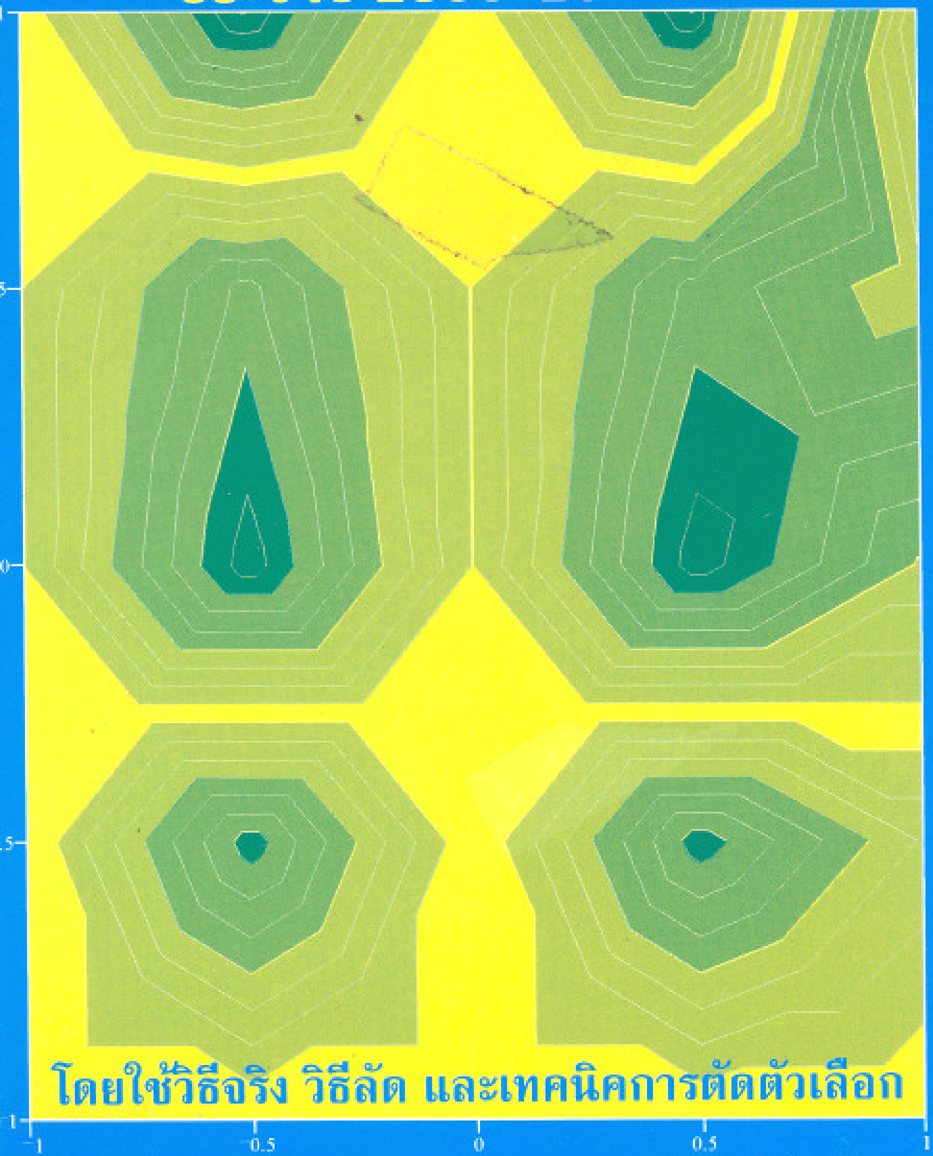
เฉลยข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี 2533-2538



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ประยุกต์ เล่มที่ 8
ISBN 974-633-019-5

ผลงานเฉลยข้อสอบของผู้เขียนในชุด

คณิตศาสตร์ปรนัย

เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัด

เล่มที่ 1 เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ กข. พ.ศ. 2537

เล่มที่ 2 เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก. พ.ศ. 2537

เล่มที่ 3 เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์ ฯ พ.ศ. 2537

เล่มที่ 4 เฉลยข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 พ.ศ. 2536

เล่มที่ 5 เฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
(รอบที่ 1 และ รอบที่ 2) พ.ศ. 2537

เล่มที่ 6 เฉลยข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ครั้งที่ 3 พ.ศ. 2537
เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ของ สมาคมคณิตศาสตร์ฯ พ.ศ. 2538
เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ กข. พ.ศ. 2538
เฉลยข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก. พ.ศ. 2538

เล่มที่ 7 *คู่มือตัดตัวเลือก สำหรับคณิตศาสตร์ ม.ปลาย*

เล่มที่ 8 *เฉลยข้อสอบแข่งขัน*
คณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย พ.ศ. 2533-2538

คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 8

เฉลยข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี 2533-2538

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 8) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา
เฉลยข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี 2533 - 2538

ISBN 974-633-019-5

พิมพ์ครั้งที่ 1   จำนวน 5000 เล่ม พ.ศ. 2538

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2, 2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2153612, 2153626

คำนำ

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย เป็นข้อสอบที่ใช้สำหรับสอบคัดเลือกนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายเพื่อเข้ามารับการอบรมความรู้ทางคณิตศาสตร์เพิ่มเติม และเป็นตัวแทนนักเรียนของประเทศไทยในการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติ ซึ่งมีการสอบแข่งขันเป็นประจำทุกปี

หนังสือคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 8 นี้ ผมได้ทำการรวบรวมข้อสอบคัดเลือกตั้งแต่ปี 2533-2538 มาจัดพิมพ์และทำการเฉลยโดยใช้แนวคิดวิธีจริง วิธีลัด และการตัดตัวเลือก ซึ่งผมหวังว่ารวมข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกเล่มนี้คงจะเป็นประโยชน์สำหรับนักเรียนและผู้อ่านทุกท่านที่สนใจจะเข้าคัดเลือกเพื่อเป็นตัวแทนของนักเรียนไทยในการสอบแข่งขันระดับนานาชาติ และด้วยลักษณะของข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกนี้คงจะเป็นประโยชน์ต่อผู้ที่เตรียมตัวสอบ ENTRANCE และการสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย รายการอื่นๆ

สุดท้ายนี้ผมขอขอบคุณคณะกรรมการผู้ออกข้อสอบและคณะผู้ดำเนินการคัดเลือกตัวแทนนักเรียนไทยทุกท่านที่ได้จัดทำข้อสอบที่เป็นประโยชน์มากต่อนักเรียน ซึ่งจะได้สร้างชื่อเสียงให้กับประเทศไทยต่อไป

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ผลงานตำราของผู้เขียน

พีชคณิตเชิงเส้น

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา เมทริกซ์ ตัวกำหนด ระบบสมการเชิงเส้น ค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง พหุนามเชิงเส้นคู่ และพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง

ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา การหารากของสมการ $f(x) = 0$ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เวกเตอร์ เมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการที่มิใช่เชิงเส้น การประยุกต์ของเวกเตอร์และเมทริกซ์ พร้อมโปรแกรมคอมพิวเตอร์

พีชคณิตระดับอุดมศึกษา

เป็นหนังสือระดับปริญญาตรีของ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วย เซต ฟังก์ชัน กลุ่ม กลุ่มสมมาตร กลุ่มวิธีเรียงสับเปลี่ยน สมบัติของจำนวนเต็ม ทฤษฎีเกี่ยวกับการหารลงตัว ฟังก์ชันถ่ายแบบ ฟังก์ชันถอดแบบ และทฤษฎีบทหลักมูลของการถอดแบบ

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO

เป็นหนังสือคู่มือในการใช้งานโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO ซึ่งเป็นโปรแกรมช่วยในการหาผลเฉลยของกำหนดการเชิงเส้นเพื่อหาค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ทำการวิเคราะห์ความไว วิเคราะห์ปัญหาคู่ควบ คำนวณในรูปแบบของตาราง ซิมเพลกซ์

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยและเฉลย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7 *คู่มือตัดตัวเลือก*

รวบรวมและจำแนกแนวคิดในการตัดตัวเลือกข้อสอบ

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
2. เหตุผลเกี่ยวกับควอดรันท์
3. เซตคำตอบเป็นข้อใด
4. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด
5. โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
6. ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้
7. เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้
8. นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก
9. ความชันก็ตัดตัวเลือกได้
10. คว่ำหงาย-เปิดซ้ายขวา
11. ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก
12. นำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าของโจทย์
13. ใช้ยกตัวอย่างเพื่อการสรุปผล
14. โจทย์เสริมทักษะในการตัดตัวเลือก

ข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2538

วิชาคณิตศาสตร์ (สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันที่ 24 มิถุนายน 2538 เวลา 9.00 - 12.00 น.

<u>ตอนที่ 1</u> ชนิดเลือกคำตอบ มี 20 ข้อ

1. จำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 8$$

มีค่าเท่าใด

(1) 70 (2) 75

(3) 80 (4) 85

2. จำนวนหลักของ $8^{16}\times 5^{40}$ เป็นเท่าใด

(1) 41 (2) 42

(3) 43 (4) 44

3. 7^{2538} มีหลักหน่วยเป็นเลขใด

(1) 1 (2) 3

(3) 7 (4) 9

4. กำหนดให้ $f : I^+ \longrightarrow I^+$ โดยที่ $f(1) = 1 = f(2)$ และ

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ เมื่อ $n \geq 3$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

(1) $f(6)[f(5) + f(7)] = f(12)$

(2) $f(20)f(20) - f(19)f(21) = -1$

(3) $1 + f(1) + f(2) + \dots + f(30) = f(32)$

(4) $f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(29) = f(31)$

5. กำหนดให้ $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$ เมื่อ $n \in \{2,3,4,\dots\}$

จะได้ a_{100} อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

(1) (10,14) (2) (14,18)

(3) (18,22) (4) (22,26)

6. กำหนดให้ s เป็นเศษจากการหาร $(191)^3 + 3(191)^2 + 2(191)$

ด้วย 3 และ r เป็นเศษจากการหาร

$1777771[(1777771)^2 - 9][(1777771)^2 - 4][(1777771)^2 - 1]$

ด้วย 7 s + r มีค่าเท่าใด

(1) 0 (2) 2

(3) 4 (4) 6

7. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-x-1)^3 = (3x^2+2x-5)^3$

ผลคูณของสมาชิกทุกตัวของ A เป็นเท่าใด

(1) $-\frac{10}{3}$ (2) $-\frac{40}{3}$

(3) $-\frac{50}{3}$ (4) $-\frac{80}{3}$

8. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมแนบในวงกลมวงหนึ่งโดยที่ด้าน AB ยาว 2 หน่วย ด้าน BD ยาว 3 หน่วย $A\hat{D}B = 30^\circ$ และ $D\hat{B}C = 45^\circ$ จะได้ด้าน CD ยาวกี่หน่วย

(1) $\sqrt{2}$ (2) $2\sqrt{2}$

(3) $3\sqrt{2}$ (4) $4\sqrt{2}$

9. กำหนดให้

$$\operatorname{cosec}^2(A+B) - \sin^2(A-B) + \sin^2(2A-B) = \cos^2(B-A)$$

โดยที่ $A,B \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ $\sin(A-B)$ มีค่าเท่าใด

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. กำหนดให้ $y = 4^{\log x}$ โดยที่ $x > 0$ และ $x \neq 1$

ค่าของ $1 + x^2 - \log_{\sqrt{y}} 2$ เป็นอย่างไร

(1) เป็นศูนย์ (2) เป็นบวก

(3) เป็นลบ (4) มีค่าไม่แน่นอนขึ้นกับค่าของ x

11. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $-1 < \log(3-x) < 3$

และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $(\frac{1}{9})^{2y+1} \leqslant \frac{1}{2187}$

จะได้ $A \cap B$ เท่ากับเซตใด

(1) $(-997, \frac{5}{4}]$ (2) $[\frac{5}{4}, \frac{29}{10})$

(3) $(-\infty, \frac{29}{10})$ (4) $(-997, \infty)$

12. กำหนดให้ A,B,C เป็นเมตริกซ์จัตุรัสที่มีมิติเดียวกัน และ

$\det C = -2$ $\det(BC^{-1}B^{t}) = -4$ $\det(AC+B) = 2$

$\det(B^{-1}(B^{t}+C^{t})C) = -3$ และ $\det B > 0$

ค่าของ $\det(A(B^{t}+C^{t}) + BC^{-1}(B^{t}+C^{t}))$ เป็นเท่าใด

(1) $-3\sqrt{2}$ (2) $-4\sqrt{2}$

(3) $6\sqrt{2}$ (4) $12\sqrt{2}$

13. วงกลมสองวงมี O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลาง และมีรัศมียาว 3 และ 4 หน่วยตามลำดับ A เป็นจุดตัดจุดหนึ่งของวงกลมทั้งสอง ซึ่งทำให้ $O_1\hat{A}O_2$ เป็นมุมฉาก พื้นที่วงกลมที่ใหญ่ที่สุดซึ่งบรรจุภายในบริเวณส่วนที่ซ้อนกันของวงกลมทั้งสองนั้นเป็นเท่าใด

(1) $\frac{\pi}{2}$ ตารางหน่วย (2) π ตารางหน่วย

(3) $\sqrt{3}\pi$ ตารางหน่วย (4) 2π ตารางหน่วย

14. O_1 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงใหญ่โดยที่ O_1 อยู่ภายในวงกลมวงเล็กซึ่งมี O_2 เป็นจุดศูนย์กลาง ระยะ O_1O_2 เท่ากับ 1 หน่วย ถ้าคอร์ดของวงกลมวงใหญ่ซึ่งมีสัมผัสกับวงกลมวงเล็กที่ A ยาว 4

หน่วย และรองรับมุม 30° ที่เส้นรอบวงของวงกลมวงใหญ่ และ O_1, O_2, A อยู่บนเส้นตรงเดียวกันโดยที่ O_2 อยู่ระหว่าง O_1 และ A แล้ว ความยาวรัศมีของวงกลมวงเล็กเป็นเท่าใด

(1) 2 หน่วย (2) $3\sqrt{3} - 1$ หน่วย

(3) $2\sqrt{3} - 1$ หน่วย (4) $\sqrt{3} + 1$ หน่วย

15. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มีจุด D อยู่บนด้าน BC และ AB = 13 เซนติเมตร BD = 5 เซนติเมตร และ AD = 12 เซนติเมตร ถ้ามุม $A\hat{B}D = D\hat{A}C$ และ T_1, T_2 เป็นจุดสัมผัสที่เส้น AD ทำกับวงกลมแนบในรูปสามเหลี่ยม ADC และรูปสามเหลี่ยม ABD ตามลำดับ ระยะ T_1T_2 เป็นเท่าใด

(1) 0 เซนติเมตร (2) 0.5 เซนติเมตร

(3) 2.2 เซนติเมตร (4) 2.8 เซนติเมตร

16. รูปสี่เหลี่ยม ABCD มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกัน E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ ถ้าพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD = $12\sqrt{2}$ ตารางหน่วย พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม EFGH เป็นเท่าใด

(1) $6\sqrt{2}$ ตารางหน่วย (2) 6 ตารางหน่วย

(3) $8\sqrt{2}$ ตารางหน่วย (4) 8 ตารางหน่วย

17. กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดยอดของกราฟของสมการ

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

ถ้า O เป็นจุดกำเนิดแล้ว $\tan P\hat{O}Q$ มีค่าเท่าใด

(1) 5 (2) 8

(3) 12 (4) 16

18. กำหนดให้จุด A และ B มีพิกัด (1,-2) และ (3,4) ตามลำดับ และ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ ซึ่งทำให้ $\overline{AP}$ ยาว 6 หน่วย จะได้ $\overline{PB}$ ยาวกี่หน่วย

(1) $3\sqrt{10}$ (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

(3) 4 (4) 2

19. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(\log x^2) = \sqrt{x+1}$ เมื่อ $x \geq 1$ จะได้ $f^{-1}(11)$ เป็นเท่าใด

(1) $(10^{11} + 1)^2$ (2) $\sqrt{10^5\sqrt{10} + 1}$

(3) $2 + \log 144$ (4) $1 + \log 121$

20. กำหนดให้

$$g = \{(x,y) \mid x \in R \text{ และ } y \in R \text{ และ } \arctan x - \arctan(-\tfrac{1}{x}) = \frac{\pi \arctan y}{\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arcsec} \frac{1}{x}}\}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) g เป็นฟังก์ชัน และ $g(x) = g(-x)$ ทุก $x \in D_g$

(ข) D_g เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

(ค) ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ $R_g < \frac{\pi}{2}$

(ง) g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

จากข้อ (ก) (ข) (ค) และ (ง) ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) มีข้อที่ถูก 1 ข้อ (2) มีข้อที่ถูก 2 ข้อ

(3) มีข้อที่ถูก 3 ข้อ (4) มีข้อที่ถูก 4 ข้อ

<u>ตอนที่ 2</u> ชนิดเติมเฉพาะคำตอบ มี 15 ข้อ

1. ลากคอร์ดของรูปวงกลม 29 เส้น โดยให้

ก. แบ่งรูปวงกลมออกเป็นบริเวณย่อยๆ ได้จำนวนมากที่สุดซึ่งเท่ากับ p บริเวณ

ข. แบ่งรูปวงกลมออกเป็นบริเวณย่อยๆ ได้จำนวนน้อยที่สุดซึ่งเท่ากับ q บริเวณ

จะได้ $p+q$ มีค่าเท่าใด

2. กำหนดให้ $A = \{\frac{a}{b} \in R \mid ab > 0$ และ $\frac{a^3-5a^2b+6ab^2}{(a-b)^3} \geq 0\}$

A เท่ากับสับเซตใดของ R

3. เซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{13}} + \frac{1}{x^{15}} \leqslant \frac{7}{x^9}$$

คือเซตใด

4. กำหนดให้ a b c d เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6$ และ $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8$ จะได้ $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ มีค่าเท่าใด

5. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

ก. m ลงท้ายด้วย 28

ข. ผลบวกของเลขโดดในทุกหลักของ A มีค่า 28

ค. m หารด้วย 28 ลงตัว

จำนวน m ที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นเป็นเท่าใด

6. กำหนดให้ $p^2 = 1000002 \times 1000004 \times 1000008 \times 1000010 + n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก ค่า n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ p เป็นจำนวนเต็มบวกเป็นเท่าใด

7. กำหนดให้ $f : R-\{0\} \longrightarrow R$ โดยที่สำหรับ x ใดๆ ใน $R-\{0\}$ $x^{-1} f(-x) + f(x^{-1}) = x$ จะได้ $f(x)$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ p และ q เป็นเลขโดดในหลักสิบและหลักหน่วยของ $2^{1000} - 1$ ตามลำดับ จะได้ p และ q คือเลขใด

9. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลักซึ่งหารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และหารด้วย 132 เหลือเศษ 98 m คือจำนวนใด

10. รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AC และด้าน AB ยาว 2.5 หน่วย และ 5 หน่วย ตามลำดับ $\dfrac{\tan(\frac{A}{2}+B)}{\tan\frac{A}{2}}$ มีค่าเท่าใด

11. กำหนดให้ F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี

$$9x^2+25y^2-18x-100y = 116$$

และ P เป็นจุดบนวงรีซึ่งทำให้ $F_1\hat{F_2}P = 60^\circ$ จะได้ $\overline{F_1P}$ ยาวกี่หน่วย

12. วงกลม O_1 และวงกลม O_2 มีสมการเป็น $x^2+y^2-2x-6y+1 = 0$ และ $x^2+y^2+4x-3y+4 = 0$ ตามลำดับ เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 ตัดกันที่จุด C และต่างก็สัมผัสวงกลมทั้งสองโดยสัมผัสวงกลม O_1 ที่จุด A และ B $\sin A\hat{C}B$ มีค่าเท่าใด

13. กำหนดให้ $f(x) = a+bx^c$ โดยที่ $f(1) = 7$ $f(2) = 10$ และ $f(4) = 15$ จะได้ $c(a-b)$ มีค่าเท่าใด

14. กำหนดให้ $\log_6 27 = r$ และ $2^{\log_4 576} = 2^{x+y}\cdot 3^{x-y}$ จะได้ $[(3-r)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2r]^{xy}$ มีค่าเท่าใด

15. ถ้า $\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด

เฉลยข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2538

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 3.

แนวคิด

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \sqrt{2}-1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)}$$

$$= \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = 8$

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 8$$

$$\sqrt{n+1}-1 = 8$$

$$\sqrt{n+1} = 9$$

$$n+1 = 81$$

$$n = 80$$

2. **ตอบ** 3.

แนวคิด $8^{16} \times 5^{40} = (2^3)^{16} \times 5^{40}$

$= 2^{48} \times 5^{40}$

$= 2^{40} \times 2^8 \times 5^{40}$

$= (2 \times 5)^{40} \times 2^8$

$= 10^{40} \times 256$

เพราะฉะนั้น $8^{16} \times 5^{40}$ **เป็นเลขจำนวนเต็ม 43 หลัก**

3. **ตอบ** 4.

แนวคิด $7^1 = 7$

$7^2 = 49$

$7^3 = 343$

$7^4 = 2401$

$7^5 = 16807$

จะเห็นว่า 7^m **และ** 7^{m+4} **มีหลักหน่วยเหมือนกัน เมื่อ** m **เป็นจำนวนเต็มบวก**

เพราะฉะนั้น $(7^4)^k$ **มีหลักหน่วยเป็นเลข 1 ทุกค่า** $k \in I^+$

เพราะว่า $2538 = (634)4 + 2$

เพราะฉะนั้น $7^{2538} = 7^{634(4)+2}$

$= (7^4)^{634} \times 7^2$

$= 49(2401)^{634}$

เพราะว่าหลักหน่วยของ $(2401)^{634}$ คือ 1

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $49(2401)^{634}$ คือ 9

สรุปหลักหน่วยของ 7^{2538} คือ 9

4. **ตอบ** 4.

แนวคิด <u>วิธีที่ 1</u> $f(1) = 1$

$f(2) = 1$

$f(3) = f(2) + f(1) = 1+1 = 2$

$f(4) = f(3) + f(2) = 2+1 = 3$

$f(5) = f(4) + f(3) = 3+2 = 5$

โดยการหาผลบวกครั้งละ 2 พจน์ จะได้

n	f(n)
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55

n	f(n)
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610
16	987
17	1597
18	2584
19	4181
20	6765

n	f(n)
21	10946
22	17711
23	28657
24	46368
25	75025
26	121393
27	196418
28	317811
29	514229
30	832040
31	1346269
32	2178309

<u>ตัวเลือก 1</u> ถูกต้อง

$$f(6)(f(5)+f(7)) = 8(5+13)$$
$$= 144$$
$$= f(12)$$

<u>ตัวเลือก 2</u> ถูกต้อง

$$f(20)f(20) - f(19)f(21)$$
$$= (6765)(6765) - (4181)(10946)$$
$$= 45765225 - 45765226$$
$$= -1$$

<u>ตัวเลือก 3</u> ถูกต้อง

แสดงได้โดยการหาผลบวก

$$1 + f(1) + f(2) + \ldots + f(30) = 2178309$$
$$= f(32)$$

<u>ตัวเลือก 4</u> ผิด

แสดงได้โดยการใช้ผลบวก

$$f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(29) \neq 1346269$$

<u>วิธีที่ 2</u> เมื่อ $f(1) = 1$

$$f(2) = 1$$

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2) \quad , \quad n > 2$$

โดยการแทนค่าย้อนกลับและพิจารณาในลักษณะของพจน์ทั่วไป

ตัวอย่างเช่น

$$f(8) = f(7) + f(6)$$

$$= f(7) + f(5) + f(4)$$

$$= f(7) + f(5) + f(3) + f(2)$$

$$= f(7) + f(5) + f(3) + f(1) \quad (\because f(2) = f(1) = 1)$$

หรือ $f(11) = f(10) + f(9)$

$$= f(10) + f(8) + f(7)$$

$$= f(10) + f(8) + f(6) + f(5)$$

$$= f(10) + f(8) + f(6) + f(4) + f(3)$$

$$= f(10) + f(8) + f(6) + f(4) + f(2) + f(1)$$

$$= f(10) + f(8) + f(6) + f(4) + f(2) + 1$$

ดังนั้นในรูปแบบของพจน์ทั่วไปสำหรับ $n = 1,2,3,\ldots$

$$f(1) + f(3) + f(5) + \ldots + f(2n-1) = f(2n) \qquad \text{(1)}$$

$$1 + f(2) + f(4) + \ldots + f(2n) = f(2n+1) \qquad \text{(2)}$$

และ $f(2n+2) = f(2n+1) + f(2n)$

$$= f(2n) + f(2n-1) + f(2n-2) + \ldots + f(2) + f(1) + 1$$

หมายเหตุ การพิสูจน์ผลสรุปข้างต้นนี้เป็นจริงวิธีที่นิยมใช้กันคือ **อุปนัยวิธีเชิงคณิตศาสตร์** สรุปเป็นสูตรคือ $f(2n+2) = 1 + \sum_{i=1}^{2n} f(i)$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3 ถูกต้องเป็นผลโดยตรงจากสูตร คือ

$$f(32) = f(30+2)$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{30} f(i) = 1 + f(1) + f(2) + \ldots + f(30)$$

ตัวเลือก 4 ผิด

จากสูตร $f(1)+f(3)+\ldots+f(2n-1) = f(2n)$

จะได้ $f(1)+f(3)+\ldots+f(29) = f(30)$

จากเงื่อนไข $f(n) = f(n-1)+f(n-2)$ และ $f(1) = 1 > 0$

จะได้ $f(n) > f(n-1)$ เสมอ

ดังนั้น $f(31) > f(30)$

นั่นคือ $f(31) \neq f(30)$

สรุป $f(1)+f(3)+f(5)+\ldots+f(29) \neq f(31)$

ลองดูสูตรอีกรูปแบบเพื่อแสดงว่าตัวเลือก 2 ถูกต้อง

จากสูตร $f(n) = f(n-1)+f(n-2)$

จะได้ $f(n+1) = f(n)+f(n-1)$

และ $f(n-2) = f(n)-f(n-1)$

เงื่อนไขของตัวเลือก 2 แสดงเป็นสูตรทั่วไปได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
& f(n)f(n) - f(n-1)f(n+1) \\
&= f(n)f(n) - f(n-1)[f(n)+f(n-1)] \\
&= f(n)f(n) - f(n-1)f(n) - f(n-1)f(n-1) \\
&= f(n)[f(n) - f(n-1)] - f(n-1)f(n-1) \\
&= f(n)f(n-2) - f(n-1)f(n-1)
\end{aligned}
$$

เมื่อ $n = 20$ จะได้

$$f(20)f(20) - f(19)f(21)$$

$= f(20)\,f(18) - f(19)\,f(19)$

$= (-1)^1[f(19)\,f(19) - f(20)\,f(18)]$

$= (-1)^1[f(19)\,f(17) - f(18)\,f(18)]$

$= (-1)^2[f(18)\,f(18) - f(19)\,f(17)]$

$= (-1)^2[f(18)\,f(16) - f(17)\,f(17)]$

$= (-1)^3[f(17)\,f(17) - f(18)\,f(16)]$

$= \ldots$

$= \ldots$

$= (-1)^{18}[f(2)\,f(2) - f(3)\,f(1)]$

$= (1)(1) - (2)(1)$

$= -1$

5. **ตอบ** 2.

แนวคิด $a_1 = 1$

จาก $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{a_{n-1}}$

จะได้ $a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \dfrac{1}{a_{n-1}^2}$ ________ (1)

และ $1 = a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$

ดังนั้น $0 < \dfrac{1}{a_{n-1}^2} < 1$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้ $a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$

และ $a_{n-1}^2 + 2 < a_n^2$

จากเงื่อนไข $a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$

$a_1 = 1$

$a_2^2 < a_1^2 + 3 = 1+3$

$a_3^2 < a_2^2 + 3 < (1+3)+3 = 1+2(3)$

$a_4^2 < a_3^2 + 3 < 1+2(3)+3 = 1+3(3)$

$\vdots$

$a_{100}^2 < a_{99}^2 + 3 < 1+98(3)+3 = 1+99(3) = 298$

สรุป $a_{100}^2 < 298$

จากเงื่อนไข $a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2$

จะได้ $a_2^2 > a_1^2 + 2 > 1+2$

$a_3^2 > a_2^2 + 2 > (1+2)+2 = 1+2(2)$

$a_4^2 > a_3^2 + 2 > (1+2(2))+2 = 1+3(2)$

$\vdots$

$a_{100}^2 > a_{99}^2 + 2 > 1+99(2) = 199$

สรุป $199 < a_{100}^2 < 298$

$\sqrt{199} < a_{100} < \sqrt{298}$

$14.106 < a_{100} < 17.263$

เพราะฉะนั้น $a_{100} \in (14.106, 17.263) \subset (14,18)$

การคำนวณค่าจริงของ a_{100} ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

$n := 2 \,..100$

$a_1 := 1$

$$a_n := a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$i := 96 \,..100$

i	a_i
96	13.9287
97	14.0005
98	14.0719
99	14.143
100	14.2137

หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้คล้ายกับข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิก 2 สิงหาคม 2535

6. **ตอบ** 1.

แนวคิด $(191)^3 + 3(191)^2 + 2(191)$

$$= (191)((191)^2 + 3(191) + 2)$$

$$= (191)[(191) + 2][(191) + 1]$$

$$= (191)(193)(192)$$

เพราะว่า 3 หาร 192 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร (191)(193)(192) ลงตัว สรุป $r = 0$

การหาค่า s ทำการแยกตัวประกอบดังนี้

$$(1777771)^2 - 4 = (1777771 + 2)(1777771 - 2)$$

$$= (1777773)(1777769)$$

เพราะว่า 7 หาร 1777769 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 7 หาร $(1777771)^2 - 4$ ลงตัว สรุป $s = 0$

เพราะฉะนั้น $r + s = 0$

7. **ตอบ** 1.

แนวคิด เพราะว่า

$$(x^2+3x-4)^3 = (x+4)^3(x-1)^3$$

$$(2x^2-x-1)^3 = (2x+1)^3(x-1)^3$$

$$(3x^2+2x-5)^3 = (3x+5)^3(x-1)^3$$

เพราะฉะนั้น $(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-x-1)^3 = (3x^2+2x-5)^3$

$$(x+4)^3(x-1)^3 + (2x+1)^3(x-1)^3 = (3x+5)^3(x-1)^3$$

$$(x-1)^3[(x+4)^3 + (2x+1)^3 - (3x+5)^3] = 0$$

จะได้ $(x-1)^3 = 0$

หรือ $(x+4)^3 + (2x+1)^3 - (3x+5)^3 = 0$

ดังนั้น $1 \in A$

พิจารณา

$$(x+4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$$

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$(3x+5)^3 = 27x^3 + 135x^2 + 225x + 125$$

เพราะฉะนั้น $0 = (x+4)^3 + (2x+1)^3 - (3x+5)^3$

$$0 = (1+8-27)x^3 + (12+12-135)x^2 + (48+6-225)x + (64+1-125)$$

$$0 = -18x^3 - 111x^2 - 171x - 60$$

หรือ $6x^3 + 37x^2 + 57x + 20 = 0$

ให้ $f(x) = 6x^3 + 37x^2 + 57x + 20$

ลองแทนค่า x ด้วย ±1, ±2, ±4, ...

จะได้ $f(-4) = 6(-64) + 37(16) + 57(-4) + 20 = 0$

เพราะฉะนั้น (x+4) หาร f(x) ลงตัว และ

$$f(x) = (x+4)(6x^2+13x+5)$$

ดังนั้น $f(x) = (x+4)(3x+5)(2x+1)$

นั่นคือ $f(x) = 0$ เมื่อ $x = -4, -\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$

สรุปเซตคำตอบของสมการ

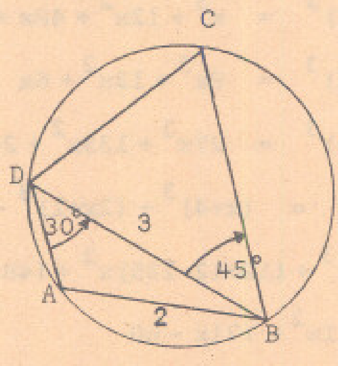
$$(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-x-1)^3 = (3x^2+2x-5)^3$$

คือ $A = \{1,-4,-\frac{5}{3},-\frac{1}{2}\}$

ผลคูณของสมาชิกใน A คือ $(1)(-4)(-\frac{5}{3})(-\frac{1}{2}) = -\frac{10}{3}$

8. ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปคร่าวๆ ตามเงื่อนไขของโจทย์



ในสามเหลี่ยม ABC และใช้กฎของไซน์

$$\frac{\sin A\hat{D}B}{|AB|} = \frac{\sin D\hat{A}B}{|BD|} = \frac{\sin A\hat{B}D}{|AD|}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{\sin D\hat{A}B}{3} = \frac{\sin A\hat{B}D}{|AD|}$$

เพราะฉะนั้น $\sin D\hat{A}B = \frac{3}{2}\sin 30^\circ$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4}$$

เพราะว่า □ ABCD บรรจุในวงกลม

เพราะฉะนั้น $D\hat{A}B + D\hat{C}B = 180^\circ$

$$D\hat{C}B = 180^\circ - D\hat{A}B$$

$$\sin D\hat{C}B = \sin(180^\circ - D\hat{A}B)$$

$$= \sin D\hat{A}B$$

$$= \frac{3}{4}$$

ในสามเหลี่ยม BCD และใช้กฎของไซน์จะได้

$$\frac{\sin D\hat{C}B}{|BD|} = \frac{\sin D\hat{B}C}{|CD|}$$

$$|CD| = \frac{\sin 45^\circ}{\sin D\hat{C}B} \cdot |BD|$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot 3 = 2\sqrt{2}$$

สรุป ด้าน CD ยาวเท่ากับ $2\sqrt{2}$

9. ตอบ 2.

แนวคิด $\operatorname{cosec}^2(A+B) - \sin^2(A-B) + \sin^2(2A-B) = \cos^2(B-A)$

$$\begin{aligned}\operatorname{cosec}^2(A+B) + \sin^2(2A-B) &= \sin^2(A-B) + \cos^2(B-A)\\ &= \sin^2(A-B) + \cos^2(-(A-B))\\ &= \sin^2(A-B) + \cos^2(A-B)\\ &= 1\end{aligned}$$

พิจารณาค่า cosec x และ sin y เมื่อ x,y เป็นจำนวนจริง

เพราะว่า $\operatorname{cosec} x \in (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

และ $\sin y \in [-1,1]$ ทุกจำนวนจริง x และ y

เพราะฉะนั้น $\operatorname{cosec}^2 x \in [1,\infty)$ และ $\sin^2 y \in [0,1]$

ทุกจำนวนจริง x และ y

ดังนั้น $\operatorname{cosec}^2 x + \sin^2 y = 1$ ได้ ก็ต่อเมื่อ

$\operatorname{cosec}^2 x = 1$ และ $\sin^2 y = 0$

สรุป $\operatorname{cosec}^2(A+B) + \sin^2(2A-B) = 1$

ก็ต่อเมื่อ $\operatorname{cosec}^2(A+B) = 1$ และ $\sin^2(2A-B) = 0$

เพราะว่า $0 < A < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\sin^2(2A-B) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $2A-B = 0$

เมื่อ $2A-B = 0$

$B = 2A$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}^2(A+B) = 1$

$\operatorname{cosec}^2(A+2A) = 1$

$$\operatorname{cosec}^2(3A) = 1$$

$$\sin^2(3A) = 1$$

$$\sin(3A) = 1 \text{ หรือ } -1$$

$$3A = \frac{\pi}{2} \text{ หรือ } \frac{3\pi}{2}$$

$$A = \frac{\pi}{6} \text{ หรือ } \frac{\pi}{2}$$

แต่ $0 < A < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $A = \frac{\pi}{6}$ เท่านั้น

ผลที่ตามมา $B = 2A = \frac{\pi}{3}$

$$A-B = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}$$

$$= -\frac{\pi}{6}$$

$$\sin(A-B) = \sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

๑๐. **ตอบ** 2.

แนวคิด จาก $y = 4^{\log x}$

$$\log_4 y = \log_4 (4^{\log x})$$

$$\log_4 y = \log x \log_4 4$$

$$\frac{\log y}{\log 4} = \log x$$

$$\log y = \log x \log 4$$

$$= 2\log 2 \log x$$

$$= \log x^{2\log 2}$$

เพราะฉะนั้น $y = x^{2\log 2}$

$$= (x^2)^{\log 2}$$

$$y^{\frac{1}{\log 2}} = x^2$$

$$\sqrt[\log 2]{y} = x^2$$

สรุป $1 + x^2 - \sqrt[\log 2]{y} = 1$ เสมอ

11. **ตอบ** 2.

แนวคิด พิจารณาเซต A จากอสมการ

$$-1 < \log(3-x) < 3$$

จะได้ $\log(10^{-1}) < \log(3-x) < \log(10^3)$

เพราะว่า log ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $10^{-1} < 3-x < 10^3$

$$\frac{1}{10} < 3-x < 1000$$

$$\frac{1}{10} - 3 < -x < 1000 - 3$$

$$-\frac{29}{10} < -x < 997$$

$$-997 < x < \frac{29}{10}$$

เพราะฉะนั้น $A = (-997, \frac{29}{10})$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \cap B \subset A$

เพราะฉะนั้นเรายังไม่ต้องหาเซต B ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 3. ตัดทิ้งได้ เพราะว่า $(-\infty, \frac{29}{10}) \not\subset A$

ตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้ เพราะว่า $(-997,\infty) \not\subset A$

เหลือตัวเลือก 1. และ 2. ก็ยังสามารถทำการตัดตัวเลือกได้อีก

โดยดูว่า y = 0 อยู่ใน B หรือไม่

เพราะว่า $\left(\frac{1}{9}\right)^{2(0)+1} = \frac{1}{9} \not\leq \frac{1}{2187}$

เพราะฉะนั้น $0 \notin B$

ดังนั้น $0 \notin A \cap B$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = (-997, \frac{5}{4})$ ไม่ได้

เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงการหาเซต B ดังนี้

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{2y+1} \leqslant \frac{1}{2187}$$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^{2y+1} \leqslant \frac{1}{3^7}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2(2y+1)} \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^7$$

เพราะว่า $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $2(2y+1) \geqslant 7$

$$4y \geqslant 5$$

$$y \geqslant \frac{5}{4}$$

ดังนั้น $B = [\frac{5}{4},\infty)$

สรุป $A \cap B = (-997, \frac{29}{10}) \cap [\frac{5}{4},\infty) = [\frac{5}{4}, \frac{29}{10})$

12. ตอบ 1.

แนวคิด $\det(BC^{-1}B^{t}) = \det B \cdot \det C^{-1} \cdot \det B^{t}$

$$-4 = \det B \cdot \frac{1}{\det C} \cdot \det B$$

$$[\det B]^{2} = (-4)\det C$$

$$= (-4)(-2)$$

$$= 8$$

$\det B = 2\sqrt{2}$ หรือ $\det B = -2\sqrt{2}$

เพราะว่า $\det B > 0$ เพราะฉะนั้น $\det B = 2\sqrt{2}$ เท่านั้น

$$\det(B^{-1}(B^{t}+C^{t})C) = \det B^{-1} \cdot \det(B^{t}+C^{t}) \cdot \det C$$

$$-3 = \frac{1}{\det B} \cdot \det(B^{t}+C^{t}) \cdot \det C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \det(B^{t}+C^{t}) \cdot (-2)$$

$$\det(B^{t}+C^{t}) = 3\sqrt{2}$$

เพราะว่า $A(B^{t}+C^{t}) + BC^{-1}(B^{t}+C^{t}) = (B^{t}+C^{t})(A+BC^{-1})$

$$= (B^{t}+C^{t})(ACC^{-1} + BC^{-1})$$

$$= (B^{t}+C^{t})(AC+B)C^{-1}$$

และ $\det[(B^{t}+C^{t}) \cdot \det(AC+B)C^{-1}]$

$$= \det(B^{t}+C^{t}) \cdot \det(AC+B) \cdot \det C^{-1}$$

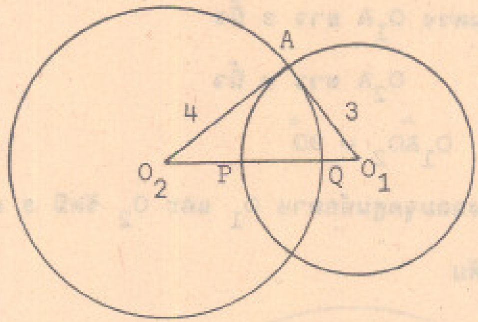
$$= (3\sqrt{2})(2)(\frac{1}{-2})$$

$$= -3\sqrt{2}$$

สรุป $\det(A(B^{t}+C^{t}) + BC^{-1}(B^{t}+C^{t})) = -3\sqrt{2}$

13. ตอบ 2.

แนวคิด



$$|O_1A| = 3 \ , \quad |O_2A| = 4$$

เพราะว่า $O_1\hat{A}O_2 = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $|O_1O_2| = 5$

เพราะว่า $|O_2Q| = 4$ และ $|O_1P| = 3$

ดังนั้น $|O_1Q| = 1$ และ $|O_2P| = 2$

เพราะฉะนั้น $|PQ| + |O_1Q| = 3$

$$|PQ| + 1 = 3$$

$$|PQ| = 2$$

PQ เป็นส่วนที่แคบที่สุดของบริเวณที่ซ้อนกันของวงกลม

เพราะฉะนั้นวงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่จะบรรจุในส่วนที่ซ้อนกันนี้จะต้องมี

PQ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมที่ต้องการเท่ากับ $r = \dfrac{|PQ|}{2} = 1$

สรุปพื้นที่วงกลมที่ต้องการเท่ากับ $\pi r^2 = \pi$

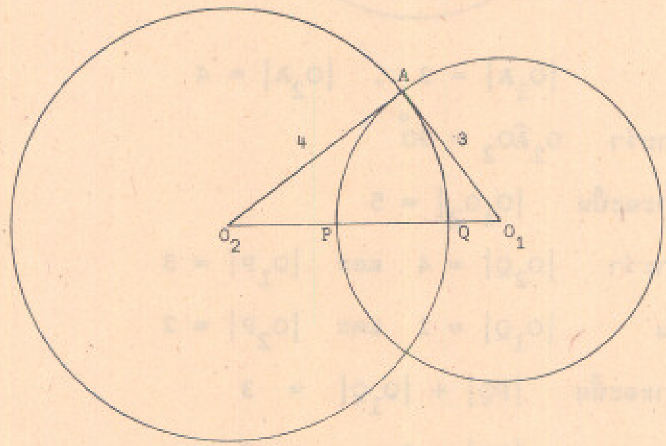
การตัดตัวเลือก

1. ลากเส้นตรง O_1A ยาว 3 นิ้ว

O_2A ยาว 4 นิ้ว

และให้ $O_1\hat{A}O_2 = 90^{\circ}$

2. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง O_1 และ O_2 รัศมี 3 และ 4 นิ้ว ตามลำดับ



3. ลากเส้นตรง O_1O_2 ตัดวงกลมที่จุด P, Q

4. วัดความยาว PQ ด้วยไม้บรรทัดได้ 2 นิ้ว

$|PQ|$ เป็นส่วนแคบที่สุด

ดังนั้นวงกลมที่บรรจุอยู่ในส่วนตัดนี้ต้องมีรัศมีเท่ากับ $r = \frac{|PQ|}{2} = 1$

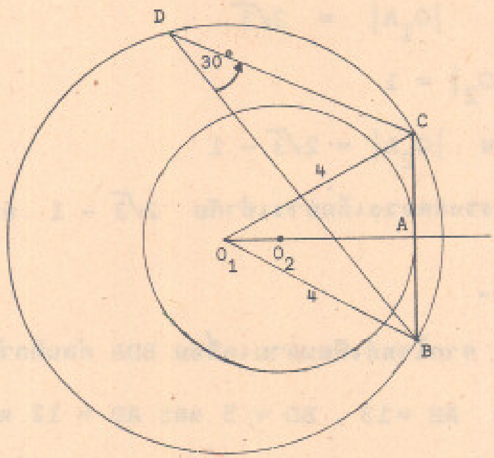
สรุปพื้นที่วงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่บรรจุ อยู่ในบริเวณที่วงกลมซ้อนกันมีค่าเท่ากับ $\pi r^2 = \pi 1^2 = \pi$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

14. ตอบ 3.

แนวคิด เขียนรูปคร่าวๆ ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด

$B\hat{D}C = 30^\circ$, $|BC| = 4$



เพราะว่าคอร์ด BC รองรับมุม $B\hat{D}C$ และมุม $B\hat{O_1}C$

และมุมที่จุดศูนย์กลางเป็น 2 เท่าของมุมที่เส้นรอบวง

เพราะฉะนั้น $B\hat{O}_1C = 2(B\hat{D}C) = 2(30^\circ) = 60^\circ$

สามเหลี่ยม BCO_1 มีด้าน $|BO_1| = |CO_1|$ และ $B\hat{O}_1C = 60^\circ$

เพราะฉะนั้น BCO_1 เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ดังนั้น $|CO_1| = |BO_1| = |BC| = 4$

BC สัมผัสวงกลมวงเล็กที่จุด A ดังนั้น O_1A ตั้งฉากกับเส้นตรง BC

เพราะว่า O_1A แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC

เพราะฉะนั้น $|AC| = 2$ และ $O_1\hat{A}C = 90^\circ$

เพราะว่า $|O_1C|^2 = |O_1A|^2 + |AC|^2$

$$4^2 = |O_1A|^2 + 2^2$$

$$|O_1A|^2 = 12$$

$$|O_1A| = 2\sqrt{3}$$

และ $|O_1O_2| = 1$

เพราะฉะนั้น $|O_2A| = 2\sqrt{3} - 1$

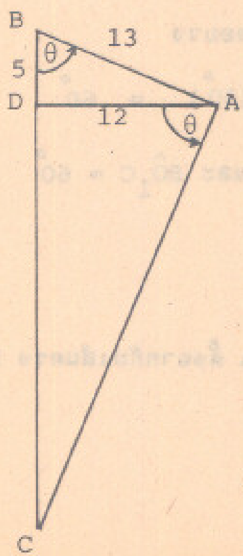
สรุปรัศมีของวงกลมวงเล็กยาวเท่ากับ $2\sqrt{3} - 1$ หน่วย

15. ตอบ 4.

แนวคิด จากโจทย์เขียนสามเหลี่ยม BDA ก่อนดีกว่า

เพราะว่า AB = 13 , BD = 5 และ AD = 12 และ $13^2 = 12^2+5^2$

เพราะฉะนั้น BDA เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{D} = 90^\circ$



เพราะว่า Δ BDA และ Δ ADC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากมีมุม $D\hat{B}A = D\hat{A}C$

ดังนั้น $B\hat{A}D = D\hat{C}A$

เพราะฉะนั้น Δ BDA และ Δ ADC คล้ายกัน

ดังนั้น $$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|BD|}{|AD|}$$

$$\frac{13}{|AC|} = \frac{12}{|CD|} = \frac{5}{12}$$

เพราะฉะนั้น $|AC| = \frac{(12)(13)}{5} = 31.2$

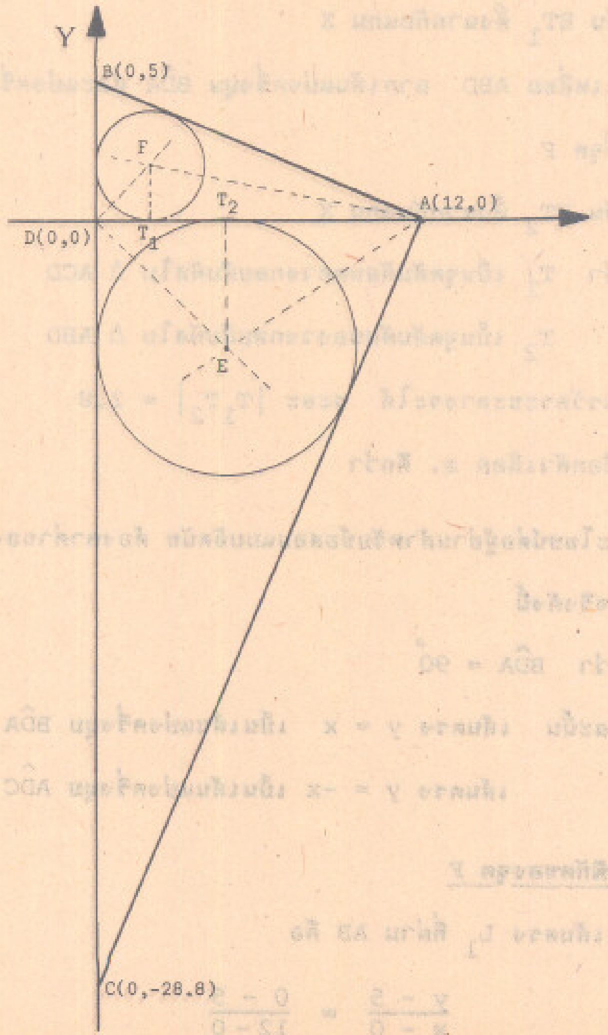
$$|CD| = \frac{(12)(12)}{5} = 28.8$$

การตัดตัวเลือก

ลากแกน X ทับเส้น AD ลากแกน Y ทับเส้น BC

ให้ D เป็นจุดกำเนิดจะได้ว่าพิกัดของจุดต่างๆ คือ

D(0,0) , A(12,0) , B(0,5) , C(0,-28.8)



จุดศูนย์กลางของวงกลมสัมผัสในของสามเหลี่ยมอยู่ที่จุดตัดของเส้น

แบ่งครึ่งมุมยอดของสามเหลี่ยม

ในสามเหลี่ยม ACD ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{D}C$ และแบ่งครึ่งมุม $D\hat{A}C$

ตัดกันที่จุด E

ลากเส้น ET_1 ตั้งฉากกับแกน X

ในสามเหลี่ยม ABD ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\hat{D}A$ และแบ่งครึ่งมุม $D\hat{A}B$

ตัดกันที่จุด F

ลากเส้น FT_2 ตั้งฉากกับแกน X

จะได้ว่า T_1 เป็นจุดสัมผัสของวงกลมสัมผัสใน Δ ACD

T_2 เป็นจุดสัมผัสของวงกลมสัมผัสใน Δ ABD

โดยการวัดระยะทางจะได้ ระยะ $|T_1T_2| = 2.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านสำหรับข้อสอบแบบอัตนัย ต้องหาค่าของ $|T_1T_2|$ ด้วยวิธีจริงดังนี้

เพราะว่า $B\hat{D}A = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น เส้นตรง $y = x$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\hat{D}A$

เส้นตรง $y = -x$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{D}C$

<u>**การหาพิกัดของจุด F**</u>

สมการเส้นตรง L_1 ที่ผ่าน AB คือ

$$\frac{y-5}{x-0} = \frac{0-5}{12-0}$$

$$12(y-5) = -5x$$

$$5x+12y-60 = 0$$

ให้ (x,y) เป็นจุดบนเส้นตรง L_2 ที่แบ่งครึ่งมุม $B\hat{A}D$

ดังนั้น (x,y) ห่างจากเส้นตรง L_1 และแกน X เท่ากัน

(x,y) ห่างจากแกน X เท่ากับ $|y|$

(x,y) ห่างจากเส้นตรง L_1 เท่ากับ $\dfrac{|5x+12y-60|}{\sqrt{5^2+12^2}}$

$$= \frac{|5x+12y-60|}{13}$$

เพราะฉะนั้น $|y| = \dfrac{|5x+12y-60|}{13}$

$$13|y| = |5x+12y-60|$$

เราเลือกเฉพาะเส้นตรงที่มีความชันเป็นเลขจำนวนจริงลบ

เพราะฉะนั้นพิจารณาเฉพาะ

$$-13y = 5x+12y-60$$

ดังนั้นสมการ L_2 คือ $5x+25y-60 = 0$

หรือ $x+5y-12 = 0$

แทนค่า $y = x$ เพื่อหาพิกัดของจุด F

$$x+5x-12 = 0$$

$$6x-12 = 0$$

$$x = 2$$

สรุปพิกัดจุด F คือ $(2,2)$

<u>การหาพิกัดของจุด E</u>

สมการเส้นตรง L_3 ที่ผ่าน AC คือ

$$\frac{y-0}{x-12} = \frac{-28.8-0}{0-12}$$

$$-12(y) = -28.8(x-12)$$

$$3y = 7.2(x-12)$$

$$7.2x-3y-86.4 = 0$$

ให้ (x,y) เป็นจุดบนเส้นตรง L_4 ที่แบ่งครึ่งมุม $D\hat{A}C$

ดังนั้น (x,y) ห่างจากแกน X และเส้นตรง L_4 เท่ากัน

(x,y) ห่างจากแกน X เท่ากับ $|y|$

(x,y) ห่างจากเส้นตรง L_4 เท่ากับ $\dfrac{|7.2x-3y-86.4|}{\sqrt{(7.2)^2+(3)^2}}$

$$= \frac{|7.2x-3y-86.4|}{7.8}$$

$$|y| = \frac{|7.2x-3y-86.4|}{7.8}$$

$$7.8|y| = |7.2x-3y-86.4|$$

เพราะว่าเราต้องการเส้นตรงที่มีความชันเป็นเลขจำนวนจริงบวก

เพราะฉะนั้นเราพิจารณาเฉพาะ

$$7.8y = 7.2x-3y-86.4$$

$$7.2x-10.8y-86.4 = 0$$

$$2x-3y-24 = 0$$

ดังนั้นสมการเส้นตรง L_4 คือ $2x-3y-24 = 0$

แทนค่า $y = -x$ เพื่อหาจุดตัด E

$$2x-3(-x)-24 = 0$$

$$5x-24 = 0$$

$$x = 4.8$$

สรุปพิกัดของจุด E คือ (4.8,-4.8)

เพราะว่า F(2,2) เพราะฉะนั้นพิกัด T_1 คือ (2,0)

เพราะว่า E(4.8,-4.8) เพราะฉะนั้นพิกัด T_2 คือ (4.8,0)

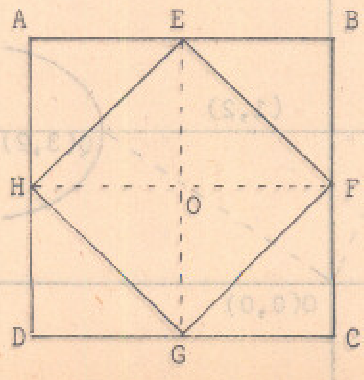
สรุป T_1 และ T_2 ห่างกัน 2.8 หน่วย

16. **ตอบ 1.**

แนวคิด สี่เหลี่ยมที่มีเส้นทแยงมุมตั้งฉากกันคือ สี่เหลี่ยมจัตุรัสหรือสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน หรือสี่เหลี่ยมรูปว่าว

ดังนั้นเพื่อความง่ายต่อการคำนวณขอเลือกใช้สี่เหลี่ยมจัตุรัส

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส



โดยการลากเส้น EG และ FH

พื้นที่ Δ AEH เท่ากับ พื้นที่ Δ EOH ดังนั้น

จะเห็นได้ชัดเจนว่า พ.ท. $\square$ EFGH $= \frac{1}{2}$ พ.ท. $\square$ ABCD

ดังนั้น พ.ท. $\square$ EFGH $= \frac{1}{2}(12\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

17. **ตอบ** 2.

แนวคิด

$$9x^2 - 4y^2 - 18x + 16y - 43 = 0$$

$$9(x^2-2x+1) - 4(y^2-4y+4) = 43+9-16$$

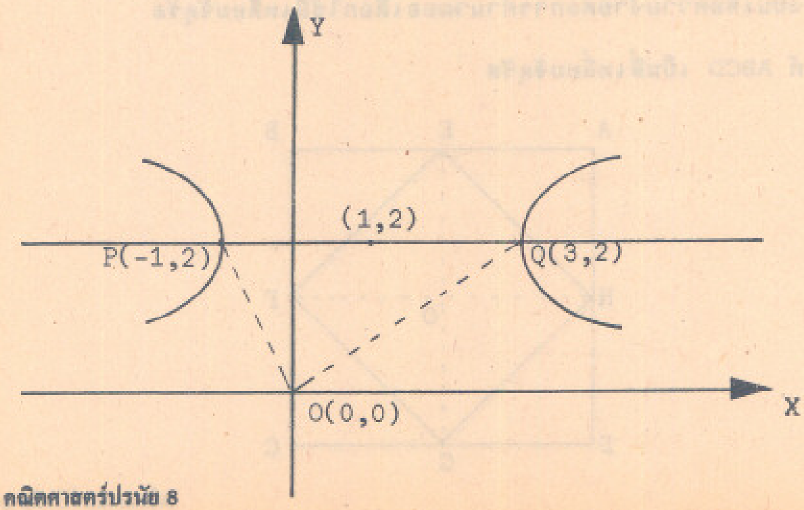
$$9(x-1)^2 - 4(y-2)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

เป็นรูปไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลาง (1,2) , a = 2 , b = 3 ,

แกนตามขวางขนานแกน X , จุดยอด (-1,2) , (3,2)

$c = \sqrt{13}$, โฟกัส $(1-\sqrt{13},2)$ และ $(1+\sqrt{13},2)$



เมื่อ $P(-1,2)$, $Q(3,2)$ และ $O(0,0)$

$$\overrightarrow{OP} = -\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overrightarrow{OQ} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$$

ดังนั้น $$\cos P\hat{O}Q = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|} = \frac{-3+4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

$$\sin^2 P\hat{O}Q = 1 - \cos^2 P\hat{O}Q = 1 - \frac{1}{65} = \frac{64}{65}$$

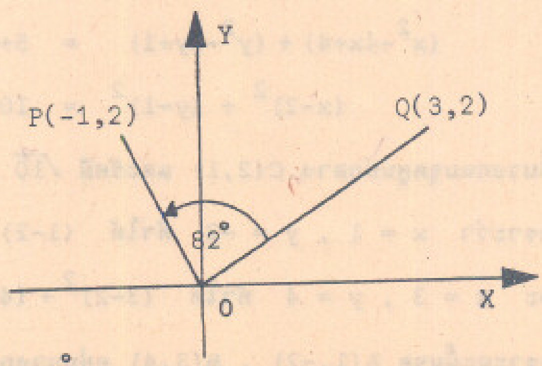
$$\sin P\hat{O}Q = \frac{8}{\sqrt{65}}$$

$$\tan P\hat{O}Q = \frac{\sin P\hat{O}Q}{\cos P\hat{O}Q} = \frac{\left(\frac{8}{\sqrt{65}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\right)} = 8$$

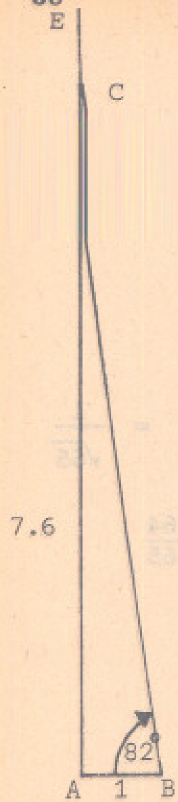
การตัดตัวเลือก

เมื่อรู้ค่า $P(-1,2)$, $Q(3,2)$, $O(0,0)$ เราสามารถวาดรูป

และวัดมุม $P\hat{O}Q$ เป็นองศา และประมาณค่า tan ได้



โดยการวัด $P\hat{O}Q = 82^\circ$



สร้างสามเหลี่ยม ABC

1. ลาก AB ยาว 1 เซนติเมตร
2. ลากเส้นตรง AE ตั้งฉากกับ AB ที่จุด A
3. ลาก $C\hat{B}A$ ให้ได้มุม 82° และตัดกับ AE ที่จุด C
4. วัดความยาว AC ได้ 7.6 เซนติเมตร

$$\tan 82^\circ = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{7.6}{1} = 7.6$$

เมื่อดูจากตัวเลือกตอบข้อ 2. ดีกว่า

18. **ตอบ** 4.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$$

$$(x^2-4x+4) + (y^2-2y+1) = 5+4+1$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง C(2,1) และรัศมี $\sqrt{10}$

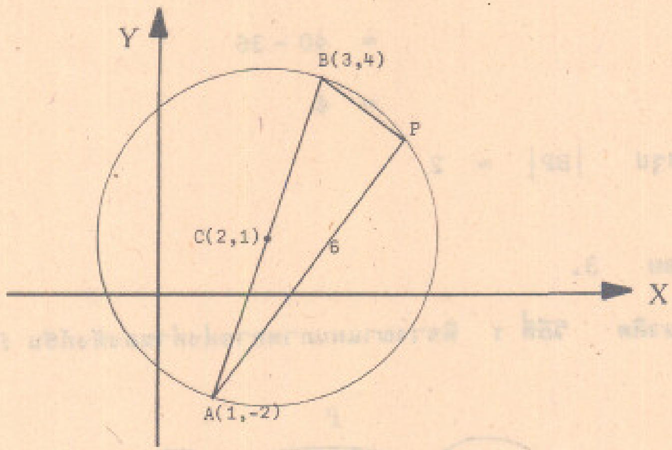
เพราะว่า $x = 1$, $y = -2$ ทำให้ $(1-2)^2 + (-2-1)^2 = 10$

และ $x = 3$, $y = 4$ ทำให้ $(3-2)^2 + (4-1)^2 = 10$

เพราะฉะนั้นจุด A(1,-2) , B(3,4) อยู่บนวงกลม

การตัดตัวเลือก

เขียนวงกลม $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$ และเขียนจุด A(1,-2) , B(3,4)



กางวงเวียนรัศมี 6 จุดศูนย์กลางที่ A ตัดส่วนโค้งของวงกลมที่จุด P

จะได้ $|AP| = 6$ ใช้ไม้บรรทัดวัดความยาว $|PB|$ ได้ 2

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง

เพราะว่าความชัน AB $= \dfrac{4-(-2)}{3-1} = \dfrac{6}{2} = 3$

และความชัน AC $= \dfrac{1-(-2)}{2-1} = 3$

เพราะฉะนั้น A,B,C อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ดังนั้น AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางซึ่งจะทำให้ $A\hat{P}B = 90^\circ$

เพราะว่า $|AB| = 2\sqrt{10}$

$|AP| = 6$

เพราะฉะนั้น $|BP|^2 = |AB|^2 - |AP|^2$

$= (2\sqrt{10})^2 - 6^2$

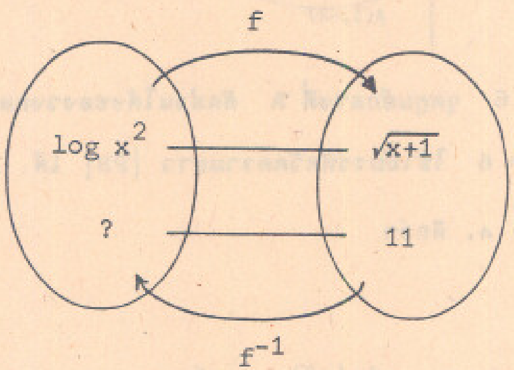
$= 40 - 36$

$= 4$

สรุป $|BP| = 2$

19. **ตอบ** 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** พิจารณาแผนภาพการส่งค่าของฟังก์ชัน f



การหา $f^{-1}(11)$

หา x ที่ทำให้ $\sqrt{x+1} = 11$

$x+1 = 121$

$x = 120$

เพราะว่า $f(\log x^2) = \sqrt{x+1}$

เพราะฉะนั้น $f(\log (120)^2) = \sqrt{120+1} = 11$

ดังนั้น $f^{-1}(11) = \log(120)^2 = \log(14400)$

$$= \log(100 \times 144)$$

$$= \log 100 + \log 144$$

$$= 2 + \log 144$$

วิธีที่ ๒ เพื่อประโยชน์ของผู้อ่าน ขอแสดงการหาสูตรของ $f(x)$ ดังนี้

พิจารณาค่า y ที่ทำให้ $\log x^2 = y$

$$2\log x = y$$

$$\log x = \frac{y}{2}$$

$$x = 10^{\frac{y}{2}}$$

เพราะฉะนั้น $f(\log(10^{\frac{x}{2}})^2) = f(\log 10^x) = f(x)$

เพราะว่า $f(\log(10^{\frac{x}{2}})^2) = \sqrt{10^{\frac{x}{2}} + 1}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sqrt{10^{\frac{x}{2}} + 1}$

ถึงแม้จะได้สูตรของ $f(x)$

แต่การหา $f^{-1}(11)$ ก็ต้องทำการแก้สมการต่อไปดังนี้

นั่นคือ หา x ที่ทำให้ $\sqrt{10^{\frac{x}{2}} + 1} = 11$

พิจารณา $\sqrt{10^{\frac{x}{2}} + 1} = 11$

$$10^{\frac{x}{2}} + 1 = 121$$

$$10^{\frac{x}{2}} = 120$$

$$10^{x} = (120)^{2}$$

$$\log(10^{x}) = \log(120)^{2}$$

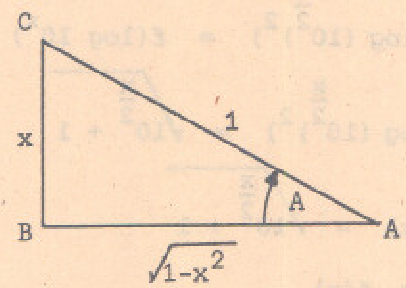
$$x = \log(14400)$$

$$= 2 + \log 144$$

20. **ตอบ** 2.

แนวคิด ให้ $A = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\tan A = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$



จากสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ $\sin A = x$

ดังนั้น $A = \arcsin x$

เพราะว่า $\operatorname{arcsec} \frac{1}{x} = \arccos x$

และ $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arcsec} \frac{1}{x} = A + \arccos x$

$$= \arcsin x + \arccos x$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\pi \arctan y}{\arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}} = \dfrac{\pi \arctan y}{\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}$

$$= 2 \arctan y$$

พิจารณา

$$\arctan x - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \arctan x + \operatorname{arccot} x$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

ให้ $(x,y) \in g$ จะได้ว่า

$$\arctan x - \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi \arctan y}{\arctan \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \operatorname{arcsec} \dfrac{1}{x}}$$

$$\frac{\pi}{2} = 2 \arctan y$$

$$\arctan y = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

สรุป $g(x) = 1$ ทุกค่า $x \in D_g$

ข้อความ (ก) ถูกต้อง

เพราะว่า $g(x) = 1$ และ $g(-x) = 1$

เพราะฉะนั้น $g(x) = g(-x)$ ทุกค่า $x \in D_g$

ข้อความ (ข) ผิด

โดเมนของ g ต้องดูจากเงื่อนไข $x \neq 0$ และ $1-x^2 \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $-1 \le x \le 1$ และ $x \ne 0$

นั่นคือ $D_g = [-1,1] - \{0\} = [-1,0) \cup (0,1]$

สรุป D_g เป็นเซตที่มีขอบเขตบน

ข้อความ (ค) ถูกต้อง

เพราะว่า $R_g = \{1\}$

เพราะฉะนั้นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ R_g คือ 1 ซึ่งมีค่าน้อยกว่า $\frac{\pi}{2}$

ข้อความ (ง) ผิด

เพราะว่า $g(1) = 1$ และ $g(-1) = 1$

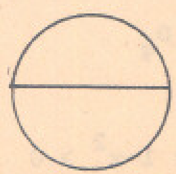
เพราะฉะนั้น g ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตอนที่ 2

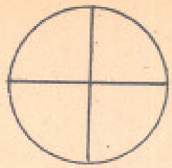
1. **ตอบ** $p + q = 465$

แนวคิด การแบ่งส่วนของวงกลมออกเป็นบริเวณย่อยๆ ด้วยคอร์ด จำนวน 29 เส้นเพื่อให้ได้บริเวณย่อยๆ น้อยที่สุดคือ ให้คอร์ด 29 เส้น นั้นเป็นเส้นรอบรูปของรูป 29 เหลี่ยมที่บรรจุภายในวงกลม ซึ่งจะแบ่งวงกลมออกเป็น 30 ส่วน เพราะฉะนั้น $q = 30$

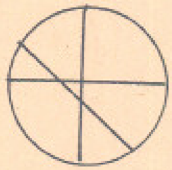
การแบ่งส่วนเพื่อหาจำนวนบริเวณย่อยที่มากที่สุด



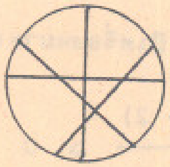
$n = 1$ บริเวณย่อย $= 2$



$n = 2$ บริเวณย่อย $= 4 = 2+2$



$n = 3$ บริเวณย่อย $= 2+2+3$



$n = 4$ บริเวณย่อย $= 2+2+3+4$

จะเห็นได้ว่าการที่เราจะได้บริเวณย่อยมากที่สุดนั้นต้องพยายามให้เส้นคอร์ดที่เพิ่มเข้ามาใหม่ต้องตัดบริเวณเดิมเพื่อเพิ่มบริเวณย่อย นั่นคือเส้นคอร์ที่ลากใหม่ต้องตัดเส้นคอร์ดเส้นเก่าที่มีอยู่แล้วทุกเส้น

สรุป เมื่อจำนวนคอร์ด $n = 29$

จะได้จำนวนบริเวณย่อย $= 2+2+3+4+\ldots+29$

$p = 1+1+2+3+4+\ldots+29 = 1+(\frac{29}{2})(29+1) = 435$

เพราะฉะนั้น $p+q = 435+30 = 465$

๒. **ตอบ** $[1,2] \cup (3,\infty)$

แนวคิด $\frac{a^3-5a^2b+6ab^2}{(a-b)^3} \geqslant 0$

$\frac{a(a^2-5ab+6b^2)}{(a-b)^3} \geqslant 0$

$$\frac{a(a-3b)(a-2b)}{(a-b)^3} \geqslant 0$$

$$\frac{ab^2\left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)}{b^3\left(\frac{a}{b}-1\right)^3} \geqslant 0$$

$$\frac{\frac{a}{b}\left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)}{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3} \geqslant 0$$

เพราะว่า $ab > 0$ เพราะฉะนั้น a และ b มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ดังนั้น $\frac{a}{b} > 0$ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{\left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)}{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3} \geqslant 0$

พิจารณาเครื่องหมายของอสมการเมื่อ $\frac{a}{b}$ มีค่าในช่วงต่างๆ

	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,\infty)$
$\frac{a}{b}-1$	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{a}{b}-2$	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{a}{b}-3$	−	−	−	−	−	0	+
$\frac{\left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)}{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3}$	−	0	+	0	−	∞	+

เพราะฉะนั้น $\frac{\left(\frac{a}{b}-3\right)\left(\frac{a}{b}-2\right)}{\left(\frac{a}{b}-1\right)^3} \geqslant 0$

เมื่อ $\frac{a}{b} \in [1,2] \cup (3,\infty)$ สรุป $A = [1,2] \cup (3,\infty)$

3. ตอบ $(-\infty,0) \cup \{-1,1\}$

แนวคิด $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}}+\frac{1}{x^{15}} \leqslant \frac{7}{x^9}$

$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}-\frac{6}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}}+\frac{1}{x^{15}} \leqslant 0$

$\frac{1}{x^{15}}[x^{12}+x^{10}+x^8-6x^6+x^4+x^2+1] \leqslant 0$ ___(1)

พิจารณาการแยกตัวประกอบ $x^{12}+x^{10}+x^8-6x^6+x^4+x^2+1$

ให้ $y = x^2$

จะได้ $x^{12}+x^{10}+x^8-6x^6+x^4+x^2+1$

$= y^6+y^5+y^4-6y^3+y^2+y+1$

ให้ $f(y) = y^6+y^5+y^4-6y^3+y^2+y+1$

เพราะว่า $f(1) = 1+1+1-6+1+1+1 = 0$

เพราะฉะนั้น $y-1$ หาร $f(y)$ ลงตัว และ

$$\frac{f(y)}{y-1} = y^5+2y^4+3y^3-3y^2-2y-1$$

ให้ $g(y) = y^5+2y^4+3y^3-3y^2-2y-1$

เพราะว่า $g(1) = 1+2+3-3-2-1 = 0$

เพราะฉะนั้น $y-1$ หาร $g(y)$ ลงตัว และ

$$\frac{g(y)}{y-1} = y^4+3y^3+6y^2+3y+1$$

สรุป $x^{12}+x^{10}+x^8-6x^6+x^4+x^2+1 = f(y)$

$= (y-1)(y^5+2y^4+3y^3-3y^2-2y-1)$

$$= (y-1)\, q(y)$$

$$= (y-1)(y-1)(y^4 + 3y^3 + 6y^2 + 3y + 1)$$

$$= (x^2-1)(x^2-1)(x^8 + 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1)$$

$$= (x^2-1)^2 (x^8 + 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1)$$

เพราะว่า $x^8 + 3x^6 + 6x^4 + 3x^2 + 1 > 0$

จากอสมการ (1) จะได้ $\frac{1}{x^{15}} (x^2-1)^2 \leqslant 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x^{15}} < 0$ หรือ $x = 1$ หรือ $x = -1$

นั่นคือ $x < 0$ หรือ $x = 1$ หรือ $x = -1$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{13}} + \frac{1}{x^{15}} \leqslant \frac{7}{x^9}$$

คือ $(-\infty, 0) \cup \{1, -1\}$

4. **ตอบ** 2

แนวคิด การหาค่า $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ วิธีที่ดีคือ การจัดรูปทางพีชคณิต

แต่วิธีที่ดีอีกแบบหนึ่งคือ เราจะใช้เหตุผลว่า

ถ้า $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 6$ ________________(1)

และ $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 8$ ________________(2)

แล้ว $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ จะต้องมีค่าตามค่า a, b, c, d ตามเงื่อนไขข้างต้นเสมอ

ดังนั้นลองแทนค่า $a = 2$ และ $b = 2$ จะได้

(1) ; $\frac{2}{2}+\frac{2}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{2} = 6$

$\frac{2}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{2} = 5$ ______(3)

(2) ; $\frac{2}{c}+\frac{2}{d}+\frac{c}{2}+\frac{d}{2} = 8$ ______(4)

จาก (3) และ (4) จะได้ $c = d = 0.535894$

สรุป $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = 2$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $a = b = 3$ จาก (1) จะได้

$\frac{3}{3}+\frac{3}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{3} = 6$

$\frac{3}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{3} = 5$ ______(5)

จาก (2) ; $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b} = 8$

$\frac{3}{c}+\frac{2}{d}+\frac{c}{3}+\frac{d}{3} = 8$ ______(6)

จาก (5) และ (6) จะได้ $c = d = 0.8038476$

ดังนั้น $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = 2$

5. **ตอบ** $m = 18928$

แนวคิด ให้ $m = \square\square \ldots \square 28$

สมมติ $m = \boxed{x}\,\boxed{y}\,28$ เมื่อ $x,y \in \{0,1,2,...,9\}$

จากเงื่อนไข (ข.) $x+y+2+8 = 28$

$x+y = 18$

ดังนั้น $x = 9$, $y = 9$

เพราะว่า 28 หาร 9928 ไม่ลงตัว

สรุป m เป็นจำนวนเต็มสี่หลักไม่ได้

ในทำนองเดียวกันจากเงื่อนไข (ข.) m เป็นจำนวนเต็มสามหลักไม่ได้

สมมติ $m = \boxed{a}\,\boxed{b}\,\boxed{c}\,2\,8$

จากเงื่อนไข (ข.) $a+b+c+2+8 = 28$

$$a+b+c = 18$$

เพราะว่าเราต้องการหาค่า m ที่น้อยที่สุด

ดังนั้นเลือก $a = 1$

จาก (1) ; $b + c = 17$

ซึ่งเป็นได้ 2 กรณี คือ $(b,c) = (8,9), (9,8)$

ลอง $m = 18928$

จะได้ว่า 28 หาร 18928 ลงตัว

สรุป $m = 18928$ สอดคล้องเงื่อนไข ก., ข. และ ค.

6. **ตอบ** 1584007824

แนวคิด ให้ $x = 1000000 = 10^6$

$$P^2 = (1000002)(1000004)(1000008)(1000010) + n$$

$$= (x+2)(x+4)(x+8)(x+10) + n$$

$$= (x^2+6x+8)(x^2+18x+80) + n$$

$$= x^4 + 24x^3 + 196x^2 + 624x + 640 + n$$

เลือก $P^2 = (x^2+Ax+B)^2$

$$(x^2+Ax+B)^2 = x^4 + 2Ax^3 + (A+2B)x^2 + 2ABx + B^2$$
$$= x^4 + 24x^3 + 196x^2 + 624x + 640 + n$$

เพราะว่าเราต้องการหาค่า n ที่น้อยที่สุด

เพราะฉะนั้นเราเลือกให้ $n < 10^{12}$

ดังนั้นค่าของ n จึงไม่มีผลต่อสัมประสิทธิ์ของ x^3 และ x^2

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

x^3 ; $2A = 24$

$A = 12$

x^2 ; $A+2B = 196$

$2B = 184$

$B = 92$

$A = 12$, $B = 92$

ต่อไปพิจารณาพหุนามส่วนที่เหลือ

$$2ABx + B^2 = 624x + 640 + n$$
$$2(12)(92)x + 92^2 = 624x + 640 + n$$
$$2208x + 8464 = 624x + 640 + n$$
$$1584x + 7824 = n$$

สรุป $n = 1584000000 + 7824$

$= 1,584,007,824$

7. **ตอบ** $f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + x^2)$

แนวคิด $f : R - \{0\} \to R$

$$x^{-1} f(-x) + f(x^{-1}) = x \qquad \text{———— (1)}$$

แทนค่า $x = -x$ จะได้

$$(-x)^{-1} f(x) + f((-x)^{-1}) = -x$$

$$-x^{-1} f(x) + f(-x^{-1}) = -x \qquad \text{———— (2)}$$

แทนค่า $x = \frac{1}{x}$ ในสมการ (1) จะได้

$$(\frac{1}{x})^{-1} f(-\frac{1}{x}) + f((\frac{1}{x})^{-1}) = \frac{1}{x}$$

$$x f(-\frac{1}{x}) + f(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{———— (3)}$$

x คูณสมการ (2) จะได้

$$-f(x) + x f(-\frac{1}{x}) = -x^2 \qquad \text{———— (4)}$$

(3) - (4) ; $2 f(x) = \frac{1}{x} + x^2$

$$f(x) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + x^2)$$

8. **ตอบ** $q = 5$ และ $p = 9$

แนวคิด พิจารณาหลักหน่วยของ 2^n , $n = 1,2,3,...$

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

เพราะฉะนั้น $(2^4)^k = (16)^k$ มีหลักหน่วยเป็น 6 ทุกค่า $k = 1, 2, ...$

เพราะว่า $2^{1000} = 2^{4\cdot 250} = (2^4)^{250}$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ 2^{1000} คือเลข 6

ดังนั้นหลักหน่วยของ $2^{1000}-1$ คือเลข 5

สรุป $q = 5$

เพราะว่า $2^{996} = 2^{4(249)}$

เพราะฉะนั้น 2^{996} มีหลักหน่วยเป็น 6

$$
\begin{aligned}
2^{1000} - 1 &= \square\square\square\ldots\square 5 \\
&= \square\square\ldots\square p5 \\
2^{1000} - 1 - 5 &= \square\square\ldots\square p5 - 5 \\
2^{1000} - 6 &= \square\square\ldots\square p0 \\
\frac{2^{1000} - 6}{10} &= \square\square\ldots\square p
\end{aligned}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{1000} - 6}{10} &= \frac{2^{996}\ 2^4 - 6}{10} \\
&= \frac{2^{996}(16) - 6}{10} \\
&= \frac{2^{996}(10+6) - 6}{10} \\
&= \frac{10\cdot 2^{996} + 6(2^{996} - 1)}{10} \\
&= \frac{10\cdot 2^{996} + 6(\square\square\ldots\square 6 - 1)}{10}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{10\cdot 2^{996} + 6(\square\square\ldots\square 5)}{10}$$

$$= \frac{10\cdot 2^{996} + (6)(5)(\square\square\ldots\square 1)}{10}$$

$$= \frac{10\,[\,2^{996} + 3(\square\square\ldots\square 1)\,]}{10}$$

$$= 2^{996} + (\square\square\ldots\square 3)$$

$$= (\square\square\ldots\square 6) + (\square\square\ldots\square 3)$$

$$= (\square\square\ldots\square 9)$$

เพราะฉะนั้น $\square\square\ldots\square p = \square\square\ldots\square 9$

สรุป $p = 9$

๑. **ตอบ** $m = 1946$

แนวคิด

วิธีที่ ๑ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก 4 หลัก และ 131 หาร x เหลือเศษ $112\}$

การพิจารณาตัวเลขเล็กที่สุดของ A

เพราะว่า $\dfrac{1000}{131} = 7 + \dfrac{83}{131}$

ดังนั้น $\dfrac{1000}{131} + \dfrac{29}{131} = 7 + \dfrac{83}{131} + \dfrac{29}{131}$

$$\frac{1029}{131} = 7 + \frac{112}{131}$$

เพราะฉะนั้นสมาชิกตัวเล็กสุดของ A คือ 1029

การพิจารณาตัวเลขใหญ่ที่สุดของ A

เพราะว่า $\frac{10000}{131} = 76 + \frac{44}{131} = 75 + \frac{131}{131} + \frac{44}{131}$

$$= 75 + \frac{112}{131} + \frac{63}{131}$$

$$\frac{10000}{131} - \frac{63}{131} = 75 + \frac{112}{131}$$

$$\frac{9937}{131} = 75 + \frac{112}{131}$$

เพราะฉะนั้นตัวเลขใหญ่ที่สุดของ A คือ 9937

ดังนั้น $A = \{1029, 1160, 1291, ..., 9806, 9937\}$

$B = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก 4 หลัก และ 132 หาร x เหลือเศษ 98$\}$

การหาสมาชิกตัวเล็กสุดของ B

เพราะว่า $\frac{1000}{112} = 7 + \frac{76}{132}$

$$\frac{1000}{132} + \frac{22}{132} = 7 + \frac{76}{132} + \frac{22}{132}$$

$$\frac{1022}{132} = 7 + \frac{98}{132}$$

เพราะฉะนั้นสมาชิกตัวเล็กสุดของ B คือ 1022

การหาสมาชิกตัวใหญ่ที่สุดของ B

เพราะว่า $\frac{10000}{132} = 75 + \frac{100}{132} = 74 + \frac{132}{132} + \frac{100}{132}$

$$= 74 + \frac{98}{132} + \frac{134}{132}$$

$$\frac{10000}{132} - \frac{134}{132} = 74 + \frac{98}{132}$$

$$\frac{9866}{132} = 74 + \frac{98}{132}$$

เพราะฉะนั้นสมาชิกตัวใหญ่ที่สุดของ B คือ 9866

ดังนั้น $B = \{1022, 1154, 1286, \ldots, 9734, 9866\}$

$C = \{m \mid m$ เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลักซึ่งหารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และหารด้วย 132 เหลือเศษ 98$\}$

$= A \cap B$

$= \{1946\}$

หมายเหตุ ตัวเลขตัวถัดไปคือ 17292 ซึ่งไม่อยู่ใน C

สรุป $m = 1946$

วิธีที่ ๒ แนวคิดโดยการใช้ทฤษฎีจำนวน

$$m \equiv 112 \mod 131 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

$$m \equiv 98 \mod 132 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จาก (๑) $131 \mid (m - 112)$

ดังนั้นมี $x \in I^+$, $m - 112 = 131x$

$$m = 131x + 112 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(3)}$$

จาก (๒) แทนค่า m จะได้

$$131x + 112 \equiv 98 \mod 132$$

$$131x \equiv (98 - 112) \mod 132$$

$$131x \equiv -14 \mod 132$$

เพราะฉะนั้น $132 \mid (131x + 14)$

ดังนั้นมี $y \in I$, $131x + 14 = 132y$

$$131x - 132y = -14 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(4)}$$

เพราะว่า $131 - 132 = -1$

เพราะฉะนั้น $(14)(131) - (14)(132) = -14$

ดังนั้นค่า x ที่เป็นไปได้ตัวหนึ่งคือ $x = 14$

ให้ $x = 14 + 132t$, $t \in I$

จะได้ $m = 112 + 131(14 + 132t)$

$= 112 + 1834 + (131)(132)t$

$= 1946 + (131)(132)t$

สรุปเลือก $m = 1946$

หมายเหตุ โดยการใช้เหตุผลตามแนวทางวิธีที่ ๒ จะพบว่า

m จะอยู่ในรูปแบบ

$m = (131)(132)n + 1946$, $n \in I$

ถ้าไม่เจาะจงว่า m เป็นจำนวนเต็มสี่หลัก

วิธีที่ ๓ เพราะว่า m หารด้วย 131 เหลือเศษ 112

เพราะฉะนั้น มี $t \in I$ ที่ทำให้ $m = 131t + 112$

เพราะว่า m หารด้วย 132 เหลือเศษ 98

เพราะฉะนั้น มี $k \in I$ ที่ทำให้ $m = 132k + 98$

ดังนั้น $132k + 98 = m = 131t + 112$

$132k - 131t = 14$

เลือก $k = t = 14$

จะได้ $132(14) - (131)(14) = 14$

ดังนั้น $k = t = 14$ ใช้ได้

สรุป $m = 131(14) + 112 = 1946$

บังเอิญเป็นการโชคดีที่เลือกได้จำนวนเต็มบวก 4 หลัก ซึ่งมีตัวเดียวเท่านั้นพอดี

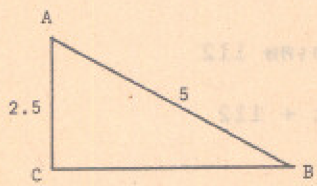
10. **ตอบ** 3

แนวคิด เนื่องจาก $|AC| = 2.5$ และ $|AB| = 5$

และไม่กำหนดความยาวด้าน BC มาให้ จึงมีรูปสามเหลี่ยมได้หลายรูป

และสามเหลี่ยมทุกรูปอัตราส่วน $\dfrac{\tan(\frac{A}{2} + B)}{\tan\frac{A}{2}}$ มีค่าเป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับความยาวด้าน BC

ดังนั้นเราเลือกให้สามเหลี่ยม ABC มี $\hat{ACB} = 90^\circ$



เพราะฉะนั้น $|BC| = \sqrt{5^2 - (2.5)^2}$

$= 2.5\sqrt{3}$

$A = 60^\circ$

$B = 30^\circ$

สรุป $\dfrac{\tan(\frac{A}{2} + B)}{\tan\frac{A}{2}} = \dfrac{\tan(\frac{60^\circ}{2} + 30^\circ)}{\tan(\frac{60^\circ}{2})} = \dfrac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ}$

$= \dfrac{(\sqrt{3})}{(\frac{1}{\sqrt{3}})} = 3$

สำหรับข้อสอบอัตนัยแบบแสดงวิธีทำ เราสามารถทำได้ดังนี้

ในสามเหลี่ยม ABC $A + B + C = 180^\circ$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 90^\circ$$

$$b = 2.5$$

$$c = 5$$

โดยการใช้สูตร

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{A}{2} + B\right) &= \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{B}{2}\right)\\ &= \tan\left(90^\circ - \frac{C}{2} + \frac{B}{2}\right)\\ &= \tan\left(90^\circ - \left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2}\right)\right)\\ &= \cot\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan\frac{A}{2} &= \tan\left(90 - \left(\frac{C}{2} + \frac{B}{2}\right)\right)\\ &= \cot\left(\frac{C}{2} + \frac{B}{2}\right)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}\frac{\tan\left(\frac{A}{2} + B\right)}{\tan\frac{A}{2}} &= \frac{\cot\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2}\right)}{\cot\left(\frac{C}{2} + \frac{B}{2}\right)}\\ &= \frac{\tan\left(\frac{C}{2} + \frac{B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2}\right)}\\ &= \frac{c + b}{c - b}\\ &= \frac{5 + 2.5}{5 - 2.5}\\ &= \frac{7.5}{2.5}\\ &= 3\end{aligned}$$

หมายเหตุ ในสามเหลี่ยม ABC ใดๆ

จะได้ว่า $$\frac{\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{A}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A}{2}-\frac{C}{2}\right)} = \frac{a+c}{a-c}$$

$$\frac{\tan\left(\frac{C}{2}+\frac{B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{C}{2}-\frac{B}{2}\right)} = \frac{c+b}{c-b}$$

11. **ตอบ** 6

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี

$$9x^2+25y^2-18x-100y = 116$$

$$9(x^2-2x+1)+25(y^2-4y+4) = 116+9+100$$

$$9(x-1)^2+25(y-2)^2 = 225$$

$$\frac{(x-1)^2}{5^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

เป็นรูปวงรีมีแกนเอกขนานแกน X , จุดศูนย์กลาง C(1,2)

$a = 5$, $b = 3$, จุดยอด $V_1(-4,2)$, $V_2(6,2)$

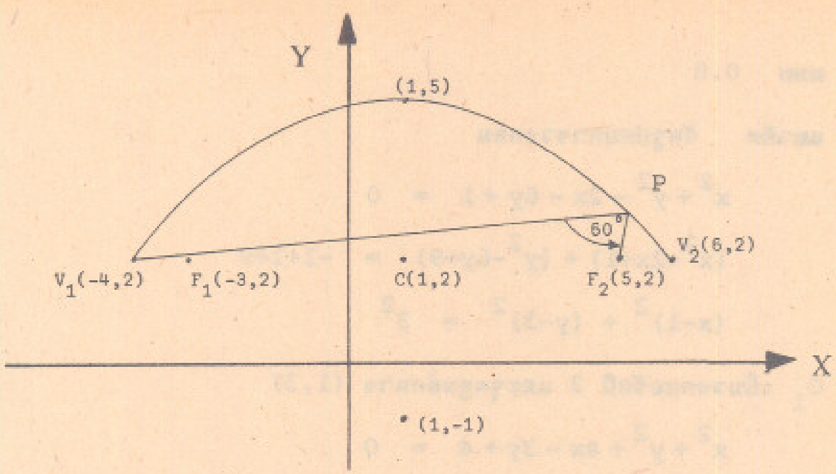
$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{25-9} = 4$

โฟกัส $F_1(-3,2)$, $F_2(5,2)$

$F_1\hat{P}F_2 = 60^\circ$, $|F_1F_2| = 8$

จากคุณสมบัติของจุดโฟกัสในวงรีจะได้ว่า

$$|F_1P| + |F_2P| = 2a = 10$$



จากกฎของโคไซน์

$$|F_1F_2|^2 = |F_1P|^2 + |F_2P|^2 - 2|F_1P|\cdot|F_2P|\cdot\cos F_1\hat{P}F_2$$

ให้ $|F_1P| = x$ ดังนั้น $|F_2P| = 10 - x$

เพราะฉะนั้น

$$8^2 = x^2 + (10-x)^2 - 2x(10-x)\cos 60^\circ$$

$$64 = x^2+100-2x+x^2-2x(10-x)(\tfrac{1}{2})$$

$$64 = 2x^2+100-2x-10x+x^2$$

$$3x^2-12x+36 = 0$$

$$x^2-4x+12 = 0$$

$$(x-6)(x+2) = 0$$

$$x = 6, -2$$

เพราะว่า $x = |F_1P| > 0$

เพราะฉะนั้น $|F_1P| = 6$

12. ตอบ 0.8

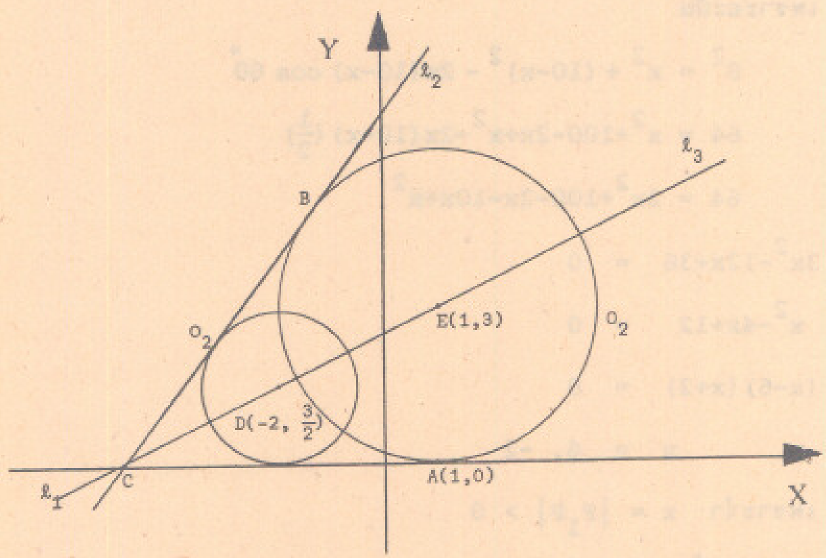
แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$$
$$(x^2-2x+1) + (y^2-6y+9) = -1+1+9$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

O_1 เป็นวงกลมรัศมี 3 และจุดศูนย์กลาง (1,3)

$$x^2 + y^2 + 4x - 3y + 4 = 0$$
$$(x^2+4x+4) + (y^2-3y+(\tfrac{3}{2})^2) = (\tfrac{3}{2})^2$$
$$(x+2)^2 + (y-\tfrac{3}{2})^2 = (\tfrac{3}{2})^2$$

O_2 เป็นวงกลมรัศมี $\frac{3}{2}$ และจุดศูนย์กลาง $(-2, \frac{3}{2})$



เพราะว่าวงกลม O_1 มีจุดศูนย์กลาง (1,3) และรัศมี 3

เพราะฉะนั้นแกน X สัมผัสวงกลม O_1

เพราะว่าวงกลม O_2 มีจุดศูนย์กลาง $(-2,\frac{3}{2})$ และรัศมี $\frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้นแกน X สัมผัสวงกลม O_2

ให้เส้นตรง ℓ_1 คือแกน X

ℓ_2 สัมผัสกับวงกลม O_1 และ O_2

และตัดกับ ℓ_1 ที่จุด C

เพราะฉะนั้นมุม ACB คือมุม ℓ_1 ตัดกับ ℓ_2

(คิดเฉพาะมุมแหลม)

จากเหตุผลทางเรขาคณิตจะได้ว่า เส้นตรง ℓ_3 ที่ลากผ่าน DE

จะแบ่งครึ่งมุม $B\hat{C}A$

สมการเส้นตรงที่ผ่าน D,E คือ

$$\frac{y-3}{x-1} = \frac{\frac{3}{2}-3}{-2-1} = \frac{(-\frac{3}{2})}{-3} = \frac{1}{2}$$

$$2y-6 = x-1$$

$$2y = x+5$$

$$y = \frac{1}{2}x + 5$$

เพราะฉะนั้น $\tan D\hat{C}A$ = ความชันของเส้นตรง $\ell_3 = \frac{1}{2}$

จากสูตรตรีโกณมิติ

$$\sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

เพราะว่า $\hat{ACB} = 2(\hat{DCA})$

เพราะฉะนั้น $\sin \hat{ACB} = \dfrac{2 \tan (\hat{DCA})}{1 + \tan^2 (\hat{DCA})} = \dfrac{2(\frac{1}{2})}{1 + (\frac{1}{2})^2}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}$$

$$= 0.8$$

13. ตอบ -1.48

แนวคิด $f(x) = a + bx^c$

$f(1) = a + b = 7$ ________(1)

$f(2) = a + b\,2^c = 10$ ________(2)

$f(4) = a + b \cdot 4^c = 15$ ________(3)

(2)-(1) ; $b \cdot 2^c - b = 3$

$b(2^c - 1) = 3$ ________(4)

(3)-(1) ; $b \cdot 4^c - b = 8$

$b(4^c - 1) = 8$ ________(5)

เพราะว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว เพราะฉะนั้น $b \neq 0$

(5) ÷ (4) ; $\dfrac{4^c - 1}{2^c - 1} = \dfrac{8}{3}$

$$\frac{2^{2c} - 1}{2^c - 1} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{(2^c-1)(2^c+1)}{2^c-1} = \frac{8}{3} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(6)}$$

เพราะว่า ถ้า $c = 0$ จะทำให้ $f(x) = a+b$ ซึ่งเป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $c \neq 0$ ดังนั้น $2^c-1 \neq 0$

จาก (6) จะได้

$$2^c+1 = \frac{8}{3}$$

$$2^c = \frac{5}{3}$$

$$c \log 2 = \log \frac{5}{3}$$

$$c = \frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2} = \frac{\log 5 - \log 3}{\log 2}$$

$$= \frac{0.7 - 0.477}{0.3}$$

$$= 0.74$$

เพราะว่า $2^c = \frac{5}{3}$ เพราะฉะนั้น จาก (4) จะได้

$$b(\frac{5}{3} - 1) = 3$$

$$b = \frac{9}{2}$$

จาก (1) ; $a = 7 - b = 7 - \frac{9}{2} = \frac{5}{2}$

เพราะฉะนั้น $a - b = \frac{5}{2} - \frac{9}{2} = \frac{-4}{2} = -2$

สรุป $c(a - b) = -2(0.74) = -1.48$

14. ตอบ 144

แนวคิด เพราะว่า
$$\log_4 576 = \frac{\log_2 576}{\log_2 4} = \frac{\log_2 576}{2} = \log_2 (576)^{\frac{1}{2}} = \log_2 24$$

เพราะฉะนั้น $2^{\log_4 576} = 2^{\log_2 24} = 24$

ดังนั้น
$$24 = 2^{x+y} \cdot 3^{x-y}$$
$$2^3 \cdot 3 = 2^{x+y} \cdot 3^{x-y}$$
$$2^{3-x-y} = 3^{x-y-1}$$

เพราะฉะนั้น $3-x-y = 0$

และ $x-y-1 = 0$

ซึ่งจะได้ $x = 2$ และ $y = 1$

$$(3-r)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2r = (3-\log_6 27)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2\log_6 27$$
$$= [3 - 3\log_6 3][2\log_2 108] - 2[3\log_6 3]$$
$$= 6\log_2 108 - 6\log_6 3 \log_2 108 - 6\log_6 3$$
$$= 6[\log_2 108 - \log_6 3 \log_2 108 - \log_6 3]$$

พิจารณาเฉพาะค่า

$$\log_2 108 - \log_6 3 \log_2 108 - \log_6 3$$

$$= \frac{\log 108}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 6} \cdot \frac{\log 108}{\log 2} - \frac{\log 3}{\log 6}$$

$$= \frac{\log 108 \log 6 - \log 3 \log 108 - \log 3 \log 2}{\log 6 \log 2}$$

$$= \frac{\log 108 (\log 6 - \log 3) - \log 3 \log 2}{\log 6 \log 2}$$

$$= \frac{\log 108 \log (\frac{6}{3}) - \log 3 \log 2}{\log 6 \log 2}$$

$$= \frac{\log 108 \log 2 - \log 3 \log 2}{\log 6 \log 2}$$

$$= \frac{(\log 108 - \log 3)\log 2}{\log 6 \log 2}$$

$$= \frac{\log (\frac{108}{3})}{\log 6}$$

$$= \frac{\log 36}{\log 6}$$

$$= \frac{2 \log 6}{\log 6}$$

$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $(3-r)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2r = 6[2] = 12$

$$[(3-r)\log_{\sqrt{2}} 108 - 2r]^{xy} = (12)^2$$

$$= 144$$

15. ตอบ $x = n+1$

แนวคิด เพราะว่า $\dfrac{1}{k^2+k+1} = \dfrac{1}{1+(k^2+k)}$

$$= \frac{1}{1+k(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$$

เพราะฉะนั้น $\arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan\left(\dfrac{(k+1)-k}{1+(k+1)k}\right)$

$$= \arctan(k+1) - \arctan k$$

ดังนั้น $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\arctan(k+1) - \arctan k]$$

$$= [\arctan 2 - \arctan 1]+[\arctan 3 - \arctan 2]+\ldots$$

$$+ \ldots + [\arctan(n+1) - \arctan n]$$

$$= \arctan(n+1) - \arctan 1$$

$$= \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

เพราะว่า $\arctan(x) - \dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$

$$= \arctan(n+1) - \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan x = \arctan(n+1)$$

$$x = n+1$$

ข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

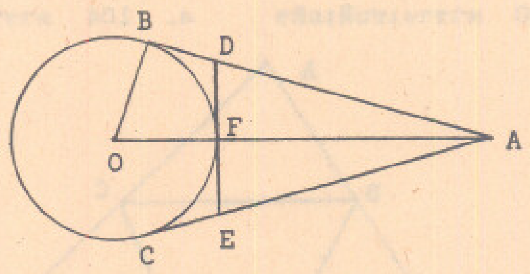
ประจำปี พ.ศ. 2537

วิชาคณิตศาสตร์ (สอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันที่ 25 มิถุนายน 2537 เวลา 9.00 - 12.00 น.

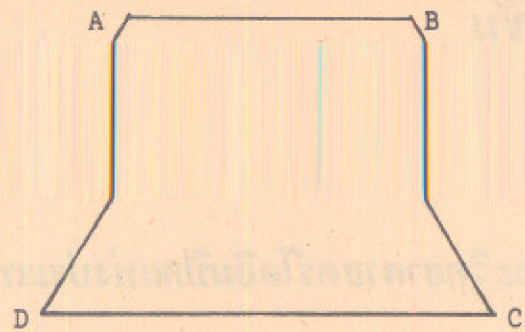
<u>ตอนที่ 1</u> ข้อสอบแบบเลือกคำตอบ 25 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1.



กำหนดให้ A เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ลาก $\overline{AO}$ ตัดวงกลมที่ F และจากจุด F ลากเส้นสัมผัสวงกลมตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่จุด D และ E ตามลำดับ ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 7 เซนติเมตร และ AF ยาว 18 เซนติเมตร แล้วความยาวเส้นรอบรูปของ $\triangle$ ADE มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 24 เซนติเมตร
2. 25 เซนติเมตร
3. 48 เซนติเมตร
4. 50 เซนติเมตร

2. 

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู ซึ่ง $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$ และ $\overline{AD} = \overline{BC}$ และสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

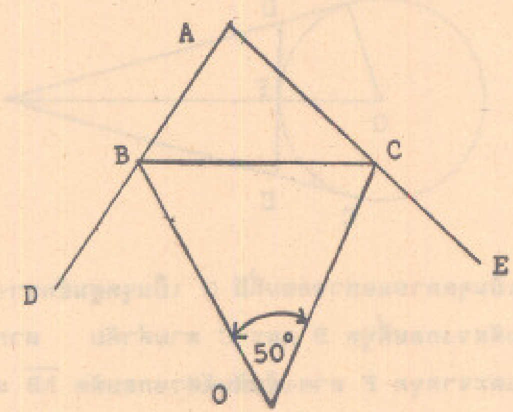
(i) $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$

(ii) $\overline{DC}$ ยาว 16 เซนติเมตร และ $\overline{DC}$ ยาวกว่า $\overline{AB}$

และ (iii) $\sin A\hat{D}C = 0.8$

พื้นที่ของสี่เหลี่ยม ABCD มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

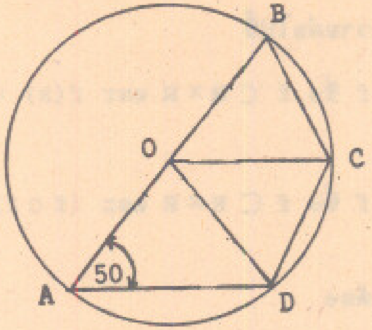
1. 72 ตารางเซนติเมตร　　2.. 80 ตารางเซนติเมตร
3. 90 ตารางเซนติเมตร　　4. 104 ตารางเซนติเมตร

3. 

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ รูปหนึ่ง ต่อด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ออกไปทาง B และ C ถึง D และ E ตามลำดับ $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่ง $C\hat{B}D$ และ $B\hat{C}E$ ถ้า $B\hat{O}C = 50^\circ$ แล้ว ขนาดของ $B\hat{A}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 80°　　2. 70°
3. 60°　　4. 45°

4.



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง, $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD})$ และ $D\hat{A}O = 50^{\circ}$ ขนาดของ $O\hat{B}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 50° 2. 55°
3. 65° 4. 80°

5. ให้ a = 1.03 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}$

ก. $\exists x\,[a^{x} + a^{-x} = 20]$

ข. $\forall x\,[a^{x} - a^{-x} = 0 \rightarrow a^{x} + a^{-x} = 0]$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ก. เท่านั้นที่มีค่าความจริงเป็นจริง
3. ข. เท่านั้นที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ
4. ก. และ ข. มีค่าความจริงเป็นเท็จ

6. ถ้า $3x^{2}-13x+4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^{3}+ax^{2}+bx-8$ ค่าของ $a+b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -49 2. -11
3. 22 4. 49

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}}$

ข. มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f \subset R \times R$ และ $(f \circ f)(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

8. ให้ $x \in R^+$ และ $(x+1)^2 + \dfrac{1}{(x+1)^2} = 7$ แล้วค่าของ

$x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 + \dfrac{1}{(x+1)^5}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1401
2. 1400
3. 321
4. 123

9. $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{\pi}{4}$
2. $-\dfrac{3\pi}{4}$
3. $\dfrac{\pi}{4}$
4. $\dfrac{3\pi}{4}$

10. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$x^2 \log_5(x^2+2x-3) - x \log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x-3) = x^2 + x$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8

11. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ

$$\frac{\sqrt{x+48}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+48}-\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-4}+\sqrt{3}}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 16
3. 25 4. 41

12. ถ้า $A\cdot 2^{3\log_2 6} = 648$ ค่าของ $\frac{2^{3\log_2 6}}{A}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 36
3. 72 4. 216

13. ถ้า $f(x) = \log (x+\sqrt{1+x^2})$, $x \in R$ แล้ว a จะมีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อ $f(a) = 1$

1. $\frac{101}{20}$ 2. $\frac{99}{20}$
3. 1 4. 0

14. ค่าของ $(2-\frac{1}{2+1})(2-\frac{1}{2^2+1})(2-\frac{1}{2^3+1}) \ldots (2-\frac{1}{2^8+1})$

ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{511}{3}$ 2. 171
3. 256 4. $\frac{257}{3}$

15. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid 3^{x-6} = 2^{x-3}\cdot 3^{-x}\}$

A เป็นสับเซตของเซตคำตอบของอสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\log (x-2) < 0$ 2. $\log (x+2) < -1$
3. $\log (x-1) < 0$ 4. $\log (x+1) < 1$

16. ถ้า $f(x) = x+2$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2-5$

แล้วเซตคำตอบของอสมการ $g(x) < 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-1,1]$ 2. $(-\infty,-1) \cup (1,\infty)$
3. $(-1,1)$ 4. $(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

17. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$; $\overrightarrow{OB} = 12\bar{i} + \bar{j}$ ลาก AC ตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ ที่จุด C แล้ว $\overrightarrow{OC}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{29}(12\bar{i} + \bar{j})$ 2. $\frac{29}{8}(12\bar{i} + \bar{j})$
3. $\frac{40}{147}(12\bar{i} + \bar{j})$ 4. $\frac{147}{40}(12\bar{i} + \bar{j})$

18. ให้ $A = \{x \in R \mid 2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}\}$
ผลบวกของสมาชิกในเซต A มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{17}{2}$
3. $\frac{7}{2}$ 4. $\frac{19}{2}$

19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$
3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{3}{4}$

20. กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a > b$ และ

$$\sqrt{11 + \sqrt{45} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$2a^2+b$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. 12 2. 14
3. 52 4. 54

21. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a-b+c)(a+b+c) = ac$ แล้ว ขนาดของมุม B ตรงกับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 30° 2. 60° 3. 120° 4. 150°

22. ให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \, a,b,c,d \in \{-1,0,1\} \right\}$

และ $X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$ จำนวนสมาชิกในเซต X มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 64 2. 57 3. 48 4. 16

23. ให้ $U = \{1,2,3,\ldots,65\}$ และ

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) = 1\}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต X ทั้งหมดมีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 2145 2. 1560 3. 650 4. 585

24. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

ผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 3 3. -3 4. 5

25. ให้ $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

ถ้า $f(2) = f(3) = f(4) = \ldots = f(n+1) = 0$

แล้ว $f(1)$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $(-1)^{n-1} \cdot n!$

3. $(-1)^n \cdot n!$ 4. $n! + (-1)^n$

$(\, n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 \,)$

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ

1. จากตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง

คะแนน	ความถี่
1	5
2	n

จงหาค่าของจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เป็นจำนวนตรรกยะ

2. ให้ $\log 2 = 0.301$

ถ้า $2^{54} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$

เมื่อ $1 \leqslant a_n \leqslant 9$ และ $0 \leqslant a_i \leqslant 9$, $i = 0,1,2,\ldots,n-1$

แล้ว ค่าของ $a_n + a_0$ เท่ากับเท่าไร

3. ในการเขียนจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 - 1000 จะต้องใช้ 0 ทั้งหมดกี่ตัว

4. ให้ $f : I \to I$ ซึ่งสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุกๆ $x,y \in I$

(ii) $(f \circ f)(1) \leqslant 100$

จำนวนฟังก์ชัน f ที่มีสมบัติทั้ง 2 ข้อ ข้างต้นจะมีทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน

5. ให้ F เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัดเป็น (1,-2) และ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการ $x-y = 0$ ให้ A,B เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของ latus rectum ของพาราโบลาที่มี F เป็นจุดโฟกัส และ L เป็นไดเรกตริกซ์ พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABP จะเท่ากับกี่ตารางหน่วย เมื่อพิกัดของ P คือ (5,5)

6. กำหนดสมการวงกลม

$$C_1 : x^2 + y^2 = 25$$
$$C_2 : (x-4)^2 + (y-8\sqrt{3})^2 = 25$$

ให้ O_1 และ O_2 เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ

ถ้า A, B เป็นจุดตัดของวงกลม C_1 กับ C_2 พื้นที่ของสี่เหลี่ยม O_1AO_2B มีค่ากี่ตารางหน่วย

7. กำหนดให้ $\log 2 = 0.301$ และ $\log 3 = 0.4771$

ให้ $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าไร

8. ให้ $a = 2\tan^{-1}\frac{1}{3} + \tan^{-1}\frac{1}{7}$

จงหาค่าของ $\frac{180}{\pi}a$

9. ให้ A คือเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+2 < 0$

B คือเซตคำตอบของอสมการ $\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 0$

จงหาเซต $(A \cup B)'$ ในรูปช่วง

10. ถ้าเราเขียน

$$7^{2538} = 100x + r$$

เมื่อ x และ r เป็นจำนวนเต็มบวก และ $r < 100$

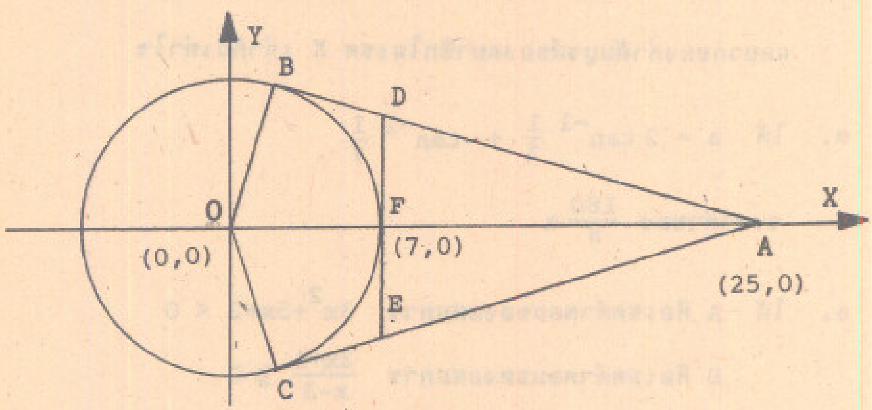
ค่าของ r เท่ากับเท่าไร

เฉลยข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2537

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 3

แนวคิด วาดรูปบนพิกัดมุมฉากโดยให้ O(0,0) , F(7,0) และ A(25,0)



เพราะว่า $\overline{BD} = \overline{DF}$ และ $\overline{EF} = \overline{EC}$ และ $\overline{AB} = \overline{AC}$

เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ADE เท่ากับ

$$\overline{AD} + \overline{DF} + \overline{FE} + \overline{EA} = \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{EC} + \overline{EA}$$
$$= \overline{AB} + \overline{AC}$$
$$= 2\overline{AB}$$

เพราะว่า $O\hat{B}A = 90^\circ$, $|\overline{OB}| = 7$ และ $|\overline{OA}| = 25$

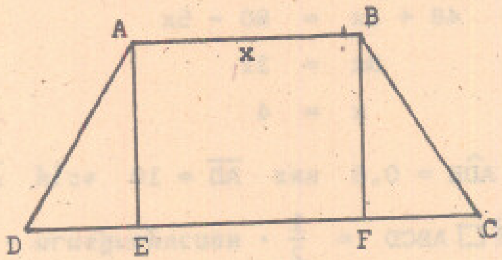
เพราะฉะนั้น $|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 - |\overline{OB}|^2 = 625 - 49 = 576$

นั่นคือ $|\overline{AB}| = 24$

สรุปความยาวเส้นรอบรูป $\triangle$ ADE **เท่ากับ** 48

2. ตอบ 2

แนวคิด



ลากเส้นตั้งฉากจาก A และ B มาตั้งฉากกับ DC ที่จุด E และ F ตามลำดับ

Δ ADE และ Δ BFC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากัน

เพราะฉะนั้น Δ ADE และ Δ BFC เหมือนกันทุกประการ

ให้ AB ยาว x

เพราะว่า $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$

$2\overline{AD} = x + 16$

เพราะฉะนั้น $\overline{AD} = \frac{x}{2} + 8$

เพราะว่า $\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{FC} = \overline{DC} = 16$ และ $\overline{EF} = \overline{AB}$

$\overline{DE} + x + \overline{DE} = 16$

$2\overline{DE} = 16 - x$

เพราะฉะนั้น $\overline{DE} = 8 - \frac{x}{2}$

เพราะว่า $\sin A\hat{D}E = 0.8$

เพราะฉะนั้น $\cos A\hat{D}E = \sqrt{1 - 0.64} = \sqrt{0.36} = 0.6 = \frac{3}{5}$

ดังนั้น $\cos A\hat{D}E = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}$

$$\frac{3}{5} = \frac{8 - \frac{x}{2}}{8 + \frac{x}{2}}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{16 - x}{16 + x}$$

$$48 + 3x = 80 - 5x$$
$$8x = 32$$
$$x = 4$$

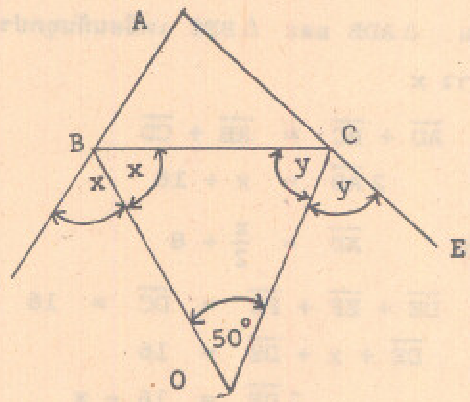
จาก $\sin A\hat{D}E = 0.8$ และ $\overline{AD} = 10$ จะได้ $\overline{AE} = 8$

สรุป พื้นที่ □ ABCD $= \frac{1}{2}$ · ผลบวกด้านคู่ขนาน · สูง

$$= \frac{1}{2}(16+4)(8)$$
$$= 80$$

8. ตอบ 1

แนวคิด



ให้ $C\hat{B}O = x$ และ $O\hat{C}B = y$ ดังนั้น $x+y+50 = 180$

$$x+y = 130 \quad \text{——— (1)}$$

$A\hat{B}C = 180-2x$ และ $A\hat{C}B = 180-2y$

เพราะฉะนั้น $(180-2x) + (180-2y) + \hat{A} = 180$

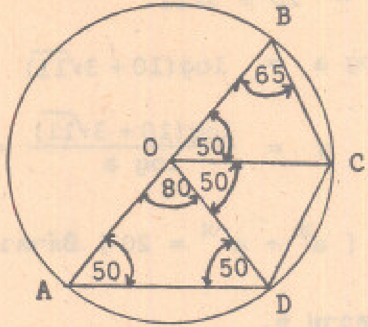
$$\hat{A} - 2x - 2y = -180$$

จาก (1) ; $\hat{A} - 2(x+y) = -180$

$$\hat{A} - 2(130) = -180$$
$$\hat{A} = 80$$

4. ตอบ 3

แนวคิด



Δ AOD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $O\hat{D}A = 50$ และ $A\hat{O}D = 80$

เพราะว่า $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CD})$

เพราะฉะนั้น $B\hat{O}C = C\hat{O}D = \dfrac{180-80}{2} = 50$

Δ OBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $O\hat{B}C = O\hat{C}B$

เพราะฉะนั้น $O\hat{B}C = \dfrac{180-50}{2} = 65$

5. ตอบ 2 และ 3

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

$$a^x + a^{-x} = 20$$

$$a^{2x} + 1 = 20a^x$$

$$(a^x)^2 - 20a^x + 1 = 0$$

$$a^x = \frac{20 \pm \sqrt{400-4(1)(1)}}{2}$$

$$= \frac{20 \pm \sqrt{396}}{2}$$

$$= 10 \pm \sqrt{99}$$

$$= 10 + 3\sqrt{11} \ , \ 10 - 3\sqrt{11}$$

จาก $a^x = 10 + 3\sqrt{11}$

$$x \log a = \log(10 + 3\sqrt{11})$$

$$x = \frac{\log(10+3\sqrt{11})}{\log a} = \frac{\log(10+3\sqrt{11})}{\log 1.03}$$

สรุป $\exists x\,[\, a^x + a^{-x} = 20\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

พิจารณาข้อความ ข.

เพราะว่า $a^x - a^{-x} = 0$

$$a^x = a^{-x}$$

$$x = -x$$

$$x = 0$$

ซึ่งจะทำให้ $a^0 + a^{-0} = 1 + 1 = 2$

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[\, a^x - a^{-x} = 0 \rightarrow a^x + a^{-x} = 0\,]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

6. **ตอบ** 3

แนวคิด เพราะว่า $3x^2-13x+4 = (3x-1)(x-4)$ เป็นตัวประกอบของ $3x^2+ax^2+bx-8$

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $(3x-1)(x-4) = 0$

ซึ่งคือ $x = \frac{1}{3}$ และ 4 ต้องเป็นรากของสมการ $3x^3+ax^2+bx-8 = 0$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $x = \frac{1}{3}$ จะได้

$$3(\tfrac{1}{3})^3 + a(\tfrac{1}{3})^2 + b(\tfrac{1}{3}) - 8 = 0$$

$$\frac{1}{9} + \frac{a}{9} + \frac{b}{3} - 8 = 0$$

$$1 + a + 3b - 72 = 0$$
$$a + 3b = 71 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

แทนค่า $x = 4$ จะได้

$$3(4)^3 + a(4)^2 + b(4) - 8 = 0$$
$$192 + 16a + 4b - 8 = 0$$
$$16a + 4b = -184$$
$$4a + b = -46 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a = -19$ และ $b = 30$

เพราะฉะนั้น $a+b = 11$

วิธีลัด ให้ $(Ax+B)$ เป็นตัวประกอบที่ทำให้

$$(3x^2-13x+4)(Ax+B) = 3x^3+ax^2+bx-8$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x^3 และค่าคงตัวจะได้

$$3A = 3 \text{ และ } 4B = -8$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$ และ $B = -2$

ดังนั้น $3x^3 + ax^2 + bx - 8 = (3x^3-13x+4)(x-2)$

และเมื่อ $x = 1$ จะได้

$$3 + a + b - 8 = (3 - 13 + 4)(1 - 2)$$
$$a + b - 5 = 6$$
$$a + b = 11$$

7. **ตอบ** 3

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

สมมติมี f ที่ทำให้ $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}}$

$$1 + \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x)}$$

$1 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น ก. ผิด

พิจารณาข้อความ ข.

เพราะว่า $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{f(x)}}$

เพราะฉะนั้นเราเลือก $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}$ จะเป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไขที่ต้องการ

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ถูกต้อง

8. **ตอบ** 4

แนวคิด พิจารณาเทอมทั่วไป $A^2 + \dfrac{1}{A^2} = 7$

จะได้ $\left(A^2 + \dfrac{1}{A^2}\right)^2 = 49$

$$A^4 + 2 + \frac{1}{A^4} = 49$$

$$A^4 + \frac{1}{A^4} = 47$$

$$\left(A + \frac{1}{A}\right)^2 = A^2 + 2 + \frac{1}{A^2}$$

$$= 9$$

เพราะฉะนั้น $A + \dfrac{1}{A} = 3$

จากสูตรการกระจาย $a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$

ดังนั้น

$$A^5 + \frac{1}{A^5} = (A + \frac{1}{A})(A^4 - A^3.\frac{1}{A} + A^2.\frac{1}{A^2} - A.\frac{1}{A^3} + \frac{1}{A^4})$$

$$= (A + \frac{1}{A})(A^4 - A^2 + 1 - \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A^4})$$

$$= (A + \frac{1}{A})(A^4 + \frac{1}{A^4} + 1 - (A^2 + \frac{1}{A^2}))$$

$$= (3)(47+1-7)$$

$$= 123$$

กำหนดให้ $A = x+1$

จะได้ $(x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1) + \frac{1}{(x+1)^5}$

$$= (x+1)^5 + \frac{1}{(x+1)^5}$$

$$= 123$$

9. ตอบ 4

แนวคิด โจทย์ข้อนี้ขอให้สังเกตวิธีทำต่อไปนี้แล้วลองดูว่า ผิดที่ใด ด้วยเหตุผลอย่างไร

ให้ $A = \tan^{-1}2$ และ $B = \tan^{-1}3$

จะได้ $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$

$$\tan (A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2 + 3}{1 - (2)(3)}$$

$$= -1$$

เพราะฉะนั้น $A+B = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$

ถ้าเราเลือกคำตอบว่า $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = -\frac{\pi}{4}$ จะผิดทันที

การทำโจทย์ทำนองนี้ต้องระวังเรื่องเหตุผลเกี่ยวกับกับโดเมนและเรนจ์

เนื่องจาก $\tan^{-1} : (-\infty,\infty) \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

และ $\tan^{-1}2 \in (0, \frac{\pi}{2})$

และ $\tan^{-1}3 \in (0, \frac{\pi}{2})$

ดังนั้น $0 < \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 < \pi$ นั่นคือ $0 < A+B < \pi$

เพราะว่า $\tan(A+B) = -1$ และ $0 < A+B < \pi$

เพราะฉะนั้น $A+B$ ต้องเท่ากับ $\frac{3\pi}{4}$

วิธีลัด ในการทำข้อสอบถ้าเราจำได้ว่า

$$\tan^{-1}2 > 0 \text{ และ } \tan^{-1}3 > 0$$

จะทำให้ $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 > 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1 และ 2 ตัดทิ้งได้

ส่วนตัวเลือกที่เหลือต้องเดาแล้ว

10. **ตอบ** 3

แนวคิด ให้ $k = x^2+2x-3$ ดังนั้น

$$x^2\log_5 k - x\log_{\frac{1}{5}} k = x^2+x$$

$$x^2\log_5 k + x\log_5 k = x^2+x$$

$$(x^2+x)(\log_5 k) = x^2+x$$

$$(x^2+x)(1-\log_5 k) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x^2+x = 0$ หรือ $\log_5 k = 1$

กรณี $x^2+x = 0$ จะได้ $x = 0,-1$

กรณี $\log_5 k = 1$ จะได้ $k = 5$

$$x^2+2x-3 = 5$$

$$x^2+2x-8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4,2$$

เพราะว่า x^2+2x-3 ต้องมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น $x = 0$ หรือ $x = -1$ ไม่ได้

ดังนั้น $A = \{-4,2\}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกของ A เท่ากับ 6

11. **ตอบ** 2

แนวคิด รูปแบบของโจทย์ข้อนี้ถ้าจำคุณสมบัติของสัดส่วน

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S} \text{ ก็ต่อเมื่อ } \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S}$$

ก็จะทำให้การหาคำตอบง่ายขึ้น

ดังนั้นจึงให้ $P = \sqrt{x+48}$, $Q = \sqrt{x}$

$R = \sqrt{x-4}$, $S = \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นจากโจทย์กำหนดให้เราจะได้ว่า

$$\frac{\sqrt{x+48}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x-4}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{x+48}{x} = \frac{x-4}{3}$$

$$3x+144 = x^2-4x$$

$$x^2-7x-144 = 0$$

$$(x-16)(x+9) = 0$$

$$x = 16 \text{ หรือ } x = -9$$

เพราะว่า $R = \sqrt{x-4}$ ดังนั้น $x \neq -9$ สรุป $x = 16$ เท่านั้น

หมายเหตุ 1. แนวคิดข้างต้นเป็นวิธีลัดแล้ว มิฉะนั้นต้องทำการคูณไขว้, ยกกำลังสองทั้งสองข้าง, จัดรูป ซึ่งจะเป็นเรื่องยุ่งยากและเสียเวลามาก

2. คุณสมบัติสัดส่วนข้างต้นแสดงได้ดังนี้

$$\frac{P+Q}{P-Q} = \frac{R+S}{R-S}$$

$$(P+Q)(R-S) = (R+S)(P-Q)$$

$$PR-PS+QR-QS = PR-QR+PS-QS$$

$$2PS = 2QR$$

$$PS = QR$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{R}{S}$$

12. ตอบ 3

แนวคิด $2^{3\log_2 6} = 2^{\log_2 6^3} = 6^3 = 216$

ดังนั้น $A = \frac{648}{216} = 3$

และ $\frac{2^{3\log_2 6}}{A} = \frac{216}{3} = 72$

13. **ตอบ** 2

แนวคิด

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$1 = f(a) = \log(a + \sqrt{1+a^2})$$

$$a + \sqrt{1+a^2} = 10$$

$$\sqrt{1+a^2} = 10-a$$

$$1+a^2 = 100-20a+a^2$$

$$20a = 99$$

$$a = \frac{99}{20}$$

วิธีลัด ใช้ค่าในตัวเลือกแทนค่า

4. $f(0) = \log(1) = 0 \neq 1$

3. $f(1) = \log(1+\sqrt{2}) \neq 1$

2. $f(\frac{99}{20}) = \log(\frac{99}{20} + \sqrt{1 + (\frac{99}{20})^2}) = 1$

1. $f(\frac{101}{20}) = \log(\frac{101}{20} + \sqrt{1 + (\frac{101}{20})^2}) \neq 1$

ดังนั้นเราเลือก $a = \frac{99}{20}$

14. **ตอบ** 2

แนวคิด

$$2 - \frac{1}{2+1} = \frac{2^2+2-1}{2+1} = \frac{2^2+1}{2+1}$$

$$2 - \frac{1}{2^2+1} = \frac{2^3+2-1}{2^2+1} = \frac{2^3+1}{2^2+1}$$

$$2 - \frac{1}{2^8+1} = \frac{2^9+2-1}{2^8+1} = \frac{2^9+1}{2^8+1}$$

เพราะฉะนั้น $(2 - \frac{1}{2+1})(2 - \frac{1}{2^2+1})(2 - \frac{1}{2^3+1}) \ldots (2 - \frac{1}{2^8+1})$

$$= (\frac{2^2+1}{2+1})(\frac{2^3+1}{2^2+1})(\frac{2^4+1}{2^3+1}) \ldots (\frac{2^9+1}{2^8+1})$$

$$= \frac{2^9+1}{3} = \frac{513}{3} = 171$$

15. ตอบ 4

แนวคิด

$$3^{x-6} = 2^{x-3} \cdot 3^{-x}$$

$$3^{2x-6} = 2^{x-3}$$

$$(3^2)^{x-3} = 2^{x-3}$$

$$9^{x-3} = 2^{x-3}$$

เพราะฉะนั้น $x-3 = 0$ นั่นคือ $x = 3$ หรือ $A = \{3\}$

พิจารณาเซตคำตอบของตัวเลือก

1. $\{x \mid \log (x-2) < 0\} = (2,3)$
2. $\{x \mid \log (x+2) < -1\} = (-2,-\frac{19}{10})$
3. $\{x \mid \log (x-1) < 0\} = (1,2)$
4. $\{x \mid \log (x+1) < 1\} = (-1,9)$

เพราะฉะนั้น A เป็นสับเซตของเซตคำตอบในตัวเลือก 4

วิธีลัด เมื่อได้ $x = 3$ เราเอาไปแทนค่าจะทำให้ได้ตัวเลือกเร็วกว่า

1. $\log(3-2) = \log 1 = 0 \nless 0$

2. $\log(3+2) = \log 5 = 0.699 \nless -1$

3. $\log(3-1) = \log 2 = 0.301 \nless 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1, 2 และ 3 ตัดทิ้งได้

ลองคิดตัวเลือก 4 $\log(3+1) = \log 4 = 0.603 < 1$ เป็นจริง

หมายเหตุ ค่า $\log 2 = 0.301$ ข้อสอบมีให้แล้วอยู่ที่ข้อ 7 ตอนที่ 2

16. **ตอบ** 3

แนวคิด

$$(f^{-1} \circ g)(x) = 3x^2-5$$

$$f((f^{-1} \circ g)(x)) = f(3x^2-5)$$

$$g(x) = (3x^2-5)+2$$

$$= 3x^2-3$$

เพราะฉะนั้น

$$g(x) < 0$$

$$3x^2-3 < 0$$

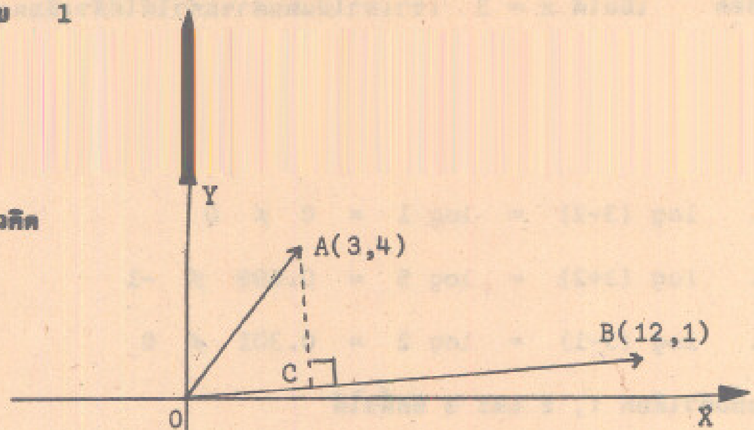
$$x^2-1 < 0$$

$$(x+1)(x-1) < 0$$

$$-1 < x < 1$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(-1,1)$

17. ตอบ 1



แนวคิด

สมการเส้นตรงที่ผ่าน OB คือ $y = \frac{x}{12}$

เพราะว่า $AC \perp OB$ เพราะฉะนั้นความชัน AC เท่ากับ -12

สมการเส้นตรงที่ผ่าน AC คือ $y-4 = (-12)(x-3)$

แทนค่า $y = \frac{x}{12}$; $\frac{x}{12} - 4 = -12x + 36$

$$x - 48 = -144x + 432$$

$$145x = 480$$

$$x = \frac{8}{29}(12)$$

เพราะฉะนั้น $y = \frac{8}{29}$

ดังนั้นพิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{96}{29}, \frac{8}{29}\right)$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OC}$ คือ $\frac{8}{29}(12\bar{i} + \bar{j})$

หมายเหตุ เมื่อได้ $x = \frac{8}{29}(12)$ เราก็เลือกคำตอบเป็นข้อ 1. ได้แล้ว

วิธีลัด 1 โดยการเขียนภาพและวัดพิกัดของ C(x,y) ด้วยไม้บรรทัด หรือสังเกตจากรูปก็ได้จะพบว่า $y < 1$

ดูที่ตัวเลือกบ้าง

1. $y = \frac{8}{29} < 1$

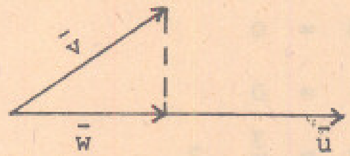
2. $y = \frac{29}{8} > 1$ ตัวเลือกนี้จึงตัดทิ้งได้

3. $y = \frac{40}{147} < 1$

4. $y = \frac{147}{40} > 1$ ตัวเลือกนี้จึงตัดทิ้งได้

เดาจากตัวเลือก 1. หรือ 3. ก็ยังดี

วิธีลัด 2 ใช้สูตรของภาพฉายของเวกเตอร์



$\bar{w}$ เรียกว่า ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\bar{v}$ บน $\bar{u}$

$$\bar{w} = \frac{(\bar{u} \cdot \bar{v})}{|\bar{u}|^2} \cdot \bar{u}$$

ดังนั้นจากโจทย์ $\overrightarrow{OC} = \frac{(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OB}|^2} \cdot \overrightarrow{OB}$

$$= \frac{(3\bar{i} + 4\bar{j}) \cdot (12\bar{i} + \bar{j})}{145} \cdot (12\bar{i} + \bar{j})$$

$$= \frac{40}{145}(12\bar{i} + \bar{j})$$

$$= \frac{8}{29}(12\bar{i} + \bar{j})$$

18. **ตอบ** 3

แนวคิด ให้ $k = 2x^2-7x+7$

จากสมการ $2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}$

$$2x^2-7x+3 = 3\sqrt{2x^2-7x+7}$$

$$2x^2-7x+7-4 = 3\sqrt{k}$$

$$k-4 = 3\sqrt{k}$$

$$k^2-8k+16 = 9k$$

$$(k-16)(k-1) = 0$$

$$k = 1, 16$$

$k = 1$; $\quad 2x^2-7x+7 = 1$

$$2x^2-7x+6 = 0$$

$$(2x-3)(x-2) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}, 2$$

$k = 16$; $\quad 2x^2-7x+7 = 16$

$$2x^2-7x-9 = 0$$

$$(2x-9)(x+1) = 0$$

$$x = -1, \frac{9}{2}$$

ตรวจสอบค่า x โดยแทนค่าในสมการ $2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}$

พบว่าค่า x ที่ใช้ได้คือ $x = -1, \frac{9}{2}$

เพราะฉะนั้น $A = \{-1, \frac{9}{2}\}$ และผลบวกสมาชิกใน A เท่ากับ $\frac{7}{2}$

วิธีลัด ให้ $\quad k = \sqrt{2x^2-7x+7}$

$$k^2 = 2x^2-7x+7$$

$$2x^2-7x+3 = k^2-4$$

เพราะฉะนั้น $\quad 2x^2+3 = 7x + 3\sqrt{2x^2-7x+7}$

$$2x^2-7x+3 = 3\sqrt{2x^2-7x+7}$$

$$k^2-4 = 3k$$

$$k^2-3k-4 = 0$$

$$(k-4)(k+1) = 0$$

$$k = 4, -1$$

แต่ $k > 0$ ดังนั้น $k = 4$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น $2x^2-7x+7 = 4^2$

$$2x^2-7x-9 = 0$$

$$(2x-9)(x+1) = 0$$

$$x = \frac{9}{2}, -1$$

โดยการแทนค่าเพื่อทดสอบค่า x จะได้ $x = \frac{9}{2}$ และ $x = -1$ ใช้ได้

ดังนั้น $A = \{-1, \frac{9}{2}\}$

19.ตอบ 2

แนวคิด จากสมการ $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$

จะได้ $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$

เพราะว่าสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนตามสมการ (1)

จะมี cos C เท่ากันทุกรูป

เพราะฉะนั้น

$$\cos C = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab}$$

หาได้โดยการแทนค่า $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$

นั่นคือ $\cos C = \frac{9+4-16}{2(2)(3)} = -\frac{1}{4}$

วิธีลัด จากการที่เราทราบว่าสามเหลี่ยม ABC ที่มีสัดส่วนเป็น

$$6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$$

จะได้ $\dfrac{\sin A}{2} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{4}$

นั่นอัตราส่วนของด้าน $a : b : c = 2 : 3 : 4$

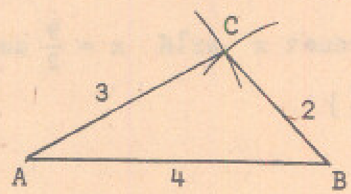
โดยการวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$

ตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 4 cm.
2. เขียนวงกลมรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ A

   เขียนวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลางที่ B

   และวงกลมตัดกันที่ C
3. โดยการวัดมุมโดยประมาณจะได้ $\hat{C} \cong 104°$



เพราะฉะนั้น $\cos\hat{C} < 0$ แน่นอน

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\cos 104° = -\sin 14°$

และ $\sin 30° > \sin 14°$

นั่นคือ $-\sin 30° < -\sin 14°$

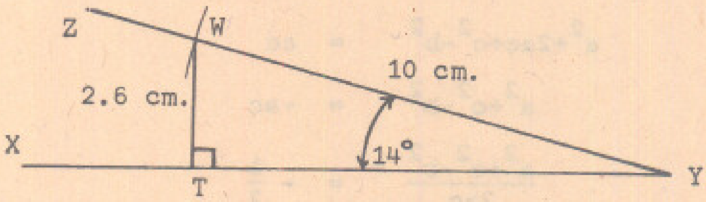
$$-(\tfrac{1}{2}) < \cos 104°$$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

หมายเหตุ สร้างสามเหลี่ยมมุมฉากตามขั้นตอน

1. ลาก XY
2. เขียน ZY ทำมุม 14° กับ XY
3. เขียนวงกลมรัศมี 10 cm. จุดศูนย์กลางที่ Y ตัด YZ ที่ W
4. ลาก WT ตั้งฉากกับ XY
5. วัดความยาว WT ได้ 2.6 cm.



เพราะฉะนั้น $\sin 14^\circ = \dfrac{2.6}{10} = 0.26$

$\cos C = -\sin 14^\circ = -0.26$

สรุปเลือกคำตอบเป็นข้อ 3. ดีที่สุด

20. ตอบ 4

แนวคิด $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5 - 2\sqrt{20} + 4} = \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2}$

$= \sqrt{5} - \sqrt{4} = \sqrt{5} - 2$

$$\sqrt{11 + \sqrt{45} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}} = \sqrt{11 + \sqrt{45} + \sqrt{5} - 2}$$

$$= \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5 + 2\sqrt{20} + 4}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{5} + \sqrt{4})^2}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{4}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{5} + \sqrt{4}$

เพราะว่า $a > b$ เพราะฉะนั้น $a = 5$ และ $b = 4$

สรุป $2a^2+b = 2(25)+4 = 54$

21. ตอบ 3

แนวคิด

$$(a-b+c)(a+b+c) = ac$$

$$a^2+2ac+c^2-b^2 = ac$$

$$a^2+c^2-b^2 = -ac$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos B = -\frac{1}{2}$$

$$B = 120^\circ$$

วิธีลัด ถึงแม้เราลืมสูตร $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ก็ยังมีแนวทางอื่นที่จะหา มุม B ได้ดังนี้

เลือก $a = 4$, $c = 5$ จะได้

$$(4-b+5)(4+b+5) = 20$$

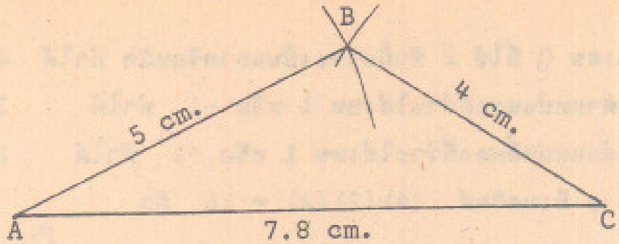
$$(9-b)(9+b) = 20$$

$$81+b^2 = 20$$

$$b^2 = 61$$

$$b = \sqrt{61} \cong 7.8$$

ต่อไปวาดรูปสามเหลี่ยม $a = 4$, $b = 7.8$ และ $c = 5$



วัดมุม B จากรูปสามเหลี่ยมจะได้ $B = 120°$

ดังนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

22. **ตอบ** 3

แนวคิด $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in \{-1,0,1\} \right\}$

$$n(M) = (3)(3)(3)(3) = 81$$

$$X = \{A \in M \mid \det A \neq 0\}$$

$$X' = \{A \in M \mid \det A = 0\}$$

การนับจำนวนสมาชิกของ X

วิธีที่ 1 จำแนกเป็น 4 กรณีดังนี้

กรณีที่ 1 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 4 ตัว 1 วิธี

กรณีที่ 2 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 3 ตัว เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ใส่เลข 0 ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกตัวเลข 1 หรือ -1 ใส่ตำแหน่งที่ว่างทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 2 มีเมตริกซ์ (4)(2) = 8 ตัว

กรณีที่ 3 มีเลข 0 ในเมตริกซ์ 2 ตัว เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ขั้นที่ 1 เลข 0 ที่ใช้ 2 ตัวนั้นวางเป็นแถวหรือหลัก ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 ตำแหน่งแรกที่ว่างใส่เลข 1 หรือ -1 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 ตำแหน่งที่สองที่ว่างใส่เลข 1 หรือ -1 ทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 3 มีเมตริกซ์ (4)(2)(2) = 16 ตัว

<u>กรณีที่ 4</u> ไม่มีเลข 0 ในเมตริกซ์ซึ่งมีทั้งหมด 8 ตัวคือ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

สรุปจากทั้ง 4 กรณี $n(X') = 1+8+16+8 = 33$

เพราะฉะนั้น $n(X) = 81-33 = 48$

วิธีที่ 2 เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = ad-bc$

ดังนั้น $ad-bc = 0$ ก็ต่อเมื่อ $ad = bc$

เพราะฉะนั้นเราสามารถนับจำนวนสมาชิกของ X' โดยจำแนกตามกรณีของ $ad = bc$

<u>กรณีที่ 1</u> $ad = bc = 0$

<u>กรณีที่ 1.1</u> ใช้เลข 0 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

<u>กรณีที่ 1.2</u> ใช้เลข 0 จำนวน 3 ตัว

ขั้นที่ 1 เลือกตำแหน่งที่ไม่เป็น 0 ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 1 หรือ -1 ใส่ตำแหน่งที่ไม่เป็นศูนย์ ทำได้ 2 วิธี

สรุปกรณีที่ 1.2 ทำได้ (4)(2) = 8 วิธี

<u>กรณีที่ 1.3</u> ใช้เลข 0 จำนวน 2 ตัว

ขั้นที่ 1 $a = 0$ หรือ $d = 0$ ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 $b = 0$ หรือ $c = 0$ ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 ตำแหน่งที่เหลือ 2 ตำแหน่งเป็น 1 หรือ -1

ทำได้ $(2)(2) = 4$ วิธี

สรุปกรณีที่ 1.3 ทำได้ $(2)(2)(4) = 16$ วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 ทำได้ $1+8+16 = 25$ วิธี

<u>กรณีที่ 2</u> $ad = bc = 1$

<u>กรณีที่ 2.1</u> ใช้เลข 1 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

<u>กรณีที่ 2.2</u> ใช้เลข -1 จำนวน 4 ตัว ทำได้ 1 วิธี

<u>กรณีที่ 2.3</u> ใช้เลข -1 และ 1 อย่างละ 2 ตัว

เลข -1 สองตัวนั้นอยู่ทางด้านซ้ายหรือขวาของ

$ad = bc$

ทำได้ 2 วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 2 มี $1+1+2 = 4$ วิธี

<u>กรณีที่ 3</u> $ad = bc = -1$

กรณีต้องใช้เลข 1 สองตัวและเลข -1 สองตัว

ขั้นที่ 1 a เลือกค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 d เลือกค่าได้ 1 วิธีเท่านั้น

ขั้นที่ 3 b เลือกค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 c เลือกค่าได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นกรณีที่ 3 มีวิธีทั้งหมด $(2)(1)(2)(1) = 4$ วิธี

จากทั้ง 3 กรณีจะทำได้ทั้งหมด $(25)+(4)+(4) = 33$ วิธี

สรุป $n(X') = 33$

$n(X) = 81-33 = 48$

23. ตอบ 2

แนวคิด $U = \{1,2,3,...,65\}$

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) = 1\}$

$X' = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,65) \neq 1\}$

เพราะว่า $65 = 5 \cdot 13$ เพราะฉะนั้นตัวเลข x ที่ ห.ร.ม.(x,65) ≠ 1 คือตัวเลข x ที่ 5 หาร x ลงตัว หรือตัวเลข x ที่ 13 หาร x ลงตัว

$A = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{5,10,15,...,65\}$

$\sum_{y \in A} y = 455$

$B = \{x \in U \mid 13 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{13,26,39,52,65\}$

$\sum_{y \in B} y = 195$

$A \cap B = \{65\}$

เพราะฉะนั้น $X' = A \cup B$

$$\sum_{y \in X'} y = \sum_{y \in A \cup B} y = \sum_{y \in A} y + \sum_{y \in B} y - \sum_{y \in A \cap B} y$$

$$= 455 + 195 - 65$$

$$= 585$$

เพราะว่า $\sum_{y \in U} y = 1 + 2 + ... + 65 = 2145$

เพราะฉะนั้น $\sum_{x \in X} x = 2145 - 585 = 1560$

24.ตอบ 1

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$\det(A - xI_3) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} - x\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 3 \\ 5 & 4-x & 0 \\ 3 & 4 & -6-x \end{bmatrix}\right)$$

$$= (1-x)\left[(4-x)(-6-x)\right] + 3\left[20-3(4-x)\right]$$

$$= -24+2x+x^2+24x-2x^2-x^3+60-36+9x$$

$$= 35x-x^2-x^3$$

พิจารณาสมการ $x^3+x^2-35x = 0$

$$x(x^2+x-35) = 0$$

$$x = 0, \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-35)}}{2}$$

$$= 0, \frac{-1+\sqrt{141}}{2}, \frac{-1-\sqrt{141}}{2}$$

เพราะฉะนั้นผลบวกของคำตอบของสมการ $\det(A-xI_3) = 0$ **คือ** -1

วิธีลัด 1 พิจารณาในลักษณะของสูตรทั่วไป

ให้ $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$ เป็นรากของสมการ และ

$$(x+x_1)(x+x_2)\ldots(x+x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x +$$

จะได้ว่า $a_n = x_1x_2\ldots x_n$

$a_1 = x_1+x_2+\ldots+x_n$

ดังนั้นจากสมการ $x^3+x^2-35x = 0$

เราสรุปได้เลยว่า ผลบวกของราก $(-x_1)+(-x_2)+(-x_3) = -a_1 = -1$

วิธีลัด 2 คำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$

เรียกว่าค่าเจาะจงของเมตริกซ์ A

ถ้า x_1, x_2, x_3 เป็นค่าเจาะจงของ A

และ $\det(A - xI_3) = a_3 + a_2x + a_1x^2 + x^3$

แล้วจะได้ว่า

(1) ผลคูณของราก $x_1x_2x_3 = \det A$

(2) ผลบวกของราก

$x_1+x_2+x_3 = a_1 =$ ผลบวกแนวทแยงมุมของเมตริกซ์

เพราะฉะนั้นจากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

เราสามารถตอบได้ว่าผลบวกของรากคือ $(1)+(4)+(-6) = -1$

25. ตอบ 3

แนวคิด เพราะว่า $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, ... , $f(n+1) = 0$

เพราะฉะนั้น $2,3,4,...,n+1$ **เป็นรากของสมการ** $f(x) = 0$

ดังนั้น $f(x) = (x-2)(x-3)(x-4)...(x-(n+1))$

สรุป $f(1) = (1-2)(1-3)(1-4)...(1-(n+1))$

$= (-1)(-2)(-3)...(-n)$

$= (-1)^n(1)(2)(3)...(n)$

$= (-1)^n n!$

วิธีลัด $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$

เป็นพหุนามดีกรี n **มีรากทั้งหมด** n **ตัว ตามโจทย์กำหนดคือ**

$2,3,4,...,n+1$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$ **ไม่ได้อีกแล้ว**

ด้วยเหตุผลเพียงเท่านี้ก็จะตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปได้

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ 10 ข้อ

1. **ตอบ** 5

แนวคิด $s^2 = \dfrac{\Sigma x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2$

$$= \frac{(1)^2(5)+(2)^2(n)}{5+n} - \left[\frac{(1)(5)+(2)(n)}{5+n}\right]^2$$

$$= \frac{5+4n}{5+n} - \left(\frac{5+2n}{5+n}\right)^2$$

$$= \frac{(5+4n)(5+n) - (5+2n)^2}{(5+n)^2}$$

$$= \frac{25+25n+4n^2-25-20n-4n^2}{(5+n)^2} = \frac{5n}{(5+n)^2}$$

เพราะฉะนั้น $s = \dfrac{\sqrt{5n}}{5+n}$

โดยการลองแทนค่า $n = 1,2,3,4,...$

จะได้ $n = 5$ **เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่ทำให้** s **เป็นจำนวนตรรกยะ**

2. **ตอบ** $n = 16$, $a_0 = 4$ **และ** $a_{16} = 1$, $a_{16} + a_0 = 5$

แนวคิด $\log 2^{54} = 54 \log 2 = 54(0.301) = 16.254$

เพราะฉะนั้น $10^{16} < 2^{54} < 10^{17}$

$$1 < \frac{2^{54}}{10^{16}} < 10$$

เพราะว่า $2^{54} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$

และ $1 \leqslant a_n \leqslant 9$

เพราะฉะนั้น $n = 16$ และ

$$1 < a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \frac{a_{14}}{10^2} + \dots + \frac{a_1}{10^{15}} + \frac{a_0}{10^{16}} < 10$$

เพราะว่า $\log 2^{54} = 16.254$

และ $$2^{54} = 10^{16}\left[a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \dots + \frac{a_0}{10^{16}}\right]$$

เพราะฉะนั้น $$\log \left(a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \dots + \frac{a_0}{10^{16}} \right) = 0.254$$

นั่นคือ $$0 \leqslant \log \left(a_{16} + \frac{a_{15}}{10} + \dots + \frac{a_0}{10^{16}}\right) < \log 2$$

ซึ่งเป็นได้กรณีเดียวคือ $a_{16} = 1$

เพราะว่า $2^4 = 16$

และ $2^{54} = 2^{4(13)+2} = (2^4)^{13}(2^2) = (16)^{13}(4)$

เนื่องจาก $(16)^{13}$ จะมีหลักหน่วยเป็น 6

ดังนั้น 2^{54} จะมีหลักหน่วยเป็น 4

สรุป $a_0 = 4$

3. ตอบ 192

แนวคิด จำแนกเป็น

กรณีที่ 1 จำนวนเต็ม 1 หลัก ไม่มีการใช้เลข 0

กรณีที่ 2 จำนวนเต็ม 2 หลัก 10,11,...,99

มีการใช้เลข 0 จำนวน 9 ตัวเพื่อเขียน 10,20,30,...,90

กรณีที่ 3 จำนวนเต็ม 3 หลัก 100,101,102,...,999

กรณีที่ 3.1 จำนวน 0 ในหลักหน่วย $\square\ \square\ \boxed{0}$

ขั้นที่ 1 หลักสิบเขียนตัวเลขได้ 10 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักร้อยเขียนตัวเลขได้ 9 วิธี

รวมวิธีทั้งหมด (10)(9) = 90 วิธี

กรณีที่ 3.2 จำนวน 0 ในหลักสิบ $\square\ \boxed{0}\ \square$

ขั้นที่ 1 หลักหน่วยเขียนเลขได้ 10 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักร้อยเขียนเลขได้ 9 วิธี

รวมวิธีทั้งหมด (10)(9) = 90 วิธี

รวมกรณีที่ 3 มีการใช้เลขศูนย์ 90+90 = 180 ตัว

<u>กรณีที่ 4</u> เลขศูนย์ 3 ตัวจาก 1000

สรุปจำนวนเลขศูนย์ที่ต้องใช้เท่ากับ 9+180+3 = 192

4.ตอบ 21

แนวคิด เพราะว่า $f(x+y) = f(x) + f(y)$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ ต้องมีสูตรเป็น $f(x) = kx$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ต่อไปเราจะใช้เงื่อนไข (ii) เพื่อหาค่า k ที่เป็นไปได้

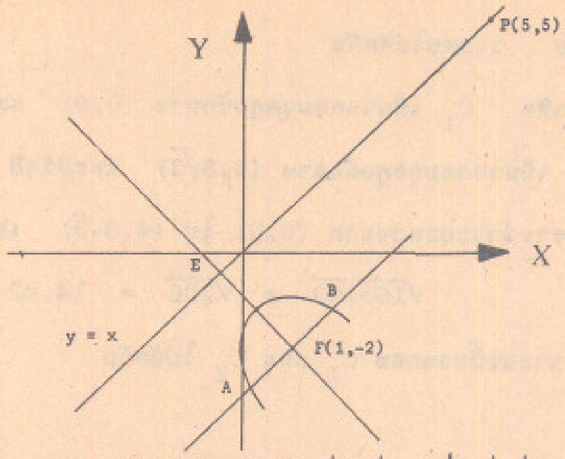
$$\begin{aligned}(f \circ f)(1) &= f(f(1)) \\ &= f(k) \\ &= k^2\end{aligned}$$

พิจารณา $k^2 \leq 100$ จะได้ $k = -10,-9,\ldots,-1,0,1,2,\ldots,10$

เพราะฉะนั้น $f(x) = kx$ มีได้ทั้งหมด 21 ฟังก์ชัน

5. ตอบ 4.5

แนวคิด



เพราะว่าความยาวของเส้นเรคัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$ เมื่อ $|c|$ เป็นระยะทางจากจุดโฟกัส F ไปยังจุดยอดของพาราโบลา

ให้ E เป็นจุดตัดของแกนพาราโบลากับเส้นตรง L

ความยาวของ EF เท่ากับ $\dfrac{|(1)(1) - (1)(-2)|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $|c| = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{3}{2\sqrt{2}}$

ดังนั้นความยาว AB เท่ากับ $4\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}\right) = 3\sqrt{2}$

เพราะว่า P อยู่บนเส้นตรง L ดังนั้นส่วนสูงของสามเหลี่ยม ABP เมื่อให้ AB เป็นฐานเท่ากับความยาว EF ซึ่งเท่ากับ $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

สรุปพื้นที่สามเหลี่ยม ABP $= \dfrac{1}{2}(3\sqrt{2})\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{9}{2} = 4.5$

6. ตอบ วงกลมไม่ตัดกัน

แนวคิด C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (0,0) และมีรัศมี 5

C_2 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง $(4,8\sqrt{3})$ และมีรัศมี 5

เพราะว่าระยะทางจาก (0,0) ไป $(4,8\sqrt{3})$ เท่ากับ

$$\sqrt{16+192} = \sqrt{208} = 14.42 > 10$$

เพราะฉะนั้นวงกลม C_1 และ C_2 ไม่ตัดกัน

7. ตอบ 106

แนวคิด
$$5^{-10} < 3^n < 5$$
$$\log (5^{-10}) < \log 3^n < \log 5$$
$$(-10) \log 5 < n \log 3 < \log 5$$
$$(-10)(1 - \log 2) < n(0.4771) < 1 - \log 2$$
$$(-10)(0.699) < n(0.4771) < 0.699$$
$$\frac{(-10)(0.699)}{0.4771} < n < \frac{0.699}{0.4771}$$
$$-14.65 < n < 1.465$$

เพราะฉะนั้น $X = \{-14,-13,-12,...,-1,0,1\}$

ผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของสมาชิกในเซต X เท่ากับ

$$= (14)+(13)+...+(1)+(0)+(1)$$
$$= 106$$

8. ตอบ 45

แนวคิด
$$\tan^{-1}\frac{1}{3} = \tan^{-1}\frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2}$$
$$= \tan^{-1}\frac{3}{4}$$
$$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{3}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$$
$$= \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-(\frac{3}{4})(\frac{1}{7})}$$
$$= \tan^{-1}1$$
$$= \frac{\pi}{4}$$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\frac{180a}{\pi} = \frac{180}{\pi}(\frac{\pi}{4}) = 45$

9. ตอบ $(-\frac{1}{2}, 3]$

แนวคิด พิจารณาเซต A จาก $3x^2+5x+2 < 0$
$$(3x+2)(x+1) < 0$$
$$-1 < x < -\frac{2}{3}$$

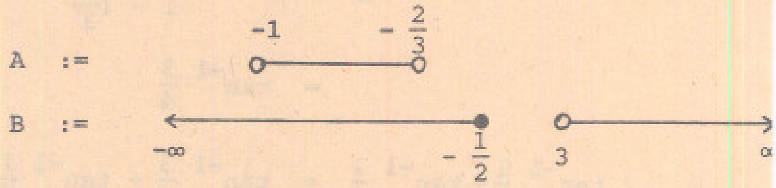
เพราะฉะนั้น $A = (-1,-\frac{2}{3})$

พิจารณาเซต B จาก $\frac{2x+1}{x-3} \geqslant 0$

จะได้ $x \leqslant -\frac{1}{2}$ หรือ $x > 3$

เพราะฉะนั้น $B = (-\infty,-\frac{1}{2}] \cup (3,\infty)$

พิจารณาเส้นจำนวนจริง



$A \cup B = (-\infty,-\frac{1}{2}] \cup (3,\infty)$

เพราะฉะนั้น $(A \cup B)' = (-\frac{1}{2},3]$

10. **ตอบ** 49

แนวคิด $7^0 = 1 \quad 7^1 = 7 \quad 7^2 = 49$

$7^3 = 343 \quad 7^4 = 2401$

เพราะว่า จำนวนเต็มที่ลงท้ายด้วย 01 เมื่อยกกำลังด้วยจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ที่ได้ต้องลงท้ายด้วย 01 เสมอ

เพราะฉะนั้น $(7^4)^k = (2401)^k$ ลงท้ายด้วย 01 ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
7^{2538} &= 7^{4(634)+2} \\
&= (7^4)^{634}\, 7^2 \\
&= (\ldots 01)(49) \\
&= (\ldots 49)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $7^{2538} = 100x + r$

จะได้ว่า r คือเศษเหลือที่เกิดจากการหาร 7^{2538} ด้วย 100

สรุป $r = 49$

ข้อสอบแข่งขัน
คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี พ.ศ. 2536
วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 7 สิงหาคม 2536 เวลา 9.00 - 11.00 น.

แบบทดสอบฉบับที่ 1 มีข้อสอบทั้งหมด 12 ข้อ

ข้อละ 5 คะแนน รวม 60 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ $A = I^{+} \cup \{0\} = \{0,1,2,3,...\}$

   และให้ $f : A \longrightarrow A$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

   ก. $f(1) > 0$

   ข. $f(m^2+n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2$ ทุกๆ $m,n \in A$

   จงหาค่า $f(3)$

2. จงหาคำตอบ x ทั้งหมดของสมการ

   $$\sin(\ln x) + \sin(\ln x^2) + \sin(\ln x^3) = 0$$

3. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $F_n = 2^{2^n} + 1$

   จงแสดงว่า ถ้า $m > n$ แล้ว F_n หาร $F_m - 2$ ลงตัว

4. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า x,y,z เป็นจำนวน 3 จำนวน ที่ต่างกันทั้งหมด และสอดคล้องสมการต่อไปนี้

$$y^3+z^3+a(y^2+z^2) = z^3+x^3+a(z^2+x^2) = x^3+y^3+a(x^2+y^2)$$

จงแสดงว่า $x+y+z+a = 0$

5. กำหนดให้

$$A_1 = \{1\}$$

$$A_2 = \{3,5,7\}$$

$$A_3 = \{9,11,13,15,17\}$$

และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้ A_n เป็นเซตของจำนวนคี่ $2n-1$ จำนวนซึ่งเรียงต่อจากจำนวนที่ใหญ่ที่สุดของ A_{n-1}

จงหาจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $2\cdot10^6+1 \in A_m$

6. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่าไม่มีพหุนาม f(x) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และสอดคล้อง $f(1) = p$, $f(p) = p+1$, $f(p+1) = p+3$

7. ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้มี x เป็นคำตอบของสมการ

$$(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = a$$

แล้ว จงแสดงว่า $\frac{\pi^3}{32} \leqslant a \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$

8. จงหาจำนวนคำตอบทั้งหมดของสมการ

$$x = 100\left(|\sin (x-5)| + \frac{1}{20}\right)$$

9. จงหาจำนวนเต็มที่เรียงกัน 11 จำนวน ที่ผลบวกของกำลังสองของทุกจำนวน สามารถเขียนให้อยู่ในรูป m^2 โดยที่ m เป็นจำนวนเต็ม

10. กำหนดให้ $|x| < 1$, $|y| < 1$, $|z| < 1$ จงแสดงว่า

$$\frac{|x + y + z + xyz|}{|1 + xy + yz + zx|} < 1$$

11. จงแก้อสมการ $\log_{x+\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x$

12. ในสามเหลี่ยม ABC ความยาวของด้านทั้งสามสัมพันธ์กันดังนี้ $|\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2 = t\,|\overline{AB}|^2$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริง จงหาค่าของ t ที่ทำให้เส้นมัธยฐาน $\overline{AM}$ ตั้งฉากกับเส้นมัธยฐาน $\overline{BN}$

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยประจำปี 2537 (รอบที่ 2)

1. จงพิสูจน์ว่า ทุกๆ ครั้งที่เลือกจำนวนเต็มมา 3 จำนวนที่ต่างกัน จะมีจำนวนเต็ม 2 จำนวน ใน 3 จำนวนนี้เสมอเรียกว่า a,b ซึ่ง $a \neq b$ และ $a^3b - ab^3$ มี 10 เป็นตัวประกอบ

2. ให้ $\{E,F,I,N,O,R,S,T,X,Y\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ถ้า
$$\begin{array}{r} \text{F O R T Y} \\ \text{T E N}^{+} \\ \text{T E N}^{+} \\ \hline \text{S I X T Y} \end{array}$$

จงหาว่า FORTY , TEN และ SIXTY แทนจำนวนใดได้บ้าง

อ่านเฉลยได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

แบบทดสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก ฉบับที่ 2

สอบวันที่ 7 สิงหาคม 2536 เวลา 13.00 - 15.00 น.

แบบทดสอบฉบับที่ 2 มีข้อสอบทั้งหมด 4 ข้อ

ข้อละ 10 คะแนน รวม 40 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC ที่ทำให้พื้นที่ของสามเหลี่ยม PAB เท่ากับพื้นที่ของสามเหลี่ยม PAC ถ้าลาก $\overline{AP}$ ไปพบ $\overline{BC}$ ที่จุด D จงพิสูจน์ว่า D เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{BC}$

2. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $A\hat{C}B = \frac{\pi}{8}$, $|\overline{BC}| = 5$ และให้ D เป็นจุดบน $\overline{AC}$, E เป็นจุดบน $\overline{BC}$ ที่ทำให้ $E\hat{D}C = \frac{\pi}{4}$, $|\overline{EC}| = \frac{10}{3}$ และ $\frac{|\overline{AB}|}{|\overline{DE}|} = \frac{9}{8}$ จงพิสูจน์ว่า พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ $\frac{25(3\sqrt{2} - 1)}{16}$

3. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$m^2 = \underbrace{444.......4}_{n \text{ ตัว}}\underbrace{888..........8}_{n-1 \text{ ตัว}}9$$

4. จงหาฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

   (i) มี $(x-1)^{10}$ เป็นตัวประกอบ

   (ii) มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 หรือ 0 หรือ -1 เท่านั้น

   (iii) มีกำลังไม่เกิน 2^{10}

เฉลยข้อสอบแข่งขัน
คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี 2536

แบบทดสอบฉบับที่ 1

1. **ตอบ** $f(3) = 3$

แนวคิด การหาค่า $f(0)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(0) &= f(0+0) \\ &= f(0^2+0^2) \\ &= (f(0))^2 + (f(0))^2 \\ &= 2(f(0))^2 \end{aligned}$$

$$f(0) - 2(f(0))^2 = 0$$

$$f(0)(1-2f(0)) = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ถ้า $1-2f(0) = 0$ จะได้ $f(0) = \frac{1}{2} \notin A$

เพราะฉะนั้น $1 - 2f(0) \neq 0$

ดังนั้นจาก (1) จะได้ $f(0) = 0$

<u>การหาค่า $f(1)$</u>

จาก
$$\begin{aligned} f(1) &= f(1^2+0^2) \\ &= (f(1))^2 + (f(0))^2 \\ &= (f(1))^2 + 0 \end{aligned}$$

$$f(1) - (f(1))^2 = 0$$

$$f(1)(1 - f(1)) = 0$$

เพราะว่า $f(1) > 0$

เพราะฉะนั้น $1 - f(1) = 0$ นั่นคือ $f(1) = 1$

<u>การหาค่า $f(2)$</u>

จาก
$$\begin{aligned} f(2) &= f(1+1) \\ &= f(1^2+1^2) \\ &= (f(1))^2 + (f(1))^2 \\ &= 1+1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 2$

<u>การแสดงข้อพิสูจน์ว่า</u> $f(x^2) = (f(x))^2$ ทุกค่า $x \in A$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(x^2) &= f(x^2+0^2) \\ &= (f(x))^2 + (f(0))^2 \\ &= (f(x))^2 + 0 \\ &= (f(x))^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(x^2) = (f(x))^2$ ทุกค่า $x \in A$

<u>การหาค่า $f(4)$</u>

เพราะว่า
$$\begin{aligned} f(4) &= f(2^2) \\ &= (f(2))^2 \\ &= 2^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $f(4) = 4$

การหาค่า f(5)

$$f(5) = f(1+4)$$
$$= f(1^2+2^2)$$
$$= (f(1))^2 + (f(2))^2$$
$$= 1^2 + 2^2$$
$$= 5$$

การหาค่า f(3)

จาก $5^2 = 4^2 + 3^2$

$$f(5^2) = f(4^2+3^2)$$
$$(f(5))^2 = (f(4))^2 + (f(3))^2$$
$$5^2 = 4^2 + (f(3))^2$$
$$(f(3))^2 = 25 - 16 = 9$$

เพราะฉะนั้น $f(3) = 3$

วิธีลัด จากเงื่อนไขที่โจทย์ให้มาจะเห็นว่า $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไขที่ต้องการ

เพราะฉะนั้น $f(3) = 3$ เหมือนกัน

๒. **ตอบ** $\{x \mid x = e^{\frac{n\pi}{2}}$ **หรือ** $x = e^{n\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$ **เมื่อ** $n \in I\}$

แนวคิด $\sin(\ln x) + \sin(\ln x^2) + \sin(\ln x^3) = 0$ ___(1)

$$\sin(\ln x) + \sin(2\ln x) + \sin(3\ln x) = 0$$

ให้ $\theta = \ln x$

ดังนั้น $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ ________(2)

จากสูตร $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$

จะได้ $\sin\theta + \sin 3\theta = 2\sin 2\theta\cos(-\theta)$

$= 2\sin 2\theta\cos\theta$

เพราะฉะนั้นจาก (๒) จะได้

$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 2\theta = 0$

$2\sin 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta = 0$

$\sin 2\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

เพราะฉะนั้น $\sin 2\theta = 0$ หรือ $2\cos\theta + 1 = 0$

กรณีที่ ๑ $\sin 2\theta = 0$

$\sin 2\theta = \sin 0$

$2\theta = n\pi + (-1)^n(0) \quad n \in I$

$2\theta = n\pi$

$\theta = \frac{n\pi}{2}$

$\ln x = \theta = \frac{n\pi}{2}$

$x = e^{\frac{n\pi}{2}} \quad n \in I$

กรณีที่ ๒ $2\cos\theta + 1 = 0$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\theta = n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \qquad n \in I$$

$$\ln x = \theta = n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$x = e^{(n\pi \pm \frac{2\pi}{3})} \qquad n \in I$$

3. ข้อพิสูจน์ $n \in I^+$ $F_n = 2^{2^n} + 1$

ให้ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $m > n$

เพราะฉะนั้นต้องมีจำนวนเต็มบวก k ที่ $k \geqslant 1$ และ $m = n+k$

เพราะว่า $F_m = 2^{2^m} + 1$ และ $F_n = 2^{2^n} + 1$

เพราะฉะนั้น $F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = 2^{2^{n+k}} - 1$

$$= 2^{(2^n \cdot 2^k)} - 1$$

$$= \left[2^{2^n}\right]^{2^k} - 1$$

ให้ $a = 2^{2^n}$ และ $p = 2^k$

เพราะฉะนั้น $F_m - 2 = a^p - 1$ และ $F_n = a+1$

จากสูตรการแยกตัวประกอบ เมื่อ $p = 2^k$ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่

$a^p - 1 = (a+1)(a^{p-1} - a^{p-2} + a^{p-3} - a^{p-4} + \ldots - 1)$

เพราะฉะนั้น $a+1$ หาร a^p-1 ลงตัว

นั่นคือ F_n หาร $F_m - 2$ ลงตัว

สรุป ถ้า $m > n$ แล้ว F_n หาร $F_m - 2$ ลงตัว

4. **ข้อพิสูจน์**

$$y^3+z^3+a(y^2+z^2) = z^3+x^3+a(z^2+x^2)$$

$$y^3-x^3 = a(z^2+x^2)-a(y^2+z^2)$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) = a(x^2-y^2)$$

$$(y-x)(y^2+xy+x^2) = a(x-y)(x+y)$$

เพราะว่า $x \neq y$ เพราะฉะนั้น $x-y \neq 0$

ดังนั้น $y^2+xy+x^2 = -a(x+y)$ ________(1)

$$z^3+x^3+a(z^2+x^2) = x^3+y^3+a(x^2+y^2)$$

$$z^3-y^3 = a(x^2+y^2)-a(z^2+x^2)$$

$$= a(y^2-z^2)$$

$$(z-y)(z^2+zy+y^2) = a(y+z)(y-z)$$

เพราะว่า $z \neq y$ เพราะฉะนั้น $z-y \neq 0$

ดังนั้น $z^2+zy+y^2 = -a(z+y)$ ________(2)

สมการ (1) – (2) ; $xy+x^2-z^2-zy = -ax+az$

$$(x^2-z^2)+(xy-zy) = -a(x-z)$$

$$(x+z)(x-z)+y(x-z) = -a(x-z)$$

เพราะว่า $x \neq z$ เพราะฉะนั้น $x-z \neq 0$

ดังนั้น $x+z+y = -a$

สรุป $x+y+z+a = 0$

5. **ตอบ** $m = 1000$

แนวคิด $A_1 = \{1\}$, $n(A_1) = 1$

$A_2 = \{3,5,7\}$, $n(A_2) = 3$

$A_3 = \{9,11,13,15,17\}$, $n(A_3) = 5$

$A_4 = \{19,21,23,25,27,29,31\}$, $n(A_4) = 7$

$\vdots$

$n(A_k) = 2k-1$

$$
\begin{aligned}
n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) &= n(A_1)+n(A_2)+\ldots+n(A_k) \\
&= 1+3+5+\ldots+(2k-1) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(2i-1) \\
&= 2\sum_{i=1}^{k} i - \sum_{i=1}^{k} 1 \\
&= 2\left(\frac{k}{2}\right)(k+1) - k \\
&= k^2
\end{aligned}
$$

สมาชิกตัวแรกสุด (ตัวที่มีค่าน้อยที่สุด) และตัวที่มีค่ามากที่สุดของแต่ละ A_i

A_i	ค่าน้อยสุด	ค่ามากสุด	จำนวนสมาชิก	จำนวนสมาชิกสะสม
1	1	1	1	1
2	3	7	3	4
3	9	17	5	9
4	19	31	7	16
5	33	49	9	25
6	51	71	11	36
7	73	99	13	49
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$2(k-1)^2+1$	$2k^2-1$	$2k-1$	k^2
k+1	$2k^2+1$	$2(k+1)^2-1$	$2k+1$	$(k+1)^2$

ความหมายของ จำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $2\cdot 10^6+1 \in A_m$

คือ m ที่ทำให้

$$2(m-1)^2+1 \leqslant 2\cdot 10^6+1 \leqslant 2m^2-1$$

$$2(m-1)^2 \leqslant 2\cdot 10^6 \leqslant 2m^2-2$$

$$2(m-1)^2 \leqslant 2\cdot 10^6 \leqslant 2(m^2-1)$$

$$(m-1)^2 \leqslant 10^6 \leqslant m^2-1$$

พิจารณา $(m-1)^2 \leqslant 10^6$ และ $10^6 \leqslant m^2-1$

$m-1 \leqslant 10^3$ $\qquad$ $10^6+1 \leqslant m^2$

$$m \leqslant 10^3+1 \qquad\qquad 1000001 \leqslant m^2$$

$$m \leqslant 1001 \qquad\qquad 1000.0005 \leqslant m$$

เพราะฉะนั้น $1000.0005 \leqslant m \leqslant 1001$

พิจารณา $m = 1001$

จะได้ $2(m-1)^2 + 1 = 2(1001-1)^2 + 1$

$$= 2(1000)^2 + 1$$

$$= 2\cdot 10^6 + 1 \in A_{1000}$$

เพราะฉะนั้น $m = 1000$

6. **ข้อพิสูจน์**

ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ

สมมติมีพหุนาม $f(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม

และ $f(1) = p$

$f(p) = p+1$

$f(p+1) = p+3$

เพราะว่า $f(1) = p$

เพราะฉะนั้นมีพหุนาม $A(x)$ ที่ทำให้

$$f(x) = (x-1)A(x) + p \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

เพราะว่า $f(p) = p+1$

เพราะฉะนั้นมีพหุนาม $B(x)$ ที่ทำให้

$$f(x) = (x-p)B(x) + (p+1) \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

เพราะว่า $f(p+1) = p+3$

เพราะฉะนั้นมีพหุนาม $C(x)$ ที่ทำให้

$$f(x) = (x-(p+1))C(x) + (p+3) \quad \_\_\_\_(3)$$

$(x-(p+1)) \times (2)$;

$$(x-(p+1))f(x) = (x-p)(x-(p+1))B(x) + (x-(p+1))(p+1) \quad \_\_(4)$$

$(x-p) \times (3)$;

$$(x-p)f(x) = (x-p)(x-(p+1))C(x) + (x-p)(p+3) \quad \_\_(5)$$

$(5) - (4)$;

$$[(x-p) - (x-(p+1))]f(x)$$

$$= (x-p)(x-(p+1))(C(x)-B(x)) + (x-p)(p+3)$$

$$- (x-(p+1))(p+1) \quad \_\_\_\_\_\_\_\_(6)$$

$$f(x) = (x-p)(x-(p+1))(C(x) - B(x)) + (x-p)(p+3)$$

$$- (x-(p+1))(p+1)$$

ดังนั้น $f(1) = (1-p)(1-(p+1))(C(1) - B(1))$

$$+ (1-p)(p+3) - (1-(p+1))(p+1)$$

$$= (1-p)(-p)(C(1) - B(1)) + p+3-p^2-3p+p^2+p$$

$$f(1) = -P(1-p)(C(1) - B(1)) + 3 - 3p \quad \_\_\_\_(6)$$

พิจารณาค่าของ $C(1) - B(1)$ ดังนี้

จาก (2) ; $p = f(1) = (1-p)B(1) + (p+1)$

$$p = (1-p)B(1) + p + 1$$

เพราะว่า $p-1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $B(1) = \frac{-1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$

จาก (3) ; $p = f(1) = (1-(p+1))C(1) + p + 3$

$0 = -pC(1) + 3$

เพราะว่า $p \neq 0$

เพราะฉะนั้น $C(1) = \frac{3}{p}$

เพราะฉะนั้น
$$C(1) - B(1) = \frac{3}{p} - \frac{1}{p-1}$$
$$= \frac{3(p-1) - p}{p(p-1)}$$
$$= \frac{3p - 3 - p}{p(p-1)}$$
$$= \frac{2p - 3}{p(p-1)}$$

แทนค่า $C(1) - B(1)$ ในสมการ (6) จะได้

$$f(1) = -p(1-p)[\frac{2p-3}{p(p-1)}] + 3 - 3p$$
$$= -(2p-3) + 3 - 3p$$
$$= -5p + 6$$
$$\neq p$$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ $f(1) = p$

สรุปไม่มีพหุนาม $f(x)$ ที่ทำให้ $f(1) = p$, $f(p) = p+1$

และ $f(p+1) = p+3$

7. ข้อพิสูจน์ วิธีที่ 1 จากสูตร

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

เพราะฉะนั้น $a = (\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3$

$$= (\arcsin x + \arccos x)[(\arcsin x)^2 - \arcsin x \arccos x + (\arccos x)^2]$$

เพราะว่า $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$a = \frac{\pi}{2}[(\arcsin x)^2 - \arcsin x \arccos x + (\arccos x)^2] \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ต่อไปเลือกเปลี่ยน arccos x เป็น arcsin x

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$(\arccos x)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2(\frac{\pi}{2})\arcsin x + (\arcsin x)^2$$

จากสมการ (1) จะได้

$$a = \frac{\pi}{2}[(\arcsin x)^2 - \arcsin x(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) + \frac{\pi^2}{4} - \pi \arcsin x + (\arcsin x)^2]$$

$$\frac{2a}{\pi} = 3(\arcsin x)^2 - \frac{3\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4}$$

$$0 = 3(\arcsin x)^2 - \frac{3\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4} - \frac{2a}{\pi}$$

$$0 = (\arcsin x)^2 - \frac{\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{12} - \frac{2a}{3\pi} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_(2)}$$

สมการ (2) เป็นสมการพหุนามดีกรี 2 ในพจน์ของ arcsin x

เปรียบเทียบสมการ (2) กับสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$

ซึ่งจะมีรากเป็นจำนวนจริง เมื่อ $B^2 - 4AC \geqslant 0$

จากสมการ (2) $A = 1$

$$B = -\frac{\pi}{2}$$

$$C = \frac{\pi^2}{12} - \frac{2a}{3\pi}$$

พิจารณา $B^2 - 4AC = \frac{\pi^2}{4} - 4(1)\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{2a}{3\pi}\right) \geqslant 0$

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{3} + \frac{8a}{3\pi} \geqslant 0$$

$$-\frac{\pi^2}{12} + \frac{8a}{3\pi} \geqslant 0$$

$$a \geqslant \frac{3\pi^3}{(8)(12)}$$

$$a \geqslant \frac{\pi^3}{32} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(3)}$$

จากสมการ (2) และ $B^2 - 4AC = -\frac{\pi^2}{12} + \frac{8a}{3\pi}$

$$\arcsin x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$= \frac{-\left(-\frac{\pi}{2}\right) \pm \sqrt{-\frac{\pi^2}{12} + \frac{8a}{3\pi}}}{2}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}}}{2} = \frac{\pi}{4} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}}$$

เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$,

เพราะฉะนั้น $-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} \pm \sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}} \leqslant \frac{\pi}{2}$

พิจารณาอสมการ

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}}$$

$$-\frac{3\pi}{4} \leqslant -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}}$$

$$\frac{3\pi}{2} \geqslant \sqrt{\frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}}$$

$$\frac{9\pi^2}{4} \geqslant \frac{8a}{3\pi} - \frac{\pi^2}{12}$$

$$\frac{9\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{12} \geqslant \frac{8a}{3\pi}$$

$$\frac{27\pi^2 + 1\pi^2}{12} \geqslant \frac{8a}{3\pi}$$

$$\frac{28\pi^2}{12} \geqslant \frac{8a}{3\pi}$$

$$\frac{28\pi^3}{32} \geqslant a$$

เพราะฉะนั้น $a \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$ ______________ (4)

จาก (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\frac{\pi^3}{32} \leqslant a \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$$

วิธีที่ 2 จากสมการ $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = a$

เมื่อจัดรูปแบบได้เป็น

$$\frac{2a}{\pi} = 3(\arcsin x)^2 - \frac{3\pi}{2}\arcsin x + \frac{\pi^2}{4}$$

พิจารณา a เป็นฟังก์ชันของตัวแปร t โดยที่ $t = \arcsin x$

เพราะฉะนั้น $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

และ $\frac{2a}{\pi} = 3t^2 - \frac{3\pi}{2}t + \frac{\pi^2}{4}$

$$a = \frac{3\pi}{2}t^2 - \frac{3\pi^2}{4}t + \frac{\pi^3}{8}$$

ให้ $a(t) = \frac{3\pi}{2}t^2 - \frac{3\pi^2}{4}t + \frac{\pi^3}{8} \quad , -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$a'(t) = 3\pi t - \frac{3\pi^2}{4}$$

$$a''(t) = 3\pi$$

พิจารณา $a'(t) = 0$

$$3\pi t - \frac{3\pi^2}{4} = 0$$

$$3\pi t = \frac{3\pi^2}{4}$$

$$t = \frac{\pi}{4}$$

เพราะว่า $a'(t) = 3\pi(t - \frac{\pi}{4})$

เพราะฉะนั้น $a'(t) \leqslant 0$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4}$

และ $a'(t) \geqslant 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $a(t)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}]$

และ $a(t)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

สรุปได้ว่าค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $a(t)$ คือ

$$a(\frac{\pi}{4}) = \frac{3\pi}{2}(\frac{\pi^2}{16}) - \frac{3\pi^2}{4}(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi^3}{8}$$

$$= \frac{3\pi^3}{32} - \frac{3\pi^3}{16} + \frac{\pi^3}{8}$$

$$= [\frac{3-6+4}{32}]\pi^3$$

$$= \frac{\pi^3}{32}$$

เพราะว่า $a(-\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi(\frac{\pi^2}{4}) - \frac{3\pi^2}{4}(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi^3}{8}$

$$= [\frac{3+3+1}{8}]\pi^3$$

$$= \frac{7\pi^3}{8}$$

และ $a(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}\pi(\frac{\pi^2}{4}) - \frac{3\pi^2}{4}(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi^3}{8}$

$$= [\frac{3-1+1}{8}]\pi^3$$

$$= \frac{3\pi^3}{8}$$

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $a(t)$ คือ $\frac{7\pi^3}{8}$

สรุป $\frac{\pi^3}{32} \leqslant a(t) \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$ ทุกค่า $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

นั่นคือ $\frac{\pi^3}{32} \leqslant a \leqslant \frac{7\pi^3}{8}$ ทุกค่า $x \in R$

8. ตอบ 64 ตัว

แนวคิด $x = 100(|\sin(x-5)| + \frac{1}{20})$

$$\frac{x}{100} = |\sin(x-5)| + \frac{1}{20}$$

$$\frac{x}{100} - \frac{1}{20} = |\sin(x-5)|$$

$$\frac{x-5}{100} = |\sin(x-5)| \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

แทนค่า $t = x-5$ จะได้

$$\frac{t}{100} = |\sin t| \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จากสมการ (๑) และ (๒) จะได้ว่าจำนวนคำตอบของสมการ (๒) เท่ากับจำนวนคำตอบของสมการ (๑)

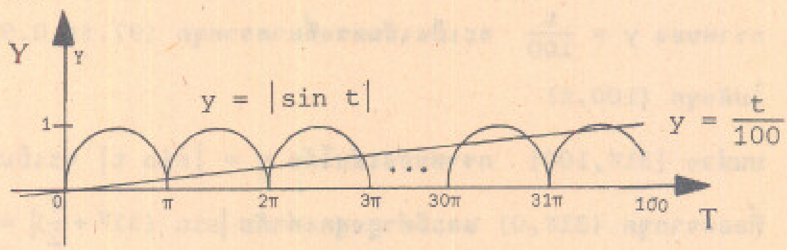
เพราะว่า $0 \leqslant |\sin t| \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น $0 \leqslant \frac{t}{100} \leqslant 1$ นั่นคือ $0 \leqslant t \leqslant 100$

ดังนั้นพิจารณา t ในช่วง [0,100]

การหารากของสมการ (๒) เราพิจารณาจากจุดตัดของเส้นโค้ง

$y = \frac{t}{100}$ และ $y = |\sin t|$



จากลักษณะของเส้นโค้ง $y = |\sin t|$ บนช่วง [0,100] จะมีลักษณะเป็นคลื่นทีละช่วงซึ่งมีความยาว π

และเพราะว่า $\frac{100}{\pi} = \frac{100}{3.14} = 31.85$

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนลูกคลื่นของ $y = |\sin t|$ บนช่วง $[0,31\pi]$

อยู่ทั้งหมด 31 คลื่น

และมีส่วนของ $y = |\sin t|$ อีกในช่วง $[31\pi,100]$

จากลักษณะกราฟของ $y = |\sin t|$ และ $y = \frac{t}{100}$ พบว่า

$t \in [0,\pi]$ มีจุดตัด 2 จุด

$t \in [\pi,2\pi]$ มีจุดตัด 2 จุด

$\vdots$

$t \in [30\pi,31\pi]$ มีจุดตัด 2 จุด

เพราะฉะนั้นในช่วง $[0,31\pi]$ มีจุดตัดของ $y = |\sin t|$ และ

$y = \frac{t}{100}$ อยู่ทั้งหมด 62 จุด

เพราะฉะนั้น $\frac{t}{100} = |\sin t|$ มีราก 62 ตัวในช่วง $[0,31\pi]$

ต่อไปพิจารณาในช่วง $[31\pi,100] = [31(3.14),100]$

$= [97.34,100]$

กราฟของ $y = \frac{t}{100}$ จะเป็นเส้นตรงที่ลากจากจุด $(97.34,0.9734)$

ไปยังจุด $(100,1)$

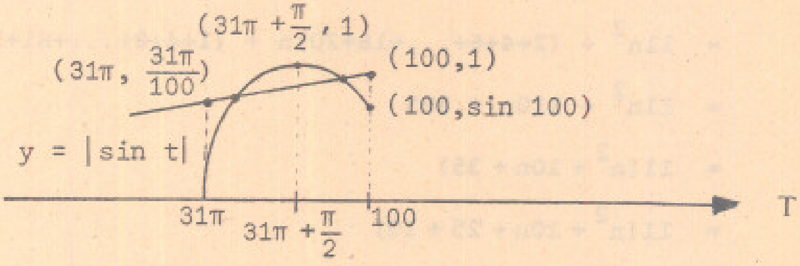
บนช่วง $[31\pi,100]$ กราฟของเส้นโค้ง $y = |\sin t|$ จะเป็นโค้ง

ที่ออกจากจุด $(31\pi,0)$ และมีค่าสูงสุดเท่ากับ $|\sin (31\pi + \frac{\pi}{2})| = 1$

และวกกลับลงมาที่จุด $(100,|\sin 100|)$

เพราะว่า $|\sin 100| < 1$

เพราะฉะนั้น $y = \frac{t}{100}$ และ $y = |\sin t|$ ต้องตัดกัน 2 แห่ง



สรุป $\frac{t}{100} = |\sin t|$ มีราก 64 ตัว

เพราะฉะนั้นจำนวนคำตอบของสมการ

$$x = 100(|\sin (x-5)| + \frac{1}{20})$$

มีทั้งหมด 64 ตัว

9. ตอบ $18^2 + 19^2 + 20^2 + \ldots + 28^2 = 77^2$

แนวคิด

ให้ $n, n+1, n+2, \ldots, n+10$ เป็นจำนวนเต็มที่เรียงกัน 11 จำนวน

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
n^2 &= n^2 \\
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\
(n+2)^2 &= n^2 + 4n + 4 \\
(n+3)^2 &= n^2 + 6n + 9 \\
&\vdots \\
(n+9)^2 &= n^2 + 18n + 81 \\
(n+10)^2 &= n^2 + 20n + 100
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$n^2 + (n+1)^2 + \ldots + (n+10)^2$$

$$= 11n^2 + (2+4+6+\ldots+18+20)n + (1+4+9+\ldots+81+100)$$

$$= 11n^2 + 110n + 385$$

$$= 11(n^2 + 10n + 35)$$

$$= 11(n^2 + 10n + 25 + 10)$$

$$= 11((n+5)^2 + 10)$$

ต่อไปเราพิจารณาหาค่า n ที่ทำให้ $11((n+5)^2 + 10)$ สามารถเขียนได้เป็นจำนวนเต็ม m^2

เพราะว่าเราต้องการ $m^2 = 11((n+5)^2 + 10)$

เพราะฉะนั้นพิจารณากรณีที่ $(n+5)^2 + 10$ มี 11 เป็นตัวประกอบ

เพราะว่า $(n+5)^2 - 1 + 11 = (n+5)^2 + 10$

เพราะฉะนั้นพิจารณากรณีที่ 11 หาร $(n+5)^2 - 1$ ลงตัว

และ $\dfrac{(n+5)^2 + 10}{11}$ อยู่ในรูปของจำนวนเต็ม k^2

เพราะว่า $(n+5)^2 - 1 = ((n+5)-1)((n+5)+1)$

$$= (n+4)(n+6)$$

เพราะฉะนั้นพิจารณาค่า n ที่ทำให้ 11 หาร $(n+4)(n+6)$ ลงตัว

นั่นคือ 11 หาร $n+4$ ลงตัว หรือ 11 หาร $n+6$ ลงตัว

11 หาร $n+4$ ลงตัว เมื่อ $n = 7, 18, 29, \ldots$

11 หาร $n+6$ ลงตัว เมื่อ $n = 5, 16, 27, \ldots$

ค่าของ n ที่ต้องการคือ n ที่ทำให้ $\frac{(n+5)^2+10}{11}$ อยู่ในรูปจำนวนเต็ม k^2

n	$(n+5)^2$	$(n+5)^2+10$	$\frac{(n+5)^2+10}{11}$
5	100	110	10
7	144	154	14
16	441	451	41
18	529	539	$49 = 7^2$

เพราะฉะนั้น $n = 18$ ทำให้ $11((n+5)^2+10) = 11(539)$

$$= 11\cdot 11\cdot 7^2$$

$$= (77)^2$$

สรุป 18,19,20,...,28 ทำให้

$$18^2+19^2+20^2+\dots+28^2 = 77^2$$

หมายเหตุ มีกรณีที่เป็นไปได้อีกหลายแบบ เช่น

$$(-28)^2+(-27)^2+\dots+(-19)^2+(-18)^2 = 77^2 = (-77)^2$$

$$(38)^2+(39)^2+\dots+(48)^2 = (143)^2 = (-143)^2$$

$$(-48)^2+(-47)^2+\dots+(-38)^2 = (143)^2 = (-143)^2$$

10. ข้อพิสูจน์ ให้ $|x| < 1$, $|y| < 1$ และ $|z| < 1$

การแสดงว่า ถ้า $|A| < 1$ และ $|B| < 1$ แล้ว $\left|\frac{A+B}{1+AB}\right| < 1$

จาก $|A| < 1$ และ $|B| < 1$

$$A^2 < 1 \quad \text{และ} \quad B^2 < 1$$

$$A^2(1-B^2) < 1-B^2 \qquad (\because 1-B^2 > 0)$$

$$A^2 - A^2B^2 < 1-B^2$$

$$A^2+B^2 < 1+A^2B^2$$

$$A^2+2AB+B^2 < 1+2AB+A^2B^2$$

$$(A+B)^2 < (1+AB)^2$$

เพราะว่า $|A| < 1$ และ $|B| < 1$ เพราะฉะนั้น $1+AB \neq 0$

ดังนั้น $\left|\frac{(A+B)^2}{(1+AB)^2}\right| < 1$

$$\left|\frac{A+B}{1+AB}\right| < 1$$

เมื่อ $|x| < 1$ และ $|y| < 1$ จะได้ว่า $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$

เพราะว่า $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$ และ $|z| < 1$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)+z}{1+\left(\frac{x+y}{1+xy}\right)z}\right| < 1$

$$\left|\frac{x+y+z(1+xy)}{1+xy+(x+y)z}\right| < 1$$

$$\left|\frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx}\right| < 1$$

11. **ตอบ** เซตคำตอบของอสมการคือ $(\frac{1}{2}, 1]$

แนวคิด เพราะว่า $x + \frac{1}{2}$ เป็นฐานของ $\log_{x+\frac{1}{2}} x$

เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{2} \neq 1$ นั่นคือ $x \neq \frac{1}{2}$

เมื่อ $x = 1$ จะได้ $\log_{1+\frac{1}{2}} 1 = 0 = \log_{\frac{1}{2}} 1$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ อยู่ในเซตคำตอบของอสมการ

พิจารณาค่า $x \in (0,\infty)$ เป็น 3 ช่วง คือ $(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2}, 0),(1,\infty)$

กรณีที่ 1 $0 < x < \frac{1}{2}$

ดังนั้น $x + \frac{1}{2} < 1$

จะได้ $\log x < 0$ และ $\log (x+\frac{1}{2}) < 0$

จากอสมการ $\log_{x+\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x$

$$\frac{\log x}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\log (x+\frac{1}{2})} \geqslant \frac{1}{\log \frac{1}{2}} \qquad (\because \log x < 0)$$

$$\frac{\log \frac{1}{2}}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant 1 \qquad (\because \log \frac{1}{2} < 0)$$

$$\log \frac{1}{2} \geqslant \log (x+\frac{1}{2}) \qquad (\because \log (x+\frac{1}{2}) < 0)$$

$$\frac{1}{2} \geqslant x + \frac{1}{2} \quad (\because \log \text{ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม})$$

$$0 \geqslant x$$

ในกรณีที่ 1 จะได้ $(0, \frac{1}{2}) \cap (-\infty, 0] = \phi$ เป็นเซตคำตอบ

กรณีที่ 2 $\frac{1}{2} < x < 1$ จะได้ $\log x < 0$

$$\log_{x+\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\frac{\log x}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\log (x+\frac{1}{2})} \geqslant \frac{1}{\log \frac{1}{2}} \quad (\because \log x < 0)$$

เพราะว่า $x + \frac{1}{2} > 1$ ดังนั้น $\log (x+\frac{1}{2}) > 0$

เพราะว่า $\log \frac{1}{2} < 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{\log (x+\frac{1}{2})} \geqslant \dfrac{1}{\log \frac{1}{2}}$ ทุกค่า $x \in (\frac{1}{2}, 1)$

ในกรณีที่ 2 จะได้ $(\frac{1}{2}, 1)$ เป็นเซตคำตอบ

กรณีที่ 3 $1 < x < \infty$ จะได้ $\log x > 0$

$$\log_{x+\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\frac{\log x}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{\log \frac{1}{2}} \quad (\because \log x > 0)$$

เพราะว่า $\log (x+\frac{1}{2}) > 0$ และ $\log \frac{1}{2} < 0$

เพราะฉะนั้นไม่มี $x \in (1,\infty)$ ที่ทำให้ $\frac{1}{\log (x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{\log \frac{1}{2}}$

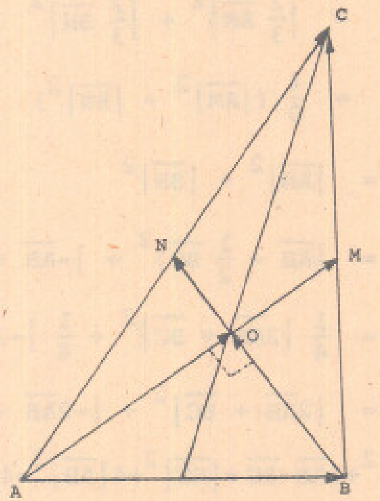
ในกรณีที่ 3 จะได้ ϕ เป็นเซตคำตอบ

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $\log_{x+\frac{1}{2}} x \leqslant \log_{\frac{1}{2}} x$

คือ $\{1\} \cup (\frac{1}{2}, 1) = (\frac{1}{2}, 1]$

12. ตอบ $t = 5$

แนวคิด



วาดรูปเพื่อช่วยคำนวณและกำหนดเวกเตอร์ดังแสดงในภาพ

ให้ O เป็นจุดตัดของ AM และ BN และ $A\hat{O}B = 90^\circ$

เพราะว่า O เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐาน

ดังนั้น $|\overline{AO}| : |\overline{OM}| = 2:1$ และ $|\overline{BO}| : |\overline{ON}| = 2:1$

เพราะฉะนั้น $\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM}$ และ $\overline{BO} = \frac{2}{3}\overline{BN}$

เพราะว่า $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$

$= \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$

และ $\overline{BN} = (-\overline{AB}) + \overline{AN}$

$= -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}$

เพราะว่า AOB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $|\overline{AB}|^2 = |\overline{AO}|^2 + |\overline{OB}|^2$

$= \left|\frac{2}{3}\overline{AM}\right|^2 + \left|\frac{2}{3}\overline{BN}\right|^2$

$= \frac{4}{9}(|\overline{AM}|^2 + |\overline{BN}|^2)$

$\frac{9}{4}|\overline{AB}|^2 = |\overline{AM}|^2 + |\overline{BN}|^2$

$= \left|\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}\right|^2 + \left|-\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC}\right|^2$

$= \frac{1}{4}\left|2\overline{AB} + \overline{BC}\right|^2 + \frac{1}{4}\left|-2\overline{AB} + \overline{AC}\right|^2$

$9|\overline{AB}|^2 = |2\overline{AB} + \overline{BC}|^2 + |-2\overline{AB} + \overline{AC}|^2$

$9|\overline{AB}|^2 = 4|\overline{AB}|^2 + 4\overline{AB}\cdot\overline{BC} + |\overline{BC}|^2 + 4|\overline{AB}|^2 - 4\overline{AB}\cdot\overline{AC} + |\overline{AC}|^2$

$|\overline{AB}|^2 = 4(\overline{AB}\cdot\overline{BC} - \overline{AB}\cdot\overline{AC}) + |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$

$|\overline{AB}|^2 = 4\overline{AB}\cdot(\overline{BC} - \overline{AC}) + |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$ ______(1)

ในสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

ดังนั้น $\overline{BC} - \overline{AC} = -\overline{AB}$

แทนค่าใน (1) ;

$$|\overline{AB}|^2 = 4\overline{AB}(-\overline{AB}) + |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

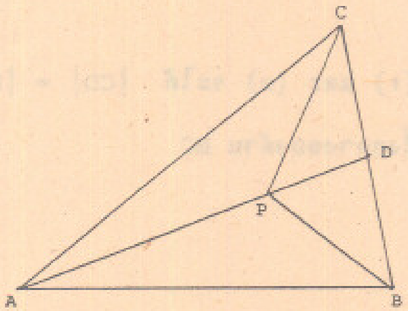
$$= -4|\overline{AB}|^2 + |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

$$5|\overline{AB}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{AC}|^2$$

สรุป $t = 5$

แบบทดสอบฉบับที่ 2

1. **ข้อพิสูจน์**



พิจารณา △ APC มีพื้นที่เท่ากับ △ ABP

เมื่อกำหนดให้ AP เป็นฐานร่วมกันของ △ APC และ △ APB

จะได้ว่าความสูงที่วัดจากด้านฐาน AP ไปยังจุด B และ C ต้องยาวเท่ากัน

ต่อไปเมื่อพิจารณา △ PDC และ △PDB พบว่ามีฐาน PD ร่วมกัน

และส่วนสูงที่วัดจาก PD ไปยัง C และ B เท่ากัน

เพราะฉะนั้น พื้นที่ △PDC = พื้นที่ △PDB

จาก พื้นที่ △ APC = พื้นที่ △ APB

จะได้ พื้นที่ △ APC + พื้นที่ △ PDC = พื้นที่ △ APB + พื้นที่ △ PDB

ดังนั้น พื้นที่ △ ADC = พื้นที่ △ BDA ________(1)

ให้ CD เป็นฐานของ △ ADC

และ BD เป็นฐานของ △ ABD

เพราะว่า CD และ BD อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

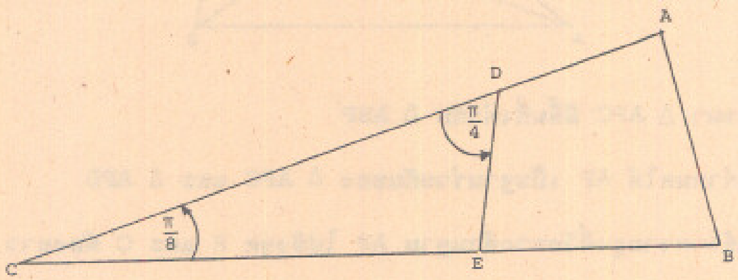
เพราะฉะนั้นความสูงของ △ ADC เท่ากับความสูงของ △ ABD ___(2)

เพราะว่า △ ที่มีพื้นที่เท่ากันและส่วนสูงเท่ากันจะได้ว่า ฐานต้องยาวเท่ากัน

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ $|CD| = |DB|$

สรุป D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC

2. **ข้อพิสูจน์**



พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$ ________(1)

$$a = |BC| = 5$$

$$c = |AB| = \frac{9}{8} |DE|$$

การหาความยาวด้าน DE

ในสามเหลี่ยม CDE , $\hat{D} = \frac{\pi}{4}$, $\hat{C} = \frac{\pi}{8}$, $|CE| = \frac{10}{3}$

$$\frac{\sin \hat{D}}{|CE|} = \frac{\sin \hat{C}}{|DE|}$$

$$|DE| = |CE| \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{8}}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

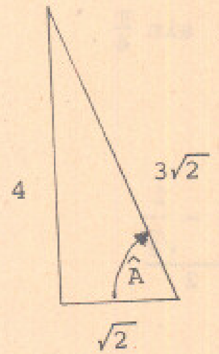
$$= \left(\frac{10}{3}\right)\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8}$$

เพราะฉะนั้น $c = |AB| = \frac{9}{8}\left(\frac{10}{3}\right)\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{8}$

$$c = \frac{15\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\pi}{8}$$

การหาค่า $\sin \hat{B}$

ในสามเหลี่ยม ABC $\quad \frac{\sin \hat{A}}{|BC|} = \frac{\sin \hat{C}}{|AB|}$



$$\sin \hat{A} = \frac{|BC|}{|AB|} \sin \hat{C}$$

$$= \frac{5}{\left(\frac{15\sqrt{2}}{4} \sin \frac{\pi}{8}\right)} \sin \frac{\pi}{8}$$

เพราะฉะนั้น $\sin \hat{A} = \frac{4}{3\sqrt{2}}$

และ $\cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

เพราะว่า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C})$$

$$\sin \hat{B} = \sin (180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}))$$

$$= \sin (\hat{A} + \hat{C})$$

$$= \sin \hat{A} \cos \hat{C} + \cos \hat{A} \sin \hat{C}$$

$$\sin \hat{B} = \frac{4}{3\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{8} \quad \text{\_\_\_(4)}$$

จาก (1) – (4) ;

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} ac \sin \hat{B}$

$$= \frac{1}{2} (5) \left(\frac{15\sqrt{2}}{4}\right) \sin \frac{\pi}{8} \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \sin \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \frac{75\sqrt{2}}{8} \left(\frac{4}{3\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3} \sin^2 \frac{\pi}{8}\right) \quad \text{\_\_\_(5)}$$

เพราะว่า $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \sin 2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin \frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

และ $\sin^2 \frac{\pi}{8} = \dfrac{1 - \cos 2\left(\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \dfrac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้นจาก (5) ;

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{75\sqrt{2}}{8} \left(\frac{2}{3\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}}\right)\right)$

$$= \frac{75\sqrt{2}}{8}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{75\sqrt{2}}{8}\left(\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{25}{16}(3\sqrt{2} - 1)$$

3. **ข้อพิสูจน์** ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$n = 1$; $m^2 = 49$, $m = 7$

$n = 2$; $m^2 = 4489$, $m = 67$

$n = 3$; $m^2 = 444889$, $m = 667$

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

$m^2 = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ ตัว}}\ \underbrace{888\ldots8}_{n-1 \text{ ตัว}}9$ เป็นจำนวนเต็ม 2n หลัก

$$= 4\cdot10^{2n-1} + 4\cdot10^{2n-2} + \ldots + 4\cdot10^{n} + 8\cdot10^{n-1} + 8\cdot10^{n-2} + \ldots + 8\cdot10^{2} + 8\cdot10 + 9$$

$$= 4[10^{2n-1} + 10^{2n-2} + \ldots + 10^{n}] + 8[10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1] + 1$$

$$= (4\cdot10^{n})(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 1) + 8(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 1$$

$$m^2 = (4\cdot10^{n} + 8)(10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) + 1 \quad \text{\_\_(1)}$$

เพราะว่า $10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$a = 1\ ,\ r = 10$

เพราะฉะนั้น

$$10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 = \frac{(1)(1-10^n)}{1-10}$$

$$= \frac{10^n - 1}{9}$$

จาก (1) จะได้

$$m^2 = (4\cdot 10^n + 8)\left(\frac{10^n - 1}{9}\right) + 1$$

$$m^2 = \left(\frac{4}{9}\right)(10^n + 2)(10^n - 1) + 1$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)(10^{2n} + 10^n - 2) + 1$$

$$= \frac{4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n - 8 + 9}{9}$$

$$= \frac{4\cdot 10^{2n} + 4\cdot 10^n + 1}{9}$$

$$= \frac{(2\cdot 10^n + 1)^2}{9}$$

$$m^2 = \left[\frac{2\cdot 10^n + 1}{3}\right]^2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

เพราะว่า $2\cdot 10^n + 1 = 2\cdot 10^n + 10^n - 10^n + 1$

$$= 3\cdot 10^n - 10^n + 1$$

$$= 3\cdot 10^n + (1 - 10^n)$$

และ $1 - 10^n = -999\ldots9$ ซึ่งเป็นตัวเลขที่ประกอบด้วย 9

จำนวน n-1 หลัก

ดังนั้น 3 หาร $3\cdot 10^n + (1 - 10^n)$ ลงตัว

นั่นคือ $\dfrac{2\cdot 10^n + 1}{3}$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวก

สรุป ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

จะมี $m = \dfrac{2\cdot 10^n + 1}{3}$ ที่ทำให้

$$m^2 = \underbrace{44\ldots4}_{n \text{ ตัว}}\,\underbrace{888\ldots8}_{n-1 \text{ ตัว}}9$$

4. **แนวคิด** การเลือกฟังก์ชันพหุนามพิจารณาดังนี้

$$(x-1) = (x-1)$$

$$(x^2-1) = (x-1)(x+1)$$

$$(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1)$$

$$= (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$(x^8-1) = (x^4+1)(x^4-1)$$

$$= (x^4+1)(x^2+1)(x^2-1)$$

$$= (x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$\vdots$$

$$(x^{2^9}-1) = (x^{512}-1)$$

$$= (x^{256}+1)(x^{128}+1)\ldots(x^2+1)(x+1)(x-1)$$

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x^2-1)(x^4-1)\ldots(x^{2^9}-1)$

$$= (x^{256}+1)(x^{128}+1)^2(x^{64}+1)^3\ldots(x^2+1)^8(x+1)^9(x-1)^{10}$$

เลือกพหุนาม $p(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1)\ldots(x^{2^9}-1)$

จะได้ว่า $(x-1)^{10}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข (i)

เพราะว่ากำลังสูงสุดของ x ใน $p(x)$ คือ

$256+2(128)+3(64)+4(32)+5(16)+6(8)+7(4)+8(2)+9+10$

$= 256+256+192+128+80+48+28+16+9+10$

$= 1023$

$< 2^{10}$

เพราะฉะนั้น $p(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข (iii)

การแสดงว่า $p(x)$ สอดคล้องเงื่อนไข (ii)

$(x-1)(x^2-1) = x^3-x^2-x+1$

$(x-1)(x^2-1)(x^4-1) = (x^3-x^2-x+1)(x^4-1)$

$= x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1$

$(x-1)(x^2-1)(x^4-1)(x^8-1)$

$= (x^7-x^6-x^5+x^4-x^3+x^2+x-1)(x^8-1)$

= พหุนามดีกรี 15 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 1, −1

ในทำนองเดียวกัน

$p(x) = (x-1)(x^2-1)(x^4-1)\ldots(x^{512}-1)$

= เป็นพหุนามดีกรี 1023 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 1, −1 เท่านั้น

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข (ii)

ข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2535

วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 2 สิงหาคม 2535 เวลา 9.00 - 12.00 น.

แบบทดสอบประกอบด้วย 2 ฉบับ

<u>ฉบับที่ 1</u> เป็นแบบปรนัยใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง 45 นาที

(ตอบถูกได้ข้อละ 2 คะแนน ตอบผิดถูกหักข้อละ $\frac{1}{2}$ คะแนน ไม่ตอบได้ 0 คะแนน)

1. วงกลมวงหนึ่งผ่านจุด (1,4) และ (-2,3) และมีจุดศูนย์กลาง (h,k) อยู่บนเส้นตรง $x-2y = 6$, $h+k$ มีค่าเท่าใด

   (1) $\frac{26}{7}$ (2) $\frac{16}{7}$

   (3) $-\frac{6}{7}$ (4) $-\frac{10}{7}$

2. กำหนดให้ $x+y < \frac{1}{2}$ และ $x^2+y^2 < 2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   (1) $-\sqrt{2} < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$

   (2) $-1 < x < \frac{1}{4}(1-\sqrt{15})$

   (3) $\frac{1}{4}(1-\sqrt{15}) < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$

   (4) $0 < x < \frac{1}{4}(1+\sqrt{15})$

3. กำหนดให้ Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และ

$$S = \{x \in Q \mid 4x^4-16x^3-5x^2+36x-9 = 0\}$$

ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่าใด

(1) $-\frac{9}{4}$ (2) -9

(3) $\frac{9}{4}$ (4) 9

4. มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 อยู่ทั้งหมดกี่จำนวน ซึ่งขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะ

(1) 36 (2) 80

(3) 160 (4) 180

5. **บทนิยาม** จำนวนเต็มบวก n จะเรียกว่า <u>จำนวนสามเหลี่ยม</u> ก็ต่อเมื่อ n อยู่ในรูป $1+2+\ldots+k$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว n_1+n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(2) ถ้า n_1 และ n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว n_1n_2 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(3) ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $9n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

(4) ถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม แล้ว $n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

6. กำหนดให้

$$x = \sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{x}}}}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) ไม่มีจำนวนจริง x ที่สอดคล้องสมการ

(2) มีจำนวนจริง x เพียง 1 ค่า ที่สอดคล้องสมการ

(3) มีจำนวนจริง x เพียง 2 ค่า ที่สอดคล้องสมการ

(4) มีจำนวนจริง x มากกว่า 2 ค่าที่สอดคล้องสมการ

7. กำหนดให้ $x > 0$ และ $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ มีค่าเท่าใด

(1) 63 (2) 123

(3) 140 (4) 143

8. กำหนดให้ $A = \{ \frac{x}{1+x^2} \mid x \in (-\infty,\infty)\}$

$B = \{ \frac{\log x}{\log(1+x^2)} \mid x > 0\}$

ข้อความใดต่อไปนี้ผิด

(1) A มีขอบเขตบน (2) A มีขอบเขตล่าง

(3) B มีขอบเขตบน (4) B มีขอบเขตล่าง

9\. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

(1) $f(x^2-x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \text{ หรือ } x > 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0, 1 \\ -1 & \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \end{cases}$

(2) $|x| = x\,f(x)$

(3) $f(ax) = -f(a)\,f(x)$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงลบใดๆ

(4) $g(|x|)\,f(x) = -g(|-x|)\,f(-x)$ สำหรับทุกฟังก์ชัน g

10\. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม โดยที่ $\hat{B} = \frac{\pi}{2} + \hat{A}$ และ BC = x

AC = y ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$x^y = y^x$$

$$y = x^2$$

แล้ว $\tan \hat{A}$ มีค่าเท่าใด

(1) 1 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{4}$

11\. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และให้

$$S = \{x \in R \mid (2^x-4)^3 + (4^x-2)^3 = (4^2+2^x-6)^3\}$$

ผลรวมของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่าใด

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) 3 (4) $\frac{7}{2}$

12. กำหนดให้ arscin x = 2 arccos x และ 2x = tan y

เมื่อ $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) $2x-y > 1$ (2) $2x+3y < 1$

(3) $x-3y > -1$ (4) $2x-3y < -1$

13. ถ้า $f(\frac{x}{x-1}) = \frac{1}{x}$ สำหรับจำนวนจริง $x \neq 0, 1$ และ

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $f(\sec^2\theta)$ มีค่าเท่าใด

(1) $\sin^2\theta$ (2) $\cos^2\theta$

(3) $\tan^2\theta$ (4) $\cot^2\theta$

14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[(A^{-1}B)\,C\,(B^{t}A)\right]^{t} = (\det 2A)\,I$

แล้ว C^{-1} คือเมทริกซ์ในข้อใด

(1) $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{9}{2} & -2 \\ \frac{3}{2} & -2 & -5 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{4}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{4}{8} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 2 \\ -\frac{3}{2} & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \frac{2}{8} & -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{9}{8} & \frac{4}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{4}{8} & \frac{10}{8} \end{bmatrix}$

15. ถ้า x,y เป็นจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

ก) $x > y$

ข) $xy = 490$

ค) $(\log x - \log 7)(\log y - \log 7) = -\frac{15}{4}$

แล้ว x จะอยู่ในช่วงใด

(1) $(1,10]$ (2) $(11,100]$

(3) $(101,1000]$ (4) $(1001,10000]$

16. กำหนดให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และให้

$A = \{n \in I^+ \mid$ ทุกๆ จำนวนเต็ม x,y ถ้า $n|x+y$ และ $n|x-y$ แล้ว $n|x$ และ $n|y\}$

(**หมายเหตุ** $a|b$ หมายความว่า a หาร b ลงตัว)

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

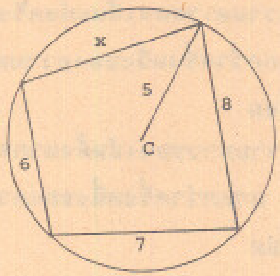
(1) A = เซตของจำนวนคู่บวกทั้งหมด

(2) A = เซตของจำนวนเฉพาะทั้งหมด

(3) A = เซตของจำนวนคี่บวกทั้งหมด

(4) ไม่ถูกทั้ง (1), (2) และ (3)

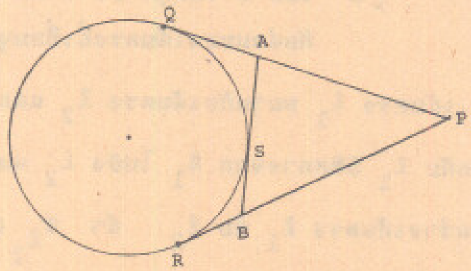
17. ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมดังรูป x จะมีค่าเท่าใด



(1) 7 (2) 8

(3) 9 (4) 10

18. กำหนดให้ P เป็นจุดภายนอกวงกลม $\overline{PQ}$ และ $\overline{PR}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม A,B เป็นจุดบน $\overline{PQ}$ และ $\overline{PR}$ ตามลำดับ ที่ทำให้ $\overline{AB}$ สัมผัสวงกลมที่ S ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 5 ซ.ม. และระยะห่าง (ระยะที่ใกล้ที่สุด) ระหว่างจุด P และวงกลมเป็น 8 ซ.ม. แล้ว เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม APB มีความยาวเท่าใด



(1) 23 ซ.ม. (2) 24 ซ.ม.

(3) 25 ซ.ม.

(4) มีค่าไม่แน่นอนแล้วแต่ตำแหน่งของจุด

19. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้านใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ผลรวมของความยาวของเส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามไปยังด้านตรงข้าม มากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม

ข. ผลรวมของความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดยอดทั้งสามไปยังด้านตรงข้าม มากกว่าครึ่งหนึ่งของความยาวของเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) ก. เป็นจริง และ ข. เป็นจริง (3) ก. เป็นเท็จ แต่ ข. เป็นจริง

(2) ก. เป็นจริง แต่ ข. เป็นเท็จ (4) ก. เป็นเท็จ และ ข. เป็นเท็จ

20. **บทนิยาม** ให้ ℓ เป็นเส้นตรง และ R^2 เป็นเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ กำหนดให้ $\sigma_\ell : R^2 \to R^2$ โดยที่

$$\sigma_\ell(A) = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } A \text{ เป็นจุดที่อยู่บน } \ell \\ B & \text{เมื่อ } B \text{ เป็นจุด ซึ่ง } \ell \text{ แบ่งครึ่งและตั้งฉาก} \\ & \text{กับส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด } A \text{ และจุด } B \end{cases}$$

สมมติว่า เส้นตรง ℓ_1 ขนานกับเส้นตรง ℓ_2 และ $\vec{V}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ ℓ_1 มีทิศทางจาก ℓ_1 ไปยัง ℓ_2 และมีขนาดเท่ากับระยะระหว่างเส้นตรง ℓ_1 กับ ℓ_2 ถ้า $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}(P) = Q$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

(1) $\overrightarrow{PQ} = \vec{V}$ (2) $\overrightarrow{PQ} = -\vec{V}$

(3) $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{V}$ (4) $\overrightarrow{PQ} = -2\vec{V}$

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ ๆ ละ 3 คะแนน

1. $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \ldots + \cos^2 179^\circ$ มีค่าเท่าใด (ตอบในรูปเลขทศนิยม)

2. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ A(6,6), B(8,-2), C(2,1) E เป็นจุดอยู่บนด้าน AB โดยที่ AE = 2EB และ P เป็นจุดอยู่บนด้าน AC โดยที่ $AF = \frac{1}{2}FC$ ถ้า P(a,b) เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน EF แล้ว $a + 2b$ มีค่าเท่าใด

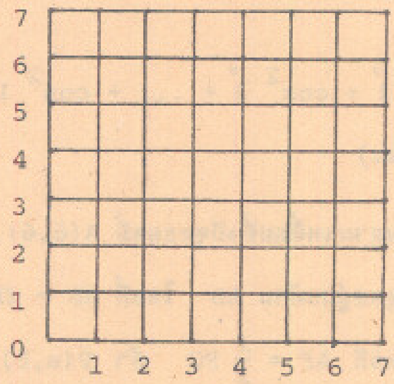
3. วงกลมซึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 2y-1$ และโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลา $7x^2-2y^2 = 14$ มีรัศมียาวเท่าใด

4. กำหนดให้ (a_1,a_2) และ (b_1,b_2) โดยที่ $a_2 > 0$ และ $b_2 > 0$ เป็นพิกัดของจุด A และ B ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด P บนแกน X ที่ทำให้ PA + PB มีค่าน้อยที่สุด

5. กำหนดให้ $A = \{(x,y,z) \mid x,y,z$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องสมการ $2^{3x} + 2^{4y} = 2^{5z}\}$ จงหาสมาชิกของ A ซึ่งมีพิกัดที่ 3 (ค่าของ z) น้อยที่สุด

6. มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 6 แล้วเหลือเศษ 2 และเมื่อหารด้วย 14 แล้วเหลือเศษ 10

7. สี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดในรูปนี้มีจำนวนเท่าใด



8. กำหนดให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด และ

$f, g : I^+ \longrightarrow I^+$ มีคุณสมบัติต่อไปนี้

ก. $f(n) = g(g(n)) + 1$

ข. $f(1) < f(2) < \ldots < f(n) < \ldots$

$g(1) < g(2) < \ldots < g(n) < \ldots$

ค. $I^+ = \{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$

$\cup \{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$

จงหาค่า $f(2)$

๙. กำหนดให้ ตัวอักษรภาษาอังกฤษแต่ละตัวแทนจำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 9

ถ้า

$$
\begin{array}{r}
\text{SEND} \\
+\ \text{MORE} \\
\hline
\text{MONEY}
\end{array}
$$

โดยที่ตัวอักษรที่ต่างกันแทนจำนวนที่ต่างกัน

แล้ว S,E,N,D,M,O,R และ Y แต่ละตัวมีค่าเป็นเท่าใด

10. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า 2 ชนิด จากวัตถุดิบ 3 ประเภท โดยที่มีข้อมูลเกี่ยวกับปริมาณวัตถุดิบแต่ละประเภทที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของสินค้าแต่ละชนิด ตามตารางต่อไปนี้

วัตถุดิบประเภท	ปริมาณวัตถุดิบที่ต้องใช้ในการผลิตแต่ละชิ้นของ	
	สินค้าชนิดที่ 1	สินค้าชนิดที่ 2
A	2	1
B	1	1
C	1	0

ถ้าโรงงานนี้มีวัตถุดิบประเภท A,B,C อยู่เป็นปริมาณทั้งหมด 15, 12, 5 หน่วยตามลำดับ และราคาขายต่อชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1, ชนิดที่ 2 คือ 1.50 บาท และ 1 บาท ตามลำดับ ดังนั้นเพื่อให้ได้รายได้มากที่สุดจากการขายสินค้าทั้งสองชนิด

ก. โรงงานนี้ควรผลิตสินค้าชนิดที่ 1 จำนวนเท่าใด และชนิดที่ 2 จำนวนเท่าใด

ข. ภายหลังการผลิตจะมีวัตถุดิบเหลืออยู่ทั้งหมดเท่าใด

ฉบับที่ 2 เป็นแบบอัตนัย ใช้เวลาทำ 1 ชั่วโมง 15 นาที

ข้อสอบ 3 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน

แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งโดยที่ a,b,c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามกับมุม A,B,C ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } a < \frac{b+c}{2} \text{ แล้ว } \hat{A} < \frac{\hat{C} + \hat{B}}{2}$$

2. **นิยาม** สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ สัญลักษณ์ $[x]$ หมายถึงจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x เช่น $[2] = 2$, $[2.1] = 2$, $[2.96] = 2$

สมมติว่า a เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องสมการ

$$\left[a + \frac{29}{100}\right] + \left[a + \frac{30}{100}\right] + \dots + \left[a + \frac{92}{100}\right] = 600$$

ก. จงหาค่า a

ข. จงหาจำนวนเต็ม k , $29 \leqslant k \leqslant 92$ ที่มากที่สุดที่

$$\left[a + \frac{k}{100}\right] = [a]$$

ค. จงหาค่า $[100a]$

3. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_{2535}$ เป็นจำนวนจริงซึ่งมีคุณสมบัติต่อไปนี้

$$a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} \quad \text{ทุกจำนวนเต็ม } n \geqslant 2$$

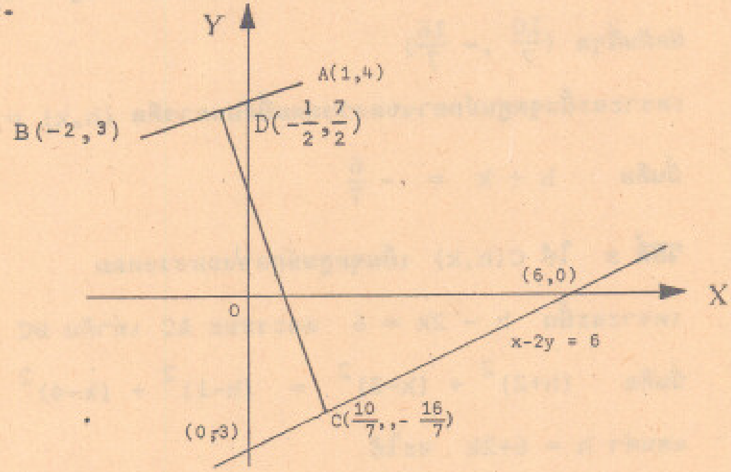
จงพิสูจน์ว่า $71 < a_{2535} < 88$

เฉลยข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2535

แบบทดสอบฉบับที่ 1 ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 3.

แนวคิด



วิธีที่ 1 เพราะว่าวงกลมผ่านจุด A และ B

เพราะฉะนั้น AB เป็นคอร์ดของวงกลม

เพราะว่าเส้นที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ดต้องผ่านจุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้นเส้นที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB จะตัดกับเส้นตรง

$x-2y = 6$ ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{4-3}{1-(-2)} = \frac{1}{3}$ และจุดกึ่งกลาง AB คือ

$$\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

ดังนั้นจะได้ว่าเส้นตรงที่ผ่าน $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ และตั้งฉากกับ AB คือ

$$y - \frac{7}{2} = (-3)(x+\frac{1}{2})$$

$$2y - 7 = -6x - 3$$

$$6x + 2y - 4 = 0$$

$$3x + y - 2 = 0$$

เพราะว่าเส้นตรง $3x + y - 2 = 0$ และ $x - 2y = 6$

ตัดกันที่จุด $(\frac{10}{7}, -\frac{16}{7})$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการคือ $(h,k) = (\frac{10}{7}, -\frac{16}{7})$

นั่นคือ $h + k = -\frac{6}{7}$

วิธีที่ ๒ ให้ $C(h,k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

เพราะฉะนั้น $h - 2k = 6$ และระยะ AC เท่ากับ BC

นั่นคือ $(h+2)^2 + (k-3)^2 = (h-1)^2 + (k-4)^2$

แทนค่า $h = 6+2k$ จะได้

$$(6+2k+2)^2 + (k-3)^2 = (6+2k-1)^2 + (k-4)^2$$

$$(2k+8)^2 + (k-3)^2 = (2k+5)^2 + (k-4)^2$$

$$4k^2+32k+64+k^2-6k+9 = 4k^2+20k+25+k^2-8k+16$$

$$14k = -32$$

$$k = -\frac{32}{14} = -\frac{16}{7}$$

$$h = 6+2(-\frac{16}{7}) = 6 - \frac{32}{7} = \frac{10}{7}$$

$$h + k = \frac{10}{7} - \frac{16}{7} = -\frac{6}{7}$$

การตัดตัวเลือก

โดยการใช้สเกล 1 เซนติเมตรต่อหน่วยจะได้ว่าพิกัดของ C

โดยการวัดด้วยไม้บรรทัดได้พิกัด $(h,k) = (1.6,-2.4)$

เพราะฉะนั้น $h + k = 1.6 + (-2.4)$

$$= -0.8 < 0$$

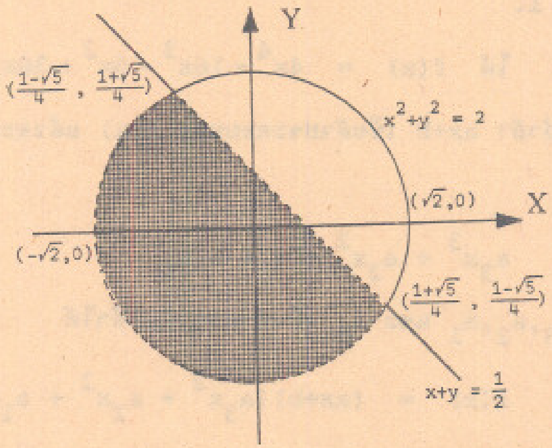
ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $-\frac{6}{7} = -0.86$ และ $-\frac{10}{7} = 1.43$

เพราะฉะนั้นเลือก 3. ดีกว่า

2. **ตอบ** 1.

แนวคิด พิจารณาความสัมพันธ์ $x+y < \frac{1}{2}$ และ $x^2+y^2 < 2$ คือ ส่วนที่แรเงาโดยไม่รวมขอบดังรูป



จุดตัดของ $x^2+y^2 = 2$ และ $x+y = \frac{1}{2}$ หาได้ดังนี้

$$x^2 + (\frac{1}{2} - x)^2 = 2$$

$$x^2 + \frac{1}{4} - x + x^2 = 2$$

$$2x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$$

$$8x^2 - 4x - 7 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(8)(-7)}}{16}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{240}}{16}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}$$

นั้นคือจุดตัดเป็น $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)$ และ $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$

เพราะฉะนั้น x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x+y < \frac{1}{2}$ และ $x^2+y^2 < 2$

คือ $-\sqrt{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

3. **ตอบ** 1.

แนวคิด ให้ $f(x) = 4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9$

เพราะว่าถ้า $ax+b$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ แล้วจะต้องมีพหุนาม

ดีกรี 3

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

เมื่อ a_3, a_2, a_1 และ a_0 เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$$f(x) = (ax+b)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0)$$

เพราะฉะนั้น $aa_3 = 4$ และ $ba_0 = -9$

ดังนั้นการพิจารณาตัวประกอบ $ax+b$ ของ $f(x)$ จึงควรพิจารณา

$a = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ และ $b = \pm 1, \pm 3, \pm 9$

เพราะว่า $f(\frac{3}{2}) = 4(\frac{3}{2})^4 - 16(\frac{3}{2})^3 - 5(\frac{3}{2})^2 + 36(\frac{3}{2}) - 9$

$= 0$

และ $f(-\frac{3}{2}) = 4(-\frac{3}{2})^4 - 16(-\frac{3}{2})^3 - 5(-\frac{3}{2})^2 + 36(-\frac{3}{2}) - 9$

$= 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3}{2}$ และ $x = -\frac{3}{2}$ เป็นรากของ $f(x) = 0$

นั่นคือ $2x-3$ และ $2x+3$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

เพราะว่า $\frac{f(x)}{(2x-3)(2x+3)} = \frac{f(x)}{4x^2-9} = x^2-4x+1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (2x-3)(2x+3)(x^2-4x+1)$

เพราะว่า $x^2-4x+1 = 0$ มีราก $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$

ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $S = \{x \in Q \mid 4x^4 - 16x^3 - 5x^2 + 36x - 9 = 0\}$

$= \{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$

4. **ตอบ** 4.

แนวคิด จำนวน 1 ถึง 1000 จำแนกเป็น 4 จำพวกคือ

1. จำนวน 1 - 9
2. จำนวน 10 - 99
3. จำนวน 100 - 999
4. จำนวน 1000

กรณีที่ 1 1 - 9 มีจำนวนเฉพาะ 4 ตัวคือ 2,3,5,7

กรณีที่ 2 จำนวน 10 - 99

หลักหน่วยมีจำนวนเฉพาะได้ 4 วิธีคือ 2,3,5,7

หลักสิบมีจำนวนเฉพาะได้ 4 วิธีคือ 2,3,5,7

เพราะฉะนั้นจำนวนที่ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะมี

$4 \times 4 = 16$ จำนวน

กรณีที่ 3 จำนวน 10 - 999

หลักหน่วยมีจำนวนเฉพาะได้ 4 วิธีคือ 2,3,5,7

หลักสิบเป็นจำนวนอะไรก็ได้ 10 วิธีคือ 0,1,2,...,8,9

หลักร้อยมีจำนวนเฉพาะได้ 4 วิธีคือ 2,3,5,7

เพราะฉะนั้นจำนวนที่ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะมี

$4 \times 10 \times 4 = 160$ จำนวน

กรณีที่ 4 ไม่มีจำนวนที่ต้องการ

เมื่อพิจารณาจากตัวเลือกต้องยอมรับว่า 2,3,5,7 เป็นจำนวนที่ถือว่าขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะ นั่นคือมีจำนวนที่ขึ้นต้นและลงท้ายด้วยจำนวนเฉพาะเท่ากับ $4 + 16 + 160 = 180$

5. ตอบ 3.

แนวคิด จำนวนสามเหลี่ยมเรียงลำดับจากน้อยไปมากเป็นดังนี้

k	1 + 2 + 3 + ... + k	จำนวนสามเหลี่ยม
1	1	1
2	1 + 2	3
3	1 + 2 + 3	6
4	1 + 2 + 3 + 4	10
5	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
6	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	21
7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7	28
8	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8	36
9	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9	45
10	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10	55

จากตัวอย่างจำนวนสามเหลี่ยมข้างต้นเราสรุปได้ว่า

ตัวเลือก (1) ผิด ตัวอย่างเช่น 1,3 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

แต่ 1+3 = 4 ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ตัวเลือก (2) ผิด ตัวอย่างเช่น 3,6 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

แต่ (3)(6) = 18 ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ตัวเลือก (4) ผิด ตัวอย่างเช่น 1 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

แต่ 1+1 = 2 ไม่เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ตัวเลือก (3) ถูกต้อง

หมายเหตุ การแสดงว่าถ้า n เป็นจำนวนสามเหลี่ยมแล้ว 9n+1 เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ให้ n เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นจะมีจำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้

$$n = 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

เพราะว่า $9n+1 = \dfrac{9k(k+1)}{2} + 1$

$$= \frac{9k^2+9k+2}{2} = \frac{9(k^2+k+\frac{1}{4}) + 2 - \frac{9}{4}}{2}$$

$$= \frac{(3(k+\frac{1}{2}))^2 - \frac{1}{4}}{2} = \frac{(3k+\frac{3}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2}{2}$$

$$= \frac{[\ 3k+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\ ][\ 3k+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\ ]}{2}$$

$$= \frac{[3k+1][3k+2]}{2}$$

$$= \frac{(3k+1)((3k+1)+1)}{2}$$

$$= 1+2+3+\dots+(3k+1)$$

เพราะฉะนั้น $9n+1$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

6. ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** จากสมการ

$$x = \sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{\sqrt{2535} + \cfrac{2535}{x}}}} \quad \text{——} (1)$$

โดยการแทนค่า x เราสามารถพิจารณาได้เป็น

$$x = \sqrt{2535} + \frac{2535}{x} = \frac{2535 + \sqrt{2535}\,x}{x} \quad \text{——} (2)$$

เพราะว่ารูปแบบของสมการในพจน์ตัวแปร y และ a,b,c,d > 0

$$y = \frac{a+by}{c+dy}$$

$$dy^2 + (c-b)y - a = 0$$

$$y = \frac{\pm(c-b) - \sqrt{(c-b)^2 + 4ad}}{2a}$$

เพราะฉะนั้นเราสามารถพิจารณาค่า x ได้จากสมการ (๒)

นั่นคือ x มีคำตอบเป็นจำนวนจริง ๒ ค่า

วิธีที่ ๒ จากสมการ (๒) จะได้ว่า

$$x = \frac{(1 \pm \sqrt{5})\sqrt{2535}}{2}$$

7. **ตอบ** 2.

แนวคิด $$(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$= 7 + 2 = 9$$

$$x + \frac{1}{x} = \pm 3$$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{x} = 3$

เพราะว่า $$(x^2 + \frac{1}{x^2})^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$$

$$49 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$$

เพราะฉะนั้น $x^4 + \frac{1}{x^4} = 47$

ให้ $a = x$ และ $b = \frac{1}{x}$ จะได้ $a+b = 3$, $a^4+b^4 = 47$,

$ab = 1$ และ $a^2+b^2 = 7$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$
$$= (3)[(a^4+b^4)-ab(a^2-ab+b^2)]$$
$$= (3)[47-(1)(a^2+b^2-1)]$$
$$= (3)[47-(7-1)]$$
$$= 3(41)$$
$$= 123$$

8. **ตอบ** 4.

แนวคิด การพิจารณาค่าของ $\frac{x}{1+x^2}$, $x \in (-\infty,\infty)$

เพราะว่าทุกจำนวนจริง a และ b จะได้ว่า

$$(a-b)^2 \geqslant 0$$
$$a^2+b^2 \geqslant 2ab$$

เพราะฉะนั้น $1+|x|^2 \geqslant 2|x|$ ทุกค่า x

ดังนั้น
$$\frac{|x|}{1+|x|^2} \leqslant \frac{1}{2}$$
$$\frac{|x|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$

นั่นคือ $A = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ซึ่งกล่าวได้ว่า A มีขอบเขตบน และ A มีขอบเขตล่าง

การพิจารณาค่าของ $\dfrac{\log x}{\log (x^2+1)}$, $x > 0$

เพราะว่า $(1-x)^2 \geqslant 0$

$1 - 2x + x^2 \geqslant 0$

$1 + x^2 \geqslant 2x > x$ เมื่อ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $\log (1+x^2) > \log x$

นั่นคือ $1 > \dfrac{\log x}{\log (1+x^2)}$, $x > 0$

เพราะว่าเมื่อ x มีค่าใกล้ 0 จะได้ว่า log x มีค่าเข้าใกล้ $-\infty$ และ $\log (1+x^2)$ มีค่าเข้าใกล้ 0

ดังนั้น $\dfrac{\log x}{\log (x^2+1)}$ มีค่าน้อยลงเรื่อยๆ เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 0

สรุป B มีขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตล่าง

๙. **ตอบ** 3.

แนวคิด (1) <u>ถูกต้อง</u>

เพราะว่า $x^2 - x = x(x-1) \begin{cases} > 0 \text{ , } -\infty < x < 0 \text{ หรือ } 1 < x < \infty \\ = 0 \text{ , } x = 0,1 \\ < 0 \text{ , } 0 < x < 1 \end{cases}$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad f(x^2-x) = \begin{cases} 1, & -\infty < x < 0 \text{ หรือ } 1 < x < \infty \\ 0, & x = 0,1 \\ -1, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

(2) <u>ถูกต้อง</u>

$$\text{เพราะว่า} \quad |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

$$x f(x) = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $|x| = x f(x)$

(3) <u>ผิด</u> ตัวอย่างเช่น $a = -10$ และ $x = 5$

จะได้ $f(ax) = f(-10(5)) = f(-50) = -1$

$-f(a) f(x) = -f(-10) f(5) = -(-1)(1) = 1$

(4) <u>ถูกต้อง</u> เพราะว่า $|x| = |-x|$ ทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $g(|x|) = g(|-x|)$

เพราะว่า $f(x) = -f(-x)$ ทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $g(|x|) f(x) = -g(|-x|) f(-x)$ ทุกค่า x

หมายเหตุ แนวทางในการเลือกตัวอย่างของตัวเลือก 3.

เพราะว่าเมื่อ $a < 0$ จะได้ $f(a) = -1$

ดังนั้นเมื่อ $x > 0$ จะได้ $f(x) = 1$ และ $ax < 0$

ดังนั้น $f(ax) = -1$ และ $-f(a) f(x) = -(-1)(1) = 1$

10. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่า $x^y = y^x$ จะได้ $y = x^{\frac{y}{x}} = x^2$

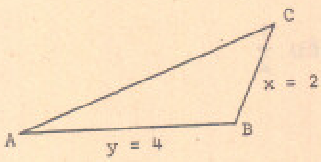
ดังนั้น $\frac{y}{x} = 2$ นั่นคือ $y = 2x$

เพราะฉะนั้น $x^2 = 2x$ จะได้ $x = 2$ หรือ $x = 0$

แต่ $x \neq 0$ เพราะฉะนั้นเราจะได้ $x = 2$ และ $y = 4$

สอดคล้องสมการ $x^y = y^x$ และ $y = x^2$

ดังนั้น BC = 2 และ AC = 4



$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{4}$$

$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + A)}{4} = \frac{\cos A}{4}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{2}{4}$$

$$\tan A = \frac{1}{2}$$

11. **ตอบ** 4.

แนวคิด ให้ $a = 2^x - 4$ และ $b = 4^x - 2$ จะได้

$$(2^x-4)^3 + (4^x-2)^3 = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(4^x + 2^x - 6)^3 = ((2^x-4)+(4^x-2))^3 = (a+b)^3$$

เพราะฉะนั้น $(a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b)^3$

$a+b = 0$ หรือ $a^2-ab+b^2 = (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

นั่นคือ $-ab = 2ab$

ดังนั้น $a+b = 0$ หรือ $a = 0$ หรือ $b = 0$

กรณี $a = 0$ จะได้ $2^x - 4 = 0$, $x = 2$

กรณี $b = 0$ จะได้ $4^x - 2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$

กรณี $a+b = 0$ จะได้ $a = -b$

$$2^x - 4 = -4^x + 2$$

$$4^x + 2^x - 6 = 0$$

$$(2^x+3)(2^x-2) = 0$$

$$2^x = 2 \quad (2^x+3 \neq 0)$$

$$x = 1$$

สรุป $S = \{\frac{1}{2}, 1, 2\}$ ซึ่งมีผลรวมเท่ากับ $\frac{7}{2}$

12. **ตอบ** 4.

แนวคิด $\arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}$

และ $2 \arccos x = \arccos (2x^2-1)$

เพราะฉะนั้น $\arccos \sqrt{1-x^2} = \arccos (2x^2-1)$

$$\sqrt{1-x^2} = 2x^2-1$$

$$1-x^2 = 4x^4-4x^2+1$$

$$4x^4-3x^2 = 0$$

เพราะว่า $x \neq 0$ ดังนั้น $4x^2-3 = 0$ นั่นคือ $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

เพราะว่า $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ เพราะฉะนั้น $\tan y > 0$

นั่นคือ $x > 0$ ซึ่งจะได้ว่า $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จาก $\tan y = 2x = 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{3}$ จะได้ $y = \frac{\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น $2x-y = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \simeq 0.68 \ngtr 1$

$$2x+3y = \sqrt{3} + \pi \simeq 4.87 \nless 1$$

$$x-3y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \pi \simeq -2.28 \ngtr -1$$

$$2x-3y = \sqrt{3} - \pi \simeq -1.41 < -1$$

13. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $y = \frac{x}{x-1}$ แล้วจะได้ $x = \frac{y}{y-1}$

เพราะฉะนั้น $y = \dfrac{(\frac{y}{y-1})}{(\frac{y}{y-1} - 1)}$

ดังนั้น $f(y) = f\left(\dfrac{\frac{y}{y-1}}{(\frac{y}{y-1}) - 1}\right)$

$$= \frac{1}{(\frac{y}{y-1})} = \frac{y-1}{y}$$

เพราะฉะนั้น $f(\sec^2\theta) = \dfrac{\sec^2\theta - 1}{\sec^2\theta} = \tan^2\theta \cdot \cos^2\theta$

$$= \sin^2\theta$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = 2$ ทำให้

$$f(\frac{2}{2-1}) = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

และ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ทำให้ $\sec^2 \frac{\pi}{4} = 2$

เพราะฉะนั้น $f(\sec^2 \frac{\pi}{4}) = f(2) = \frac{1}{2}$

จากแต่ละตัวเลือก

(1) $\sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ (2) $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$

(3) $\tan^2 \frac{\pi}{4} = 1$ (4) $\cot^2 \frac{\pi}{4} = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{6}$ จะได้ $\sec^2 \frac{\pi}{6} = (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{4}{3}$

$$f(\frac{4}{3}) = f(\frac{4}{4-1}) = \frac{1}{4}$$

ต่อไปดูที่ตัวเลือก

(1) $\sin^2 \frac{\pi}{6} = \frac{1}{4}$ (2) $\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

14. ตอบ 2.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -1$, $\det(2A) = 2^3 \det(A) = -8$

$$(A^{-1}B)C(B^tA)^t = (\det(2A))I = -8I$$

$$(A^{-1}B)\,C\,(B^tA) = (-8I)^t = -8I$$

$$A(A^{-1}B)\,C\,(B^tA)\,A^{-1} = A(-8I)A^{-1} = -8(AI)A^{-1} = -8I$$

$$BCB^t = -8I$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \det(B) = -9$$ ดังนั้น B^{-1} หาได้

เพราะฉะนั้น $$C = B^{-1}(-8I)(B^t)^{-1}$$

$$= (-8)(B^{-1})(B^t)^{-1}$$

$$= (-8)(B^tB)^{-1}$$

และ $$C^{-1} = (-\tfrac{1}{8})(B^tB)$$

$$= (-\tfrac{1}{8})\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= (-\tfrac{1}{8})\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 9 & 4 \\ -3 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{9}{8} & -\frac{4}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{4}{8} & -\frac{10}{8} \end{bmatrix}$$

15. ตอบ 4.

แนวคิด $xy = 490$

$$\left(\frac{x}{7}\right)\left(\frac{y}{7}\right) = 10$$

$$\log\left(\frac{x}{7}\right) + \log\left(\frac{y}{7}\right) = \log 10 = 1 \quad \underline{\qquad}(1)$$

$$(\log x - \log 7)(\log y - \log 7) = -\frac{15}{4}$$

$$\log\left(\frac{x}{7}\right)\log\left(\frac{y}{7}\right) = -\frac{15}{4} \quad \underline{\qquad\qquad}(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\left(\log\left(\frac{x}{7}\right) = \frac{5}{2}\right.$ และ $\left.\log\left(\frac{y}{7}\right) = -\frac{3}{2}\right)$

หรือ $\left(\log\left(\frac{x}{7}\right) = -\frac{3}{2}\right.$ และ $\left.\log\left(\frac{y}{7}\right) = \frac{5}{2}\right)$

นั่นคือ $\left(\frac{x}{7} = 10^{\frac{5}{2}}\right.$ และ $\left.\frac{y}{7} = 10^{-\frac{3}{2}}\right)$

หรือ $\left(\frac{x}{7} = 10^{-\frac{3}{2}}\right.$ และ $\left.\frac{y}{7} = 10^{\frac{5}{2}}\right)$

ซึ่งจะได้ว่า $\left(x = 7(10^{\frac{5}{2}})\right.$ และ $\left.y = 7(10^{-\frac{3}{2}})\right)$

หรือ $\left(x = 7(10^{-\frac{3}{2}})\right.$ และ $\left.y = 7(10^{\frac{5}{2}})\right)$

จากเงื่อนไข ก. $x > y$

เพราะฉะนั้น $x = 7(10^{\frac{5}{2}})$ และ $y = 7(10^{-\frac{3}{2}})$

ดังนั้น $x = 7(10^{\frac{5}{2}}) \simeq 700\sqrt{10} = 700(3.14)$

$= 2213.6$

สรุป $x \in (1001, 10000]$

16. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $2 \mid (7+3)$ และ $2 \mid (7-3)$

แต่ $2 \nmid 7$ และ $2 \nmid 3$

เพราะฉะนั้น $2 \notin A$

นั่นคือตัวเลือก (1) และ (2) ผิด

ตัวเลือก (3) ถูกต้องแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก

ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มใดๆ $n \mid (x+y)$ และ $n \mid (x-y)$

ดังนั้น $n \mid ((x+y)+(x-y))$ และ $n \mid ((x+y)-(x-y))$

$n \mid 2x$ และ $n \mid 2y$

เพราะว่า n เป็นจำนวนคี่บวก ดังนั้น $n \mid x$ และ $n \mid y$

นั่นคือ เซตจำนวนเต็มคี่บวกเป็นสับเซตของ A

การแสดงว่า A เป็นสับเซตของจำนวนเต็มคี่บวก เราจะแสดง

ข้อพิสูจน์ว่า ถ้า n เป็นจำนวนคู่บวกแล้ว $n \notin A$ ซึ่งมีความหมาย

ว่า ถ้า $n \in A$ แล้ว n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก

ให้ n เป็นจำนวนคู่บวก เลือก $x = n+1$ และ $y = n-1$

จะได้ว่า $n \mid (x+y)$ และ $n \mid (x-y)$

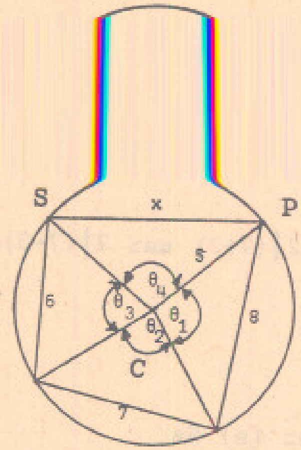
แต่ $n \nmid x$ และ $n \nmid y$ นั่นคือ $n \notin A$

เพราะฉะนั้น A เป็นสับเซตของจำนวนเต็มคี่บวก

สรุป A = เซตของจำนวนคี่บวกทั้งหมด

17. ตอบ 1.

แนวคิด



จากรูปและโดยกฎของโคไซน์จะได้

$$\cos\theta_1 = \frac{5^2+5^2-8^2}{2(5)(5)} = -\frac{14}{50}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{5^2+5^2-7^2}{2(5)(5)} = \frac{1}{50}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{5^2+5^2-6^2}{2(5)(5)} = \frac{14}{50}$$

เพราะว่า $\cos\theta_1 = -\cos\theta_3$

และ $0 < \theta_1 < \pi$ และ $0 < \theta_3 < \pi$

เพราะฉะนั้น $\theta_1 = \theta_3$ หรือ $\theta_1 + \theta_3 = \pi$

เพราะว่า $|PQ| = 8 \neq 6 = |RS|$ เพราะฉะนั้น $\theta_1 \neq \theta_3$

นั่นคือ $\theta_1 + \theta_3 = \pi$

เพราะว่ามุมรอบจุดเท่ากับ 2π ดังนั้น $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = 2\pi$

แต่ $\theta_1 + \theta_3 = \pi$ ดังนั้น $\theta_2 + \theta_4 = \pi$ หรือ $\theta_4 = \pi - \theta_2$

$\cos\theta_4 = \cos(\pi - \theta_2) = -\cos\theta_2 = -\frac{1}{50}$

ในสามเหลี่ยม CSP จะได้ $x^2 = 5^2 + 5^2 - 2(5)(5)\cos\theta_4$

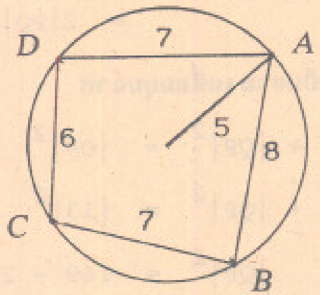
$$= 50 - 50(-\frac{1}{50}) = 51$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt{51} \approx 7$

การตัดตัวเลือก วาดรูปเพื่อช่วยในการหาคำตอบเป็นวิธีที่ดีที่สุด

1. เขียนวงกลมรัศมี 5 เซนติเมตร

2. กางวงเวียน 8,7 และ 6 เซนติเมตร ตามลำดับ และตัดส่วนของวงกลม

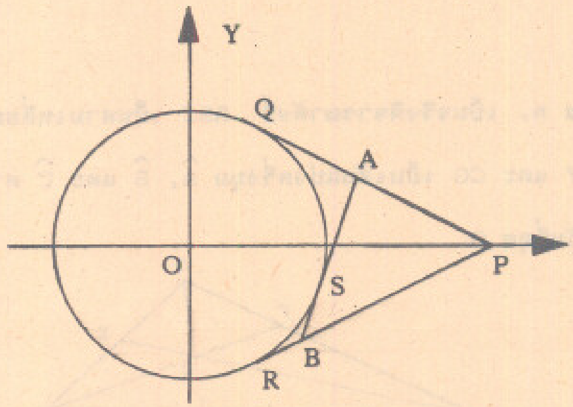


3. วัดระยะทาง AD ด้วยไม้บรรทัดได้ 7 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

18. **ตอบ** 2.

แนวคิด



จากเหตุผลที่กล่าวว่าจากจุดภายนอกวงกลมจะลากเส้นตรงมาสัมผัสได้ 2 เส้น และเส้นสองเส้นนั้นต้องยาวเท่ากัน

เพราะฉะนั้น $|PQ| = |PR|$, $|AQ| = |AS|$ และ $|BR| = |BS|$

ดังนั้นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม APB เท่ากับ $|BP|+|PA|+|AS|+|SB|$

$$= |BP|+|PA|+|AQ|+|BR|$$

$$= |PR|+|PQ|$$

$$= 2|PQ|$$

เพราะว่า OQP เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$|OQ|^2 + |QP|^2 = |OP|^2$$

$$5^2 + |QP|^2 = |13|^2$$

$$|QP|^2 = 169 - 25 = 144$$

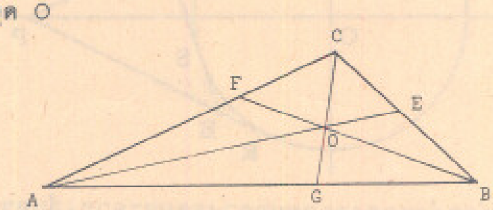
$$|QP| = 12$$

เพราะฉะนั้นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม APB เท่ากับ 24 เซนติเมตร

19. ตอบ 2.

แนวคิด

ข้อความ ก. เป็นจริงพิจารณาดังนี้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้านมี AE, BF และ CG เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{A}$, $\hat{B}$ และ $\hat{C}$ ตามลำดับ และตัดกันที่จุด O



เพราะว่า $AO + OB > AB$

$$OB + OC > BC$$

$$OC + OA > AC$$

ดังนั้น $2(AO + OB + OC) > AB + BC + AC$

$$AO + OB + OC > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$$

เพราะฉะนั้น $(AO + OE) + (OB + OF) + (OC + OG) > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

สรุป $AE + BF + CG > \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

ข้อความ ข. เป็นเท็จ

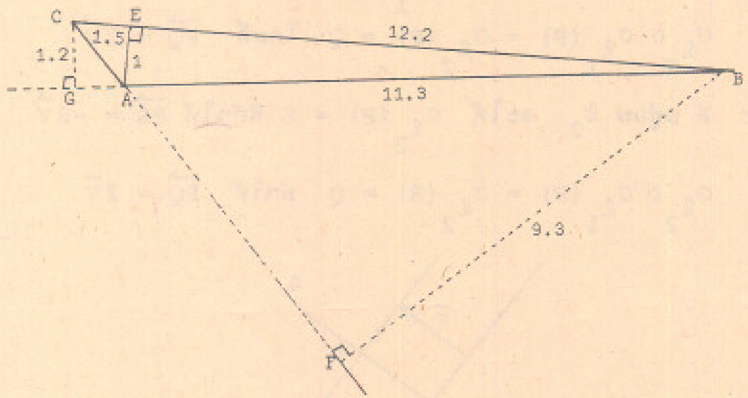
พิจารณา ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน AE, BF และ CG เป็นระยะ

ตั้งฉากจากจุดยอดไปยังฐานของสามเหลี่ยม

เมื่อ $C\hat{A}B$ ใหญ่ขึ้นจะได้ว่า AE, BF และ CG จะเล็กลง ซึ่งจะทำให้

$$AE + BF + CG \not> \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

ตัวอย่างเช่น



ความยาว $AB \simeq 11.3$ เซนติเมตร

$BC \simeq 12.2$ เซนติเมตร

$AC \simeq 1.5$ เซนติเมตร , $AB + BC + AC = 25$

AE ≃ 1 เซนติเมตร

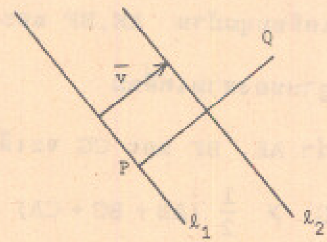
BF ≃ 9.3 เซนติเมตร

CG ≃ 1.2 เซนติเมตร , AE + BF + CG = 11.5

จะได้ว่า AE + BF + CG $\not>$ $\frac{1}{2}$ (AB + BC + AC)

20. **ตอบ** 3.

แนวคิด

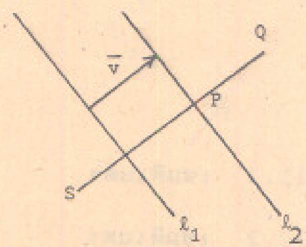


กรณี 1 P อยู่บน ℓ_1 จะได้ $\sigma_{\ell_1}(P) = P$

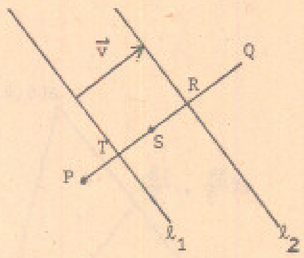
และ $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}(P) = \sigma_{\ell_2}(P) = Q$ โดยที่ $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{v}$

กรณี 2 P อยู่บน ℓ_2 จะได้ $\sigma_{\ell_2}(P) = S$ ที่ทำให้ $\overrightarrow{PS} = -2\vec{v}$

ดังนั้น $\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}(P) = \sigma_{\ell_2}(S) = Q$ ทำให้ $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{v}$



กรณี 3 P ไม่อยู่บน ℓ_1 และ ℓ_2



$\sigma_{\ell_1}(P) = S$ โดยที่ ℓ_1 แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ PS ที่ T ,

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{TS}$

$\sigma_{\ell_2} \circ \sigma_{\ell_1}(P) = \sigma_{\ell_2}(S) = Q$ โดยที่ ℓ_2 แบ่งครึ่งและ

ตั้งฉากกับ SQ ที่ R จะได้ $\overrightarrow{PQ} = 2\vec{v}$

ตอนที่ 2

1. **ตอบ** 89

แนวคิด $\cos^2 1^\circ + \cos^2 91^\circ = \cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ = 1$

$\cos^2 2^\circ + \cos^2 92^\circ = \cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ = 1$

$\cos^2 3^\circ + \cos^2 93^\circ = \cos^2 3^\circ + \sin^2 3^\circ = 1$

$\vdots$

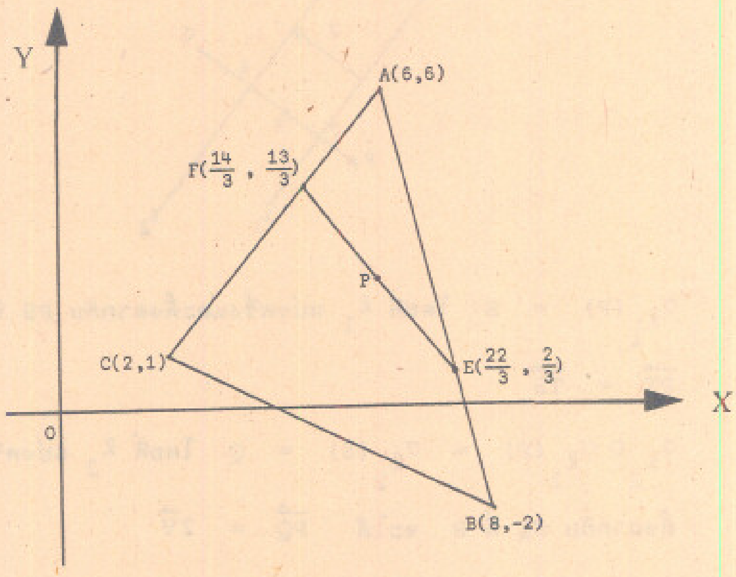
$\cos^2 89^\circ + \cos^2 179^\circ = \cos^2 89^\circ + \sin^2 89^\circ = 1$

และ $\cos^2 90^\circ = 0$

สรุป $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \ldots + \cos^2 179^\circ = 89$

2. ตอบ 11

แนวคิด



E อยู่บนด้าน AB และ AE = 2EB จะได้ว่า E มีพิกัดเป็น $(\frac{22}{3}, \frac{2}{3})$

F อยู่บนด้าน AC และ AF = $\frac{1}{2}$FC จะได้ว่า F มีพิกัดเป็น $(\frac{14}{3}, \frac{13}{3})$

พิกัดของ P(a,b) คือ

$$a = \frac{\frac{14}{3} + \frac{22}{3}}{2} = \frac{36}{6} = 6$$

$$b = \frac{\frac{13}{3} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

เพราะฉะนั้น a + 2b = 11

3. ตอบ 5

แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา

$$x^2 = 2y-1$$
$$= 2(y - \frac{1}{2})$$
$$= 4(\frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})$$

พาราโบลามีจุดยอด $(0, \frac{1}{2})$ และ $c = \frac{1}{2}$

เพราะว่า พาราโบลาหงาย เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสคือ จุด $A(0,1)$

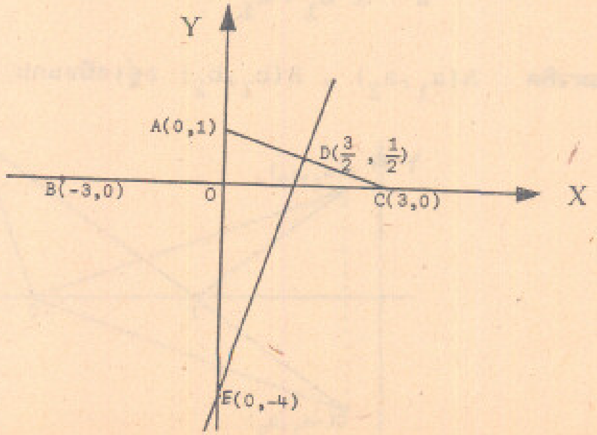
จัดรูปสมการไฮเพอร์โบลา

$$7x^2 - 2y^2 = 14$$
$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$$

เป็นรูปไฮเพอร์โบลาที่มีแกนไฮเพอร์โบลาทับแกน X , จุดยอด (0,0)

$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{7}$ และ $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$

ดังนั้นโฟกัสคือจุด $B(-3,0)$ และ $C(3,0)$



วงกลมผ่านจุด A,B และ C จะมีจุดศูนย์กลางที่จุดตัดของเส้นตรงที่

ตั้งฉาก และแบ่งครึ่งด้าน AB, AC และ BC

จุดกึ่งกลางด้าน AC คือ $D(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$

ความชันเส้นตรงที่ผ่านจุด A, C คือ $\frac{1-0}{0-3} = -\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AC ความชันเท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AC คือ

$$y - \frac{1}{2} = 3(x - \frac{3}{2})$$

$$3x - y - 4 = 0$$

เส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BC คือ แกน Y

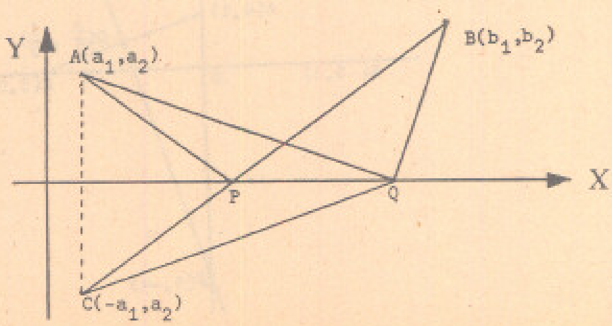
จุดตัดของเส้นตรง $3x-y-4 = 0$ กับแกน Y คือ $E(0,-4)$

ดังนั้น $E(0,-4)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A,B และ C

รัศมีวงกลมเท่ากับความยาว AE สรุปรัศมีของวงกลมเท่ากับ 5

4. **ตอบ** $(0, a_2 + a_1(\frac{b_2 - a_2}{b_1 + a_1}))$

แนวคิด $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ อยู่เหนือแกน X



ให้ C มีพิกัดเป็น $(-a_1,a_2)$ P เป็นจุดตัดของ BC กับแกน X

ให้ Q เป็นจุดใดๆ บนแกน X จะได้ว่า CQ + QB ยาวกว่า BC

AP = CP และ AQ = CQ

สรุป P เป็นจุดบนแกน X ที่ทำให้ PA + PB มีค่าน้อยที่สุด

พิกัดของ P คือ $(0,\ a_2 + a_1(\frac{b_2 - a_2}{b_1 + a_1}))$

5.ตอบ 5

แนวคิด พิจารณา $2^{3x} + 2^{4y} = 2^{5z}$

เพราะฉะนั้น $3x < 5z$ และ $4y < 5z$

พิจารณากรณี $3x \leqslant 4y$ จะได้ $1 + 2^{4y-3x} = 2^{5z-3x}$

เพราะฉะนั้น $2^{4y-3x} = 1$ นั่นคือ $4y-3x = 0$, $4y = 3x$

ในทำนองเดียวกันหากเราพิจารณากรณี $3x \geqslant 4y$ ก็จะได้ว่า $4y = 3x$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} 2^{3x} + 2^{4y} &= 2^{5z} \\ 2^{3x} + 2^{3x} &= 2^{5z} \\ 2^{3x+1} &= 2^{5z} \\ 3x+1 &= 5z \end{aligned}$$

พิจารณาค่า x ที่ทำให้ 3x + 1 มีค่าเป็นทวีคูณของ 5 คือ 3,8,13,18

เพราะว่าค่าต่ำสุดของ x ที่เป็นไปได้คือ x = 8

สรุปค่า z ที่น้อยที่สุดคือ z = 5

6. ตอบ 23

แนวคิด $X = \{1,2,3,...,1000\}$

$A = \{x \in X \mid 6$ หาร x แล้วเหลือเศษ $2\}$

$= \{2,8,14,20,26,32,38,44,...,992,998\}$

$B = \{x \in X \mid 14$ หาร x แล้วเหลือเศษ $10\}$

$= \{10,24,38,52,66,80,...,976,990\}$

จากการแจกแจงสมาชิกของ A และ B โดยใช้ข้อสังเกตว่า สมาชิกตัวแรกที่ซ้ำกันคือ 38 และตัวถัดไปเพิ่มค่าที่ละ 42 จะได้ว่า

$A \cap B = \{38,80,122,...,920,962\}$

และ $n(A \cap B) = 23$

7. ตอบ 140

แนวคิด

ขนาดสี่เหลี่ยมจัตุรัส	จำนวน
1 × 1	7 × 7 = 49
2 × 2	6 × 6 = 36
3 × 3	5 × 5 = 25
4 × 4	4 × 4 = 16
5 × 5	3 × 3 = 9
6 × 6	2 × 2 = 4
7 × 7	1 × 1 = 1
	รวม 140

8. **ตอบ** $f(2) = 3$ หรือ $f(2) = 5$

แนวคิด จากเงื่อนไข (ข) และ (ค) จะได้ว่า $f(1) = 1$

$g(1) = 1$

ถ้า $f(1) = 1$ แล้ว $1 = g(g(1)) + 1$ ซึ่งจะทำให้

$g(g(1)) = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $g : I^+ \rightarrow I^+$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$ ไม่ได้ ดังนั้น $g(1) = 1$ เท่านั้น

ผลที่ตามมา $f(1) = g(g(1)) + 1 = g(1) + 1 = 1 + 1 = 2$

สมมติ $g(2) = 3$

จะได้ $f(2) = g(g(2) + 1 = g(3) + 1 \geqslant 4 + 1 = 5$

ดังนั้นไม่มี $n \in I^+$ ที่ทำให้ $f(n) = 4$ หรือ $g(n) = 4$

เพราะฉะนั้น $g(2) = 3$ ไม่ได้

ในทำนองเดียวกัน $g(2) > 3$ ไม่ได้ด้วย

เพราะฉะนั้น $g(2) = 2$ เท่านั้น

สรุป $f(2) = g(g(2)) + 1 = g(2) + 1 = 2 + 1 = 3$

หมายเหตุ **(1)** $f(n) = n + 1$ และ $g(n) = n$

สอดคล้องเงื่อนไข (ก) - (ค) ดังนั้น $f(2) = 3$

(2) ถ้าพิจารณากรณี

$\{f(1), f(2), \ldots\} \cap \{g(1), g(2), \ldots\} = \phi$

จะได้ว่า $g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 4, \ldots$

$f(1) = 2, g(2) = 5$

9. ตอบ R = 8

แนวคิด เลขโดด 2 ตัวที่ต่างกันบวกกันจะมีค่าไม่เกิน 17 จะเห็นว่าถ้าเกิดตัวทดจะมี 1 เป็นตัวทด นอกจากนี้เลขโดด 2 ตัวที่ต่างกัน เมื่อนำมาบวกกันและบวกกับตัวทดคือ 1 ก็จะมีค่าไม่เกิน 18 ถ้าให้ C แทนตัวเลขที่อาจจะเป็น 0 หรือ 1 (ถ้ามีการทด C = 1 ถ้าไม่มีการทด C = 0) จะแทน O (โอ) ด้วย $\underline{O}$

พิจารณาหลักพัน $S+M+C = M\underline{O}$ (โอ) ซึ่ง $M\underline{O}$ เป็นเลข 2 หลัก

จะได้ $M = 1$ ______________ (1)

ดังนั้น $S+1+C = 10$

ถ้าไม่มีการทดมาก่อน ในหลักร้อยจะได้ C = 0

$$S + 1 = 1\underline{O}$$

แต่ S เป็นเลขโดด S+1 จะเป็นเลข 2 หลักได้ในกรณีที่ S = 9

จึงทำให้ $S + 1 = 9 + 1 = 10$

ดังนั้น $\underline{O} = 0$

ถ้ามีการทดมาก่อน ในหลักร้อย จะได้ C = 1

$$S + 1 + 1 = 1\underline{O}$$

แต่ $\underline{O} \neq M$ ดังนั้น $\underline{O} \neq 1$

เนื่องจาก S เป็นเลขโดด ดังนั้น S+1+1 ไม่เกิน 11

จะได้ $\underline{O} = 0$

จะเห็นว่าทั้งรูปแบบที่มีการทดหรือไม่มีการทดจากหลักร้อย ก็จะให้

$\underline{O} = 0$ ________________ (2)

จาก $S + 1 + 1 = 10$ จึงได้ $S = 8$

พิจารณาหลักร้อย

$E + \underline{O} + C = N$ หรือ $E + \underline{O} + C = 1N$

จะได้ $E + C = N$ หรือ $E + C = 1N$

เนื่องจาก $E \neq N$

จึงมีการทด จะได้ $C = 1$

ดังนั้น $E + 1 = N$ หรือ $E + 1 = 1N$

แต่ $E + 1 = N$ ไม่ได้เพราะ E เป็นเลขโดด $E + 1 \leq 10$

และ $N \neq 0$

จึงได้ $E + 1 = N$ และไม่มีการทดจากหลักร้อยไปหลักพัน

ดังนั้น $S = 9$

ขณะนี้จะได้

$$\begin{array}{r} 9\,E\,N\,D \\ +\quad 1\,0\,R\,E \\ \hline 1\,0\,N\,E\,Y \\ \hline \end{array}$$

พิจารณาหลักสิบ จากหลักร้อยทราบว่า $E + 1 = N$

และ $E + 0 + 1 = N$ จึงเกิดจากการทดในหลักสิบ

จะได้ $N + R + C = 1E = 10 + E$

$E + 1 + R + C = 1E = 10 + E$

เนื่องจาก $R \neq S$ และ $S = 9$

ดังนั้น $R = 8$ และ $C = 1$ (เป็นการทดมาจากหลักหน่วย)

จะได้

$$
\begin{array}{r}
9\ E\ N\ D \\
+\quad 1\ 0\ 8\ E \\
\hline
1\ 0\ N\ E\ Y \\
\hline\hline
\end{array}
$$

พิจารณาหลักหน่วย จากการพิจารณาหลักสิบทราบว่า มีการทดมาจากหลักหน่วย ดังนั้น $D + E = 1Y = 10 + y$

พิจารณาค่า D, E และ Y

เนื่องจาก $D, E \neq 9, \neq 8$ $Y \neq 0$ และ $Y \neq 1$

จะได้ $D + E > 11$ กรณีที่เป็นไปได้ของ D และ E คือ

($D = 7$ และ $E = 6$) หรือ ($D = 7$ และ $E = 5$) หรือ

($D = 5$ และ $E = 7$) หรือ ($D = 6$ และ $E = 7$)

พิจารณากรณี $D = 7$ และ $E = 6$ เป็นไปไม่ได้

เพราะ $N = E + 1$ จะทำให้ $N = 7 = D$

พิจารณากรณี $D = 5$ และ $E = 7$ เป็นไปไม่ได้

เพราะ $N = E + 1$ จะทำให้ $N = 8 = R$

พิจารณากรณี $D = 6$ และ $E = 7$ เป็นไปไม่ได้

จะทำให้ $N = 8$

พิจารณากรณี $D = 7$ และ $E = 5$ จะได้ $N = 6$ และ $Y = 2$ เป็นไปได้

ตรวจสอบ

$$\begin{array}{r} 9567 \\ 1085 \\ \hline 10652 \\ \hline\hline \end{array}$$

๑๐. **ตอบ** ผลิตสินค้าชนิดที่ ๑ 3 หน่วย, ผลิตสินค้าชนิดที่ ๒ 9 หน่วย, เหลือวัตถุดิบประเภท C 2 หน่วย

แนวคิด ให้ x = จำนวนสินค้าชนิดที่ ๑

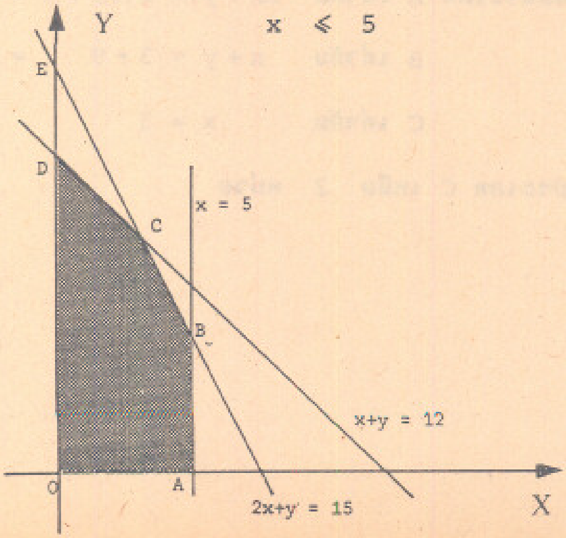
y = จำนวนสินค้าชนิดที่ ๒

จากข้อมูลจะได้ว่า รายได้ $P = 1.5x + y$

ภายใต้เงื่อนไข $2x + y \leqslant 15$

$x + y \leqslant 12$

$x \leqslant 5$



จากการพิจารณาโดยใช้กราฟจะได้ว่าส่วนแรเงาคือบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้

พิกัดของจุดมุมคือ O(0,0), A(5,0), B(5,5), C(3,9), D(0,12)

จุดมุม	$P = 1.5x + y$
(0,0)	0
(5,0)	7.5
(5,5)	12.5
(3,9)	13.5
(0,12)	12

สรุป ค่าสูงสุด $P = 13.5$ เมื่อ $x = 3,\ y = 9$

(ก) ผลิต $x = 3$ และ $y = 9$

ใช้วัตถุดิบประเภท A เท่ากับ $2x + y = 2(3) + 9 = 15$

B เท่ากับ $x + y = 3 + 9 = 12$

C เท่ากับ $x = 3$

(ข) วัตถุดิบประเภท C เหลือ 2 หน่วย

แบบทดสอบฉบับที่ 2

1. **ข้อพิสูจน์** จาก $a < \frac{b+c}{2}$ จะได้ $4a^2 < b^2 + c^2 + 2bc$

เพราะว่า $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$

เพราะฉะนั้น
$$4a^2 + 4c^2 - 8bc\cos\hat{A} < b^2 + c^2 + 2bc$$
$$3b^2 + 3c^2 - 2bc < 8bc\cos\hat{A}$$
$$3b^2 - 6bc + 3c^2 < 8bc\cos\hat{A} - 4bc$$
$$3(b-c)^2 < 8bc(\cos\hat{A} - \tfrac{1}{2})$$

สรุป $\cos\hat{A} - \frac{1}{2} > 0$ **นั่นคือ** $\cos A > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น
$$\hat{A} < \frac{\pi}{3}$$
$$3\hat{A} < \pi$$
$$2\hat{A} < \pi - \hat{A} = \hat{B} + \hat{C}$$
$$\hat{A} < \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

2. **ตอบ** **ก.** 9 **ข.** 68 **และ ค.** 931

แนวคิด ก. พิจารณา i , $29 \leqslant i \leqslant 92$

$$[a] \leqslant [a + \frac{i}{100}] \leqslant [a] + 1$$

ดังนั้น
$$\sum_{i=29}^{92} [a] \leqslant \sum_{i=29}^{92} [a + \frac{i}{100}] \leqslant \sum_{i=29}^{92} ([a] + 1)$$

$$64[a] \leqslant 600 \leqslant 64[a] + 64$$

$$[a] \leqslant \frac{600}{64} \leqslant [a] + 1$$

$$[a] \leqslant 9.375 \leqslant [a] + 1$$

เพราะว่า $[a]$ เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $[a] = 9$

ข. เพราะว่า $[a + \frac{i}{100}] = 9$ หรือ 10

เมื่อ $i = 29, 30, \ldots, 92$

และ $[a + \frac{29}{100}] \leqslant [a + \frac{30}{100}] \leqslant [a + \frac{31}{100}] \leqslant \ldots \leqslant [a + \frac{92}{100}]$

$m =$ จำนวนสมาชิก $\{i \mid [a + \frac{i}{100}] = 9$ เมื่อ $i \in \{29, 30, \ldots, 92\}\}$

$n =$ จำนวนสมาชิก $\{i \mid [a + \frac{i}{100}] = 10$ เมื่อ $i \in \{29, 30, \ldots, 92\}\}$

เพราะฉะนั้น $m + n = 64$

$$9m + 10n = 600$$

ทำให้ $m = 40$ และ $n = 24$

เพราะว่า $[a + \frac{29}{100}] = [a + \frac{30}{100}] = \ldots = [a + \frac{68}{100}]$

$$= 9 = [a]$$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็ม k, $29 \leqslant k \leqslant 92$ ที่มากที่สุดที่ทำให้

$[a + \frac{k}{100}] = 9 = [a]$ คือ $k = 68$

ค. เพราะว่า $[a + \frac{68}{100}] = 9$ และ $[a + \frac{69}{100}] = 10$

เพราะฉะนั้น $9 \leqslant a + \frac{68}{100} < 10$ และ $10 \leqslant a + \frac{69}{100} < 11$

ดังนั้น $900 \leqslant 100a + 68 < 100$

และ $1000 \leqslant 100a + 69 < 1100$

เพราะฉะนั้น $931 \leqslant 100a < 932$

นั่นคือ $[100a] = 931$

3. **ข้อพิสูจน์**

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}}$$

$$a_n^2 = a_{n-1}^2 + 2 + \frac{1}{a_{n-1}^2}$$

ดังนั้น $a_n^2 < a_{n-1}^2 + 3$ และ $a_n^2 > a_{n-1}^2 + 2$

เพราะว่า $a_1 = 1$ จะได้

$a_2^2 < 1 + 3$ และ $a_2^2 > 1 + 2$

$a_3^2 < a_2^2 + 3 = 1+3+3$ และ $a_3^2 > a_2^2 + 2 = 1+2+2$

$\vdots$ $\vdots$

$a_n^2 < 1 + 3(n-1)$ และ $a_n^2 > 1 + 2(n-1)$

ดังนั้น $a_{2535}^2 < 1+3(2535-1)$ และ $a_{2535}^2 > 1+2(2535-1)$

$a_{2535}^2 < 7603$ และ $a_{2535}^2 > 5096$

$a_{2535} < 87.19$ และ $a_{2535} > 71.38$

สรุป $71 < a_{2535} < 88$

ข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2534

วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 4 สิงหาคม 2534 เวลา 9.00 - 12.00 น.

<u>แบบทดสอบฉบับที่ 1</u> เป็นแบบปรนัยใช้เวลาทำ 2 ชั่วโมง

<u>ตอนที่ 1</u> ข้อสอบแบบเลือกคำตอบ 25 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1. กำหนด A, B และ C เป็นเซตจำกัดใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A \cap B \cap C = \phi$ จะได้ว่า

จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B \cup C)$ เท่ากับ 2^k

เมื่อ k = ผลรวมของจำนวนสมาชิกของ A, B และ C

ข. จำนวนสมาชิกของ $(A \cap B) \cup C$ น้อยกว่าจำนวนสมาชิกของ $A \cup B \cup C$

ค. $\{A \cap B \cap C\} \in P(P(A))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. - ค. ถูกต้องเพียงข้อเดียว

(2) ข้อ ก. - ค. ถูกต้องเพียง 2 ข้อ

(3) ข้อ ก. - ค. ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ

(4) ข้อ ก. - ค. ผิดทุกข้อ

2. ให้ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก สำหรับ $n \in I^+$ ให้ D_n แทนช่วงเปิดโดยที่ $D_n = (0, \frac{1}{n})$

ถ้า $s < t$ แล้ว $D_s \cup D_t$ เท่ากับข้อใด

(1) $D_s \cap D_t$ (2) D_s

(3) D_t (4) D_t'

3.

บทนิยาม กำหนดให้ A และ B ต่างก็เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ E ให้ $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(A \Delta B)' = (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

ข. $(A \Delta B)' = (A' \cup B) \cap (A \cup B')$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. ถูกต้องเพียงข้อเดียว

(2) ข้อ ข. ถูกต้องเพียงข้อเดียว

(3) ข้อ ก. และข้อ ข. ถูกต้องทั้ง 2 ข้อ

(4) ข้อ ก. และข้อ ข. ผิดทั้ง 2 ข้อ

4. กำหนดให้ $S = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1\}$, $B = \{5\}$ และ $A \subset X \subset S$, $B \subset Y \subset S$ จงหาว่า $X \cup Y$ มีทั้งหมดกี่เซตที่แตกต่างกัน

(1) 8 (2) 16

(3) 32 (4) 64

5. ข้อความ "ถ้า $(a,b) = (x,y)$ แล้ว $a = x$ และ $b = y$"

สมมูลกับข้อความใดบ้าง

ก. ถ้า $a \neq x$ หรือ $b \neq y$ แล้ว $(a,b) \neq (x,y)$

ข. $(a,b) \neq (x,y)$ หรือ ($a = x$ และ $b = y$)

(1) ข้อ ก. แต่ไม่ใช่ข้อ ข. (2) ข้อ ข. แต่ไม่ใช่ข้อ ก.

(3) ทั้งข้อ ก. และข้อ ข. (4) ไม่ใช่ทั้งข้อ ก. และข้อ ข.

6. ข้อความ

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)] \longrightarrow [t \rightarrow s \wedge \sim s]$

สมมูลกับข้อความใดต่อไปนี้

(1) $\sim q \vee t$ (2) $\sim(q \wedge t)$

(3) $(p \wedge q) \vee t$ (4) $\sim(p \wedge q) \vee s$

7. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

ข้อความใดต่อไปนี้คือความหมายของ $A \neq B$

(1) $\exists x[(x \in A \rightarrow x \notin B) \wedge (x \in B \rightarrow x \notin A)]$

(2) $\exists x[(x \notin A \rightarrow x \notin B) \vee (x \notin B \rightarrow x \notin A)]$

(3) $\exists x[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$

(4) $\exists x[(x \in A \vee x \notin B) \wedge (x \in B \vee x \notin A)]$

8. ให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x+1| > x+|x-1|$

ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง เมื่อกำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซต A

(1) $\forall x\,[\,|x+3| < 1\,]$ (2) $\forall x\,[\,x^2-4 > 0\,]$

(3) $\forall x\,[\,\frac{x(x+3)^2}{(x-1)} < 0\,]$ (4) $\forall x\,[\,(x-5)|x| < 0\,]$

9. ให้ A เป็นเซตคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

P(A) มีสมาชิกกี่ตัว

(1) 1 (2) 2

(3) 4 (4) 16

10. กำหนดระบบสมการ $x^2 + y^2 = 17$

$$x + y = 5$$

ถ้า $A = \{(a,b),(c,d)\}$ เป็นเซตคำตอบของระบบสมการข้างต้น $a+b+c+d$ เท่ากับข้อใด

(1) 4 (2) 6

(3) 8 (4) 10

11. เซตคำตอบของอสมการ

$$x\sin^2 x + \cos^2 x - x\sin x + \sin x + x < 2$$

คือ

(1) $(-\infty,1)$ (2) $(-1,\infty)$

(3) $(-2\pi,2\pi)$ (4) ϕ

12. กำหนด P(1,0) , Q(2,-1) และ R(-1,-2) เป็นจุดสามจุดในระนาบพิกัดฉาก ถ้า A,B และ C เป็นจุดอีกสามจุดในระนาบเดียวกันที่ทำให้รูปสี่เหลี่ยม AQPR, BRQP และ CPRQ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแล้ว ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นกี่หน่วย

(1) $8\sqrt{2} + 4\sqrt{10}$ (2) $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

(3) $10\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$ (4) 40

13. เส้นตรง ℓ มีความชัน $\frac{1}{2}$ ผ่านจุด A(-3,0) และตัดแกน Y ที่จุด B C เป็นจุดที่ทำให้เส้นตรง BC ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ และเส้นตรง AC ขนานกับแกน Y ส่วนของเส้นตรง AC ยาวเท่าใด

(1) 7.5 หน่วย (2) 6.5 หน่วย

(3) 4.5 หน่วย (4) 3.5 หน่วย

14. กำหนดให้จุด B และ C มีพิกัด (2,1) และ (-5,3) และ $r = \{(x,y) \mid (x,y)$ เป็นพิกัดของจุดซึ่งประกอบกับจุด B และ C แล้วได้จุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 5 ตารางหน่วย$\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $(0,-6) \in r$

(2) r เป็นเซตจำกัด

(3) กราฟของ r เป็นเส้นตรงเส้นเดียว

(4) กราฟของ r เป็นเส้นตรงสองเส้น

15. | | |
|---|---|
| **บทนิยาม** | ส่วนของเส้นตรงซึ่งผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา โดยมีจุดปลายทั้งสองข้างอยู่บนพาราโบลา เรียกว่า **เลตัสเรกตัม** |

ให้ ℓ เป็นความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่ $(2,-3)$ และมีเส้นตรง $x+y = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant \ell < 1$ (2) $\ell^3 - \ell^2 - 2\ell + 2 = 0$

(3) $\ell^3 - 4\ell = 0$ (4) $5\ell - 4 \leqslant \ell^2$

16. กำหนด $f(x) = \frac{|x|}{x+1}$ ถ้า A คือเรนจ์ของ f และ $B = [-1,1]$ แล้ว $A \cap B$ เท่ากับเซตในข้อใด

(1) $(-1,1)$ (2) $(-1,0]$

(3) $[0,1]$ (4) $(-1,1]$

17. ฟังก์ชันต่อไปนี้ คู่ใดเป็นฟังก์ชันเดียวกัน

(1) $f_1 = \{(x,y) \mid x = \sqrt{y} - 2\}$,

$f_2 = \{(x,y) \mid y = (x+2)^2\}$

(2) $g_1 = \{(x,y) \mid y = \frac{x^2+x+1}{x+1}\}$,

$g_2 = \{(x,y) \mid y = \frac{x^3-1}{x^2-1}\}$

(3) $h_1 = \{(x,y) \mid xy - x = 1\}$,

$h_2 = \{(x,y) \mid x = \frac{1}{y-1}\}$

(4) $F_1 = \{(x,y) \mid y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}\}$,

$F_2 = \{(x,y) \mid y = \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\}$

18. สำหรับทุก $x \in R$ ให้ $f(x) = x + |x|$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

(1) มีช่วง $J \subset R$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in J$ แล้ว $f(x_1) = f(x_2)$

(2) มีช่วง $I \subset R$ ซึ่งถ้า $x_1, x_2 \in I$ และ $x_1 \neq x_2$ แล้ว

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 2$$

(3) $R_f \subset [0,\infty)$

(4) $D_f - R_f = (-\infty,0]$

19. กำหนดให้ $f(x) = x\,|x|$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใด

(1) $|x|\sqrt{|x|}$

(2) $\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$

(3) $\frac{1}{x\,|x|}$

(4) ข้อ (1) - (3) ไม่มีข้อใดถูกต้อง

20. ให้ $f(x) = x^2-4x+3$ ค่าในข้อใดต่อไปนี้มีค่ามากที่สุด

(1) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $g(x) = f(x) + |f(x)|$

(2) ค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $h(x) = 2f(x)$

(3) ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $k(x) = f(x) - |f(x)|$

(4) ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $p(x) = 1 - f(x)$

21. **บทนิยาม** ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่มีคาบก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก p ซึ่ง $f(x+p) = f(x)$ ทุกๆ x ใน D_f และจำนวนจริงบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่งมีคุณสมบัติข้างต้นเรียกว่า คาบของ f

ถ้า $f_1(x) = 3x-\pi$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \frac{1}{2}x$

และ $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ มีคาบเท่ากับ m แล้ว m อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

(1) $[0, \frac{\pi}{3}]$ (2) $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

(3) $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ (4) $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

22. จงหาตำแหน่งของจำนวนจริง θ บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่ง

$$\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1$$

(1) อยู่บนเส้นตรง $y = x$

(2) อยู่บนแกน X

(3) อยู่บนแกน Y

(4) อยู่บนกราฟของพาราโบลา $y^2 = x$

23. สามเหลี่ยม ABC มี a,b,c เป็นด้านตรงข้ามมุม A,B และ C ตาม

ลำดับ และวงกลมที่ล้อมรอบมีรัศมี R จงเขียน $\frac{a+b+c}{2R}$ ในรูป

ของมุม A และ B

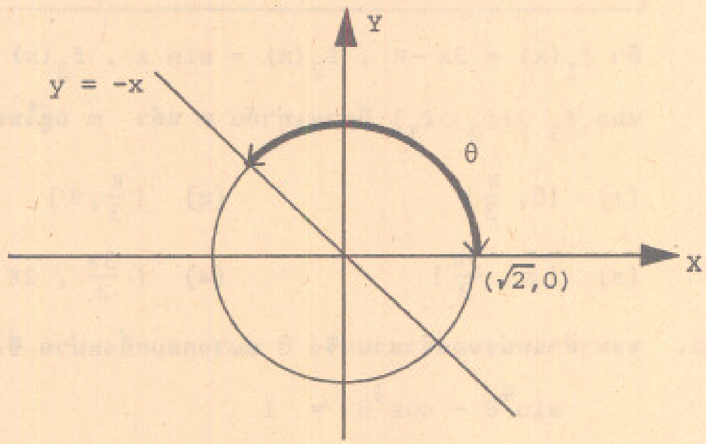
(1) $\frac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin(A+B)$

(2) $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A \sin B \sin(A+B)}{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}$

(3) $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A + \sin B - \sin(A+B)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A+B)}$

(4) $\frac{a+b+c}{2R} = \frac{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}{2\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A+B)}}$

24.



จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ (0,0) ตัดแกน X ที่จุด $(\sqrt{2},0)$

ส่วนโค้งของวงกลมที่มีจุด $(\sqrt{2},0)$ และจุดตัดของกราฟของเส้นตรง

$y = -x$ กับวงกลมในควอดรันต์ที่ 2 เป็นจุดปลายยาว θ หน่วย

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\cos\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก

ข. $\tan\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

ค. $\sin\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. เป็นจริงเพียงข้อเดียว

(2) ข้อ ข. เป็นจริงเพียงข้อเดียว

(3) ข้อ ค. เป็นจริงเพียงข้อเดียว

(4) ข้อ ก. - ค. เป็นเท็จทั้งสามข้อ

25. **บทนิยาม** ถ้า r และ s เป็นความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมและวงรีตามลำดับ วงกลม r เป็นวงกลมแนบในวงรี s ก็ต่อเมื่อ $D_r \subset D_s$ และ $R_r \subset R_s$ และ $n(r \cap s) = 2$ (เมื่อ $n(r \cap s)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของ $r \cap s$)

ถ้าวงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่แนบในวงรีซึ่งมีสมการ

$$121x^2 + 256y^2 - 242x + 512y - 107 = 0$$

มีเส้นรอบวงยาว θ หน่วย แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) $\tan(-\theta) = -1$ (2) $\cos(-\theta) = -\sin(-\theta)$

(3) $\cos\theta = \sin(-\theta)$ (4) $\tan(-\theta) = -\sqrt{2}\sin\theta$

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำ 10 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1. ถ้า $\sqrt{2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1}} = \left|ax + \sqrt{x^2-1}\right|$

   แล้ว $\sqrt{a}$ เท่ากับเท่าไร

2. ให้ด้านของกล่องทรงสี่เหลี่ยมยาว a,b และ c หน่วย ถ้า a,b และ c เป็นคำตอบของสมการ $x^3 - 10x^2 + 23x - 15 = 0$ แล้ว พื้นที่ผิวด้านนอกของกล่อง (รวมฝาปิด) เท่ากับกี่ตารางหน่วย เมื่อทุกหน้าของกล่องเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก

3. ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

   $$3^x + 3^{-x} = 2\sqrt{5}$$

   ค่าของ $3^x - 3^{-x}$ เท่ากับเท่าไร

4. นำเชือกยาว 18 หน่วย มาขดเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีเส้นทแยงมุมสั้นกว่า $\sqrt{53}$ หน่วย ให้ A แทนเซตของความยาวของด้านที่สั้นกว่าของรูปสี่เหลี่ยม จงเขียน A ในรูปช่วง

5. ถ้าส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายคือ (0,0) และ $(3,\sqrt{7})$ ทำมุม θ กับแกน X ทางบวกแล้ว $\sin 2\theta - \cos 2\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

6. จงหาสมการเส้นตรงซึ่งมีความชัน $\frac{3}{2}$ และสัมผัสพาราโบลา

   $y = 3x^2 - 2x + 1$ (ตอบในรูป $ax + by + c = 0$)

7. ถ้าไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และจุดโฟกัสจุดหนึ่งคือ (8,8) และมีความยาวของแกนตามขวางเท่ากับความยาวของแกนสังยุค จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา

8. ถ้า $f(x) = |\sin x| - \sin x$

และ $B = \{x \in [0,4\pi] \mid f(x) = -f(x)\}$

จงเขียน B ในรูปช่วงหรือยูเนียนของช่วง

9. จงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน $f = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}\}$

(ตอบในรูปช่วงหรือยูเนียนของช่วง)

10. กำหนด $A = \{(x,y) \in I \times I \mid x^3+y^3-3x^2+6y^2+3x+12y+6 = 0\}$

จงเขียน A แบบแจกแจงสมาชิก

<u>แบบทดสอบฉบับที่ 2</u> ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ข้อ ๆ ละ 10 คะแนน

ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีพื้นที่ 8 ตารางหน่วย มีจุด (3,4) เป็นจุดมุมของมุมฉาก และจุด (1,2) เป็นจุดมุมจุดหนึ่ง จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือ

2. ให้

$U = \{f : I \to I \mid f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุกๆ $x,y \in I\}$

$A = \{f \in U \mid |f(1000)| \leqslant 3999\}$

จงหาว่า A มีสมาชิกกี่ตัว อะไรบ้าง จงระบุมาให้ครบถ้วน

3. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

ถ้า $ab = 1$ จงพิสูจน์ว่า $a + b \geqslant 2$

เฉลยข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย ประจำปี 2534

แบบทดสอบฉบับที่ 1

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 1.

แนวคิด

ข้อความ ก. ผิด

ตัวอย่างเช่น $A = \{1,2\}$, $n(A) = 2$

$B = \{2,3\}$, $n(B) = 2$

$C = \{3,1\}$, $n(C) = 2$

จะได้ $A \cup B \cup C = \{1,2,3\}$, $n(A \cup B \cup C) = 3$

$n(P(A \cup B \cup C)) = 2^3 = 8 \neq 2^6$

ข้อความ ข. ผิด

ตัวอย่างเช่น $A = \phi$, $B = \phi$

จะได้ $(A \cap B) \cup C = C$

$A \cup B \cup C = C$

ดังนั้น $n((A \cap B) \cup C) = n(A \cup B \cup C)$

ข้อความ ค. ถูกต้อง

เพราะว่า $A \cap B \cap C \subset A$

เพราะฉะนั้น $A \cap B \cap C \in P(A)$

และ $\{A \cap B \cap C\} \in P(P(A))$

2. **ตอบ** 2.

แนวคิด เมื่อ $0 < s < t$ จะได้ $\frac{1}{s} > \frac{1}{t}$

ดังนั้น $(0, \frac{1}{t}) \subset (0, \frac{1}{s})$

นั่นคือ $D_t \subset D_s$

เพราะฉะนั้น $D_s \cup D_t = D_s$

การตัดตัวเลือก ใช้แทนค่า $s = 1$, $t = 2$ จะเข้าใจง่ายกว่า

นั่นคือ $D_s = (0,1)$, $D_t = (0, \frac{1}{2})$

$D_s \cup D_t = (0,1) = D_s$

3. **ตอบ** 3.

แนวคิด โดยการจัดรูปทางพีชคณิตของเซต

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$= (A \cap B') \cup (B \cap A')$$

$$= [(A \cap B')' \cap (B \cap A')']'$$

เพราะฉะนั้น $(A \triangle B)' = (A \cap B')' \cap (B \cap A')'$

$$= (A' \cup B) \cap (B' \cup A)$$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

พิจารณาต่อไป

$(A \triangle B)' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A)$

$= [(A' \cup B) \cap B'] \cup [(A' \cup B) \cap A]$

$= [(A' \cap B') \cup (B \cap B')] \cup [(A' \cap A) \cup (B \cap A)]$

$= [(A' \cap B') \cup \phi] \cup [\phi \cup (B \cap A)]$

$= [(A' \cap B')] \cup [(B \cap A)]$

$= (A \cap B) \cup (A' \cap B')$

สรุปข้อความ ก. ถูกต้อง

4. **ตอบ** 1.

แนวคิด $S = \{1,2,3,4,5\}$

$A = \{1\}$

$B = \{5\}$

$A \subset X \subset S$ และ $B \subset Y \subset S$

ดังนั้น $\{1,2\} \in X \cup Y$

เพราะฉะนั้น $n(X \cup Y) = 2, 3, 4, 5$ เท่านั้น

กรณีที่ 1 $n(X \cup Y) = 2$ มี 1 เซตคือ $\{1,5\}$

กรณีที่ 2 $n(X \cup Y) = 3$ มี 3 เซตคือ

$\{1,2,5\}$, $\{1,3,5\}$, $\{1,4,5\}$

กรณีที่ 3 $n(X \cup Y) = 4$ มี 3 เซตคือ

$\{1,5,2,3\}$, $\{1,5,2,4\}$, $\{1,5,3,4\}$

กรณีที่ 4 $n(X \cup Y) = 5$ มี 1 เซตคือ $\{1,2,3,4,5\}$

สรุป $X \cup Y$ มีได้ทั้งหมด $= 1+3+3+1 = 8$ เซต

แนวคิดที่ดีอีกวิธีหนึ่งคือ คิดแบบเหตุการณ์ตรงข้าม

นั่นคือ หาจำนวนสับเซตที่ไม่มี 1 หรือ 5

กรณีที่ 1 $1 \notin X \cup Y$ มีจำนวนวิธีเท่ากับจำนวนสับเซตของ

$\{2,3,4,5\}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^4 = 16$

กรณีที่ 2 $5 \notin X \cup Y$ มีจำนวนวิธีเท่ากับจำนวนสับเซตของ

$\{1,2,3,4\}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $2^4 = 16$

กรณีที่ 3 $1,5 \notin X \cup Y$ มีจำนวนวิธีเท่ากับ $2^3 = 8$

ดังนั้นจำนวน $X \cup Y$ ที่ไม่มี 1,5 เป็นสมาชิกเท่ากับ $16+16-8 = 24$

เพราะว่าจำนวนสับเซตของ S เท่ากับ $2^5 = 32$

เพราะฉะนั้นจำนวน $X \cup Y$ ที่มี 1,5 เป็นสมาชิกเท่ากับ $32 - 24 = 8$

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านจะแสดงให้เห็นเป็นกรณีทั่วไป

เมื่อ S มีสมาชิกมากขึ้นดังนี้

$S = \{1,2,3,\ldots,n\}$

$A = \{1\}$

$B = \{n\}$

$A \subset X \subset S$, $B \subset Y \subset S$

ดังนั้น $1,n \in X \cup Y$

เพราะฉะนั้น $n(X \cup Y) = 2,3,4,\ldots,n$

$n(X \cup Y) = 2$ มีจำนวนวิธี $= \binom{n-2}{0} = 1$

$n(X \cup Y) = 3$ มีจำนวนวิธี $= \binom{n-2}{1} = n-2$

$n(X \cup Y) = 4$ มีจำนวนวิธี $= \binom{n-2}{2}$

$\vdots$

$n(X \cup Y) = n$ มีจำนวนวิธี $= \binom{n-2}{n-2} = 1$

สรุปจำนวนเซต $X \cup Y$ เท่ากับ

$$\binom{n-2}{0} + \binom{n-2}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots + \binom{n-2}{n-2}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-2} \binom{n-2}{r}$$

5. **ตอบ** 3.

แนวคิด ให้ p แทนข้อความ $(a,b) = (x,y)$

q แทนข้อความ $a = x$

r แทนข้อความ $b = y$

ประพจน์ของโจทย์คือ $p \rightarrow (q \wedge r)$

ข้อความ ก. เปลี่ยนเป็นรูปแบบประพจน์คือ $(\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p$

เพราะว่า $(\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p$ สมมูลกับ $p \rightarrow \sim(\sim q \vee \sim r)$

ซึ่งก็คือ $p \rightarrow (q \wedge r)$

สรุป ข้อความ ก. สมมูลกับข้อความจากโจทย์

ข้อความ ข. เปลี่ยนเป็นรูปแบบประพจน์คือ $\sim p \vee (q \wedge r)$

เนื่องจาก $A \rightarrow B$ สมมูลกับ $\sim A \vee B$ ทุกประพจน์ A,B

ดังนั้น $p \rightarrow (q \wedge r)$ สมมูลกับ $\sim p \vee (q \wedge r)$

สรุป ข้อความ ข. สมมูลกับข้อความจากโจทย์

6. **ตอบ** 2.

แนวคิด 1. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (p \vee \sim p) \wedge q \equiv q$

2. $\sim t \rightarrow \sim p \equiv p \rightarrow t$

3. $(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p) \equiv (p \rightarrow t) \leftrightarrow (p \rightarrow t)$

ซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ

4. เพราะว่า $s \wedge \sim s$ เป็นเท็จเสมอ

เพราะฉะนั้น $t \rightarrow (s \wedge \sim s) \equiv \sim t$

จาก 1., 2., 3. จะได้ว่า

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)] \equiv q$

เพราะฉะนั้น

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p)] \rightarrow [t \rightarrow s \wedge \sim s]$

$\equiv q \rightarrow [t \rightarrow s \wedge \sim s]$

$\equiv q \rightarrow \sim t$ ________________________(1)

$\equiv \sim q \vee \sim t$

$\equiv \sim(q \wedge t)$

การตัดตัวเลือก 1

จากสมการ (1) จะเห็นว่าประพจน์ของโจทย์ไม่มีประพจน์ย่อย

p,s แล้ว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 2

ถ้านักเรียนลืมเกี่ยวกับสูตรประพจน์สมมูลกัน หรือสูตรสัจนิรันดร์

ก็สามารถใช้การแทนค่าความจริงเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้เช่น

$p = T$

$q = T$

$s = T$

$t = T$

จะได้ $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) = (T \wedge T) \vee (\sim T \wedge T) = T$

$$(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim t \rightarrow \sim p) = (T \rightarrow T) \leftrightarrow (\sim T \rightarrow \sim T)$$

$$= T \leftrightarrow T$$

$$= T$$

$$t \rightarrow s \wedge \sim s = T \rightarrow (T \wedge \sim T)$$

$$= T \rightarrow F$$

$$= F$$

ดังนั้น

$[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)] \wedge [(p \to t) \leftrightarrow (\sim t \to \sim p)] \to [t \to s \wedge \sim s]$

$= (T \wedge T) \to F$

$= F$

ดูค่าความจริงที่ตัวเลือก

1. $\sim q \vee t = \sim T \vee T = T$

2. $(p \wedge q) \vee t = (T \wedge T) \vee T = T$

3. $\sim(q \wedge t) = \sim(T \wedge T) = F$

4. $\sim(p \wedge q) \vee s = \sim(T \wedge T) \vee T = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4 ทิ้ง

7. **ตอบ** 3.

แนวคิด $A \neq B$ หมายความว่า มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B หรือ มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่อยู่ใน B แต่ไม่อยู่ใน A ซึ่งข้อความนี้สามารถจัดรูปแบบประพจน์ได้เป็น

$\exists x\,[(x \in A$ และ $x \notin B)$ หรือ $(x \in B$ และ $x \notin A)]$

$= \exists x\,[(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)]$

8. **ตอบ** 4.

แนวคิด การหาเซตคำตอบของ $|x+1| > x + |x-1|$ แยกเป็นกรณีดังนี้

กรณีที่ 1 $x \leq -1$

$$|x+1| > x + |x-1|$$

$$-(x+1) > x + (-(x-1))$$

$$-x-1 > x-x+1$$

$$-x > 2$$

$$x < -2$$

$$x \in (-\infty,-2) \cap (-\infty,-1] = (-\infty,-2)$$

กรณีที่ ๒ $-1 < x < 1$

$$|x+1| > x + |x-1|$$

$$x+1 > x + (-(x-1))$$

$$x+1 > x-x+1$$

$$x > 0$$

$$x \in (-1,1) \cap (0,\infty) = (0,1)$$

กรณีที่ ๓ $x \geqslant 1$

$$|x+1| > x + |x-1|$$

$$x+1 > x+x-1$$

$$2 > x$$

$$x \in (-\infty,2) \cap [1,\infty) = [1,2)$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $|x+1| > x + |x-1|$

คือ $x \in (-\infty,-2) \cup (0,1) \cup [1,2)$

$x \in (-\infty,-2) \cup (0,2]$

นั่นคือ $A = (-\infty,-2) \cup (0,2]$

(1) **เป็นเท็จ** เพราะว่ามี $-10 \in A$, $|-10+3| = 7 \not< 1$

(2) **เป็นเท็จ** เพราะว่า $-3 \in A$ และ $\frac{(-3)(-3+3)^2}{(-3-1)} = 0 \not> 0$

(3) **เป็นเท็จ** เพราะว่ามี $1 \in A$ และ $1^2-4 = -3 \not> 0$

(4) **เป็นจริง** เพราะว่า $\forall x \in A$, $x < 5$

$$(x-5) < 0$$

$$(x-5)|x| < 0$$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in A\,[(x-5)|x| < 0]$ เป็นจริง

การตัดตัวเลือก หาค่า x ที่สอดคล้องอสมการ

$$|x+1| > x + |x-1|$$

เช่น $x = -10$; $|-10+1| = 9 > -10 + |-10-1|$

แต่ $|-10+3| = 7 \not< 1$

และ $\frac{(-10)(-10+3)^2}{(-10-1)} = \frac{10(7)^2}{11} \not< 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. จึงเป็นเท็จ

เราตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 1$ ทำให้ $|1+1| = 2 > 1 + |1-1|$

เพราะฉะนั้น $1 \in A$

แต่ $1^2-4 = -3 \not> 0$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in A[x^2-4 > 0]$ เป็นเท็จ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

๙. **ตอบ** 2.

แนวคิด $f(x) = x^4-2x^3+2x^2-2x+1$

เพราะว่า $f(1) = 1-2+2-2+1 = 0$

เพราะฉะนั้น $x-1$ หาร $f(x)$ ลงตัว

และ $\frac{f(x)}{x-1} = x^3-x^2+x-1$

เพราะว่า $x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1)$

$= (x^2+1)(x-1)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (x-1)(x^3-x^2+x-1)$

$= (x-1)(x^2+1)(x-1)$

$= (x-1)^2(x^2+1)$

และ $f(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$

สรุป $A = \{1\}$

เพราะว่า $n(A) = 1$

เพราะฉะนั้น $n(P(A)) = 2^1 = 2$

๑๐. **ตอบ** 4.

แนวคิด เพราะว่า $(a,b),(c,d)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

$x^2+y^2 = 17$ ______________(1)

และ $x+y = 5$ ______________(2)

เพราะฉะนั้น $a+b = 5$ และ $c+d = 5$

สรุป $a+b+c+d = 10$

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านหากวันหลังผู้ออกข้อสอบอาจถามว่า abcd เท่ากับเท่าใด

จาก (๒) แทน $y = 5-x$ ในสมการ (๑)

$$x^2+(5-x)^2 = 17$$

$$x^2+25-10x+x^2 = 17$$

$$2x^2-10x+8 = 0$$

$$x^2-5x+4 = 0$$

$$(x-4)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 4$$

ดังนั้น $y = 4, 1$

เพราะฉะนั้น $A = \{(1,4),(4,1)\}$

สรุป $abcd = (1)(4)(4)(1) = 16$

๑๑. **ตอบ** 1.

แนวคิด $x\sin^2x + \cos^2x - x\sin x + \sin x + x < 2$

$$x(\sin^2x - \sin x + 1) + \cos^2x + \sin x < 2$$

$$x(\sin^2x - \sin x + 1) + (1 - \sin^2x) + \sin x - 2 < 0$$

$$x(\sin^2x - \sin x + 1) - (\sin^2x - \sin x + 1) < 0$$

$$(x-1)(\sin^2x - \sin x + 1) < 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เพราะว่า $\sin^2x - \sin x + 1 = \sin^2x - \sin x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$$= (\sin x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

$$> 0$$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้

$$x - 1 < 0$$

$$x < 1$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty,1)$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x = 0$;

$$x\sin^2 x + \cos^2 x - x\sin x + \sin x + x$$

$$= 0+1-0+0+0$$

$$= 1 < 2$$

แสดงว่ามี $x = 0$ อยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \pi$;

$$x\sin^2 x + \cos^2 x - x\sin x + \sin x + x$$

$$= 0+1-0+0+\pi$$

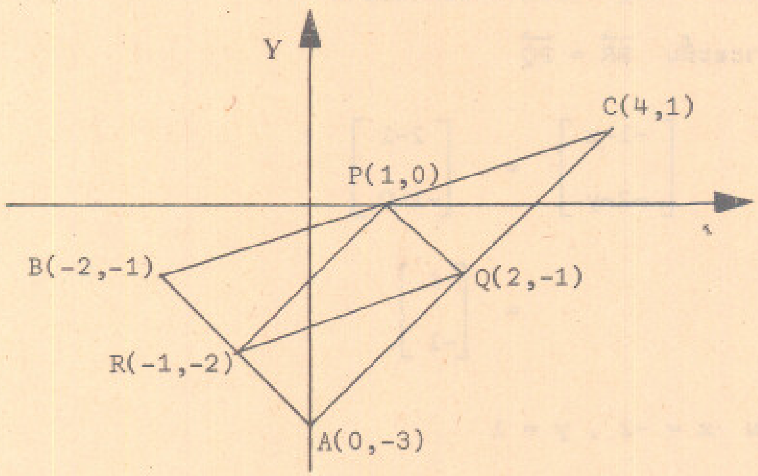
$$= 1+\pi \not< 2$$

แสดงว่า $x = \pi$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

12. ตอบ , 2.

แนวคิด เขียนจุดตามโจทย์กำหนด



การหาพิกัดของจุด A(x,y)

เพราะว่า AQPR เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{RP}$

$$\begin{bmatrix} 2-x \\ -1-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-(-1) \\ 0-(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 0$, $y = -3$

พิกัด A คือ (0,-3)

การหาพิกัดของจุด B(x,y)

เพราะว่า BRQP เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{PQ}$

$$\begin{bmatrix} -1-x \\ -2-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -1-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = -2$, $y = 1$

พิกัด B คือ (-2,1)

การหาพิกัดของจุด C(x,y)

เพราะว่า CPRQ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{QR}$

$$\begin{bmatrix} 1-x \\ 0-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ -2-(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $x = 4$, $y = 1$

พิกัด C คือ (4,1)

การหาความยาวเส้นรอบรูปของ Δ ABC

$$|AB| = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|AC| = \sqrt{(4-0)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(4-(-2))^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|AB| + |AC| + |BC| = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$$

ความยาวเส้นรอบรูป Δ ABC $= 6\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

การตัดตัวเลือก

โดยการใช้เหตุผลทางเรขาคณิตจะได้ว่า

$$|AB| = 2|PQ|$$

$$|BC| = 2|RQ|$$

$$|AC| = 2|PR|$$

ดังนั้นเราไม่ต้องหาพิกัด A,B,C ก็ได้

นอกจากนั้นโดยการวัดด้วยไม้บรรทัดจะได้

$$|PQ| = 1.4$$

$$|PR| = 2.85$$

$$|RQ| = 3.2$$

ดังนั้น $|AB| + |BC| + |AC|$

$$= 2(|PQ| + |PR| + |RQ|)$$

$$= 2(1.4 + 2.85 + 3.2)$$

$$= 14.9$$

โดยการประมาณค่าในตัวเลือก

(1) $8\sqrt{2} + 4\sqrt{10} = 8(1.414) + 4(3.16)$

$= 11.312 + 12.64$

$= 23.952$

(2) $6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} = 6(1.414) + 2(3.16)$

$= 8.484 + 6.32$

$= 14.804$

(3) $10\sqrt{2} + 2\sqrt{10} = 14.14 + 6.32$

$= 20.46$

(4) 40

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

13. **ตอบ 1.**

แนวคิด เส้นตรง ℓ ผ่านจุด $(-3,0)$

และความชันเท่ากับ $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง ℓ คือ

$$(y-0) = \frac{1}{2}(x-(-3))$$

$$2y = x+3$$

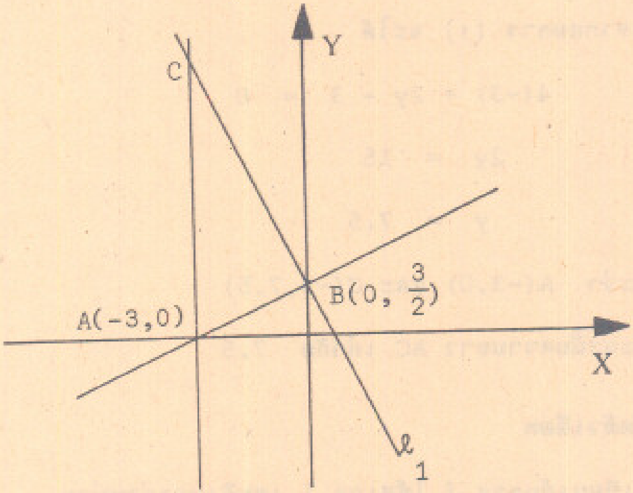
$$x-2y+3 = 0$$

การหาจุดตัดแกน Y ของเส้นตรง ℓ

แทนค่า $x = 0$; $0 - 2y + 3 = 0$

$$y = \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้นจุด B คือ $(0, \frac{3}{2})$



ให้ $C(x,y)$ เป็นจุดบน ℓ_1 และ

เส้นตรง ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ และ C อยู่บนเส้นตรง ℓ_1

เพราะฉะนั้น ความชัน BC $= \dfrac{y - \frac{3}{2}}{x - 0}$

เพราะว่า (ความชัน ℓ)(ความชัน ℓ_1) $= -1$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y - \frac{3}{2}}{x}\right) = -1$$

$$y - \frac{3}{2} = -2x$$

$$2y - 3 = -4x$$

$$4x + 2y - 3 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เพราะว่า AC ขนานกับแกน Y

เพราะฉะนั้น $x = -3$

ดังนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$4(-3) + 2y - 3 = 0$$

$$2y = 15$$

$$y = 7.5$$

เพราะว่า A(-3,0) และ C(-3,7.5)

เพราะฉะนั้นความยาว AC เท่ากับ 7.5

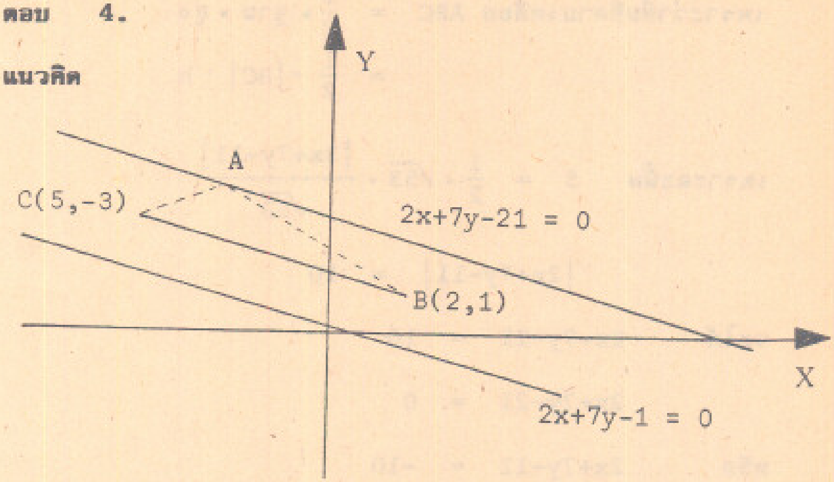
การตัดตัวเลือก

1. เขียนเส้นตรง ℓ ใช้สเกล 1 เซนติเมตรต่อหน่วย
2. ลากเส้นตรง ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ ที่จุด B
3. ลากเส้นตรงจาก A ขนานแกน Y ตัดกับ ℓ_1 ที่จุด C
4. วัดความยาว AC ได้ 7.5 เซนติเมตร

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

14. ตอบ 4.

แนวคิด



สมการเส้นตรงที่ผ่าน BC คือ

$$\frac{y-1}{x-2} = \frac{3-1}{-5-2} = \frac{2}{-7}$$

$$-7y+7 = 2x-4$$

$$2x+7y-11 = 0$$

ให้ A(x,y) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC โดยมี BC เป็นฐาน และ A เป็นจุดยอด

ระยะทางจาก A มายังฐาน BC เท่ากับ h โดยที่

$$h = \frac{|2x+7y-11|}{\sqrt{2^2+7^2}}$$

$$= \frac{|2x+7y-11|}{\sqrt{53}}$$

ความยาว $|BC| = \sqrt{(-5-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{53}$

เพราะว่าพื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$= \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot h$$

เพราะฉะนั้น $5 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{53} \cdot \frac{|2x+7y-11|}{\sqrt{53}}$

$$|2x+7y-11| = 10$$

จะได้ $2x+7y-11 = 10$

$$2x+7y-21 = 0$$

หรือ $2x+7y-11 = -10$

$$2x+7y-1 = 0$$

นั่นคือ $A(x,y)$ เป็นจุดบนเส้นตรง

$$2x+7y-21 = 0 \quad \text{หรือ} \quad 2x+7y-1 = 0$$

การตัดตัวเลือก ด้วยการใช้เหตุผลทางเรขาคณิต

เมื่อพื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 5

และส่วนของฐานคือ $|BC| = \sqrt{53}$

ดังนั้นความสูงของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ h

จะได้ $5 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{53} \cdot h$

$$h = \frac{10}{\sqrt{53}}$$

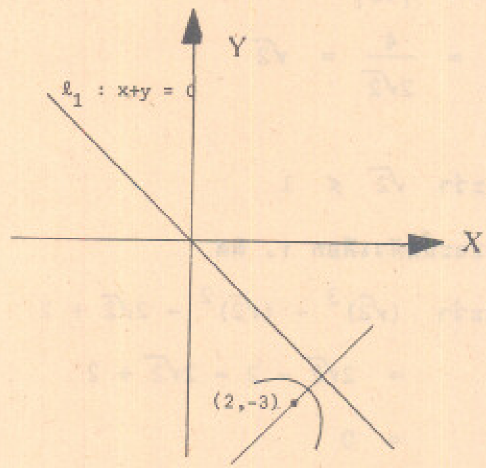
นั่นคือ A ต้องอยู่บนเส้นตรงที่ขนานกับ BC และ

ห่างจาก BC เท่ากับ $\frac{10}{\sqrt{53}}$ ซึ่งมีอยู่สองเส้นที่เป็นไปได้

เพราะฉะนั้นเราก็จะได้ตัวเลือก 4. โดยไม่ต้องคำนวณสมการเส้นตรง

15. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ ℓ_1 คือเส้นไดเรกตริกซ์ที่มีสมการเป็น $x+y = 0$



ระยะทางจากจุด $(2,-3)$ ไปยัง ℓ_1 คือ

$$\frac{|1(2)+1(-3)|}{\sqrt{1+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะว่าระยะทางจากจุดยอดไปยังจุดโฟกัส

$= c$

$= \frac{1}{2}$ (ระยะทางจากจุดโฟกัสไปยังเส้นไดเรกตริกซ์)

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}$

และความยาวของเส้นเรตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$

สรุป $\ell = |4c|$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(1) เพราะว่า $\sqrt{2} \not< 1$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิด

(2) เพราะว่า $(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} + 2$

$= 2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} + 2$

$= 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

(3) เพราะว่า $(\sqrt{2})^3 - 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

(4) เพราะว่า $5\sqrt{2} - 4 = 5(1.414) - 4$

$= 7.07 - 4$

$= 3.07 \not< 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

หมายเหตุ พาราโบลาทุกรูปจะมีความยาวของเส้นเรตัสเรกตัมเท่ากับ $|4c|$ เสมอ

16. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = \frac{|x|}{x+1} \quad ; \quad x \neq -1$

$$= \begin{cases} \frac{-x}{x+1} & ; \quad x \leqslant 0 \\ \frac{x}{x+1} & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

กรณี 1 พิจารณา $f(x) = \frac{-x}{x+1}$ เมื่อ $x \leqslant 0$

เพราะว่า $f'(x) = \frac{(x+1)(-1)-(-x)(1)}{(x+1)^2}$

$$= \frac{-x-1+x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty,0)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,0)$

เพราะฉะนั้น $f(x) \geqslant f(0)$ ทุกค่า $x \in (-\infty,0)$

$f(x) \geqslant 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty,0)$

สรุป เมื่อ $x \in (-\infty,0]$ จะได้ $f(x) \in [0,\infty)$

กรณี 2 พิจารณา $f(x) = \frac{x}{x+1}$ เมื่อ $x \geqslant 0$

เพราะว่า $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in [0,\infty)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0,\infty)$

เพราะฉะนั้น $f(0) \leqslant f(x)$ ทุกค่า $x \in [0,\infty)$

$0 \leqslant f(x)$ ทุกค่า $x \in [0,\infty)$

สรุป เมื่อ $x \in [0,\infty)$ จะได้ $f(x) \in [0,\infty)$

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $f(x) \in [0,\infty)$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ f คือ $[0,\infty)$

นั่นคือ $A = [0,\infty)$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = [0,\infty) \cap [-1,1] = [0,1]$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(-0.5) = \dfrac{-(-0.5)}{-0.5+1} = 1$

เพราะฉะนั้น $1 \in A$ ดังนั้น $1 \in A \cap B$

เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

สมมติ $-0.5 \in A$

$-0.5 = \dfrac{-1}{x+1}$ หรือ $-0.5 = \dfrac{x}{x+1}$

$-0.5x - 0.5 = -x$ หรือ $-0.5x - 0.5 = x$

$0.5x = 0.5$ หรือ $-1.5x = 0.5$

$x = 1$ หรือ $x = -\dfrac{1}{3}$

แต่ $f(1) = \dfrac{1}{2}$ และ $f(-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{(\frac{1}{3})}{-\frac{1}{3}+1} = \dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นเป็นไปไม่ได้ที่ $-0.5 \in A$ ดังนั้น $-0.5 \notin A$

เพราะฉะนั้น $-0.5 \notin A \cap B$ เราจึงตัดตัวเลือก 4. ได้อีก

17. ตอบ 3.

แนวคิด การดูว่าฟังก์ชันใดไม่เท่ากันใช้วิธีดูโดเมนและเรนจ์ เป็นวิธีที่ดีสำหรับข้อสอบข้อนี้

(1) $f_1 \neq f_2$

เพราะว่าในเงื่อนไขของ f_1 จะได้ $\sqrt{y} = x+2$

ดังนั้น $x = -3$ อยู่ในโดเมนของ f_1 ไม่ได้

แต่จากเงื่อนไขของ f_2 พบว่า $x = -3$ ได้

ดังนั้น $x = -3$ อยู่ในโดเมน f_2

(2) $g_1 \neq g_2$

เพราะว่า $1 \in$ โดเมน g_1 แต่ $1 \notin$ โดเมน g_2

(4) $F_1 \neq F_2$

เพราะว่า $1 \in$ โดเมน F_1 แต่ $1 \notin$ โดเมน F_2

สรุปเหลือตัวเลือก 3. ตัวเลือกเดียวจึงเลือกเป็นคำตอบ

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงว่า $h_1 = h_2$

ให้ $(x,y) \in h_1$

ดังนั้น $xy - x = 1$

$$x(y-1) = 1$$

$$x = \frac{1}{y-1}$$

เพราะฉะนั้น $(x,y) \in h_2$

สรุป $h_1 \subset h_2$

ให้ $(x,y) \in h_2$

ดังนั้น $x = \frac{1}{y-1}$

$$x(y-1) = 1$$

$$xy - x = 1$$

เพราะฉะนั้น $(x,y) \in h_1$

สรุป $h_2 \subset h_1$

เพราะฉะนั้น $h_1 = h_2$

18. **ตอบ 4.**

แนวคิด การทำโจทย์ที่ถามว่าข้อใดผิด ควรจะเลือกทำตัวเลือกที่คิดเลขง่าย ๆ ก่อน

จาก $f(x) = x + |x| = \begin{cases} x - x & ; \ x \leq 0 \\ x + x & ; \ x > 0 \end{cases}$

$$= \begin{cases} 0 & ; \ x \leq 0 \\ 2x & ; \ x > 0 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $D_f = (-\infty,\infty)$, $R_f = [0,\infty)$

$D_f - R_f = (-\infty,0)$ **สรุปตัวเลือก 4. ผิด**

หมายเหตุ 1. ถูกต้อง เลือก $J = (-\infty,0]$

จะได้ $f(x_1) = 0 = f(x_2)$ ทุกค่า $x_1, x_2 \in J$

2. ถูกต้อง เลือก $I = [-1,1]$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$

จะได้ $\frac{f(1) - f(0)}{1 - (0)} = f(1) = 2$

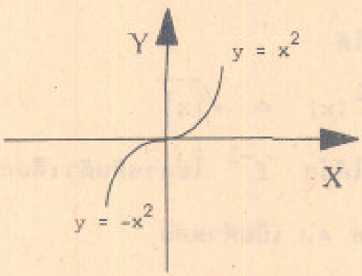
19. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = x|x|$

$$= \begin{cases} x(-x) & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x(x) & ; x > 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^2 & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x^2 & ; x > 0 \end{cases}$$

$D_f = (-\infty,\infty)$ และ $R_f = (-\infty,\infty)$



การหาสูตร f^{-1} จำแนกเป็น 3 กรณีคือ

กรณี 1 $f(x) = -x^2$ เมื่อ $x < 0$

$$y = -x^2$$

$$x^2 = -y$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{|-y|}$$

$$|x| = \sqrt{|-y|}$$

เพราะว่า $x < 0$ $\quad -x = \sqrt{|y|}$

$$x = -\sqrt{|y|}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = -\sqrt{|x|}$

กรณี 2 $f(0) = 0$

จะได้ $f^{-1}(0) = 0$

กรณี 3 $f(x) = x^2 \quad ; \quad x > 0$

$$y = x^2$$

$$x = \sqrt{y}$$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

จากทั้ง 3 กรณีจะได้

$$f^{-1}(x) = \sqrt{|x|}$$

จากทั้ง 3 กรณีจะได้ว่า f^{-1} ไม่ตรงกับตัวเลือก 1., 2. และ 3.

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $f(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(0) = 0$

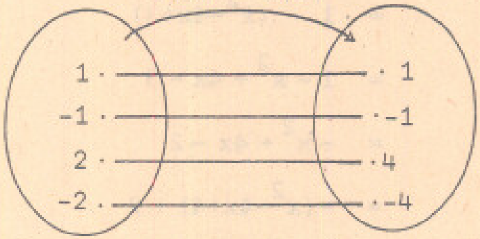
จากตัวเลือก 3. และ 4. $\dfrac{1}{x|x|}$, $\dfrac{|x|\sqrt{|x|}}{x}$

หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

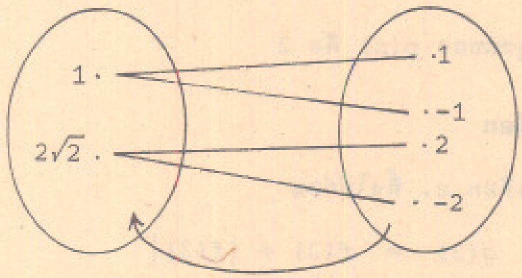
ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

ต่อไปพิจารณาส่งค่าบางค่า

$f(x) = x|x|$



พิจารณาการส่งค่ากลับด้วย $g(x) = |x|\sqrt{|x|}$



$g(x) = |x|\sqrt{|x|}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) \neq |x|\sqrt{|x|}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

20. **ตอบ** 4.

แนวคิด $f(x) = x^2-4x+3$

$= (x-2)^2 - 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) \geqslant -1$ ทุกค่า $x \in R$

และ $h(x) = 2f(x) \geqslant -2$ ทุกค่า $x \in R$

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $h(x)$ คือ -2

เพราะว่า $p(x) = 1 - f(x)$

$$= 1 - (x^2-4x+3)$$

$$= 1 - x^2 + 4x - 3$$

$$= -x^2 + 4x - 2$$

$$= -(x^2-4x+4) + 2$$

$$= -(x-2)^2 + 2$$

เพราะฉะนั้น $p(x) \leq 2$ ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $p(x)$ คือ 2

การตัดตัวเลือก

ขณะนี้ตัดตัวเลือก ๒. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $g(3) = f(3) + |f(3)|$

$$= (3-2)^2 - 1 + |(3-2)^2 - 1|$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ g ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งน้อยกว่า 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก ๑. ทิ้งได้อีก

ในทำนองเดียวกัน $k(3) = f(3) - |f(3)| = 0$

ดังนั้นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ k ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0 ซึ่งน้อยกว่า 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก ๓. ทิ้งได้อีก

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงวิธีหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ k และ

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ g ดังนี้

การหาสูตร $|f(x)|$

$$f(x) = x^2-4x+3 = (x-3)(x-1)$$

$$|f(x)| = |x^2-4x+3|$$

$$= |x-3|\cdot|x-1|$$

$$= \begin{cases} (-(x-3))(-(x-1)) & ; \quad x < 1 \\ (-(x-3))(x-1) & ; \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ (x-3)(x-1) & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(x) & ; \quad x < 1 \\ -f(x) & ; \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ f(x) & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น $g(x) = f(x) + |f(x)|$

$$= \begin{cases} 2f(x) & ; \quad x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2f(x) & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

และ $k(x) = f(x) - |f(x)|$

$$= \begin{cases} 0 & ; \quad x < 1 \\ 2f(x) & ; \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \\ 0 & ; \quad x > 3 \end{cases}$$

จาก $f(x) = x^2-4x+3$

$= (x-3)(x-1)$

$2f(x) = 2(x-3)(x-1)$

และ $2(x-3)(x-1) > 0$ เมื่อ $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$

$2(x-3)(x-1) < 0$ เมื่อ $x \in (1,3)$

ดังนั้น $2f(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-\infty,1) \cup (3,\infty)$

และ $2f(x) < 0$ เมื่อ $x \in (1,3)$

นั่นคือ $k(x) \leqslant 0$ ทุกค่า $x \in \mathbf{R}$

และ $g(x) \geqslant 0$ ทุกค่า $x \in \mathbf{R}$

สรุป ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ k คือ 0

ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ g คือ 0

21. **ตอบ** 2.

แนวคิด $f_1(x) = 3x - \pi$

$f_2(x) = \sin x$

$(f_2 \circ f_1)(x) = f_2(f_1(x))$

$= f_2(3x - \pi)$

$= \sin(3x - \pi)$

$= \sin(-(\pi - 3x))$

$= -\sin(\pi - 3x)$

$= -\sin 3x$

$$f_3(x) = \frac{1}{2}x$$

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1)(x) = f_3((f_2 \circ f_1)(x))$$

$$= f_3(-\sin 3x)$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 3x$$

พิจารณาการหาค่า m

$$(f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x+m) = (f_3 \circ (f_2 \circ f_1))(x)$$

$$-\frac{1}{2}\sin(3(x+m)) = -\frac{1}{2}\sin(3x)$$

$$\sin(3m+3x) = \sin(3x)$$

ค่า 3m ที่เป็นจำนวนบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\sin(3m+3x) = \sin 3x$

คือ $3m = 2\pi$

เพราะฉะนั้น $m = \frac{2\pi}{3}$

สรุป $f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$ มีคาบเท่ากับ $\frac{2\pi}{3}$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[\frac{\pi}{3}, \pi]$

22. **ตอบ** 3.

แนวคิด $\sin^4\theta - \cos^4\theta = 1$

$$(\sin^2\theta - \cos^2\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$$

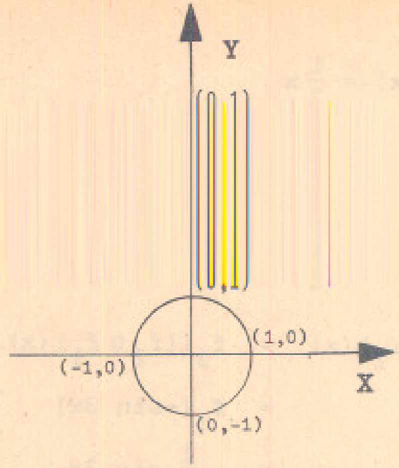
$$\sin^2\theta - \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = -1$$

$$\cos 2\theta = -1$$

$$2\theta = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots$$

$$\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$$



จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มี $\theta = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$

คือจุดบนแกน Y ซึ่งมี 2 จุดคือ (0,1), (0,-1)

การตัดตัวเลือก

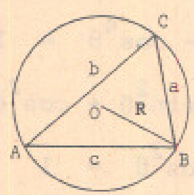
แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin^4\frac{\pi}{2} - \cos^4\frac{\pi}{2} = 1$

แสดงว่า ตำแหน่งของจำนวนจริง (0,1) ตรงกับ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ใช้ได้

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1., 2, และ 4. ทิ้งได้

23. **ตอบ** 1.

แนวคิด การเฉลยข้อนี้วิธีที่ดีที่สุดคือการอ้างสูตรความสัมพันธ์



ระหว่างค่า a,b,c และ R ของสามเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลม

จะได้ว่า

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

จะได้ $a = 2R\sin A$

$b = 2R\sin B$

$c = 2R\sin C$

$a+b+c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$

$\frac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin C$

เพราะว่า $A+B+C = 180^\circ$

$C = 180^\circ - (A+B)$

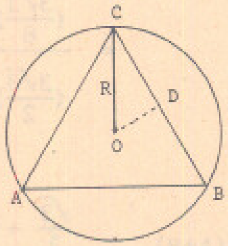
$\sin C = \sin(180^\circ - (A+B))$

$= \sin(A+B)$

เพราะฉะนั้น $\frac{a+b+c}{2R} = \sin A + \sin B + \sin(A+B)$

การตัดตัวเลือก

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าบรรจุอยู่ในวงกลมดังรูป



เลือก $R = 2$ จะได้

$\hat{OCD} = 30^\circ$ และ $\hat{COD} = 60^\circ$

เพราะฉะนั้น $|CD| = \sqrt{3}$ และ $BC = 2\sqrt{3}$

ซึ่งจะได้ $a = b = c = 2\sqrt{3}$ และ $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60^\circ$

$$\frac{a+b+c}{2R} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{6\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin A = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin B = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin (A+B) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ตัวเลือก 1

$$\sin A + \sin B + \sin (A+B) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ตัวเลือก 2

$$\frac{\sin A \sin B \sin (A+B)}{\sin A + \sin B + \sin (A+B)} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{3\sqrt{3}}{2})}$$

$$= \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{8})}{(\frac{3\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{4} \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ตัวเลือก 3

$$\frac{\sin A + \sin B - \sin (A+B)}{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 (A+B)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{9}{4})} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

ตัวเลือก 4

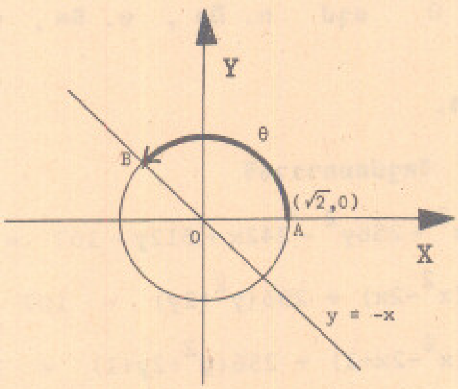
$$\frac{\sin A + \sin B + \sin(A+B)}{2\sqrt{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A+B)}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2})}{2\sqrt{\frac{9}{4}}} = \frac{(\frac{3\sqrt{3}}{2})}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

24. **ตอบ** 3

แนวคิด



จากโจทย์ รัศมีวงกลมเท่ากับ $\sqrt{2}$

ความยาวเส้นรอบวงกลม $= 2\pi r = 2\pi\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$

เพราะว่ามุม $A\hat{O}B = 135^\circ$

เพราะฉะนั้นส่วนโค้ง $\overset{\frown}{BC} = \theta$

$$= \frac{135}{360}\cdot(2\sqrt{2}\pi)$$

$$= \frac{3}{8}(2\sqrt{2}\pi)$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{3(1.414)(3.1415)}{4}$$

$$= 3.3315$$

เพราะว่า $3.14 < 3.3315 < 3.14 + \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\pi < 3.3315 < \frac{3\pi}{2}$

$$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$$

ดังนั้น θ อยู่ในควอดรันท์ 3 $\tan\theta > 0$, $\cos\theta < 0$, $\sin\theta < 0$ สรุป ก. ผิด , ข. ผิด , ค. ถูก

25. **ตอบ** 4.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี

$$121x^2 + 256y^2 - 242x + 512y - 107 = 0$$

$$121(x^2-2x) + 256(y^2+2y) = 107$$

$$121(x^2-2x+1) + 256(y^2+2y+1) = 107+121+256$$

$$121(x-1)^2 + 256(y+1)^2 = 484$$

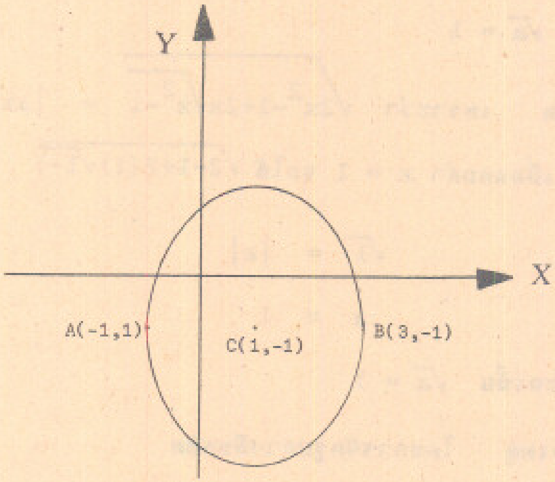
$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{484}{256})} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{22}{16})^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{(\frac{11}{4})^2} = 1$$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (1,-1), แกนเอกขนานแกน Y ,

$a = \frac{11}{4}$, $b = 2$



วงกลมที่ใหญ่ที่สุดที่บรรจุอยู่ในวงรีได้ต้องมีจุดศูนย์กลางที่ (1,-1)

และมี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้นรัศมีของวงกลมเท่ากับ ความยาว $|AC| = 2$

ความยาวเส้นรอบวงกลม $= 2\pi r = 4\pi$

ดังนั้น $\theta = 4\pi$

เพราะว่า $\tan(-4\pi) = 0 \neq -1$

$\cos(4\pi) = 1 \neq \sin(-4\pi)$

$\cos(-4\pi) = 1 \neq -\sin(-4\pi)$

$\tan(-4\pi) = -\sqrt{2}\sin(4\pi) = 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ถูกต้อง

ตอนที่ 2

1. **ตอบ** $\sqrt{a} = 1$

แนวคิด เพราะว่า $\sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}} = |ax+\sqrt{x^2-1}|$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $x = 1$ จะได้ $\sqrt{2-1+2(1)\sqrt{1-1}} = |a+\sqrt{1-1}|$

$$\sqrt{1} = |a|$$

$$a = 1$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a} = 1$

หมายเหตุ โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1} = x^2+2x\sqrt{x^2-1}+(x^2-1) = (x+\sqrt{x^2-1})^2$$

เพราะฉะนั้น $|ax+\sqrt{x^2-1}| = \sqrt{2x^2-1+2x\sqrt{x^2-1}}$

$$= \sqrt{(x+\sqrt{x^2-1})^2}$$

$$= |x+\sqrt{x^2-1}|$$

ซึ่งจะได้ว่า $a = 1$ เหมือนกัน

2. **ตอบ** 46

แนวคิด ให้ $f(x) = x^3-9x^2+23x-15$

เพราะว่าตัวประกอบของ 15 คือ $\pm1, \pm3, \pm5, \pm15$

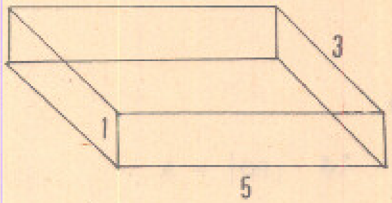
ลอง $f(1) = 1-9+23-15 = 0$

$f(3) = 27-81+69-15 = 0$

$$f(5) = 125-9(25)+23(5)-15 = 0$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)$

สรุป รากของสมการ $x^3-9x^2+23x-15 = 0$ คือ $x = 1,3,5$



พื้นที่ผิวด้านนอกของกล่อง (รวมฝา)

$= 2(3\times5) + 2(1\times3) + 2(1\times5)$

$= 30 + 6 + 10$

$= 46$

3. **ตอบ** 4

แนวคิด $3^x + 3^{-x} = 2\sqrt{5}$

$$3^x(3^x + 3^{-x}) = 3^x(2\sqrt{5})$$

$$(3^x)^2 - 2\sqrt{5}\cdot3^x + 1 = 0$$

$$3^x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} \pm \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} \pm 4}{2}$$

เพราะว่า $3^x > 0$ เพราะฉะนั้น $3^x = \frac{2\sqrt{5}+4}{2} = \sqrt{5}+2$

สรุป $3^x - 3^{-x} = 3^x - (3^x)^{-1}$

$$= (\sqrt{5}+2) - (\frac{1}{\sqrt{5}+2}) = \frac{(\sqrt{5}+2)^2 - 1}{\sqrt{5}+2}$$

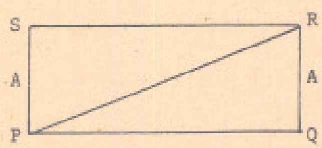
$$= \frac{[5 + 4\sqrt{5} + 4 - 1]}{\sqrt{5} + 2} \quad = \frac{8 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5} + 2}$$

$$= \frac{(8 + 4\sqrt{5})(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \quad = \frac{8\sqrt{5} - 16 + 20 - 8\sqrt{5}}{5 - 4}$$

$$= 4$$

4. **ตอบ** $2 < A < 7$, $A \in (2,7)$

แนวคิด เขียนภาพประกอบได้ดังนี้ ให้ $|RQ| = A$



เพราะฉะนั้น $|PQ| = \frac{18-2A}{2}$

$$|PR| = \sqrt{|PQ|^2 + |RQ|^2}$$

$$= \sqrt{(9-A)^2 + A^2}$$

พิจารณากรณี $|PR| < \sqrt{53}$

$$|PR|^2 < 53$$

$$(9-A)^2 + A^2 < 53$$

$$81 - 18A + A^2 + A^2 < 53$$

$$2A^2 - 18A + 28 < 0$$

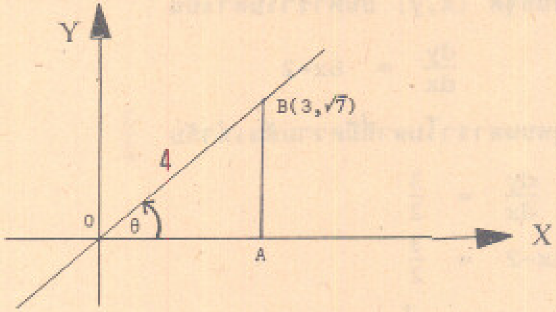
$$A^2 - 9A + 14 < 0$$

$$(A - 2)(A - 7) < 0$$

$$A \in (2,7)$$

5\. ตอบ $\dfrac{3\sqrt{7}+1}{8}$

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ควรเขียนกราฟ



ในสามเหลี่ยม OAB , $|OA| = 3$, $|AB| = \sqrt{7}$,

$$|OB| = \sqrt{3^2+7} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sin\theta = \sin B\hat{O}A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{|AB|}{|OB|} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\cos\theta = \cos B\hat{O}A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{|OA|}{|OB|} = \frac{3}{4}$$

เพราะว่าความชัน OB เท่ากับ $\dfrac{\sqrt{7}}{3} < 1$

เพราะฉะนั้น $\theta < 45^\circ$ ดังนั้น $0 < 2\theta < 90^\circ$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{9}{16} - \frac{7}{16} = \frac{1}{8}$$

สรุป $\sin 2\theta - \cos 2\theta = \dfrac{3\sqrt{7}}{8} + \dfrac{1}{8}$

$$= \frac{3\sqrt{7}+1}{8}$$

๖. **ตอบ** $96x - 144y + 67 = 0$

แนวคิด สมการพาราโบลา $y = 3x^2 - 2x + 1$

มีความชันที่จุด (x,y) บนพาราโบลาเป็น

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 2$$

การหาจุดบนพาราโบลาที่มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{2}$

ให้
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$
$$6x - 2 = \frac{3}{2}$$
$$x = \frac{7}{12}$$

จะได้
$$y = 3\left(\frac{7}{12}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{12}\right) + 1$$
$$= \frac{49}{48} - \frac{56}{48} + \frac{48}{48}$$
$$= \frac{41}{48}$$

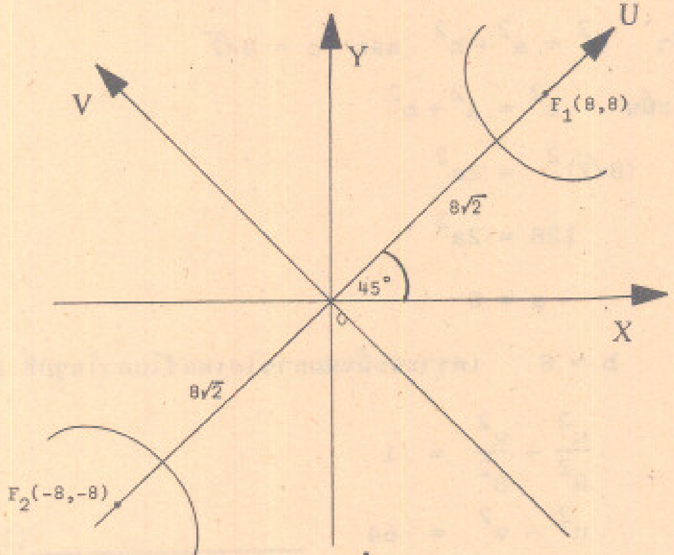
จุดบนพาราโบลาที่มีความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ $\frac{2}{3}$ คือจุด $\left(\frac{7}{12}, \frac{41}{48}\right)$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสคือ

$$\left(y - \frac{41}{48}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{7}{12}\right)$$
$$3y - \frac{41}{16} = 2x - \frac{7}{6}$$
$$2x - 3y - \left(\frac{56 \quad 123}{48}\right) = 0$$
$$2x - 3y + \frac{67}{48} = 0$$
$$96x - 144y + 67 = 0$$

7. **ตอบ** $xy = 32$

แนวคิด เขียนรูปเท่าที่ทำได้เพื่อช่วยในการคำนวณ

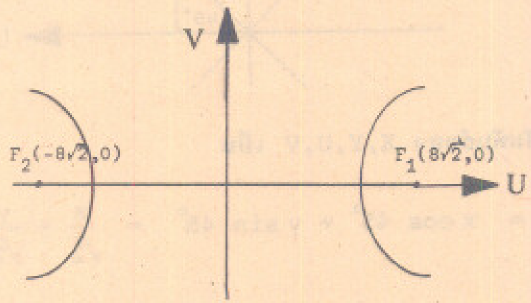


รูปที่ 1

ด้วยเหตุผลของการสมมาตร โฟกัส F_2 ต้องอยู่ที่จุด $(-8,-8)$

จากรูปจะได้ $c = |OF| = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$

เราสามารถพิจารณาลักษณะไฮเพอร์โบลาบนแกนใหม่



รูปที่ 2

เป็นไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัส $(-8\sqrt{2},0)$, $(8\sqrt{2},0)$ จุดศูนย์กลาง $(0,0)$

เพราะว่าความยาวแกนตามขวาง เท่ากับความยาวแกนสังยุค

เพราะฉะนั้น $a = b$

เพราะว่า $c^2 = a^2 + b^2$ และ $c = 8\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $c^2 = a^2 + b^2$

$$(8\sqrt{2})^2 = 2a^2$$

$$128 = 2a^2$$

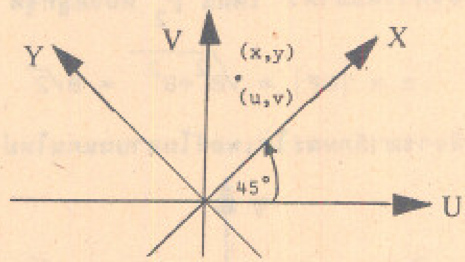
$$a = 8$$

และ $b = 8$ เพราะฉะนั้นสมการไฮเพอร์โบลาในรูปที่ 2 คือ

$$\frac{u^2}{8^2} - \frac{v^2}{8^2} = 1$$

$$u^2 - v^2 = 64 \qquad \underline{\hspace{4cm}} (1)$$

ไฮเพอร์โบลาในรูปที่ 1 เกิดจากการหมุนแกน U ในรูปที่ 1 ไป 45°



จะได้ความสัมพันธ์ของ X,Y,U,V เป็น

$$U = x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$V = x\cos 45^\circ - y\sin 45^\circ = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}$$

แทนค่าในสมการ (1) จะได้

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 64$$

$$\left(\frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2}\right) - \left(\frac{x^2}{2} - xy + \frac{y^2}{2}\right) = 64$$

$$2xy = 64$$

$$xy = 32$$

สรุปสมการไฮเพอร์โบลาบนระนาบ XY คือ $xy = 32$

หมายเหตุ ไฮเพอร์โบลาชนิดที่แกนตามขวางไม่ขนานกับแกน X และแกน Y อยู่ในหลักสูตรแคลคูลัสที่สูงกว่าระดับ ม.ปลาย

8. **ตอบ** $B = [0,\pi] \cup [2\pi,3\pi]$

แนวคิด $f(x) = -f(x)$

$$|\sin x| - \sin x = -(|\sin x| - \sin x)$$

$$= -|\sin x| + \sin x$$

$$2|\sin x| = 2\sin x$$

$$|\sin x| = \sin x$$

เพราะว่า $|\sin x| = \sin x$ ก็ต่อเมื่อ $\sin x \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $B = \{x \in [0,4\pi] \mid |\sin x| = \sin x\}$

$$= \{x \in [0,4\pi] \mid \sin x \geqslant 0\}$$

$$= [0,\pi] \cup [2\pi,3\pi]$$

9. ตอบ $(-\infty,-1] \cup [3,\infty)$

แนวคิด โดยการหารยาว x^2-x+1 ด้วย $x-1$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x \\
\cline{2-2}
x-1 & x^2-x+1 \\
 & \underline{x^2-x} \\
 & \qquad \underline{\underline{+1}}
\end{array}
$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{x^2-x+1}{x-1} = x + \dfrac{1}{x-1}$

เมื่อ $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1} = x + \dfrac{1}{x-1}$

จะได้ โดเมน f คือ $(-\infty,\infty) - \{1\}$

พิจารณาเรนจ์ของ f ด้วยการจัดรูป x ในพจน์ของ y

จาก
$$y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$$

$$y(x-1) = x^2-x+1$$

$$x^2-x-yx+1+y = 0$$

$$x^2-(1+y)x+(1+y) = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{(1+y) \pm \sqrt{(1+y)^2-4(1)(1+y)}}{2(1)}$$

x หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $(1+y)^2 - 4(1+y) \geqslant 0$

$$(1+y)((1+y)-4) \geqslant 0$$

$$(y+1)(y-3) \geqslant 0$$

$$y \in (-\infty,-1] \cup [3,\infty)$$

สรุป เรนจ์ของ f คือ $(-\infty,-1] \cup [3,\infty)$

10. **ตอบ** $A = \{(2,-2),(1,-1)\}$

แนวคิด $x^3+y^3-3x^2+6y^2+3x+12y+6 = 0$

$$(x^3-3x^2+3x-1) + (y^3+6y^2+12y+8) = -6-1+8$$

$$(x-1)^3 + (y+2)^3 = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$A = \{(x,y) \in I \times I \mid x^3+y^3-3x^2+6y^2+3x+12y+6 = 0\}$$

$$= \{(x,y) \in I \times I \mid (x-1)^3 + (y+2)^3 = 1\}$$

$$= \{(2,-2),(1,-1)\}$$

หมายเหตุ ตัวเลขจำนวนเต็มยกกำลังสามที่เป็นไปได้คือ

$\pm 1, \pm 8, \pm 27, \pm 64, \pm 125, \ldots$

เพราะฉะนั้น $a,b \in I$

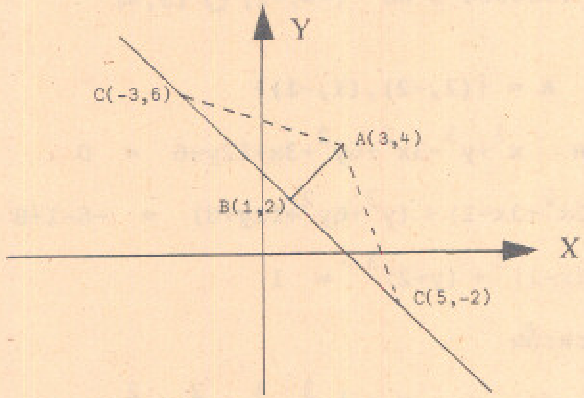
$$a^3 + b^3 = 1$$

เป็นไปได้ 2 กรณีคือ $(a = 1, b = 0)$ หรือ $(a = 0, b = 1)$

แบบทดสอบบทที่ 2

1. ตอบ (5,-2), (-3,6)

แนวคิด



ให้ C(x,y) เป็นพิกัดของจุดที่เหลือ

ความชัน AB $= \frac{4-2}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$

ความชัน BC $= \frac{y-2}{x-1}$

เพราะว่า AB ตั้งฉากกับ BC

เพราะฉะนั้น (ความชัน AB)(ความชัน BC) = -1

$$\left(\frac{y-2}{x-1}\right)(1) = -1$$

$$y-2 = -x+1$$

$$x+y-3 = 0 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (1)}$$

$$|AB| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$|BC| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC|$

$$8 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC|$$

$$16 = |AB| \cdot |AC|$$

$$256 = |AB|^2 \cdot |AC|^2$$

$$256 = (8)((x-1)^2 + (y-2)^2)$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 32$$

จาก (1) ; $y = 3-x$

$$(x-1)^2 + (3-x-2)^2 = 32$$

$$(x-1)^2 = 16$$

$$x-1 = 4, -4$$

$$x = 5, -3$$

ดังนั้น $y = -2, 6$

สรุปพิกัดของจุด C คือ (5,-2) หรือ (-3,6)

2. **ข้อพิสูจน์**

ฟังก์ชัน $f : I \to I$ ที่มีคุณสมบัติ

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ทุกค่า $x, y \in I$

จะมีรูปแบบเป็น $f(x) = kx$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวจำนวนเต็ม

ดังนั้นการหาจำนวนสมาชิกของ A คือการหาค่า k ที่ทำให้

$$|f(1000)| \leqslant 3999$$

$$|k1000| \leqslant 3999$$

$$-3,999 \leqslant k1000 \leqslant 3,999$$

$$-3.999 \leqslant k \leqslant 3.999$$

เพราะฉะนั้น $k = -3,-2,-1,0,1,2,3$

สรุป $A = \{f_k \mid f_k(x) = kx,\ k = -3,-2,-1,0,1,2,3\}$

$n(A) = 7$

3. **ข้อพิสูจน์** กำหนดให้ $a > 0$, $b > 0$ และ $ab = 1$

ในการแสดงว่า $a+b \geqslant 2$ ต้องมีการอ้างเหตุผลว่า

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \text{ ทุกค่า } x \in (0,\infty)$$

จึงขอแสดงข้อพิสูจน์ว่า $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ ทุกค่า $x \in (0,\infty)$ ก่อนดังนี้

ให้ $x > 0$

เพราะว่า $(x-1)^2 \geqslant 0$

$$x^2-2x+1 \geqslant 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x} \geqslant 0$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geqslant 0$$

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

สรุป $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ ทุกค่า $x > 0$

การแสดงว่า $a+b \geqslant 2$

วิธีที่ 1 เพราะว่า $ab = 1$

เพราะฉะนั้น $b = \frac{1}{a}$

ดังนั้น $a+b = a + \frac{1}{a} \geqslant 2$

วิธีที่ 2 $ab = 1$

$$2ab = 2$$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ &= a^2+b^2+2 \\ &= 2+a^2+\frac{1}{a^2} \\ &\geqslant 4 \quad (\text{เพราะว่า } a^2+\frac{1}{a^2} \geqslant 2)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a+b \geqslant 2$ หรือ $a+b \leqslant -2$

เพราะว่า $a > 0$ และ $b > 0$

เพราะฉะนั้น $a+b \geqslant 2$ เท่านั้น

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยประจำปี 2537 (รอบที่ 2)

3. กำหนดให้ a_i เป็นเลขโดดสำหรับทุก $i = 0,1,2,\ldots,k$ และ $m = a_ka_{k-1}\ldots a_2a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $k+1$ หลักในระบบฐาน 10 จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนเต็ม q ซึ่ง $0 \leq q < 17$ ที่ทำให้ $17|m$ ก็ต่อเมื่อ $17|(a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0 + (a_0 \times q))$

อ่านเฉลยได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

ข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2533

วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันที่ 25 สิงหาคม 2533 เวลา 13.30 - 15.30 น.

แบบทดสอบฉบับที่ 1 เป็นแบบปรนัยใช้เวลาทำ 2 ชั่วโมง

ตอนที่ 1 ข้อสอบแบบเลือกคำตอบ 25 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1. อินเตอร์เซกชันระหว่างเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{8}{x-1} + 3 \leqslant x$$

กับเซตในข้อใดเป็นเซตว่าง

(๑) $[1,5]$ (๒) $[1,5)$

(๓) $(-\infty,5)$ (๔) $[-1,1) \cup [5,\infty)$

2. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนเต็มบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

(๑) $\forall t\,[\sqrt{t}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ $]$

(๒) $\exists t\,[\sqrt{t}$ ไม่เป็นจำนวนจริง $]$

(๓) $\forall t\,[t^2$ เป็นจำนวนคู่ $]$

(๔) $\forall t\,[2t+1$ เป็นจำนวนคี่ $]$

3. ถ้า $a * b = 2a + 2b$ แล้วเซตของจำนวนจริงกับ * ไม่มีคุณสมบัติข้อใดบ้าง

I คุณสมบัติปิด

II คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

III คุณสมบัติสลับที่

IV การมีเอกลักษณ์

(1) ข้อ I และ II เพียง 2 ข้อเท่านั้น

(2) ข้อ II และ III เพียง 2 ข้อเท่านั้น

(3) ข้อ II และ IV เพียง 2 ข้อเท่านั้น

(4) ข้อ III และ IV เพียง 2 ข้อเท่านั้น

4. เซตในข้อใดเป็นเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{2x^3 + x^2 - 2x - 1}{x^2 + 2x - 3} \geqslant 0$$

(1) $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2},1) \cup (1,\infty)$

(2) $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2},\infty)$

(3) $(-\infty,-3) \cup [-1,-\frac{1}{2}] \cup (1,\infty)$

(4) $(-3,-1] \cup [-\frac{1}{2},1)$

5. ปริมาตรของลูกบาศก์ ก. เป็นสามเท่าของลูกบาศก์ ข. ถ้าลูกบาศก์ ข. มีพื้นที่ผิวเป็น 18 ตารางเซนติเมตร แล้วลูกบาศก์ ก. มีพื้นที่ผิวกี่ตารางเซนติเมตร

(1) $9\sqrt{3}$ (2) $9\sqrt[3]{9}$

(3) $18\sqrt[3]{9}$ (4) $27\sqrt[3]{3}$

6. ถ้า $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{A + B \cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

แล้ว $A + B$ เท่ากับข้อใด

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

7. ถ้า $\sin x + \cos x = -\dfrac{1}{5}$ และ $\dfrac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$

แล้ว $\cos 2x$ เท่ากับข้อใด

(1) $\dfrac{7}{25}$ (2) $-\dfrac{7}{25}$

(3) $\dfrac{24}{25}$ (4) $-\dfrac{24}{25}$

8. สี่เหลี่ยม ABCD มีมุม B และมุม D เป็นมุมฉาก ถ้าสี่เหลี่ยม ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปว่าว โดยที่ AB = AD = 20 หน่วย และ BC = CD = 15 หน่วย แล้ววงกลมซึ่งแนบในสี่เหลี่ยม ABCD มีรัศมียาวเท่าไร

(1) 5 หน่วย (2) 10 หน่วย

(3) $\dfrac{60}{7}$ หน่วย (4) $\dfrac{300}{7}$ หน่วย

9. ชายคนหนึ่งขี่มอเตอร์ไซค์ขึ้นเขาด้วยความเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง จากนั้นขี่ลงเขาไปยังจุดเริ่มต้นด้วยความเร็ว 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง อยากทราบว่าเขาขี่มอเตอร์ไซค์ด้วยความเร็วเฉลี่ยกี่กิโลเมตรต่อชั่วโมง

(1) 120 กิโลเมตร/ชั่วโมง (2) 60 กิโลเมตร/ชั่วโมง

(3) $53\frac{1}{3}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง (4) $63\frac{1}{3}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

10. ขวด 2 ใบมีปริมาตรเท่ากัน บรรจุแอลกอฮอล์ผสมน้ำในอัตราส่วน 3:1 และ 2:1 เต็มขวด ถ้านำสารละลายใน 2 ขวดมาผสมกัน จะได้ว่าสารละลายที่ผสมกันแล้วมีแอลกอฮอล์และน้ำในอัตราส่วนเท่าใด

(1) 5:2 (2) 4:3 (3) 7:4 (4) 17:7

11. ให้ $A = \{a,b,c\}$ และ $P(A)$ คือเพาเวอร์เซตของ A ถ้า s คือจำนวนฟังก์ชัน f จาก P(A) ไป A และ t คือจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง g จาก A ไป P(A) แล้ว s − t เท่ากับเท่าไร

(1) 6225 (2) 5226

(3) 2625 (4) 2526

12.

บทนิยาม X เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U f_X เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f_X(a) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } a \in X \\ 0 & \text{เมื่อ } a \in X' \end{cases}$

ให้ R เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$A = \{x \in R \mid x^3-3x-2 > 0\}$

$t = f_A((1.415)^2) + f_{A'}(1) + f_A(0.5) + f_{A'}(-1)$

t มีค่าเท่ากับเท่าไร

(1) 0 (2) 1

(3) 2 (4) 3

13. กำหนดให้ $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$ และ $(f_n + f_n f_{n-1})(x) = 1$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1

$f_8(1) - f_2(3)$ เท่ากับข้อใด

(1) $-\frac{2}{11}$ (2) 0

(3) $\frac{1}{5}$ (4) 1

14. $\sqrt{(1+x)^2 + (2-y)^2} = |x+2|$ เป็นสมการของกราฟแบบใด

(1) เส้นตรง (2) พาราโบลา

(3) เส้นตรง 2 เส้น (4) วงรี

15. ถ้าสำหรับทุกจำนวนจริงบวก

$[f(x^2+1)]^{\sqrt{x}} = k$, k เป็นค่าคงตัวที่เป็นจำนวนจริงบวก

จงหาค่าของ $\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}}$, y เป็นจำนวนจริงบวก

(1) $\sqrt{k}$ (2) 2k

(3) k^2 (4) $y\sqrt{k}$

16. กราฟของสมการ $x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$ มีลักษณะอย่างไร

(1) วงกลม (2) วงรีครึ่งซีกขวา

(3) ไฮเพอร์โบลาสาขาทางขวา (4) ไฮเพอร์โบลาสาขาทางซ้าย

17. กำหนดเส้นตรง $3x+4y = 13$ จงหาระยะที่ใกล้ที่สุดของจุดบนวงกลม $20x^2 - 28x + 20y^2 - 16y - 7 = 0$ กับเส้นตรงนี้

(1) 0.36 หน่วย
(2) 0.86 หน่วย
(3) 1.86 หน่วย
(4) 2.86 หน่วย

18. กำหนดความสัมพันธ์

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2-2x-y^2-4y-3 = 0\}$$

โดเมนและเรนจ์ของ r เป็นอย่างไร

(1) เป็นช่วงปิดทั้งคู่
(2) เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียวทั้งคู่
(3) อยู่ในรูป $(-\infty,a] \cup [b,\infty)$ โดยที่ $a < b$
(4) เป็น R ทั้งคู่

19. อินเวอร์สของความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน

(1) $r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x + \frac{1}{x}\}$
(2) $r_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}\}$
(3) $r_3 = \{(x,y) \in R \times R \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 , xy > 0\}$
(4) $r_4 = \{(x,y) \in R \times R \mid y = x|x|\}$

20. จงหาจุดบนวงกลม $x^2+y^2 = 1$ ซึ่งห่างจากจุด (1,3) และ (-2,2) เท่ากัน

(1) $(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13})$ กับ $(\frac{5}{13}, \frac{12}{13})$

(2) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ กับ $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

(3) $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ กับ $(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

(4) $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$ กับ $(0,1)$

21. กำหนดวงกลม 3 วง ดังนี้

$$r_1 \ : \ x^2+y^2 = 1$$
$$r_2 \ : \ (x-2)^2+y^2 = 1$$
$$r_3 \ : \ (x-4)^2+y^2 = 1$$

ให้ A และ D เป็นจุดบนวงกลม r_1 และ r_3 ตามลำดับ ซึ่งระยะ AD ยาวที่สุด ลากส่วนของเส้นตรง AG สัมผัสวงกลม r_3 ที่ G ซึ่งอยู่เหนือแกน X และเส้นตรง AG ตัดวงกลม r_2 ที่ E และ F ตามลำดับ ระยะ EF เท่ากับข้อใด

(1) $\frac{3}{5}$ หน่วย (2) $\frac{4}{5}$ หน่วย

(3) $\frac{8}{5}$ หน่วย (4) $\frac{3\sqrt{24}}{5}$ หน่วย

22. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \geqslant 0$ และ $b \geqslant 0$

ข้อใดถูกต้อง

(1) $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ (2) $\frac{a+b}{2} \neq \sqrt{ab}$

(3) $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{ab}$ (4) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

23. a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a < b$ ถ้า a และ b สอดคล้องสมการ $\sqrt{10 + \sqrt{84}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าไร

(1) 25 (2) 41

(3) 45 (4) 58

24. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x + \sqrt{x}} + \frac{1}{x - \sqrt{x}} \leqslant 1$ อินเตอร์เซกกับเซตในข้อใดได้เซตว่าง

(1) $(-\infty,0] \cup [1,3]$ (2) $(1,3] \cup (5,\infty)$

(3) $(-\infty,1) \cup (7,11)$ (4) $(-5,5)$

25. ถ้า $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (Ax^2+Bx+C)^2$ แล้ว $A^2+B^2+C^2$ เท่ากับข้อใด

(1) 14 (2) 36

(3) 51 (4) 62

ตอนที่ 2 ข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อ ๆ ละ 2 คะแนน

1. ถ้า $x * (x-y) = x^2 + y^2$ แล้ว $5 * 3$ เท่ากับเท่าไร

2. ถ้ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านยาว $x-7$, x และ $x+1$ หน่วย แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งหารด้วย 3, 4, 5, 6 และ 7 จะเหลือเศษ 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ ค่า n ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าไร

4. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดในบรรดาจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1,030,301 ซึ่งหาร 1,030,301 ลงตัว แล้ว n เท่ากับเท่าไร

5. กำหนด $f(x) = x^2 + 4x$

$$A = \{x \in R \mid f(f(x)) = f(x)\}$$

$P(A)$ มีสมาชิกกี่ตัว

6. กำหนด

$A = \{(x,y) \mid x$ และ y เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2+4x+y^2 = 9\}$

A มีสมาชิกกี่ตัว

7. กำหนดให้ $f_a(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-a)$ เมื่อ a,n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a < n$

$$f_1\left(\frac{f_3(27)}{f_2(26)}\right)$$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดฟังก์ชัน f มีคุณสมบัติดังนี้

(1) $f(0) \neq 0$

(2) สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

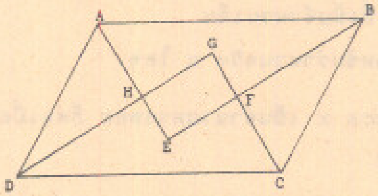
ดังนั้น f(2533) เท่ากับเท่าไร

9. พื้นที่ของอาณาบริเวณที่ล้อมรอบโดยกราฟของ $|x| + |y| = 2$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย

10. ให้เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีความยาวเท่ากับ 60 หน่วย และความสูงซึ่งตั้งฉากกับด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับ 12 หน่วย ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับเท่าไร

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยประจำปี 2537 (รอบที่ 2)

4. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ตัดกันที่ E และเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{C}$ และ $\hat{D}$ ตัดกันที่จุด G และตัดเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{B}$ และ $\hat{A}$ ที่จุด F และ H ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า เส้นทแยงมุม GE = HF



อ่านเฉลยได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

แบบทดสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก ฉบับที่ 2

สอบวันที่ 25 สิงหาคม 2533 เวลา 15.30 - 16.30 น.

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ข้อ ๆละ 10 คะแนน ให้แสดงวิธีทำทุกข้อ

1. ลูกบาศก์ลูกหนึ่งมีปริมาตร 17,576 ลูกบาศก์เซนติเมตร จงหาระยะจากจุดตัดของเส้นทแยงมุมของหน้าใดหน้าหนึ่งไปยังจุดมุมของลูกบาศก์

2. จงหาจำนวนเต็มบวกในตำแหน่งที่ 1 ล้านของลำดับต่อไปนี้

   1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

   โดยที่ลำดับจะมีจำนวนเต็มบวก n เกิดขึ้น n ตำแหน่ง

3. **บทนิยาม** $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

   ถ้า $a \in A$ และ $b \in B$ จงพิสูจน์ว่า $(a,b) \in P(P(A \cup B))$

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยประจำปี 2537 (รอบที่ 2)

1. จงหาจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้สมการ

   $$n = x^2 - y^2 + 1994$$

   มีคำตอบ x,y ที่เป็นจำนวนเต็ม

2. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ

   $\sin x$ และ $\cos x$ เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $\tan \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

อ่านเฉลยได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

เฉลยข้อสอบแข่งขัน
คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย
ประจำปี 2533

แบบทดสอบฉบับที่ 1

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 2.

แนวคิด พิจารณาอสมการ

$$\frac{8}{x-1} + 3 \leqslant x$$

$$\frac{8}{x-1} + 3 - x \leqslant 0$$

$$\frac{8 + 3(x-1) - x(x-1)}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{8 + 3x - 3 - x^2 + x}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{5 + 4x - x^2}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x-1} \geqslant 0$$

$$\frac{(x-5)(x+1)}{x-1} \geqslant 0$$

พิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้โดยใช้ตารางเครื่องหมายฟังก์ชันดังนี้

		$x=-1$		$x=1$		$x=5$	
$x+1$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
$\frac{(x-5)(x+1)}{x-1}$	$-$	0	+	∞	$-$	0	+

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $\frac{8}{x-1} + 3 \leqslant x$ คือ $[-1,1) \cup [5,\infty)$

(1) $[1,5] \cap ([-1,1) \cup [5,\infty)) = \{5\}$

(2) $[1,5) \cap ([-1,1) \cup [5,\infty)) = \phi$

(3) $(-\infty,5) \cap ([-1,1) \cup [5,\infty)) = [-1,1)$

(4) เป็นเซตเดียวกัน

สรุปตัวเลือกคือ ข้อ 2.

การตัดตัวเลือก ลองดูว่า $x = 5$ ได้หรือไม่

เพราะว่า $\frac{8}{5-1} + 3 = \frac{8}{4} + 3 = 5 \leqslant 5$

แสดงว่า 5 อยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งไปได้

สังเกตได้โดยง่ายพบว่า $x = 0$ ทำให้

$$\frac{8}{0-1} + 3 = -8 + 3 = -5 \leqslant 0$$

แสดงว่า 0 อยู่ในเซตคำตอบของอสมการและตัวเลือก 3.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

2. ตอบ 4.

แนวคิด เอกภพสัมพัทธ์คือ I^+

(1) ผิด

ตัวอย่างเช่น $1 \in I^+$ แต่ $\sqrt{1} = 1$ เป็นจำนวนตรรกยะ

(2) ผิด

ตัวอย่างเช่น $1 \in I^+$ แต่ $1^2 = 1$ เป็นจำนวนตรรกยะ

(2) ผิด

เพราะว่า ทุกค่า $x \in I^+$, $\sqrt{x}$ เป็นจำนวนจริงเสมอ

(4) ถูกต้อง

เพราะว่า $2t+1$ เป็นจำนวนคี่เสมอทุกค่า $t \in I^+$

3. ตอบ 3.

แนวคิด สำหรับ $a,b \in R$ กำหนดให้ $a * b = 2a + 2b$

เพราะว่า $2a + 2b$ เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $*$ มีคุณสมบัติปิด

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ให้ $a,b,c \in R$

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (2a + 2b) * c \\ &= 2(2a + 2b) + 2c \\ &= 4a + 4b + 2c\end{aligned}$$

$$a * (b * c) = a * (2b + 2c)$$

$= 2a + 2(2b + 2c)$

$= 2a + 4b + 4c$

เมื่อ $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

$(a * b) * c = (1 * 2) * 3$

$= 4(1) + 4(2) + 2(3)$

$= 4 + 8 + 6$

$= 18$

$a * (b * c) = 1 * (2 * 3)$

$= 2(1) + 4(2) + 4(3)$

$= 2 + 8 + 12$

$= 22$

ดังนั้น * ไม่มีคุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่ม

เพราะว่า $(a * b) = 2a + 2b$

$= 2b + 2a$

$= b * a$

เพราะฉะนั้น * มีคุณสมบัติสลับที่

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ขณะนี้จึงเหลือตัวเลือก 3. ตัวเลือกเดียวเท่านั้น

4. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาการแยกแฟกเตอร์

เพราะว่า $2x^3+x^2-2x-1 = (x+1)(2x^2-x-1)$

$= (x+1)(2x+1)(x-1)$

และ $x^2+2x-3 = (x+3)(x-1)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2x^3+x^2-2x-1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$

$\dfrac{(x+1)(2x+1)(x-1)}{(x+3)(x-1)} \geqslant 0$

เพราะว่า $x-1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x+3} \geqslant 0$

พิจารณาค่าของ x ที่เป็นไปได้โดยใช้ตารางเครื่องหมายดังนี้

		$x=-3$		$x=-1$		$x=-\frac{1}{2}$	
$x+3$	$-$	0	+	+	+	+	+
$x+1$	$-$	$-$	$-$	0	+	+	+
$2x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	+
$\frac{(x+1)(2x+1)}{x+3}$	$-$	∞	+	0	$-$	0	+

เพราะฉะนั้น $\dfrac{(x+1)(2x+1)}{x+3} \geqslant 0$

เมื่อ $x \in (-3,-1] \cup [-\frac{1}{2},\infty)$

เพราะว่า $x \neq 1$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของ $\frac{2x^3+x^2-2x-1}{x^2+2x-3} \geqslant 0$ คือ

$$(-3,-1) \cup [-\frac{1}{2}, 1) \cup (1,\infty)$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$ ในอสมการ

$$\frac{0+0-0-1}{0+0-3} = \frac{1}{3} \geqslant 0$$

แสดงว่า $x = 0$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 1$ ทำให้ $x^2+2x-3 = 1+2-3 = 0$

แสดงว่า $x = 1$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบของอสมการ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เปรียบเทียบตัวเลือก 1. กับ 4. โดยเลือก $x = 2$ แทนค่า

พบว่า

$$\frac{2(2)^3+(2)^2-2(2)-1}{2^2+2(2)-3} = \frac{16+4-4-1}{4+4-3}$$

$$= \frac{15}{5}$$

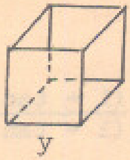
$$= 3 \geqslant 0$$

แสดงว่า $x = 2$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

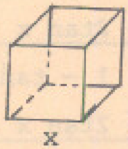
ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

5. ตอบ 2.

แนวคิด



ลูกบาศก์ ก



ลูกบาศก์ ข

ให้ลูกบาศก์ ข มีความยาวด้าน ๆ ละ x

เพราะฉะนั้นพื้นที่ผิวของลูกบาศก์ ข คือ $6x^2$

จากโจทย์พื้นที่ผิวของลูกบาศก์ ข คือ 18

เพราะฉะนั้น $6x^2 = 18$

$$x^2 = 3$$

$$x = \sqrt{3}$$

ปริมาตรลูกบาศก์ ข เท่ากับ $x^3 = 3\sqrt{3}$

เพราะว่าปริมาตรลูกบาศก์ ก เป็นสามเท่าของลูกบาศก์ ข

เพราะฉะนั้นปริมาตรลูกบาศก์ ก เท่ากับ $3(3\sqrt{3}) = 9\sqrt{3}$

ให้ y เป็นความยาวด้านของลูกบาศก์ ก

ดังนั้น $y^3 = 9\sqrt{3}$

$$y = (9\sqrt{3})^{1/3}$$

พื้นที่ผิวของลูกบาศก์ ก เท่ากับ $6y^2 = 6(9\sqrt{3})^{2/3}$

$$= 6(3^{5/2})^{2/3}$$

$$= 6(3)^{5/3} = 18\sqrt[3]{9}$$

6. ตอบ 3

แนวคิด $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{(1 + \tan x)(1 + \tan x)}{(1 - \tan x)(1 + \tan x)}$

$$\frac{A + B\cos x \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + 2\tan x + \tan^2 x}{1 - \tan^2 x}$$

$$= \frac{1 + 2\tan x + \tan^2 x}{(1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x})}$$

$$= \frac{\cos^2 x\,(1 + 2(\dfrac{\sin x}{\cos x}) + (\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}))}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$A + B\cos x \sin x = \cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x$$

$$= 1 + 2\sin x \cos x$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$

$B = 2$

และ $A + B = 3$

การตัดตัวเลือก

$x = 0$; $\dfrac{1 + \tan 0}{1 - \tan 0} = \dfrac{A + B\cos 0 \sin 0}{\cos^2 0 - \sin^2 0}$

$$\frac{1 + 0}{1 - 0} = \frac{A + 0}{1}$$

เพราะฉะนั้น $A = 1$

$$x = \frac{\pi}{3} \ ; \quad \frac{1 + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{A + B\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}}{\cos^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{1 + B(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\frac{1}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{4 + B\sqrt{3}}{-2}$$

$$\frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{4 + B\sqrt{3}}{-2}$$

$$2\sqrt{3} = B\sqrt{3}$$

$$B = 2$$

สรุป $A + B = 1 + 2 = 3$

7. **ตอบ** 1.

แนวคิด $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{25}$$

$$2\sin x\cos x + 1 = \frac{1}{25}$$

$$\sin 2x = \frac{1}{25} - 1$$

$$\sin 2x = \frac{24}{25}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - (\frac{24}{25})^2$$

$$= \frac{625 - 576}{625} = \frac{49}{625}$$

เพราะว่า $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$ ดังนั้น $\frac{3\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant 2\pi$

เพราะฉะนั้น $\cos 2x \geqslant 0$ ดังนั้น $\cos 2x = \frac{7}{25}$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \pi$

$\frac{3\pi}{2} \leqslant 2x \leqslant 2\pi$

เพราะฉะนั้น $2x$ อยู่ในควอรันท์ 4

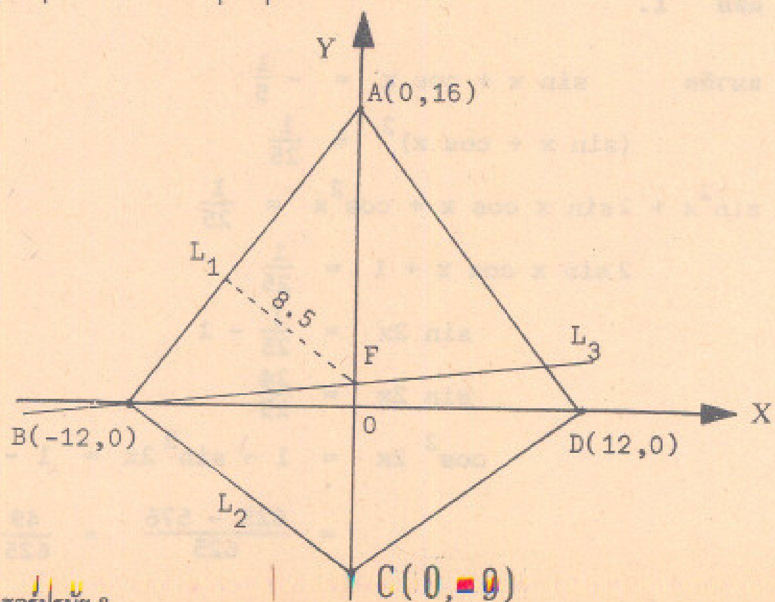
ดังนั้น $\cos 2x \geqslant 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

8. **ตอบ** 3.

แนวคิด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมรูปว่าวโดยมี $\hat{B} = \hat{D} = 90^\circ$

$|AB| = 20$ และ $|BC| = 15$



เนื่องจาก ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{B} = 90^\circ$

ดังนั้น $|AC|^2 = |AB|^2 + |BC|^2$

$= 20^2 + 15^2$

$= 400 + 225$

$= 625$

$|AC| = 25$

วงกลมแนบในสี่เหลี่ยม ABCD ต้องมี AB, BC, CD, AD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่ลากจากจุด A, B, C, D มาสัมผัสกับวงกลม

เพราะว่า AC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $\hat{A}$ และมุม $\hat{C}$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมต้องอยู่บนเส้นตรง AC

เพราะว่าพื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC|$

$= \frac{1}{2}(20)(15) = 150$

และเมื่อให้ AC เป็นฐานของสามเหลี่ยม

จะได้ว่า $\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |OB| = 150$

$\frac{1}{2}(25)|OB| = 150$

$|OB| = \frac{300}{25} = 12$

เพราะว่า $|OB| = 12$, $|BC| = 15$ และ OBC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $|OC|^2 = |BC|^2 - |OB|^2 = 15^2 - 12^2$

$= 225 - 144 = 81$

$|OC| = 9$

ลากแกน X ทับเส้นตรง BD

ลากแกน Y ทับเส้นตรง AC

เพราะฉะนั้นพิกัดของ A, B, C, D คือ

$$A(0,16),\ B(-12,0),\ C(0,-9),\ D(12,0)$$

สมการเส้นตรง L_1 ที่ผ่าน AB

$$\frac{y-16}{x-0} = \frac{0-16}{-12-0}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$3(y-16) = 4x$$

$$4x-3y+48 = 0$$

สมการเส้นตรง L_2 ที่ผ่าน BC

$$\frac{y-0}{x-(-12)} = \frac{-9-0}{0-(-12)}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$$4y = -3(x+12)$$

$$3x+4y+36 = 0$$

การหาสมการเส้นตรง L_3 ที่แบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$

ให้ (x,y) อยู่บนเส้นตรง L_3

ดังนั้น (x,y) ห่างจาก L_1 และ L_2 เท่ากัน

เพราะฉะนั้น

$$\frac{|4x-3y+48|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|3x+4y+36|}{\sqrt{9+16}}$$

$$|4x-3y+48| = |3x+4y+36|$$

เพราะว่าเราสนใจเส้นตรง L_3 ที่มีความชันเป็นบวก

เพราะฉะนั้น เลือก

$$4x-3y+48 = 3x+4y+36$$

$$x-7y+12 = 0$$

สมการเส้นตรง L_3 คือ $x-7y+12 = 0$

การหาจุดตัดของ L_3 กับแกน Y

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $0-7y+12 = 0$

$$y = \frac{12}{7}$$

จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในสี่เหลี่ยม ABCD อยู่ที่จุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ และ $B\hat{A}D$ ซึ่งคือจุดตัดของ L_3 กับแกน Y ที่จุด $(0,\frac{12}{7})$

ระยะทางจากจุด $(0, \frac{12}{7})$ ไปยัง AB เท่ากับ

$$\frac{\left|4(0) - 3(\frac{12}{7}) + 48\right|}{\sqrt{16+9}}$$

$$= \frac{\left|-\frac{36}{7} + 48\right|}{5}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{-36+336}{7}\right)$$

$$= \frac{300}{35}$$

$$= \frac{60}{7}$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\frac{300}{7} = 42.85$ ยาวกว่า $|AC|$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ ใช้ครึ่งวงกลมก็พอ

ให้ $B\hat{E}C = 45^\circ$ และ BE ตัดแกน Y ที่จุด F

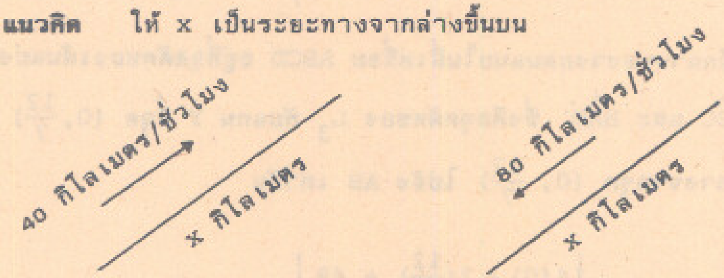
วัดระยะทางจาก F ไปยังเส้น AB ได้เท่ากับ 8.6

เมื่อดูจากตัวเลือกเราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

จะเห็นได้ว่า การวัดระยะทางและมุมจะได้คำตอบที่ใช้เวลาน้อยกว่า

9. **ตอบ** 3.

แนวคิด ให้ x เป็นระยะทางจากล่างขึ้นบน



เวลาที่ใช้ในการเดินทางขึ้น $= \frac{x}{40}$ ชั่วโมง

เวลาที่ใช้ในการเดินทางลง $= \frac{x}{80}$ ชั่วโมง

รวมระยะทางขึ้นและลง $= 2x$ กิโลเมตร

รวมเวลาทั้งหมดที่ขึ้นและลง $= \frac{x}{40} + \frac{x}{80} = \frac{3x}{80}$

เพราะฉะนั้นความเร็วเฉลี่ย $= \frac{2x}{\left(\frac{3x}{80}\right)} = \frac{160}{3}$

$= 53\frac{1}{3}$ กิโลเมตร/ชั่วโมง

10. ตอบ 4.

แนวคิด ปัญหาอัตราส่วนนี้เราสามารถใช้ข้อสมมติว่า ขวดที่กล่าวถึงนั้นมีปริมาตรขวดละ 60 ลิตร จะทำให้การกำหนดอัตราส่วนง่ายขึ้น

ขวดที่ 1 แอลกอฮอล์ : น้ำ = 3 : 1

= 45 ลิตร : 15 ลิตร

ขวดที่ 2 แอลกอฮอล์ : น้ำ = 2 : 1

= 40 ลิตร : 20 ลิตร

เมื่อนำ 2 ขวดมารวมกันจะกลายเป็น 120 ลิตร แอลกอฮอล์ 85 ลิตร มีน้ำ 35 ลิตร

นั่นคือ อัตราส่วน แอลกอฮอล์ : น้ำ

= 85 ลิตร : 35 ลิตร

= 17 : 7

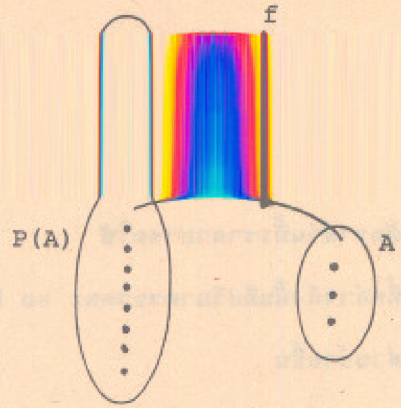
หมายเหตุ วิธีข้างต้นนี้ดีกว่าสมมติปริมาตรของขวดเป็น x ลิตร ในการสมมติอาจสมมติปริมาตรของขวดเป็น 12 ลิตรก็ได้เหมือนกัน

11. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \{a,b,c\}$

$n(A) = 3$

$n(P(A)) = 2^3 = 8$



<u>การนับจำนวนฟังก์ชันจาก P(A) ไป A</u>

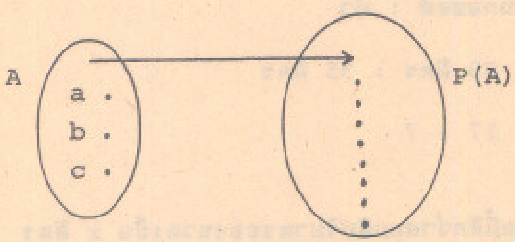
สมาชิกแต่ละตัวของ P(A) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนฟังก์ชันจาก P(A) ไปยัง A เท่ากับ 3^8

$= 6561$

สรุป $s = 6561$

<u>การนับจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยัง P(A)</u>



a เลือกส่งค่าได้ 8 วิธี

b เลือกส่งค่าได้ 7 วิธี

c เลือกส่งค่าได้ 6 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนฟังก์ชันเท่ากับ $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

ดังนั้น $t = 336$

สรุป $s - t = 6561 - 336 = 6225$

12. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $x^3-3x-2 > 0$

$$(x+1)(x^2-x-2) > 0$$

$$(x+1)(x+1)(x-2) > 0$$

$$(x+1)^2(x-2) > 0$$

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid x^3-3x-2 > 0\}$

$$= (2,\infty)$$

$$A' = (-\infty,2]$$

$f_A((1.415)^2) = f_A(2.002225) = 1 \quad (\because 2.002225 \in A)$

$f_{A'}(1) = 1 \quad (\because 1 \in A')$

$f_A(0.5) = 0 \quad (\because 0.5 \in A')$

$f_{A'}(-1) = 1 \quad (\because -1 \in A')$

สรุป $t = 1+0+1+1 = 3$

13. ตอบ 1.

แนวคิด $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$

$$(f_2 + f_2f_1)(x) = f_2(x) + f_2(x)f_1(x)$$

$$1 = f_2(x)(1 + f_1(x))$$

$$= f_2(x)(1 + \frac{1}{1+x})$$

$$= f_2(x)\left(\frac{2+x}{1+x}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{1+x}{2+x}$$

เพราะฉะนั้น $\quad f_2(3) = \frac{1+3}{2+3} = \frac{4}{5}$

$$1 = (f_n + f_n f_{n-1})(x) = f_n(x) + f_n(x) f_{n-1}(x)$$

$$= f_n(x)[1 + f_{n-1}(x)]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + f_{n-1}(x)}$$

$$f_1(1) = \frac{1}{2}$$

$$f_2(1) = \frac{2}{3}$$

$$f_3(1) = \frac{1}{1 + f_2(1)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$f_4(1) = \frac{1}{1 + f_3(1)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{5}{8}$$

$$f_5(1) = \frac{1}{1 + f_4(1)} = \frac{1}{1 + \frac{5}{8}} = \frac{8}{13}$$

$$f_6(1) = \frac{1}{1 + f_5(1)} = \frac{1}{1 + \frac{8}{13}} = \frac{13}{21}$$

$$f_7(1) = \frac{1}{1 + f_6(1)} = \frac{1}{1 + \frac{13}{21}} = \frac{21}{34}$$

$$f_8(1) = \frac{1}{1 + f_7(1)} = \frac{1}{1 + \frac{21}{34}} = \frac{34}{55}$$

สรุป $f_8(1) - f_2(3) = \frac{34}{55} - \frac{4}{5}$

$= \frac{34-44}{55}$

$= \frac{-10}{55}$

$= \frac{-2}{11}$

14. **ตอบ** 2.

แนวคิด $\sqrt{(1+x)^2 + (2-y)^2} = |x+2|$

$(1+x)^2 + (2-y)^2 = (x+2)^2$

$1+2x+x^2+4-4y+y^2 = x^2+4x+4$

$1-2x-4y+y^2 = 0$

$y^2-4y = 2x-1$

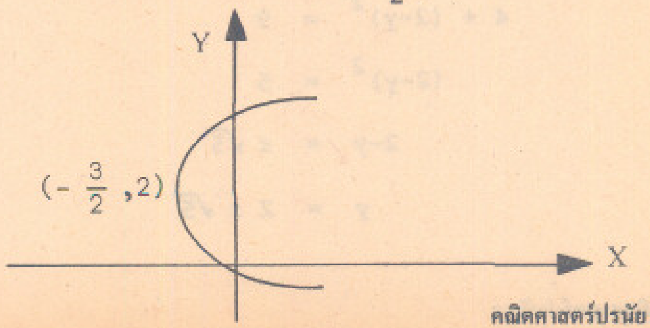
$y^2-4y+4 = 2x-1+4$

$(y-2)^2 = 2x+3$

$(y-2)^2 = 2(x+\frac{3}{2})$

$(y-2)^2 = 4(\frac{1}{2})(x+\frac{3}{2})$

เป็นรูปพาราโบลาเปิดทางขวามีจุดยอดที่ $(-\frac{3}{2}, 2)$



การตัดตัวเลือก

เมื่อ x = -1 จะได้

$$\sqrt{0 + (2-y)^2} = |-1+2|$$

$$(2-y)^2 = 1$$

$$2-y = \pm 1$$

$$y = 2 \pm 1$$

$$y = 3, 1$$

เมื่อ y = 2 จะได้

$$\sqrt{(1+x)^2 + 0} = |x+2|$$

$$|1+x| = |x+2|$$

$$1+2x+x^2 = x^2+4x+4$$

$$2x = -3$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

เมื่อ x = 1 จะได้

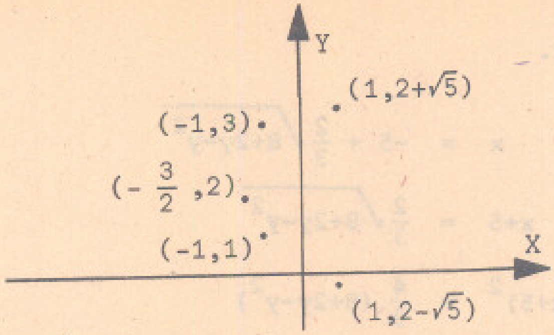
$$\sqrt{(1+1)^2 + (2-y)^2} = |1+2|$$

$$4 + (2-y)^2 = 9$$

$$(2-y)^2 = 5$$

$$2-y = \pm \sqrt{5}$$

$$y = 2 \pm \sqrt{5}$$



จากจุด 5 จุดที่เราเลือกมา

จะเห็นว่า ไม่มีเส้นตรง 2 เส้นที่ผ่านทั้ง 5 จุดนี้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

15. **ตอบ** 3.

แนวคิด โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right) = f\left(\frac{9}{y^2}+1\right)$$

$$= f\left(\left(\frac{3}{y}\right)^2+1\right)$$

$$\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}} = \left[f\left(\left(\frac{3}{y}\right)^2+1\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}} = k$$

เพราะฉะนั้น $$\left[f\left(\frac{9+y^2}{y^2}\right)\right]^{\sqrt{\frac{12}{y}}} = \left[f\left(\left(\frac{3}{y}\right)^2+1\right)\right]^{\left(\sqrt{\frac{3}{y}}\right)(2)}$$

$$= \left[\left[f\left(\left(\frac{3}{y}\right)^2+1\right)\right]^{\sqrt{\frac{3}{y}}}\right]^2$$

$$= k^2$$

16. ตอบ 2.

แนวคิด
$$x = -5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$$
$$x+5 = \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2}$$
$$(x+5)^2 = \frac{4}{9}(8+2y-y^2)$$
$$9(x^2+10x+25) = 4(9-1+2y-y^2)$$
$$= 36-4(y^2-2y+1)$$
$$9(x+5)^2 = 36-4(y-1)^2$$
$$9(x+5)^2 + 4(y-1)^2 = 36$$
$$\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$
$$\frac{(x+5)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1$$

เป็นกราฟที่ไม่ใช่วงกลมแน่นอน

ไม่ใช่ไฮเพอร์โบลาแน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ เพราะว่า $\frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2} \geqslant 0$

$$-5 + \frac{2}{3}\sqrt{8+2y-y^2} \geqslant -5$$
$$x \geqslant -5$$

เพราะฉะนั้นกราฟเป็นวงรีครึ่งซีกขวา

17. ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม

$$20x^2-28x+20y^2-16y-7 = 0$$

$$20(x^2 - \frac{28}{20}x) + 20(y^2 - \frac{16}{20}y) = 7$$

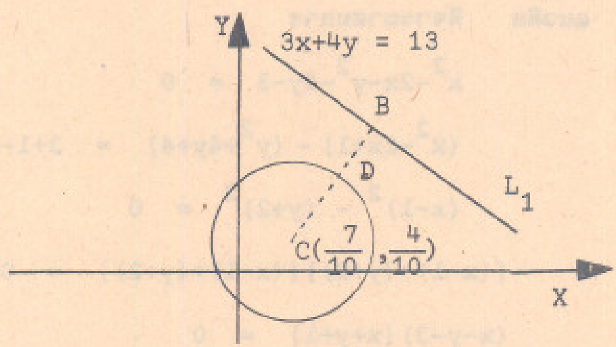
$$20(x^2 - \frac{14}{10}x) + 20(y^2 - \frac{4}{5}y) = 7$$

$$(x^2 - \frac{7}{5}x) + (y^2 - \frac{4}{5}) = \frac{7}{20}$$

$$(x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{49}{100}) + (y^2 - \frac{4}{5}y + \frac{16}{100}) = \frac{7}{20} + \frac{49}{100} + \frac{16}{100}$$

$$(x - \frac{7}{10})^2 + (y - \frac{4}{10})^2 = \frac{35+49+16}{100} = 1$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $C(\frac{7}{10}, \frac{4}{10})$ รัศมี 1



ระยะทางจาก $C(\frac{7}{10}, \frac{4}{10})$ ไปยังเส้นตรง $3x+4y-13 = 0$ คือ

$$|BC| = \frac{|3(\frac{7}{10}) + 4(\frac{4}{10}) - 13|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{1}{5}\left|(\frac{21+16-130}{10})\right| = \frac{1}{5}(\frac{93}{10}) = 1.86$$

เพราะฉะนั้นระยะใกล้ที่สุดของจุดบนวงกลมไปยังเส้นตรง L_1 คือ

$|BD| = |BC| - |CD| = 1.86 - 1 = 0.86$

การตัดตัวเลือก

1. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง $(\frac{7}{10}, \frac{4}{10})$ และรัศมี 1
2. ลากเส้นตรง L_1 : $3x+4y = 13$
3. ลากเส้นตรงจาก C มาตั้งฉากกับ L_1 ที่ B
4. วัดระยะทาง BD ด้วยไม้บรรทัดได้ 0.9 นิ้ว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

18. **ตอบ** 4.

แนวคิด พิจารณาสมการ

$$x^2-2x-y^2-4y-3 = 0$$
$$(x^2-2x+1) - (y^2+4y+4) = 3+1-4$$
$$(x-1)^2 - (y+2)^2 = 0$$
$$[(x-1)-(y+2)][(x-1)+(y+2)] = 0$$
$$(x-y-3)(x+y+1) = 0$$
$$x-y-3 = 0 \text{ หรือ } x+y+1 = 0$$

กราฟของ r เป็นเส้นตรงสองเส้นตัดกัน

เพราะฉะนั้น โดเมน r และเรนจ์ r เป็น R ทั้งคู่

19. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาตัวเลือกที่ 1

การหา r_1^{-1}

จาก $y = x + \frac{1}{x}$

$$xy = x^2 + 1$$

$$x^2 - xy + 1 = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

ดังนั้นเราไม่สามารถหาสูตร x ในพจน์ของ y ได้อย่างชัดแจ้ง

นั่นคือ r_1^{-1} น่าจะไม่เป็นฟังก์ชัน

ลองเลือก $y = \sqrt{5}$ จะได้ $x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$

และ $r_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}$

$$= \frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}+1)^2 + 4}{2(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{10 + 2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}\,(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \sqrt{5}$$

และ $$r_1\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{5}-1)^2 + 4}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 + 4}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{2(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \sqrt{5}$$

สรุป r_1 ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1

เพราะฉะนั้น r_1^{-1} ไม่เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้นเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

20. **ตอบ** 4.

แนวคิด ให้ A(1,3), B(-2,2)

เลือก C เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง A,B

ดังนั้นพิกัด C คือ $(\frac{1-2}{2}, \frac{3+2}{2}) = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

ตามเหตุผลทางเรขาคณิตจุดบนวงกลมที่ห่างจาก A,B เท่ากันนั้น

เกิดจากจุดที่เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ A,B ตัดกับวงกลม

การหาสมการเส้นตรง L ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ A,B

ความชัน AB $= \frac{2-3}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

เพราะว่า L ตั้งฉากกับ AB

เพราะฉะนั้น ความชัน L เท่ากับ -3

สมการ L คือ $y - \frac{5}{2} = (-3)(x + \frac{1}{2})$

$$= -3x - \frac{3}{2}$$

$$2y-5 = -6x-3$$

$$3x+y-1 = 0$$

$$y = 1-3x$$

การหาจุดตัดของ L กับวงกลม

$$x^2+y^2 = 1$$

เพราะว่า $y = 1-3x$

$$x^2 + (1-3x)^2 = 1$$

$$x^2+1-6x+9x^2 = 1$$

$$10x^2-6x = 0$$

$$5x^2-3x = 0$$

$$x(5x-3) = 0$$

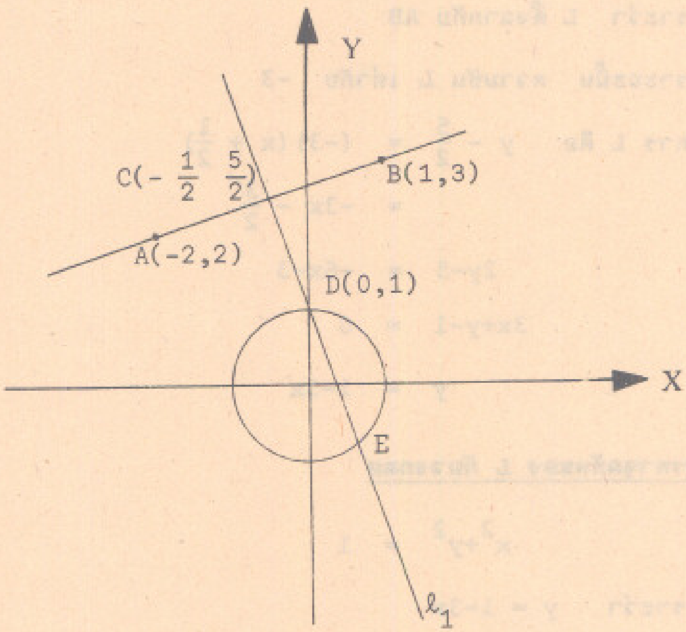
$$x = 0, \frac{3}{5}$$

$$y = 1, -\frac{4}{5}$$

สรุปจุดที่ต้องการคือ (0,1) และ $(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$

การตัดตัวเลือก

ใช้การวาดรูปและวัดระยะทางด้วยไม้บรรทัด



1. เขียนวงกลม $x^2+y^2 = 1$

2. เขียนจุด A(-2,2), B(1,3)

3. จุดกึ่งกลาง AB คือ C($-\frac{1}{2}$, $\frac{5}{2}$)

4. ลากเส้นตรง ℓ_1 ตั้งฉากกับ AB และผ่านจุด C

จุดบน ℓ_1 จะห่างจาก A และ B เท่ากัน

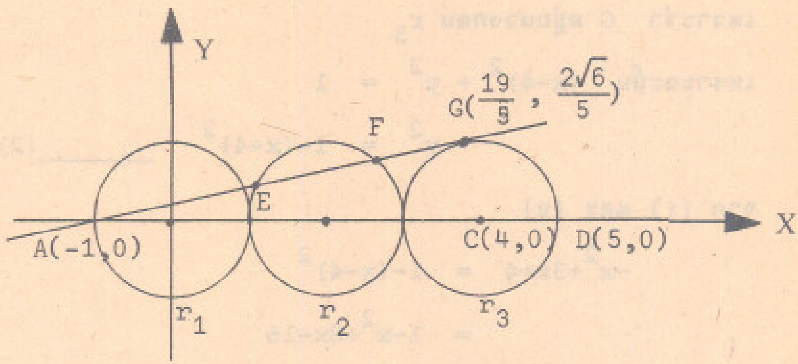
ℓ_1 ตัดวงกลมที่ D และ E

จุด D คือ (0,1) และ E อยู่ในควอดรันท์ 4

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

21. ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปวงกลม r_1, r_2, r_3



จุด A อยู่บนวงกลม r_1 จุด D อยู่บนวงกลม r_3

เพราะว่า AD ยาวที่สุด เพราะฉะนั้น A(-1,0) และ D(5,0)

นั่นคือ $|AD| = 6$

การตัดตัวเลือก

จากรูปที่เราวาดตามสเกลจริง 1 นิ้วต่อหน่วย

แล้ววัดระยะทาง EF ได้ $|EF| = 1.6$ นิ้ว

ดูค่าที่ตัวเลือก

(๑) 0.6 (๓) 1.6

(๒) 0.8 (4) 2.9

สรุปเลือกตัวเลือก (๓) ดีกว่า

วิธีจริง การหาพิกัด G(x,y)

เพราะว่า $AG \perp CG$ เพราะฉะนั้น $\left(\frac{y-0}{x-4}\right)\left(\frac{y-0}{x-(-1)}\right) = -1$

$$y^2 = -(x-4)(x+1)$$

$$y^2 = -x^2+3x+4 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เพราะว่า G อยู่บนวงกลม r_3

เพราะฉะนั้น $(x-4)^2 + y^2 = 1$

$$y^2 = 1-(x-4)^2 \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

จาก (๑) และ (๒)

$$-x^2+3x+4 = 1-(x-4)^2$$

$$= 1-x^2+8x-16$$

$$-5x = -19$$

$$x = \frac{19}{5} = 3.8$$

จาก (๒) ; $y^2 = 1-(3.8-4)^2$

$$= 1-(0.2)^2$$

$$= 1-0.04 = 0.96 = \frac{96}{100}$$

เพราะว่า G อยู่เหนือแกน X

เพราะฉะนั้น $y = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

เพราะฉะนั้นพิกัด G คือ $(\frac{19}{5}, \frac{2\sqrt{6}}{5})$

สมการเส้นตรง AG คือ

$$\frac{y-0}{x-(-1)} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}-0}{\frac{19}{5}-(-1)}$$

$$\frac{y}{x+1} = \frac{2\sqrt{6}}{24}$$

$$y = \frac{\sqrt{6}}{12}(x+1) \qquad \underline{\hspace{3cm}}(3)$$

บนวงกลม r_2 ; $y^2 = 1-(x-2)^2$

เพราะฉะนั้น $\frac{6}{144}(x+1)^2 = 1-(x-2)^2$

$$\frac{(x+1)^2}{24} = 1-x^2+4x-4$$

$$x^2+2x+1 = -24x^2+96x-72$$

$$25x^2-94x+73 = 0$$

$$x = \frac{94 \pm \sqrt{94^2-4(25)(73)}}{2(25)}$$

$$= \frac{94 \pm 39.19}{50}$$

$$= 2.7,\ 1.1$$

บนวงกลม r_2

$x = 2.7$ จะได้ $y^2 = 1-(x-2)^2$

$$= 1-(0.7)^2$$

$$= 1-0.49$$

$$= 0.51$$

$$y = 0.7$$

$x = 1.1$ จะได้ $y^2 = 1 - (1.1-2)^2$

[illegible]

$= 1 - 0.81$

$= 0.19$

$y = 0.4$

เพราะฉะนั้น $E(1.1, 0.4)$, $F(2.7, 0.7)$

$$|EF| = \sqrt{(1.1-2.7)^2 + (0.4-0.7)^2}$$

$$= \sqrt{2.56 + 0.09}$$

$$= 1.627$$

หมายเหตุ ค่า EF ในการคำนวณโดยวิธีจริงจะมีการปัดเศษทศนิยมเสมอ ซึ่งจะเห็นได้ว่าการทำโจทย์ข้อนี้การตัดตัวเลือกดีกว่าวิธีจริง

22\. **ตอบ** 4.

แนวคิด $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$

(1) ผิด

ตัวอย่างเช่น $a = 10$, $b = 4$

$$\frac{10+4}{2} = 7 \neq \sqrt{40} = \sqrt{10 \cdot 4}$$

(2) ผิด

ตัวอย่างเช่น $a = 1$, $b = 2$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 \not< 1.414 = \sqrt{(1)(2)}$$

(3) ผิด

ตัวอย่างเช่น $a = 1$, $b = 1$

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 = \sqrt{1\cdot 1}$$

(4) ถูกต้อง

ข้อพิสูจน์ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$

$$a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geqslant 0$$

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

23. ตอบ 4.

แนวคิด $0 < a < b$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{10 + \sqrt{84}}$$

$$= \sqrt{10 + 2\sqrt{21}}$$

$$= \sqrt{3 + 2\sqrt{7}\sqrt{3} + 7}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2}$$

$$= \sqrt{3} + \sqrt{7}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a} = \sqrt{3}$, $\sqrt{b} = \sqrt{7}$

$$a = 3 \quad , \quad b = 7$$

สรุป $a^2 + b^2 = 9 + 49$

$$= 58$$

24. ตอบ 1.

แนวคิด $\frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \leqslant 1$

$$\frac{(x-\sqrt{x})+(x+\sqrt{x})}{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})} \leqslant 1$$

$$\frac{2x}{x^2 - x} \leqslant 1$$

$x > 0$ จะได้ $\frac{2}{x-1} \leqslant 1$

$$\frac{2}{x-1} - 1 \leqslant 0$$

$$\frac{2-(x-1)}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{3-x}{x-1} \leqslant 0$$

$$\frac{x-3}{x-1} \geqslant 0$$

	$(-\infty,1)$	$x = 1$	$(1,3)$	$x = 3$	$(3,\infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x - 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\frac{x-3}{x-1}$	$+$	∞	$-$	0	$+$

$$\frac{x-3}{x-1} \geqslant 0$$

เมื่อ $x \in (-\infty,1) \cup [3,\infty)$

จากเงื่อนไขของโจทย์ $x > 0$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \leqslant 1$

คือ $[(-\infty,1) \cup [3,\infty)] \cap (0,\infty) = (0,1) \cup [3,\infty)$

เพราะว่า $[(-\infty,0] \cup [1,3)] \cap [(0,1) \cup [3,\infty)] = \phi$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

การตัดตัวเลือก

ลองตัวเลขที่แทนค่าได้ง่ายเช่น

$x = 100$;

$$\frac{1}{100+\sqrt{100}} + \frac{1}{100-\sqrt{100}} = \frac{1}{110} + \frac{1}{90} \leqslant 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 100$ อยู่ในเซตคำตอบของอสมการและอยู่ใน

ตัวเลือก 2.

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$x = 4$;

$$\frac{1}{4+\sqrt{4}} + \frac{1}{4-\sqrt{4}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \leqslant 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 4$ อยู่ในเซตคำตอบและตัวเลือก 4.

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

พิจารณาตัวเลือก 1. และ 3. ลองเลือก

$$\frac{1}{9+\sqrt{9}} + \frac{1}{9-\sqrt{9}} = \frac{1}{9+3} + \frac{1}{9-3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \leqslant 1$$

ดังนั้น $x = 9$ อยู่ในเซตคำตอบและตัวเลือก 3.

สรุปตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

25. **ตอบ** 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1**

$$(Ax^2+Bx+C)^2 = A^2x^4 + 2ABx^3 + (2AC+B^2)x^2 + 2BCx + C^2$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (x^2+3x+2)(x^2+7x+12)+1$$

$$= x^4+10x^3+35x^2+50x+25$$

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1 = (Ax^2+Bx+C)^2$$

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+25 = A^2x^4+2ABx^3+(2AC+B^2)x^2+2BCx+C^2$$

เพราะฉะนั้นโดยการเทียบสัมประสิทธิ์

$$A^2 = 1$$

$$2AB = 10$$

$$2AC + B^2 = 35$$

$$2BC = 50$$

$$C^2 = 25$$

จาก $2AB = 10$

$$AB = 5$$

$$(AB)^2 = 25$$

$$A^2B^2 = 25$$

$$B^2 = 25$$

สรุป $A^2 + B^2 + C^2 = 1 + 25 + 25 = 51$

วิธีที่ ๒ เพราะว่า $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$$= x^4+10x^3+35x^2+50x+25$$

$$= (x^2+5x+5)^2$$

เพราะฉะนั้น $(x^2+5x+5)^2 = (Ax^2+Bx+C)^2$

ดังนั้น $x^2+5x+5 = \pm(Ax^2+Bx+C)$

เพราะฉะนั้น $A = 1, B = 5, C = 5$

หรือ $A = -1, B = -5, C = -5$

ซึ่งทั้งสองกรณี $A^2+B^2+C^2 = 1+25+25 = 51$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$

$(1)(2)(3)(4)+1 = C^2$

$C^2 = 25$

ดังนั้น $A^2+B^2+C^2 \geqslant 25$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

สัมประสิทธิ์ x^4 ทางซ้ายมือเท่ากับ 1

สัมประสิทธิ์ x^4 ทางขวามือเท่ากับ A^2 ดังนั้น $A^2 = 1$

สัมประสิทธิ์ x^3 ทางขวามือเท่ากับ 2AB

สัมประสิทธิ์ x^3 ทางซ้ายมือเท่ากับ $1+2+3+4 = 12$

ดังนั้น $2AB = 12$

$AB = 6$

$A^2B^2 = 36$

$B^2 = 36$

สรุป $A^2+B^2+C^2 = 1+36+25 = 62$

ตอนที่ 2

1. **ตอบ** 29

แนวคิด $5 * 3 = 5 * (5-2)$

$= 5^2 + 2^2$

$= 25 + 4$

$= 29$

2. **ตอบ** $x = 4, 12$

แนวคิด $x-7$, x, $x+1$ เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $0 < x-7 < x < x+1$

เพราะฉะนั้น $(x-7)^2 + x^2 = (x+1)^2$

$x^2-14x+49+x^2 = x^2+2x+1$

$x^2-16x+48 = 0$

$(x-4)(x-12) = 0$

$x = 4, 12$

3. **ตอบ** 419

แนวคิด **วิธีที่ 1** n เป็นจำนวนเต็มบวก

n หารด้วย 3 เหลือเศษ 2

ดังนั้นมี a เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

$n = 3a + 2$ ____________(1)

n หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

ดังนั้นมี b เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$$n = 4b + 3 \qquad \text{(2)}$$

n หารด้วย 5 เหลือเศษ 4

ดังนั้นมี c เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

$$n = 5c + 4 \qquad \text{(3)}$$

n หารด้วย 6 เหลือเศษ 5

ดังนั้นมี d เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

$$n = 6d + 5 \qquad \text{(4)}$$

n หารด้วย 7 เหลือเศษ 6

ดังนั้นมี k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ทำให้

$$n = 7k + 6 \qquad \text{(5)}$$

จาก (๑) และ (๒) ;

$$3a + 2 = n = 4b + 3$$

$$3a - 4b = 1$$

เลือก $a = 3$ และ $b = 2$ จะได้ $3(3) - 4(2) = 1$

เพราะฉะนั้น $n = 3(3) + 2 = 11$

เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 และ

หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

เพราะว่า ห.ร.ม.(3,4) = 12

เพราะฉะนั้น n ที่สอดคล้อง (1) และ (2) อยู่ในรูป

$$n = 12i + 11 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(6)$$

เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาสมการ (3) และ (6)

$$5c + 4 = 12i + 11$$

$$5c - 12i = 7$$

เลือก $c = 11$, $i = 4$ จะได้ $5(11) - 12(4) = 7$

จะได้ $n = 12(4) + 11 = 48 + 11 = 59$

เพราะว่า ห.ร.ม.(5,12) = 60

จำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องสมการ (3) และ (6) จะอยู่ในรูปแบบ

$$n = 60j + 59 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(7)$$

เมื่อ j เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาสมการ (7) และ (4)

$$60j + 59 = n = 6d + 5$$

$$6d - 60j = 54$$

เลือก $d = 1$, $j = 1$

เพราะฉะนั้น $n = 60(1) + 59 = 119$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องเงื่อนไขสมการ (4) และ (7)

เพราะว่า ห.ร.ม.(6,60) = 60

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องเงื่อนไขสมการ (4) และ (7) คือ

$$n = 60r + 119 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}(8)$$

พิจารณาสมการ (๘) และ (๕)

$$60r + 119 = n = 7k + 6$$

$$7k - 60r = 113$$

เลือก $k = 59$ $r = 5$ จะได้ $7(59) - 60(5) = 113$

เพราะฉะนั้น $n = 60(5) + 119$

$= 419$

เพราะว่า ห.ร.ม.$(7,60) = 420$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องสมการ (๘) และ (๕) คือ

$$n = 420t + 419$$

สรุป $n = 419$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่เล็กที่สุดที่หารด้วย 3, 4, 5, 6 และ 7 เหลือเศษ 2, 3, 4, 5 และ 6 ตามลำดับ

ตรวจสอบคำตอบ $419 = 139(3) + 2$

$419 = 104(4) + 3$

$419 = 83(5) + 4$

$419 = 69(6) + 5$

$419 = 59(7) + 6$

วิธีที่ ๒

โดยใช้ทฤษฎีจำนวน

$n \equiv 2 \bmod 3$ ____________(1)

$n \equiv 3 \bmod 4$ ____________(2)

$n \equiv 4 \mod 5$ ____________ (3)

$n \equiv 5 \mod 6$ ____________ (4)

$n \equiv 6 \mod 7$ ____________ (5)

(1) และ (2) ; $n \equiv 11 \mod 12$ ________ (6)

(6) และ (3) ; $n \equiv 59 \mod 60$ ________ (7)

(7) และ (4) ; $n \equiv 59 \mod 60$ ________ (8)

(8) และ (5) ; $n \equiv 419 \mod 420$ ________ (9)

สรุป n ที่เล็กที่สุดคือ $n = 419$

4. **ตอบ** 10201

แนวคิด เพราะว่า $1030301 = (101)^3$

เพราะฉะนั้นตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่หาร 1030301 ลงตัว

และน้อยกว่า 1030301 คือ

$1, 101, 101^2$

ดังนั้น $101^2 = 10201$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดในบรรดา

จำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 1030301 ซึ่งหาร 1030301 ลงตัว

5. **ตอบ** 16

แนวคิด $f(x) = x^2+4x$

$$f(f(x)) = f(x^2+4x)$$

$$= (x^2+4x)^2 + 4(x^2+4x)$$

พิจารณาสมการ $f(f(x)) = f(x)$

$$(x^2+4x)^2 + 4(x^2+4x) = x^2+4x$$

$$(x^2+4x)^2 + 3(x^2+4x) = 0$$

$$(x^2+4x)(x^2+4x+3) = 0$$

$$x(x+4)(x+3)(x+1) = 0$$

$$x = -4, -3, -1, 0$$

สรุป $A = \{x \in R \mid f(f(x)) = f(x)\}$

$= \{-4,-3,-1,0\}$

$n(A) = 4$

$n(P(A)) = 2^4 = 16$

6. **ตอบ** 8

แนวคิด พิจารณาสมการ $x^2+4x+y^2 = 9$

$$(x^2+4x+4) + y^2 = 13$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 13$$

$((x+2)^2 = 4$ และ $y^2 = 9)$ หรือ $((x+2)^2 = 9$ และ $y^2 = 4)$

$(x+2 = \pm 2$ และ $y = \pm 3)$ หรือ $(x+2 = \pm 3$ และ $y = \pm 2)$

$(x = 0,-4$ และ $y = \pm 3)$ หรือ $(x = 1,-5$ และ $y = \pm 2)$

สรุป $A = \{(x,y) \mid x,y$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2+4x+y^2 = 9\}$

$= \{(0,3),(0,-3),(-4,3),(-4,-3),(1,2),$

$(1,-2),(-5,2),(-5,-2)\}$

$n(A) = 8$

7. **ตอบ** 702

แนวคิด a, n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a < n

$$f_a(n) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-a)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-a)(n-a-1)(n-a-2)\ldots3\cdot2\cdot1}{(n-a-1)(n-a-2)\ldots3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{n!}{(n-a-1)!}$$

ดังนั้น $f_3(27) = \frac{27!}{(27-3-1)!} = \frac{27!}{23!}$

$$f_2(26) = \frac{26!}{(26-2-1)!} = \frac{26!}{23!}$$

$$\frac{f_3(27)}{f_2(26)} = \frac{(\frac{27!}{23!})}{(\frac{26!}{23!})} = 27$$

$$f_1\left(\frac{f_3(27)}{f_2(26)}\right) = f_1(27) = \frac{27!}{(27-1-1)!}$$

$$= \frac{27!}{25!} = 26\cdot27$$

$$= 702$$

8. **ตอบ** 2533 หรือ 1

แนวคิด เพราะว่า $x = 0$, $y = 0$ จะได้

$$f((0)(0)) = f(0)f(0)$$

$$f(0) = f(0)f(0)$$

และ $f(0) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $f(0) = 1$

$$f((0)(1)) = f(0)f(1)$$

$$f(0) = f(0)f(1)$$

$$1 = f(1)$$

สูตรของ f แบบที่ 1

เพราะว่า $f(n) = n$ เมื่อ $n \neq 0$

จะได้ว่า $f(xy) = xy$

$$= f(x)f(y)$$

เพราะฉะนั้น $f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n & , n \neq 0 \end{cases}$

สอดคล้องเงื่อนไข (1) $f(0) \neq 0$

(2) $f(xy) = f(x)f(y)$

สรุป $f(2533) = 2533$

สูตรของ f แบบที่ 2

$f(x) = 1$ ทุกค่า $x \in \mathbf{R}$

จะได้ 1. $f(0) = 1 \neq 0$

2. $f(xy) = 1 = 1 \cdot 1 = f(x)f(y)$

ทุกค่า $x, y \in \mathbf{R}$

เพราะฉะนั้น f สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

ดังนั้น $f(2533) = 1$

๙. **ตอบ** 8

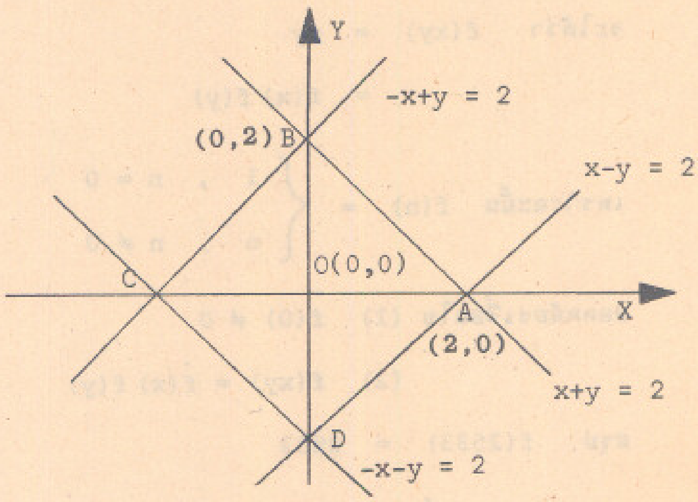
แนวคิด กราฟที่ปิดล้อมด้วย $|x|+|y| = 2$

คือกราฟที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $x+y = 2$

$x-y = 2$

$-x+y = 2$

$-x-y = 2$



พื้นที่ปิดล้อมด้วย $|x|+|y| = 2$

$=$ พ.ท. $\square$ ABCD

$= 4$ พ.ท. $\triangle$ OAB

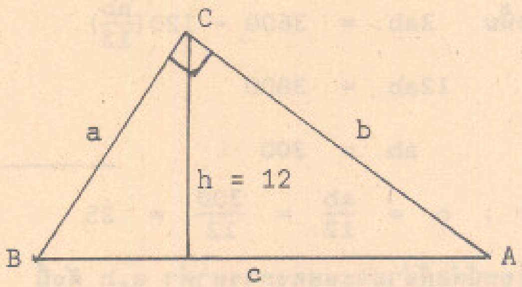
$= 4\left[\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB\right]$

$= 4\left[\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right]$

$= 8$

10. ตอบ $c = 25$

แนวคิด



เพราะว่าความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับ 60

เพราะฉะนั้น $a + b + c = 60$ ______ (1)

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot$ ฐาน $\cdot$ สูง

$= \frac{1}{2} \cdot c \cdot h = \frac{1}{2} \cdot c \cdot 12$

$= 6c$

เพราะฉะนั้น $6c = \frac{1}{2} ab$

$c = \frac{ab}{12}$ ______ (2)

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $c^2 = a^2 + b^2$ ______ (3)

จาก (1) $a + b = 60 - c$

$(a + b)^2 = (60 - c)^2$

$a^2 + 2ab + b^2 = 3600 - 120c + c^2$

เพราะว่า $c^2 = a^2 + b^2$

เพราะฉะนั้น $2ab = 3600 - 120c$

เพราะว่า $c = \frac{ab}{12}$

เพราะฉะนั้น $2ab = 3600 - 120(\frac{ab}{12})$

$12ab = 3600$

$ab = 300$ ______ (4)

จาก (2) ; $c = \frac{ab}{12} = \frac{300}{12} = 25$

เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านจะแสดงการหาค่า a,b ดังนี้

จาก (1) ; $a + b = 60 - c$

$a + b = 35$

$a = 35 - b$

จาก (4) ; $(35 - b)b = 300$

$35b - b^2 = 300$

$b^2 - 35b + 300 = 0$

$(b - 15)(b - 20) = 0$

$b = 15, 20$

ดังนั้น $a = 20, 15$

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทยประจำปี 2537 (รอบที่ 2)

4. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\hat{A} = 2\hat{B}$ จงพิสูจน์ว่า $a^2 = b(b+c)$ เมื่อ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม $\hat{A},\hat{B},\hat{C}$ ตามลำดับ

อ่านเฉลยได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 5

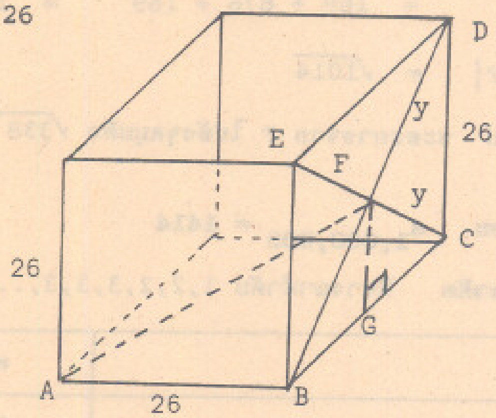
แบบทดสอบฉบับที่ 2

1. **ตอบ** $\sqrt{338}$, $\sqrt{1014}$

แนวคิด ให้ x เป็นความยาวของด้านของลูกบาศก์

ดังนั้น $x^3 = 17576 = 26^3$

$x = 26$



BCDE เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 26

DB, EC ตั้งฉากและแบ่งครึ่งกันและกัน

เพราะฉะนั้น $|DF|^2 + |CF|^2 = 26^2$

$y^2 + y^2 = 676$

$y^2 = 338$

$y = \sqrt{338} = 18.384776$

เพราะว่า F เป็นจุดกึ่งกลางของสี่เหลี่ยม BCDE

ลาก FG ตั้งฉากกับ BC

เพราะฉะนั้น FG ยาวเท่ากับ 13 และ BG ยาวเท่ากับ 13

Δ ABG เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$|AG|^2 = |AB|^2 + |BG|^2 = 26^2 + 13^2$$

Δ AGF เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$|AF|^2 = |FG|^2 + |AG|^2 = 13^2 + 26^2 + 13^2$$

$$= 169 + 676 + 169 = 1014$$

$$|AF| = \sqrt{1014}$$

สรุป ระยะทางจาก F ไปยังจุดมุมคือ $\sqrt{338}$ หรือ $\sqrt{1014}$

๒. **ตอบ** $a_{1,000,000} = 1414$

แนวคิด พิจารณาลำดับ 1,2,2,3,3,3,... ในรูปแบบ

	พจน์ที่
1	1
2 2	2 - 3
3 3 3	4 - 6
4 4 4 4	7 - 10
⋮	
k k k k ... k	

จำนวนพจน์ $[1,2,2,3,3,3,\ldots,\underbrace{k,k,\ldots,k}_{k\ \text{พจน์}}]$ เท่ากับ

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k}{2}(k+1)$$

พิจารณาสมการ $\frac{k}{2}(k+1) = 1,000,000$

$$k(k+1) = 2,000,000$$

$$k^2+k-2,000,000 = 0$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4(1)(2,000,000)}}{2}$$

เพราะว่า $k > 0$

เพราะฉะนั้น $k = \frac{-1+\sqrt{1+8,000,000}}{2}$

$$= \frac{-1+2828.4}{2} = 1413.7$$

เมื่อ $k = 1413$; $\frac{k}{2}(k+1) = \frac{1413}{2}(1413+1) = 998991$

เมื่อ $k = 1414$; $\frac{k}{2}(k+1) = \frac{1414}{2}(1414+1) = 1000405$

1,2,2,3,3,3,...,1413,...,1413,1414,...,1414

ตัวที่ 998991

ตัวที่ 1000405

สรุป $a_{1,000,000} = 1414$

3. **ข้อพิสูจน์**

ให้ $a \in A$ และ $b \in B$

$(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$

เพราะว่า $a \in A$ และ $b \in B$

เพราะฉะนั้น $\{a\} \subset A \cup B$ และ $\{a,b\} \subset A \cup B$

นั่นคือ $\{a\},\{a,b\} \in P(A \cup B)$

และ $\{\{a\},\{a,b\}\} \in P(P(A \cup B))$

สรุป $(a,b) \in P(P(A \cup B))$

ตัวอย่างการตัดตัวเลือกภายในเล่ม

คณิตศาสตร์ ก. 2583 ข้อ 38

ให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า 7 หาร a เหลือเศษ 1 , 7 หาร b เหลือเศษ 3

และ 7 หาร c เหลือเศษ 5

แล้ว 7 หาร a(b+c) เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 ***2. 2***

3. 4 ***4. 6***

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ a,b,c

ดังนั้นเลือก a,b,c ตามเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

a = 1 หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

b = 3 หารด้วย 7 เหลือเศษ 3

c = 5 หารด้วย 7 เหลือเศษ 5

จะได้ a(b+c) = (1)(3+5) = 8

เพราะฉะนั้น a(b+c) หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

สรุปตัดตัวเลือก 2. 3. 4. ทิ้งได้

ตัวเลือก 1 ถูกต้อง

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 8

เฉลยข้อสอบแข่งขัน

คณิตศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี 2533-2538

ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกเป็นข้อสอบที่ใช้คัดเลือกนักเรียนระดับ ม. ปลาย เพื่อเข้ารับการอบรมความรู้ทางคณิตศาสตร์และคัดเลือกให้เป็นตัวแทนนักเรียนไทยเพื่อเข้าสอบแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับนานาชาติซึ่งมีการสอบแข่งขันเป็นประจำทุกปี ลักษณะของข้อสอบจะเป็นประโยชน์โดยตรงสำหรับผู้เตรียมตัวสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข ผู้เขียนจึงรวบรวมมาพิมพ์พร้อมทั้งเฉลยโดยใช้วิธีจริงวิธีลัดและเทคนิคการตัดตัวเลือก

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพมหานคร 10330
โทร. 2183980, 2187000
โทรสาร 2554441