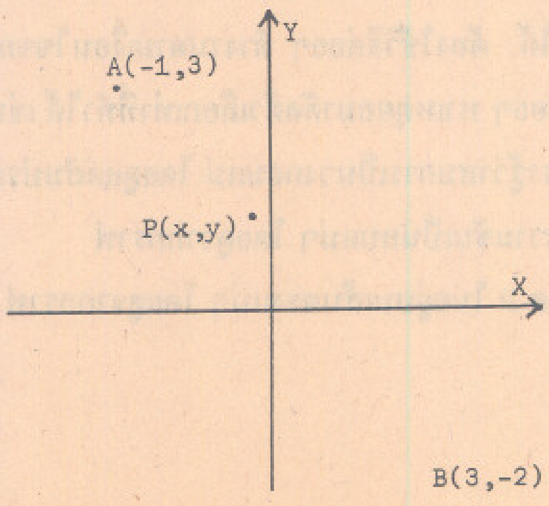
ตัวอย่างที่ 11.1 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

ให้ P(x,y) เป็นจุดใดๆ บนกราฟรูปหนึ่ง ถ้าอัตราส่วนของระยะห่างระหว่างจุด P และจุด (-1,3) ต่อระยะห่างระหว่างจุด P และจุด (3,-2) มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ แล้ว กราฟรูปนั้นคือกราฟในข้อใดต่อไปนี้

1. พาราโบลา
2. วงกลม
3. วงรี
4. ไฮเพอร์โบลา

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ A(-1,3) และ B(3,-2)



$$|AP|^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2$$

$$|PB|^2 = (x-3)^2 + (y+2)^2$$

เพราะว่า $\dfrac{|AP|}{|PB|} = \dfrac{1}{2}$

ดังนั้น $4|AP|^2 = |PB|^2$

นั่นคือ $4\left[(x+1)^2 + (y-3)^2\right] = (x-3)^2 + (y+2)^2$

จากสมการนี้จะพบว่า สัมประสิทธิ์ของ x^2 และ y^2 เหมือนกัน

ดังนั้น $P(x,y)$ เป็นจุดบนวงกลม

<u>**หมายเหตุ**</u> ลองจัดรูปดูต่อไป

$$4((x+1)^2 + (y-3)^2) = (x-3)^2 + (y+2)^2$$

$$4(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4$$

$$3x^2 + 3y^2 + 14x - 28y + 27 = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{14}{3}x - \frac{28}{3}y + 9 = 0$$

$$(x + \frac{7}{3})^2 + (y - \frac{14}{3})^2 + 9 - \frac{49}{9} - \frac{196}{9} = 0$$

$$(x + \frac{7}{3})^2 + (y - \frac{14}{3})^2 = \frac{164}{9}$$

เพราะฉะนั้นกราฟเป็นวงกลม

ตัวอย่างที่ 11.2 คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

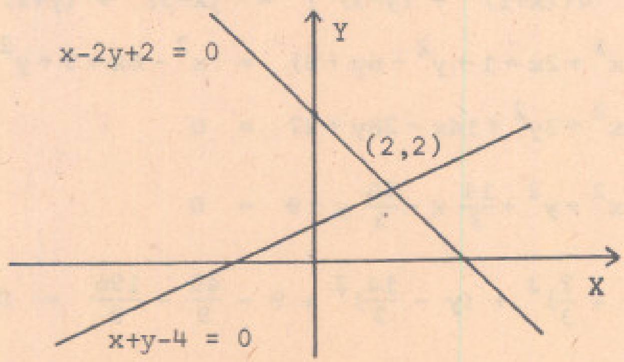
ถ้าสมการไฮเพอร์โบลา $ax^2+by^2 = 16$ ผ่านจุด $(\frac{\sqrt{61}}{3}, 3)$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x+y-4 = 0$ และ $x-2y+2 = 0$ แล้วสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0,0) มีความยาวแกนเอกและความยาวแกนโทเท่ากับความยาวแกนสังยุคและความยาวของแกนขวางของไฮเพอร์โบลาข้างต้นตามลำดับ มีสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $8x^2 + 5y^2 = 16$ 2. $5x^2 + 9y^2 = 16$

3. $5x^2 + 9y^2 = 1$ 4. $8x^2 + 5y^2 = 1$

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์ก่อน



จุดตัดของเส้นตรงคือ $x = 2$, $y = 2$

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลาผ่านจุด (2,2) และ $(\frac{\sqrt{61}}{3}, 3)$

แทนค่าในสมการ

$$ax^2 + by^2 = 16$$

$(2,2)$; $\quad 4a + 4b = 16$

$$a + b = 4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$(\frac{\sqrt{61}}{3}, 3)$; $\quad a\,\frac{61}{9} + b9 = 16$

$$61a + 81b = 144 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = 9$, $b = -5$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $9x^2 - 5y^2 = 16$

หรือ $$\frac{x^2}{(\frac{4}{3})^2} - \frac{y^2}{(\frac{4}{\sqrt{5}})^2} = 1$$

เพราะฉะนั้นแกนสังยุคยาว $= \frac{8}{\sqrt{5}}$

และแกนตามขวางยาว $= \frac{8}{3}$

เพราะฉะนั้นวงรีมีค่า $a = \frac{4}{\sqrt{5}}$ และ $b = \frac{4}{3}$

พิจารณาที่ตัวเลือก เป็นวงรีที่มี

1. $a = \frac{4}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{4}{\sqrt{5}}$

2. $a = \frac{4}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{4}{3}$

3. $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $b = \frac{1}{3}$

4. $b = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1., 3. และ 4. ตัดทิ้ง

ตัวอย่างที่ 11.3 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และ

$$S = \{x \in Q \mid 4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9 = 0\}$$

ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่าใด

1. $-\frac{9}{4}$
2. -9
3. $\frac{9}{4}$
4. 9

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า ถ้า a,b เป็นจำนวนเต็ม และ (ax+b) เป็นตัว-ประกอบของ $4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9$

จะได้ว่า a หาร 4 ลงตัว และ b หาร 9 ลงตัว

ดังนั้นเราพิจารณาการแทนค่า x ด้วย $\frac{b}{a}$ เมื่อ $a = \pm1, \pm2, \pm4$ และ $b = \pm1, \pm3, \pm9$ พบว่า $x = \frac{3}{2}$ และ $x = \frac{-3}{2}$ เป็นรากของสมการ

ต่อไปเอา $(x - \frac{3}{2})$ และ $(x + \frac{3}{2})$ ไปหาร $4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9$

ได้ผลลัพธ์เท่ากับ x^2-4x+1 นั่นคือ

$$(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x^2-4x+1) = 4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9$$

เพราะว่า $x^2-4x+1 = 0$ มีรากเป็น $\frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $S = -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

สรุปผลคูณของสมาชิกใน S มีค่าเท่ากับ $-\frac{9}{4}$

ตัวอย่างที่ 11.4 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้

$$x = \sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{x}}}}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องสมการ
2. มีจำนวนจริง x เพียง 1 ค่า ที่สอดคล้องสมการ
3. มีจำนวนจริง x เพียง 2 ค่า ที่สอดคล้องสมการ
4. มีจำนวนจริง x มากกว่า 2 ค่าที่สอดคล้องสมการ

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า

$$x = \sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{x}}}}$$

และโดยการแทนค่าซ้ำจะได้

$$x = \frac{2535 + \sqrt{2535}\,x}{x}$$

$$x^2 - \sqrt{2535}\,x - 2535 = 0$$

$$x = \frac{2535 \pm \sqrt{2535 - 4(1)(2535)}}{2}$$

$$= \frac{(1 \pm \sqrt{5})\sqrt{2535}}{2}$$

สรุปมีรากเป็นจำนวนจริง 2 ตัว

ตัวอย่างที่ 11.5 **ข้อสอบแข่งขัน**

กำหนดให้ $x > 0$ และ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ มีค่าเท่าใด

1. 63 2. 123

3. 140 4. 143

ตอบ 2.

แนวคิด $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 2 + 7 = 9$

เพราะว่า $x + \frac{1}{x} > 0$ เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{x} = 3$

พิจารณา $(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$

$$\text{เพราะฉะนั้น } x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2$$

$$= 49 - 2$$

$$= 47$$

เพราะว่า $x^5 + \frac{1}{x^5}$

$$= (x + \frac{1}{x})(x^4 - x^3(\frac{1}{x}) + x^2(\frac{1}{x^2}) - x(\frac{1}{x^3}) + \frac{1}{x^4})$$

$$= (x + \frac{1}{x})(x^4 + \frac{1}{x^4} - (x^2 + \frac{1}{x^2}) + 1)$$

$$= (3)(47 - 7 + 1)$$

$$= 123$$

หมายเหตุ หากคิดว่าวิธีจัดรูปยากจะลองใช้วิธีแก้สมการก็ได้

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

$$x^4 - 7x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$= \frac{7 \pm 3(2.24)}{2}$$

$$x^2 = 6.86 \text{ หรือ } 0.14$$

$$x = \sqrt{6.86} \text{ หรือ } \sqrt{0.15}$$

$$x = 2.62 \text{ หรือ } 0.38$$

$x = 2.62$ จะได้ $x^5 + \frac{1}{x^5} = 123.45 + 0.008 = 123.458$

$x = 0.38$ จะได้ $x^5 + \frac{1}{x^5} = 0.008 + 126.20 = 126.208$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก ๒. ดีกว่า

หรือจากขั้นตอน $x + \frac{1}{x} = 3$

$$x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x \cong 2.618 \text{ หรือ } 0.382$$

ซึ่งจะได้ค่า $x^5 + \frac{1}{x^5}$ ใกล้เคียง 123 เหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 11.6 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $A = \{ \frac{x}{1+x^2} \mid x \in (-\infty,\infty) \}$

$B = \{ \frac{\log x}{\log(1+x^2)} \mid x > 0 \}$

ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

1. A มีขอบเขตบน
2. A มีขอบเขตล่าง
3. B มีขอบเขตบน
4. B มีขอบเขตล่าง

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $(1 - |x|)^2 > 0$

$$1 - 2|x| + |x|^2 \geqslant 0$$

$$1 + |x|^2 \geqslant 2|x|$$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{|x|}{1 + |x|^2}$$

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{|x|}{1 + x^2}$$

เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1 + x^2} \leqslant \frac{1}{2}$

นั่นคือ A มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งก่อน

เพราะว่า $x^2+1 > x > 0$

$$\log(x^2+1) > \log x$$

$$1 > \frac{\log x}{\log(x^2+1)}$$

ดังนั้น 1 เป็นขอบเขตบนของ B

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 11.7 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม โดยที่ $B = \frac{\pi}{2} + A$ และ $|BC| = x$, $|AC| = y$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$x^y = y^x$$

$$y = x^2$$

แล้ว tan A มีค่าเท่าใด

1. 1
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{4}$

ตอบ 2.

แนวคิด จาก $x^y = y^x$

$$y = x^{(\frac{y}{x})}$$

เพราะว่า $y = x^2$ เพราะฉะนั้น $\frac{y}{x} = 2$

จาก $\frac{y}{x} = 2$ จะได้ $y = 2x$

เพราะว่า $y = x^2$

$2x = x^2$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x = 2$

เพราะว่า $|BC| = x > 0$ ดังนั้น $x = 2$

ผลที่ตามมา $y = 4$

เพราะว่า $|BC| = x = 2$

$|AC| = y = 4$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sin A}{|BC|} = \frac{\sin B}{|AC|}$

$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin (\frac{\pi}{2} + A)}{4}$$

$$= \frac{\cos A}{4}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{4}$$

$$\tan A = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 11.8 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $\arcsin x = 2\arccos x$ และ $2x = \tan y$ เมื่อ $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $2x-y > 1$
2. $2x+3y < 1$
3. $x-3y > -1$
4. $2x-3y < -1$

ตอบ 4.

แนวคิด

$$\arcsin x = 2\arccos x$$

$$\arccos\sqrt{1-x^2} = \arccos(2x^2-1)$$

$$\sqrt{1-x^2} = 2x^2-1$$

$$1-x^2 = 4x^4-4x^2+1$$

$$4x^4-3x^2 = 0$$

$$x^2(4x^2-3x^2) = 0$$

$$x = 0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะว่า $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ $\tan y > 0$

เพราะฉะนั้น $x > 0$ นั่นคือ $x = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ เท่านั้น

เพราะว่า $\tan y = 2x = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $y = \frac{\pi}{3} = \frac{3.14}{3} = 1.45$

โดยการแทนค่า $x = 0.866$ และ $y = 1.45$

ทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 11.9 ข้อสอบแข่งขัน

มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 6 แล้วเหลือเศษ 2

1. 165 2. 166
3. 167 4. 168

ตอบ 3.

แนวคิด สำหรับโจทย์ข้อนี้จะเน้นที่การนับตัวเลขที่เรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต ตัวเลขที่หารด้วย 6 เหลือเศษ 2 คือ

$$X = \{2,8,14,20,...,998\}$$

การนับว่า 2,8,14,20,...,998 มีกี่ตัว ทำดังต่อไปนี้จะนับจำนวนได้ดีที่สุด

(1) เอา 4 บวกตลอด

6, 12, 18, 24, ..., 1002

(3) เอา 6 หารตลอด

1, 2, 3,..., 167

เพราะฉะนั้น $n(X) = 167$

หมายเหตุ การนับจำนวนสมาชิกในเซต X แบบนี้จะสะดวกกว่าการใช้เหตุผลของลำดับเลขคณิต

ตัวอย่างที่ 11.10 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ A เป็นเซตคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

P(A) มีสมาชิกกี่ตัว

1. 1 2. 2

3. 4 4. 16

ตอบ 2.

แนวคิด ลองแทนค่า $x = 1$ จะได้

$$1-2+2-2+1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ เป็นรากสมการ ดังนั้น $1 \in A$

ทำให้ $n(P(A)) \geqslant 2^1 = 2$ เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

เอา $x-1$ หาร $x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ จะได้

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x^3 - x^2 + x - 1 \\ \hline
x-1 & x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & \quad -x^3 + 2x^2 \\
 & \quad \underline{-x^3 + x^2} \\
 & \qquad\quad x^2 - 2x \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 - x} \\
 & \qquad\qquad -x + 1 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underline{-x + 1}}
\end{array}
$$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x^3-x^2+x-1) = 0$

เพราะว่า $(1)^3-(1)^2+1-1 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ เป็นรากของ $x^3-x^2+x-1 = 0$

โดยการตั้งหารจะได้

$$(x-1)(x^2+1) = 0$$

สรุป $(x-1)^2(x^2+1) = x^4-2x^3+2x^2+2x+1 = 0$

นั่นคือ $A = \{1\}$

$n(P(A)) = 2$

<u>การนับจำนวนสมาชิกของลำดับเลขคณิต</u>

1. บวกตลอด

2. หารตลอด

ตัวอย่าง A={ 3,7,11,15,...511 } มีสมาชิกกี่ตัว

เอา 1 บวกตลอด 4,8,12,16,...,512

เอา 4 หารตลอด 1,2, 3, 4,...,128

เพราะฉะนั้น n(A)=128

ตัวอย่างที่ 11.11 ข้อสอบแข่งขัน

สำหรับทุก $x \in R$ ให้ $f(x) = x + |x|$ **ข้อใดต่อไปนี้ผิด**

1. มีช่วง $J \subset R$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in J$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$
2. มีช่วง $I \subset R$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in I$ และ $x_1 \neq x_2$ แล้ว

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2$$

3. $R_f \subset [0,\infty)$
4. $D_f - R_f = (-\infty,0]$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $D_f = R$ และ

$$f(x) = x + |x| = \begin{cases} 0 & , x \leqslant 0 \\ 2x & , x > 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $R_f = [0,\infty)$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $D_f - R_f = (-\infty,\infty) - [0,\infty) = (-\infty,0)$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

ข้อแนะนำ ถ้าไม่จำเป็นก็ไม่ต้องอ่านตัวเลือก 1. และ 2. ในการทำโจทย์ เพราะว่าตัวเลือก 3. และ 4. อ่านเข้าใจง่ายกว่า

ตัวอย่างที่ 11.12 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ค่าในข้อใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

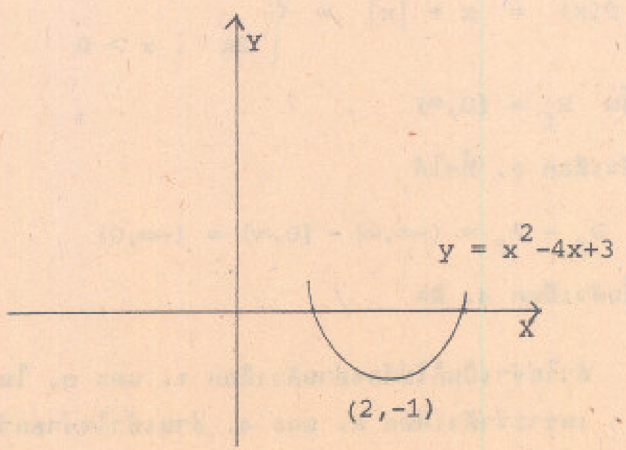
1. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $g(x) = f(x) + |f(x)|$
2. ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $h(x) = 2f(x)$
3. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $k(x) = f(x) - |f(x)|$
4. ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $p(x) = 1 - f(x)$

ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = x^2-4x+3$

$= (x-2)^2 - 1$

มีกราฟเป็นพาราโบลา



จากรูปจะได้ ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ -1 และค่าสูงสุดของ $-f(x)$ คือ 1

2. ค่าต่ำสุดของ $2f(x)$ คือ -2

4. ค่าสูงสุดของ $1-f(x)$ คือ $1+(-f(x)) = 1+1 = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งก่อน

เพราะว่า $g(x) = f(x) + |f(x)|$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } f(x) \leqslant 0 \\ 2f(x) & \text{ถ้า } f(x) > 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้นค่าต่ำสุดของ $g(x)$ คือ 0 เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

$k(x) = f(x) - |f(x)|$

$$= \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } f(x) \geqslant 0 \\ 2f(x) & \text{ถ้า } f(x) < 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดของ $k(x)$ คือ 0

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 11.13 ข้อสอบแข่งขัน

> **บทนิยาม** ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีคาบก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก p ซึ่ง $f(x+p) = f(x)$ ทุกๆ x ใน D_f และจำนวนจริงบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่งมีคุณสมบัติข้างต้นเรียกว่า คาบของ f

ถ้า $f_1(x) = 3x-\pi$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \frac{1}{2}x$ และ $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ มีคาบเท่ากับ m แล้ว m อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0, \frac{\pi}{3}]$
2. $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{\pi}{3}, \pi]$
4. $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

ตอบ 3.

แนวคิด ให้

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x) = f_3(f_2(f_1(x))) \\
&= f_3(f_2(3x-\pi)) \\
&= f_3(\sin(3x-\pi)) \\
&= f_3(-\sin 3x) \\
&= \frac{-\sin 3x}{2}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{-\sin 3x}{2}$

เพราะว่า $f(x+m) = \frac{-\sin(3(x+m))}{2} = \frac{-\sin(3x)}{2}$

เมื่อ $m = \frac{2\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น เลือก 3.

หมายเหตุ **วิธีที่ 1** เราสามารถหาคาบของ $f(x)$ โดยการแทนค่าง่ายๆ แบบนี้ก็ได้

ให้ $f(x) = 0$ แล้วหาค่า x

$$f(x) = \frac{-\sin 3x}{2}$$

$$\frac{-\sin 3x}{2} = 0$$

$$\sin 3x = 0$$

$$3x = 0, \pi, 2\pi$$

$$x = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

เพราะว่า $f(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}) = \dfrac{-\sin (3(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}))}{2} = \dfrac{-\sin (\pi + \frac{3\pi}{4})}{2}$

$$= \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

และ $f(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{-\sin (\frac{3\pi}{4})}{2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{3}$ ไม่เป็นคาบของ $f(x)$

ต่อไปเมื่อแทนค่าด้วย $\frac{2\pi}{3}$ พบว่า $f(x + \frac{2\pi}{3}) = f(x)$

สรุป คาบของ $f(x)$ คือ $\frac{2\pi}{3}$

วิธีที่ 2 $f(x) = \dfrac{-\sin 3x}{2}$ เพราะฉะนั้นคาบของ $f(x)$ เท่ากับคาบของ $\sin 3x$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{2\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 11.14 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้าสำหรับทุกจำนวนจริงบวก

$$\left[f(x^2+1)\right]^{\sqrt{x}} = k \text{ , } k \text{ เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก}$$

จงหาค่าของ $\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}}$ y เป็นจำนวนจริงบวก

1. $\sqrt{k}$
2. $2k$
3. k^2
4. $y\sqrt{k}$

ตอบ 3.

แนวคิด $f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right) = f\left(\frac{9}{y^2}+1\right)$

$$\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}} = \left[f\left(\left(\frac{3}{y}\right)^2+1\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}}$$

$$= k$$

$$\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}} = \left[\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}}\right]^2$$

$$= k^2$$

หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้ตัวเลือก 1. ถูกต้องด้วย

เพราะว่า k เป็นค่าคงตัว และ $[f(x^2+1)]^{\sqrt{x}} = k$

เพราะฉะนั้น $k = (f(0+1))^0 = 1$ (แทน $x = 0$)

นั่นคือ $k = 1$

ในทางกลับกันเมื่อเราทราบค่า $k = 1$ ก็จะได้ว่า

$$[f(x^2+1)]^{\sqrt{x}} = 1$$

$$f(x^2+1) = 1$$

ดังนั้น $f((\frac{3}{y})^2 + 1) = 1$

และ $\left[f(\frac{3+y^2}{y})\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}} = 1$

ตรงกับค่า 1^2 และ $\sqrt{1}$

ซึ่งเป็นตัวเลือก 1. และตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 11.15 ข้อสอบแข่งขัน

$\sqrt{(1+x)^2 + (2-y)^2} = |x+2|$ เป็นสมการของกราฟแบบใด

1. เส้นตรง
2. เส้นตรง 2 เส้น
3. พาราโบลา
4. วงรี

ตอบ 3.

แนวคิด

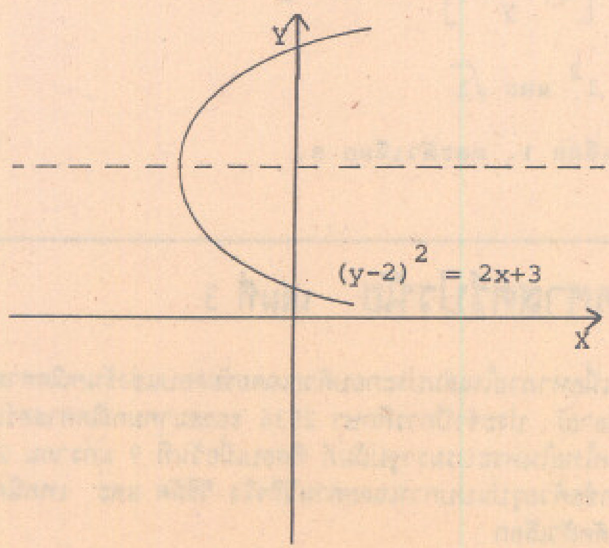
$$\sqrt{(1+x)^2 + (2-y)^2} = |x+2|$$

$$(1+x)^2 + (2-y)^2 = (x+2)^2$$

$$1 + 2x + x^2 + (2-y)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(y-2)^2 = 2x + 3$$

สรุปเป็นรูปพาราโบลา



ตัวอย่างที่ 11.16 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้า $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 = (Ax^2 + Bx + C)^2$ แล้ว

$A^2 + B^2 + C^2$ เท่ากับข้อใด

1. 14   2. 51

3. 36   4. 62

ตอบ 2.

แนวคิด $x = 0$ จะได้ $(1)(2)(3)(4) + 1 = C^2$

นั่นคือ $C^2 = 25$ ซึ่งทำให้ $A^2 + B^2 + C^2 > 14$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ x^4 ทางซ้ายคือ 1

และทางขวามือคือ A^2

เพราะฉะนั้น $A^2 = 1$

เพราะว่า $(Ax^2 + Bx + C)^2 = A^2x^4 + ABx^3 + ACx^2 + ABx^3 + B^2x^2$

$+ BCx + ACx^2 + BCx + C^2$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^3 ทางขวามือคือ $2AB$

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของ x^3 ทางซ้ายมือคือ $10x^3$

เพราะฉะนั้น $10 = 2AB$

$5 = AB$

$25 = A^2B^2$

เพราะว่า $A^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $B^2 = 25$

สรุป $A^2 + B^2 + C^2 = 1 + 25 + 25 = 51$

ตัวอย่างที่ 11.17 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3 = 0\}$$

โดเมนและเรนจ์ของ r เป็นอย่างไร

1. เป็นช่วงปิดทั้งคู่
2. เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียวทั้งคู่
3. อยู่ในรูป $(-\infty,a] \cup [b,\infty)$ โดยที่ $a < b$
4. เป็น R ทั้งคู่

ตอบ 4.

แนวคิด ลองแทนค่า $x = 0$ จะได้ $y^2 + 4y + 3 = 0$

$$(y-3)(y+1) = 0$$

$$y = -3, -1$$

นั่นคือ $-1,-3 \in R_f$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิดแน่นอนเราตัดทิ้งไปก่อน

ต่อไปจัดรูปของสมการ $x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3 = 0$

$$(x^2-2x+1) - (y^2+4y+4) = 3+1-4$$

$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 0$$

$$[(x-1)-(y+2)][(x-1)+(y+2)] = 0$$

$$(x-y-3)(x+y+1) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x-y-3 = 0$ หรือ $x+y+1 = 0$

นั่นคือ x และ y เป็นจำนวนจริงได้ทุกค่า

สรุป $D_r = R_r = R$

ตัวอย่างที่ 11.18 ข้อสอบแข่งขัน

a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a < b$ ถ้า a และ b สอดคล้องสมการ $\sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าไร

1. 25 2. 41

3. 45 4. 58

ตอบ 4.

แนวคิด $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{10 + 2\sqrt{7 \cdot 3}}$

$$= \sqrt{7 + 2\sqrt{7}\sqrt{3} + 3}$$

$$= \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

เพราะว่า $a < b$

เพราะฉะนั้น $a = 3$ และ $b = 7$

$$a^2 + b^2 = 9 + 49 = 58$$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

ตัวอย่างที่ 11.19 ข้อสอบแข่งขัน

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sqrt{9+x} - 3}{x} \quad \text{เท่ากับเท่าใด}$$

1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{6}$
4. ไม่มีค่า

ตอบ 3.

แนวคิด การทำโจทย์ข้อนี้ต้องใช้การจัดรูป

$$\frac{x^2 + \sqrt{9+x} - 3}{x} = x + \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$$

$$\frac{\sqrt{9+x} - 3}{x} \cdot \frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3} = \frac{9+x-9}{x(\sqrt{9+x} + 3)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9+x} + 3}$$

เพราะฉะนั้น $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \sqrt{9+x} - 3}{x} = \lim_{x \to 0} x + \frac{1}{\sqrt{9+x} + 3}$$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{9+0} + 3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ตัวอย่างที่ 11.20 ข้อสอบแข่งขัน

ตัวเลข 0 ห้าตัว และตัวเลข 1 สามตัว ใช้ในการแทนความหมายของตัวเลขในระบบเลขฐาน 2 ได้ทั้งหมดกี่ค่าที่แตกต่างกัน

1. 2
2. 16
3. 56
4. 256

ตอบ 3.

แนวคิด ลองเขียนดูเท่าที่ทำได้เช่น

11100000, 11000001, 11000010

แค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้แล้ว

ลองเขียนต่อเท่าที่เวลาเหลือคงจะตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

แต่ตัวเลือก 3. และ 4. ข้อใดถูกต้องคงต้องใช้วิธีจริงแล้ว

มาลองดูวิธีนับกันจริงๆ เพื่อเพิ่มความรู้

□ □ □ □ □ □ □ □

การนำเลข 0 ห้าตัว และเลข 1 สามตัว จัดลำดับใน 8 ช่องว่าง

ทำได้ $\frac{8!}{5!3!} = 56$ วิธี

แต่ละวิธีคือจำนวนหนึ่งจำนวนในระบบเลขฐาน 2

เพราะฉะนั้นจำนวนที่แตกต่างกันทำได้ 56 วิธี

ตัวอย่างที่ 11.21 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $z_1^2z_2 = 1+i$ และ $z_1z_2^2 = 1-i$

ค่าของ $|z_1 - z_2|$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. $\sqrt{2}$
3. $\sqrt[3]{2}$ 4. $\sqrt[3]{4}$

ตอบ 4.

แนวคิด

$$z_1^2z_2 = 1+i$$

$$z_1z_2^2 = 1-i$$

$$z_1^3z_2^3 = 2$$

$$|z_1z_2| = \sqrt[3]{2}$$

$$(z_1z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2z_2 - z_1z_2^2$$

$$= (1+i) - (1-i)$$

$$= 2i$$

$$|z_1z_2||z_1 - z_2| = 2$$

$$|z_1 - z_2| = \frac{2}{|z_1z_2|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= \sqrt[3]{4}$$

12.

นำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าของโจทย์

ข้อสอบที่ถามว่า คำตอบ x มีค่าเท่าใด และตัวเลือกเป็นค่าของ x เราสามารถทดลองนำค่าในตัวเลือกมาลองแทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกได้ แต่การแทนค่าบางครั้งอาจจะต้องดัดแปลงค่าให้เหมาะสมเช่น ตัวเลือกกำหนดเป็นค่าของ $\cos\theta$ เช่น

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ เราต้องรู้ว่าโจทย์แแอบกำหนดมุม θ เป็น $\frac{\pi}{3}$ สำหรับตัวอย่างลักษณะอื่นๆ ขอให้ดูจากตัวอย่างต่อไปนี้

ค่าคงตัวที่น่าจดจำค่า

$\pi = 3.141593$

$e = 2.718282$

$\log(e) = 0.434294$

$\ln(10) = 2.302585$

$\sqrt{2} = 1.414214$

$\sqrt{3} = 1.732051$

$\sqrt{5} = 2.236068$

$\sqrt{6} = 2.44949$

$\sqrt{7} = 2.645751$

$\sqrt{8} = 2.828427$

$\sqrt{10} = 3.162278$

ตัวอย่างที่ 12.1   คณิตศาสตร์ ก. ปี 2533

ถ้า $2\sin 2\theta + 3\cot 2\theta - 3\operatorname{cosec} 2\theta = 0$ และ $0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\frac{1}{2}$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\theta \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta \neq 1$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

ตัวเลือก 2. ข้ามไปก่อน เพราะตัวเลขยุ่งยากกว่าตัวเลือก 3.

ลองตัวเลือก 3. ถ้า $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{6}$

แทนค่าในโจทย์

$$2\sin 2(\tfrac{\pi}{6}) + 3\cot 2(\tfrac{\pi}{6}) - 3\operatorname{cosec} 2(\tfrac{\pi}{6})$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{3} + 3\cot\frac{\pi}{3} - 3\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$$

$$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) + 3(\frac{1}{\sqrt{3}}) - 3(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 0$$

แสดงว่า $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ได้

ถือว่าโชคดีแล้วเราเลือกตัวเลือก 3. ได้เลย

ตัวอย่างที่ 12.2 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ ถ้า A คือเรนจ์ของ f และ B = [-1,1]

แล้ว $A \cap B$ เท่ากับเซตในข้อใด

1. (-1,1)
2. (-1,0]
3. [0,1]
4. (-1,1]

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาค่าที่เป็นไปได้ของสมาชิกใน R_f เช่น

$$f(1) = \frac{|1|}{1+1} = \frac{1}{2}$$

แสดงว่า $\frac{1}{2} \in A$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} \in A \cap B$ แน่นอน จึงทำให้เราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ดูจากตัวเลือกลองพิจารณาว่า $1 \in A \cap B$ ได้หรือไม่

โดยการพิจารณาสมการ

$$1 = f(x) = \frac{|x|}{x+1}$$

$x+1 = |x|$ มีคำตอบเป็น $x = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นมี $x = -\frac{1}{2}$ ทำให้ $f(-\frac{1}{2}) = 1$

แสดงว่า $1 \in A \cap B$ ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ต่อไปต้องใช้วิธีจริง

$\boxed{x > 0}$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $x > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$

เพราะฉะนั้น ถ้า $0 \leqslant x < \infty$ แล้ว $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

$\boxed{x < 0}$ $\quad f(x) = \dfrac{-x}{(x+1)}$

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $x < 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x}{x+1} = -1$

เพราะฉะนั้น ถ้า $-\infty < x \leqslant 0$ แล้ว $-1 < f(x) \leqslant 0$

สรุป เรนจ์ f คือ $(-1,1]$

นั่นคือ $A' = (-1,1]$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = (-1,1]$

ตัวอย่างที่ 12.3 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้จุด B และ C มีพิกัด (2,1) และ (-5,3) และ

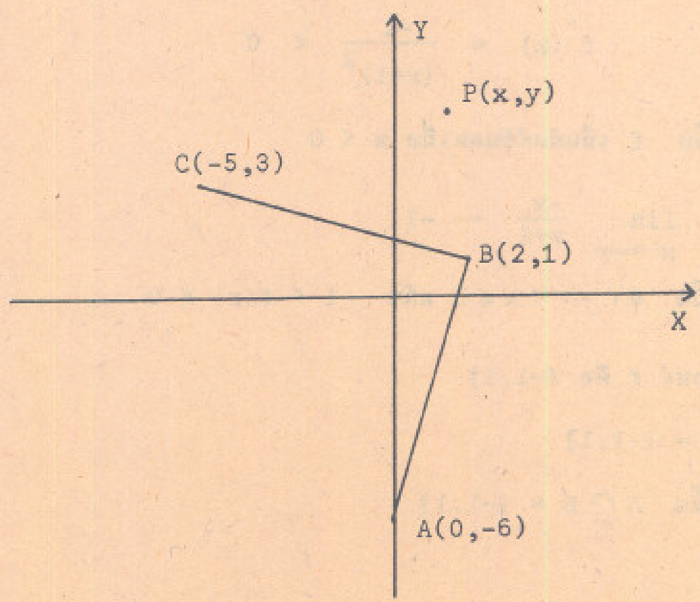
r = {(x,y) | (x,y) เป็นพิกัดของจุดซึ่งประกอบกับจุด B และ C แล้วได้รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 5 ตารางหน่วย }

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (0,-6) ∈ r
2. กราฟของ r เป็นเส้นตรงเส้นเดียว
3. r เป็นเซตจำกัด
4. กราฟของ r เป็นเส้นตรงสองเส้น

ตอบ 4.

แนวคิด เขียนรูปตามโจทย์เท่าที่ได้ก่อน



$$\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} -5-2 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{53}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-0 \\ 1-(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{53}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

เพราะฉะนั้น พ.ท. $\Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \sqrt{53} \neq 5$

ดังนั้น $(0,-6) \notin r$ เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดใน r

ถ้า พ.ท. Δ PBC = 5 จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ฐาน} \cdot \text{สูง} = 5$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \text{สูง} = 5$$

$$\text{สูง} = \frac{10}{\sqrt{53}}$$

ดังนั้นทุกจุดบนเส้นตรงที่ขนานกับ BC และห่างจาก BC $\frac{10}{\sqrt{53}}$ จะอยู่ใน r

ซึ่งเส้นตรงในลักษณะนี้จะมีได้ 2 เส้น

ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 12.4 ข้อสอบแข่งขัน

ปริมาตรของลูกบาศก์ ก. เป็นสามเท่าของลูกบาศก์ ข. ถ้าลูกบาศก์ ข. มีพื้นที่ผิวเป็น 18 ตารางเซนติเมตร แล้วลูกบาศก์ ก. มีพื้นที่ผิวกี่ตารางเซนติเมตร

1. $9\sqrt{3}$
2. $18\sqrt[3]{9}$
3. $9\sqrt[3]{9}$
4. $27\sqrt[3]{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ความยาวด้านของลูกบาศก์ ข. เป็น x

เพราะฉะนั้น $6x^2 = 18$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

ปริมาตรของลูกบาศก์ ข. เท่ากับ $(\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นปริมาตรลูกบาศก์ ก. เท่ากับ $9\sqrt{3}$

ความยาวด้านของลูกบาศก์ ก. เท่ากับ $\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ผิวลูกบาศก์ ก. เท่ากับ $6(\sqrt[3]{9\sqrt{3}})^2$

$$\begin{aligned} 6(\sqrt[3]{9\sqrt{3}})^2 &= 6(9\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \\ &= 6(3^{\frac{5}{2}})^{\frac{2}{3}} \\ &= 6\sqrt[3]{3^5} \\ &= 18\sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

พิจารณาตัวเลือก 1.

ให้ความยาวด้านของลูกบาศก์ ก. เท่ากับ k

สมมติพื้นที่ผิวลูกบาศก์ ก. เท่ากับ $9\sqrt{3}$

ดังนั้น $$6k^2 = 9\sqrt{3}$$

$$k^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$k^3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

เพราะฉะนั้นปริมาตรลูกบาศก์ ข. เท่ากับ $\dfrac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}$

ความยาวด้านของลูกบาศก์ ข. เท่ากับ $\sqrt[3]{\dfrac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}}$

พื้นที่ผิวลูกบาศก์ ข. เท่ากับ

$$6\left[\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]^2 \neq 18$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ได้

ต่อไปทำกับตัวเลือก 2. จะพบว่าเป็นไปได้

ดังนั้นเราเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

ตัวอย่างที่ 12.5 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $\theta \in [-\pi,\pi]$ เซตคำตอบของสมการ

$$1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + \ldots + \tan^{2n}\theta + \ldots = \frac{3}{2}$$

ตรงกับเซตในข้อใด

1. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$
2. $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$
3. $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$
4. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

ตอบ 2.

แนวคิด ลองนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์โดยเลือกตัวเลขที่แทนค่าได้ง่าย เช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้

$$1 + \tan^2\frac{\pi}{4} + \tan^4\frac{\pi}{4} + \ldots = 1+1+1+\ldots \neq \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปลอง $\theta = \frac{\pi}{3}$

$$1 + \tan^2\frac{\pi}{3} + \tan^4\frac{\pi}{4} + \ldots = 1+3+3^2+\ldots \neq \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ก็ใช้ไม่ได้ด้วย

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

สรุปเหลือตัวเลือก 2. เท่านั้น

หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้ต้องใช้ลำดับเรขาคณิตแก้ปัญหา

$$\frac{3}{2} = 1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + \ldots$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1 - \tan^2\theta}$$

$$1 - \tan^2\theta = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$ ได้

<u>**การนับจำนวนสมาชิกของลำดับเลขคณิต**</u>

1. บวกตลอด

2. หารตลอด

ตัวอย่าง **A={ 3,7,11,15,...511 } มีสมาชิกกี่ตัว**

เอา 1 บวกตลอด 4,8,12,16,...,512

เอา 4 หารตลอด 1,2, 3, 4,...,128

เพราะฉะนั้น n(A)=128

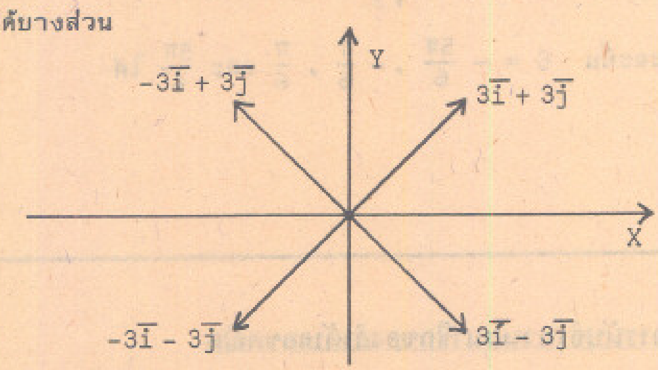
ตัวอย่างที่ 12.6 ข้อสอบแข่งขัน

เวกเตอร์ที่มีความยาวเท่ากับ $3\sqrt{2}$ หน่วย ทำมุม 45° กับเวกเตอร์ $\bar{j}$ และตั้งได้ฉากกับเวกเตอร์ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ คือเวกเตอร์ในข้อใด

1. $-3\bar{i} + 3\bar{j}$
2. $3\bar{i} + 3\bar{j}$
3. $-3\bar{i} - 3\bar{j}$
4. $3\bar{i} - 3\bar{j}$

ตอบ

แนวคิด เขียนเวกเตอร์ทุกตัวในตัวเลือก แล้วดูที่มุมที่ทำกับแกน Y ก็จะตัดตัวเลือกได้บางส่วน



เวกเตอร์ที่ทำมุม 45° กับเวกเตอร์ $\bar{j}$ คือ $3\bar{i} + 3\bar{j}$ และ $-3\bar{i} + 3\bar{j}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปดูค่าของ

$$(3\bar{i} + 3\bar{j})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) = 0$$

$$(-3\bar{i} + 3\bar{j})\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right) \neq 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

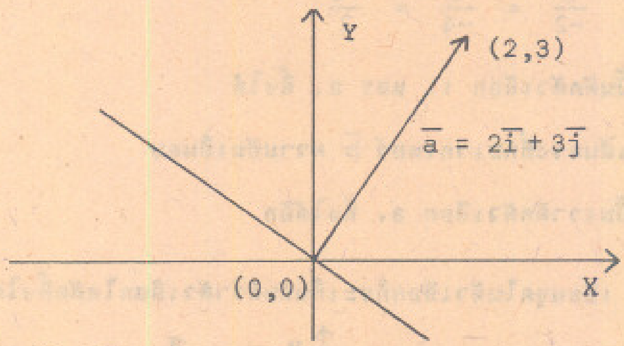
ตัวอย่างที่ 12.7 ข้อสอบแข่งขัน

ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ ถ้า $\bar{b}$ มีจุดเริ่มต้นที่ (0,0) และตั้งฉากกับ $\bar{a}$ แล้ว เส้นตรงที่ลากทับเวกเตอร์ $\bar{b}$ จะผ่านจุดทุกจุดที่กำหนดให้ในข้อใดต่อไปนี้

1. {(2,-4),(3,-2),(6,-4)}
2. {(-4,1),(-1,-1),(2,-3)}
3. {(-4,-6),(-2,-3),(2,3)}
4. {(3,-2),(6,-4),(-3,2)}

ตอบ 4.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เขียนรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ก่อน



เพราะว่า $\bar{b} \perp \bar{a}$

ถ้า $x\bar{i} + y\bar{j} \parallel \bar{b}$ จะได้ว่า $(x\bar{i} + y\bar{j}) \cdot \bar{a} = 2x + 3y = 0$

ต่อไปนำจุดในเซตของตัวเลือกมาพิจารณาค่า

ตัวเลือก	(x,y)	2x + 3y
1	(2,-4)	-8
2	(-4,1)	5
3	(-4,-6)	-26

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีที่ 2 เราอาจใช้เหตุผลเกี่ยวกับอัตราส่วนก็ได้

กล่าวคือ ถ้า (x,y) เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ซึ่งเริ่มต้น (0,0) ที่ทับหรือขนานกับเวกเตอร์ $\overline{b}$ ต้องมีอัตราส่วน $\frac{x}{y}$ คงที่ จากตัวเลือกพบว่า

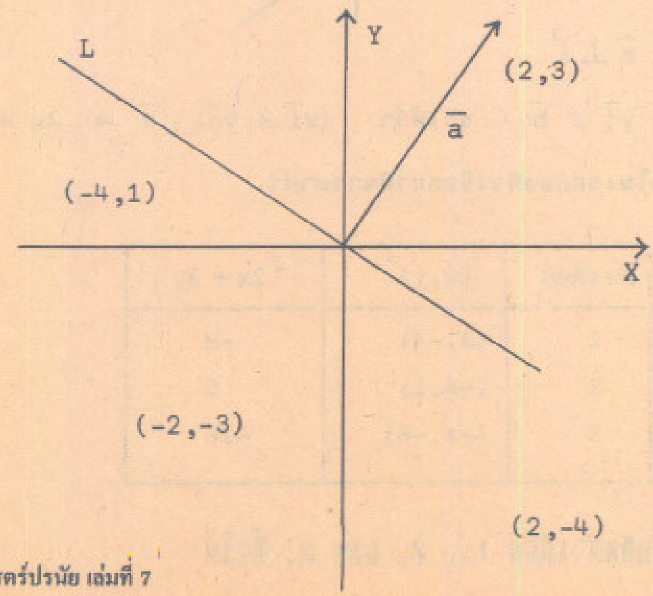
1. $\frac{2}{-4} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{6}{-4}$
2. $\frac{-4}{1} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{-3}$
3. $\frac{-4}{-6} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$
4. $\frac{3}{-2} = \frac{6}{-4} = \frac{-3}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่าเส้นตรงที่ทับเวกเตอร์ $\overline{b}$ ความชันเป็นลบ

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

วิธีที่ 3 เขียนจุดในตัวเลือกก็จะเห็นทันทีว่าตัวเลือกใดตัดทิ้งได้



จุดปลายเวกเตอร์ $\bar{b}$ ต้องอยู่บนเส้นตรง L

(2,-4) ไม่อยู่บน L เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

(-4,1) ไม่อยู่บน L เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

(-4,-6) ไม่อยู่บน L เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 12.8 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ

$$2^x \cdot 5^y = 1 \quad \text{และ} \quad 5^{x+1} \cdot 2^y = 2$$

แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $|x-y| = 0$
2. $0 < |x-y| < 1$
3. $|x-y| = 1$
4. $|x-y| > 1$

ตอบ 2.

แนวคิด การทำโจทย์บางครั้งเราตัดตัวเลือกทิ้งไปได้ 1 ตัว ก็ยังดี เช่น จากตัวเลือก 1.

ถ้า $|x-y| = 0$

จะได้ $x = y$

ดังนั้น $1 = 2^x \cdot 5^y = 2^x \cdot 5^x = 10^x$ จะได้ $x = 0$

แต่ $5^{0+1} \cdot 2^0 \neq 2$

เพราะฉะนั้น $x-y = 0$ ไม่ได้แน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

อยากได้คำตอบจริงต้องทำต่อดังนี้

จาก $\quad 2^x \cdot 5^y = 1$

จะได้ $\quad x \log 2 + y \log 5 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

จาก $\quad 5^{x+1} \cdot 2^y = 2$

จะได้ $\quad (x+1)\log 5 + y \log 2 = \log 2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$$(1)-(2)\ ; \quad x\log 2 - (x+1)\log 5 + y\log 5 - y\log 2 = 1 - \log 2$$

$$x(\log 2 - \log 5) - \log 5 + y(\log 5 - \log 2) = \log 5$$

$$(x-y)(\log 2 - \log 5) = 2\log 5$$

$$(x-y)(\log 2 - (1 - \log 2)) = 2(1 - \log 2)$$

$$(x-y)(1 + 2\log 2) = 2 - 2\log 2$$

$$x - y = \frac{2 - 2\log 2}{1 + 2\log 2}$$

$$= \frac{2 - 2(0.3)}{1 + 2(0.3)}$$

$$= \frac{1.4}{1.6}$$

$$= 0.875$$

เพราะฉะนั้น $\quad 0 < |x-y| < 1$

ตัวอย่างที่ 12.9 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งสอดคล้องสมการ

$$2^x = \frac{10}{3} - 2^{-x}$$

และ $y = \log_6 4 \cdot \log_8 6 \cdot \log_{10} 8$

ค่าของ xy เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\log 3$
2. $-2\log 3$
3. $2\log 2$
4. $-2\log 2$

ตอบ 1.

แนวคิด จากโจทย์ $x > 0$ และ

$$y = \log_6 4 \cdot \log_8 6 \cdot \log_{10} 8 > 0$$

เพราะฉะนั้น $xy > 0$ แน่นอน

ตัวเลือกที่ตัดทิ้งได้ก่อนคือ ตัวเลือก 2. และ 4.

$$y = \log_6 4 \cdot \log_8 6 \cdot \log_{10} 8 = \log 4 = 2\log 2$$

สมมติ $xy = 2\log 2$ ตามตัวเลือกที่ 3.

จะได้ $x = 1$

แต่ $2^1 \neq \frac{10}{3} - 2^{-1}$

เพราะฉะนั้น $xy = 2\log 2$ ไม่ได้

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

หมายเหตุ อยากรู้ค่า x ต้องทำโดยการแก้สมการ

$$2^x = \frac{10}{3} - 2^{-x}$$

$$3(2^x)^2 = 10(2^x) - 3$$

$$3(2^x)^2 - 10(2^x) + 3 = 0$$

$$(3(2^x) - 1)(2^x - 3) = 0$$

$$2^x = \frac{1}{3}, 3$$

แต่ $x > 0$ จะได้ $2^x = 3$

$$x = \frac{\log 3}{\log 2}$$

เพราะฉะนั้น $xy = 2\log 3$

ผลบวกของลำดับเลขคณิต

$$a_1+a_2+a_3+...+a_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

ตัวอย่าง 3+7+11+15+....511 เท่ากับเท่าใด

{ 3,7,11,15,...511 } มีทั้งหมด 128 ตัว

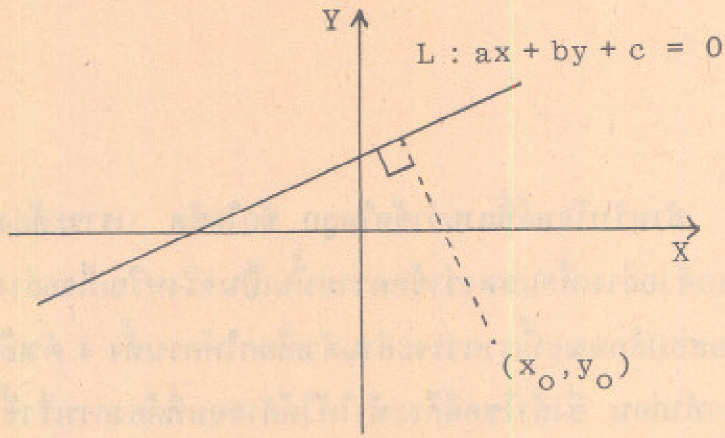
เพราะฉะนั้น $3+7+11+15+...+511 = \frac{128}{2}(3+511) = 32707$

13.

ใช้ยกตัวอย่างเพื่อการสรุปผล

สำหรับโจทย์ที่ถามว่าข้อใดถูก ข้อใดผิด เราจะต้องทำการยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าข้อความนั้นเป็นจริงหรือเท็จอย่างไร ซึ่งข้อสอบลักษณะนี้เราควรจะอ่านตัวเลือกให้ครบทั้ง 4 ตัวเลือกนั้นมาทำก่อน ซึ่งถ้าโชคดีก็จะทำให้ได้คำตอบที่ต้องการเร็วขึ้น

สูตรของระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง



ระยะทางจาก (x_o, y_o) ไปยัง L เท่ากับ

$$\frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ตัวอย่างที่ 13.1 ข้อสอบแข่งขัน

บทนิยาม จำนวนเต็มบวก n จะเรียกว่า จำนวนสามเหลี่ยม ก็ต่อเมื่อ n อยู่ในรูป $1+2+...+k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n_1 + n_2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
2. ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n_1 n_2$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
3. ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $9n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม
4. ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ตอบ 3.

แนวคิด ตัวอย่างจำนวนสามเหลี่ยมจากน้อยไปมากคือ

1	(1)
3	(1+2)
6	(1+2+3)
10	(1+2+3+4)
15	(1+2+3+4+5)
21	(1+2+3+4+5+6)

เพราะว่า 1, 3 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แต่ $1+3 = 4$ ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า $(3)(6) = 18$ ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่าเมื่อ $n = 1$, $1+1 = 2$ ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

หมายเหตุ ตัวเลือก 3. ถูกต้องแสดงข้อพิสูจน์ได้โดยการจัดรูปดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

$$n = 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$9n+1 = \frac{9(k(k\ 1))}{2} + 1$$

$$= \frac{(3k+1)((3k+1)+1)}{2}$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 3k + (3k+1)$$

เพราะฉะนั้น $9n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

<u>**เส้นตรง**</u>

L : $aX+bY+c = 0$

M : $mX+nY+k = 0$

L ขนานกับ M ก็ต่อเมื่อ ความชัน L เท่ากับ ความชัน M

L ขนานกับ M ก็ต่อเมื่อ $an = bm$

L ตั้งฉากกับ M ก็ต่อเมื่อ $am+bn=0$

ตัวอย่างที่ 13.2 ข้อสอบแข่งขัน

กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $f(x^2-x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \text{ หรือ } x > 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0, 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \end{cases}$

2. $|x| = x\,f(x)$

3. $f(ax) = -f(a)\,f(x)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงลบใดๆ

4. $g(|x|)\,f(x) = -g(|-x|)\,f(-x)$ สำหรับทุกฟังก์ชัน g

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อนี้ต้องพยายามยกตัวอย่างดีกว่าจะพยายามพิสูจน์

ตัวเลือก 1. และตัวเลือก 2. เราพยายามยกตัวอย่างหลายหนเช่น
$x = -2, -1, 0, 1, 2$ พบว่าเป็นจริงเสมอ
ดังนั้นเราควรจะข้ามไปตัวเลือก 3.
เลือก $a = -3$, $x = 4$

$$f((-3)(4)) = f(-12) = -1$$

$$-f(-3)\,f(4) = -(-1)(1) = 1$$

ดังนั้นตัวเลือก 3. เป็นตัวเลือกที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 13.3 ข้อสอบแข่งขัน

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็มบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\forall t$ [$\sqrt{t}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ]

2. $\forall t$ [t^2 เป็นจำนวนคู่]

3. $\exists t$ [$\sqrt{t}$ ไม่เป็นจำนวนจริง]

4. $\forall t$ [$(2t+1)^t$ เป็นจำนวนคี่]

ตอบ 4.

แนวคิด

1. มี $t = 4$, $\sqrt{t} = \sqrt{4} = 2$

   เพราะฉะนั้น $\forall t$ [$\sqrt{t}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ] เป็นเท็จ

2. เพราะว่า $t \in I^+$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{t} \in R$

   เพราะฉะนั้น $\exists t$ [$\sqrt{t}$ ไม่เป็นจำนวนจริง] เป็นเท็จ

3. มี $t = 3$, $t^2 = 3^2 = 9$ ไม่เป็นจำนวนคู่

   เพราะฉะนั้น $\forall t$ [t^2 เป็นจำนวนคู่] เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 13.4 ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2536

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $\sin A \cos B = 1$ แล้ว $\sin A = \cos B$ เท่านั้น

2. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 + 2\sin^2\theta$ ทุก θ

3. คาบของฟังก์ชัน $f(x) = \sin(3\pi x)$ คือ $\frac{1}{3}$

4. ถ้า x อยู่ในโดเมนของ arcsin และ $\arcsin(\cos x) = 0$ แล้ว $x = \frac{\pi}{2}$ เท่านั้น

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์แบบนี้วิธีตัดตัวเลือกเหมาะสมที่สุด และในการทำจริงๆ ควรจะอ่านตัวเลือกให้ครบทุกข้อ

เช่น โดเมนของ arcsin คือ $[-1,1]$ แต่ $x = \frac{\pi}{2} > 1$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

$$
\begin{aligned}
\text{เพราะว่า}\quad f\left(x + \tfrac{1}{3}\right) &= \sin 3\pi\left(x + \tfrac{1}{3}\right) \\
&= \sin(3\pi x + \pi) = -\sin 3\pi x \\
&\neq f(x)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

ตัวเลือก 2. ก็ผิดอีก เนื่องจาก

$$
\begin{aligned}
\cos^4\theta - \sin^4\theta &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\
&= 1 - 2\sin^2\theta \quad \neq 1 + 2\sin^2\theta
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2, 3 และ 4, จึงตัดทิ้งได้

หมายเหตุ $\sin A \cos B = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\sin A = \cos B = \pm 1$

ตัวอย่างที่ 13.5 ข้อสอบแข่งขัน

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน

1. $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x + \frac{1}{x}\}$

2. $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}\}$

3. $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 , xy > 0\}$

4. $r_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x|x|\}$

ตอบ 2.

แนวคิด ดูที่ตัวเลือก 2. ก่อนเพราะว่ามีพจน์ y^2

ลองเลือก $x = 5$ จะได้คิดเลขได้ง่ายกว่า ต่อไปหาค่า y ที่เป็นไปได้

$$5 = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$$

$$0 = \sqrt{8+2y-y^2}$$

$$0 = 8+2y-y^2$$

$$y^2-2y-8 = 0$$

$$(y-4)(y+2) = 0$$

แสดงว่า $(5,4),(5,-2)$ อยู่ใน r_2

เพราะฉะนั้นอินเวอร์สของ r_2 ไม่เป็นฟังก์ชัน

14.

โจทย์เสริมทักษะในการตัดตัวเลือก

โจทย์เสริมทักษะในหัวข้อนี้คัดเลือกมาจากข้อสอบจริงที่มีจากการสอบที่ผ่านๆมาโดยมีข้อสอบดังต่อไปนี้

- ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. ปี พ.ศ. 2537
- ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. ปี พ.ศ. 2537
- ข้อสอบแข่งขันของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ปีการศึกษา 2537
- ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 2 ปี พ.ศ. 2536

ข้อสอบแต่ละข้อจะเฉลยเพียงตัวเลือกที่ถูกต้องเท่านั้น สำหรับวิธีเฉลยอย่างละเอียดทั้งวิธีจริงและวิธีตัดตัวเลือกขอให้อ่านจากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 1- เล่มที่ 5.

คณิตศาสตร์ ก. ปี พ.ศ. 2537

1. ให้ $A = \{x \in R \mid |x-1| < 4\}$

   $B = \{x \in R \mid \frac{x+2}{x-1} \geq 0\}$

   C = เซตของจำนวนเต็ม

   แล้ว $A \cap B \cap C$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\{-2,2,3,4\}$ 2. $\{-3,-2,2,3,4\}$
   3. $\{-3,-2,1,2,3,4\}$ 4. $\{-3,-2,1,2,3,4,5\}$

2. เซตคำตอบของอสมการ $3 \leq |x+1| \leq 7$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(-10,4)$ 2. $(-9,-2) \cup (1,7)$
   3. $(-5,8)$ 4. $(-10,-3) \cup (3,8)$

3. ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$

   และ $g(x) = \sqrt{x}$

   โดเมนและเรนจ์ของ $f \circ g$ ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
   2. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$
   3. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
   4. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$

4. กำหนดให้ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{2}{x-1}$
ค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{30}$ 2. 0
3. $\frac{1}{30}$ 4. $\frac{1}{5}$

5. พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสี่อยู่ที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา
$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ และจุดโฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 40
3. 48 4. 60

6. ถ้าวงกลมผ่านจุด (0,0) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของ
วงรี $3y^2+4x^2 = 48$ แล้ว วงกลมมีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+y^2-4y = 0$ และ $x^2+y^2+4y = 0$
2. $x^2+y^2-4y+12 = 0$ และ $x^2+y^2+4y+12 = 0$
3. $x^2-4x+y^2+12 = 0$ และ $x^2+4x+y^2+12 = 0$
4. $x^2-4x+y^2 = 0$ และ $x^2+4x+y^2 = 0$

7. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2+4x-2y = 4$
กับจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = -6y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{25}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{29}}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

8. เซตคำตอบของสมการ

$$\log_x \sqrt{28} + \log_x \sqrt{325} - \log_x \sqrt{91} = \log x$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. ϕ
2. $\{\frac{1}{10}\}$
3. $\{10\}$
4. $\{10, \frac{1}{10}\}$

9. ค่าของ $\cos \frac{7\pi}{6} (\sin \frac{5\pi}{3} - 2\sin \frac{8\pi}{3})$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{9}{4}$
2. $-\frac{3}{4}$
3. $\frac{3}{4}$
4. $\frac{9}{4}$

10. ถ้า $\frac{1}{\sin\theta + 1} - \frac{1}{\sin\theta - 1} = 4$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

แล้ว $\sin\theta \sec(\theta + \frac{\pi}{2})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 0
4. 2

11. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\sin\theta > \tan\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
2. $\sin\theta < 1$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
3. $\tan\theta > 1$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
4. $\sin\theta < \cos\theta$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$

12. กำหนดให้ $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

ถ้า B เป็นเมตริกซ์ 2×2 ที่สอดคล้องสมการ $BA^{-1} = A^t$ แล้ว B คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $x \in [-2\pi, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} \sin x & 2\sin x \\ -\cos x & 2\cos x \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-2\pi, 2\pi\}$
2. $\{-2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$
3. $\{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi\}$
4. $\{-2\pi, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, 2\pi\}$

14. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ แล้วเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x = \frac{2}{3}$ จะขนานกับเส้นตรงในข้อใด

1. $6x+3y-7 = 0$
2. $8x+3y+5 = 0$
3. $8x-3y-4 = 0$
4. $4x+3y-11 = 0$

15. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 3$

$$g(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 3$$

ความชันของเส้นโค้งที่จุดซึ่ง $x = 1$ ของฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

1. $f(x)$ 2. $g(x)$
3. $(f \cdot g)(x)$ 4. $(\frac{f}{g})(x)$

16. ชาวสวนผู้หนึ่งสังเกตว่าถ้าเขาปลูกมะม่วง 80 ต้น ในพื้นที่หนึ่งจะได้ผลเฉลี่ย 150 ผลต่อต้น แต่ถ้าเขาปลูกให้น้อยลงจะได้ผลเฉลี่ยเพิ่มขึ้นต้นละ 5 ผลต่อจำนวนมะม่วงที่ลดลง 1 ต้น ถ้า N เป็นจำนวนต้นมะม่วงที่ปลูกในพื้นที่นี้เพื่อให้ได้ผลผลิตมากที่สุด แล้ว N เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $25 \leqslant N < 40$ 2. $40 \leqslant N < 55$
3. $55 \leqslant N < 70$ 4. $70 \leqslant N < 80$

17. กล่องใบหนึ่งมีบัตร n ใบ บัตรแต่ละใบเขียนเลขไม่ซ้ำกันกำกับไว้เริ่มจาก 1 จนถึง n $(n \geqslant 3)$ ถ้าหยิบบัตร 2 ใบออกมาโดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่ได้บัตร 2 ใบโดยที่ใบหนึ่งเป็นเลข 3 และอีกใบหนึ่งน้อยกว่า 3 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{n(n-1)}$ 2. $\frac{2}{n^2}$
3. $\frac{4}{n(n-1)}$ 4. $\frac{4}{n^2}$

คณิตศาสตร์ กข. ปี พ.ศ. 2537

1. ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

   1. $(p \wedge q) \vee \sim r$
   2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
   3. $\sim(p \vee q) \vee r$
   4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

2. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m,n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x+3$ หาร x^3+mx^2+nx+p ลงตัว และ $x-1$ หาร x^3+mx^2+nx+p เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $m = 4, n = -4$
   2. $m = 2, n = -2$
   3. $m = -4 \ n = 4$
   4. $m = -2, n = 2$

3. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่ทำมุม 45° กับแกน X และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2-4x+3y^2-2 = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $2\sqrt{2}$
   2. $4\sqrt{2}$
   3. 2
   4. 4

4. ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต

   $\{-\frac{(1+2+...+n)}{n^2} \mid n$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ ใน R

   เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. -1
   2. $-\frac{1}{2}$
   3. $-\frac{1}{4}$
   4. 0

5. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $A = \{x \in I \mid |x^2-2| < 8\}$

และ $B = \{x \in R \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

แล้วเซตของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

1. $\{(-3,1),(-2,2),(-1,3),(1,4),(2,5)\}$
2. $\{(-3,0),(-2,1),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$
3. $\{(-3,1),(0,2),(1,1),(2,3),(3,4)\}$
4. $\{(-3,1),(-2,4),(1,5),(2,2),(3,1)\}$

6. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+4x+y^2-8y+11 = 0$ แล้วสมการของเส้นตรง OP และสมการของวงกลมที่มี OP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = 4x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$
2. $y = -4x$ และ $x^2+2x+y^2-2y = 0$
3. $y = 2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 10$
4. $y = -2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$

7. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$ และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E มีจุดยอดกับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้คือสมการของไฮเพอร์โบลา

1. $x^2-5y^2-2x-20y+14 = 0$
2. $x^2-5y^2+2x+20y-14 = 0$
3. $x^2-5y^2+2x+20y-18 = 0$
4. $5x^2-y^2-2x+20y+18 = 0$

8. ถ้า $A = \{(x,y) \mid 0 < x \leqslant \pi,\ 0 < y \leqslant \pi,$

$$\cos(x+y) \geqslant 0,\ \sin(x+y) \leqslant 0\}$$

แล้ว A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant 2\pi - x\ ,\ x \leqslant \pi\}$
2. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leqslant y \leqslant \pi\ ,\ x \leqslant \pi\}$
3. $\{(x,y) \mid 0 < y \leqslant 2\pi - x\ ,\ x > 0\}$
4. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi\ ,\ \frac{3\pi}{4} \leqslant y \leqslant \pi\}$

9. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ

$$(2 \log_3 0.5) \log_{0.5} x = \log_3 4$$

และ $$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < y < x$ 2. $0 < x < y$
3. $y < 0 < x$ 4. $0 < x = y$

10. ให้ A,B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์

เอกลักษณ์มิติ 3×3 ถ้า AB = BA = I และ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

แล้ว เมตริกซ์ผูกพันของ B (adj B) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3} A$ 2. $-3A$
3. $\frac{1}{3} A^t$ 4. $-3A^t$

11. ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$[\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots] < 1$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < x < \sqrt{3}$ 2. $x > \sqrt{3}$
3. $0 < x < 3\sqrt{3}$ 4. $x > 3\sqrt{3}$

12. กำหนดให้ $y = \sqrt{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}$ เมื่อ $x \geqslant 0$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2 \frac{(y+\sqrt{y^2-4})}{2}$ 2. $\log_2 \frac{(y+\sqrt{y^2+4})}{2}$
3. $\log \frac{(y+\sqrt{y^2-4})}{2}$ 4. $\log \frac{(y+\sqrt{y^2+4})}{2}$

13. เซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x} \leqslant 1$$

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,1)$ 2. $[10!,\infty)$
3. $(0,1)\cup[10!,\infty)$ 4. $(0,1)\cup(1,\infty)$

14. ให้ $f(x) = 3x-10$

และ $h(x) = (f \circ g)(x) = ax^2+bx+c$

ถ้า $h(0) = 1$ และ h มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ คือ 5

แล้วค่าของ $g(1)$ คือข้อใด

1. 2 2. 3
3. 5 4. 6

15. ถ้าความชันของเส้นโค้งที่จุด (x,y) ใดๆ เป็น $2-2x$ และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ จากจุด $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับ 9 แล้วเส้นโค้งผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(3,0)$ 2. $(1,0)$
3. $(0,-3)$ 4. $(0,-1)$

16. ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(3,-1)$ และ $B(-1,3)$ แล้วเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-4\bar{i} + 4\bar{j}$ 2. $4\bar{i} - 4\bar{j}$
3. $-4\sqrt{2}\,\bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j}$ 4. $4\sqrt{2}\,\bar{i} - 4\sqrt{2}\,\bar{j}$

17. กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ

$|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$

ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$

แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\pi}{5}$
3. $\frac{4\pi}{5}$ 4. $\frac{6\pi}{5}$

18. กำหนดให้ค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนคนงาน
81 - 85	1
86 - 90	3
91 - 95	x
96 - 100	5
101 - 105	8
106 - 110	y
111 - 115	10
116 - 120	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้ว จำนวนคนงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 คน
2. 22 คน
3. 28 คน
4. 42 คน

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ฯ ปีการศึกษา 2537

1. สำหรับสับเซต A,B,C ใดๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$
   ถ้า $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$ แล้วข้อความใดต่อไปนี้ผิด
   ก. $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = B'$
   ข. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cup C)$
   ค. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
   ง. $A \cap (A \cup B) \subset A$

2. ห.ร.ม. ของ −504 และ 450 มีค่าเท่ากับเท่าใด

   ก. 18 ข. −18
   ค. 72 ง. ไม่มีค่า ห.ร.ม.

3. ให้ R เป็นเซตจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของของ R ไป R
   กำหนดโดย $f(x) = \sqrt{x+2}$
   $g(x) = x^2-2$
   ข้อใดต่อไปนี้ผิด
   ก. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ทุก $x \geq 0$
   ข. $R_{g \circ f} = R_{f \circ g} = [0,\infty)$
   ค. $D_{g \circ f} = D_f$
   ง. $D_{f \circ g} = D_g$

4. จุดต่อไปนี้จุดใดอยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และ

เส้นสัมผัสนั้นขนานกับเส้นตรง $x+y = 0$

ก. $(2,-1)$ ข. $(3,-5)$

ค. $(4,-7)$ ง. $(5,-9)$

5. ให้ O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2+y^2+4x = 0$ ลาก OP ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง OP พิกัดของ Q สอดคล้องสมการข้อใด

ก. $x^2+y^2+2x = 0$ ข. $x^2+y^2-2x = 0$

ค. $x^2+y^2+8x = 0$ ง. $x^2+y^2-8x = 0$

6. สมการของวงรีที่ผ่านจุดกำเนิดและมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-1,1)$ กับ $(1,1)$ คือสมการในข้อใด

ก. $2x^2+y^2+4x = 0$ ข. $2x^2+y^2-4x = 0$

ค. $x^2+2y^2+4y = 0$ ง. $x^2+2y^2-4y = 0$

7. ไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3-3\sqrt{13}\,,1)$ จุดศูนย์ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3,1)$ อัตราส่วนของระยะทางครึ่งแกนตามขวางต่อระยะครึ่งแกนสังยุคเป็น 2 : 3 สมการของไฮเพอร์โบลานี้คือสมการในข้อใด

ก. $\dfrac{(x+3)^2}{36} - \dfrac{(y-1)^2}{81} = 1$

ข. $\dfrac{(y-1)^2}{81} - \dfrac{(x+3)^2}{36} = 1$

ค. $\dfrac{(x+3)^2}{117} - \dfrac{(y-1)^2}{50} = 1$

ง. $\dfrac{(x+3)^2}{50} - \dfrac{(y-1)^2}{117} = 1$

8. ให้ O เป็นจุดกำเนิด ลากเส้นตรง OA และ OB ทำให้จุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $2x+y = a$ โดยมี OA = OB และมุม AOB เป็นมุมฉาก พื้นที่สามเหลี่ยม OAB จะมีค่าเป็นเท่าใด

ก. $\frac{a^2}{2}$ ข. $\frac{a^2}{3}$

ค. $\frac{a^2}{4}$ ง. $\frac{a^2}{5}$

9. รูปสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรง AB คือ $3x+2y = 12$ M เป็นจุดที่เส้นตั้งฉากลากจากจุดยอด A, B และ C มาตั้งฉากกับฐานพบกัน สมการเส้นตรง BM คือ $x+2y = 4$ และสมการเส้นตรง AM คือ $4x+y = 6$

สมการของเส้นตรง AC คือสมการในข้อใด

ก. $2x-y+6 = 0$ ข. $2x-y+8 = 0$

ค. $x-2y+6 = 0$ ง. $x-2y+8 = 0$

10. ผลคูณของคำตอบของสมการ $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan\frac{1}{2}$ เท่ากับเท่าใด

ก. $-\frac{1}{9}$ ข. $-\frac{4}{3}$

ค. $\frac{1}{9}$ ง. $\frac{4}{3}$

11. ค่าของ $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5})$ เท่ากับเท่าใด

ก. $\frac{48}{65}$ ข. $\frac{52}{65}$

ค. $\frac{56}{65}$ ง. $\frac{63}{65}$

12. ถ้า $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ และ $B = \{z-2 \mid z \in A\}$

โดยที่ C คือเซตของจำนวนเชิงซ้อน

จะได้ว่า $A \cap B$ เป็นสับเซตของข้อใด

ก. $\{(x+yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 9\}$

ข. $\{(x+yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 64\}$

ค. $\{(x+yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 65\}$

ง. $\{(x+yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4+y^4 = 81\}$

13. ให้ k เป็นจำนวนจริง และ $f_k : R-\{2\} \rightarrow R$ กำหนดโดย

$$f_k(x) = \frac{k|x^2-4|}{x-2} \quad \text{ทุกค่า } x \in R-\{2\}$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim\limits_{x \to 2^-} f_k(x) = -4k$

และ $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x) = 4k$

(2) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim\limits_{x \to 2} f_k(x) = |4k|$

(3) สำหรับทุก $k \in R$ $\lim\limits_{x \to 2} f_k(x)$ ไม่มีค่า

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ

ข. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

ค. ข้อ (1) - (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

ง. ข้อ (1) - (3) ผิดทุกข้อ

14. กำหนดข้อมูลดังนี้

x	y	u	v
10	15	0	5
13	16	3	6
14	19	4	9
17	23	7	13
16	22	6	12
14	20	4	10

สมการเส้นตรงประมาณความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y คือ

สมการ $\hat{y} = a_0 + a_1x$

สมการเส้นตรงประมาณความสัมพันธ์ระหว่าง u และ v คือ

สมการ $\hat{v} = b_0 + b_1u$

ค่า a_0, a_1, b_0 และ b_1 เป็นดังข้อใด

ก. $a_0 = b_0$ และ $a_1 = b_1$

ข. $a_0 = b_0$ และ $a_1 \neq b_1$

ค. $a_0 \neq b_0$ และ $a_1 = b_1$

ง. $a_0 \neq b_0$ และ $a_1 \neq b_1$

ข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 ปี พ.ศ. 2536

1. กำหนดให้ $A' \cap B = (A \cap B')'$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A \neq B'$ 　　 2. $A' \neq B$

   3. $A \cup B' \subset B'$ 　　 4. $A \not\subset A \cap B'$

2. ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ

   $x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$ และ $z = \frac{c-a}{c+a}$ เป็นจำนวนจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $x+y+z \geqslant 0$ 　　 2. $x+y+z < 0$

   3. $xyz < 0$

   4. $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

3. ให้ $a = 0.9$, $b = a^a$ และ $c = a^b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $a < b < c$ 　　 2. $b < a < c$

   3. $a < c < b$ 　　 4. $b < c < a$

4. ให้ ℓ แทนเส้นตรงที่มีสมการ $y = 2x$ พิกัดของจุด P_0 คือ (0,2) ถ้า P_1 เป็นโพรเจกชันของ P_0 บน ℓ , P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y และ P_3 เป็นโพรเจกชันของ P_2 บน ℓ พิกัดของ P_3 คือคู่อันดับใด

   1. (0.5,1) 　　 2. (0.64,1.28)

   3. (0.8,1.6) 　　 4. (0.84,1.68)

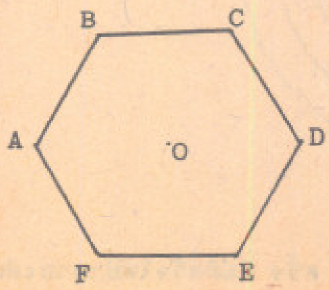
5. ให้ $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (0,0) และมีเส้นตรง $x+y+2\sqrt{2} = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์
ค่าของ $x_1+y_1+x_2+y_2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{2}$
2. $-2\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{2}$
4. $-4\sqrt{2}$

6. กำหนด Δ ABC มี $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$
ค่าของ $\dfrac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$
2. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $3\sqrt{3}$
4. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

7. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และมี O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยม ดังรูป



กำหนดความยาว AO เท่ากับ 2 เซนติเมตร
เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดมากกว่า 4 เซนติเมตร

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$
3. $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}$
4. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

8. กำหนด $U = [-8, 12]$

$A = \{x \in U \mid \sin |x| = 1\}$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

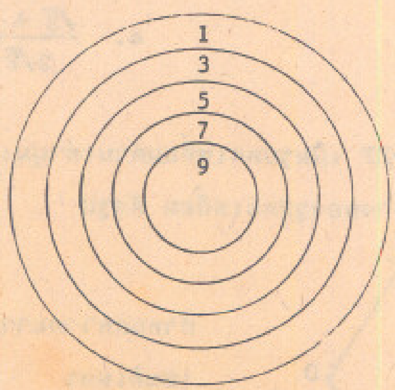
$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap C \neq C \cap B$ 2. $A - B \subset C - B$

3. $C - B \subset C - A$ 4. $A - B = A - C$

9. เป้ารูปวงกลมแสดงดังรูป แบ่งออกเป็น 5 อาณาบริเวณ ดังรูป แต่ละอาณาบริเวณมีแต้มเป็น 1,3,5,7 และ 9



เด็กคนหนึ่งปาลูกดอกเข้าเป้าทั้ง 10 ครั้ง ไม่มีครั้งใดปาคาบเส้น แต้มในข้อใดเป็นแต้มรวมที่มีโอกาสที่เด็กชายคนนี้ทำได้

1. 47 2. 68

3. 87 4. 98

คำตอบโจทย์เสริมทักษะ

คณิตศาสตร์ ก. ปี พ.ศ. 2537

1. 1	2. 2	3. 3	4. 4	5. 4
6. 1	7. 4	8. 4	9. 4	10. 2
11. 1	12. 3	13. 2	14. 2	15. 4
16. 3	17. 3			

คณิตศาสตร์ กข. ปี พ.ศ. 2537

1. 3	2. 2	3. 1	4. 2	5. 4
6. 4	7. 2	8. 2	9. 2	10. 1
11. 3	12. 1	13. 3	14. 2	15. 1 และ 3
16. 3	17. 3	18. 2		

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ฯ ปีการศึกษา 2536

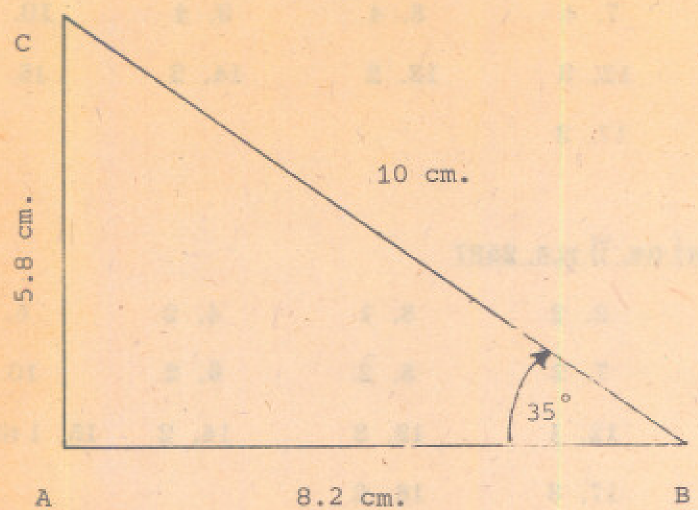
1. ข	2. ก	3. ข	4. ข	5. ก
6. ง	7. ก	8. ง	9. ก	10. ก
11. ค	12. ค	13. ก	14. ค	

ข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 ปี พ.ศ. 2536

1. 3	2. 4	3. 3	4. 2	5. 3
6. 1	7. 1	8. 4	9. 2	

การประมาณค่า sin และ cos

โดยใช้สามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin 35^\circ = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{BC} = \frac{5.8}{10} = 0.58$$

$$\cos 35^\circ = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AB}{BC} = \frac{8.2}{10} = 0.82$$

ค่าของ sin และ cos

(องศา)

sin 5	= 0.0872	= cos 85
sin 10	= 0.1736	= cos 80
sin 15	= 0.2588	= cos 75
sin 20	= 0.3420	= cos 70
sin 25	= 0.4226	= cos 65
sin 30	= 0.5	= cos 60
sin 35	= 0.5736	= cos 55
sin 40	= 0.6428	= cos 50
sin 45	= 0.7071	= cos 45
sin 50	= 0.766	= cos 40
sin 55	= 0.8191	= cos 35
sin 60	= 0.866	= cos 30
sin 65	= 0.9063	= cos 25
sin 70	= 0.9397	= cos 20
sin 75	= 0.9659	= cos 15
sin 80	= 0.9848	= cos 10
sin 85	= 0.9962	= cos 5

ผลงานตำราของผู้เขียน

พีชคณิตเชิงเส้น

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา เมทริกซ์ ตัวกำหนด ระบบสมการเชิงเส้น ค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง พหุนามเชิงเส้นคู่ และพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง

ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา การหารากของสมการ $f(x) = 0$ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เวกเตอร์ เมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการที่มิใช่เชิงเส้น การประยุกต์ของเวกเตอร์และเมทริกซ์ พร้อมโปรแกรมคอมพิวเตอร์

พีชคณิตระดับอุดมศึกษา

เป็นหนังสือระดับปริญญาตรีของ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย เซต ฟังก์ชัน กลุ่ม กลุ่มสมมาตร กลุ่มวิธีเรียงสับเปลี่ยน สมบัติของจำนวนเต็ม ทฤษฎีเกี่ยวกับการหารลงตัว ฟังก์ชันถ่ายแบบ ฟังก์ชันถอดแบบ และทฤษฎีบทหลักมูลของการถอดแบบ

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO

เป็นหนังสือคู่มือในการใช้งานโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO ซึ่งเป็นโปรแกรมช่วยในการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาคาสูงสุด และค่าต่ำสุด ทำการวิเคราะห์ความไว วิเคราะห์ปัญหาคู่ควบ คำนวณในรูปแบบของตารางซิมเพลกซ์

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ลงานเฉลยข้อสอบของผู้เขียนในชุด

คณิตศาสตร์ปรนัย
เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก

รวบรวมและจำแนกแนวคิดในการตัดตัวเลือกของข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย ต่างๆที่มีการสอบจริงๆเพื่อผู้อ่านจะได้เกิดทักษะการคิดแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการเร็วที่สุด ซึ่งผู้อ่านสามารถนำไปใช้ในการทำข้อสอบ

- คณิตศาสตร์ ก.
- คณิตศาสตร์ กข.
- ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับ ม.ปลาย อื่นๆ

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980,2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7
ISBN 974-031-222-7
9 789740 312222
C112
4000
80.00 บาท