

คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 9

คู่มือตัดตัวเลือก
ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ต้น

รองศาสตราจารย์ดำรง ทัพโยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

๕ ไร่ ๖๖๖ ไร่ ๖๖๖ ไร่

คณิตศาสตร์ปรมัย (เล่มที่ ๑) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

1. คู่มือคัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. ต้น

กฤษฎีกา

ม. ๖๖๖ ไร่ ๖๖๖ ไร่ ๖๖๖ ไร่

ISBN 974-634-592-3

สงวนลิขสิทธิ์

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 5000 เล่ม พ.ศ. 2540

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980, 2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2153626

คำนำ

หนังสือ คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ต้น เขียนขึ้นเพื่อช่วยให้นักเรียนในระดับ ม.ต้น ได้เห็นแนวทางในการทำโจทย์ข้อสอบอย่างรวดเร็ว เนื้อหาภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบตามหลักสูตร ม.ต้น เช่น เปอร์เซนต์ จำนวนเต็ม พหุนาม เรขาคณิต ทรีโกณมิติ ฯลฯ การเฉลยข้อสอบทุกข้อ นักเรียนจะได้เห็นการหาคำตอบโดยวิธีจริงตามหลักสูตรระดับ ม.ต้น เปรียบเทียบกับ เทคนิคการหาคำตอบด้วยวิธีตัดตัวเลือกซึ่งจะทำให้นักเรียนได้ทั้งความรู้ตามหลักสูตรและเพิ่มความเร็ว ความถูกต้องในการทำคะแนนสอบ

เทคนิคการตัดตัวเลือกรูปแบบบางวิธี ผู้เขียนได้รวบรวมให้เห็นในหัวข้อแรกๆ เช่น การแทนค่า การประมาณค่า หรือการวาดรูป แต่เทคนิคที่สำคัญที่สุดคือการแก้ปัญหาเฉพาะหน้าตามคำถามของข้อสอบขณะนั้นซึ่งนักเรียนจะได้ความรู้ในส่วนนี้จากการฝึกทำข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือกที่ได้เตรียมไว้ให้ทำเป็นจำนวนมาก

หวังว่าหนังสือคู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ม.ต้น ซึ่งเป็นเล่มแรกของชุดหนังสือ คณิตศาสตร์ปรัญญ์ คงจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการทำคะแนนสอบและการเรียนรู้ของนักเรียน ม.ต้น ทุกคนและเมื่อนักเรียนก้าวไปสู่ระดับ ม.ปลาย ก็จะสามารถใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกนี้ได้อีก

สุดท้ายนี้ขอแนะนำหนังสือที่มีเนื้อหาและใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกใกล้เคียง ม.ต้น มากที่สุดคือ **คณิตศาสตร์ปรัญญ์ เล่มที่ 13 คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA** พบกันใหม่เล่มต่อไป

สวัสดิ์ศรีรับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

	หน้า
บทนำ การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร	1
1. การตัดตัวเลือกข้อสอบพหุนาม	9
2. การประมาณค่าสามารถตัดตัวเลือกได้	15
3. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร	23
4. วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววิเคราะห์ทาง	35
5. การนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์	65
6. การตัดตัวเลือกข้อสอบเกี่ยวกับ ค.ร.น. และ ห.ร.ม.	73
7. การเลือกค่าตัวเลขให้สอดคล้องกับ โจทย์เพื่อตัดตัวเลือก	83
8. ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 1.	87
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 2.	111
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 3.	145
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 4.	169
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 5.	199
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 6.	229
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 7.	257
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 8.	279
9. กรณีตัวอย่างในการพัฒนาคุณภาพข้อสอบ	303
10. เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์	313

บทนำ

การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร

การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร ? คำตอบ ก็คือ เทคนิคการทำข้อสอบคณิตศาสตร์แบบปรนัย(ข้อสอบแบบตัวเลือก) ที่ไม่ใช่การเดาตัวเลือก หากแต่เป็นการนำความรู้ทางด้านคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรที่นักเรียนได้เรียนมาแล้วประกอบกับสภาพแวดล้อมของโจทย์คำถาม และตัวเลือกภายในข้อสอบขณะนั้น เมื่อเราใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมเพียงเล็กน้อยก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกที่เราไม่ต้องการและตัดตัวเลือกนั้นทิ้งไปได้ วิธีการแบบนี้เราจึงเรียกว่า เทคนิคการตัดตัวเลือก ตัวอย่างที่น่าเสนอในบทนำนี้เป็นเพียงบางส่วนของเทคนิคการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง 1. ถ้า $a + \frac{1}{a} = 4$ แล้ว $a^2 + \frac{1}{a^2}$ เท่ากับเท่าใด

1. 12

2. -12

3. 14

4. -14

ตอบ 3.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้คือ ค่าบวก หรือ ค่าลบ

เพราะว่า $a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 0$ เสมอ

วิธีจริง $(a + \frac{1}{a})^2 = 4^2$

$$a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} = 16$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 14$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.ทิ้งได้

ตัวอย่าง 2. ห.ร.ม. ของ 105, 2000 และ 1440 เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 5 | 2. 10 |
| 3. 15 | 4. 20 |

ตอบ 1.

แนวคิด เหตุผลที่ใช้ในการตัดตัวเลือกคือ ถ้า m หาร a หรือ b ไม่ลงตัว แล้ว m ไม่เป็น ห.ร.ม. ของ a และ b

เพราะว่า 10 หาร 105 ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า 15 หาร 2000 ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะว่า 20 หาร 105 ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

จะเห็นได้ว่ายังไม่ต้องแยกตัวประกอบ 105, 2000 และ 1440 ก็ได้คำตอบแล้ว

ตัวอย่าง 3. ค.ร.น. ของ $x^3 - x$ และ $x^2 - 4x + 3$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|--------------|----------------------------|
| 1. $x^2 - x$ | 2. $x(x-1)(x-3)$ |
| 3. $x^2 + x$ | 4. $x^4 - 3x^3 - x^2 + 3x$ |

ตอบ 4.

แนวคิด เหตุผลที่เหมาะสมกับการตัดตัวเลือกข้อนี้ขอใช้เหตุผลว่า

ถ้า $p(x)$ เป็น ค.ร.น. ของ $x^3 - x$ และ $x^2 - 4x + 3$

แล้ว กำลังของ x ใน $p(x)$ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1)$ เพราะฉะนั้น $x+1$ หหาร $x^3 - x$ ลงตัว

แต่ $x+1$ หหาร $x(x-1)(x+3)$ ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้น $x(x-1)(x+3)$ ไม่เป็น ก.ร.น.

ของ $x^3 - x$ และ $x^2 - 4x + 3$ ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 4. ค่าของ x ที่สอดคล้องอสมการ $x-2 < \sqrt{x-2}$ อยู่ในช่วงใด

1. $x < 0$

2. $0 < x < 2$

3. $2 < x$

4. $2 < x < 3$

ตอบ 4.

แนวคิด เหตุผลที่เหมาะสมในการตัดตัวเลือกสำหรับข้อนี้คือ รากที่สองของจำนวน

ลบหาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นเมื่อ $x = 0$ หรือ $x = -1$ จะทำให้ $x-2 < 0$ และ

$\sqrt{x-2}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้ก่อน

เหตุผลต่อไปใช้การแทนค่า เพราะว่า เมื่อ $x = 3$ ทำให้

$x - 2 = 3 - 2 = 1 < 1 = \sqrt{3-2} = \sqrt{x-2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $0 < x - 2 < \sqrt{x-2}$

$\sqrt{x-2}$ หาดลอด ; $0 < \sqrt{x-2} < 1$

$$0 < x - 2 < 1$$

$$2 < x < 3$$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{5+1}}$ ค่าของ $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

2. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$

3. $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$

4. $\frac{\sqrt{5}-3}{4}$

ตอบ 2.

แนวคิด เหตุผลในการตัดตัวเลือกข้อนี้เราจะใช้ทั้งเครื่องหมายบวก ลบ และการประมาณค่า $\sqrt{5} = 2.24$ ดังนั้น $\sqrt{5}-3 = 2.24 - 3 < 0$

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{x}+1} > 0$ แต่ $\frac{\sqrt{5}-3}{2} < 0$ และ $\frac{\sqrt{5}-3}{4} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทั้งได้

$$\text{วิธีจริง } \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

$$\sqrt{x}-1 = \sqrt{5}+1$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{5}+2$$

$$\sqrt{x} + 1 = \sqrt{5}+3$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{5}+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+3} \cdot \frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-3} = \frac{\sqrt{5}-3}{5-9} = \frac{\sqrt{5}-3}{-4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4}$$

ตัวอย่าง 6. ข้อใดเป็นคำตอบของสมการ $x^2 - (\frac{1}{k}+k)x + 1 = 0$

1. $2k, \frac{2}{k}$

2. $-k, -\frac{1}{k}$

3. $1, \frac{1}{k}$

4. $k, \frac{1}{k}$

ตอบ 4.

แนวคิด เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมของข้อสอบข้อนี้คือ สมการกำลังสอง $x^2+Ax+B = 0$ มีผลบวกของรากเท่ากับ $-A$ และผลคูณของรากเท่ากับ B เพราะฉะนั้นสมการ $x^2 - (\frac{1}{k}+k)x + 1 = 0$ ต้องมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{k}+k$ และผลคูณของรากเท่ากับ 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทั้งได้

ตัวอย่าง 7. ค่าของ $[(x+1)^3 + 3x^2(x+1)] - [x^3 + 3x(x+1)^2]$ เท่ากับเท่าใด

1. 1
2. $3x$
3. $6x^2$
4. $4x^2$

ตอบ 1.

แนวคิด เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการตัดตัวเลือกคือ สูตรในเทอมของ x ที่เท่ากันเมื่อแทนค่า x ที่เท่ากันแล้วจะต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้นการแทนค่า $x = 1$ จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

$$\begin{aligned} [(x+1)^3 + 3x^2(x+1)] - [x^3 + 3x(x+1)^2] &= [(1+1)^3 + 3(1+1)] - [1 + 3(1+1)^2] \\ &= [8+6] - [1+12] \\ &= 14 - 13 \\ &= 1 \end{aligned}$$

แต่ตัวเลือก 2., 3. และ 4. ไม่มีค่าเท่ากับ 1 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.ทิ้งได้ จะเห็นได้ว่าข้อสอบข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ดีในการสนับสนุนว่าการตัดตัวเลือกจะได้คำตอบเร็วกว่าวิธีจริงตามหลักสูตร

ตัวอย่าง 8. ค่าของ $\frac{3(2^n - 2^{n-1})}{2^{n-1} - 4(2^{n-5})}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2^n
2. 2^2
3. 2^{n-1}
4. $2n$

ตอบ 2.

แนวคิด ใช้เหตุผลแบบเดียวกับตัวอย่าง 7. โดยการแทนค่าที่ทำให้คิดเลขได้ง่าย เช่น $n = 5$ จะได้

$$\frac{3(2^n - 2^{n-1})}{2^{n-1} - 4(2^{n-5})} = \frac{3(2^5 - 2^{5-1})}{2^{5-1} - 4(2^{5-5})}$$

วิธีจริง
$$\frac{28}{x-9} + \frac{\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} + \frac{7}{3+\sqrt{x}} = 1$$

$$\frac{28}{x-9} + \frac{\sqrt{x}(3+\sqrt{x}) + 7(3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} = 1$$

$$\frac{28}{x-9} + \frac{3\sqrt{x} + x + 21 - 7\sqrt{x}}{9-x} = 1$$

$$\frac{-28}{9-x} + \frac{x+21-4\sqrt{x}}{9-x} = 1$$

$$-28 + x + 21 - 4\sqrt{x} = 9 - x$$

$$2x - 4\sqrt{x} - 16 = 0$$

$$x - 2\sqrt{x} - 8 = 0$$

$$(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+2) = 0$$

เพราะว่า $\sqrt{x}+2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{x}-4 = 0$ นั่นคือ $\sqrt{x} = 4$ สรุป $x = 16$

ตัวอย่าง 10. ค่าของ $\frac{2x - \frac{y-5}{6}}{\frac{y-5}{3} - 4x}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1. x | 2. $-\frac{2}{y}$ |
| 3. $-\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{1}{2}$ |

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้เราใช้เหตุผลว่าสูตรในเทอมของ x, y ที่เท่ากันเมื่อแทน

ค่าด้วย x, y ที่เท่ากันต้องเท่ากัน ดังนั้นเราจึงเลือกแทนค่า $x = 1$ และ $y = 5$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ

เพราะว่า
$$\frac{2x - \frac{y-5}{6}}{\frac{y-5}{3} - 4x} = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1, 2 และ 4. ที่จะได้

$$\begin{aligned} \text{วิธีจริง} \quad \frac{2x - \frac{y-5}{6}}{\frac{y-5}{3} - 4x} &= \frac{\left(\frac{12x - y + 5}{6}\right)}{\left(\frac{y - 5 - 12x}{3}\right)} \\ &= \frac{12x - y + 5}{2(y - 5 - 12x)} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{12x - y + 5}{12x - y + 5} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่นำมาเสนอในบทนำนี้คงจะทำให้นักเรียนได้เห็นประโยชน์ของการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็กๆน้อยก็สามารถจำแนกตัวเลือกที่เราไม่ต้องการออกไปได้ ในหัวข้อต่อไปจะเป็นการจำแนกลักษณะของโจทย์ข้อสอบออกเป็นรูปแบบต่างๆ และเทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 13

คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

เป็นหนังสือที่มีข้อสอบเหมือนกับคณิตศาสตร์ ม.ต้น ตัวอย่างข้อสอบเช่น

ตัวอย่าง 1.3 $2x^3 - 10x^2 - 48x$ เท่ากับเท่าใด

1. $2x(x+8)(x-3)$
2. $2x(x-8)(x+3)$
3. $2(x-3)(x-8)(x+1)$
4. $2(x-3)(x-8)(x-1)$
5. $2x(x-2)(x+12)$

แทนค่า $x=0$ ก็สามารถตัดตัวเลือก 3. และ 4. ได้แล้ว

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1

การตัดตัวเลือกข้อสอบพหุนาม

ข้อสอบเกี่ยวกับพหุนามที่สอบถามว่า ผลลัพธ์ของนิพจน์เท่ากับเท่าใด และตัวเลือกเป็นลักษณะของนิพจน์ เช่น

$$x^3 - y^3 \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

1. $(x+y)(x^2+xy-y^2)$
2. $(x+y)(x^2+xy+y^2)$
3. $(x-y)(x^2+xy-y^2)$
- ✓ 4. $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

วิธีที่ดีที่สุดคือจำสูตรของ $x^3 - y^3$ ได้ ซึ่งจะได้ว่าตัวเลือก 4. ถูกต้อง แต่ถ้าลืมสูตรการแทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกสามารถทำได้ดังนี้

แทนค่า $x=1, y=1$ ในโจทย์และตัวเลือก

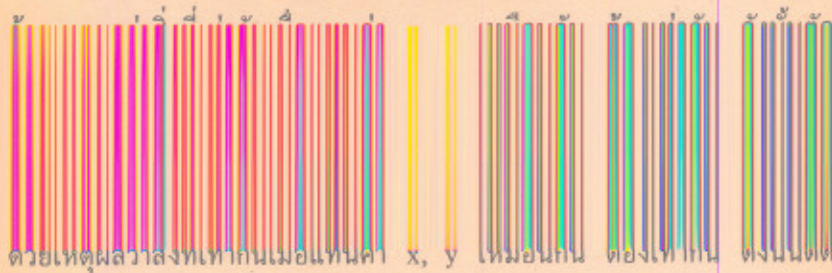
$$x^3 - y^3 = 1 - 1 = 0$$

ตัวเลือก 1. $(x+y)(x^2+xy-y^2) = (1+1)(1+1-1) = 2$

ตัวเลือก 2. $(x+y)(x^2+xy+y^2) = (1+1)(1+1+1) = 6$

ตัวเลือก 3. $(x-y)(x^2+xy-y^2) = (1-1)(1+1-1) = 0$

ตัวเลือก 4. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = (1-1)(1+1+1) = 0$



ด้วยเหตุผลว่าสิ่งที่เหมือนกันเมื่อแทนค่า x, y เหมือนกัน ต้องเท่ากัน ดังนั้น

ตัวเลือก 1. และ 2. ทั้งได้

ต่อไปแทนค่า $x=0, y=1$

$$x^3 - y^3 = 0 - 1 = -1$$

ตัวเลือก 3. $(x-y)(x^2+xy-y^2) = (0-1)(0+0-1) = 1$

ตัวเลือก 4. $(x-y)(x^2+xy+y^2) = (0-1)(0+0+1) = -1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทั้งได้

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกอาจทำได้ด้วยเหตุผลอื่นก็ได้ เช่น

สัมประสิทธิ์ของ y^3 ในโจทย์ เป็น -1

แต่สัมประสิทธิ์ของ y^3 ในตัวเลือก 2. และ 3. เป็น 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทั้งได้

ตัวอย่าง 1.1 ค่าของ $\frac{(x-y)}{2(x+y)} - \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{2(x-y)}$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{x+y}$

2. $\frac{2}{x-y}$

3. $\frac{x-y}{x+y}$

4. $\frac{x-y}{2(x+y)}$

ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{x-y}{2(x+y)} - \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{2(x-y)}$

$$= \frac{(x-y)^2 - 4xy + (x+y)^2}{2(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2 - 4xy + x^2 + 2xy + y^2}{2(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{2x^2 - 4xy + 2y^2}{2(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{2(x-y)^2}{2(x+y)(x-y)}$$

$$= \frac{x-y}{x+y}$$

การตัดตัวเลือก

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x และ y การแทนค่า x และ y ที่เหมาะสมจะทำให้ตัดตัวเลือกได้ เช่น แทนค่า $x=2, y=1$ ในโจทย์จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{x-y}{2(x+y)} - \frac{2xy}{x^2-y^2} + \frac{x+y}{2(x-y)} \\ &= \frac{2-1}{2(2+1)} - \frac{2(2)(1)}{2^2-1^2} + \frac{2+1}{2(2-1)} = \frac{1}{6} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{1-8+9}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

แทนค่าในตัวเลือกทุกตัว

$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{2}{x+y} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{3}$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } \frac{2}{x-y} = \frac{2}{2-1} = 2 \neq \frac{1}{3}$$

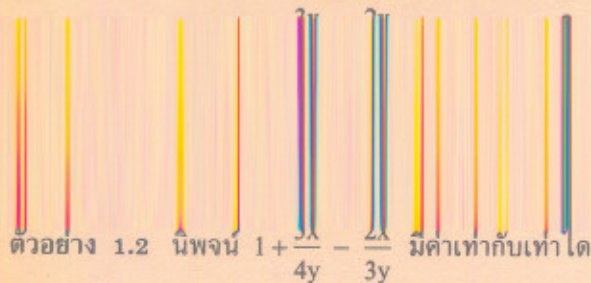
$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{x-y}{x+y} = \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } \frac{x-y}{2(x+y)} = \frac{2-1}{2(2+1)} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}$$

เพราะว่าสิ่งที่เท่ากันเมื่อแทนค่า x และ y ที่เหมือนกันต้องเท่ากัน

เพราะฉะนั้นเรายืนยันได้ว่าตัวเลือก 1., 2. และ 4. ไม่เท่ากับโจทย์แน่นอน

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้



ตัวอย่าง 1.2 นิพจน์ $1 + \frac{3x}{4y} - \frac{2x}{3y}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{x+12y}{y}$

2. $\frac{12y}{12y+x}$

3. $\frac{y}{12y+x}$

4. $1 + \frac{x}{12y}$

ตอบ 4.

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad 1 + \frac{3x}{4y} - \frac{2x}{3y} &= \frac{12y+9x-8x}{12y} \\ &= \frac{12y+x}{12y} \\ &= 1 + \frac{x}{12y} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=0, y=1$ จะได้ $1 + \frac{3x}{4y} - \frac{2x}{3y} = 1 + 0 - 0 = 1$

ตัวเลือก 1. $\frac{x+12y}{y} = \frac{0+12}{1} = 12 \neq 1$

ตัวเลือก 2. $\frac{12y}{12y+x} = \frac{12}{12} = 1$

ตัวเลือก 3. $\frac{y}{12y+x} = \frac{1}{12} \neq 1$

ตัวเลือก 4. $1 + \frac{x}{12y} = 1 + \frac{0}{12} = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x=1, y=1$

$$1 + \frac{3x}{4y} - \frac{2x}{3y} = 1 + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{12+9-8}{12} = \frac{13}{12}$$

แทนค่าเฉพาะตัวเลือก 2. และ 4. เท่านั้น

ตัวเลือก 2. $\frac{12y}{12y+x} = \frac{12}{13} \neq \frac{13}{12}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 1.3 นิพจน์

$$\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 49} \div \frac{x^3 + 27}{x^2 + 9x + 14}$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{x+2}{x^2-3x+9}$

2. $\frac{x+3}{x^2-3x+9}$

3. $\frac{x+7}{x^2-3x+9}$

4. $\frac{x-7}{x^2-3x+9}$

ตอบ 1.

แนวคิด $x^2 - 4x - 21 = (x-7)(x+3)$

$$\begin{aligned} x^3 + 27 &= x^3 + 3^3 \\ &= (x+3)(x^2 - 3x + 9) \end{aligned}$$

$$x^2 - 49 = (x+7)(x-7)$$

$$x^2 + 9x + 14 = (x+2)(x+7)$$

$$\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 49} \div \frac{x^3 + 27}{x^2 + 9x + 14} = \frac{(x^2 - 4x - 21)(x^2 + 9x + 14)}{(x^2 - 49)(x^3 + 27)}$$

$$= \frac{(x-7)(x+3)(x+2)(x+7)}{(x+7)(x-7)(x+3)(x^2 - 3x + 9)}$$

$$= \frac{x+2}{x^2 - 3x + 9}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=0$ ในโจทย์และตัวเลือก $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 49} \div \frac{x^3 + 27}{x^2 + 9x + 14}$

$$= \left(\frac{-21}{-49}\right) \div \left(\frac{27}{14}\right) = \frac{(21)(14)}{(49)(27)} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{x+2}{x^2-3x+9} = \frac{2}{9}$

ตัวเลือก 2. $\frac{x+3}{x^2-3x+9} = \frac{3}{9} \neq \frac{2}{9}$

ตัวเลือก 3. $\frac{x+7}{x^2-3x+9} = \frac{7}{9} \neq \frac{2}{9}$

ตัวเลือก 4. $\frac{x-7}{x^2-3x+9} = \frac{-7}{9} \neq \frac{2}{9}$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 1.4 ค่าของ $\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1} \times 4^{-n}}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2^{2n+1}

2. 2^n

3. $2^{(n^2)}$

4. $2^{(2n)}$

ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1} \times 4^{-n}} = \frac{2^n \times 2^{n^2-n}}{2^{n+1+n-1} \times 2^{-2n}} = 2^{(n^2)}$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $n=1$ $\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1} \times 4^{-n}} = \frac{2 \times (1)}{4 \times 1 \times 4^{-1}} = 2$

ตัวเลือก 1. $2^{2n+1} = 2^3 \neq 2$ ตัวเลือก 2. $2^n = 2^1 = 2$

ตัวเลือก 3. $2^{(n^2)} = 2^1 = 2$ ตัวเลือก 4. $2^{(2n)} = 2^2 = 4 \neq 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $n=2$

$$\frac{2^n \times (2^{n-1})^n}{2^{n+1} \times 2^{n-1} \times 4^{-n}} = \frac{(4) \times (4)}{8 \times 2 \times 4^{-2}} = 4^2 = 16$$

ตัวเลือก 2. $2^n = 2^2 = 4 \neq 16$

ตัวเลือก 3. $2^{(n^2)} = 2^4 = 16$

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

2

การประมาณค่าสามารถตัดตัวเลือกได้

ในการทำโจทย์เกี่ยวกับการหาค่าเราสามารถใช้อัตราประมาณค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก ค่าตัวเลขที่สำคัญควรจดจำได้เช่น

$$\sqrt{2} = 1.4 \quad (1.414213562)$$

$$\sqrt{3} = 1.7 \quad (1.732050808)$$

$$\sqrt{5} = 2.2 \quad (2.236067977)$$

$$\sqrt{7} = 2.6 \quad (2.645751311)$$

$$\pi = \frac{22}{7} \text{ หรือ } 3.14 \quad (3.141592654)$$

การประมาณค่าในลักษณะอื่นอาจเกิดจากการประมาณตัวเลขจากโจทย์
เปรียบเทียบกับค่าประมาณจากตัวเลือก

ตัวอย่าง 2.1 ถ้า $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ แล้ว $\frac{1}{n-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. $1+\sqrt{5}$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}+1}$

4. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

ตอบ 4.

$$\text{แนวคิด } n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} n-1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1+\sqrt{5}-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{5-1}{2(\sqrt{5}+1)} = \frac{2}{\sqrt{5}+1} \end{aligned}$$

$$\text{สรุป } \frac{1}{n-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{การตัดตัวเลือก } n &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2.2}{2} = 1.6 \\ \frac{1}{n-1} &= \frac{1}{1.6-1} = \frac{1}{0.6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.67 \end{aligned}$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-2.2}{2} = \frac{-1.2}{2} = -0.6$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } 1+\sqrt{5} = 1+2.2 = 3.2$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2.2+1} = \frac{1}{3.2} = \frac{10}{32} < 1$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2.2}{2} = 1.6$$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

ตัวอย่าง 2.2 ถ้า $n + \frac{1}{n} = 4$ แล้ว $n^3 + \frac{1}{n^3}$ เท่ากับเท่าใด

1. 16

2. 48

3. 52

4. 64

ตอบ 3.

แนวคิด จากสูตร $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ จะได้

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^3 = n^3 + 3n^2\left(\frac{1}{n}\right) + 3n\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^3}$$

$$4^3 = n^3 + 3n + 3\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$$

$$4^3 = n^3 + 3\left(n + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^3}$$

$$64 = n^3 + 3(4) + \frac{1}{n^3}$$

$$n^3 + \frac{1}{n^3} = 52$$

การตัดตัวเลือก

ประมาณค่า n จากสมการ $n + \frac{1}{n} = 4$ แล้วแทนค่าใน $n^3 + \frac{1}{n^3}$

จาก $n + \frac{1}{n} = 4$

$$n^2 + 1 = 4n$$

$$n^2 - 4n + 1 = 0$$

$$n = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{3}$$

แทนค่า $\sqrt{3} = 1.7$ จะได้ $n = 2 \pm 1.7 = 3.7$ หรือ 0.3

กรณี 1

$$n = 0.3$$

$$n^3 = 0.027$$

$$\frac{1}{n^3} = 37.037$$

$$n^3 + \frac{1}{n^3} = 37.064$$

กรณี 2 $n = 3.7$

$$\begin{aligned}n^3 &= 50.653 \\ \frac{1}{n^3} &= 0.019 \\ n^3 + \frac{1}{n^3} &= 50.67\end{aligned}$$

หมายเหตุ การปรับปรุงคำถามข้างต้นให้มีแนวคิดได้แบบเดียว คือต้องจัดรูปทางพีชคณิตและใช้สูตร $(A+B)^3$ สามารถทำได้ดังนี้
เนื่องจาก $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ทุกค่า $x > 0$

ดังนั้นสมการ $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$ จะไม่สามารถประมาณค่า x ได้

ตัวอย่าง 2.3 ถ้า $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$ แล้ว $x^3 + \frac{1}{x^3}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|----------------|------|
| 1. 0 | 2. 2 |
| 3. $3\sqrt{3}$ | 4. 8 |

ตอบ 1.

แนวคิด จากสูตร $(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ จะได้

$$\begin{aligned}(x + \frac{1}{x})^3 &= x^3 + 3x^2(\frac{1}{x}) + 3x(\frac{1}{x})^2 + (\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + 3(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3} \\ &= x^3 + 3(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } x^3 + \frac{1}{x^3} &= (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x}) [(x + \frac{1}{x})^2 - 3] \\ &= \sqrt{3}(3-3) = 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.4 ผลบวกของ $26.0\bar{8} + 0.14\bar{75} + 2.0\bar{31}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $28.2\bar{6}7749\bar{4}$ | 2. $28.1\bar{6}7749\bar{4}$ |
| 3. $28.4\bar{6}6749\bar{4}$ | 4. $28.3\bar{6}6749\bar{4}$ |

ตอบ 1.

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad & 26.\overline{08} + 0.\overline{1475} + 2.\overline{031} \\ & = 26 + 0.\overline{08} + 0.\overline{0475} + 0.1 + 2 + 0.\overline{031} \\ & = 28.1 + 0.\overline{08} + 0.\overline{0475} + 0.\overline{031} \end{aligned}$$

$$\text{และ} \quad 0.\overline{08} = \frac{8}{90}$$

$$0.\overline{0475} = \frac{475}{9990}$$

$$0.\overline{031} = \frac{31}{990}$$

$$\begin{aligned} 0.\overline{08} + 0.\overline{0475} + 0.\overline{031} &= \frac{8}{90} + \frac{475}{9990} + \frac{31}{990} \\ &= \frac{8 \times 111111 + 475 \times 1001 + 31 \times 10101}{9999990} = \frac{888888 + 475475 + 313131}{9999990} \\ &= \frac{1677494}{9999990} = 0.\overline{1677494} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{สรุป} \quad 26.\overline{08} + 0.\overline{1475} + 2.\overline{031} &= 28.1 + 0.\overline{1677494} \\ &= 28.\overline{2677494} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

โดยใช้วิธีประมาณค่า

$$26.\overline{08} = 26.088888 \cong 26.09$$

$$0.\overline{1475} = 0.1475475 \cong 0.15$$

$$2.\overline{031} = 2.0313131 \cong 2.03$$

เพราะฉะนั้น $26.\overline{08} + 0.\overline{1475} + 2.\overline{031}$

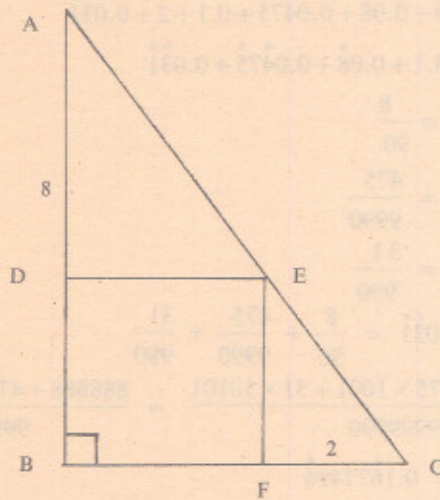
$$= 26.09 + 0.15 + 2.03$$

$$= 28.26$$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ถูกต้อง

ตัวอย่าง 2.5 $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก, $\angle C = 90^\circ$, $DEFB$ เป็น

สี่เหลี่ยมจัตุรัส



ถ้า $AD=8$ เซนติเมตร และ $FC=2$ เซนติเมตร แล้วพื้นที่ $\triangle ABC$ เท่ากับเท่าใด

1. 25 ตารางเซนติเมตร
2. 36 ตารางเซนติเมตร
3. 49 ตารางเซนติเมตร
4. 64 ตารางเซนติเมตร

ตอบ 2.

แนวคิด

เพราะว่า $\angle DAE = \angle FEC$ และ $\angle ADC = \angle EFC = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\triangle ADE$ และ $\triangle CEF$ คล้ายกัน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{AD}{DE} &= \frac{EF}{FC} \\ \frac{8}{DE} &= \frac{EF}{2} \end{aligned}$$

$$EF \cdot DE = 16$$

$$(DE)^2 = 16 \quad (\because BDEF \text{ เป็น } \square \text{ จตุรัส})$$

$$DE = 4$$

$$\text{สรุป } AB = AD + DB = 8 + 4 = 12$$

$$BC = BF + FC = 4 + 2 = 6$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times BC \times AB \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 12 \\ &= 36 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

ให้ $BD = x$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \\ &= \frac{1}{2} (x+8)(x+2) \end{aligned}$$

จากรูปจะได้ว่า $2 < x < 8$

ลองแทนค่า $x = 3, 4, 5$

$$x = 3 ; \frac{1}{2} (x+8)(x+2) = \frac{1}{2} (11)(5) = 27.5$$

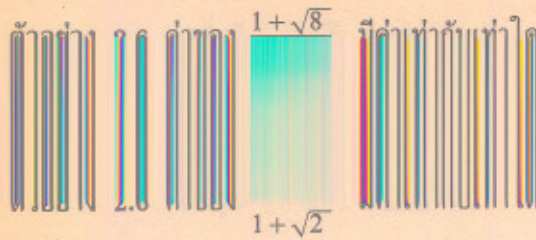
$$x = 4 ; \frac{1}{2} (x+8)(x+2) = \frac{1}{2} (12)(6) = 36$$

$$x = 5 ; \frac{1}{2} (x+8)(x+2) = \frac{1}{2} (13)(7) = 45.5$$

$$x = 6 ; \frac{1}{2} (x+8)(x+2) = \frac{1}{2} (14)(8) = 56$$

$$x = 7 ; \frac{1}{2} (x+8)(x+2) = \frac{1}{2} (15)(9) = 67.5$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า



1. $2+3\sqrt{2}$

2. $2-3\sqrt{2}$

3. $3-\sqrt{2}$

4. $3+\sqrt{2}$

ตอบ 3.

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด } \frac{1+\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}} &= \frac{(1+\sqrt{8})}{(1+\sqrt{2})} \cdot \frac{(1-\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})} = \frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{16}}{1-2} \\ &= \frac{1-\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4}{-1} = 3-\sqrt{2} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2.8$

$$\text{โจทย์ } \frac{1+\sqrt{8}}{1+\sqrt{2}} = \frac{1+2.8}{1+1.4} = \frac{3.8}{2.4} = 1.58$$

ตัวเลือก 1. $2+3\sqrt{2} > 2 > 1.58$ แน่نونตัวเลือก 2. $2-3\sqrt{2} = 1.4-4.2 < 0$ ตัวเลือก 3. $3-\sqrt{2} = 3-1.4 = 1.6$ ตัวเลือก 4. $3+\sqrt{2} > 3 > 1.58$ แน่نون

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ข้อสอบที่ถามว่านิพจน์ของโจทย์ในพจน์ของ x, y, z, \dots เมื่อจัดรูปแบบทางพีชคณิตแล้วจะมีค่าเท่ากับตัวเลือกใด การแสดงวิธีทำจริงคงจะต้องมีการแยกตัวประกอบ, การหาร, การคูณ เพื่อดูว่าตรงกับตัวเลือกใด การตัดตัวเลือกของข้อสอบแบบนี้ เราจะใช้เหตุผลสำหรับค่าตัวแปรที่เท่ากัน เมื่อแทนค่าในโจทย์และตัวเลือกแล้วจะต้องได้ค่าเท่ากัน ดังนั้น ตัวเลือกใดที่แทนค่าแล้วได้ค่าตัวเลขไม่เท่ากับโจทย์เราก็ตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

ในหลักสูตรมัธยมศึกษาตอนต้นมีการเรียนการสอนเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบ, บวก, ลบ, คูณ, หาร เกี่ยวกับพหุนาม ในการหาคำตอบด้วยวิธีจริง เช่น

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x - 10} \text{ มีค่าเท่ากับเท่าใด}$$

ต้องแสดงวิธีทำดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x - 10} &= \frac{(x+5)(x-1)}{(x+5)(x-2)} \\ &= \frac{x-1}{x-2} \end{aligned}$$



ผลลัพธ์ของนิพจน์ $\frac{x^2+4x-5}{x^3+3x-10}$ ตรงกับตัวเลือกใด

1. $\frac{x+1}{x-2}$

2. $\frac{x-2}{x+1}$

3. $\frac{x-1}{x-2}$

4. $\frac{x+1}{x+2}$

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่ดีที่สุดสำหรับคำถามแบบนี้คือแทนค่า x ตัวเลขที่เหมาะสมลงในโจทย์และตัวเลือก เหตุผลที่สำคัญในการตัดตัวเลือกคือ สูตรนิพจน์ของ x ที่เท่ากันเมื่อแทนค่า $x=a$ ต้องมีค่าเท่ากันด้วย

เช่นแทน $x=1$

$$\text{จะได้ } \frac{x^2+4x-5}{x^3+3x-10} = \frac{1+4-5}{1+3-10} = 0$$

ตัวเลือก 1. $\frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = -2$

ตัวเลือก 2. $\frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = \frac{-1}{2}$

ตัวเลือก 3. $\frac{x-1}{x-2} = \frac{1-1}{1-2} = 0$

ตัวเลือก 4. $\frac{x+1}{x+2} = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3}$

ข้อสังเกต ข้อสอบแบบนี้มักจะถามว่า
ผลลัพธ์ของ ... เท่ากับเท่าใด
ค่าของ ... ตรงกับตัวเลือกใด

ตัวอย่าง 3.1 ค่าของนิพจน์ $\frac{2x^3 - y^3 + x^2y - 2xy^2}{x^2 + xy - 2y^2} \times \frac{2x^2 + 5xy + 2y^2}{4x^3 + 4x^2y - xy^2 - y^3}$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1

2. $\frac{x-2y}{x+2y}$

3. $\frac{2x+y}{2x-y}$

4. $\frac{(x+y)^2(4x^2-y^2)}{(x+2y)^2}$

ตอบ 3.

แนวคิด

$$\begin{aligned} 2x^3 - y^3 + x^2y - 2xy^2 &= (2x^3 + x^2y) - (y^3 + 2xy^2) \\ &= x^2(2x+y) - y^2(2x+y) \\ &= (x^2 - y^2)(2x+y) \\ &= (x+y)(x-y)(2x+y) \end{aligned}$$

$$2x^2 + 5xy + 2y^2 = (2x+y)(x+2y)$$

$$x^2 + xy - 2y^2 = (x-y)(x+2y)$$

$$\begin{aligned} 4x^3 + 4x^2y - xy^2 - y^3 &= 4x^2(x+y) - y^2(x+y) \\ &= (4x^2 - y^2)(x+y) \\ &= (2x+y)(2x-y)(x+y) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} &\frac{2x^3 - y^3 + x^2y - 2xy^2}{x^2 + xy - 2y^2} \times \frac{2x^2 + 5xy + 2y^2}{4x^3 + 4x^2y - xy^2 - y^3} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)(2x+y)}{(x-y)(x+2y)} \times \frac{(2x+y)(x+2y)}{(2x+y)(2x-y)(x+y)} = \frac{2x+y}{2x-y} \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=2$ และ $y=1$ ในโจทย์จะได้

$$\begin{array}{|c|c|}
 \hline
 2x^3 - y^3 + x^2y - 2xy^2 & 2x^2 + 5xy + 2y^2 \\
 \hline
 x^2 + xy - 2y^2 & 4x^3 + 4x^2y - xy^2 - y^3 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$= \frac{16-1+4-4}{4+2-2} \times \frac{8+10+2}{32+16-2-1} = \frac{15}{4} \times \frac{20}{45} = \frac{5}{3}$$

แทนค่า $x=2$ และ $y=1$ ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. 1

ตัวเลือก 2. $\frac{x-2y}{x+2y} = \frac{2-2}{2+2} = 0$

ตัวเลือก 3. $\frac{2x+y}{2x-y} = \frac{4+1}{4-1} = \frac{5}{3}$

ตัวเลือก 4. $\frac{(x+y)^2(4x^2-y^2)}{(x+2y)^2} = \frac{(2+1)^2(16-1)}{(2+2)^2} = \frac{9 \times 15}{16} = \frac{135}{16}$

ด้วยเหตุผลที่ว่า นิพจน์ที่มีค่าเหมือนกัน เมื่อแทนค่า x, y ที่เหมือนกันแล้วต้องมีค่าเท่ากัน

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ

การเลือกค่า x, y ที่เหมาะสมควรพิจารณาดังนี้

1. คิดเลขได้ง่าย
2. จำแนกตัวเลือกได้
3. ไม่ทำให้เกิดการหารด้วยศูนย์

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ y

$$\frac{x(x^2-3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} - x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-3)^{\frac{-1}{2}}}{x^2-3} = \frac{y}{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

ค่าของ y เท่ากับเท่าใด

1. $-3x^2$

2. $2x+1$

3. $-4x$

4. x^2-3

ตอบ 3.

แนวคิด

$$\frac{x(x^2-3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} - x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-3)^{\frac{-1}{2}}}{x^2-3} = \frac{y}{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(x^2-3)^{\frac{3}{2}} \text{ คูณตลอด}$$

$$x(x^2-3)(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} - x(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$(x^2+1)^{\frac{1}{2}} \text{ คูณตลอด}$$

$$x(x^2-3) + x(x^2-1) = y$$

$$y = x^3 - 3x + x^2 + x = -4x$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=2$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$\frac{x(x^2-3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}} - x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2-3)^{\frac{-1}{2}}}{x^2-3} = \frac{y}{(x^2-3)^{\frac{3}{2}}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{(2)(1)(5)^{\frac{-1}{2}} - (2)(5)^{\frac{1}{2}}(1)}{1} = \frac{y}{(1)(5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$2 - 10 = y$$

$$y = -8$$

ตัวเลือก 1. $1 - 3y^2 = -12$

ตัวเลือก 2. $2x + 1 = 5$

ตัวเลือก 3. $-4x = -8$

ตัวเลือก 4. $x^2 - 3 = 1$

ดังนั้น เราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.3 นิพจน์

$$(a+b+c)^{-1}(ab+bc+ac)^{-1}(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) \left[(ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1} \right]$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{abc}$

2. $\frac{3}{a+b+c}$

3. $\frac{1}{a^2b^2c^2}$

4. $\frac{a+b+c}{ab+bc+ac}$

ตอบ 3.

แนวคิด

$$(a+b+c)^{-1}(ab+bc+ac)^{-1}(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) \left[(ab)^{-1} + (bc)^{-1} + (ac)^{-1} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{a+b+c} \right) \left(\frac{1}{ab+bc+ac} \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{a+b+c} \right) \left(\frac{1}{ab+bc+ac} \right) \left(\frac{bc+ac+ab}{abc} \right) \left(\frac{c+a+b}{abc} \right)$$

$$= \frac{1}{(abc)^2} \quad \text{ตรงกับตัวเลือก 3.}$$

การตัดตัวเลือก

นิพจน์ของโจทย์และตัวเลือกมีตัวแปร a, b, c ดังนั้น แทนค่า a, b, c ที่เหมาะสม จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ข้อแนะนำ $a=1, b=1, c=1$ ไม่ควรใช้

เพราะจะทำให้ค่าตัวเลขที่ได้จากตัวเลือกทุกตัวเท่ากัน ทำให้จำแนกตัวเลือกเพื่อการตัดทิ้งไม่ได้

เลือกค่า $a=1, b=2, c=3$ แทนค่าในโจทย์และตัวเลือก

$$\begin{aligned} & (a+b+c)^{-1}(ab+bc+ac)^{-1}(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}) \left[(ab)^{-1}+(bc)^{-1}+(ac)^{-1} \right] \\ &= (1+2+3)^{-1}(2+6+3)^{-1} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{6} \right) \left(\frac{1}{11} \right) \left(\frac{6+3+2}{6} \right) \left(\frac{3+1+2}{6} \right) = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{1}{abc} = \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 2. $\frac{3}{a+b+c} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ตัวเลือก 3. $\frac{1}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{1 \cdot 4 \cdot 9} = \frac{1}{36}$

ตัวเลือก 4. $\frac{a+b+c}{ab+bc+ac} = \frac{1+2+3}{2+6+3} = \frac{6}{11}$

ด้วยเหตุผลของการแทนค่านี้อาจจะยังสรุปไม่ได้ว่า นิพจน์ของโจทย์เท่ากับ $\frac{1}{a^2b^2c^2}$ แต่ตัวเลือก 1., 2. และ 4. ผิดแน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดให้ $x = a + \frac{1}{a}$ ค่าของ $(x^4 - a^4)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{(2a^2-1)(2a^4+2a^2+1)}{a^4}$ 2. $\frac{(2a^2+1)(2a^4+2a^2+1)}{a^4}$

3. $\frac{(2a^2+4)(2a^4+2a^2-1)}{a^4}$ 4. $\frac{(2a^2+4)(2a^4-2a^2-1)}{a^4}$

ตอบ 2.

แนวคิด จากสูตร $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ จะได้

$$x^4 - a^4 = (x^2)^2 - (a^2)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= (x-a)(x+a)(x^2+a^2) \\
 &= (x-a)(x+a)(x^2+a^2) \\
 &= \left(a+\frac{1}{a}-a\right)\left(a+a+\frac{1}{a}\right)\left[\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+a^2\right] \\
 &= \left(\frac{1}{a}\right)\left(2a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+2+\frac{1}{a^2}+a^2\right) \\
 &= \left(\frac{1}{a}\right)\left(\frac{2a^2+1}{a}\right)\left(\frac{2a^4+2a^2+1}{a^2}\right) \\
 &= \frac{(2a^2+1)(2a^4+2a^2+1)}{a^4}
 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $a = 1$ จะได้ $x = 1+1 = 2$

$$x^4 - a^4 = 2^4 - 1 = 15$$

ตัวเลือก 1. $\frac{(2a^2-1)(2a^4+2a^2+1)}{a^4} = \frac{(2-1)(2+2+1)}{1} = 5$

ตัวเลือก 2. $\frac{(2a^2+1)(2a^4+2a^2+1)}{a^4} = \frac{(2+1)(2+2+1)}{1} = 15$

ตัวเลือก 3. $\frac{(2a^2+4)(2a^4+2a^2-1)}{a^4} = \frac{(2+4)(2+2-1)}{1} = 24$

ตัวเลือก 4. $\frac{(2a^2+4)(2a^2-2a-1)}{a^4} = \frac{(2+4)(2-2-1)}{1} = -8$

จากเหตุผลที่เป็นจริงสำหรับสูตรที่เท่ากันนั้นต้องเท่ากันทุกค่าของ a

แต่ตัวเลือก 1., 3. และ 4. ไม่เท่ากับโจทย์เมื่อ $a=1$

ดังนั้นเราสามารถตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทั้งได้

ตัวอย่าง 3.5 ตัวเลือกใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\left(\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-4}-y^{-4}}\right)^{-1}$

1. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$

2. $\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

3. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

4. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$

ตอบ 4.

แนวคิด $\left(\frac{x^{-2}+y^{-2}}{x^{-4}-y^{-4}}\right)^{-1} = \frac{x^{-4}-y^{-4}}{x^{-2}+y^{-2}} = \frac{\left(\frac{1}{x^4} - \frac{1}{y^4}\right)}{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right)}$

$$= \frac{\left(\frac{y^4-x^4}{x^4y^4}\right)}{\left(\frac{y^2+x^2}{x^2y^2}\right)} = \frac{1}{x^2y^2} \cdot \frac{(y^4-x^4)}{(y^2+x^2)} = \frac{1}{x^2y^2} \cdot \frac{(y^2-x^2)(y^2+x^2)}{y^2+x^2}$$

$$= \frac{y^2-x^2}{x^2y^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \quad \text{ตรงกับตัวเลือก 4.}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=1$ และ $y=2$

$$\text{จะได้ } \left(\frac{1^{-2}+2^{-2}}{1^{-4}-2^{-4}}\right)^{-1} = \left(\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}}\right)^{-1} = \left(\frac{1-\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{4}}\right) = \frac{\left(\frac{15}{16}\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{3}{4}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \neq \frac{3}{4}$

$$\text{ตัวเลือก 2. } \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5} \neq \frac{3}{4}$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{1+4}{1-4} = \frac{-5}{3} \neq \frac{3}{4}$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.6 กำหนดให้ $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 + 3x - 9} = \frac{k(x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$

ค่าของ $k^2 - 3$ เท่ากับเท่าใด

1. $x^2 - x - 1$

2. $x^2 - 3x + 1$

3. $x^2 - 2x - 3$

4. $x^2 + 2x - 2$

ตอบ 4.

แนวคิด $2x^2 - x - 3 = (2x - 3)(x + 1)$

$$2x^2 + 3x - 9 = (2x - 3)(x + 3)$$

$$x^3 + 3x^2 + x + 3 = x^2(x + 3) + (x + 3)$$

$$= (x^2 + 1)(x + 3)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 + 3x - 9} = \frac{k(x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$

$$\frac{(2x - 3)(x + 1)}{(2x - 3)(x + 3)} = \frac{k(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x + 3)}$$

$$k = x + 1$$

$$k^2 = (x + 1)^2$$

$$= x^2 + 2x + 1$$

$$k^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=0$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$\frac{2x^2 - x - 3}{2x^2 + 3x - 9} = \frac{k(x^2 + 1)}{x^3 + 3x^2 + x + 3}$$

$$\frac{-3}{-9} = \frac{k}{3}$$

$$k = 1$$

$$\text{สรุป } k^2 - 3 = -2$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } x^2 - x - 1 = -1 \neq -2$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } x^2 - 3x + 1 = 1 \neq -2$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } x^2 - 2x - 3 = -3 \neq -2$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } x^2 + 2x - 2 = -2$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2., และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.7 นิพจน์ $4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{4+x}}$ ตรงกับนิพจน์ในตัวเลือกใด

$$1. \frac{24+3x}{x+5}$$

$$2. \frac{3x+24}{x+4}$$

$$3. \frac{24+5x}{x+5}$$

$$4. \frac{5x-24}{x+5}$$

ตอบ 3.

$$\text{แนวคิด } 4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{4+x}} = 4 + \frac{4}{\frac{16+4x+4}{4+x}}$$

$$= 4 + \frac{4(4+x)}{20+4x} = 4 + \frac{4(4+x)}{4(5+x)}$$

$$= 4 + \frac{4+x}{5+x} = \frac{20+4x+4+x}{5+x} = \frac{24+5x}{5+x}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก ข้อสอบมีโจทย์และตัวเลือกในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่าบางค่า

ก็จำแนกตัวเลือกเพื่อตัดทิ้งได้ เช่น แทนค่า $x=0$

$$\text{โจทย์ } 4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{x+4}} = 4 + \frac{4}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{24+3x}{x+5} = \frac{24+0}{0+5} = \frac{24}{5}$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } \frac{3x+24}{x+4} = \frac{0+24}{0+4} = 6 \neq \frac{24}{5}$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{24+5x}{x+5} = \frac{24+0}{0+5} = \frac{24}{5}$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } \frac{5x-24}{x+5} = \frac{0-24}{0+5} = \frac{-24}{5} \neq \frac{24}{5}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปแทนค่า $x = -3$

$$\text{โจทย์ } 4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{4+x}} = 4 + \frac{4}{4 + \frac{4}{4-3}} = 4 + \frac{4}{8} = 4.5$$

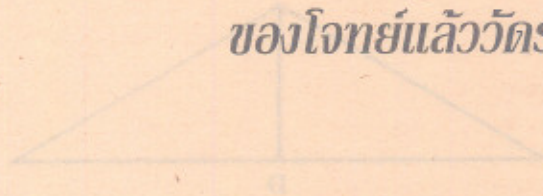
$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{24+3x}{x+5} = \frac{24+3(-3)}{-3+5} = \frac{15}{2} \neq 4.5$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{24+5x}{x+5} = \frac{24+5(-3)}{-3+5} = \frac{9}{2} = 4.5$$

สรุปตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

4

วาดรูปตามเงื่อนไข ของโจทย์แล้ววัดระยะทาง



ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับระยะทาง, พื้นที่สามเหลี่ยม, พื้นที่สี่เหลี่ยม, ขนาดของมุม, อัตราส่วนของระยะทาง การวาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์ และวัดระยะทางตามคำถามที่ต้องการจะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

การวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ ต้องใช้เครื่องมือที่สำคัญ คือ

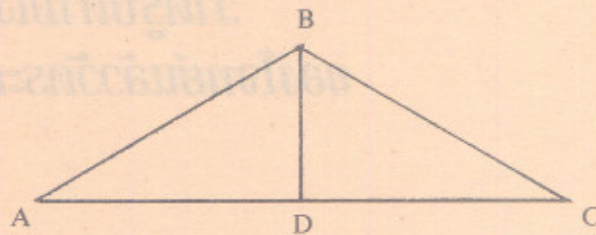
1. ดินสอ
2. วงเวียน
3. ไม้บรรทัด
4. ครึ่งวงกลมวัดมุม (ดีกว่าไม้โปร)
5. การทดสอบเกลเป็นเรื่องสำคัญที่สุด
6. ลำดับขั้นตอนการวาดรูป

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว, $AB = BC = 4$ เซนติเมตร และ $\angle C = 120^\circ$ ความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

- | | |
|------------------------------|------------------------------|
| 1. $8 + \sqrt{3}$ เซนติเมตร | 2. $8 + 2\sqrt{3}$ เซนติเมตร |
| 3. $8 + 4\sqrt{3}$ เซนติเมตร | 4. $8 + 8\sqrt{3}$ เซนติเมตร |



แนวคิด



ลากเส้น BD ตั้งฉากกับ AC

เพราะว่า \triangle เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วเพราะฉะนั้น $AD = DC$ และ $\hat{BAC} = \hat{ACB}$ เพราะว่า $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ$

$$2 \hat{BAC} = 180^\circ - \hat{ABC}$$

$$\hat{BAC} = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\hat{BAC} = 30^\circ$$

$$\text{และ } \cos \hat{BAC} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AD}{AB}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } AD = AB \cdot \cos \hat{BAC} = 4 \cdot \cos 30^\circ = 4 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2\sqrt{3}$$

เพราะว่า $AD = DC$

$$\text{เพราะฉะนั้น } AC = AD + DC = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{สรุปความยาวเส้นรอบรูป } \triangle ABC \text{ เท่ากับ } AB + BC + CA &= 4 + 4 + 4\sqrt{3} \\ &= 8 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้วทำการวัดระยะทาง

1. ลากเส้นตรงแนวตั้ง BE

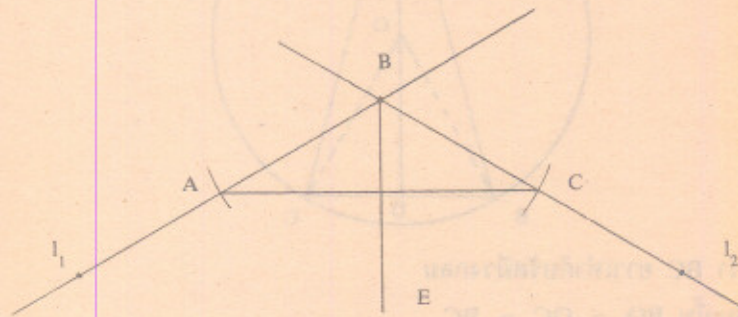
2. ลากเส้นตรง l_1 และ l_2 ทำมุม 60° กับ BE ที่จุด B
3. กางวงเวียนรัศมี 4 เซนติเมตร, จุดศูนย์กลางที่ B ตัด l_1, l_2 ที่จุด A, C
4. ลากเส้น AC

ขณะนี้เราได้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$AB = BC = 4$$

$$\angle ABC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

ตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว



วัดความยาว AB ได้เท่ากับ 6.8 เซนติเมตร

$$\text{ดังนั้นความยาวเส้นรอบรูป} = AB + BC + CA = 4 + 4 + 6.8 = 14.8$$

ประมาณค่า $\sqrt{3} = 1.7$ ในทุกตัวเลือกจะได้ว่า

$$\text{ตัวเลือก 1. } 8 + \sqrt{3} = 8 + 1.7 = 9.7$$

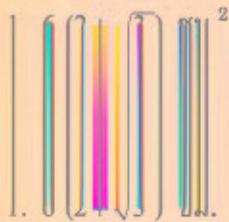
$$\text{ตัวเลือก 2. } 8 + 2\sqrt{3} = 8 + 2(1.7) = 11.4$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } 8 + 4\sqrt{3} = 8 + 4(1.7) = 14.8$$

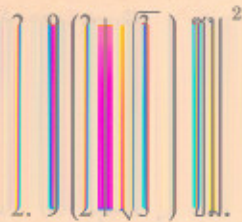
$$\text{ตัวเลือก 4. } 8 + 8\sqrt{3} = 21.6$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

ตัวอย่าง 4.2 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมบรรจุภายในวงกลม O ที่มีรัศมี 6 เซนติเมตร ถ้า $AB = AC$ และ BC ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม O แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด



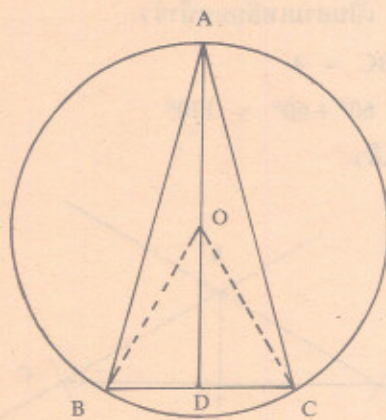
$$3. 10 (2 + \sqrt{3}) \text{ ซม.}^2$$



$$4. 12 (2 + \sqrt{3}) \text{ ซม.}^2$$

ตอบ 2.

แนวคิด



เพราะว่า BC ยาวเท่ากับรัศมีวงกลม

เพราะฉะนั้น $BO = OC = BC$

ดังนั้น OBC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และ $OBC = 60^\circ$

ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC

จะได้ว่า $AD \perp BC$ และ O อยู่บนเส้นตรง AD

ใน $\triangle OBD$

$$\sin \angle OBD = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{OD}{OB}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{OD}{6}$$

$$OD = 6 \sin 60^\circ = 6 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3\sqrt{3}$$

เพราะว่า $AD = OD + OA = 3\sqrt{3} + 6$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง}$

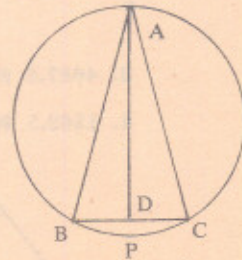
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times (6+3\sqrt{3}) \\
 &= 18+9\sqrt{3} \\
 &= 9(2+\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

1. เขียนวงกลมรัศมี 6 เซนติเมตร
2. ลากคอร์ด BC ยาว 6 เซนติเมตร
3. ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ BC
4. ลากเส้น AD ให้ตั้งฉากกับ BC
5. ลากเส้น AB และ AC

ขณะนี้เราได้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วบรรจุอยู่ในวงกลมรัศมีเท่ากับ 6 เซนติเมตร, $AB=AC$ และ $BC=6$
วัดความยาว AD ได้ 11.2 เซนติเมตร



$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} = \frac{1}{2} \times BC \times DA \\
 &= \frac{1}{2} \times 6 \times 11.2 = 33.6
 \end{aligned}$$

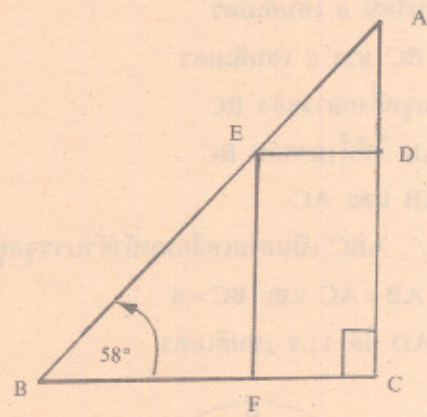
ประมาณค่า $\sqrt{3} = 1.7$ ในตัวเลือก

- ตัวเลือก 1. $6(2+\sqrt{3}) = 6(2+1.7) = 22.2$
- ตัวเลือก 2. $9(2+\sqrt{3}) = 9(2+1.7) = 33.3$
- ตัวเลือก 3. $10(2+\sqrt{3}) = 10(2+1.7) = 37$

ตัวเลือก 4. $12(2+\sqrt{13}) = 12(2+1.7) = 44.4$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

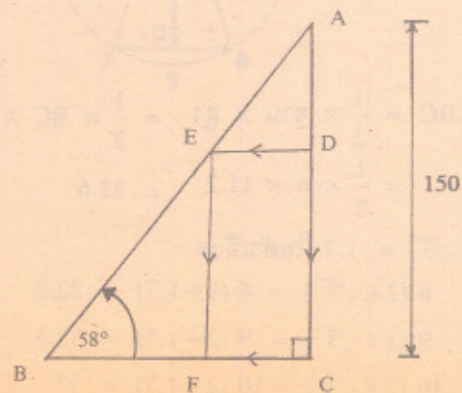
ตัวอย่าง 4.3 จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากและ $C = 90^\circ$, $AC = 150$ เซนติเมตร, $AC:AD = 3:1$, $\angle B = 58^\circ$, $DE \parallel BC$ และ $EF \parallel AC$ (กำหนดให้ $\tan 58^\circ = 1.6$) พื้นที่สี่เหลี่ยม CDEF มีค่าเท่ากับเท่าใด



1. 6250 ตารางเซนติเมตร
3. 3125 ตารางเซนติเมตร

2. 4687.5 ตารางเซนติเมตร
4. 1562.5 ตารางเซนติเมตร

ตอบ 3.
แนวคิด



เพราะว่า $AC:AD = 3:1$ และ $AC = 150$

เพราะฉะนั้น $AD = 50$ และ $CD = 100$

$$\tan ABC = \frac{AC}{BC}$$

$$\tan 58^\circ = \frac{150}{BC}$$

$$BC = \frac{150}{\tan 58^\circ} = \frac{150}{1.6} = 93.75$$

เพราะว่า $ED \parallel BC$ และ $AD:DC = 50:100 = 1:2$

เพราะฉะนั้น $AE:EB = 1:2$

เพราะว่า $EF \parallel AC$

เพราะฉะนั้น $BF:FC = AE:EB = 1:2$

เพราะว่า $BC = 93.75$

เพราะฉะนั้น $CF = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} (93.75) = 31.25$

$$\begin{aligned} \text{สรุป } \square CDEF &= BD \times DE \\ &= 100 \times 31.25 \\ &= 3125 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

1. ลากเส้นตั้ง AC และ $AC = 150$

(ทระยะทางโดยใช้สเกล $\frac{1}{2}$ เซนติเมตร/10เซนติเมตร)

2. ลากเส้น AB โดยให้ $\angle BAC = 32^\circ$

3. ลากเส้นจาก B มาตั้งฉากกับ AC ซึ่งจะได้ว่า $\angle ABC = 58^\circ$

ขณะนี้เราได้สามเหลี่ยม ABC ที่มี $AC = 150$ และ $\angle ABC = 58^\circ$

4. เขียนจุด D บน AC และ $CD = 100$

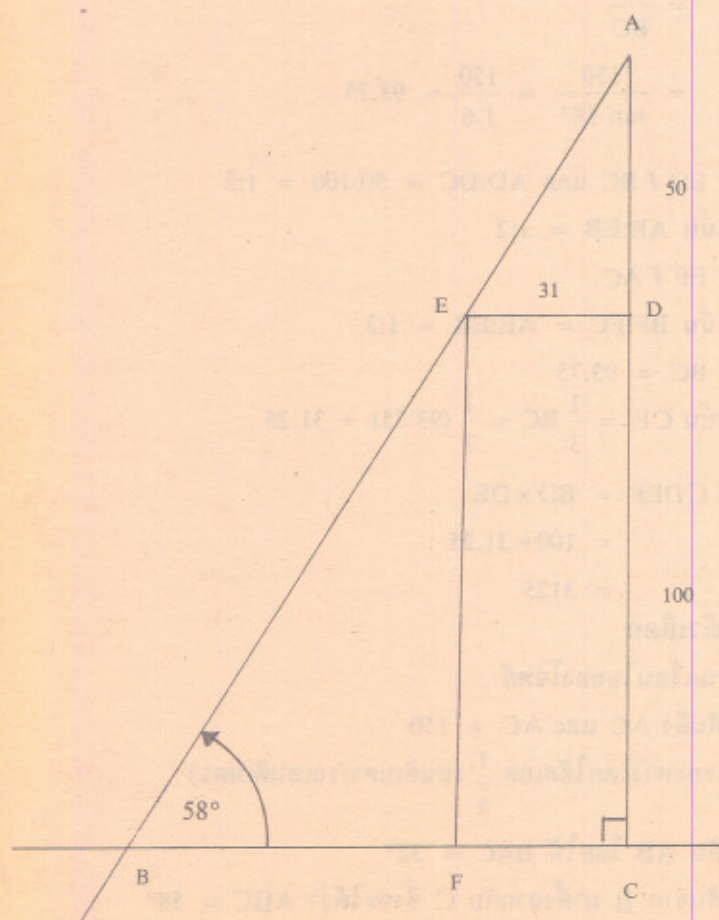
5. ลาก DE ขนานกับ BC



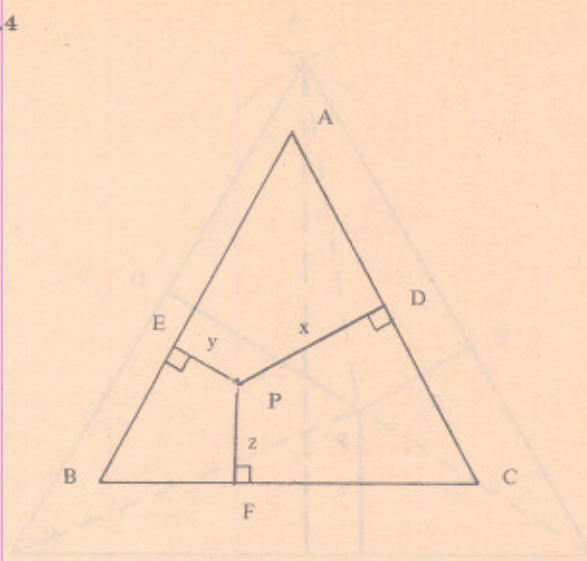
วัดระยะทาง ED ได้ $ED = 31$

เพราะฉะนั้น พ.ท. $\square DEFC = 31 \times 100 = 3100$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า



ตัวอย่าง 4.4

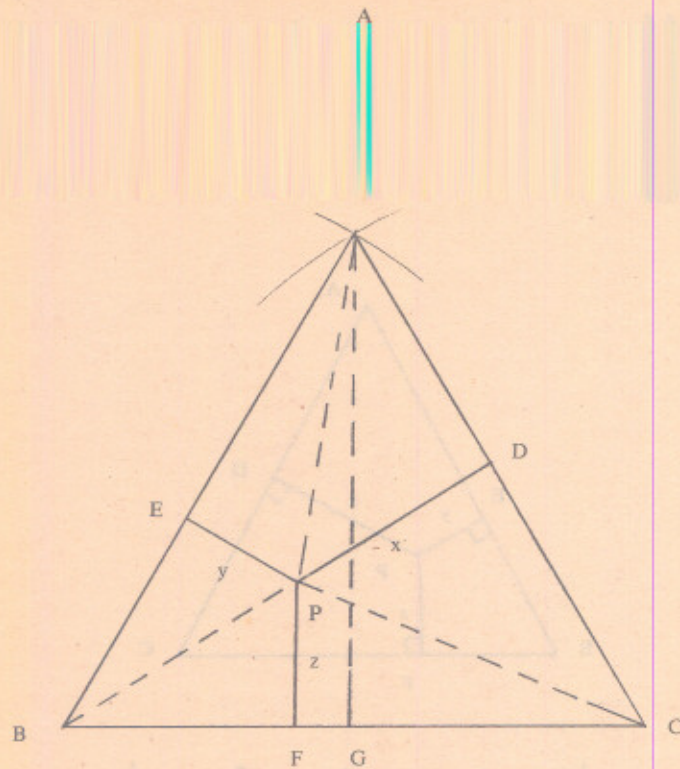


ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และ P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC จากจุด P ลากเส้นมาตั้งฉากกับด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC ที่จุด D, E และ F

ถ้า $AB = 4$ และ x, y, z เป็นความยาวของ PD, PE และ PF ตามลำดับ ค่าของ $x+y+z$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{3}$
2. $3\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{3}$
4. $4\sqrt{2}$

ตอบ 1.
แนวคิด



$$AB = BC = AC = 4$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle ABC &= \text{พ.ท. } \triangle BCP + \text{พ.ท. } \triangle ACP + \text{พ.ท. } \triangle ABP \\ &= \frac{1}{2} \times BC \times PF + \frac{1}{2} \times AC \times PD + \frac{1}{2} \times AB \times PE \\ &= \frac{1}{2} \times 4 \times PF + \frac{1}{2} \times 4 \times PD + \frac{1}{2} \times 4 \times PE \\ &= 2(z+x+y) \end{aligned}$$

การหาพื้นที่ $\triangle ABC$

ลาก $AG \perp BC$

จะได้ $BG = GC = 2$

$$\text{และ } AG^2 = AB^2 - BG^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$$

$$AG = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AG = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $2(x+y+z) = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น $x+y+z = 2\sqrt{3}$

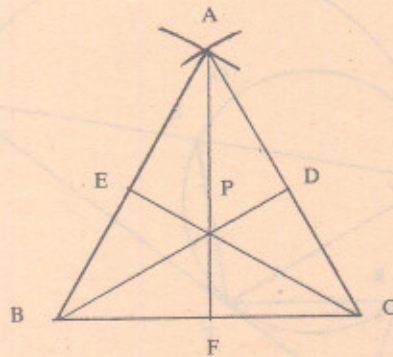
การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทางเพื่อหาผลบวก

1. วาดรูปสามเหลี่ยม ABC ให้แต่ละด้านยาว 4 เซนติเมตร

2. เลือก P เป็นจุดใด ๆ ก็ได้ภายใน ABC

เช่น P เป็นจุดตัดของเส้นที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับฐาน



ขณะนี้เราได้รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับโจทย์แล้ว

วัดระยะทาง $PD = 1.2$, $PE = 1.2$, $PF = 1.2$

เพราะฉะนั้น $x+y+z = 1.2+1.2+1.2 = 3.6$

ประมาณในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $2\sqrt{3} = 2(1.7) = 3.4$

ตัวเลือก 2. $3\sqrt{2} = 3(1.4) = 4.2$

ตัวเลือก 3. $4\sqrt{3} = 4(1.7) = 6.8$

ตัวเลือก 4. $4\sqrt{2} = 4(1.4) = 5.6$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

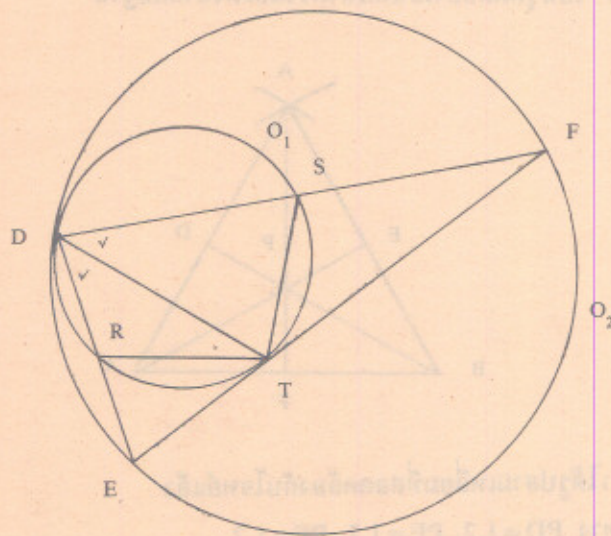
หมายเหตุ เนื่องจากเจตนาบอกว่า P เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ABC ดังนั้น

หากเราเลือก P เป็นจุด A

ก็จะได้ $x = 0, y = 0$ และ $z =$ ความสูงของสามเหลี่ยม ABC ซึ่งเท่ากับ $2\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $x+y+z = 2\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 4.5 O_1 และ O_2 เป็นวงกลมที่สัมผัสกันภายในที่จุด D



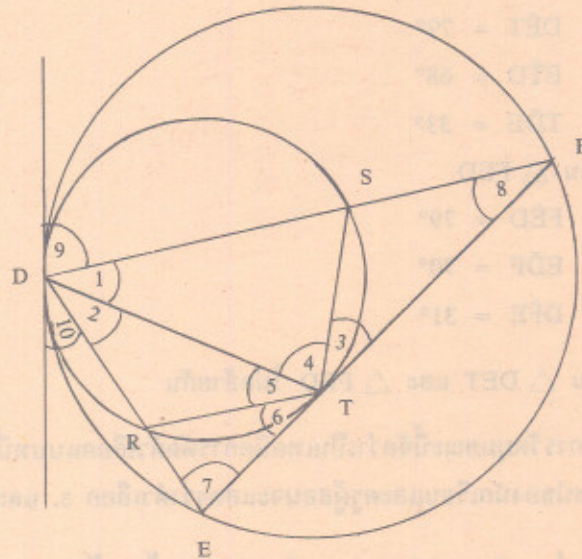
EF เป็นคอร์ดของวงกลม O_2 สัมผัสวงกลม O_1 ที่จุด T
DE และ DF ตัดวงกลม O_1 ที่จุด R และ S ตามลำดับ
DT แบ่งครึ่งมุม EDF

ตัวเลือกในข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\triangle RTE$ และ $\triangle SDT$ คล้ายกัน
2. $\triangle DET$ และ $\triangle FED$ คล้ายกัน
3. $\triangle DRT$ และ $\triangle TSF$ คล้ายกัน
4. $\triangle DFT$ และ $\triangle TSF$ คล้ายกัน

ตอบ 2.

แนวคิด ลากเส้นสัมผัสสว่างกลมที่ D



การแสดงว่า $\triangle RTE$ และ $\triangle SDT$ คล้ายกัน

เพราะว่า 9 เป็นมุมที่เส้นสัมผัสกระทำกับคอร์ด DS และ DF
 เพราะฉะนั้น 9 ต้องเท่ากับมุมภายในวงกลมที่รองรับด้วยคอร์ด DS
 และ DF นั่นคือ $9 = 4$ และ $9 = 7$ เพราะฉะนั้น $4 = 7$

หมายเหตุ ① เหตุผลที่สำคัญและใช้บ่อยของโจทย์ข้อนี้ คือ
 มุมที่เส้นสัมผัสกระทำกับคอร์ดต้องเท่ากับมุมภายในวงกลมที่รองรับด้วยคอร์ด
 ซึ่งอยู่ด้านตรงข้าม

② สามเหลี่ยม 2 รูปมีมุมเท่ากัน 2 มุม สามเหลี่ยม 2 รูปนั้นต้อง
 เท่ากันทุกประการ

$$6 = 2$$

เพราะว่า DT แบ่งครึ่งมุม EDF เพราะฉะนั้น $1 = 2$

สรุป $\triangle RTE$ และ $\triangle SDT$ คล้ายกัน



วัดมุมภายใน $\triangle DET$

$$\widehat{DET} = 79^\circ$$

$$\widehat{ETD} = 68^\circ$$

$$\widehat{TDE} = 33^\circ$$

วัดมุมภายใน $\triangle FED$

$$\widehat{FED} = 79^\circ$$

$$\widehat{EDF} = 70^\circ$$

$$\widehat{DFE} = 31^\circ$$

เพราะฉะนั้น $\triangle DET$ และ $\triangle FED$ ไม่คล้ายกัน

หมายเหตุ การวัดมุมขณะนี้จัดว่าเป็นเทคนิคการตัดตัวเลือกแบบหนึ่ง
เพื่อประโยชน์ของนักเรียนและครูผู้สอนจะแสดงว่าตัวเลือก 3. และ 4. ถูกต้อง

การแสดงว่า $\triangle DRT$ และ $\triangle TSF$ คล้ายกัน

จากเหตุผล ①

เพราะว่า $\widehat{RO} = \widehat{S}$ และ $\widehat{RO} = \widehat{8}$

เพราะฉะนั้น $\widehat{S} = \widehat{8}$

เพราะว่า $\widehat{3} = \widehat{1}$ และ $\widehat{1} = \widehat{2}$

เพราะฉะนั้น $\widehat{3} = \widehat{2}$

สรุป $\triangle DRT$ และ $\triangle TSF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

การแสดงว่า $\triangle DFT$ และ $\triangle TSF$ คล้ายกัน

จากหมายเหตุ ①

$$\widehat{3} = \widehat{1}$$

$$\widehat{8} \text{ เป็นมุมร่วม}$$

สรุป $\triangle DFT$ และ $\triangle TSF$ คล้ายกัน

การตัดตัวเลือก

วาดรูปให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

1. เขียนวงกลมวงใหญ่ก่อนและให้รัศมี 8 เซนติเมตร
2. ให้ D, E, F เป็นจุดบนวงกลม, $DE = 10$ และ $\angle EDF = 60^\circ$
(เพื่อสะดวกในการแบ่งครึ่งมุม $\angle DEF$)
3. ให้ T เป็นจุดบนเส้น EF และ DT แบ่งครึ่งมุม $\angle EDT$
4. แบ่งครึ่งด้าน DT และลากเส้นตั้งฉาก AB
จากจุด T ลากเส้นตั้งฉาก BT
จะได้ B เป็นศูนย์กลางวงกลม และ BT เป็นรัศมีของวงกลม
วงกลม O_2 จะตัด DF และ DE ที่จุด S, R

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว ใน $\triangle DET$, $\triangle FED$

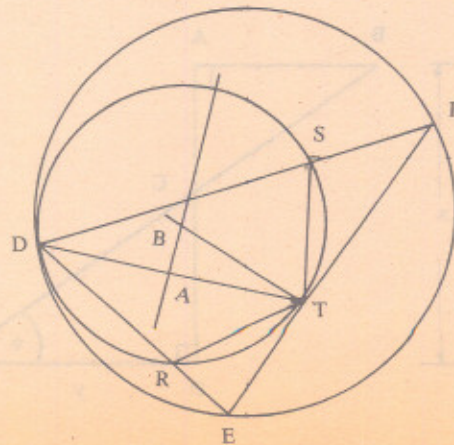
วัดความยาวด้านแต่ละด้าน $DE = 10$, $ET = 5.3$, $DT = 10.5$, $FE = 14$, $DF = 16$

ใน $\triangle DET$, $ET < DE < DT$

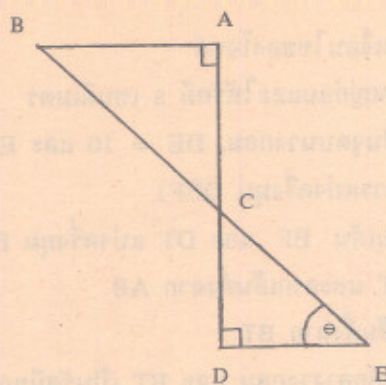
ใน $\triangle FED$, $DE < FE < DF$

$$\frac{ET}{DE} = \frac{5.3}{10} = 0.53 \neq 0.71 = \frac{10}{14} = \frac{DE}{FE}$$

สรุป $\triangle DET$ และ $\triangle FED$ ไม่คล้ายกัน



ตัวอย่าง 4.6



$$AB \parallel DE, \angle BAC = \angle CDE = 90^\circ$$

ถ้า $AD = x$ เซนติเมตร, $DE = y$ เซนติเมตร และ $\angle CED = \theta$

แล้วความยาว \overline{AB} เท่ากับเท่าใด

1. $x \tan \theta + y$

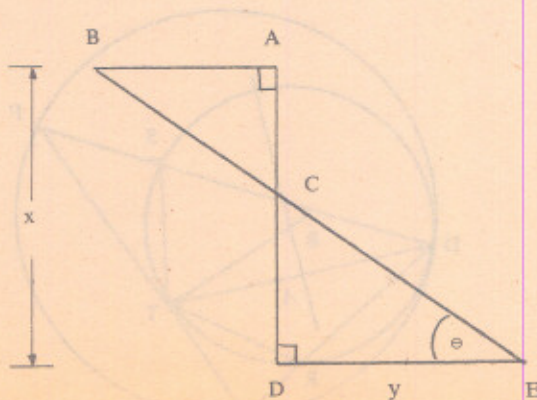
2. $x \tan \theta - y$

3. $\frac{x}{\tan \theta} - y$

4. $\frac{x}{\tan \theta} + y$

ตอบ 3.

แนวคิด



$$\widehat{BAC} = \widehat{CDE} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{DEC} = \theta$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{DE} \text{ และ } \tan \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

$$\tan \theta = \frac{AC}{AB}$$

$$AB \tan \theta = AC$$

$$= AD - CD$$

$$= AD - DE \left(\frac{CD}{DE} \right) \quad \text{----- (1)}$$

$$= AD - DE \tan \theta$$

$$AB = \frac{AD}{\tan \theta} - DE$$

$$\text{สรุป } AB = \frac{x}{\tan \theta} - y$$

หมายเหตุ วิธีจริงยากตรงที่เราไม่รู้ว่าจะจัดรูปแบบอย่างไร

ตัวอย่างเช่น รู้ได้อย่างไรว่าต้องเปลี่ยน CD เป็น $DE \left(\frac{CD}{DE} \right)$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์และเลือกค่า x , y และ θ ที่ทำให้คิดเลขง่ายและจำแนกตัวเลือกได้เช่น

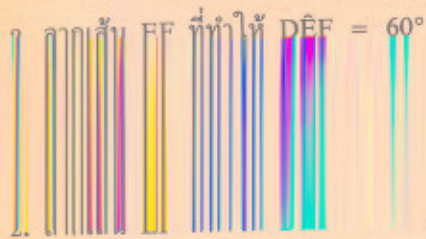
$$x = 5$$

$$y = 2$$

$$\theta = 60^\circ$$

การวาดรูปทำได้ดังนี้

- ลากเส้นตรง DE ยาวเท่ากับ $y = 2$ เซนติเมตร



3. ลาก AD ยาว 5 เซนติเมตร และ $AD \perp DE$

4. ลาก AB ขนานกับ DE

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว
วัดความยาว AB ได้ 0.9 เซนติเมตร

แทนค่า $x=5$, $y=2$ และ $\tan 60^\circ = \sqrt{3} = 1.7$ ในตัวเลือก

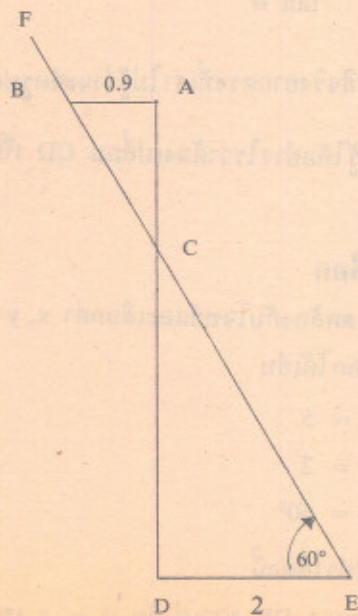
ตัวเลือก 1. $x \tan \theta + y = (5)(1.7) + 2 = 10.5$

ตัวเลือก 2. $x \tan \theta - y = (5)(1.7) - 2 = 6.5$

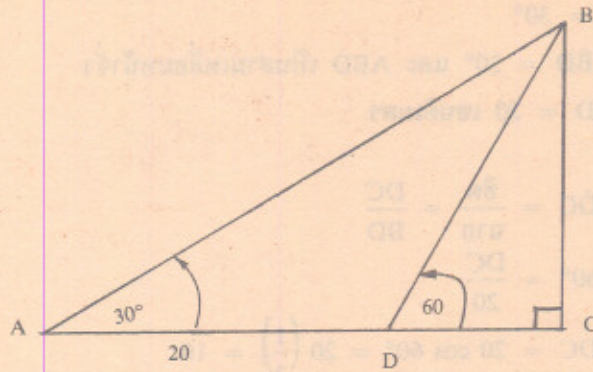
ตัวเลือก 3. $\frac{x}{\tan \theta} - y = \frac{5}{1.7} - 2 = 2.94 - 2 = 0.94$

ตัวเลือก 4. $\frac{x}{\tan \theta} + y = \frac{5}{1.7} + 2 = 4.95$

สรุปเลือกตัวเลือก 3 ดีกว่า



ตัวอย่าง 4.7



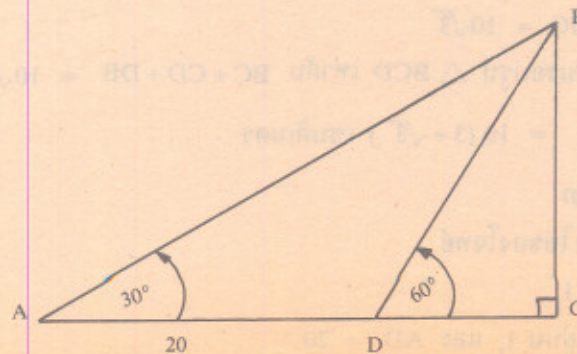
ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle BDC = 60^\circ$ และ $AD = 20$ เซนติเมตร

ความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม BCD เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1. $30\sqrt{3}$ | 2. $40\sqrt{3}$ |
| 3. $10(2 + \sqrt{3})$ | 4. $10(3 + \sqrt{3})$ |

ตอบ 4.

แนวคิด



$$\angle ABC = 60^\circ$$

$$\angle DBC = 30^\circ$$

เพราะฉะนั้น $\angle ABD = 30^\circ$ และ $\triangle ABD$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
ดังนั้น $BD = AD = 20$ เซนติเมตร

ใน $\triangle BCD$

$$\cos \angle BDC = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{DC}{BD}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{DC}{20}$$

$$DC = 20 \cos 60^\circ = 20 \left(\frac{1}{2} \right) = 10$$

ดังนั้น $AC = AD + DC = 20 + 10 = 30$

ใน $\triangle ABC$

$$\cos \angle BAC = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{AB}$$

$$AB = \frac{AC}{\cos \angle BAC} = \frac{30}{\cos 30^\circ}$$

$$= \frac{30}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{60}{\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$$

$$BC^2 = AB^2 - AC^2 = (20\sqrt{3})^2 - (30)^2 = 12000 - 900$$

$$= 300$$

$$BC = 10\sqrt{3}$$

สรุปความยาวเส้นรอบรูป $\triangle BCD$ เท่ากับ $BC + CD + DB = 10\sqrt{3} + 10 + 20$
 $= 30 + 10\sqrt{3} = 10(3 + \sqrt{3})$ เซนติเมตร

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

- ลากเส้นตรง l_1
- ให้ A, D อยู่บน l_1 และ $AD = 20$

3. ลาก EA และ $\angle EAD = 30^\circ$

ลาก FD และ $\angle FDG = 60^\circ$

4. B เป็นจุดตัดของ EA และ FD

5. จาก B ลาก $BC \perp AC$

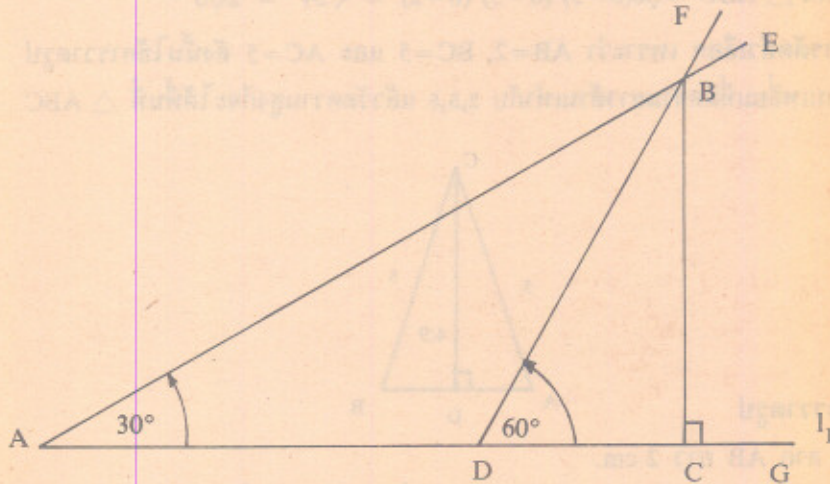
สรุปขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

วัดความยาวจากรูป $CD = 10$ เซนติเมตร

$BC = 16.5$ เซนติเมตร

$BD = 20$ เซนติเมตร

ดังนั้นความยาวเส้นรอบรูป $\triangle BCD$ เท่ากับ $10 + 16.5 + 20 = 46.5$ เซนติเมตร



ประมาณค่า $\sqrt{3} = 1.7$

ตัวเลือก 1. $30\sqrt{3} = 30(1.7) = 51$

ตัวเลือก 2. $40\sqrt{3} = 40(1.7) = 68$

ตัวเลือก 3. $10(2 + \sqrt{3}) = 10(2 + 1.7) = 37$

ตัวเลือก 4. $10(3 + \sqrt{3}) = 10(3 + 1.7) = 47$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

ตัวอย่าง 4.8 สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วโดยมี $AB=2, BC=5$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

1. $4\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{6}$ 4. $3\sqrt{6}$

ตอบ 3.

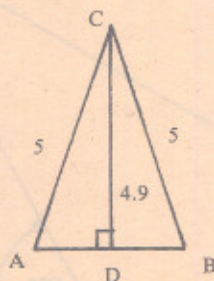
แนวคิด เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วและด้านสองด้านรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่สาม เพราะฉะนั้น AC ต้องยาวเท่ากับ 5

จากสูตรพื้นที่ $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$

$$a=BC=5, b=AC=5, c=AB=2 \text{ ดังนั้น } s = \frac{5+5+2}{2} = 6$$

$$\text{พ.ท. } \Delta ABC = \sqrt{6(6-5)(6-5)(6-2)} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $AB=2, BC=5$ และ $AC=5$ ดังนั้นใช้การวาดรูปสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากับ 2,5,5 แล้ววัดความสูงก็จะได้พื้นที่ ΔABC



การวาดรูป

- ลาก AB ยาว 2 cm.
- กางวงเวียนรัศมี 5 cm. จุดศูนย์กลางที่ A,B ตัดกันที่จุด C จะได้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มี $AB=2, AC=5$ และ $BC=5$
- ลาก $CD \perp AB$ และวัดความยาว CD ได้ 4.9

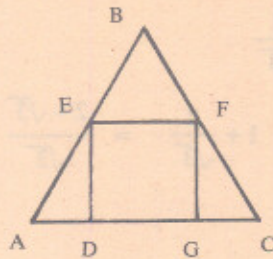
$$\text{สรุปพื้นที่ } \Delta ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (4.9) = 4.9$$

ค่าประมาณแต่ละตัวเลือก

- $4\sqrt{3} = (1.7) = 6.8$
- $2\sqrt{3} = 3.4$
- $2\sqrt{6} = 2(2.5) = 5$
- $3\sqrt{6} = 7.5$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

ตัวอย่าง 4.9 จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า DEFG เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส

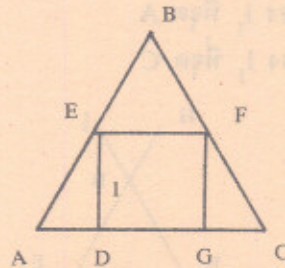


ถ้า $DE = 1$ เซนติเมตรแล้ว ด้าน BC ยาวเท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$ เซนติเมตร
2. $1 + \sqrt{3}$ เซนติเมตร
3. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ เซนติเมตร
4. $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$ เซนติเมตร

ตอบ 4.

แนวคิด



เพราะว่า $EF \parallel DG$ เพราะฉะนั้น $EF \parallel AC$

ดังนั้น $\angle EBF = \angle EAC = 60^\circ$ สรุปรูป BEF เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้น $BF = 1$ เซนติเมตร

พิจารณา $\triangle CFG$ $\angle FCG = 60^\circ, FG = 1$

$$\sin \angle FCG = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{FG}{FC}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{1}{FC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{FC}$$

$$2 \quad FC$$

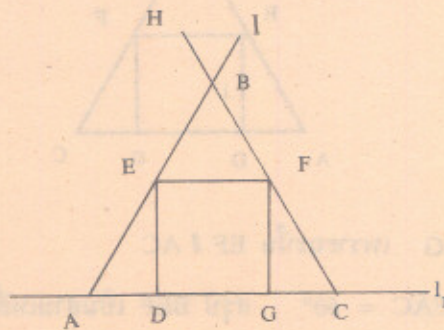
$$FC = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{สรุป } BC = BF + FC = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก วัตถุประสงค์ตามโจทย์กำหนด

- ลากเส้นตรง l_1
- เขียนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส DEFG ยาวด้านละ 1 เซนติเมตร
- ลากเส้น FH และ $\angle EFH = 60^\circ$
ลากเส้น EI และ $\angle IEF = 60^\circ$ FH ตัดกับ EI ที่จุด B
- ลาก BE มาตัดเส้นตรง l_1 ที่จุด A
ลาก BF มาตัดเส้นตรง l_1 ที่จุด C



ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว วัดความยาว BC ได้ 2.1 เซนติเมตร
ประมาณค่า $\sqrt{3} = 1.7$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\sqrt{3} = 1.7$

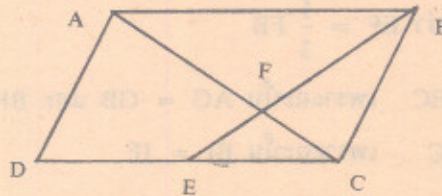
ตัวเลือก 2. $1 + \sqrt{3} = 2.7$

ตัวเลือก 3. $\frac{2+\sqrt{3}}{2} = \frac{2+1.7}{2} = 1.85$

ตัวเลือก 4. $\frac{3+2\sqrt{3}}{3} = \frac{3+2(1.7)}{3} = 2.13$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

ตัวอย่าง 4.10 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน, E เป็นจุดกึ่งกลางด้าน CD, BE ตัดเส้นทแยงมุม AC ที่จุด F



ตัวเลือกใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $CF = \frac{1}{3} CA$

2. $EF = \frac{1}{3} FB$

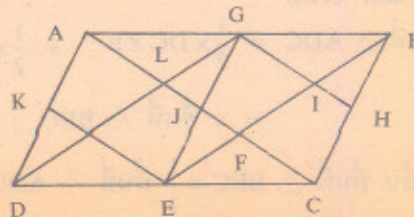
3. พื้นที่ $\triangle BCE = \frac{1}{4}$ พื้นที่ $\square ABCD$

4. พื้นที่ $\triangle BCE = \frac{1}{3}$ พื้นที่ $\triangle ADC$

ตอบ 4.

แนวคิด ลากเส้นเพิ่มเติมเพื่อช่วยในการพิสูจน์

- ลาก EG ให้นานกับ BC
- ลาก GH \parallel AC
- ลาก EK \parallel AC
- ลาก DG และ EB





ตัวเลือก 1. ถูกต้อง

การแสดงว่า $CF = \frac{1}{3} CA$

ใน $\triangle DLC$, $EF \parallel DL$ และ $DE = EC$ เพราะฉะนั้น $LF = FC$

ใน $\triangle AFB$, $LG \parallel FB$ และ $AG = GB$ เพราะฉะนั้น $AL = LF$

ดังนั้น $AL = LF = FC$ เพราะฉะนั้น $FC = \frac{1}{3} AC$

ตัวเลือก 2. ถูกต้อง

การแสดงข้อพิสูจน์ว่า $EF = \frac{1}{3} FB$

เพราะว่า $DE = EC$ เพราะฉะนั้น $AG = GB$ และ $BH = HC$

เพราะว่า $GH \parallel AC$ เพราะฉะนั้น $BI = IF$

เพราะว่า $EJ = JG$ และ $EK \parallel AC$ และ $AC \parallel GH$

เพราะฉะนั้น $EF = FI$ สรุป $EF = FI = IB$

เพราะฉะนั้น $EF = \frac{1}{3} FB$

ตัวเลือก 3. ถูกต้อง

ให้ h เป็นส่วนสูงของสามเหลี่ยม BEC

พื้นที่ $\square ABCD = DC \times h$

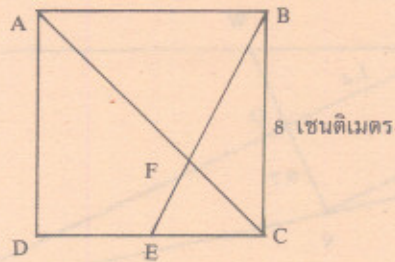
$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle BEC &= \frac{1}{2} \times EC \times h = \frac{1}{2} \left(\frac{DC}{2} \right) \times h = \frac{1}{4} (DC \times h) \\ &= \frac{1}{4} \text{พื้นที่ } \square ABCD \end{aligned}$$

ตัวเลือก 4. ผิด

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ADC &= \frac{1}{2} \times DC \times h = \frac{1}{2} \times (2EC) \times h = 2 \left(\frac{1}{2} \times EC \times h \right) \\ &= 2 \text{พื้นที่ } \triangle BEC \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ $\triangle BEC \neq \frac{1}{3}$ พื้นที่ $\triangle ADC$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัส เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 8 เซนติเมตร



ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

$$\text{พ.ท. } \triangle BCE = \frac{1}{2} \times EC \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$

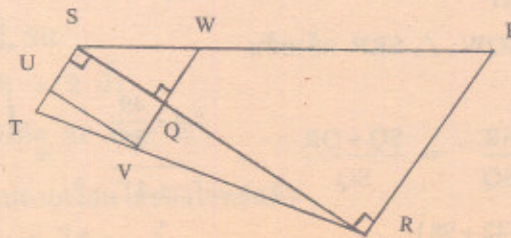
$$\text{พ.ท. } \triangle ADC = \frac{1}{2} \times DC \times BC = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\triangle BCE \neq \frac{1}{3}$ พื้นที่ $\triangle ADC$

ดังนั้นได้คำตอบเป็นตัวเลือก 4.

หมายเหตุ โดยการคำนวณและวัดระยะทางจากรูปจะได้ว่าตัวเลือก 1., 2. และ 3. ถูกต้อง

ตัวอย่าง 4.11 จากรูป $ST \parallel WV$, $WV \parallel PR$, $UV \parallel SQ$ และ PRS , RST
เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้า $SQ = 1.4$ นิ้ว, $QV = 0.7$ นิ้ว, $TU = 0.3$ นิ้ว



แล้ว $PR:WQ$ เท่ากับเท่าใด

1. 4:3 2. 7:3 3. 2:1 4. 10:3

เพราะฉะนั้น $PR:WQ = 10:3$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

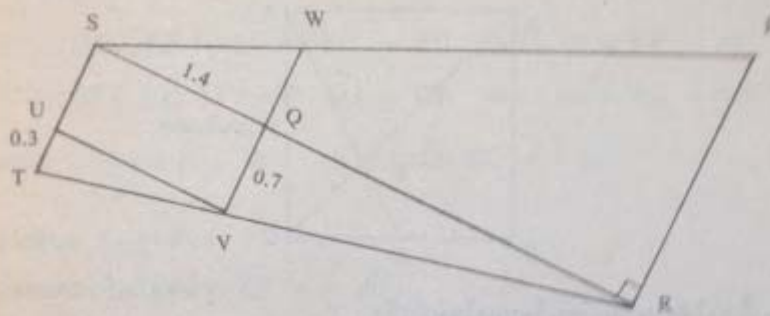
อัตราส่วนตรีโกณมิติที่สำคัญ ใช้ตั้งแต่ ม.ต้น จนถึงปริญญาเอก

$$\sin 30 = \frac{1}{2} \qquad \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60 = \frac{1}{2} \qquad \tan 60 = \sqrt{3}$$

ตอบ 4.

แนวคิด



$$UV = SQ = 1.4$$

ใน $\triangle TUV$ และ $\triangle VQR$

$$\angle TUV = \angle VQR = 90^\circ$$

$$\angle UTV = \angle QVR \quad (\because TS \parallel VW)$$

เพราะฉะนั้น $\triangle TUV$, $\triangle VQR$ คล้ายกัน

$$\frac{TV}{VR} = \frac{UV}{QR} = \frac{TU}{VQ}$$

$$\frac{TV}{VR} = \frac{1.4}{QR} = \frac{0.3}{0.7}$$

$$\frac{TV}{VR} = \frac{1.4}{QR} = \frac{0.3}{0.7}$$

$$QR = \frac{(1.4) \times (0.7)}{0.3} = \frac{98}{30} = \frac{49}{15}$$

เพราะว่า $QW \parallel RP$ เพราะฉะนั้น $\triangle SQW$, $\triangle SRP$ คล้ายกัน

$$\frac{PR}{WQ} = \frac{SR}{SQ} = \frac{SQ+QR}{SQ} = \frac{1.4 + \frac{49}{15}}{1.4} = \frac{\left(\frac{14}{10} + \frac{49}{15}\right)}{1.4}$$

$$= \frac{\left(\frac{42+98}{30}\right)}{1.4} = \left(\frac{140}{30}\right) \left(\frac{10}{14}\right) = \frac{10}{3}$$

สรุป $PR:WQ = 10:3$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามโจทย์กำหนด

1. ลาก SQ ยาว 1.4 นิ้ว
2. ลาก $VQ \perp SQ$ และ $VQ = 0.7$ นิ้ว
3. ลาก VU และ US ให้เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า
4. ต่อ SU มาที่ T และ $ST = 0.3$
5. ต่อความยาว TV และ SQ มาพบกันที่ R
6. ลาก $PR \perp SR$
และให้ $PR = 2$ นิ้ว
7. ต่อ VQ มาตัด SP ที่จุด W

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

วัดความยาว WQ ได้ 0.6 นิ้ว

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{PR}{WQ} &= \frac{2}{0.6} \\ &= \frac{20}{6} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $PR:WQ = 10:3$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

อัตราส่วนตรีโกณมิติที่สำคัญ ใช้ตั้งแต่ ม.ต้น จนถึงปริญญาเอก

$$\begin{array}{lll} \sin 30 = \frac{1}{2} & \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} & \tan 30 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60 = \frac{1}{2} & \tan 60 = \sqrt{3} \end{array}$$

ตัวอย่างข้อสอบเข้าเรียนต่อระดับปริญญาโท แต่ใช้ความรู้ ม.ต้น

ค่าของ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ เท่ากับเท่าใด

1. $(a + b)^4$ 2. $(a^2 - b^2)^2$ 3. $(a - b)^4$
 4. $(a^2 + b^2)^2$ 5. $(a^2 + ab + b^2)^2$

ตอบ 1.

แนวคิด จำสูตรได้ดีที่สุดคือ $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

แต่ถ้าจำสูตรไม่ได้ให้ใช้เทคนิคข้อสอบชนิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
 ดังนั้นการแทนค่า $a = 1$, $b = 1$ จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

โจทย์ $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$

ตัวเลือก 1. $(a + b)^4 = (1 + 1)^4 = 16$

ตัวเลือก 2. $(a^2 - b^2)^4 = (1 - 1)^4 = 0 \neq 16$

ตัวเลือก 3. $(a - b)^4 = (1 - 1)^4 = 0 \neq 16$

ตัวเลือก 4. $(a^2 + b^2)^2 = (1 + 1)^2 = 4 \neq 16$

ตัวเลือก 5. $(a^2 + ab + b^2)^2 = (1 + 1 + 1)^2 = 9 \neq 16$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3., 4. และ 5. ทิ้งได้

หาอ่านข้อสอบแนวนี้เพิ่มเติมได้จาก คณิตศาสตร์ปรัญญ เล่มที่ 13

คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

การนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับค่า x ที่เป็นคำตอบของสมการ, จุดตัดแกน X , จุดตัดแกน Y , จุดตัดของกราฟ, เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่าง 5.1 กราฟของเส้นโค้ง $y = -4x^2 + 8x - 5$ มีจุดสูงสุดที่จุด A และจุดตัดแกน Y ที่จุด B ตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

1. $A (-1, -1), B (0, -5)$
2. $A (1, -1), B (0, -5)$
3. $A (-1, -6), B (0, -6.5)$
4. $A (1, -6), B (0, -6.5)$

ตอบ 2.

แนวคิด การหาจุดตัดแกน Y แทนค่า $x=0$ ในสมการ $y = -4x^2 + 8x - 5$ จะได้ $y = -5$

ดังนั้นจุด $B (0, -5)$

ขณะนี้เราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การหาจุดสูงสุดของกราฟ $y = -4x^2 + 8x - 5$

$$= -4(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$= -4(x-1)^2 - 1$$

เพราะว่า $(x-1)^2 \geq 0$

$$-4(x-1)^2 \leq 0$$

$$-4(x-1)^2 - 1 \leq -1$$

$$y \leq -1$$

เพราะฉะนั้น y มีค่าสูงสุดเท่ากับ -1 เมื่อ $x=1$

ดังนั้น $A(1, -1)$ เป็นจุดสูงสุด

สรุปตัวเลือก 2. ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าโจทย์กำหนดให้ A, B อยู่บนกราฟของ $y = -4x^2 + 8x - 5$

เพราะฉะนั้นการแทนค่าโดยนำพิกัดของ A, B มาแทนค่า

ในสมการ $y = -4x^2 + 8x - 5$ สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $A(-1, -1), x = -1, y = -1$

$$-4x^2 + 8x - 5 = -4(-1)^2 + 8(-1) - 5 = -4 - 8 - 5 = -17 \neq -1 = y$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = -5$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 5.2 แบ่งที่ดินจำนวน 3600 ไร่ ให้กับบุตร 3 คน โดยใช้อัตราส่วน 2:3:4 ถามว่าบุตรทั้ง 3 คนจะได้รับที่ดินคนละเท่าไร

1. 800, 1200, 1440 ไร่

2. 800, 1200, 1600 ไร่

3. 720, 1080, 1600 ไร่

4. 720, 1200, 1600 ไร่

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าอัตราส่วนของจำนวนไร่ที่ได้คือ 2:3:4

ดังนั้นให้บุตรคนแรกได้ที่ดิน $2x$ ไร่

จะได้ว่าบุตรคนที่ 2 และคนที่ 3 จะได้ที่ดิน $3x$ และ $4x$ ไร่ตามลำดับ

ผลรวมจำนวนที่ดิน = $2x + 3x + 4x$

$$3600 = 9x$$

$$x = 400$$

สรุปจำนวนที่ดินของบุตรแต่ละคน คือ

$$2x, 3x, 4x$$

$$= 2(400), 3(400), 4(400)$$

$$= 800, 1200, 1600 \text{ ไร่}$$

การตัดตัวเลือก

นำคำตอบในตัวเลือกมาเปลี่ยนเป็นอัตราส่วน จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. เพราะว่า $800:1200:1440$

หารด้วย 400 ตลอดจะได้ $2:3:3.6 \neq 2:3:4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

(ความจริงคิดแค่ $1200:1400 \neq 3:4$ ก็พอตัดตัวเลือกแล้ว)

ตัวเลือก 2. เพราะว่า $800:1200:1600$

หารด้วย 400 ตลอดจะได้ $2:3:4$

และ $800+1200+1600 = 3600$

ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้องแน่นอน

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกอาจใช้เหตุผลนี้ก็ได้

$$\text{เพราะว่า } 720+1200+1600 = 3520 \neq 3600$$

$$\text{และ } 720+1080+1600 = 3400 \neq 3600$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้



ตัวอย่าง 5.3 ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุม

- ตัวเลือกใดเป็นขนาดของมุม \hat{A} , \hat{B} และ \hat{C} ตามลำดับ
1. 26° , 64° , 90°
 2. 44° , 56° , 80°
 3. 44° , 46° , 90°
 4. 36° , 54° , 90°

ตอบ 4.

แนวคิด ให้ขนาดของมุม $\hat{A} = 2x$

เพราะฉะนั้น $\hat{B} = 3x$ และ $\hat{C} = 5x$

เพราะว่า $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$$2x + 3x + 5x = 180$$

$$10x = 180$$

$$x = 18$$

สรุป $\hat{A} = 36^\circ$, $\hat{B} = 54^\circ$ และ $\hat{C} = 90^\circ$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $26:64 = 13:32 \neq 2:3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $44:56 = 22:28 = 11:14 \neq 2:3$

$$44:46 = 22:23 \neq 2:3$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 5.4 ถ้า $4ab + a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 = 7$ และ $2b - a^2 = 1$ แล้ว $b^2 - 2a$ เท่ากับเท่าใด

1. -1
2. -3
3. -6
4. -7

ตอบ 4.

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด } 4ab + a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3 &= 7 \\ (4ab - 2b^3) + (a^2b^2 - 2a^3) &= 7 \\ 2b(2a - b^2) + a^2(b^2 - 2a) &= 7 \\ 2b(-(b^2 - 2a)) + a^2(b^2 - 2a) &= 7 \\ (b^2 - 2a)(a^2 - 2b) &= 7 \end{aligned}$$

$$\text{เพราะว่า } 2b - a^2 = 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 - 2b = -1$$

$$\text{และ } (b^2 - 2a)(-1) = 7$$

$$\text{สรุป } b^2 - 2a = -7$$

การตัดตัวเลือก

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } (2b - a^2)(b^2 - 2a) &= 2b^3 - 4ab - a^2b^2 + 2a^3 \\ (1)(b^2 - 2a) &= -(4ab + a^2b^2 - 2a^3 - 2b^3) \end{aligned}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } b^2 - 2a = -7$$

ตัวอย่าง 5.5 น้ำหวานชนิดที่หนึ่งมีอัตราส่วน น้ำตาล : น้ำ = 8 : 3 น้ำหวานชนิดที่สองมีอัตราส่วน น้ำตาล : น้ำ = 5 : 1

นำน้ำหวานทั้งสองชนิดมาผสมกันแล้วใส่ในถังที่มีความจุ 35 ลิตร ได้น้ำหวานที่มีอัตราส่วน น้ำตาล : น้ำ = 4 : 1

ปริมาณของน้ำตาลจากน้ำหวานชนิดที่หนึ่งมีกี่ลิตร

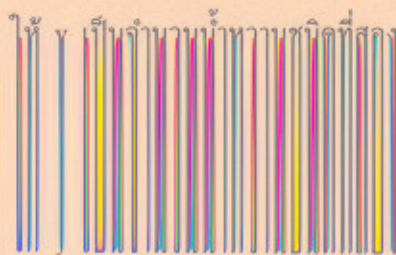
- | | |
|------------|------------|
| 1. 7 ลิตร | 2. 11 ลิตร |
| 3. 28 ลิตร | 4. 77 ลิตร |

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ x เป็นจำนวนน้ำหวานชนิดที่หนึ่ง

$$\text{ดังนั้นจำนวนน้ำตาล} = \frac{8}{11}x$$

$$\text{จำนวนน้ำ} = \frac{3}{11}x$$



$$\text{จำนวนน้ำตาล} = \frac{5}{6} y$$

$$\text{จำนวนน้ำ} = \frac{1}{6} y$$

เพราะฉะนั้น $x + y = 35$ _____ (1)

เมื่อผสมแล้วจำนวนอัตราส่วน น้ำตาล : น้ำ = 4:1

$$\text{ดังนั้น } \left(\frac{8}{11} x + \frac{5}{6} y \right) : \left(\frac{3}{11} x + \frac{1}{6} y \right) = 4:1$$

$$\frac{48x + 55y}{66} : \frac{18x + 11y}{66} = 4:1$$

$$(48x + 55y) : (18x + 11y) = 4:1$$

$$\frac{48x + 55y}{18x + 11y} = \frac{4}{1}$$

$$48x + 55y = 4(18x + 11y)$$

$$= 72x + 44y$$

$$11y = 24x$$

$$y = \frac{24}{11} x$$

จาก (1) $x + y = 35$

$$x + \frac{24}{11} x = 35$$

$$\frac{35}{11} x = 35$$

$$x = 11$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าโจทย์บอกว่าน้ำหวาน 2 ชนิดรวมกันได้ 35 ลิตร เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก

4. ทั้งได้เลย (โชคดีของนักเรียน) ต่อกันค่าในตัวเลือกมาคิด

ตัวเลือก 1 น้ำหวานชนิดที่หนึ่ง 7 ลิตร จะได้น้ำหวานชนิดที่ 2 เท่ากับ $35 - 7 = 28$ ลิตร อัตราส่วนของ น้ำตาล : น้ำ หาได้ดังนี้

	น้ำตาล	น้ำ
น้ำหวานชนิดที่ 1 7 ลิตร	$\frac{8}{11} \times 7 = \frac{56}{11} = \frac{336}{66}$	$\frac{3}{11} \times 7 = \frac{21}{11} = \frac{126}{66}$
น้ำหวานชนิดที่ 2 28 ลิตร	$\frac{5}{6} \times 28 = \frac{140}{6} = \frac{1540}{66}$	$\frac{1}{6} \times 28 = \frac{28}{6} = \frac{308}{66}$
รวม	$\frac{1876}{66}$	$\frac{434}{66}$

$$\begin{aligned} \text{น้ำตาล} : \text{น้ำ} &= \frac{1876}{66} : \frac{434}{66} \\ &= 1876 : 434 \\ &= 938 : 217 \\ &= 134 : 31 \\ &\neq 4 : 1 \end{aligned}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. น้ำหวานชนิดที่ 1 จำนวน 11 ลิตร จะได้น้ำหวานชนิดที่ 2 จำนวน $35-11 = 24$ ลิตร

	น้ำตาล	น้ำ
น้ำหวานชนิดที่ 1 11 ลิตร	$\frac{8}{11} \times 11 = 8$	$\frac{3}{11} \times 11 = 3$
น้ำหวานชนิดที่ 2 24 ลิตร	$\frac{5}{6} \times 24 = 20$	$\frac{1}{6} \times 24 = 4$
รวม	28	7

$$\begin{aligned} \text{น้ำตาล} : \text{น้ำ} &= 28:7 \\ &= 4:1 \end{aligned}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ได้เลย

หมายเหตุ ตัวเลือก 3. และ 4. ผิด ขอให้นักเรียนลองทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง 5.6 ถ้า $\frac{x+9}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$ แล้ว A,B มีค่าเท่าใด

$$\frac{x+9}{x^2+3x-4} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1}$$

1. A=1, B=2

2. A=2, B=1

3. A=2, B=-1

4. A=-1, B=2

ตอบ 4.

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \frac{x+9}{x^2+3x-4} &= \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + 4B}{x^2+3x-4} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x+9 = (A+B)x - A + 4B$

ดังนั้น $A+B = 1$ และ $-A+4B = 9$

สรุป $B=2$ และ $A=-1$

การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ เช่น จากตัวเลือก 1. แทนค่า

$$A=1, B=2 \text{ จะได้ } \frac{x+9}{x^2+3x-4} = \frac{1}{x+4} + \frac{2}{x-1}$$

แต่สมการนี้ไม่จริงทุกค่า x เช่น แทนค่า $x=0$ จะได้

$$\frac{9}{-4} \neq \frac{1}{4} + \frac{2}{-1}$$

ดังนั้น $A=1, B=2$ ไม่ได้เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 2. และ 3. ก็ไม่เป็นค่าของ A และ B ที่ถูกต้อง

ดังนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

เทคนิคการหาค่า A และ B

$$\text{จากสมการ } \frac{x+9}{x^2+3x-4} = \frac{A(x-1)+B(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{A(x-1)+B(x+4)}{x^2+3x-4}$$

จะได้ว่า $x+9 = A(x-1)+B(x+4)$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $10 = 5B$ ดังนั้น $B = 2$

แทนค่า $x = -4$ จะได้ $5 = -5A$ ดังนั้น $A = -1$

6

การตัดตัวเลือก

ข้อสอบเกี่ยวกับ ค.ร.น. และ ห.ร.ม.

บทนิยาม m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

จำนวนเต็มบวก d เป็น ห.ร.ม. ของ m และ n

ก็ต่อเมื่อ

1. d หาร m ลงตัว และ d หาร n ลงตัว
2. ถ้า k หาร m ลงตัว และ k หาร n ลงตัว
แล้ว k หาร d ลงตัว

ตัวอย่างเช่น

ห.ร.ม. ของ 105 และ 3500 คือ 35

ห.ร.ม. ของ 12 และ 54 คือ 6

ห.ร.ม. ของ 108 และ 225 คือ 9

บทนิยาม m, n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นศูนย์

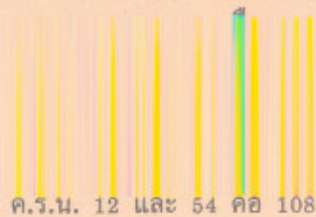
จำนวนเต็มบวก l เป็น ค.ร.น. ของ m และ n

ก็ต่อเมื่อ

1. m หาร l ลงตัว และ n หาร l ลงตัว
2. ถ้า m หาร x ลงตัว และ n หาร x ลงตัว
แล้ว l หาร x ลงตัว



ตัวอย่างเช่น



ค.ร.น. 12 และ 54 คือ 108

ค.ร.น. 108 และ 225 คือ 2700

ค.ร.น. 105 และ 3500 คือ 10500

ทฤษฎีบท ค.ร.น. $(m,n) \times$ ห.ร.ม. $(m,n) = |mn|$

การหาค่า ห.ร.ม. ของ m, n

1. แยกตัวประกอบ m ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ
2. แยกตัวประกอบ n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ
3. เลือกเอาเฉพาะตัวเลขจำนวนเฉพาะที่ซ้ำกันใน m และ n
4. ผลคูณของตัวเลขที่ซ้ำกันจะเป็นค่าของ ห.ร.ม.

ตัวอย่างเช่น การหา ห.ร.ม. ของ 108 และ 225

$$108 = 12 \cdot 9 = (3 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 3) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$225 = 15 \cdot 15 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

การเลือกตัวที่ซ้ำมี 3 ซ้ำกันอย่างละ 2 ตัว

$$\text{สรุป ห.ร.ม. } (108, 225) = 3 \cdot 3 = 9$$

การหาค่า ค.ร.น. ของ m, n

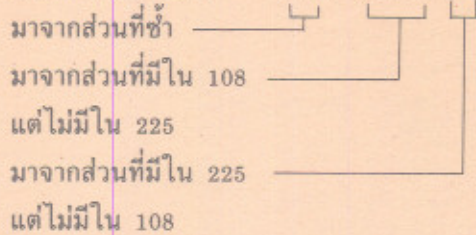
1. แยกตัวประกอบ m ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ
2. แยกตัวประกอบ n ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ
3. การเลือกตัวเลข
 - 3.1 ตัวที่มีซ้ำกันทั้ง 2 ที่เลือกเอามา 1 ตัว
 - 3.2 ตัวที่ไม่มีซ้ำกันทั้ง 2 ที่เอามาหมด

ตัวอย่างเช่น การหา ค.ร.น. ของ 108 และ 225

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$\text{ค.ร.น. } (108, 225) = (3 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5)$$



$$\text{ค.ร.น. } (108, 225) = 2700$$

$$\begin{aligned} \text{ค.ร.น. } (108, 225) \times \text{ห.ร.ม. } (108, 225) &= 9 \times 2700 \\ &= 24300 \\ &= 108 \times 225 \end{aligned}$$

เหตุผลสำคัญที่จะช่วยในการตัดตัวเลือกของปัญหา ค.ร.น. และ ห.ร.ม. คือ

1. ถ้า x หาร m ไม่ลงตัว

แล้ว x ไม่เป็น ห.ร.ม. ของ (m, n)

2. ถ้า m หาร x ไม่ลงตัว

แล้ว x ไม่เป็น ค.ร.น. ของ (m, n)

ตัวอย่างเช่น เพราะว่า 108 หาร 810 ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. $(108, 225) \neq 810$

$$\text{ค.ร.น. } (108, 180) \neq 810$$

เพราะว่า 12 หาร 225 ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. $(225, 108) \neq 12$

$$\text{ห.ร.ม. } (225, 144) \neq 12$$

$$\text{ห.ร.ม. } (225, 12) \neq 12$$

ตัวอย่าง 6.1 ห.ร.ม. ของ 1250 และ 3225 เท่ากับเท่าใด

1. 5

2. 25

3. 75

4. 125



แนวคิด

$$2 \overline{)1250}$$

$$5 \overline{)625}$$

$$5 \overline{)125}$$

$$5 \overline{)25}$$

$$\underline{5}$$

$$1250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

$$5 \overline{)3225}$$

$$5 \overline{)645}$$

$$3 \overline{)129}$$

$$\underline{43}$$

$$3225 = 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 43$$

$$\text{สรุป ห.ร.ม. (1250, 3225) = 25}$$

การตัดตัวเลือก

5 ทหาร 1250 และ 3225 ลงตัว

ยังตัดตัวเลือก 1. ไม่ได้

25 ทหาร 1250 และ 3225 ลงตัว

ยังตัดตัวเลือก 2. ไม่ได้

แต่ $25 > 5$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้แล้ว

75 ทหาร 1250 ไม่ลงตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

125 ทหาร 3225 ไม่ลงตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 6.2 ห.ร.ม. ของ $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$ และ $x^3 + y^3$ เท่ากับเท่าใด

1. $x - y$

2. $x + y$

3. $x^2 - xy + y^2$

4. $x^2 - 2xy + y^2$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

มีตัวประกอบร่วมกันเป็น $x + y$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. ของ $x^2 - y^2$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x^3 + y^3$ คือ $x + y$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่า $x - y$ หาร $x^3 + y^3$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า $x^2 - xy + y^2$ หาร $x^2 - y^2$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

เพราะว่า $x^2 - 2xy + y^2$ หาร $x^2 - y^2$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

การแทนค่าด้วยค่า x และ y บางค่าจะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

เช่น แทนค่า $x = 2$, $y = 1$

$$x^2 - y^2 = 4 - 1 = 3$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4 + 4 + 1 = 9$$

$$x^3 + y^3 = 8 + 1 = 9$$

ห.ร.ม. ของ 3, 9, และ 9 เท่ากับ 3

$$\text{ตัวเลือก 1. } x - y = 2 - 1 = 1 \neq 3$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } x + y = 3$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } x^2 - xy + y^2 = 4 - 2 + 1 = 3$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } x^2 - 2xy + y^2 = 4 - 4 + 1 = 1 \neq 3$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 นี้เราใช้เหตุผลว่า ห.ร.ม.ของนิพจน์ในพจน์ของ x และ y ต้องเป็นจริงทุกค่า x, y ดังนั้น เมื่อ $x=2$ และ $y=1$ ทำให้ตัวเลือกบางตัวมีค่าไม่เท่ากับคำตอบของโจทย์ เราจึงตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

ตัวอย่าง 6.3 ค.ร.น. ของนิพจน์

$$60x^4 + 5x^3 - 5x^2, 60x^2y + 32xy + 4y \text{ และ } 40x^3y - 2x^2y - 2xy$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$1. 40x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$$

$$2. 20xy^2(3x-1)(4x-1)(5x+1)$$

$$3. 20x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$$

$$4. 8x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$$

ตอบ 3.

แนวคิด แยกตัวประกอบของนิพจน์แต่ละตัว

$$\begin{aligned} 60x^4 + 5x^3 - 5x^2 &= 5x^2(12x^2 + x - 1) \\ &= 5x^2(4x - 1)(3x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60x^2y + 32xy + 4y &= 4y(15x^2 + 8x + 1) \\ &= 4y(3x + 1)(5x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 40x^3y - 2x^2y - 2xy &= 2xy(20x^2 - x - 1) \\ &= 2xy(4x - 1)(5x + 1) \end{aligned}$$

สรุป ค.ร.น. ของทั้งสามนิพจน์คือผลคูณของ $5, x^2, (4x - 1), (3x + 1), 4, y, (5x + 1)$ มีค่าเท่ากับ $20x^2y(3x + 1)(4x - 1)(5x + 1)$ ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่าสูตรในโจทย์ข้อนี้ยุ่งยาก การดูว่านิพจน์ $60x^4 + 5x^3 - 5x^2$ หารนิพจน์ในตัวเลือกลงตัวหรือไม่จึงทำได้ลำบาก

เพราะฉะนั้นไม่แนะนำให้ตัดตัวเลือกโดยใช้การหาร แต่จะแนะนำให้ใช้เหตุผลตามนิยามของคำว่า ค.ร.น. คือตัวคูณร่วมน้อย

สังเกตตัวเลือกทุกตัวมีพจน์ของ y แต่ในโจทย์กำลังสูงสุดของ y เป็นกำลัง 1 เพราะฉะนั้นกำลังของ y ใน ค.ร.น. เป็นกำลัง 1 ด้วย

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $60x^4 + 5x^3 - 5x^2 = 5x^2(4x-1)(3x+1)$

ดังนั้น 5 ต้องหาร ค.ร.น. ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่าตัวประกอบที่เป็นตัวเลขของทั้งสามนิพจน์คือ 5, 4, 2 และ ค.ร.น. ของ 5, 4, 2 คือ 20

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

คำถามในลักษณะนี้ใช้วิธีแทนค่า x และ y บางค่าดีกว่า

ตัวอย่างเช่น แทนค่า $x = 1, y = 1$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$60x^4 + 5x^3 - 5x^2 = 60 + 5 - 5 = 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$60x^2y + 32xy + 4y = 60 + 32 + 4 = 96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$40x^3y - 2x^2y - 2xy = 40 - 2 - 2 = 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ของ 60, 96 และ 36 มีค่าเท่ากับ

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 1440$$

ตัวเลือก 1. $40x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$

$$= (40)(4)(3)(6)$$

$$= 2880 \neq 1440$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } 20xy^2(3x-1)(4x-1)(5x+1)$$

$$= (20)(2)(3)(6)$$

$$= 720 \neq 1440$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } 20x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$$

$$= (20)(4)(3)(6)$$

$$= 1440$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } 8x^2y(3x+1)(4x-1)(5x+1)$$

$$= (8)(4)(3)(6)$$

$$= 576 \neq 1440$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 6.4 กำหนดให้ $p(x)$ และ $x^2 - 5x - 14$ มีค่าของ ห.ร.ม. เท่ากับ $x - 7$ และค่าของ ค.ร.น. เท่ากับ $x^3 - 10x^2 + 11x + 70$

นิพจน์ $p(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

$$1. x^2 - 12x - 15$$

$$2. x^2 + 12x + 35$$

$$3. x^2 + 12x - 35$$

$$4. x^2 - 12x + 35$$

ตอบ 4.

$$\text{แนวคิด } x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2)$$

เพราะว่า $x-7$ เป็น ห.ร.ม. ของ $p(x)$

เพราะฉะนั้น $x-7$ ทหาร $p(x)$ ลงตัว

เพราะว่า $x-7$ เป็น ห.ร.ม. ของ $x^2 - 5x - 14$ และ $p(x)$

เพราะฉะนั้น $x-7$ ทหาร $x^3 - 10x^2 + 11x + 70$ ลงตัว

โดยการตั้งหารยาวจะได้

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x - 10 \\
 x-7 \overline{) x^3 - 10x^2 + 11x + 70} \\
 \underline{x^3 - 7x^2} \\
 3x^2 + 11x + 70
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 -3x^2 + 11x \\
 -3x^2 + 21x \\
 \hline
 -10x + 70 \\
 -10x + 70 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

ดังนั้น $x^3 + 10x^2 + 11x + 70 = (x-7)(x^2 - 3x - 10) = (x-7)(x-5)(x+2)$

เพราะว่า ค.ร.น. $(x^2 - 5x - 14, p(x)) \times$ น.ร.ม. $(x^2 - 5x - 14, p(x))$
 $= (x^2 - 5x - 14) p(x)$

เพราะฉะนั้น $(x-7)(x^3 - 10x^2 + 11x + 70) = (x^2 - 5x - 14) p(x)$
 $(x-7)(x-7)(x-5)(x+2) = (x-7)(x+2) p(x)$

สรุป $p(x) = (x-5)(x-7) = x^2 - 12x + 35$

หมายเหตุ A, B เป็นจำนวนหรือนิพจน์ ค.ร.น. (A, B) \times น.ร.ม. (A, B) = AB

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 9$

$$x^2 - 5x - 14 = 81 - 45 - 14 = 22$$

$$x - 7 = 9 - 7 = 2$$

$$x^3 - 10x^2 + 11x + 70 = 729 - 810 + 99 + 70 = 88$$

เพราะว่า น.ร.ม. (K, 22) = 2 ค.ร.น. (K, 22) = 88

เพราะฉะนั้น K = 8

นั่นคือ $p(9)$ ต้องมีค่าเท่ากับ 8

แทนค่า $x=9$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $x^2 - 12x - 15 = 81 - 108 - 15 \neq 8$

ตัวเลือก 2. $x^2 + 12x + 35 = 81 + 108 + 35 \neq 8$

ตัวเลือก 3. $x^2 + 12x - 35 = 81 + 108 - 35 \neq 8$

ตัวเลือก 4. $x^2 - 12x + 35 = 81 - 108 + 35 = 8$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 6.5 ค.ร.น. ของ 120, 225 และ 1050 เท่ากับเท่าใด

1. 1800
2. 4200
3. 6300
4. 12600

ตอบ 4.

แนวคิด แยกตัวประกอบตัวเลขแต่ละตัว

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

$$1050 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ของ 120, 225 และ 1050 มีค่าเท่ากับ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 12600

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1800}{1050} = 1.714$, $\frac{4200}{225} = 18.67$

$$\frac{6300}{120} = 52.5$$

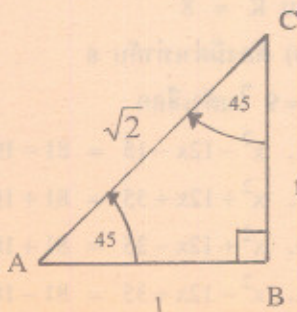
เพราะฉะนั้น 1800, 4200 และ 6300 ไม่เป็น ค.ร.น. ของ 120, 225, 1050 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

อัตราส่วนตรีโกณมิติที่สำคัญ ใช้ตั้งแต่ ม.ต้น จนถึงปริญญาเอก

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = 1$$



การเลือกค่าตัวเลขให้ สอดคล้องกับโจทย์เพื่อตัดตัวเลือก

การทำข้อสอบที่โจทย์ถามในลักษณะของการกำหนดเงื่อนไขในรูปแบบ
พจน์ทั่วไปในเทอมของ x, y, a, b, c เช่น $x+y$ เป็นเลขคู่

4 ทหาร $x+y$ ลงตัว 3 ทหาร $a+b+c$ ลงตัว

การสมมติค่า x, y, a, b, c ที่สอดคล้องกับโจทย์จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้
ค่าตัวเลขที่สอดคล้องกับโจทย์ที่อาจใช้บ่อยครั้งเช่น

อัตราส่วนด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก เช่น $3:4:5$ และ $5:12:13$

ตัวอย่าง 7.1 ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก x ทหารด้วย 7 เหลือเศษ 3

y ทหารด้วย 7 เหลือเศษ 5 จำนวน $x+2y$ ทหารด้วย 7 จะเหลือเศษเท่าใด

1. 1

2. 3

3. 5

4. 6

ตอบ 4.

แนวคิด x ทหารด้วย 7 เหลือเศษ 3 ดังนั้นต้องมีจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้

$$x = 7m + 3$$

y หารด้วย 7 เหลือเศษ 5 ดังนั้นต้องมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $y = 7n + 5$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่า } x + 2y &= (7m + 3) + 2(7n + 5) = 7m + 3 + 14n + 10 \\ &= 7(m + 2n) + 13 = 7(m + 2n + 1) + 6 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x + 2y$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 6

การตัดตัวเลือก เลือก $x = 3$ เลือก $y = 5$

จะได้ว่า x หารด้วย 7 เหลือเศษ 3 และ y หารด้วย 7 เหลือเศษ 5

เพราะว่า $x + 2y = 3 + 2(5) = 13$ และ 13 หารด้วย 7 เหลือเศษ 6

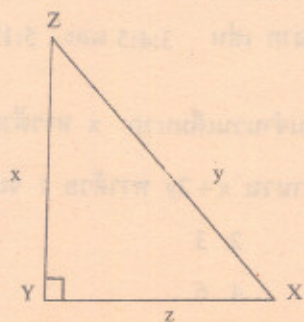
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 7.2 XYZ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี x, y และ z เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากตามลำดับ และ $(x + y + z)(x - y + z) = kxz$ ค่า k ที่ทำให้ $\angle XYZ = 90^\circ$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 1
3. 2
4. 4

ตอบ 3.

แนวคิด

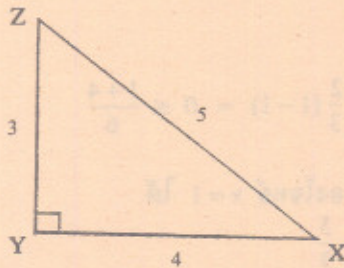


เพราะว่าเราต้องการให้ $\angle XYZ = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $y^2 = x^2 + z^2$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } (x+y+z)(x-y+z) &= kxz \\
 ((x+z)+y)((x+z)-y) &= kxz \\
 (x+z)^2 - y^2 &= kxz \\
 (x^2 + 2xz + z^2) - (x^2 + z^2) &= kxz \\
 2xz &= kxz \\
 k &= 2
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก



เพราะว่าสามเหลี่ยม XZY ดังรูปเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้นแทนค่า $x=3$, $y=5$, $z=4$ ก็จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

$$\begin{aligned}
 \text{จากสมการ } (x+y+z)(x-y+z) &= kxz \\
 (3+5+4)(3-5+4) &= k(3)(4) \\
 24 &= 12k \\
 k &= 2
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 7.3 กำหนดให้ $\frac{2}{3}(x-1) \leq \frac{x+4}{6}$

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x \geq \frac{5}{3}$

2. $x \leq \frac{11}{3}$

3. $x \leq \frac{5}{3}$

4. $x \leq \frac{8}{3}$

ตอบ 4.



$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \frac{2}{3}(x-1) &\leq \frac{x+4}{6} \\ 4(x-1) &\leq x+4 \\ 4x-4 &\leq x+4 \\ 3x &\leq 8 \\ x &\leq \frac{8}{3} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

$$\text{เลือก } x=1 \text{ จะได้ } \frac{2}{3}(1-1) = 0 \leq \frac{1+4}{6}$$

แสดงว่าในเงื่อนไขของโจทย์ $x=1$ ได้

$$\text{จากตัวเลือก 1. } x \geq \frac{5}{3}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 2$

$$\frac{2}{3}(2-1) = \frac{2}{3} \leq \frac{2+4}{6}$$

แสดงว่า $x = 2$ ได้

$$\text{จากตัวเลือก 3. } x \leq \frac{5}{3} \text{ แต่ } 2 \not\leq \frac{5}{3}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

พิจารณาตัวเลือก 2. และ 4.

เลือก $x=3$ แทนค่า

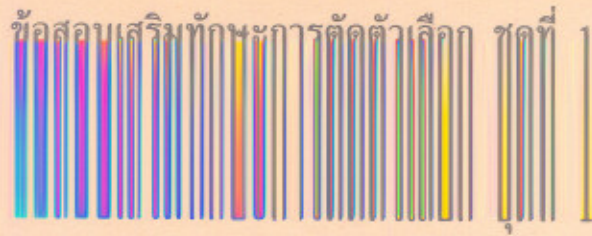
$$\frac{2}{3}(3-1) = \frac{4}{3} \not\leq \frac{3+4}{6}$$

ดังนั้น $x=3$ ในเงื่อนไขของโจทย์ไม่ได้แต่ในตัวเลือก 2. $x=3$ ได้

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ผู้เขียนได้คัดเลือกมาจากข้อสอบจริงที่มีการสอบมาแล้วทั้งการสอบแข่งขันและการสอบในห้องเรียน และเพื่อให้เกิดประโยชน์แก่ผู้อ่านมากขึ้น จึงได้จัดทำชุดข้อสอบทั้งหมด 8 ชุด ๆ ละ 20 ข้อ (ปรนัย 15 ข้อ และอัตนัย 5 ข้อ) เพื่อให้นักเรียนได้ฝึกฝนแนวคิดแบบตัดตัวเลือก ข้อสอบแต่ละชุดได้แยกคำถามและคำตอบออกจากกัน เพื่อจะได้ฝึกฝนการทำโจทย์ ซึ่งผู้อ่านอาจจะหาคำตอบเป็นตัวเลือกที่ถูกต้องโดยใช้วิธีจริงตามหลักสูตรหรือใช้แนวทางตัดตัวเลือกก็ได้ ในการเฉลยข้อสอบแต่ละข้อจะมีทั้งแนวคิดตามหลักสูตรอย่างละเอียดและแนวทางในการตัดตัวเลือก



ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ห.ร.ม. ของ $4x^2+16xy$, x^3-16xy^2 และ $x^3+8x^2y+16xy^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- | | |
|---------------|---------------|
| 1. $4x(x+4y)$ | 2. $4x(x-4y)$ |
| 3. $x(x-4y)$ | 4. $x(x+4y)$ |

2. คำตอบของสมการ $\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4$

และ $\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1$

สอดคล้องสมการในตัวเลือกใด

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $\frac{x}{y} = \frac{-18}{5}$ | 2. $\frac{x}{y} = \frac{-5}{18}$ |
| 3. $\frac{x}{y} = \frac{18}{5}$ | 4. $\frac{x}{y} = \frac{5}{18}$ |

3. กราฟของเส้นโค้ง $y = x-5$ และ $(x-3)^2+y^2 = 4$ ตัดกันที่จุด $(5,0)$ และ (a,b) ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|--------------------------------|--------------|
| 1. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ | 2. $a+b = 1$ |
| 3. $\frac{a}{b} = \frac{3}{2}$ | 4. $a+b = 5$ |

4. นิพจน์ $\left(\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}\right) \div \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| 1. $\frac{1}{1-2x^2}$ | 2. $\frac{1}{1+2x^2}$ |
| 3. $\frac{1}{2x^2-1}$ | 4. $\frac{-1}{2x^2+1}$ |

5. สมการ $x^2+ax+1=0$ และ $x^2+x+b=0$ มีคำตอบเหมือนกันอยู่หนึ่งคำตอบ ความสัมพันธ์ของค่า a และ b ในตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(b-1)^2 = (a-1)(1-ab)$
2. $(b-1)^2 = (1-a)(1-b)$
3. $(b-1)^2 = (a-1)(ab-1)$
4. $(b-1)^2 = (1-a)(b-1)$

6. คำตอบของสมการ

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{5x-11}{x-2}$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{3}, 4$
2. $\frac{3}{2}, 4$
3. $\frac{2}{3}, \frac{3}{2}$
4. $\frac{2}{3}, 3$

7. ค่าของ $\frac{1}{x+2} \left[\frac{3x^2+5x-2}{12x^2-3xy-4x+y} \right]$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3x-1}{4x+y}$
2. $\frac{1}{4x-y}$
3. $\frac{x+2}{3x-y}$
4. $\frac{3x+1}{4x-y}$

8. กำหนดให้ $x^2+y^2 = 144$ และ $x^2-y^2 = 16$

$x+y$ มีค่าแตกต่างกันทั้งหมดกี่ค่า

1. 1 ค่า
2. 2 ค่า
3. 4 ค่า
4. 6 ค่า

9. ผลลัพธ์ของ

$$\frac{(x^2-x+1)(x+1)^3 - (x^3+1)(x-1)^2}{x^3+1} - 4x$$

เท่ากับเท่าใด

1. -2
2. 0
3. 2x
4. 4x

10. ผลลัพธ์ของ $\frac{a^2+a-12}{a^2-16a} \div \frac{(a-2)^2+1}{a^2-a}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{a+3}{a+4}$

2. $\frac{a+1}{a-4}$

3. $\frac{a-3}{a-4}$

4. $\frac{a-1}{a-3}$

11. ผลบวกของคำตอบของสมการ $x^4+5x^2+4=0$ เท่ากับเท่าใด

1. 0

2. 1

3. 3

4. 4

12. ถ้า $1+\frac{1}{1+x^3} = \frac{11}{10}$ แล้ว $1+\frac{1}{1+x^6}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{-82}{83}$

2. $\frac{82}{83}$

3. $\frac{83}{82}$

4. $\frac{83}{81}$

13. กราฟของสมการในตัวเลือกใดมีจุด $(\frac{1}{2}, \frac{49}{4})$ เป็นจุดสูงสุด

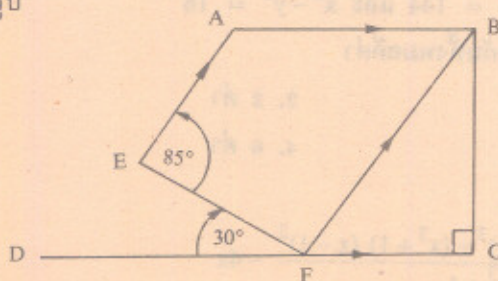
1. $y = -x^2+x+12$

2. $y = x^2+2x+11$

3. $y = -x^2-2x-11$

4. $y = x^2-x-12$

14. จากรูป



$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AE} \parallel \overline{BF}$ มุม $\angle BFC$ และ $\angle EAB$ กางกึ่งตลบ

1. $55^\circ, 120^\circ$

2. $55^\circ, 125^\circ$

3. $35^\circ, 125^\circ$

4. $30^\circ, 120^\circ$

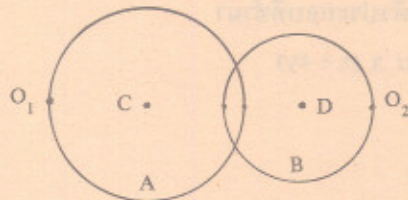
15. ถ้า $0^\circ < x < 90^\circ$

แล้ว $\cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x + 3 + \cot^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|------|------|
| 1. 2 | 2. 3 |
| 3. 4 | 4. 5 |

ตอนที่ 2

1.



O_1 เป็นวงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร มีจุดศูนย์กลางที่ C

O_2 เป็นวงกลมรัศมี 3 เซนติเมตร มีจุดศูนย์กลางที่ D

ความยาว $CD = 6$ เซนติเมตร

พื้นที่อาณาบริเวณ A มากกว่าพื้นที่อาณาบริเวณ B เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า a, b เป็นคำตอบของสมการ $6x^2 - 25x - 44 = 0$

แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ถ้า $\sin A = \frac{3}{4}$

แล้ว $\sin^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. ถ้า $x + y = 4, x^2 + y^2 = 12$ แล้ว $x^2 - xy + y^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ค่า x ที่เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x - 3$ มีค่าเป็นอย่างไร

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 1

ตอนที่ 1

1. ตอบ 4.

แนวคิด แยกตัวประกอบของแต่ละพจน์

$$4x^2 + 16xy = 4x(x + 4y)$$

$$x^3 - 16xy^2 = x(x^2 - 16y^2) = x(x - 4y)(x + 4y)$$

$$\begin{aligned} x^3 + 8x^2y + 16xy^2 &= x(x^2 + 8xy + 16y^2) \\ &= x(x + 4y)^2 \end{aligned}$$

การทำ ท.ร.ม. เอาเฉพาะตัวประกอบที่ซ้ำมา

เพราะฉะนั้น ท.ร.ม.เท่ากับ $x(x + 4y)$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่า $4x^2 + 16xy = 4x(x + 4y)$

ดังนั้น $4x(x - 4y)$ และ $x(x - 4y)$

หาร $4x^2 + 16xy$ ไม่ลงตัวแน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า 4 หาร $x^3 - 16xy^2$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เพราะว่า โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x, y

เพราะฉะนั้นแทนค่า x, y บางค่าก็จะตัดตัวเลือกได้

เช่น แทนค่า $x = 1, y = 1$

$$4x^2 + 16xy = 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$x^3 - 16xy^2 = 1 - 16 = -15 = (-1) \cdot (3) \cdot (5)$$

$$x^3 + 8x^2y + 16xy^2 = 1 + 8 + 16 = 25 = 5 \cdot 5$$

ท.ร.ม.ของ 20, -15 และ 25 คือ 5

แทนค่า x,y ลงในตัวเลือกจะได้

ตัวเลือก 1. $4(1)(1+4) = 20$

ตัวเลือก 2. $4(1)(1-4) = -12$

ตัวเลือก 3. $(1)(1-4) = -3$

ตัวเลือก 4. $(1)(1+4) = 5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

2. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $A = \frac{1}{x}, B = \frac{1}{y}$

ดังนั้น

$$3A - 2B = 4 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (1)$$

$$2A + 4B = 1 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (2)$$

$$2 \times (1); 6A - 4B = 8 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (3)$$

$$(2) + (3); \quad 8A = 9$$

$$A = \frac{9}{8}$$

$$(2); \quad 4B = 1 - 2A = 1 - 2\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$= 1 - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{-5}{4}$$

$$B = \frac{-5}{16}$$

$$\left(\frac{1}{y}\right)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{x}{y} = \left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)$

$$= \frac{B}{A}$$

$$= \frac{\left(\frac{-5}{16}\right)}{\left(\frac{9}{8}\right)}$$

$$= \frac{-5}{18}$$

$$\text{วิธีลัด} \quad \frac{3}{x} - \frac{2}{y} = 4 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

$$\frac{2}{x} + \frac{4}{y} = 1 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

$$4x(2) \quad \frac{8}{x} + \frac{16}{y} = 4 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (3)$$

$$(1) = (3);$$

$$\frac{3}{x} - \frac{2}{y} = \frac{8}{x} + \frac{16}{y}$$

$$\frac{3}{x} - \frac{8}{x} = \frac{16}{y} + \frac{2}{y}$$

$$-\frac{5}{x} = \frac{18}{y}$$

$$-\frac{5}{18} = \frac{x}{y}$$

3. ตอบ 2.

แนวคิด

$$(x-3)^2 + y^2 = 4$$

$$(x-3)^2 + (x-5)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 + x^2 - 10x + 25 = 4$$

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x = 3, 5$$

$$y = -2, 0$$

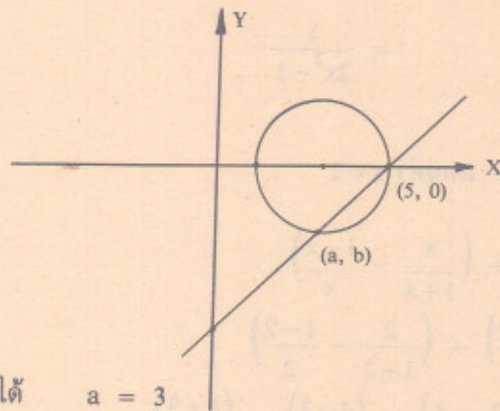
จุดตัดคือ $(3, -2)$ และ $(5, 0)$

เพราะฉะนั้น $a = 3, b = -2$

$$a + b = 1$$

การตัดตัวเลือก เขียนกราฟ $y = x - 5$ และ $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ ซึ่ง

เป็นวงกลมรัศมี 2, จุดศูนย์กลาง $(3, 0)$



วัดระยะทางได้

$$a = 3$$

$$b = -2$$

$$\frac{a}{b} < 0, a + b = 1$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทั้งได้

4. ตอบ 3.

แนวคิด

$$\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x} = \frac{x^2 + (1-x)(1+x)}{x(1+x)}$$

$$= \frac{x^2 + 1 - x^2}{x(1+x)}$$

$$= \frac{1}{x(1+x)}$$

$$\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x} = \frac{x^2 - (1-x)(1+x)}{(1+x)x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{x^2 - (1-x)^2}{(1+x)x} \\
 &= \frac{2x^2 - 1}{x(1+x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}\right) \div \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}\right) &= \left(\frac{1}{x(1+x)}\right) \div \left(\frac{2x^2-1}{x(1+x)}\right) \\
 &= \frac{1}{2x^2-1}
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x=2$

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{x}{1+x} + \frac{1-x}{x}\right) \div \left(\frac{x}{1+x} - \frac{1-x}{x}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{1+2} + \frac{1-2}{2}\right) \div \left(\frac{2}{1+2} - \frac{1-2}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) \div \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{4-3}{6}\right) \div \left(\frac{4+3}{6}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{6}\right) \div \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{1}{1-2x^2} = \frac{1}{1-8} = \frac{-1}{7} \neq \frac{1}{7}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1+8} = \frac{1}{9} \neq \frac{1}{7}$

ตัวเลือก 3. $\frac{1}{2x^2-1} = \frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$

ตัวเลือก 4. $\frac{-1}{2x^2+1} = \frac{-1}{8+1} = \frac{-1}{9} \neq \frac{1}{7}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.ทิ้งได้

5. ตอบ 1.

แนวคิด $x^2+ax+1 = 0$ _____ (1)

$$x^2 + x + b = 0 \quad \text{_____} \quad (2)$$

ให้ $x = k$ เป็นคำตอบของสมการ (1) และ (2)

เพราะฉะนั้น

$$k^2 + ak + 1 = 0 \quad \text{_____} \quad (3)$$

$$k^2 + k + b = 0 \quad \text{_____} \quad (4)$$

$$(3) - (4); ak - k + 1 - b = 0$$

$$(a-1)k = b-1$$

$$k = \frac{b-1}{a-1} \quad \text{_____} \quad (5)$$

$$\text{ax (4): } ak^2 + ak + ab = 0 \quad \text{_____} \quad (6)$$

$$(3) - (6); k^2 - ak^2 + 1 - ab = 0$$

$$k^2(1-a) = ab-1$$

$$k^2 = \frac{ab-1}{1-a}$$

$$\text{จาก (5) จะได้ } \left(\frac{b-1}{a-1}\right)^2 = \frac{ab-1}{1-a}$$

$$(b-1)^2 = \frac{(ab-1)(a-1)^2}{1-a}$$

$$= (ab-1)(1-a) = (1-ab)(a-1)$$

$$\text{ตรงกับตัวเลือก 1. } (b-1)^2 = (a-1)(1-ab)$$

การตัดตัวเลือก สองเลือกค่า a, b ที่ทำให้โจทย์เป็นจริง

เช่น $a = -2, b = -2$ จะได้

$$x^2 + ax + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0, x = 1$$

$$x^2 + x + b = x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0, x = 1$$

เพราะฉะนั้น $a = -2, b = -2$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

แทนค่า $a = -2, b = -2$ ในตัวเลือกแต่ละตัว

$$(b-1)^2 = (-2-1)^2 = 9$$

ตัวเลือก 1. $(a-1)(1-ab) = (-3)(1-4) = 9$

ตัวเลือก 2. $(1-a)(1-b) = (3)(3) = 9$

ตัวเลือก 3. $(a-1)(ab-1) = (-3)(3) = -9$

ตัวเลือก 4. $(1-a)(b-1) = (3)(-3) = -9$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ลองเลือก a และ b อีกสักตัว

$$a = 2, b = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0, x = -1$$

$$x^2 + x + 0 = x(x+1) = 0, x = -1$$

เพราะฉะนั้น $a = 2, b = 0$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

$$(b-1)^2 = (0-1)^2 = 1$$

ตัวเลือก 1. $(a-1)(1-ab) = (2-1)(1-0) = 1$

ตัวเลือก 2. $(1-a)(1-b) = (1-2)(1-0) = -1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

6. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\begin{aligned} \frac{5x-11}{x-2} &= \frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{x+2} \\ &= \frac{2x(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{2x^2 + 4x + 3x^2 - 4x + 1}{(x-1)(x+2)} \\ &= \frac{5x^2 + 1}{(x-1)(x+2)} \end{aligned}$$

$$(5x-11)(x-1)(x+2) = (x-2)(5x^2+1)$$

$$(5x-11)(x^2+x-2) = 5x^3+x-10x^2-2$$

$$5x^3+5x^2-10x-11x^2-11x+22 = 5x^3-10x^2+x-2$$

$$4x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$2x^2 - 11x + 12 = 0$$

$$(2x-3)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{3}{2}, 4$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบและตัวเลือกแบบนี้ นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์
ดีกว่า

เลือกเลขที่แทนค่าได้ง่ายและจำแนกตัวเลือกได้ เช่น 3 หรือ 4 ลองแทนค่า $x=4$

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{5x-11}{x-2} = \frac{20-11}{4-2} = 9$$

แสดงว่า $x = 4$ เป็นคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $x = \frac{3}{2} = 1.5$

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{3}{0.5} + \frac{3.5}{3.5} = 7$$

$$\frac{5x-11}{x-2} = \frac{7.5-11}{-0.5} = \frac{-3.5}{-0.5} = 7$$

แสดงว่า $x = \frac{3}{2}$ เป็นคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

7. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\frac{1}{x+2} \left[\frac{3x^2+5x-2}{12x^2-3xy-4x+y} \right]$$

$$= \frac{1}{x+2} \left[\frac{(3x-1)(x+2)}{3x(4x-y) - (4x-y)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3x-1}{(4x-y)(3x-1)} \\
 &= \frac{1}{4x-y}
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x=1$ และ $y=1$ จะได้

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x+2} \left[\frac{3x^2+5x-2}{12x^2-3xy-4x+y} \right] \\
 &= \frac{1}{1+2} \left[\frac{3+5-2}{12-3-4+1} \right] \\
 &= \frac{1}{3} \left(\frac{6}{6} \right) = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{3x-1}{4x+y} = \frac{3-1}{4+1} = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{4x-y} = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 3. $\frac{x+2}{3x-y} = \frac{1+2}{3-1} = 1 \neq \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 4. $\frac{3x+1}{4x-y} = \frac{3+1}{4-1} = \frac{4}{3} \neq \frac{1}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.ทิ้งได้

8. ตอบ 3.

แนวคิด $x^2+y^2 = 144$

$$x^2-y^2 = 16$$

เพราะฉะนั้น $2x^2 = 160$

$$x^2 = 80$$

$$x = \pm 4\sqrt{5}$$

เพราะฉะนั้น $y^2 = 144 - 80 = 64$

$$y = \pm 8$$

สรุป $x+y = 4\sqrt{5}+8, 4\sqrt{5}-8, -4\sqrt{5}+8, -4\sqrt{5}-8$

มีค่าทั้งหมด 4 ค่า

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าสมการ $x^2+y^2 = 144$ และ $x^2-y^2 = 16$

ตัวแปร x, y เป็นกำลังสอง

เพราะฉะนั้น x, y เป็นได้ทั้งบวกและลบ จึงทำให้

$x+y$ มีค่าต่างกันทั้งหมดได้ 4 ค่า

9. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $(x^2-x+1)(x+1) = x^3+1$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{(x^2-x+1)(x+1)^3 - (x^3+1)(x-1)^2}{x^3+1} - 4x$$

$$= \frac{(x^3+1)(x+1)^2 - (x^3+1)(x-1)^2}{x^3+1} - 4x$$

$$= (x+1)^2 - (x-1)^2 - 4x$$

$$= (x+1-x+1)(x+1+x-1) - 4x$$

$$= (2)(2x) - 4x$$

$$= 0$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{(x^2-x+1)(x+1)^3 - (x^3+1)(x-1)^2}{x^3+1} - 4x$$

$$= \frac{(0-0+1)(0+1)^3 - (0+1)(0-1)^2}{0+1} - 0$$

$$\begin{array}{c} 1-1 \\ \text{---} \\ 1 \end{array}$$

= 0 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 1$ จะได้

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2 - x + 1)(x + 1)^3 - (x^3 + 1)(x - 1)^2}{x^3 + 1} - 4x \\ &= \frac{(1 - 1 + 1)(1 + 1)^3 + (1 + 1)(1 - 1)^2}{1 + 1} - 4 \\ &= \frac{8 + 0}{2} - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แต่ตัวเลือก 3. $2x = 2(1) = 2 \neq 0$

และตัวเลือก 4. $4x = 4(1) = 4 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

10. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + a - 12}{a^3 - 16a} \div \frac{(a - 2)^2 - 1}{a^3 - a} \\ &= \frac{(a + 4)(a - 3)}{a(a^2 - 16)} \times \frac{a(a^2 - 1)}{(a - 2)^2 - 1} \\ &= \frac{(a + 4)(a - 3)a(a - 1)(a + 1)}{a(a + 4)(a - 4)(a - 3)(a - 1)} \\ &= \frac{a + 1}{a - 4} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a = 2$

$$\frac{a^2 + a - 12}{a^3 - 16a} \div \frac{(a - 2)^2 - 1}{a^3 - a}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{4+2-12}{8-32} \right) \div \left(\frac{0-1}{8-2} \right) \\
 &= \left(\frac{-6}{-24} \right) \div \left(\frac{-1}{6} \right) \\
 &= \left(\frac{1}{4} \right) \div \left(\frac{-1}{6} \right) \\
 &= -1.5
 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{a+3}{a+4} = \frac{5}{6} \neq -1.5$

ตัวเลือก 2. $\frac{a+1}{a-4} = \frac{3}{-2} = -1.5$

ตัวเลือก 3. $\frac{a-3}{a-4} = \frac{-1}{-2} = 0.5 \neq -1.5$

ตัวเลือก 4. $\frac{a-1}{a-3} = -1 \neq -1.5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

11. ตอบ 1.

แนวคิด $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$(x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 4, 1$$

$$x = \pm 2, \pm 1$$

สรุปผลบวกของราก = $(2) + (-2) + (1) + (-1) = 0$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าสมการ $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ เป็นสมการที่มีเฉพาะพจน์ของ x^2 และ x^4

เพราะฉะนั้น a เป็นรากสมการ ก็ต่อเมื่อ $-a$ เป็นรากสมการ

ดังนั้นผลบวกของรากทุกตัวจึงเท่ากับ 0



แนวคิด $1 + \frac{1}{1+x^3} = \frac{11}{10}$

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{10}$$

$$1+x^3 = 10$$

$$x^3 = 9$$

$$x^6 = 81$$

$$1+x^6 = 82$$

$$\frac{1}{1+x^6} = \frac{1}{82}$$

$$1 + \frac{1}{1+x^6} = 1 + \frac{1}{82}$$

$$= \frac{83}{82}$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $x^6 \geq 0$

$$1+x^6 \geq 1$$

$$\frac{1}{1+x^6} \geq 0$$

$$1 + \frac{1}{1+x^6} \geq 1$$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1. และ 2. หิ้งได้

13. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่า

ก่อนอื่นต้องท่องจำให้ได้ก่อนเพราะว่าข้อสอบออกบ่อย

กราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ หงาย ก็ต่อเมื่อ $a > 0$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 2. และ 4. กราฟเป็นรูปหงาย จึงไม่มีจุดสูงสุด ดังนั้นตัดทิ้งไปก่อน

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ ในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 1. $-x^2 + x + 12 = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} + 12 = \frac{49}{4}$

ตัวเลือก 3. $-x^2 - 2x - 11 = \frac{1}{4} - 1 - 11 \neq \frac{49}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง

$$y = x^2 + x + 12$$

$$= -(x^2 - x + \frac{1}{4}) + 12 + \frac{1}{4}$$

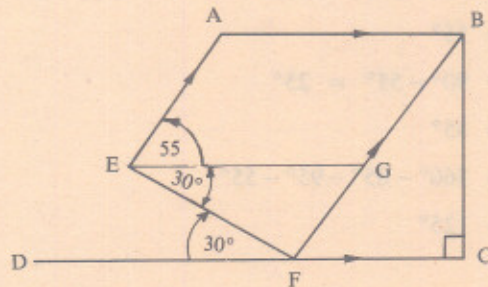
$$= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{49}{4}$$

$$y - \frac{49}{4} = -(x - \frac{1}{2})^2$$

มีจุดยอดเป็น $(\frac{1}{2}, \frac{49}{4})$

14. ตอบ 3.

แนวคิด



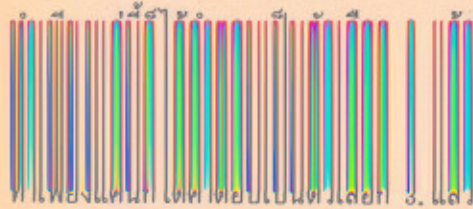
ลากเส้น EG ขนานกับ DC

จะได้ $\angle GEF = \angle EFD = 30^\circ$

$\angle AEG = 85^\circ - 30^\circ = 55^\circ$

$\angle ABC = \angle AEG = 55^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle FBC = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$



การหามุม $E\hat{A}B$

$$\begin{aligned} E\hat{A}B &= 180^\circ - A\hat{E}G \\ &= 180^\circ - 55^\circ \\ &= 125^\circ \end{aligned}$$

หมายเหตุ เหตุผลสำคัญในข้อนี้คือ

1. มุมตรงข้ามของสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากัน
2. มุมแย้งเท่ากัน
3. มุมในด้านคู่ขนานรวมกันเท่ากับ 180°

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned} B\hat{F}E &= 180^\circ - A\hat{E}F \\ &= 180^\circ - 85^\circ \\ &= 95^\circ \\ B\hat{F}C &= 180^\circ - 30^\circ - 95^\circ \\ &= 55^\circ \\ F\hat{B}C &= 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ \\ A\hat{B}F &= 55^\circ \\ E\hat{A}B &= 360^\circ - 85^\circ - 95^\circ - 55^\circ \\ &= 125^\circ \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามโจทย์กำหนดตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้นตรง DF
2. ลาก EF ให้ $E\hat{F}D = 30^\circ$
3. ลาก AE ให้ $A\hat{E}F = 85^\circ$
4. ลากเส้นจาก A ให้ขนานกับ DF

ลากเส้นจาก F ให้ขนานกับ EA

ตัดกันที่ B

5. จาก B จากเส้นมาตั้งฉากกับ DF ที่จุด C

วัดมุม $\angle FBC$ และ $\angle EAB$ จะได้

$$\angle FBC = 55^\circ$$

$$\angle EAB = 125^\circ$$

ตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

15. ตอบ 2.

แนวคิด $\cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x + 3 + \cot^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

$$= \cot^2 x - (1 + \cot^2 x) + 3 + \left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \sin^2 x + \sin^2 x$$

$$= 2 + \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$= 2 + 1$$

$$= 3$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้จำค่าของฟังก์ชันตรีโกณบางมุมก็จะได้คำตอบโดยไม่ต้องพิสูจน์เอกลักษณ์ เช่น แทนค่า $x = 45^\circ$

$$\cot^2 45^\circ = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 45^\circ = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\sin^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

สรุป $\cot^2 x - \operatorname{cosec}^2 x + 3 + \cot^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

$$= 1 - 2 + 3 + (1) \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$= 3$$

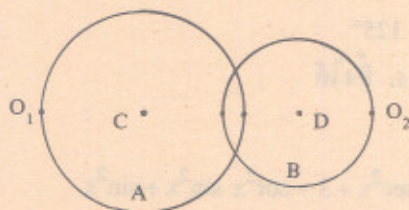
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้



1. ตอบ 7π

แนวคิด ให้ a เป็นพื้นที่อาณาบริเวณ A

b เป็นพื้นที่อาณาบริเวณ B



ให้พื้นที่ส่วนที่ตัดกันเท่ากับ x

$$\text{พื้นที่ A} - \text{พื้นที่ B} = |a - b|$$

$$= |a + x - x - b|$$

$$= |(a + x) - (b + x)|$$

$$= |\text{พ.ท.วงกลม } O_1 - \text{พ.ท.วงกลม } O_2|$$

$$= |\pi 4^2 - \pi 3^2|$$

$$= |16\pi - 9\pi|$$

$$= 7\pi$$

2. ตอบ $\frac{1153}{36}$

แนวคิด $6x^2 - 25x - 44 = 0$

$$(3x + 4)(2x - 11) = 0$$

$$x = \frac{-4}{3}, \frac{11}{2}$$

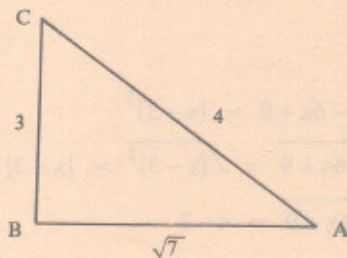
ให้ $a = \frac{-4}{3}, b = \frac{11}{2}$

$$a^2 = \frac{16}{9}, b^2 = \frac{121}{4}$$

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= \frac{16}{9} + \frac{121}{4} \\
 &= \frac{4(16) + 121(9)}{36} \\
 &= \frac{64 + 1089}{36} \\
 &= \frac{1153}{36}
 \end{aligned}$$

3. ตอบ $\frac{16}{7}$

แนวคิด เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\sin A = \frac{3}{4}$ เพราะฉะนั้น ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 3 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 4 หน่วย เมื่อเรากำหนดให้ B เป็นมุมฉาก จะได้ $BC = 3$ และ $AC = 4$



$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$AB = \sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \sin^2 A + \cos^2 A + \tan^2 A &= \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2 \\
 &= \frac{9}{16} + \frac{7}{16} + \frac{9}{7} \\
 &= 1 + \frac{9}{7} \\
 &= \frac{16}{7}
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ทกมม θ

ดังนั้นคิดเฉพาะ $= \tan^2 A$ ก็พอ

4. ตอบ 10

แนวคิด

$$x+y = 4$$

$$(x+y)^2 = 16$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 16$$

เพราะว่า $x^2 + y^2 = 12$

เพราะฉะนั้น $2xy = 16 - 12 = 4$

$$xy = 2$$

สรุป $x^2 - xy + y^2 = (x^2 + y^2) - xy$

$$= 12 - 2$$

$$= 10$$

5. ตอบ $x \geq 3$

แนวคิด เพราะว่ $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x-3|$

จากสมการ $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = x-3$

$$|x-3| = x-3$$

เพราะว่า $|a| = a$ ก็ต่อเมื่อ $a \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x-3 \geq 0$

สรุป $x \geq 3$

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 2

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. กำหนดให้ $a > 0, b > 0$ และ $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$

ค่าของ $\frac{a}{2b}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$

2. $\frac{1}{1-\sqrt{5}}$

3. $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$

4. $\frac{1}{1+\sqrt{5}}$

2. กำหนดให้ x, y, z เป็นจำนวนคู่, $\frac{x}{2}$ และ $\frac{y}{2}$ เป็นจำนวนคี่, $\frac{z}{2}$ เป็นจำนวนคู่

ถามว่าเศษที่ได้จากการหาร $x+y+z$ ด้วย 4 เท่ากับเท่าใด

1. 0

2. 1

3. 2

4. 3

3. ถ้า $3x+a$ และ ax^2+b หาร $3ax^4+(a^2+9a)x^3+15x^2+(ab+9)x+3ab$ ลงตัว แล้วค่าของ a^2+b เท่ากับเท่าใด

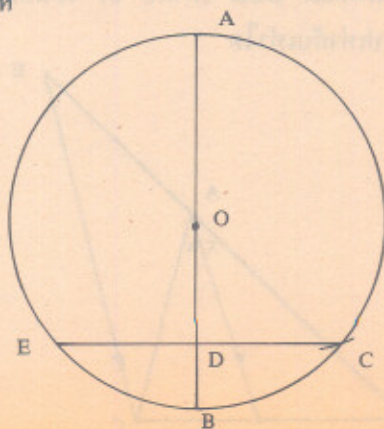
1. 5

2. 2

3. 0

4. -5

4. จากรูปที่กำหนดให้





EC ตัดกับ AB ที่จุด D และ $ED = DC$

ถ้า $AB = 13$ เซนติเมตร และ $AC = 12$ เซนติเมตร

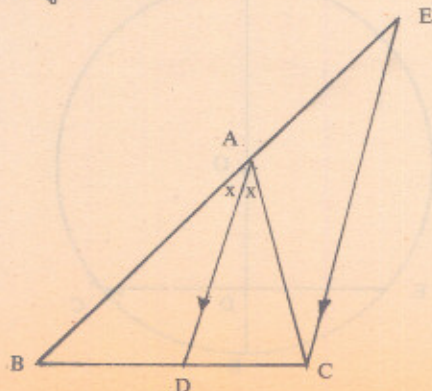
แล้ว EC เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $\frac{120}{13}$ เซนติเมตร | 2. $\frac{144}{12}$ เซนติเมตร |
| 3. $\frac{25}{2}$ เซนติเมตร | 4. $\frac{60}{13}$ เซนติเมตร |

5. ในการผสมน้ำยาบอริกชนิด A ที่มีความเข้มข้น 30% กับน้ำยาบอริกชนิด B ที่มีความเข้มข้น 60% จะต้องผสมน้ำยาทั้งสองชนิดอย่างละกี่กรัมเพื่อให้ได้น้ำยาบอริกที่มีความเข้มข้น 50% จำนวน 60 กรัม

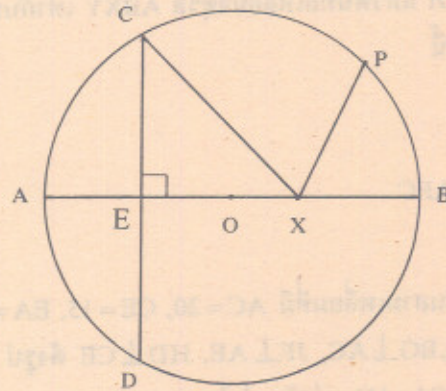
1. A. 10 กรัม, B 50 กรัม
2. A. 15 กรัม, B 45 กรัม
3. A. 18 กรัม, B 42 กรัม
4. A. 20 กรัม, B 40 กรัม

6. กำหนดให้ \overline{AD} เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม \hat{A} ของสามเหลี่ยม ABC, จุด E อยู่ในแนวของเส้น BA และ $AD \parallel CE$ ถ้า $CE = 7$ เซนติเมตร และความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม BCE เท่ากับ 31 เซนติเมตร แล้ว ABC มีความยาวเส้นรอบรูปเท่ากับเท่าใด

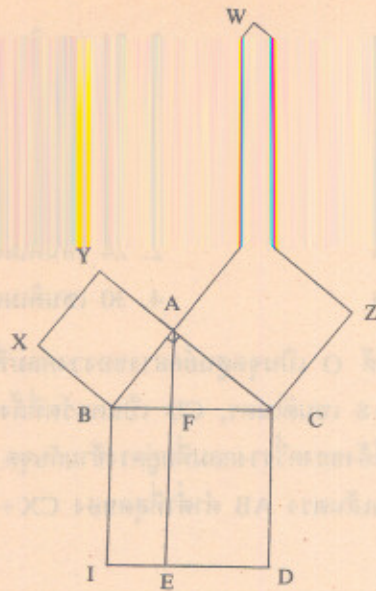


1. 18 เซนติเมตร 2. 24 เซนติเมตร
3. 28 เซนติเมตร 4. 30 เซนติเมตร

7. จากรูปที่กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง, $AB=8$ เซนติเมตร, CD เป็นคอร์ดที่ตั้งฉากกับ AB ที่จุด E , P เป็นจุดบนส่วนโค้งของครึ่งวงกลมที่อยู่ตรงข้ามกับจุด D , $PD=7$ เซนติเมตร ให้ X เป็นจุดบนเส้นตรง AB ค่าต่ำที่สุดของ $CX+XP$ เท่ากับเท่าใด

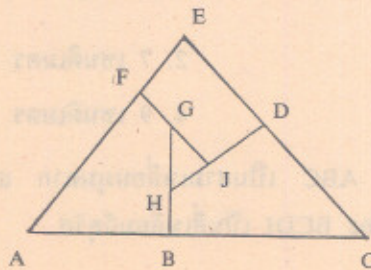


1. 6 เซนติเมตร 2. 7 เซนติเมตร
3. 8 เซนติเมตร 4. 9 เซนติเมตร
8. จากรูปที่กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{BAC} = 90^\circ$ $ABXY$, $ACZW$ และ $BCDI$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส



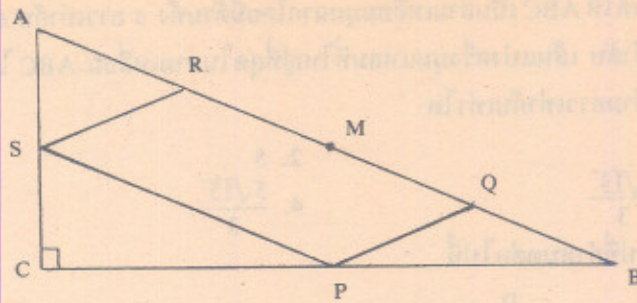
ถ้า AE ตั้งฉากกับ DI แล้วพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ABXY เท่ากับพื้นที่สี่เหลี่ยม
ในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. CDEF
 2. ABIE
 3. FCDE - $\triangle AFC$
 4. BFEI
9. กำหนดให้ ACE เป็นสามเหลี่ยมที่มี $AC=20$, $CE=15$, $EA=10$, B เป็น
จุดบน AC, $AB=8$, $BG \perp AC$, $JF \perp AE$, $HD \perp CE$ ดังรูป
ถ้า $GH = 5$ แล้ว $GJ+HJ$ เท่ากับเท่าใด



1. 4
2. 5.5
3. 6.25
4. 7.75

10.



ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $\hat{C} = 90^\circ$,
 M, P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางด้าน \overline{AB} ,
 \overline{BC} , \overline{BM} , \overline{MA} และ \overline{AC} ตามลำดับ และ
 $AB = 32$ เซนติเมตร
 ความยาวเส้นรอบรูป $\square PQRS$ เท่ากับเท่าใด

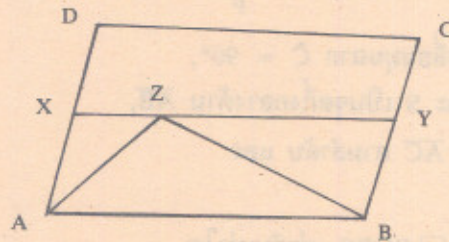
1. 32 เซนติเมตร
 2. 42 เซนติเมตร
 3. 48 เซนติเมตร
 4. 50 เซนติเมตร
11. ดินน้ำมันรูปทรงกลม 3 ก้อน มีอัตราส่วนของรัศมีทรงกลมเป็น 1:2:3 ตามลำดับ ถ้านำดินน้ำมันทั้ง 3 ก้อนนี้มารวมกันแล้วปั้นเป็นรูปทรงกลมรัศมีของรูปทรงกลมใหม่ที่ได้จะเป็นกี่เท่าของรัศมีของดินน้ำมันก้อนที่เล็กที่สุด
1. $\sqrt[3]{6}$ เท่า
 2. $\sqrt[3]{36}$ เท่า
 3. $\sqrt{14}$ เท่า
 4. $\sqrt{7}$ เท่า
12. สมการ $\sqrt{x-1} = x-1$ มีรากกี่ตัวและผลบวกของรากทุกตัวรวมกันเท่ากับเท่าใด
1. มีราก 1 ตัว, ผลบวกของรากเท่ากับ 0
 2. มีราก 1 ตัว, ผลบวกของรากเท่ากับ 1
 3. มีราก 2 ตัว, ผลบวกของรากเท่ากับ 2
 4. มีราก 2 ตัว, ผลบวกของรากเท่ากับ 3

13. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีด้านทั้ง 3 ขาวเท่ากัน 5, 12, 13

ตามลำดับ เส้นแบ่งครึ่งมุมแหลมที่ใหญ่ที่สุดในสามเหลี่ยม ABC ไปยังด้านตรงข้ามยาวเท่ากับเท่าใด

1. 3
2. 5
3. $\frac{5\sqrt{13}}{3}$
4. $\frac{5\sqrt{15}}{3}$

14. จากรูปที่กำหนดต่อไปนี้



ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

X, Y เป็นจุดกึ่งกลางของ AD, BC ตามลำดับ

Z เป็นจุดใด ๆ บนเส้น XY

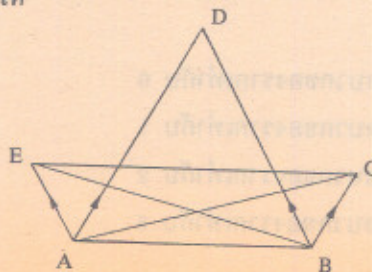
ถ้า $a =$ พื้นที่ $\triangle ABZ$

$b =$ พื้นที่ $\square ABCD$

แล้วข้อความใดถูกต้อง

1. $b = 2a$
2. $b = 3a$
3. $b = 4a$
4. $b = 5a$

15. จากรูปที่กำหนดให้



$AE \parallel BD$, $BC \parallel AD$, $AE = BC$ และ $AD = BD$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ ถูกต้อง

1. $AD = AC$

2. $AC = EC$

3. $BE = BD$

4. $BE = AC$

ตอนที่ 2

- มีเชือก 4 เส้นยาวเส้นละ 90, 120, 270 และ 300 ตามลำดับ ทำการตัดแบ่งเชือกทั้งหมดออกเป็นเส้นสั้น ๆ และเท่ากัน โดยเชือกที่ตัดแบ่งแล้วมีความยาวมากที่สุดเท่าที่จะยาวได้ จะได้จำนวนเชือกทั้งหมดกี่เส้น
- เขียน 1-50 ลงในกระดาษแผ่นละหนึ่งหมายเลขตั้งแต่ 1,2,3,.....,50 ม้วนกระดาษใส่ในกล่องแล้วหยิบกระดาษออกจากกล่องอย่างสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะเท่ากับเท่าใด
- ถังน้ำรูปสี่เหลี่ยมพื้นผิวมีความกว้าง 20 เมตร มีความสูง 8 เมตร และระดับน้ำในถังมีความสูง 7 เมตร เมื่อปล่อยให้น้ำไหลออก 1000 ลูกบาศก์เมตร ระดับน้ำในถังลดลงจากเดิม 2 เมตร จงหาความยาวของถังน้ำเท่ากับเท่าใด
- พ่อค้าคิดราคาขายของรถยนต์คันหนึ่งในราคาที่ตั้งกำไรไว้แล้ว 20% ถ้าลูกค้ามาซื้อสินค้าในราคาเงินสดพ่อค้าจะลดราคาจากป้ายราคาให้ลูกค้า 10% ถ้าหากมีลูกค้ามาซื้อรถยนต์ด้วยเงินสด พ่อค้าจะได้กำไรกี่เปอร์เซ็นต์
- งานทำความสะอาดอาคารหลังหนึ่ง หากใช้คนงานชาย 10 คนจะทำงานเสร็จในเวลา 7 วัน หากใช้คนงานหญิง 18 คนทำแทนงานจะเสร็จใน 5 วันเหมือนกัน อัตราส่วนของงานที่ชายทำได้ต่องานที่หญิงทำได้ เท่ากับเท่าใด

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดสินใจ ชุดที่ 2

ตอนที่ 1

1. ตอบ 3.

แนวคิด

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$a^2 = ab + b^2$$

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

การหาสูตร a ในพจน์ของ b

จากสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

ดังนั้น $a^2 - ab - b^2 = 0$

$$\text{จะได้ } a = \frac{-(-b) \pm \sqrt{(-b)^2 - 4(1)(-b^2)}}{2}$$

$$= \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^2}}{2}$$

เพราะว่า $a > 0$

$$\text{เพราะฉะนั้น } a = \frac{b + \sqrt{5b^2}}{2}$$

$$= \frac{b + b\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a}{2b} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

ยังไม่ตรงกับตัวเลือก ต้องจัดรูปต่อดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{a}{2b} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right) \\ &= \frac{1-5}{4(1-\sqrt{5})} \\ &= \frac{-4}{4(1-\sqrt{5})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}-1} \end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{b}{a}$$

$\frac{a}{b}$ คูณตลอด

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} + 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

เพราะว่า $\frac{a}{b} > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

และ $\frac{a}{2b} = \frac{1}{\sqrt{5}-1}$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.

เพราะว่า $a > 0, b > 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{2b} > 0$

แต่ $\frac{1-\sqrt{5}}{4} < 0$ และ $\frac{1}{1-\sqrt{5}} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

จากการที่เราได้ $\frac{a}{2b} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

โดยการประมาณค่าจะได้ $\frac{a}{2b} = \frac{1+2.2}{4} = \frac{3.2}{4} = 0.8$

ตัวเลือก 1. $\frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{1-2.2}{4} = \frac{-1.2}{4} < 0$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{1-\sqrt{5}} = \frac{1}{1-2.2} = \frac{-1}{1.2} < 0$

ตัวเลือก 3. $\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2.2-1} = \frac{1}{1.2} = 0.83$

ตัวเลือก 4. $\frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{1}{1+2.2} = \frac{1}{3.2} \neq 0.83$

ดังนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

2. ตอบ 1.

แนวคิด

เพราะว่า $\frac{x}{2}$ และ $\frac{y}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $\frac{x}{2} = 2k+1$

$$\frac{y}{2} = 2i+1$$

เมื่อ i, k เป็นจำนวนเต็ม

$$\text{ดังนั้น } x = 4k+2$$

$$y = 4i+2$$

เพราะว่า $\frac{z}{2}$ เป็นจำนวนคู่

เพราะฉะนั้นต้องมีจำนวนเต็ม j ที่ทำให้

$$\frac{z}{2} = 2j$$

$$z = 4j$$

$$\text{ดังนั้น } x+y+z = (4k+2) + (4i+2) + 4j$$

$$= 4(k+i+j) + 4$$

$$= 4(k+i+j+1)$$

เพราะฉะนั้น 4 หาร $x+y+z$ ลงตัว

ดังนั้น เศษเหลือจึงเท่ากับ 0

การตัดตัวเลือก

ข้อสอบแบบนี้ เลือกค่า x, y, z ให้สอดคล้องกับโจทย์ดีกว่า

$$x = 2$$

$$y = 2$$

$$z = 4$$

และ $x+y+z = 8$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 0

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

3. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ $(cx+d)$ เป็นตัวประกอบที่ทำให้

$$3ax^4 + (a^2+9a)x^3 + 15x^2 + (ab+9)x + 3ab$$

$$\begin{aligned}
 &= (3x+a)(ax^2+b)(cx+d) \\
 &= (3ax^3+a^2x^2+3bx+ab)(cx+d) \\
 &= 3acx^4+(a^2c+3ad)x^3+(a^2d+3bc)x^2+(abc+3bd)x+abd
 \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned}
 3a &= 3ac && \underline{\hspace{2cm}} && (1) \\
 a^2+9a &= a^2c+3ad && \underline{\hspace{2cm}} && (2) \\
 15 &= a^2d+3bc && \underline{\hspace{2cm}} && (3) \\
 ab+9 &= abc+3bd && \underline{\hspace{2cm}} && (4) \\
 3ab &= abd && \underline{\hspace{2cm}} && (5)
 \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้ $c = 1$

จาก (5) จะได้ $d = 3$

แทนค่า c, d ใน (4) จะได้

$$ab+9 = ab+9b$$

$$b = 1$$

แทนค่า a, b, c ใน (3) จะได้

$$15 = 3a^2+3$$

$$a^2 = 4$$

สรุป $a^2+b = 4+1 = 5$

การตัดตัวเลือก

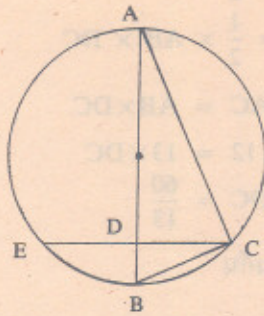
เมื่อได้ $b = 1$

แสดงว่า $a^2+b > 0$ แน่แน่นอน

ดังนั้น ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทั้งได้

4. ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่ 1

เพราะว่า $ED = DC$ เพราะฉะนั้น $AD \perp EC$ เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเพราะฉะนั้น $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$13^2 = 12^2 + BC^2$$

$$BC^2 = 169 - 144 = 25$$

$$BC = 5$$

พิจารณา $\triangle ACD$ และ $\triangle ABC$ เพราะว่า $\angle ACB = 90^\circ = \angle ADC$

$$\angle ABC = 90^\circ - \angle DAC$$

$$= \angle ACD$$

เพราะฉะนั้น $\triangle ACD$ และ $\triangle ABC$ คล้ายกัน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad \frac{AC}{AD} &= \frac{CB}{DC} = \frac{BA}{AC} \\ \frac{12}{AD} &= \frac{5}{DC} = \frac{13}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } DC &= \frac{5(12)}{13} \\ &= \frac{60}{13} \end{aligned}$$

และ $EC = 2 DC$

$$= \frac{120}{13} \text{ ตรงกับตัวเลือก 1.}$$

วิธี 2 พ.ท. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AC$

พ.ท. $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times AB \times DC$

ดังนั้น $BC \times AC = AB \times DC$

$$5 \times 12 = 13 \times DC$$

$$DC = \frac{60}{13}$$

และได้ $EC = \frac{120}{13}$ เหมือนกัน

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทางตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ลาก AB ยาว 13 เซนติเมตร
2. ให้ O เป็นจุดกึ่งกลาง AB
3. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางและ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง
4. กางวงเวียนรัศมี 12, จุดศูนย์กลางที่จุด A ตัดส่วนโค้งของวงกลมที่จุด C

ลาก AC จะได้ $AC = 12$

5. จาก C ลากเส้น EC ตั้งฉากกับ AB

6. วัดความยาว EC ได้ 9 เซนติเมตร

ดูจากตัวเลือก

$$1. \frac{120}{13} = 9.2$$

$$2. \frac{144}{12} = 12$$

$$3. \frac{25}{2} = 12.5$$

$$4. \frac{60}{13} = 4.6$$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

5. ตอบ 4.

แนวคิด กำหนดตัวแปรดังนี้

$$x = \text{น้ำยาบอริกชนิด A}$$

$$y = \text{น้ำยาบอริกชนิด B}$$

$$x + y = 60 \text{ กรัม} \quad \text{----- (1)}$$

เพราะว่าน้ำยาชนิด A มีความเข้มข้น 30%

$$\text{เพราะฉะนั้นมีน้ำยาบอริก} = 0.3x \text{ กรัม}$$

เพราะว่าน้ำยาชนิด B มีความเข้มข้น 60%

$$\text{เพราะฉะนั้นมีน้ำยาบอริก} = 0.6y \text{ กรัม}$$

เพราะว่าเราต้องการความเข้มข้น 50%

$$\text{เพราะฉะนั้น } 0.3x + 0.6y = 0.5(x + y)$$

$$= 0.5(60)$$

$$= 30$$

$$3x + 6y = 300$$

$$x + 2y = 100 \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2)

$$y = 40$$

$$x = 20$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก

นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าอาจจะได้คำตอบเร็วกว่า

เนื่องจากเราต้องการความเข้มข้น 50%

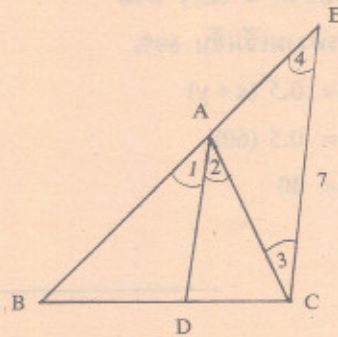
ดังนั้น ตัวเลือกใดที่ให้ความเข้มข้นไม่เท่ากับ 30 กรัมก็ตัดทิ้งได้

ตัวเลือก	คูณด้วย .3	คูณด้วย .6	รวม
1	$10 \times 0.3 = 3$	$50 \times 0.6 = 30$	33
2	$15 \times 0.3 = 4.5$	$45 \times 0.6 = 27$	31.5
3	$18 \times 0.3 = 5.4$	$42 \times 0.6 = 25.2$	30.6
4	$20 \times 0.3 = 6$	$40 \times 0.6 = 24$	30

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

6. ตอบ 2.

แนวคิด



เพราะว่าความยาวเส้นรอบรูป $\triangle BCE$ เท่ากับ 31 และ $EC = 7$

เพราะฉะนั้น $BE + BC = 31 - 7 = 24$ _____ (1)

เพราะว่า $AD \parallel CE$ เพราะฉะนั้น $\hat{2} = \hat{3}$ และ $\hat{1} = \hat{4}$

เพราะว่า AD แบ่งครึ่งมุม BAC

เพราะฉะนั้น $\hat{1} = \hat{2}$

ดังนั้น $\hat{3} = \hat{4}$

เพราะฉะนั้น $AE = AC$

ความยาวเส้นรอบรูป ABC

$$= AB + BC + CA$$

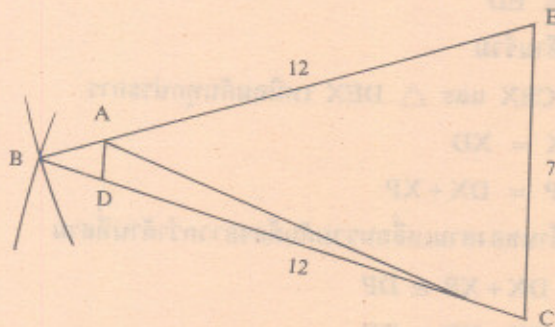
$$= BC + AB + AC$$

$$\begin{aligned}
 &= BC + AB + AE && (\because AE = AC) \\
 &= BC + BE \\
 &= 24 && (\text{จาก (2)})
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์

1. ลาก CE ยาว 7 ซม.
2. ให้ $BC = BE = 12$
จะได้ $\triangle BCE$ มีความยาวเส้นรอบรูป 31 ซม.
3. วัดมุม $\angle CEB$ ได้ 72°
4. ลากเส้น DA ให้ขนานกับ CE
และ $\angle DAC = 72^\circ$
(ทำโดยการเลื่อนจุด A บนแนว BE)
5. วัดความยาว AB, BC และ CA



$$BC = 12$$

$$CA = 10.5$$

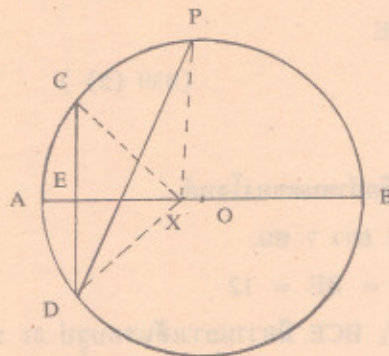
$$AB = 1.5$$

$$AB + BC + CA = 24$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้



แนวคิด



$$AB = 8$$

$$PD = 7$$

ให้ X เป็นจุดบน AB

พิจารณา $\triangle CEX$ และ $\triangle DEX$

$$1. \angle CEO = \angle DEO = 90^\circ$$

$$2. CE = ED$$

3. EX ด้านร่วม

เพราะฉะนั้น $\triangle CEX$ และ $\triangle DEX$ เหมือนกันทุกประการ

ดังนั้น $CX = XD$

$$CX + XP = DX + XP$$

เพราะว่าด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่สาม

$$\text{เพราะฉะนั้น } DX + XP \geq DP$$

$$CX + XP \geq DP$$

$$CX + XP \geq 7$$

สรุป ค่าน้อยสุดของ $CX + XP$ คือ 7

และจุด X ที่ทำให้ได้ค่าน้อยสุดคือ

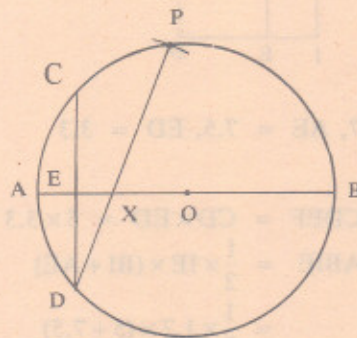
จุดตัดของ DP กับ AB

การตัดตัวเลือก

เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทาง
เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก ตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 8 เซนติเมตร
2. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลางที่ O และ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
3. ให้ $AE = 1$ เซนติเมตร
4. ลาก CD ตั้งฉากกับ AB ที่ E
5. กางวงเวียนรัศมี 7 เซนติเมตร, จุดศูนย์กลางที่ D ตัดส่วนโค้งที่จุด P จะได้ $DP = 7$ เซนติเมตร

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว



ให้ X เป็นจุด O จะได้ $CX + XP = 4 + 4$

ดังนั้น $CX + XP = 8$ ได้ ทำให้เราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

เลือก X เป็นจุดตัดของ DP กับ AX

วัดระยะทาง $CX = 2.7$

$XP = 4.3$

$CX + XP = 7$

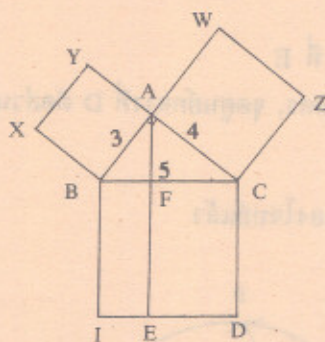
ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

8. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อสอบในลักษณะแบบนี้ใช้วิธีวาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์แล้ววัดระยะทางเพื่อหาพื้นที่ และทำการตัดตัวเลือกดีกว่า

ขั้นตอนการวาดรูป

1. ให้ $AB = 3$, $AC = 4$ และ $BC = 5$



วัดความยาว $IE = 1.7$, $AE = 7.5$, $ED = 3.3$

พ.ท. $\square ABXY = 9$

ตัวเลือก 1. พ.ท. $\square CDEF = CD \times ED = 5 \times 3.3 = 16.5$

ตัวเลือก 2. พ.ท. $\square ABIE = \frac{1}{2} \times IE \times (BI + AE)$
 $= \frac{1}{2} \times 1.7 \times (5 + 7.5)$
 $= 10.625$

ตัวเลือก 3. พ.ท. $\triangle AFC = \frac{1}{2} \times FC \times AF$
 $= \frac{1}{2} \times 3.3 \times 2.5$
 $= 4.125$

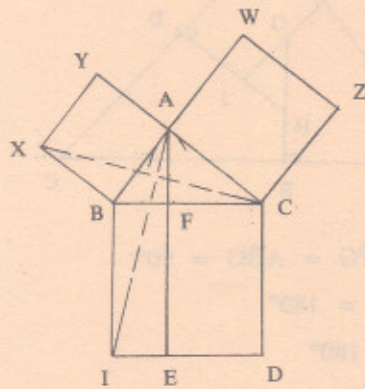
พ.ท. $\square FCDE =$ พ.ท. $\square CDEF = 16.5$

พ.ท. $\square FCDE -$ พ.ท. $\triangle AFC = 16.5 - 4.125$
 $= 12.375$

$$\begin{aligned}
 \text{ตัวเลือก 4. พ.ท. } \square BFEI &= BF \times BI \\
 &= 1.7 \times 5 \\
 &= 8.5
 \end{aligned}$$

ค่าจากตัวเลือกที่ใกล้เคียง พ.ท. $\square ABXY$ มากที่สุดคือตัวเลือก 4.
สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์ว่า พ.ท. $\square ABXY = \text{พ.ท. } \square BFEI$
สำหรับกรณีทั่วไปทำได้ดังนี้



ลากเส้น XC และ AI

พิจารณา $\triangle BCX$ และ $\triangle ABI$

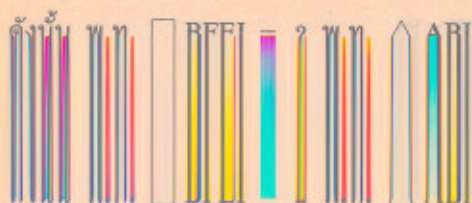
1. $\angle XBC = 90^\circ + \angle ABC$
 $\qquad \qquad \qquad = \angle ABI$
2. $XB = AB$
3. $BI = BC$

เพราะฉะนั้น $\triangle BCX$ และ $\triangle ABI$ เหมือนกันทุกประการ

$\triangle XBC$ และ $\square ABXY$ มีฐาน XB ร่วมกันและสูงเท่ากัน

ดังนั้น พ.ท. $\square ABXY = 2 \text{ พ.ท. } \triangle XBC$

$\triangle ABI$ และ $\square BFEI$ มีฐาน BI ร่วมกันและสูงเท่ากัน

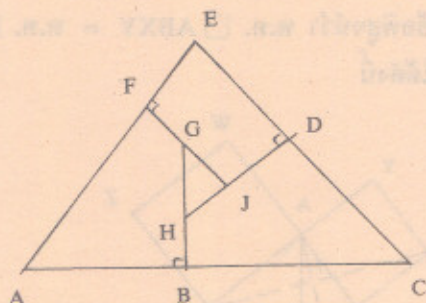


เพราะว่า พ.ท. $\triangle ABI =$ พ.ท. $\triangle XBC$

เพราะฉะนั้น พ.ท. $\square ABXY =$ พ.ท. $\square BFEI$

9. ตอบ 3.

แนวคิด



เพราะว่า $\square ABGF$ มี $\angle AFG = \angle ABG = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle F\hat{A}G + \angle B\hat{G}F = 180^\circ$

เพราะว่า $\angle H\hat{G}J + \angle B\hat{G}F = 180^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle F\hat{A}G = \angle H\hat{G}J$ _____ (1)

เพราะว่า $\square DEFJ$ มี $\angle EFJ = \angle JDE = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle F\hat{E}D + \angle F\hat{J}D = 180^\circ$

เพราะว่า $\angle G\hat{J}H + \angle F\hat{J}D = 180^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle F\hat{E}D = \angle G\hat{J}H$ _____ (2)

เพราะว่า $\square BCDH$ มี $\angle HBC = \angle CDH = 90^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle B\hat{C}D + \angle B\hat{H}D = 180^\circ$

เพราะว่า $\angle B\hat{H}D + \angle J\hat{H}G = 180^\circ$

เพราะฉะนั้น $\angle B\hat{C}D = \angle J\hat{H}G$ _____ (3)

จาก (1), (2) และ (3)

สรุป $\triangle ACE$ และ $\triangle GJH$

$$\begin{aligned} \text{มี } \quad \angle \hat{A}C &= \angle \hat{H}GJ \\ \angle \hat{A}E\hat{C} &= \angle \hat{G}J\hat{H} \\ \angle \hat{A}C\hat{E} &= \angle \hat{J}\hat{H}\hat{G} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\triangle ACE, \triangle GJH$ คล้ายกัน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \quad \frac{AC}{HG} &= \frac{CE}{HJ} = \frac{EA}{GJ} \\ \frac{20}{5} &= \frac{15}{HJ} = \frac{10}{GJ} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$HJ = 15 \left(\frac{5}{20} \right) = 3.75$$

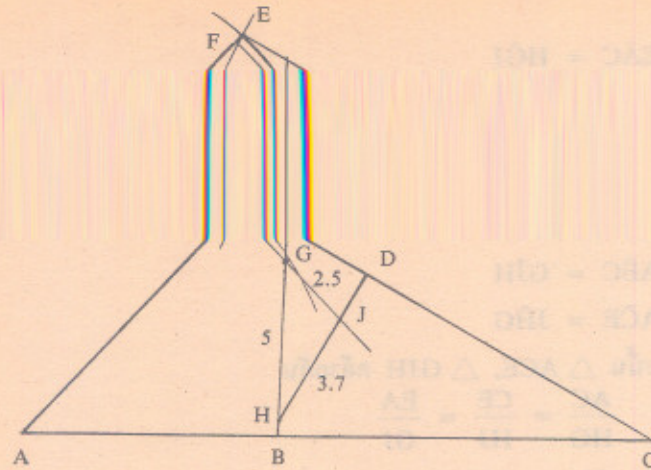
$$GJ = 10 \left(\frac{5}{20} \right) = 2.5$$

$$HJ + GJ = 6.25$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามโจทย์กำหนดตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้น AC ยาว 20 เซนติเมตร
2. กางวงเวียนรัศมี 10 และ 15 จุดศูนย์กลางที่ A และ C ตัดกันที่ E
จะได้ $AE = 10$ และ $CE = 15$
3. เขียนจุด B บน AC และ $AB = 8$
4. ลากเส้นตั้งฉากกับ AC ที่จุด B
และให้ $BH = 1$
 $HG = 5$
5. จากจุด G ลาก $FG \perp AE$
6. จากจุด H ลาก $HD \perp EC$
และให้ตัดกับแนว FG ที่จุด J
ขณะนี้เราจะ ได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว



วัดระยะทาง $GJ = 2.5$

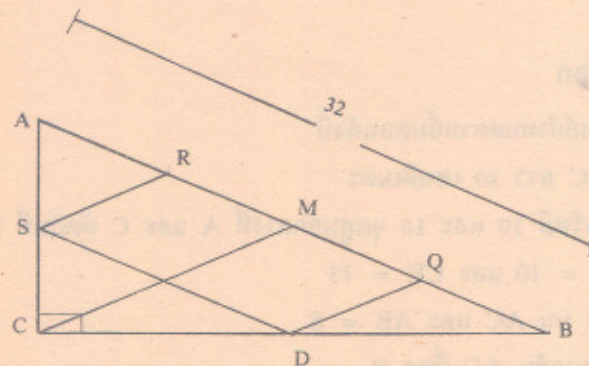
$HJ = 3.7$

$GJ + HJ = 6.2$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

10. ตอบ 3.

แนวคิด



ลากเส้น MC เพื่อจะได้ดูรูปให้ง่ายขึ้น

เพราะว่า $AR = RM = MQ = QB$ และ $AB = 32$

เพราะฉะนั้น $AR = RM = MQ = QB = \frac{32}{8} = 8$

เพราะว่า S, P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC และ CB

เพราะฉะนั้น $SP \parallel AB$

เพราะว่า S, R เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC และ AM

เพราะฉะนั้น $SR \parallel CM$ และ $SR = \frac{1}{2} CM$

เพราะว่า P, Q เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ MB

เพราะฉะนั้น $PQ \parallel CM$ และ $PQ = \frac{1}{2} CM$

ดังนั้น $SR \parallel PQ$ และ $SR = PQ$

เพราะฉะนั้น PQRS เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้นมีวงกลมผ่านจุด A, B, C และมีจุดศูนย์กลางที่จุด M

ดังนั้น $AM = BM = CM = 16$

$PQ = SR = \frac{1}{2} CM = 8$

สรุป □ PQRS มีเส้นรอบรูปยาว

$$= PQ + QR + RS + SP$$

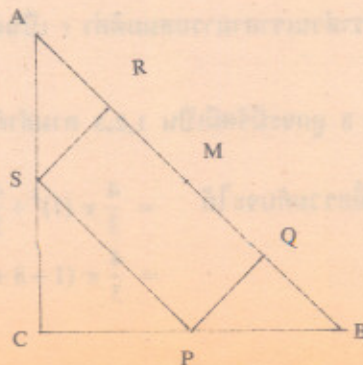
$$= 8 + 16 + 8 + 16$$

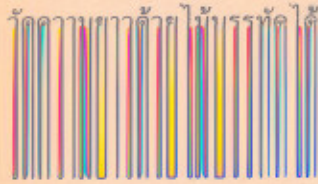
$$= 48$$

การตัดตัวเลือก

โจทย์ของนี้กำหนด ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ AB ยาว 32 เซนติเมตร
วาดรูปโดยใช้สเกล 0.5 เซนติเมตร/1 เซนติเมตร ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. ลาก AB ยาว 32 เซนติเมตร
2. ลากเส้นตรงทำมุม 45° กับ AB ทั้ง 2 ด้าน และให้ตัดกันที่จุด C
3. แบ่งครึ่งด้านโดยใช้ไม้บรรทัด





$$RQ = 16$$

$$SP = 16$$

$$RS = 8$$

$$PQ = 8$$

ดังนั้นความยาวเส้นรอบรูป PQRS เท่ากับ 48

จากเหตุผลด้วยรูปนี้เพียงรูปเดียวทำให้เราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

11. ตอบ 2.

แนวคิด ให้รัศมีของทรงกลมเป็น $r, 2r, 3r$ ตามลำดับ เมื่อนำดินน้ำมันมารวมกัน

$$\begin{aligned} \text{จะได้ปริมาตรรวมกัน} &= \frac{4}{3} \pi r^3 + \frac{4}{3} \pi (2r)^3 + \frac{4}{3} \pi (3r)^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (1 + 8 + 27) r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (36) r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi \left(\sqrt[3]{36} r \right)^3 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นรัศมีของทรงกลมใหม่ที่ได้เท่ากับ $\sqrt[3]{36} r$
ดังนั้นรัศมีของวงกลมใหม่ที่ได้จะใหญ่เป็น $\sqrt[3]{36}$ เท่าของทรงกลมลูกที่เล็กที่สุด

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

ปัญหาเกี่ยวกับอัตราส่วนเราสามารถสมมติค่า r เป็นตัวเลขได้เลย เช่น แทนค่า

$$r = 1$$

ดังนั้นทรงกลมทั้ง 3 ลูกจะมีรัศมีเป็น 1, 2, 3 ตามลำดับ

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรทรงกลมเมื่อรวมกันจะได้} &= \frac{4}{3} \pi (1)^3 + \frac{4}{3} \pi 2^3 + \frac{4}{3} \pi 3^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (1 + 8 + 27) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \pi (36)$$

$$= \frac{4}{3} \pi \left({}^3\sqrt{36} \right)^3$$

เพราะฉะนั้นรัศมีของทรงกลมใหม่ที่ได้ $= {}^3\sqrt{36}$ จึงคิดเป็น ${}^3\sqrt{36}$ เท่าของทรงกลมที่เล็กที่สุด ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2. จากการแทนค่า $r=1$ ถ้านักเรียนไม่เข้าใจความหมายของการจัดรูป $\left(\frac{4}{3} \pi 36\right)$ ให้เป็น $\frac{4}{3} \pi \left({}^3\sqrt{36}\right)^3$ เพื่อดูค่ารัศมีก็สามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่า

ตัวเลือก 1. ถ้ารัศมี $= {}^3\sqrt{6}$ จะได้ปริมาตรทรงกลมเท่ากับ $\frac{4}{3} \pi 6 \neq \frac{4}{3} \pi 36$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน

$$2. \frac{4}{3} \pi \left({}^3\sqrt{36}\right)^3 = \frac{4}{3} \pi 36 \text{ ใช้ได้}$$

$$3. \frac{4}{3} \pi \left(\sqrt{14}\right)^3 \neq \frac{4}{3} \pi 36$$

$$4. \frac{4}{3} \pi \left[\sqrt{7}\right]^3 \neq \frac{4}{3} \pi 36$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

12. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\sqrt{x-1} = x-1$$

$$x-1 = (x-1)^2$$

$$= x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

$$x = 1, 2$$

สรุปมีราก 2 ตัว และผลบวกของรากเท่ากับ 3

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่าพบว่า $x=1$ เป็นราก

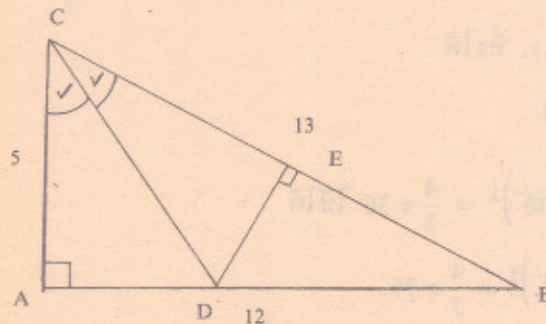
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $x=2$ เป็นรากด้วย

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

13. ตอบ 3.

แนวคิด



มุมแหลมที่ใหญ่ที่สุดใน $\triangle ABC$ คือมุม C

ให้ CD แบ่งครึ่งมุม C

ลาก $DE \perp BC$

เพราะว่า $\angle CAD = \angle DEC$

$\angle ACD = \angle DCE$

และ $\angle ADC = \angle CDE$ และ CD เป็นด้านร่วม

เพราะฉะนั้น $\triangle ACD, \triangle CDE$ เหมือนกันทุกประการ

ดังนั้น $|AD| = |DE|, |AC| = |CE|$

เพราะว่า $\angle ABC = \angle DBE$
 $\angle BED = \angle CAB = 90^\circ$
 และ $\angle EDB = \angle ACB$

เพราะฉะนั้น $\triangle BDE$ และ $\triangle ABC$ คล้ายกัน

ดังนั้น $\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|EB|} = \frac{|BC|}{|DB|}$

ให้ $|AD| = x$

ดังนั้น $|DE| = x$ และ $|BD| = 12 - x$

เพราะฉะนั้น $\frac{5}{x} = \frac{13}{12 - x}$

$$60 - 5x = 13x$$

$$60 = 18x$$

$$x = \frac{60}{18} = \frac{10}{3}$$

เพราะว่า $|CD|^2 = |AC|^2 + |AD|^2$
 $= 5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2$
 $= 25 + \frac{100}{9}$
 $= \frac{325}{9}$

$$|CD| = \frac{5}{3}\sqrt{13}$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้แล้วทำการวัดระยะทางของด้าน AD

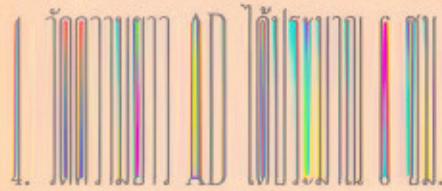
1. ลาก AB ยาว 12 ซม.
2. กางวงเวียนรัศมี 5 และ 13 ตามลำดับ

จุดศูนย์กลางที่ A และ B

ให้ตัดกันที่จุด C

จะได้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

3. แบ่งครึ่งมุม $\angle ACB$

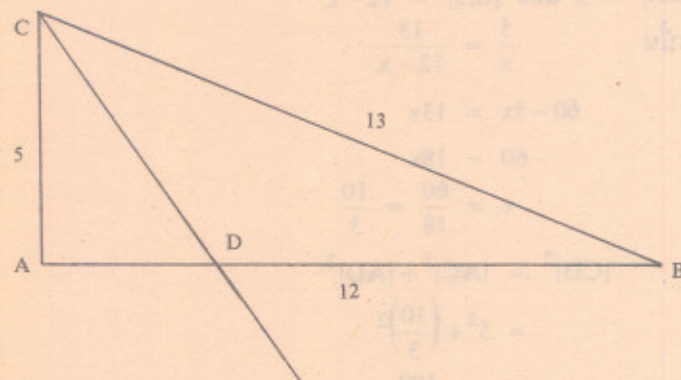


เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$$\text{เพราะว่า } \frac{5}{3}\sqrt{13} = \frac{5}{3}(3.5) = 5.8$$

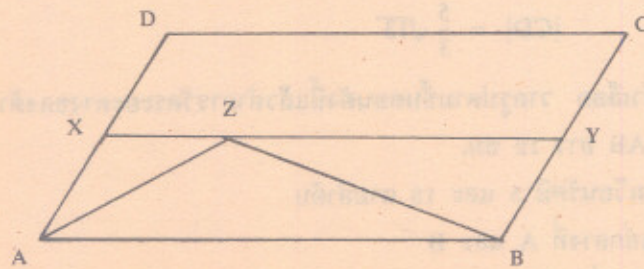
$$\frac{5}{3}\sqrt{15} = \frac{5}{3}(3.9) = 6.5$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. ตีกว่า



14. ตอบ 3.

แนวคิด



$$\text{พ.ท. } \triangle ABZ = \frac{1}{2} \text{ พ.ท. } \square ABYX$$

$$\text{พ.ท. } \square ABYX = \frac{1}{2} \text{ พ.ท. } \square ABCD$$

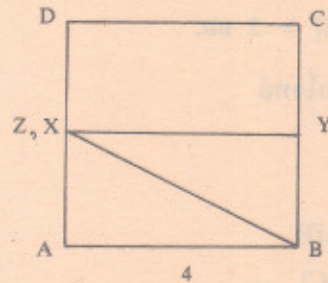
ดังนั้น พ.ท. $\triangle ABZ = \frac{1}{4}$ พ.ท. $\square ABCD$

สรุป $a = \frac{b}{4}$

นั่นคือ $b = 4a$

การตัดตัวเลือก

การทำโจทย์ข้อนี้ขอให้มั่นใจได้เลยว่าเราสามารถกำหนดให้ $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 4 นิ้วได้ และเลือกจุด Z เป็นจุด X ได้



ขณะนี้เราได้สิ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

พ.ท. $\square ABCD = 4^2 = 16$, $b = 16$

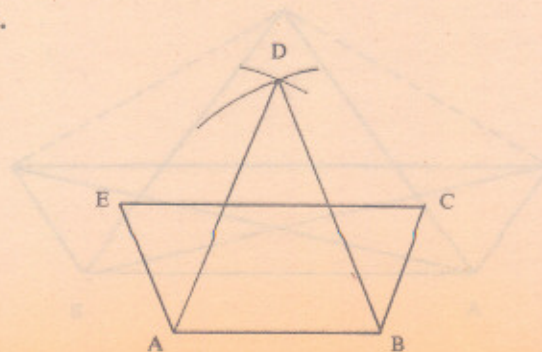
พ.ท. $\triangle ABZ = 4$, $a = 4$

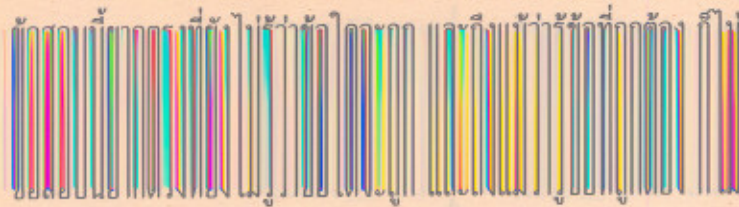
ดังนั้น $b = 4a$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

15. ตอบ 4.

แนวคิด





รู้ว่าจะแสดงข้อพิสูจน์ได้อย่างไร ดังนั้นขอแนะนำวิธีตัดตัวเลือกก่อน
 เพราะโจทย์กำหนดในลักษณะของเงื่อนไข ดังนั้นเราวาดรูปให้สอดคล้อง
 กับโจทย์แล้ววัดระยะทางก็จะตัดตัวเลือกได้

1. วาดรูป ABD เป็น \triangle หน้าจั่ว
 ให้ $AB = 3$ ซม.
 $|AD| = |BD| = 4$ ซม.
2. ลาก $BC \parallel AD$ และ $|BC| = 2$ ซม.
 ลาก $AE \parallel BD$ และ $|AE| = 2$ ซม.

ขณะนี้เราได้รูปที่สอดคล้องกับโจทย์

ทำการวัดระยะทางได้เลย

$$|AD| = 4$$

$$|AC| = 4.2 \neq |AD|$$

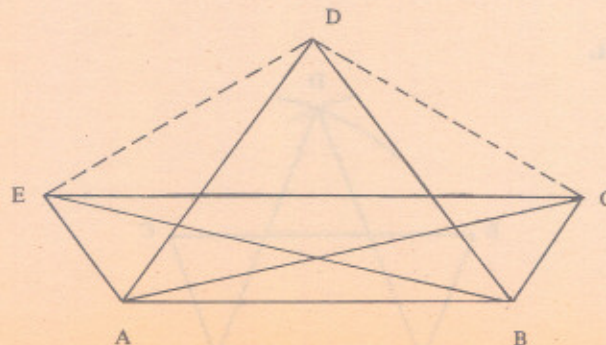
$$|EC| = 4.4 \neq |AC|$$

$$|BE| = 4.2 \neq |BD|$$

$$|BD| = 4$$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

การแสดงข้อพิสูจน์ว่า $BE = AC$



เพราะว่า $\widehat{D\hat{A}B} = \widehat{D\hat{B}A}$

เพราะฉะนั้น $\widehat{E\hat{A}B} = 180^\circ - \widehat{D\hat{B}A} = 180^\circ - \widehat{D\hat{A}B} = \widehat{C\hat{B}A}$

และ $AD = BD$

สรุป $\triangle EAB$ และ $\triangle ABC$ มี (1) $\widehat{E\hat{A}B} = \widehat{A\hat{B}C}$

(2) $AE = BC$

(3) AB ด้านร่วม

เพราะฉะนั้น $\triangle EAB, \triangle ABC$ เหมือนกันทุกประการ

สรุป $AC = BE$

ตอนที่ 2

1. ตอบ 26 เส้น

แนวคิด ทำการหา ห.ร.ม. ของตัวเลข 90, 120, 270 และ 300

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

ห.ร.ม. ของ 90, 120, 270, 300 คือ $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้นจำนวนเซกที่ได} &= \frac{90}{30} + \frac{120}{30} + \frac{270}{30} + \frac{300}{30} = 3 + 4 + 9 + 10 \\ &= 26 \text{ เส้น} \end{aligned}$$

2. ตอบ 0.3

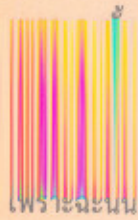
แนวคิด จำนวนตัวเลขทั้งหมด = 50 จำนวนเฉพาะระหว่าง 1-50 มี 2,3,5,7,

11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47 รวมเป็น 15 ตัว

$$\text{เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้เลขเป็นจำนวนเฉพาะ} = \frac{15}{50} = 0.3$$

3. ตอบ ความยาวถังน้ำ 25 เมตร

แนวคิด ปริมาตรน้ำ 1000 ลูกบาศก์เมตร คือปริมาตรของถังที่มีความกว้าง 20 เมตร ความสูง 2 เมตร และความยาวเท่ากับ L เมตร



เพราะฉะนั้น

$$(20) \times (2) \times L = 1000$$

$$L = \frac{1000}{40}$$

$$L = 25$$

4. ตอบ ได้กำไร 8%

แนวคิด สมมติราคาต้นทุนของรถยนต์เท่ากับ x บาทราคารวมกำไร 20% ของรถยนต์เท่ากับ $(1.2)x$ บาทซื้อเงินสดลดราคาให้ 10% ดังนั้นขายได้เงินสด = $(0.9)(1.2)x$ บาทเพราะฉะนั้นได้กำไร = $(0.9)(1.2)x - x$ บาท

$$\text{คิดเป็นเปอร์เซ็นต์} = \left(\frac{(0.9)(1.2)x - x}{x} \right) 100 = \left((0.9)(1.2) - 1 \right) 100 = 8\%$$

เทคนิคการคิดโจทย์เกี่ยวกับเปอร์เซ็นต์ คือสมมติต้นทุนเป็น 100 บาท

20% ของ 100 เท่ากับ 20 ราคาป้าย 120

10% ของ 120 เท่ากับ 12 เงินสดที่ได้รับเท่ากับ $120 - 12 = 108$ กำไรแท้จริง = $108 - 100 = 8$ กำไรคิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับ 8%

5. ตอบ ชาย : หญิง = 9:7

แนวคิด การหาความสามารถของชาย 1 คนในเวลา 1 วัน

ในเวลา 7 วัน คนงานชาย 10 คนทำงานได้ $\frac{1}{(7)(10)}$ ของทั้งหมดในเวลา 1 วัน คนงานชาย 1 คนทำงานได้ $\frac{1}{(7)(10)}$ ของทั้งหมด

การหาความสามารถของหญิง 1 คนในเวลา 1 วัน

ในเวลา 5 วัน คนงานหญิง 18 คนทำงานได้ $\frac{1}{(5)(18)}$ ของทั้งหมดในเวลา 1 วัน คนงานหญิง 1 คนทำงานได้ $\frac{1}{(5)(18)}$ ของทั้งหมด

สรุป งานที่ชายทำได้ : งานที่หญิงทำได้

$$= \frac{1}{(7)(10)} : \frac{1}{(5)(18)} = \frac{1}{70} : \frac{1}{90} = 9:7$$

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 3

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. กำหนด $a \neq b$, $b \neq 0$ และ $d \neq 0$

ถ้า $ab(c^2 + d^2) = b^2c^2 + a^2d^2$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

2. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$

3. $\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2}$

4. $\frac{a^2}{b^2} = \frac{c}{d}$

2. ค่าของ $\frac{x^2 + 4x - 221}{x^2 - 11x - 26}$ เท่ากับค่าในตัวเลือกใด

1. $\frac{x+2}{x+17}$

2. $\frac{x+17}{x+2}$

3. $\frac{x-13}{x+2}$

4. $\frac{x+2}{x-13}$

3. สามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้าน $a = n^2 - 1$, $b = 2n$ และ $c = n^2 + 1$ ตามลำดับ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

1. สามเหลี่ยมมุมแหลม

2. สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

2. สามเหลี่ยมมุมฉาก

4. สามเหลี่ยมมุมป้าน

4. ผลลัพธ์ของ $\frac{x^4 - y^4}{x^2 - xy} + \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x} \times \frac{3x^3 + 24}{12x - 6x^2 + 3x^3}$

เท่ากับเท่าใด

1. $1 + \frac{3}{x}$

2. $\frac{3}{x}$

3. $\frac{2}{x}$

4. $1 + \frac{2}{x}$

5. คำตอบของอสมการ $x - 1 < \sqrt{x-1}$ สอดคล้องกับข้อใด

1. $0 < x < 3$

2. $1 < x < 2$

3. $0 < x < 1.5$

4. $1 < x < 3$

6. คำตอบของสมการ

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{1 + \frac{x}{5}}} = \frac{48}{39}$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1

2. 2

3. 3

4. 4

7. x, y, z เป็นจำนวนคี่สามตัวเรียงกันโดยที่ $x < y < z$ และ $x + y = 36$
ผลรวมของ $x + y + z$ เท่ากับเท่าใด

1. 77

2. 67

3. 57

4. 47

8. ถ้า $x \neq y$ และ $9x^2 + 6xy + y^2 = 0$ แล้ว $\frac{x+y}{x-y}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1

2. -1

3. $\frac{1}{2}$ 4. $-\frac{1}{2}$ 9. กำหนดให้พหุนาม $p(x)$ เป็นเศษเหลือจากการหาร

$$x^4 - 2x^2 - 5x - 7 \text{ ด้วย } x^2 - 4$$

ถ้า $p(x)$ แปรผันตรงกับ t^2 และ $x = 5$ เมื่อ $t = 2$ แล้วค่าของ x ในพจน์ของตัวแปร t คือข้อใด

1. $5x = 1 + 6t^2$

2. $10x = 2 - 13t^2$

3. $12x = 8 - 13t^2$

4. $2x = -2 + 3t^2$

10. ถ้าผลบวกของรากสมการ $x^2 + kx - k^2 = 0$ มีค่าเท่ากับ $2k - 6$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของผลคูณของรากสมการนี้เท่ากับเท่าใด

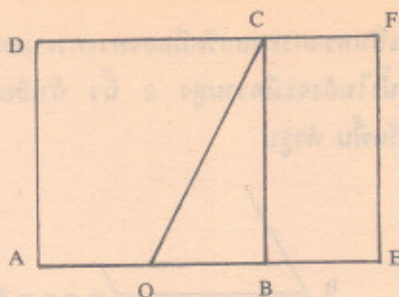
1. 4

2. 9

3. 16

4. 25

11.



ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งแต่ละด้านยาว a หน่วย O เป็นจุดกึ่งกลาง AB
 $OC = OE$ และ BE ยาว b หน่วย อัตราส่วน $\frac{b}{a}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$

2. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

4. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

12. ถ้า a แปรผันตรงกับ b^2 และ a แปรผันตรงกับ $\frac{1}{c^3}$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นจริง

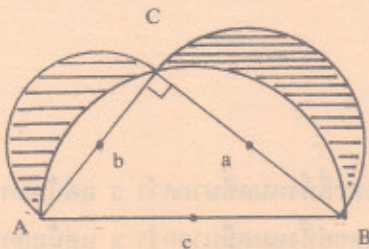
1. $a \propto b^2 c^2$

2. $a \propto \frac{b}{c}$

3. $ac^3 \propto b$

4. $a^2 c^3 \propto b^2$

13. จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ที่มีความยาวด้านเป็น BC, AC, AB เท่ากับ a, b, c ตามลำดับ พื้นที่อาณาบริเวณส่วนที่แรเงาเท่ากับเท่าใด



1. ab

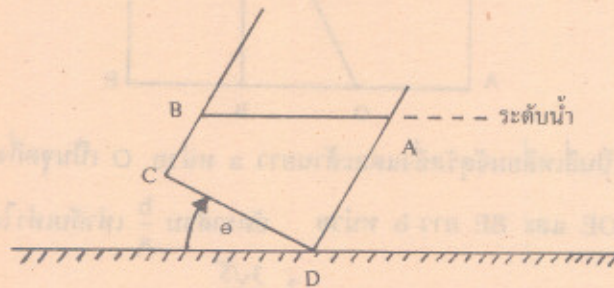
2. $\frac{1}{2} ab$

3. $\frac{1}{2} (\pi c^2 - ab)$

4. $\frac{1}{2} (ab^2 - \pi c^2)$

14. ตั้งใส่น้ำมีรูปทรงเป็นทรงกระบอกรัศมีของทรงกระบอกเท่ากับ 3 นิ้ว เมื่อ

วางในแนวระดับน้ำในถังจะมีความสูง 2 นิ้ว ถ้าเอียงถังน้ำโดยให้ก้นถังทำมุม θ องศากับพื้น ดังรูป



ความยาว BC เท่ากับเท่าใด

1. $2 + 3\sin \theta$ 2. $2 - 3 \tan \theta$
 3. $3 \tan \theta$ 4. $4 - 6 \tan \theta$

15. กำหนดให้ $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$ เมื่อ $x = \frac{4}{3}$ แล้ว y มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\pm \frac{3}{5}$ 2. $\frac{3}{5}$
 3. $\pm \frac{4}{5}$ 4. $\frac{4}{5}$

ตอนที่ 2

1. x เป็นผลบวกของเลขคู่ทั้งหมดที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า 102
 y เป็นผลบวกของเลขคู่ทั้งหมดที่มากกว่า 2 แต่น้อยกว่า 103
 ค่าของ $x - y$ เท่ากับเท่าใด
2. ผลบวกของรากของสมการ $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ทุกตัวเท่ากับเท่าใด

3. สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดจุด A $(\frac{1}{2}, 0)$ และ B, C เป็นจุดตัด

ของกราฟของสมการ $y = 3 + 2x - x^2$ กับ $y = 1 + 4x + 3x^2$
พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

4. ถ้า $x^2 = 2x + \frac{7}{2}$ แล้ว $x^3 = Ax + B$

ค่าของ $A + B$ เท่ากับเท่าใด

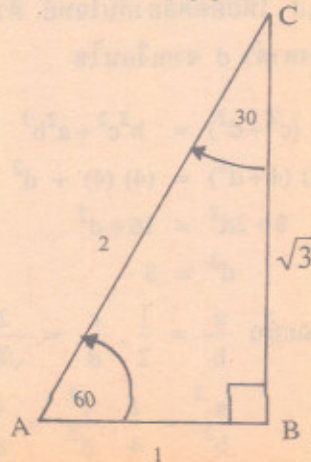
5. อัตราส่วนของระยะทางจาก A ไป B กับระยะทางจาก A ไป C เท่ากับ
5:11 ถ้าวระยะทางระหว่าง A กับ C เท่ากับ 176 กิโลเมตร แล้วระยะทาง
ระหว่าง A กับ B เท่ากับเท่าใด

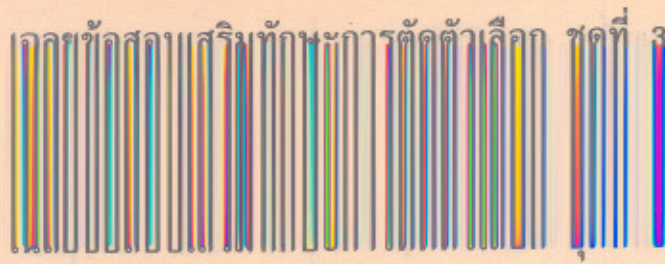
อัตราส่วนตรีโกณมิติที่สำคัญ ใช้ตั้งแต่ ม.ต้น จนถึงปริญญาเอก

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \sqrt{3}$$





ตอนที่ 1

1. ตอบ 3.

แนวคิด

$$ab(c^2 + d^2) = b^2c^2 + a^2d^2$$

$$abc^2 + abd^2 = b^2c^2 + a^2d^2$$

$$abc^2 + abd^2 - b^2c^2 - a^2d^2 = 0$$

$$(abc^2 - b^2c^2) - (a^2d^2 - abd^2) = 0$$

$$bc^2(a - b) - ad^2(a - b) = 0$$

$$(a - b)(bc^2 - ad^2) = 0$$

เพราะว่า $a \neq b$ เพราะฉะนั้น $a - b \neq 0$

ดังนั้น $bc^2 - ad^2 = 0$

$$bc^2 = ad^2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2}$$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a, b, c, d ดังนั้นเลือกค่า a, b, c, d ให้สอดคล้องกับโจทย์ ตัวอย่างเช่น เลือก $a=1, b=2$ และ $c=2$ แล้วจึงหาค่า d จากเงื่อนไข

$$ab(c^2 + d^2) = b^2c^2 + a^2d^2$$

$$(1)(2)(4 + d^2) = (4)(4) + d^2$$

$$8 + 2d^2 = 16 + d^2$$

$$d^2 = 8$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}, \frac{c}{d} = \frac{2}{\sqrt{8}}$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{4}, \frac{c^2}{d^2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$, $\frac{a^2}{b^2} \neq \frac{c^2}{d^2}$ และ $\frac{a^2}{b^2} \neq \frac{c}{d}$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

2. ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

ดังนั้นการแทนค่าตัดตัวเลือกที่ดีที่สุด เลือกค่า x ที่คิดเลขได้ง่าย ๆ เช่น $x=0$

$$\frac{x^2+4x-221}{x^2-11x-26} = \frac{-221}{-26} = \frac{17}{2}$$

แทนค่า $x=0$ ในทุกตัวเลือก

1. $\frac{2}{17}$

2. $\frac{17}{2}$

3. $\frac{-13}{2}$

4. $\frac{-2}{13}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\frac{x^2+4x-221}{x^2-11x-26} = \frac{(x-13)(x+17)}{(x-13)(x+2)} = \frac{x+17}{x+2}$

3. ตอบ 3.

แนวคิด $a^2 = (n^2-1)^2 = n^4-2n^2+1$

$$b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

$$c^2 = (n^2+1)^2 = n^4+2n^2+1$$

เพราะว่า $a^2+b^2 = (n^4-2n^2+1) + 4n^2 = n^4+2n^2+1 = c^2$

เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

การตัดตัวเลือก คำถามเข้าลักษณะโจทย์เป็นสูตร

ดังนั้นแทนค่า $n=2$ จะได้ $a=3$, $b=4$ และ $c=5$

เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากแน่นอน



4. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้แทนค่าตัดตัวเลือกดีกว่า แทนค่า $x=1, y=0$

$$\frac{x^4 - y^4}{x^2 - xy} \div \frac{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3}{x} \times \frac{3x^3 + 24}{12x - 6x^2 + 3x^3}$$

$$= \frac{1-0}{1-0} \div \frac{1+0+0+0}{1} \times \frac{3+24}{12-6+3} = 1 \div 1 \times \frac{27}{9} = 3$$

แทนค่า $x=1$ ในตัวเลือกได้ค่าแต่ละตัวเลือกดังนี้

- | | |
|------|------|
| 1. 4 | 2. 3 |
| 3. 2 | 4. 3 |

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x=-1, y=0$ จะได้ค่าของโจทย์เท่ากับ

$$\frac{1-0}{1-0} \div \frac{-1+0+0+0}{-1} \times \frac{-3+24}{-12-6-3} = 1 \div 1 \times \frac{21}{-21} = -1$$

แทนค่า $x=-1$ ในตัวเลือก 2. และ 4.

$$2. \frac{3}{-1} = -3$$

$$4. 1 + \frac{2}{-1} = -1$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

5. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าในอสมการของโจทย์มีพจน์ $\sqrt{x-1}$ เพราะฉะนั้น $x-1 \geq 0$

เพราะว่า $x-1 < \sqrt{x-1}$ เพราะฉะนั้น $x-1 \neq 0$

ดังนั้น $0 < x-1 < \sqrt{x-1}$ ยกกำลังสองทั้งสองข้างอสมการไม่เปลี่ยน

$$(x-1)^2 < x-1$$

$$x^2 - 2x + 1 < x - 1$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

$$(x-2)(x-1) < 0$$

$$1 < x < 2$$

หรือพิจารณาในรูปแบบ $0 < x-1 < \sqrt{x-1}$

เอา $\sqrt{x-1}$ ทหารตลอด $0 < \sqrt{x-1} < 1$

ยกกำลัง 2 ตลอด $0 < x-1 < 1$

$$1 < x < 2$$

การตัดตัวเลือก พิจารณาค่า x จากเงื่อนไขของโจทย์ $x-1 < \sqrt{x-1}$

เพราะว่า $2-1 \nless \sqrt{2-1}$ เพราะฉะนั้น $x=2$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เลือกค่า x ที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 3. ได้เช่น $x=1$

$$1-1 \nless \sqrt{1-1}$$

เพราะฉะนั้น $x=1$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เทคนิคการหาช่วงของ x

ถ้า $a < b$ และ $(x-a)(x-b) < 0$ แล้ว $a < x < b$

ตัวอย่างเช่น $x^2 - 4x + 3 < 0$

$$(x-3)(x-1) < 0$$

$$1 < x < 3$$

$$x^2 + 5x - 6 < 0$$

$$(x+6)(x-1) < 0$$

$$(x - (-6))(x-1) < 0$$

$$-6 < x < 1$$

6. ตอบ 4.

แนวคิด $1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{1 + \frac{x}{5}}} = \frac{48}{39} = 1 + \frac{9}{39} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{39}{9}\right)}$

เพราะฉะนั้น $1 + \frac{6}{1 + \frac{x}{5}} = \frac{39}{9} = 1 + \frac{30}{9}$

$$\frac{6}{1 + \frac{x}{5}} = \frac{30}{9}$$

$$54 = 30 + 6x$$

$$6x = 24$$

$$x = 4$$

การตัดตัวเลือก นำคำตอบจากตัวเลือกแทนค่าในโจทย์ตัวอย่างเช่น

$$x=1; \quad 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{6}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{6}{\left(\frac{6}{5}\right)} = 5$$

$$1 + \frac{6}{1 + \frac{1}{5}} = 1 + 5 = 6$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{5}} = \frac{1}{1 + \frac{6}{5}}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{5}} = 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \neq \frac{48}{39} \quad \text{ดังนั้นตัวเลือก 1. ผิด}$$

ในการทำงานเดียวกันตัวเลือก 2. และ 3. ก็ผิดด้วย

7. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ $x = 2n+1$ เพราะฉะนั้น $y = 2n+3$ และ $z = 2n+5$

เพราะว่า $x+y = (2n+1) + (2n+3)$

$$36 = 4n+4$$

$$n = 8$$

เพราะฉะนั้น $x+y+z = (2n+1) + (2n+3) + (2n+5) = 6n+9$

$$= 48+9 = 57$$

การตัดตัวเลือกแบบที่ 1 เพราะว่ามี $x < y < z$ และ $x+y = 36$

เพราะฉะนั้นเรานำค่าในตัวเลือกมาช่วยหาค่า x, y, z ได้

ตัวเลือก 1. $x+y+z = 47$

เพราะว่า $x+y = 36$ เพราะฉะนั้น $z = 47-36 = 11$

แต่ $x < y < z = 11$ เพราะฉะนั้น $y = 9$ และ $x = 7$

จึงทำให้ $x+y \neq 36$

สรุป $x+y+z = 47$ ไม่ได้

ในทำนองเดียวกัน $x+y+z \neq 67$ และ $\neq 77$

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 เพราะว่ามี $x+y = 36$ และ $x < y$

เพราะฉะนั้น $x = 17, y = 19$ เพราะว่ามี $y < z$ เพราะฉะนั้น $z = 21$

สรุป $x+y+z = 17+19+21 = 57$

8. ตอบ 4.

แนวคิด $9x^2 + 6xy + y^2 = 0$

$$(3x+y)(3x+y) = 0$$

$$3x+y = 0$$

$$y = -3x$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{x-3x}{x-(-3x)} = \frac{-2x}{4x} = \frac{-1}{2}$$

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x, y
 ดังนั้นแทนค่า y แล้ว หาค่า x ก็ทำให้หาค่า $\frac{x+y}{x-y}$ ได้

$$\text{ให้ } x=1; 9+6y+y^2 = 0$$

$$(3+y)^2 = 0$$

$$y = -3$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{x+y}{x-y} = \frac{1-3}{1-(-3)} = \frac{-1}{2}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

9. ตอบ 1.

แนวคิด การหา $p(x)$

$$\begin{array}{r} x^2+2 \\ x^2-4 \overline{) x^4-2x^2-5x-7} \\ \underline{x^4-4x^2} \\ 2x^2-5x-7 \\ \underline{2x^2} \\ -5x+1 \end{array}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } p(x) = -5x+1$$

เพราะว่า $p(x) \propto t^2$ เพราะฉะนั้นต้องมีค่าคงตัว k ที่ทำให้ $p(x) = kt^2$

$$\text{นั่นคือ } -5x+1 = kt^2$$

$$\text{เพราะว่า } x = 5 \text{ และ } t = 2 \text{ เพราะฉะนั้น } -25+1 = k(4)$$

$$k = -6$$

$$\text{ดังนั้น } -5x+1 = -6t^2$$

$$5x = 1+6t^2$$

การตัดตัวเลือก

จากการที่โจทย์บอกว่า $x = 5$ เมื่อ $t = 2$ เราสามารถนำค่าที่ให้นี้ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $5(5) = 25 = 1+6(2^2)$
2. $10(5) = 50 \neq -50 = 2-13(2^2)$
3. $12(5) = 60 \neq -44 = 8-13(2^2)$
4. $2(5) = 10 = -2+3(2^2)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

10. ตอบ 2.

แนวคิด

กฎเกณฑ์นี้ขอให้นักเรียนจำไว้ใช้ได้เลยเพราะว่าข้อสอบชอบใช้เหตุผลแบบนี้เกือบทุกครั้งของการสอบ

$$a, b \text{ เป็นรากของสมการ} \quad (x-a)(x-b) = 0$$

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

นั่นคือ $a+b = -(\text{สัมประสิทธิ์ของ } x)$

$$ab = \text{ค่าคงตัว}$$

จากโจทย์บอกว่า $2k-6$ เป็นผลบวกของรากสมการ $x^2 - kx - k^2 = 0$

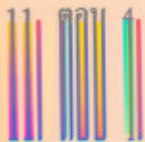
เพราะฉะนั้น $2k-6 = -k$

$$3k = 6$$

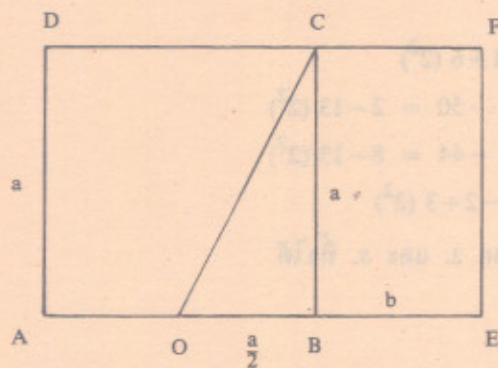
$$k = 2$$

ผลคูณของรากสมการ $= -k^2 = -4$

สรุปค่าสัมบูรณ์ของผลคูณของรากสมการ $= 4$



แนวคิด



$\triangle OBC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

$$= \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$= \frac{5a^2}{4}$$

$$OC = \frac{\sqrt{5}a}{2}$$

$$b = BE = OE - OB$$

$$= OC - OB$$

$$= \frac{\sqrt{5}a}{2} - \frac{a}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}a - a}{2} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)a$$

เพราะฉะนั้น $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก

แบบที่ 1 ใช้การประมาณค่าจากรูปพบว่า $b < a$ แน่แน่นอน

เพราะฉะนั้น $\frac{b}{a} < 1$

ประมาณค่าแต่ละตัวเลือก

$$1. \frac{2\sqrt{5}}{3} = \frac{2(2.24)}{3} > 1$$

$$2. \frac{3\sqrt{5}}{2} = \frac{3(2.24)}{2} > 1$$

$$3. \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{2.24+1}{2} > 1$$

$$4. \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2.24-1}{2} < 1$$

สรุปขณะนี้เราสามารถตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

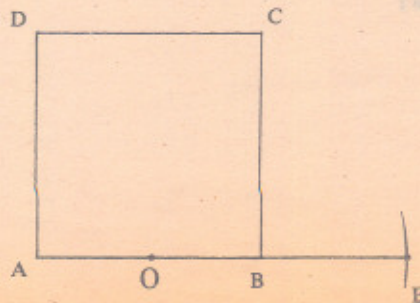
แบบที่ 2

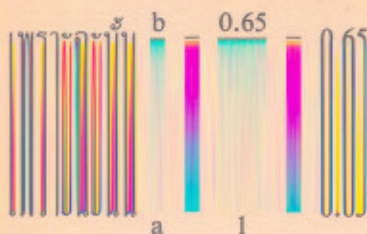
เนื่องจากโจทย์บอกว่า ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ a หน่วย

ดังนั้นเราเลือก $a=1$ แล้ววาดรูปเพื่อวัดระยะทางหาค่า b ตามขั้นตอนดังนี้

- เขียน □ ABCD ยาวด้านละ 1 หน่วย
- ให้ O เป็นจุดกึ่งกลาง AB
- การวงเวียนรัศมี OC ตัดแนวเส้นตรง AB ที่จุด E
- วัดความยาว BE ได้ $b=0.65$

(ขอแนะนำให้ใช้ 5 เซนติเมตร/หน่วย)





ในทำนองเดียวกับแบบที่ 1 พบว่า $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$

เพียงตัวเลือกเดียวเท่านั้น

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

12. ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือกของคำถามเกี่ยวกับการแปรผันทำได้ง่ายมากดังนี้

เพราะว่า $a \propto b^2$ และ $a \propto \frac{1}{c^3}$

ดังนั้นการที่ $a = b^2$ และ $a = \frac{1}{c^3}$ ถือว่าเป็นการแปรผัน

เพราะฉะนั้น $a^2 = \frac{b^2}{c^3}$

$$a^2 c^3 = b^2$$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง $a \propto b^2$ และ $a \propto \frac{1}{c^3}$

เพราะฉะนั้นต้องมีค่าคงตัว m, n ที่ทำให้

$$a = mb^2 \text{ และ } a = \frac{n}{c^3}$$

$$a^2 = \frac{mnb^2}{c^3}$$

$$a^2 c^3 = nmb^2$$

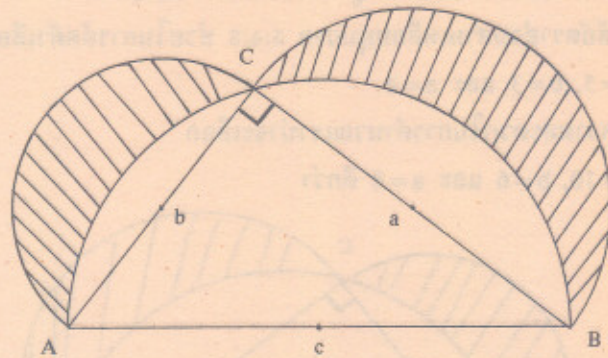
เพราะว่า mn เป็นค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $a^2 c^3 \propto b^2$



13. ตอบ 2.

แนวคิด



$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} ab$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AB = \pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \frac{\pi c^2}{4}$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AC = \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{\pi b^2}{4}$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } BC = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}$$

พ.ท. ในส่วนที่แรเงาทั้งสองแห่งรวมกัน

$$= \text{พ.ท. } \triangle ABC + \text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AC + \text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } BC - \text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AB$$

$$= \frac{1}{2} ab + \frac{\pi b^2}{4} + \frac{\pi a^2}{4} - \frac{\pi c^2}{4}$$

$$= \frac{1}{2} ab + \frac{\pi}{4} (b^2 + a^2 - c^2)$$

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

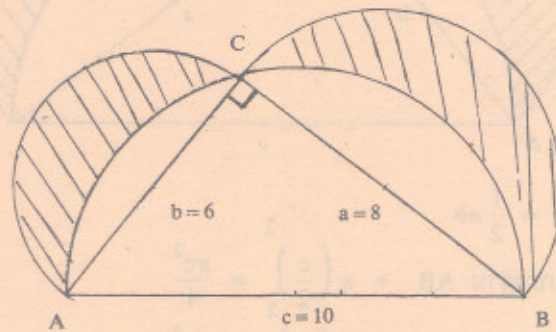
$$\text{เพราะฉะนั้น } a^2 + b^2 = c^2$$

$$\text{ดังนั้น } a^2 + b^2 - c^2 = 0$$

$$\text{สรุป พ.ท. แรเงา} = \frac{1}{2} ab$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าใจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a, b, c
 ดังนั้นใช้อัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉาก 5:4:3 ช่วยในการตัดตัวเลือกได้
 เช่น $c=5, b=3$ และ $a=4$
 แต่เพื่อความสะดวกในการคำนวณเราน่าจะเลือก
 $c=10, b=6$ และ $a=8$ ดีกว่า



$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AB = \frac{1}{2} \pi (5)^2 = 12.5 \pi$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AC = \frac{1}{2} \pi (3)^2 = 4.5 \pi$$

$$\text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } BC = \frac{1}{2} \pi (4)^2 = 8 \pi$$

พ.ท. แรเงาทั้งสองแห่งรวมกัน

$$\begin{aligned} &= \text{พ.ท. } \triangle ABC + \text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AC + \text{พ.ท. ครึ่งวงกลม} \\ &\quad \text{บนฐาน } BC - \text{พ.ท. ครึ่งวงกลมบนฐาน } AB \\ &= 24 + 4.5\pi + 8\pi - 12.5\pi \\ &= 24 \end{aligned}$$

แทนค่า $a=8, b=6, c=10$ ในตัวเลือก

1. $ab = 8 \cdot 6 = 48 \neq 24$

2. $\frac{1}{2} ab = 24$

$$3. \frac{1}{2} (\pi 10^2 - 48) \neq 24$$

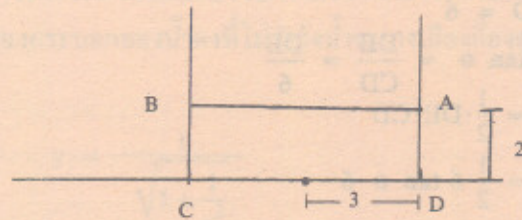
$$4. \frac{1}{2} (8.36 - \pi 10^2) \neq 24$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทั้งได้

14. ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์ข้อนี้เข้าลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ θ

ดังนั้นลอง $\theta = 0^\circ$ องศา



เพราะว่าระดับน้ำสูง 2 นิ้ว

เพราะฉะนั้น $BC = 2$ นิ้ว

แทนค่า $\theta = 0^\circ$ ในตัวเลือก

$$1. 2 + 3 \sin 0^\circ = 2$$

$$2. 2 - 3 \tan 0^\circ = 2$$

$$3. 3 \tan 0^\circ = 0$$

$$4. 4 - 6 \tan 0^\circ = 4$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทั้งได้

จากลักษณะการเอียงของถังน้ำจะได้ว่า BC ต้องน้อยกว่า 2 เสมอ

แต่ $2 + 3 \sin \theta > 2$ เมื่อ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทั้งได้

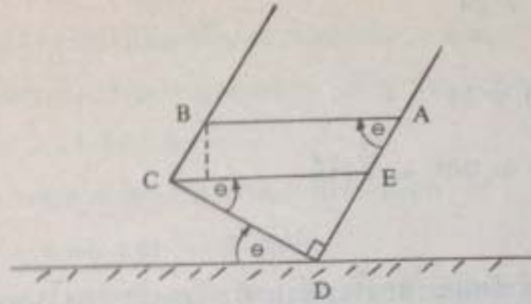
การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\sqrt{a} \geq 0$ เสมอ

เพราะฉะนั้น $y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทั้งได้

วิธีจริง



เพราะว่ารัศมีทรงกระบอก = 3

เพราะฉะนั้น $CD = 6$

ใน $\triangle CED$; $\tan \theta = \frac{DE}{CD} = \frac{DE}{6}$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle CED &= \frac{1}{2} \cdot DE \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 6 \tan \theta \cdot 6 \\ &= 18 \tan \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \square \text{ ด้านขนาน } ABCE &= BC \times \text{สูง} \\ &= BC \times CD \\ &= 6 BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู } ABCD &= \text{พ.ท. } \triangle CED + \text{พ.ท. } \square ABCE \\ &= 18 \tan \theta + 6 BC \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะว่าพื้นที่ } \square ABCD &= \text{ความกว้างของถัง} \times \text{ความสูงระดับน้ำ} \\ &= 6 \times 2 \\ &= 12 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$18 \tan \theta + 6 BC = 12$$

$$6BC = 12 - 18 \tan \theta$$

หมายเหตุ การทำโจทย์ในข้อนี้ต้องใช้ความจริงที่กล่าวว่าพื้นที่หน้าตัดของทรงกรวย
จากด้านข้างของกระบอกของน้ำคงที่ไม่ว่าถังน้ำจะวางเอียงกี่องศาก็ตาม

15. ตอบ 4.

แนวคิด

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$x = \frac{4}{3};$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{9}{16}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\sqrt{a} \geq 0$ เสมอ

$$\text{เพราะฉะนั้น } y = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} > 0$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ตอนที่ 2

1. ตอบ $x - y = -53$

แนวคิด $x = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 97 + 99 + 101$

$$y = 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 96 + 98 + 100 + 102$$

$$x - y = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 + 1 + 1 - 102$$

จำนวนเลข 1 ทั้งหมด 49 ตัว

$$= 49 - 102$$

$$= -53$$

เทคนิคการนับจำนวนตัวเลข

$$4, 6, 8, 10, \dots, 96, 98, 100$$

2 ลบตลอด $2, 4, 6, 8, \dots, 94, 96, 98$

2 ทารตลอด $1, 2, 3, 4, \dots, 47, 48, 49$

เพราะฉะนั้นตัวเลข 4, 6, 8, 10, 12, ..., 96, 98, 100 มีทั้งหมด 49 ตัว

2. ตอบ 0

แนวคิด $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$$(x^2 - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 = 2, 1$$

$$x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, -1$$

ผลบวกของรากสมการ $= \sqrt{2} - \sqrt{2} + 1 - 1 = 0$

เทคนิควิเศษ ถ้า a เป็นรากของสมการ $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

จะได้ $a^4 - 3a^2 + 2 = 0$

และ $(-a)^4 - 3(-a)^2 + 2 = a^4 - 3a^2 + 2 = 0$

สรุป a เป็นรากสมการ ก็ต่อเมื่อ $-a$ เป็นรากสมการ

เพราะฉะนั้นผลบวกของรากสมการต้องเป็นศูนย์

3. ตอบ $\frac{45}{16}$

แนวคิด การหาจุดตัดของกราฟ $y = 3 + 2x - x^2$ และ $y = 1 + 4x + 3x^2$

$$3 + 2x - x^2 = 1 + 4x + 3x^2$$

$$4x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

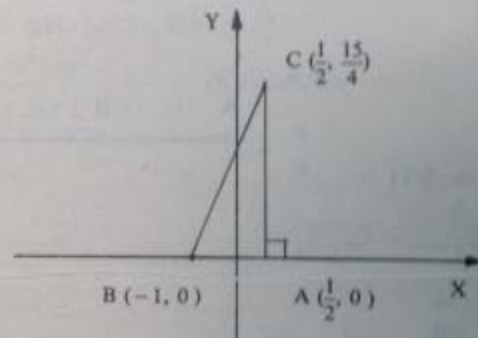
$$(2x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = -1, \frac{1}{2}$$

$$x = -1; y = 3 - 2 - 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}; y = 3 + 1 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

ดังนั้นพิกัด B, C คือ $B(-1, 0)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$



ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times AB \times AC \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{15}{4}\right) \\ &= \frac{45}{16} \end{aligned}$$

4. ตอบ $\frac{29}{2}$

แนวคิด $x^2 = 2x + \frac{7}{2}$

$$\begin{aligned}
 x^3 &= x \left(2x + \frac{7}{2}\right) \\
 &= 2x^2 + \frac{7}{2}x \\
 &= 2 \left(2x + \frac{7}{2}\right) + \frac{7}{2}x \\
 &= 4x + 7 + \frac{7}{2}x \\
 &= \frac{15x}{2} + 7
 \end{aligned}$$

เพราะว่า $x^3 = Ax + B$

เพราะฉะนั้น $Ax + B = \frac{15}{2}x + 7$

สรุป $A + B = \frac{15}{2} + 7$
 $= \frac{29}{2}$

5. ตอบ 80

แนวคิด

$$AB:AC = 5:11$$

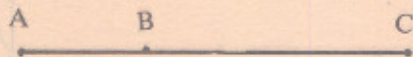
$$\frac{AB}{AC} = \frac{5}{11}$$

เพราะว่า $AC = 176$

เพราะฉะนั้น $\frac{AB}{176} = \frac{5}{11}$

$$AB = \frac{(5)(176)}{11}$$

$$= 80$$



ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 4

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. นิพจน์ $\frac{2x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{2x-1}{2x^2-3x+1} + \frac{2x^2}{x^2-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2

2. $2(x-1)$

3. $2(x+1)$

4. $2(2x^2-1)$

2. ถ้า $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้อาจถูกต้อง

1. $x+y = a+b$

2. $\frac{x-a}{x+a} = \frac{y+b}{y-b}$

3. $\frac{x+a}{y+a} = \frac{x-b}{y-b}$

4. $\frac{x-a}{x+a} = \frac{y-b}{y+b}$

3. ถ้า $x-y = a$ และ $x+y-2xy = b$

แล้ว $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy(1-x-y)}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{a^2}{a^2+b^2}$

2. $\frac{a}{b}$

3. $\frac{ab}{a^2+b^2}$

4. $\frac{b^2}{a^2+b^2}$

4. นิพจน์

$$\frac{3a+2b}{2ya-2xyb} \times \frac{a^3-x^3b^3}{xa+2xb} \times \frac{a^2+4ab+4b^2}{9a^2-4b^2}$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{(a-xb)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a+2b)}$

2. $\frac{(a+2b)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a+2b)}$

$$3. \frac{(a-xb)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a-2b)}$$

$$4. \frac{(a+2b)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a-2b)}$$

5. ถ้า $\sqrt[3]{x^3+x^4} + \sqrt[3]{8x+8} = (x+a)^3 \sqrt{x+1}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 2

2. 3

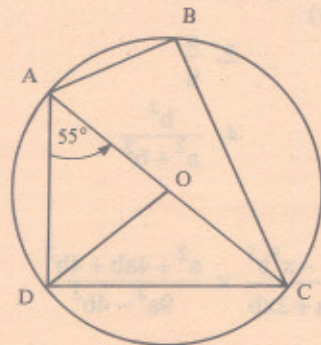
3. 4

4. 5

6. ค่าของ x ที่ทำให้ $x-4 < \sqrt{x-4}$
สอดคล้องเงื่อนไขในตัวเลือกใด

1. $1 < x < 4$ 2. $0 < x < 5$ 3. $4 < x < 5$ 4. $x > 5$

7.



ABCD เป็นสี่เหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง และจุด O อยู่บนเส้นทแยงมุม AC

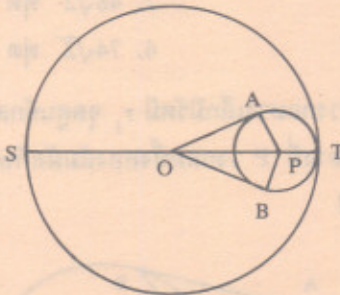
ถ้า $AB \parallel OD$ และ $\angle DAO = 55^\circ$ แล้วมุม $\angle BCD$ กว้างกี่องศา

1. 55° 2. 60° 3. 67° 4. 70°

8. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วบรรจุอยู่ในวงกลมโดยที่ $AB=AC$, X และ Y เป็นจุดบนเส้นรอบวงกลม โดยที่ BX แบ่งครึ่งมุม ABC และ CY แบ่งครึ่งมุม ACB ตัวเลือกใดต่อไปนีถูกต้อง



1. $AX=BC=BY$
 2. $AY=AX=BC$
 3. $BY=BC=XC$
 4. $AX=AY=BY$
9. จากรูปที่กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงใหญ่ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมวงเล็ก วงกลมทั้งสองสัมผัสกันที่จุด T ลากเส้น TO มาพบเส้นรอบวงกลมวงใหญ่ที่จุด S OA, OB เป็นเส้นสัมผัสวงกลมวงเล็ก



ถ้า $\frac{PT}{ST} = \frac{1}{8}$ และ PT ยาว x หน่วย
แล้วความยาวของ OA ในพจน์ของ x เท่ากับเท่าใด

1. $x\sqrt{2}$ หน่วย
2. $2x\sqrt{2}$ หน่วย
3. $3x\sqrt{3}$ หน่วย
4. $4x\sqrt{2}$ หน่วย



10. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้าน $a = n^2 - 1$, $b = 2n$
และ $c = n^2 + 1$ ตามลำดับ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

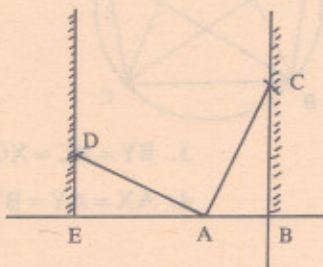
1. $2n^3 - 2n$

2. $n^3 - n$

3. $n^4 - 1$

4. $n^4 + 1$

11.



บันได AC ยาว 50 ฟุต พิงกำแพงทางด้านขวามือทำให้ BC ยาว 48 ฟุต เมื่อ
ผลักให้บันไดมาพิงกำแพงทางซ้ายมือ ปลายบนจะอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะ
 DE ยาวเท่ากับ 14 ฟุต ถามว่าระยะ CD เท่ากับเท่าใด

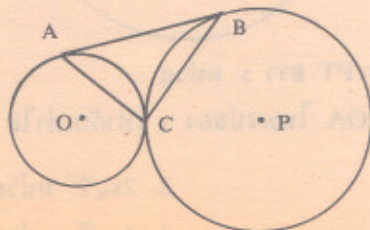
1. $46\sqrt{2}$ ฟุต

2. $48\sqrt{2}$ ฟุต

3. $50\sqrt{2}$ ฟุต

4. $74\sqrt{2}$ ฟุต

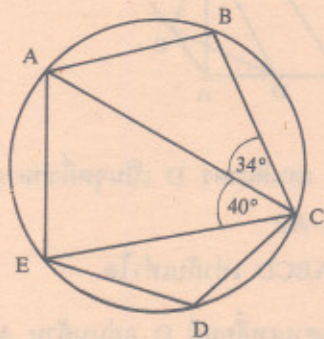
12. จากรูปที่กำหนดให้ วงกลมวงเล็กมีรัศมี r_1 จุดศูนย์กลางที่ O วงกลมวงใหญ่
มีรัศมี r_2 จุดศูนย์กลางที่ P วงกลมทั้งสองสัมผัสกันที่จุด C , AB เป็นเส้น
สัมผัสสวงกลม ดังรูป



ค่าของ $AC^2 + CB^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2r_1 r_2$
2. $4r_1 r_2$
3. $r_1^2 + r_2^2$
4. $2r_1^2 + 2r_2^2$

13. จากรูปที่กำหนดให้



ถ้ามุม $CDE = 120^\circ$ แล้ว BAC กางกึ่งศา

1. 27°
 2. 40°
 3. 46°
 4. 56°
14. ถ้า $0^\circ < x < 90^\circ$ แล้ว $\frac{\sec^2 x}{2 + 2\tan^2 x}$ มีค่าเท่าใด

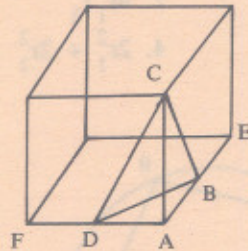
1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{4}$

15. กำหนดให้ $(0,0)$ และ $(6,0)$ เป็นจุดบนเส้นโค้ง $y = ax^2 + bx + c$ ถ้ากราฟของ $y = ax^2 + bx + c$ ตัดกับเส้นตรง $y = 2x - 12$ ที่จุด $(1, -10)$ และจุด A พิกัดของจุด A ตรงกับตัวเลือกใด

1. $(-10, 1)$
2. $(0, 6)$
3. $(1, -10)$
4. $(6, 0)$

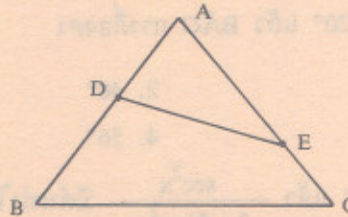
ตอนที่ 2

1.



ลูกบาศก์ยาวด้านละ 8 เซนติเมตร D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AF
 B เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AE
 ปริมาตรของพีระมิด ABCD เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมี D อยู่บนด้าน AB, E อยู่บนด้าน AC



ถ้า $AD:BD = 4:5$ และ $AE:EC = 5:3$

แล้ว พื้นที่สี่เหลี่ยม BCED : พื้นที่สามเหลี่ยม ADE เท่ากับเท่าใด

3. จงหาคำตอบของสมการ $4^{2-x} + 2^{3-2x} + 2^{2-2x} = 14$

4. จงเขียน $(14)_8$ เป็นตัวเลขในระบบฐาน 2

5. ในการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มเป็นจำนวนเฉพาะเท่ากับเท่าใด

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 4

ตอนที่ 1

1. ตอบ 1.

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad & \frac{2x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{3x-1}{2x^2-3x+1} + \frac{2x^2}{x^2-1} \\
 &= \frac{2x+1}{(2x+1)(x+1)} - \frac{2x-1}{(2x-1)(x-1)} + \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{2x^2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{(x-1) - (x+1) + 2x^2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{-2+2x^2}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=0$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{2x-1}{2x^2-3x+1} + \frac{2x^2}{x^2-1} \\
 &= \left(\frac{1}{1}\right) - \left(\frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{0}{-1}\right) \\
 &= 1 - (-1) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$



ตัวเลือก 1. 2

ตัวเลือก 2. $2(x-1) = 2(0-1) = -2$

ตัวเลือก 3. $2(x+1) = 2(0+1) = 2$

ตัวเลือก 4. $2(2x^2-1) = 2(0-1) = -2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x=2$

$$\begin{aligned} & \frac{2x+1}{2x^2+3x+1} - \frac{2x-1}{2x^2-3x+1} + \frac{2x^2}{x^2-1} \\ &= \left(\frac{4+1}{8+6+1} \right) - \left(\frac{4-1}{8-6+1} \right) + \left(\frac{8}{4-1} \right) \\ &= \left(\frac{5}{15} \right) - \left(\frac{3}{3} \right) + \left(\frac{8}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} \right) - 1 + \left(\frac{8}{3} \right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 3. $2(x+1) = 2(2+1) = 6$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ได้

2. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ใช้แทนค่าตัดตัวเลือกดีกว่า

แทนค่า $x = 2, y=6$

$$a = 4, b = 12 \quad \text{จะได้} \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$

ตัวเลือก 1. $x+y = 8$

$$a+b = 16$$

ดังนั้น ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$$\begin{aligned} \text{ตัวเลือก 2. } \frac{x-a}{x+a} &= \frac{2-4}{2+4} = \frac{-2}{6} \\ \frac{y+b}{y-b} &= \frac{6+12}{6-12} = \frac{18}{-6} = -3 \end{aligned}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$$\begin{aligned} \text{ตัวเลือก 3. } \frac{x+a}{y+a} &= \frac{6}{18} = \frac{1}{3} \\ \frac{x-b}{y-b} &= \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

ดังนั้น ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวเลือก 4. เป็นคำตอบแน่นอน

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \frac{y}{b} \\ \frac{x}{a} - 1 &= \frac{y}{b} - 1 \\ \frac{x-a}{a} &= \frac{y-b}{b} \quad \text{_____ (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + 1 &= \frac{y}{b} + 1 \\ \frac{x+a}{a} &= \frac{y+b}{b} \quad \text{_____ (2)} \end{aligned}$$

$$(1) \div (2) \text{ จะได้ } \frac{x-a}{x+a} = \frac{y-b}{y+b}$$

3. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy(1-x-y)} &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 + 2xy - 2x^2y - 2xy^2} \\ &= \frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)^2 - 2xy(x+y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x-y}{(x+y)-2xy}$$

$$= \frac{a}{b}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า x, y บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x=2, y=1$

จะได้
$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+2xy(1-x-y)} = \frac{4-1}{4+1+4(1-2-1)} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$a = x-y = 2-1 = 1$$

$$b = x+y-2xy = 2+1-4 = -1$$

แทนค่า a, b ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{a^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq -1$

ตัวเลือก 2. $\frac{a}{b} = \frac{1}{-1} = -1$

ตัวเลือก 3. $\frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{-1}{1+1} = \frac{-1}{2} \neq -1$

ตัวเลือก 4. $\frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \neq -1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

4. ตอบ 4.

แนวคิด
$$\frac{3a+2b}{2ya-2xyb} \times \frac{a^3-x^3b^3}{xa+2xb} \times \frac{a^2+4ab+4b^2}{9a^2-4b^2}$$

$$= \frac{3a+2b}{2y(a-xb)} \times \frac{(a-xb)(a^2+axb+x^2b^2)}{x(a+2b)} \times \frac{(a+2b)(a+2b)}{(3a+2b)(3a-2b)}$$

$$= \frac{(a+2b)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a-2b)}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $a=0$, $b=1$, $x=1$, $y=1$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$\frac{3a+2b}{2ya-2xyb} \times \frac{a^3-x^3b^3}{xa+2xb} \times \frac{a^2+4ab+4b^2}{9a^2-4b^2}$$

$$= \left(\frac{0+2}{0-2}\right) \times \left(\frac{0-1}{0+2}\right) \times \left(\frac{0+0+4}{0-4}\right) = (-1) \times \left(\frac{-1}{2}\right) \times (-1) = -\frac{1}{2}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{(a-xb)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a+2b)}$

$$= \frac{(0-1)(0+0+1)}{2(0+2)} = -\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{2}$$

ตัวเลือก 2. $\frac{(a+2b)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a+2b)}$

$$= \frac{(0+2)(0+0+1)}{2(0+2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$$

ตัวเลือก 3. $\frac{(a-xb)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a-2b)}$

$$= \frac{(0-1)(0+0+1)}{2(0-2)} = \frac{1}{4} \neq -\frac{1}{2}$$

ตัวเลือก 4. $\frac{(a+2b)(a^2+axb+x^2b^2)}{2xy(3a-2b)}$

$$= \frac{(0+2)(0+0+1)}{2(0-2)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.ทิ้งได้

5. ตอบ 1.

แนวคิด $\sqrt[3]{x^3+x^4} = \sqrt[3]{x^3(1+x)} = x\sqrt[3]{x+1}$

$$\sqrt[3]{8x+8} = \sqrt[3]{8(x+1)} = 2\sqrt[3]{x+1}$$

$$\sqrt[3]{x^3+x^4} + \sqrt[3]{8x+8} = x\sqrt[3]{x+1} + 2\sqrt[3]{x+1}$$

$$(x+a)\sqrt[3]{x+1} = (x+2)\sqrt[3]{x+1}$$

$$x+a = x+2$$

$$a = 2$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าสมการของโจทย์เป็นจริง

สำหรับทุกค่าของ x ดังนั้นการแทนค่า x บางค่าก็จะได้ค่าของ a ลองแทนค่า $x=0$ จะได้

$$\sqrt[3]{0+0} + \sqrt[3]{0+8} = (0+a)\sqrt[3]{0+1}$$

$$2 = a$$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. ได้เลย

6. ตอบ 3.

แนวคิด $x-4 < \sqrt{x-4}$

เพราะฉะนั้น $x-4 > 0$ ดังนั้น

$$0 < x-4 < \sqrt{x-4}$$

$$0 < \frac{x-4}{\sqrt{x-4}} < 1$$

$$0 < \sqrt{x-4} < 1$$

$$0 < x-4 < 1$$

$$4 < x < 5$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $x=2$ ทำให้ $\sqrt{x-4} = \sqrt{-2}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

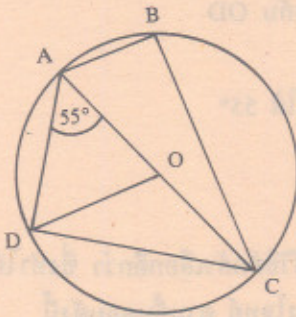
เพราะว่า $x = 20$ ทำให้ $20 - 4 = 16 < 4 = \sqrt{20 - 4}$

เพราะฉะนั้น $x > 5$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

7. ตอบ 1.

แนวคิด



เพราะว่า $OA = OD$

เพราะฉะนั้น $\triangle AOD$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

$$\widehat{ADO} = 55^\circ$$

เพราะว่า AC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$$\widehat{OCD} = \widehat{ODC} = 35^\circ$$

เพราะว่า $AB \parallel CD$

เพราะฉะนั้น $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ ดังนั้น $\widehat{DAB} = 125^\circ$

และ $\widehat{BAC} + \widehat{OAD} + \widehat{ADO} = 180^\circ$

$$\widehat{BAC} + 55^\circ + 55^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{BAC} = 70^\circ$$

เพราะว่ามุมภายในสี่เหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 360°

$$\widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 360^\circ$$

$$90^\circ + \widehat{BCD} + 90^\circ + 125^\circ = 360^\circ$$

$$\widehat{BCD} = 55^\circ$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์แล้ววัดมุม



1. เขียนวงกลมรัศมี 2 นิ้ว จุดศูนย์กลางที่จุด O
2. ลากเส้น AC ผ่านจุด O
3. ลาก AD ทำมุม $\widehat{DAC} = 55^\circ$
4. ลากเส้น OD
5. ลากเส้น AB ให้ขนานกับ OD
6. ลากเส้น BC

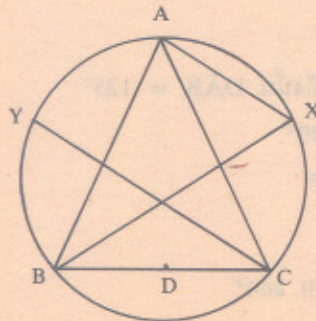
วัดมุม \widehat{BCD} จะได้ 55°

ดังนั้นเลือกข้อ 1. ดีกว่า

8. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่า ซึ่งทำได้โดยการวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ ตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนวงกลมรัศมี 4 ซม.
 2. ลากคอร์ด BC ยาว 6 ซม.
 3. D เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด BC
- จาก D ลากเส้นตั้งฉากขึ้นไปพบวงกลมที่จุด A
4. แบ่งครึ่งมุม \widehat{ABC} และ \widehat{ACB} ด้วยครึ่งวงกลม



วัดความยาวแต่ละด้านตามตัวเลือก

$$AX = 4.3$$

$$BC = 6$$

ตั้งนั้นตัวเลือก 1. ผิด

$$AY = 4.3$$

$$AX = 4.3$$

$$BC = 6$$

ตั้งนั้นตัวเลือก 2. ผิด

$$BY = 4.3$$

$$BC = 6$$

ตั้งนั้นตัวเลือก 3. ผิด

$$AX = 4.3$$

$$AY = 4.3$$

$$BY = 4.3$$

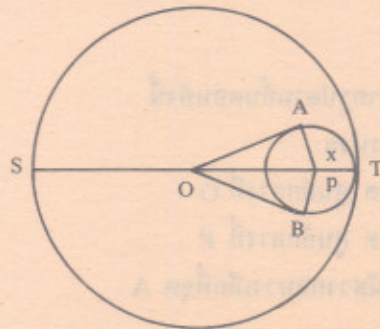
หมายเหตุ เหตุผลที่ใช้ในข้อนี้ คือมุมเท่ากัน, คอร์ดที่รองรับมุมต้องยาวเท่ากัน
เพราะว่า $\angle ABX = \angle ACY = \angle YCB$

เพราะฉะนั้น $AX = AY = BY$

จะเห็นได้ว่าถ้ารู้ว่าตัวเลือกใดถูก ค่อยแสดงเหตุผลจะง่ายกว่า

9. ตอบ 2.

แนวคิด



$$PT = x$$

$$\frac{PT}{ST} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{PT}{2OT} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{PT}{OT} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{OP+PT} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{OP+x} = \frac{1}{4}$$

$$4x = OP+x$$

$$OP = 3x$$

$\triangle OAP$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก, $AP = PT$

$$OA^2 = OP^2 - AP^2$$

$$= (3x)^2 - x^2$$

$$= 9x^2 - x^2$$

$$= 8x^2$$

$$OA = 2x\sqrt{2}$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้จัดว่าโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร การวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น
เลือก $x = 1$ ซม.

$$PT = 1$$

ดังนั้น $ST = 8$ ต่อกวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้น ST ยาว 8 หน่วย
2. เขียนวงกลมรัศมี 8 จุด ศูนย์กลางที่ O
3. เขียนวงกลมรัศมี 4 จุด ศูนย์กลางที่ P
4. จาก O ลากเส้นมาสัมผัสวงกลมวงเล็กที่จุด A

วัดความยาว OA ได้ 2.8 ซม.

แทนค่า $x = 1$ ในตัวเลือกแต่ละตัว

ตัวเลือก 1. $\sqrt{2} = 1.4$

ตัวเลือก 2. $2\sqrt{2} = 2.8$

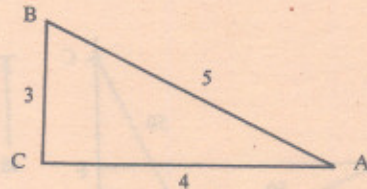
ตัวเลือก 3. $3\sqrt{2} = 4.2$

ตัวเลือก 4. $4\sqrt{2} = 5.6$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

10. ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใช้แทนค่า n แล้วทำการตัดตัวเลือกดีกว่า สมมติ $n=2$ จะได้ $a=3$, $b=4$ และ $c=5$ เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อ $n=2$



$$\text{พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} (3) (4) = 6$$

แทนค่า $n=2$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $2n^3 - 2n = 16 - 4 = 12 \neq 6$

ตัวเลือก 2. $n^3 - n = 8 - 2 = 6$

ตัวเลือก 3. $n^4 - 1 = 16 - 1 = 15 \neq 6$

ตัวเลือก 4. $n^4 + 1 = 16 + 1 = 17 \neq 6$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1. ใช้สูตร พ.ท. $\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

เมื่อ $s = \frac{a+b+c}{2}$ ซึ่งเป็นวิธีที่ยาก อย่าทำดีกว่า

แบบที่ 2 เพราะว่ $a^2 = (n^2 - 1)^2 = n^4 - 2n^2 + 1$

$$b^2 = (2n)^2 = 4n^2$$

$$c^2 = (n^2 + 1)^2 = n^4 + 2n^2 + 1$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } c^2 = a^2 + b^2$$

ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี

AC และ BC เป็นด้านประกอบมุมฉาก

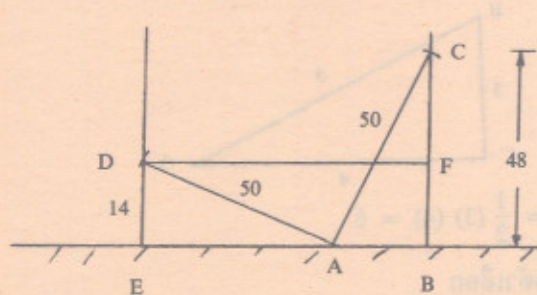
$$\text{เพราะฉะนั้น พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} (a) (b)$$

$$= \frac{1}{2} (n^2 - 1) (2n)$$

$$= n^3 - n$$

11. ตอบ 3.

แนวคิด



ใน $\triangle ABC$

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$$

$$= \sqrt{50^2 - 48^2}$$

$$= \sqrt{2500 - 2304}$$

$$= \sqrt{196}$$

$$= 14$$

ใน $\triangle ADE$

$$AE = \sqrt{AD^2 - DE^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{50^2 - 14^2} \\
 &= \sqrt{2500 - 196} \\
 &= \sqrt{2304} = 48
 \end{aligned}$$

$$\text{สรุป } EB = AB + EA = 14 + 48 = 62$$

ลากเส้น $DF \parallel EB$

$$\text{เพราะฉะนั้น } DF = 62$$

$$CF = 48 - 14$$

$$= 34$$

$$CD^2 = DF^2 + CF^2$$

$$= 62^2 + 34^2$$

$$= 3844 + 1156$$

$$= 5000$$

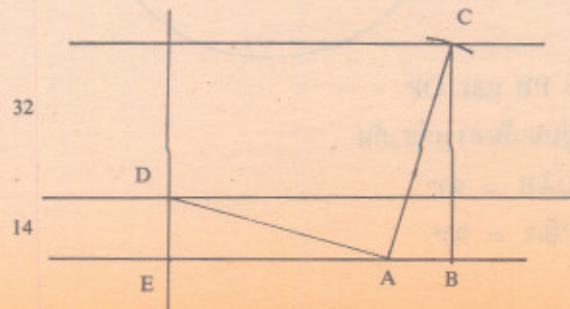
$$CD = \sqrt{5000}$$

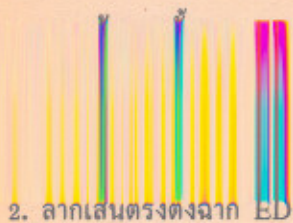
$$= 50\sqrt{2}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์โดยใช้สเกล 0.1 ซม. ต่อ 1 ฟุต และวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้นขนาน 3 เส้นให้ห่างกัน 14 ฟุต และ 34 ฟุต





2. ลากเส้นตรงตั้งฉาก ED

3. กางวงเวียนรัศมี 50 ฟุต จุดศูนย์กลางที่ D

ตัดเส้นขนานที่ผ่านจุด E ที่จุด A

4. ใช้จุดศูนย์กลางที่ A และส่วนโค้งตัดเส้นขนานเส้นบนที่จุด C

5. ลาก CB ตั้งฉากกับพื้นล่าง

ขณะนี้เราได้รูปตามข้อกำหนดของโจทย์แล้ว

วัดความยาว CD ได้ 71 ฟุต

ตัวเลือก 1. $46\sqrt{2} = 46 (1.4) = 64.4$

ตัวเลือก 2. $48\sqrt{2} = 48 (1.4) = 67.2$

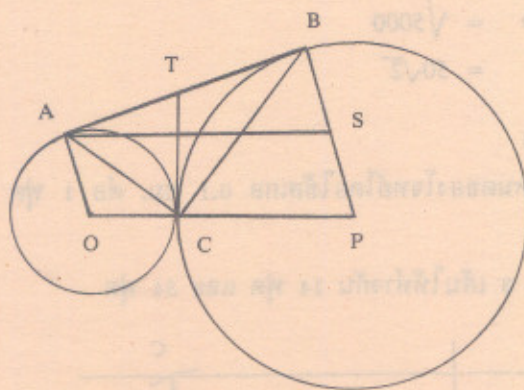
ตัวเลือก 3. $50\sqrt{2} = 50 (1.4) = 70$

ตัวเลือก 4. $74\sqrt{2} = 74 (1.4) = 103.6$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

12. ตอบ 2.

แนวคิด



ลากเส้น OA และ PB และ OP

จะได้ว่า OCP อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

และ $\widehat{OAB} = 90^\circ$

$\widehat{PBA} = 90^\circ$

จากจุด C ลากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด C ไปตัด AB ที่จุด T เพราะว่าเส้นสัมผัส
จากจุดภายนอกมายังวงกลมต้องยาวเท่ากัน

เพราะฉะนั้น $AT = CT$ และ $CT = BT$

เพราะว่า $AT = CT = BT$

เพราะฉะนั้นจุด A, B และ C อยู่บนวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น $\angle ACB = 90^\circ$

$$\text{ดังนั้น } AC^2 + BC^2 = AB^2 \quad (1)$$

ลากเส้น AS ให้ขนานกับ OP และจากเดิม $OA \parallel PB$

ดังนั้นจะได้ว่า ASPO เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เพราะฉะนั้น $AS = OP = r_1 + r_2$

$$BS = BP - SP = r_2 - r_1$$

เพราะว่า $\triangle ABS$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $AS^2 = AB^2 + BS^2$

$$AB^2 = AS^2 - BS^2$$

$$= (r_1 + r_2)^2 - (r_2 - r_1)^2$$

$$= r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_2^2 + 2r_1r_2 - r_1^2$$

$$= 4r_1r_2$$

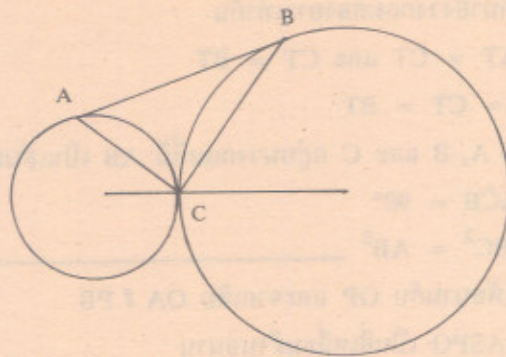
การตัดตัวเลือก ข้อสอบและตัวเลือกจัดว่าเป็นสูตรในพจน์ของ r_1 และ r_2

ดังนั้นการวาดรูปและวัดระยะทางก็จะตัดตัวเลือกได้

$$\text{ให้ } r_1 = 2 \text{ ซม.}$$

$$r_2 = 4 \text{ ซม.}$$

วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ และวัดระยะทางจะได้



$$AC = 3.2$$

$$BC = 4.8$$

$$AC^2 + CB^2 = (3.2)^2 + (4.8)^2 = 10.24 + 23.04 \\ = 33.28$$

แทนค่า $r_1 = 2$, $r_2 = 4$ ในตัวเลือกแต่ละตัว

ตัวเลือก 1. $2r_1r_2 = 2(2)(4) = 16$

ตัวเลือก 2. $4r_1r_2 = 4(2)(4) = 32$

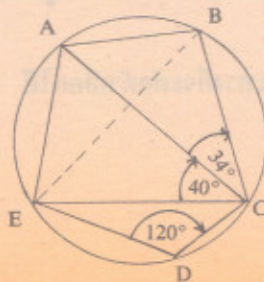
ตัวเลือก 3. $r_1^2 + r_2^2 = 4 + 16 = 20$

ตัวเลือก 4. $2r_1^2 + 2r_2^2 = 8 + 32 = 40$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

13. ตอบ 3.

แนวคิด



เพราะว่า ACDE เป็นสี่เหลี่ยมบรรจุในวงกลม
และคอร์ด EC รองรับมุม \widehat{EAC} และ \widehat{EDC} ซึ่งเป็นมุมตรงข้ามกัน

เพราะฉะนั้น $\widehat{EAC} + \widehat{EDC} = 180^\circ$

$$\widehat{EAC} + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\widehat{EAC} = 60^\circ$$

เพราะว่า ABCE เป็นสี่เหลี่ยมบรรจุในวงกลม
และคอร์ด EB รองรับมุม \widehat{EAB} และ \widehat{ECB} ซึ่งเป็นมุมตรงข้ามกัน

เพราะฉะนั้น $\widehat{EAB} + \widehat{ECB} = 180^\circ$

$$\widehat{EAC} + \widehat{CAB} + (40^\circ + 34^\circ) = 180^\circ$$

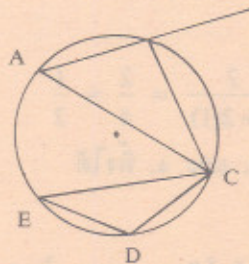
$$\widehat{CAB} = 180^\circ - 74^\circ - \widehat{EAC}$$

$$= 180^\circ - 74^\circ - 60^\circ$$

$$= 46^\circ$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์แล้ววัดมุม



1. เขียนวงกลมรัศมี 3 ซม.
2. ลากเส้น ED ยาว 3 ซม.
3. ลากเส้น DC และ $\widehat{EDC} = 120^\circ$
4. ลากเส้น EC

5. ลากเส้น AC และ $\angle ACE = 40^\circ$

6. ลากเส้น BC และ $\angle BCA = 34^\circ$

7. วัดมุม $\angle BAC$ ได้ 46°

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

14. ตอบ 3.

แนวคิด $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น} \quad \frac{\sec^2 x}{2 + 2 \tan^2 x} &= \frac{\sec^2 x}{2(1 + \tan^2 x)} \\ &= \frac{\sec^2 x}{2 \sec^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก การแทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 45^\circ$

$$\sec^2 45^\circ = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\tan^2 45^\circ = 1$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\sec^2 x}{2 + 2 \tan^2 x} = \frac{2}{2 + 2(1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทั้งหมด

15. ตอบ 4.

แนวคิด $(0,0), (6,0)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad 0 = 0 + 0 + c, \quad c = 0$$

$$0 = 36a + 6b + c$$

$$6a + b = 0 \quad \text{_____ (1)}$$

เพราะว่า $(1, -10)$ อยู่บนเส้นโค้ง $y = ax^2 + bx + c$

$$\text{ดังนั้น} \quad -10 = a + b$$

$$a + b = -10 \quad \text{-----} \quad (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$a = 2$$

$$b = -12$$

สรุปเส้นโค้งมีสมการ

$$y = 2x^2 - 12x$$

การหาจุดตัดของ $y = 2x - 12$ และ $y = 2x^2 - 12x$

$$\text{ให้} \quad 2x - 12 = 2x^2 - 12x$$

$$2x^2 - 14x + 12 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-1)(x-6) = 0$$

$$x = 1, 6$$

$$y = -10, 0$$

ดังนั้นจุดตัดคือ $(1, -10)$ และ $(6, 0)$

สรุปพิกัด A คือ $(6, 0)$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าจุดตัดต้องอยู่บนเส้นตรง $y = 2x - 12$

ตัวเลือก 1. $1 \neq 2(-10) - 12$

ตัวเลือก 2. $6 \neq 2(0) - 12$

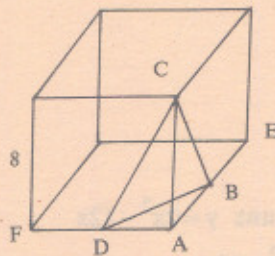
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทั้งได้

และเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ



1. ตอบ 32 ลูกบาศก์เซนติเมตร

แนวคิด



$$AE = AF = 8$$

B, D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AE และ AF

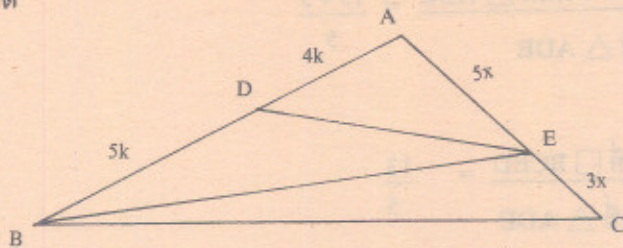
เพราะฉะนั้น $AD = AB = 4$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABD} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ปริมาตรพีระมิด ABCD} &= \frac{1}{3} \times \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{3} \times 8 \times AC \\ &= 4 AC \\ &= 4(8) \\ &= 32 \end{aligned}$$

2. ตอบ 13:5

แนวคิด



$$AD:DB = 4:5 \text{ และ } AE:EC = 5:3$$

$\triangle ADE$ และ $\triangle ABE$ มีความสูงเท่ากันและเท่ากับ h

$$\begin{aligned} \frac{\text{พื้นที่ } \triangle ADE}{\text{พื้นที่ } \triangle ABE} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot h} = \frac{AD}{AB} \\ &= \frac{4k}{9k} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned} \quad \text{----- (1)}$$

เพราะว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle ABE$ สูงเท่ากันและสูงเท่ากับ h'

$$\begin{aligned} \frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABE}{\text{พื้นที่ } \triangle ABC} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot AE \cdot h'}{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h'} = \frac{AE}{AC} \\ &= \frac{5x}{8x} \\ &= \frac{5}{8} \end{aligned} \quad \text{----- (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้

$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle ABC}{\text{พื้นที่ } \triangle ADE} = \frac{18}{5}$$

$$\frac{\text{พื้นที่ } \square BCED + \text{พื้นที่ } \triangle ADE}{\text{พื้นที่ } \triangle ADE} = \frac{13+5}{5}$$

สรุป $\frac{\text{พื้นที่ } \square BCED}{\text{พื้นที่ } \triangle ADE} = \frac{13}{5}$

3. ตอบ $x = \frac{1}{2}$

แนวคิด $4^{2-x} + 2^{3-2x} + 2^{2-2x} = 14$

$$2^{4-2x} + 2^{3-2x} + 2^{2-2x} = 14$$

$$2^{-2x}(2^4 + 2^3 + 2^2) = 14$$

$$2^{-2x}(16+8+4) = 14$$

$$2^{-2x} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

$$2^{-2x} = 2^{-1}$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4. ตอบ $(1100)_2$

แนวคิด $(14)_8 = 1 \times 8 + 4$

$$= (12)_{10}$$

โดยการตั้งหารด้วย 2

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline & 6 \quad \text{เศษ } 0 \\ 2 & 6 \\ \hline & 3 \quad \text{เศษ } 0 \\ 2 & 3 \\ \hline & 1 \quad \text{เศษ } 1 \\ 2 & 1 \\ \hline & 0 \quad \text{เศษ } 1 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น $(14)_8 = (12)_{10} = (1100)_2$

หมายเหตุ การแปลงเลขฐานโดยวิธีสัดระหว่างฐานสองกับฐานแปด ก่อนอื่น
ต้องจำให้ได้ว่า $(1)_8 = (001)_2$, $(2)_8 = (010)_2$, $(3)_8 = (011)_2$, $(4)_8 =$
 $(100)_2$, $(5)_8 = (101)_2$, $(6)_8 = (110)_2$, $(7)_8 = (111)_2$

เลขฐานแปด	เลขฐานสอง	เลขฐานสิบ
1	(001) ₂	1
2	(010) ₂	2
3	(011) ₂	3
4	(100) ₂	4
5	(101) ₂	5
6	(110) ₂	6
7	(111) ₂	7

$$(14)_8 = (001100)_2 = (1100)_2$$

ในทำนองเดียวกัน

$$(623)_8$$

↑ ↑ ↑
↑ แทนด้วย 011
↑ แทนด้วย 010
↑ แทนด้วย 110

$$(623)_8 = (110010011)_2$$

ในทางกลับกันการเปลี่ยนจากฐานสองเป็นฐานแปด ให้แทนค่าที่ละสามตัวจากหลัง
มาหน้า

$$(10110011101)_2$$

□ □ □ □
↓ ↓ ↓ ↓
2 6 3 5

สามตัวหน้าสุด ถ้าตัวเลขไม่พอให้เติมศูนย์ ดังนั้น 10 จึงแทนด้วย 010

เพราะฉะนั้น $(10110011101)_2 = (2635)_8$



แนวคิด การโยนลูกเต๋า 2 ลูกมีผลที่เป็นไปได้ 36 วิธี
ผลบวกของแต้มเป็นจำนวนเฉพาะจำแนกได้ดังนี้

ผลบวก	เหตุการณ์	จำนวน
2	(1, 1)	1
3	(1,2), (2,1)	2
5	(2,3), (3,2), (1,4), (4,1)	4
7	(2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (1,6), (6,1)	6
11	(5,6), (6,5)	2
	รวม	15

ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกเป็นจำนวนเฉพาะ = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

คำถามเพิ่มเติม

ในการทดลองโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

1. ผลรวมของแต้มเท่ากับ 10
2. ผลรวมของแต้มมีค่ามากกว่า 8
3. ผลรวมของแต้มมีค่าไม่มากกว่า 7
4. ผลรวมของแต้มมีค่าน้อยกว่า 8
5. ผลรวมของแต้มมีค่าไม่ต่ำกว่า 10

ตอบ 1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{5}{18}$ 3. $\frac{7}{12}$ 4. $\frac{7}{12}$ 5. $\frac{1}{6}$

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 5

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. คร.น. ของ x^3-27 , $x^2-15x+36$ และ x^2-3x^2-2x+6 มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $(x-3)(x^2+3x+9)(x-12)(x^2-2)$

2. $(x-3)(x^2+6x+9)(x-12)(x^2-2)$

3. $(x+3)(x^2+3x+9)(x-12)(x^2-2)$

4. $(x+3)(x^2+6x+9)(x-12)(x^2-2)$

2. ผลลัพธ์ของ $\frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $x^2+2xy+y^2$

2. $x^2-2xy-y^2$

3. x^2+xy+y^2

4. x^2-xy-y^2

3. ค่าของ $\sqrt{20x^3y^4} \times \sqrt{5x^5y^2} \times \sqrt{8x^4}$ เท่ากับเท่าใด

1. $20\sqrt{2}x^6y^3$

2. $20\sqrt{2}x^5y^2$

3. $20\sqrt{3}x^6y^3$

4. $10\sqrt{2}x^6y^3$

4. ผลลัพธ์ของ $\frac{15^{-7} \times x^{-3} \times y^{10}}{15^{-5} \times x^{27} \times y^2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{15^2y^8}{x^{30}}$

2. $\frac{15y^8}{x^{30}}$

3. $\frac{15^2x^{30}}{y^8}$

4. $\frac{y^8}{15^2x^{30}}$

5. ผลลัพธ์ของ $\frac{x^2 + x - 6}{x^3 + 3x^2 + 9x} \times \frac{6x^3 + 54x}{2x^4 - 162} \times \frac{2x^2 - 12}{x^3 - 27}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{x+3}$

2. $\frac{1}{3x+2}$

3. $\frac{1}{x-3}$

4. $\frac{1}{3x-2}$

6. กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส มีความยาวด้านละ 10 เซนติเมตร ให้ E, F, G, H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ พื้นที่สี่เหลี่ยม EFGH เท่ากับเท่าใด

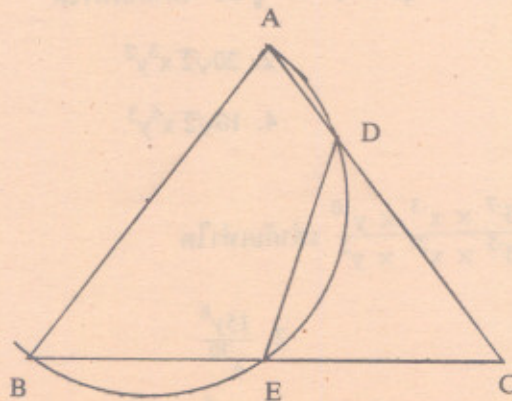
1. 20 ตารางเซนติเมตร

2. 25 ตารางเซนติเมตร

3. 50 ตารางเซนติเมตร

4. 75 ตารางเซนติเมตร

7. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $AB = AC = 10$ เซนติเมตร และ $BC = 12$ เซนติเมตร จากรูปวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลมตัด AC ที่จุด D และตัด BC ที่จุด E พื้นที่สี่เหลี่ยม ABED เท่ากับเท่าใด



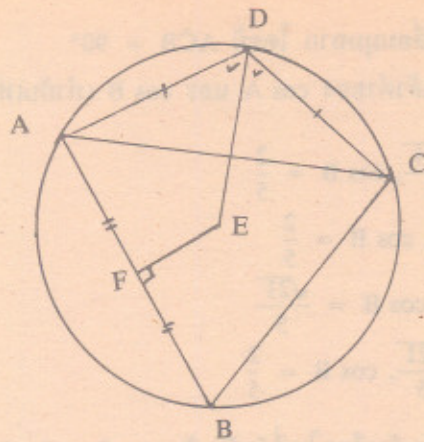
1. 17.28 ตารางเซนติเมตร

2. 30.72 ตารางเซนติเมตร

3. 36 ตารางเซนติเมตร

4. 48 ตารางเซนติเมตร

8.



จากรูป

ABCD เป็นสี่เหลี่ยมบรจจุอยู่ในวงกลมที่มี E เป็นจุดศูนย์กลาง

AB = BC, AD = CD

EF แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

ED แบ่งครึ่งมุม ADC

ถ้า $\angle ABC = 65^\circ$ แล้ว $\angle DEF$ กางกึ่งศา1. 120° 2. 130° 3. 140° 4. 150° 9. กำหนดสมการพหุนาม $p(x)$, $q(x)$, $A(x)$ และ $B(x)$ ดังนี้

$$\frac{p(x)}{q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{q(x)}$$

ถ้าดีกรีของ $p(x)$, $q(x)$, $A(x)$ และ $B(x)$ เป็น r, s, t และ u ตามลำดับ แล้วสมการในตัวเลือกใดเป็นจริง1. $r = st$ 2. $r = s + t$ 3. $r = s + t + u$ 4. $r = st + u$

10. ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี $\angle C = 90^\circ$

ถ้า $\sin A = \frac{2}{5}$ แล้วค่าของ $\cos A$ และ $\cos B$ เท่ากับเท่าใด

1. $\cos A = \frac{\sqrt{21}}{5}, \cos B = \frac{2}{5}$

2. $\cos A = \frac{21}{5}, \cos B = \frac{2}{5}$

3. $\cos A = \frac{2}{5}, \cos B = \frac{\sqrt{21}}{5}$

4. $\cos A = \frac{-\sqrt{21}}{5}, \cos B = \frac{2}{5}$

11. กราฟของสมการในตัวเลือกใดที่ตัดกับเส้นตรง $2x-y-2=0$ เพียงจุดเดียว

1. $y=x^2-1$

2. $y=-x^2$

3. $y=x^2$

4. $y=-x^2+1$

12. ถ้า $2x-y < 2$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $x+1 < 2 - \frac{y}{2}$

2. $x-y < 2-x$

3. $3x-3 < \frac{3}{2}y$

4. $3x+y < x+2(1+y)$

13. กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก

AC=15 เซนติเมตร, CD ตั้งฉากกับ AB ที่จุด D, BD=16 เซนติเมตร

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

1. 120 ตารางเซนติเมตร

2. 144 ตารางเซนติเมตร

3. 150 ตารางเซนติเมตร

4. 216 ตารางเซนติเมตร

14. ค่าของ $\frac{2x^4-3x^3y+3x^2y^2+xy^3-y^4}{2x-y}$ เท่ากับเท่าใด

1. $x^3-x^2y-xy^2+y^3$

2. $x^3-x^2y-xy^2-y^3$

3. $x^3-x^2y+xy^2+y^3$

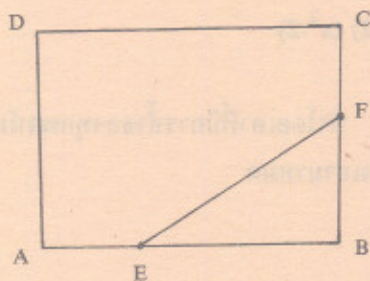
4. $x^3-x^2y+xy^2-y^3$

15. กำหนดให้ $r(x)$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ ด้วย $1 - 2x + x^2$ ค่าของ $r(x)$ คูณกับ $3x^2 - 4x + 6$ เท่ากับเท่าใด

1. $3x^4 + 2x^3 + 17x^2 + 16x + 6$
2. $3x^4 - 10x^3 + x^2 + 8x + 6$
3. $9x^3 - 18x^2 + 26x - 12$
4. $9x^3 - 6x^2 + 26x + 12$

ตอนที่ 2

1. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า, E เป็นจุดบนด้าน AB, F เป็นจุดบนด้าน BC



ถ้า $AE:EB = 2:5$ และ $BF:FC = 3:2$

แล้วอัตราส่วน พื้นที่ $\triangle EBF$: พื้นที่ $\square ABCD$ เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า $x + \frac{1}{x} = 4$ แล้ว $x^3 + \frac{1}{x^3}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
3. ผลบวกของรากของสมการ $x^3 + 3x - 4 = 0$ เท่ากับเท่าใด
4. หยิบตัวเลข x จากกล่องที่มีตัวเลข 1,2,3,4 อย่างสุ่ม
หยิบตัวเลข y จากกล่องที่มีตัวเลข 3,4,5 อย่างสุ่ม
จงหาความน่าจะเป็นที่ $xy + 1$ หารด้วย 5 ลงตัว
5. จงเขียนเลข $(2103)_4$ ในรูปแบบตัวเลขฐานแปด

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 5

ตอนที่ 1

1. ตอบ 1.

แนวคิด แยกตัวประกอบแต่ละพหุนามได้ดังนี้

$$x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

$$x^2 - 15x + 36 = (x-3)(x-12)$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = (x-3)(x^2 - 2)$$

เพราะว่าพจน์ทั้ง 3 มีตัวประกอบรวมกันตัวเดียวคือ $(x-3)$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ของ $x^3 - 27$, $x^2 - 15x + 36$ และ $x^3 - 3x^2 - 2x + 6$

คือ $(x-3)(x^2 + 3x + 9)(x-12)(x^2 - 2)$

ตรงกับตัวเลือก 1.

หมายเหตุ การหา ค.ร.น. ทำโดยเอาที่มีการซ้ำของทุกพจน์มาเพียงตัวเดียว และตัวที่ไม่ซ้ำกันทุกพจน์ต้องเอามาหมด

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

ใช้เหตุผลของตัวประกอบร่วมและการหารลงตัว

$$\text{เพราะว่า } x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ต้องมี $x-3$ และ $x^2 + 3x + 9$

เป็นตัวประกอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้น

แทนค่า x บางค่าแล้วจึงหา ค.ร.น. เช่น แทนค่า $x=1$

$$x^3 - 27 = -26 = (-1) \times 2 \times 13$$

$$x^2 - 15x + 36 = 1 - 15 + 36 = 22 = 2 \times 11$$

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 6 = 1 - 3 - 2 + 6 = 2$$

ค.ร.น. ของ -26, 22, 2 คือ $(-1) \times 2 \times 11 \times 13 = -286$

ตัวเลือก 1. $(1-3)(1+3+9)(1-12)(1-2) = (-2)(13)(-11)(-1) = -286$

ตัวเลือก 2. $(-2)(16)(-11)(-1) \neq -286$

ตัวเลือก 3. $(4)(13)(-11)(-1) \neq -286$

ตัวเลือก 4. $(4)(16)(-11)(-1) \neq -286$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

2. ตอบ 3.

แนวคิด โดยการตั้งหารยาว

$$\begin{array}{r}
 x^2 - xy + y^2 \overline{) x^4 + x^2y^2 + y^4} \\
 \underline{x^4 - x^3y + x^2y^2} \\
 x^3y + y^4 \\
 \underline{x^3y^2 - xy^3 + y^4} \\
 x^3y - x^2y^2 + xy^3 \\
 \underline{x^3y - x^2y^2 + xy^3} \\
 0
 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 - xy + y^2} = x^2 + xy + y^2$

ตรงกับตัวเลือก 3.

ใช้การจัดรูปแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}
 \frac{x^4 + x^2y^2 + y^4}{x^2 - xy + y^2} &= \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2}{x^2 - xy + y^2} \\
 &= \frac{(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2}{x^2 - xy + y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x^2+y^2-xy)(x^2+y^2+xy)}{x^2-xy+y^2} \\
 &= x^2+xy+y^2
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

$$\text{ถ้า } \frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2} = p(x)$$

แล้วสัมประสิทธิ์ของ y^2 ใน $p(x)$ ต้องเท่ากับ +1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

แทนค่า x และ y บางค่าที่คิดเลขง่าย ๆ ก็จะตัดตัวเลือกได้ เช่น $x=1, y=1$

$$\text{โจทย์ } \frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^2-xy+y^2} = \frac{1+1+1}{1-1+1} = 3$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } 1+2+1 = 4$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } 1-2-1 = -2$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } 1+1+1 = 3$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } 1-1-1 = -1$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

3. ตอบ 1.

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด } & \sqrt{20x^3y^4} \times \sqrt{5x^5y^2} \times \sqrt{8x^4} \\
 &= (\sqrt{20} \sqrt{5} \sqrt{8}) (x^{3/2} x^{5/2} x^{4/2}) (y^{4/2} y^{2/2}) \\
 &= \sqrt{800} x^{12/2} y^{6/2} \\
 &= 20\sqrt{2} x^6 y^3
 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก

1. ดูค่าคงตัว $\sqrt{20}\sqrt{5}\sqrt{8} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}$
 ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

2. ดูกำลังของ y ; $\sqrt{y^4}\sqrt{y^2} = y^3$
 ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

4. ตอบ 4.

แนวคิด
$$\frac{15^{-7} \times x^{-3} \times y^{10}}{15^{-5} \times x^{27} \times y^2} = \frac{y^{10-2}}{15^{7-5} \times x^{27+3}}$$

$$= \frac{y^8}{15^2 x^{30}}$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

ดูเฉพาะค่าตัวเลขก็พอ จากโจทย์ค่าสัมประสิทธิ์
 เท่ากับ $\frac{1}{15^2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

แทนค่า $x=1, y=1$ ก็ตัดตัวเลือกได้

จากโจทย์ $\frac{15^{-7} \times 1^{-3} \times 1^{10}}{15^{-5} \times 1^{27} \times 1^2} = \frac{15^{-7}}{15^{-5}} = \frac{1}{15^2}$

ตัวเลือก 1. 15^2

ตัวเลือก 2. 15

ตัวเลือก 3. 15^2

ตัวเลือก 4. $\frac{1}{15^2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

5. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x^2+7x-6}{x^3+3x^2+9x} \times \frac{6x^3+54x}{2x^4-162} \div \frac{27x^2-12}{x^3-27} \\
 &= \frac{(3x-2)(x+3)}{x(x^2+3x+9)} \times \frac{6x(x^2+9)}{2(x^2-81)} \times \frac{x^3-27}{27x^2-12} \\
 &= \frac{(3x-2)(x+3)}{x(x^2+3x+9)} \times \frac{6x(x^2+9)}{2(x+3)(x-3)(x^2+9)} \times \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{3(3x+2)(3x-2)} \\
 &= \frac{1}{3x+2}
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x=1$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$\begin{aligned}
 & \frac{3x^2+7x-6}{x^3+3x^2+9x} \times \frac{6x^3+54x}{2x^4-162} \div \frac{27x^2-12}{x^3-27} \\
 &= \left(\frac{3+7-6}{1+3+9} \right) \times \left(\frac{6+54}{2-162} \right) \div \left(\frac{27-12}{1-27} \right) \\
 &= \left(\frac{4}{13} \right) \times \left(\frac{60}{-160} \right) \div \left(\frac{15}{-26} \right) \\
 &= \frac{4 \times 60 \times 26}{13 \times 160 \times 15} = \frac{6240}{31200} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $\frac{1}{x+3} = \frac{1}{4}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{3x+2} = \frac{1}{5}$

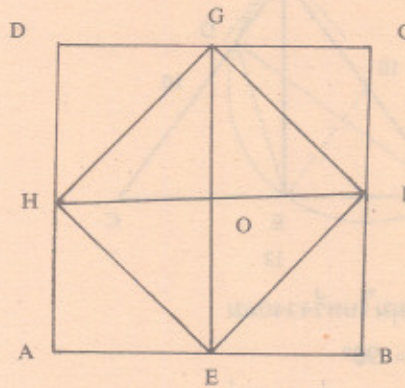
ตัวเลือก 3. $\frac{1}{x-3} = \frac{-1}{2}$

ตัวเลือก 4. $\frac{1}{3x-2} = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

6. ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนด



ลากเส้น EG และ FH ตัดกันที่ O จะได้ $EG \perp HF$ และแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle EGH &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times |EG| \times |OH| \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

$$\text{พ.ท. } \triangle EGF = \text{พ.ท. } \triangle EGH = 25$$

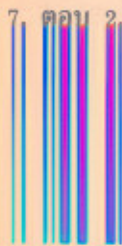
$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle EFGH &= \text{พ.ท. } \triangle EGF + \text{พ.ท. } \triangle EGH \\ &= 25 + 25 = 50 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามโจทย์กำหนดและทำการวัดส่วนสูงและความยาวฐาน
จะได้ $|OH| = 5$

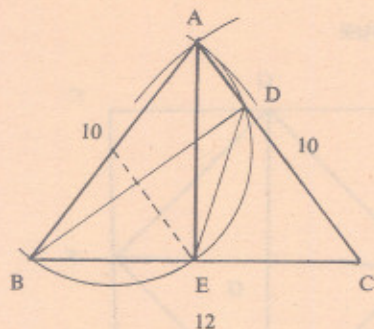
$$|OF| = 5$$

$$|EG| = 10$$

ดังนั้นเราจะได้พื้นที่ $\square EFGH$ เท่ากับ 50 เหมือนกัน



แนวคิด



เพราะว่า AEB เป็นมุมในครึ่งวงกลม

เพราะฉะนั้น $\angle BEA = 90^\circ$

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

เพราะฉะนั้น $BE = EC = 6$

$$\text{และ } AB^2 = BE^2 + AE^2$$

$$10^2 = 6^2 + AE^2$$

$$AE^2 = 64$$

$$AE = 8$$

$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AE$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times 8$$

$$= 48$$

การหาพื้นที่ $\triangle CDE$

พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle EDC$

1. มุม C เป็นมุมร่วม

2. เพราะว่ามีวงกลมล้อมรอบ

$$\text{เพราะฉะนั้น } \angle BAD + \angle BED = 180^\circ$$

$$\text{และ } \angle CED + \angle BED = 180^\circ$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \angle BAD = \angle CED$$

สรุป $\triangle ABC$ และ $\triangle EDC$ คล้ายกันและ $EDC = ABC$

EC เป็นด้านตรงข้ามมุม EDC ของ $\triangle EDC$

AC เป็นด้านตรงข้ามมุม ABC ของ $\triangle ABC$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{\text{พ.ท. } \triangle EDC}{\text{พ.ท. } \triangle ABC} = \frac{EC^2}{AC^2} = \frac{6^2}{10^2} = \frac{9}{25}$$

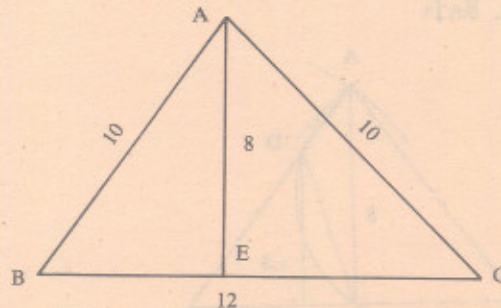
$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle EDC &= \frac{9}{25} \text{ พ.ท. } \triangle ABC \\ &= \frac{9}{25} (48) \\ &= 17.28 \end{aligned}$$

สรุป พ.ท. $\square ABED$

$$\begin{aligned} &= \text{พ.ท. } \triangle ABC - \text{พ.ท. } \triangle EDC \\ &= 48 - 17.28 \\ &= 30.72 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



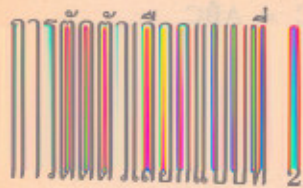
$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = 48$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

จากรูปเราสามารถประมาณด้วยสายตาได้ว่า พ.ท. $\square ABED$ มากกว่าครึ่งของ

$$\text{พ.ท. } \triangle ABC$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้



วาดรูปตามโจทย์กำหนด

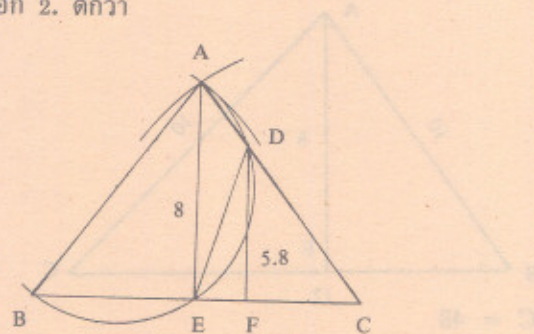
1. เขียน $\triangle ABC$, $AB=AC=10$ และ $BC=12$
2. เขียนวงกลมให้ AB เป็นเส้นผ่าศูนย์กลาง
3. วัดความยาว EC ได้ 6 ซม.
4. วัดความสูง DF ได้ 5.8 ซม.
5. วัดความสูง AE ได้ 8 ซม.

$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = 48$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \triangle DEC &= \frac{1}{2} \times EC \times DE \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 5.8 \\ &= 17.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พ.ท. } \square ABED &= \text{พ.ท. } \triangle ABC - \text{พ.ท. } \triangle DEC \\ &= 48 - 17.4 \\ &= 30.6 \end{aligned}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า



หมายเหตุ ในการทำโจทย์ข้อนี้มีการอ้างเหตุผลว่า
ถ้า XYZ และ XPQ เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแล้ว

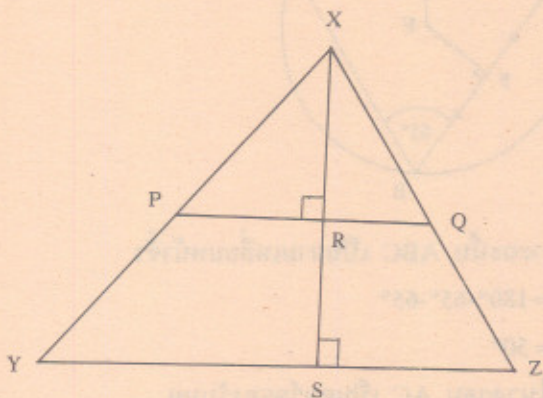
$$\frac{\text{พ.ท. } \triangle XPQ}{\text{พ.ท. } \triangle XYZ} = \frac{PQ^2}{YZ^2}$$

จึงขอแสดงข้อพิสูจน์สำหรับผู้สนใจดังนี้

วาดรูป $\triangle XYZ$ และ $\triangle XPQ$

ลากเส้น XS ตั้งฉากกับ YZ และตัด PQ ที่จุด R จะได้

$\triangle XPR$ และ $\triangle XYS$ คล้ายกัน

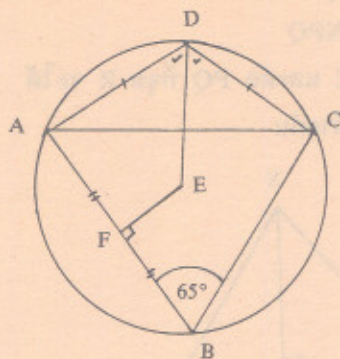


$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{XR}{XS} = \frac{PR}{YS} = \frac{2PR}{2YS} = \frac{PQ}{YZ}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{พ.ท. } \triangle XPQ}{\text{พ.ท. } \triangle XYZ} &= \frac{\frac{1}{2} \times PQ \times XR}{\frac{1}{2} \times YZ \times XS} \\ &= \frac{PQ \times XR}{YZ \times XS} \\ &= \left(\frac{PQ}{YZ} \right) \times \left(\frac{XR}{XS} \right) \\ &= \left(\frac{PQ}{YZ} \right) \times \left(\frac{PQ}{YZ} \right) \\ &= \frac{PQ^2}{YZ^2} \end{aligned}$$

8. ตอบ 2.

แนวคิด



เพราะว่า $AB=AC$ เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 $\angle ACB=65^\circ$ และ $\angle BAC=180^\circ-65^\circ-65^\circ$
 $=50^\circ$

เพราะว่า $ABCD$ บรรจุในวงกลม AC เป็นคอร์ดตรงข้ามมุม
 $\angle ADC$ และ $\angle ABC$ ซึ่งอยู่ตรงข้ามกัน
 เพราะฉะนั้น $\angle ADC+\angle ABC=180^\circ$

$$\angle ADC=180^\circ-65^\circ=115^\circ$$

เพราะว่า $AD=DC$

เพราะฉะนั้น $\angle ADC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 ซึ่งจะได้ว่า $\angle DAC=\angle DCA=\frac{180^\circ-115^\circ}{2}=\frac{65^\circ}{2}$

$$\angle ADE=\frac{\angle ADC}{2}=\frac{115^\circ}{2}$$

และ $\angle AFE=90^\circ$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} \angle ADE+\angle DEF+\angle EFA+\angle EFA+\angle FAD &= 360^\circ \\ \frac{115^\circ}{2}+\angle DEF+90^\circ+\left(50^\circ+\frac{65^\circ}{2}\right) &= 360 \end{aligned}$$

$$\angle DEF=130^\circ$$

การตัดตัวเลือก

1. เขียนรูปสามเหลี่ยม ABC โดยให้

$$AB = AC = 4 \text{ ซม.}$$

$$\text{และ } \hat{ABC} = 65^\circ, \hat{ACB} = 65^\circ, \hat{BAC} = 50^\circ$$

ซึ่งทำได้ดังนี้

1.1 ลาก AB ยาว 4 ซม.

1.2 ลาก CA ทำมุม $\hat{CAB} = 50^\circ$ และ $AC = 4$

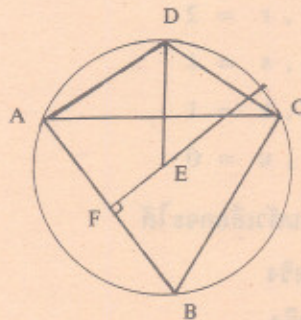
1.3 ลาก BC ก็เสร็จแล้ว

2. เขียนวงกลมล้อมรอบ ABC ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่เส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉาก AB กับ AC ให้ E เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ F เป็นจุดที่ทำให้ EF แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

3. จากจุด E ลากเส้น ED ให้ $ED \perp AB$

4. ลากเส้น AD และ CD

ขณะนี้เราจะได้รูปที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้วนั่นคือ



$$AB = AC \text{ และ } \hat{ABC} = 65^\circ$$

$$AD = DC$$

ED แบ่งครึ่งมุม \hat{ADC}

EF แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

วัดมุม \hat{DEF} ได้ 130°

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย



แนวคิด ดีกรี $p(x) = r$

ดีกรี $q(x) = s$

ดีกรี $A(x) = t$

ดีกรี $B(x) = u$

เพราะว่า $p(x) = A(x)q(x) + B(x)$

เพราะฉะนั้นดีกรีของ $p(x)$ ต้องเท่ากับดีกรีของ $A(x)q(x)$

และดีกรีของ $A(x)q(x)$ เท่ากับ $s+t$

สรุป $r = s+t$ ตรงกับตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ใช้การยกตัวอย่างช่วยในการตัดตัวเลือกจะง่ายกว่าการแสดงเหตุผล

เช่นเลือก $\frac{x^2+1}{x} = x + \frac{1}{x}$

$$p(x) = x^2 + 1, \quad r = 2$$

$$q(x) = x, \quad s = 1$$

$$A(x) = x, \quad t = 1$$

$$B(x) = 1, \quad u = 0$$

นำค่า r, s, t, u แทนค่าในตัวเลือกจะได้

ตัวเลือก 1. $r = st$ ไม่จริง

ตัวเลือก 2. $r = s+t$ จริง

ตัวเลือก 3. $r = s+t+u$ จริง

ตัวเลือก 4. $r = st+u$ ไม่จริง

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

$$\text{ต่อไปเลือก } \frac{x^3+x^2+x}{x^2} = (x+1) + \frac{x}{x^2}$$

$$p(x) = x^3 + x^2 + x, \quad r = 3$$

$$q(x) = x^2, \quad s = 2$$

$$A(x) = x + 1, \quad t = 1$$

$$B(x) = x, \quad u = 1$$

แทนค่า r, s, t, u ในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 2. $r = s + t$ จริง

ตัวเลือก 3. $r = s + t + u$ ไม่จริง

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

10. ตอบ 1.

แนวคิด $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 A = 1$$

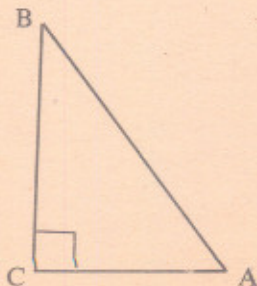
$$\cos^2 A = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

$$\cos A = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

เลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบโดยไม่ต้องคำนวณ $\cos B$

การหาค่า $\cos B$



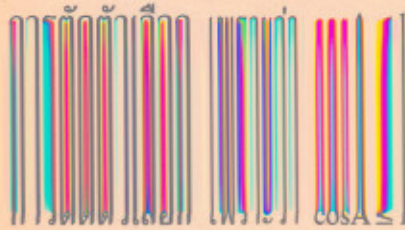
จาก $\triangle ABC$

$$\cos B = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$$

$$= \frac{BC}{AB}$$

$$= \sin A$$

$$= \frac{2}{5}$$



เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\cos A$ เป็นอัตราส่วนของความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $\cos A > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $0 < A < 90^\circ$ และ $\sin A = \frac{2}{5} \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้น $A \neq 45^\circ$

เพราะฉะนั้น $\cos A \neq \sin A$

ดังนั้น $\cos A \neq \frac{2}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

11. ตอบ 1.

แนวคิด เหตุผลสำคัญในข้อนี้คือ

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

มีคำตอบเดียวก็ต่อเมื่อ $B^2 - 4AC = 0$

และวิธีทำจริงก็เหมือนกับการตัดตัวเลือก นั่นคือต้องลองแทนค่าที่ละตัวเลือกเช่น

ตัวเลือก 1. $y = x^2 - 1$

$$\text{จาก } 2x - y - 2 = 0$$

$$2x - (x^2 - 1) - 2 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

$$x = 1$$

เพราะฉะนั้น $y = x^2 - 1$ และ $2x - y - 2 = 0$

ตัดกันที่จุด $(1, 0)$ ที่เดียวเท่านั้น

ดังนั้นถือว่าโซคติเลือก 1. เป็นคำตอบเลย



12. ตอบ 1.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกดีกว่า

จากโจทย์เลือก $x=1, y=2$

จะได้ $2(1)-2 = 0 < 2$

แสดงว่า $x=1, y=2$ ได้

แทนค่า $x=1, y=2$ ในตัวเลือกจะได้

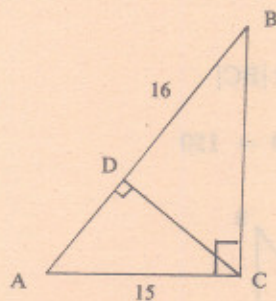
ตัวเลือก 1. $x+1 = 0+1 = 1$

$$2\frac{y}{2} = 2\frac{2}{2} = 1 \text{ แต่ } 1 < 1$$

สำหรับข้อนี้ถือว่าโชคดีมากที่พบว่าตัวเลือก 1. ไม่จริง
ดังนั้นเลือกเป็นคำตอบได้เลย

13. ตอบ 3.

แนวคิด



เพราะว่า $\angle ADC = \angle BCA = 90^\circ$

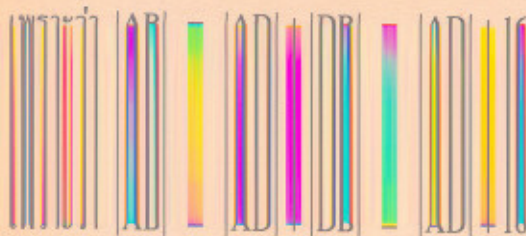
$$\angle DCA = \angle ABC$$

และ $\angle DAC = \angle BAC$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle ACD$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\text{ดังนั้น } \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|CD|}$$

$$\frac{|AB|}{15} = \frac{|BC|}{|CD|}$$



ให้ $|AD| = x$

ดังนั้น

$$\frac{x+16}{15} = \frac{15}{x}$$

$$x(x+16) = 225$$

$$x^2 + 16x - 225 = 0$$

$$(x+25)(x-9) = 0$$

$$x = 9, -25$$

ดังนั้น $|AD| = 9$

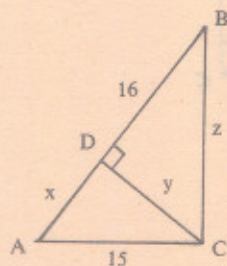
เพราะฉะนั้น $|AB| = 25$

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AB|^2 - |AC|^2 = 625 - 225 \\ &= 400 \end{aligned}$$

$$|BC| = 20$$

$$\begin{aligned} \text{สรุปพื้นที่ } \triangle ABC &= \frac{1}{2} \times |AC| \times |BC| \\ &= \frac{1}{2} \times 15 \times 20 = 150 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2



$$x^2 + y^2 = 15^2 = 225$$

$$16^2 + y^2 = z^2$$

$$15^2 + z^2 = (x+16)^2$$

$$225 + z^2 = x^2 + 32x + 256$$

$$x^2 - z^2 + 32x = -31 \quad \text{_____ (1)}$$

$$x^2 + y^2 = 225 \quad \text{_____ (2)}$$

$$z^2 - y^2 = 256 \quad \text{_____ (3)}$$

(1) + (2) + (3) ;

$$2x^2 + 32x = 450$$

$$x^2 + 16x - 225 = 0$$

$$(x-9)(x+25) = 0$$

$$x = 9, -25$$

ดังนั้น $x = 9$

$$\text{จาก (1)} \quad z^2 = x^2 + 32x + 31$$

$$= 81 + 288 + 31$$

$$= 400$$

$$z = 20$$

$$\text{พ.ท. } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times |AC| \times |BC|$$

$$= \frac{1}{2} \times 15 \times 20$$

$$= 150$$

การตัดตัวเลือก

นำค่าตัวเลือกขึ้นมาใช้แทนค่าย้อนกลับ

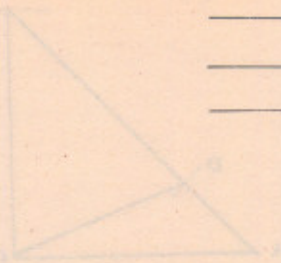
เช่น พ.ท. $\triangle = 120$ จะได้

$$\frac{1}{2} \times |AC| \times |BC| = 120$$

$$\frac{1}{2} \times 15 \times |BC| = 120$$

$$|BC| = 16$$

ต่อไปลองวาดรูปดูว่าจะเป็นไปได้หรือไม่ ดังต่อไปนี้





1. ลาก AC ยาว 15 ซม.
2. ลาก $BC \perp AC$ และ $|BC| = 16$
3. ลาก AB
4. ลาก BD ยาว 16 ซม.

จะเห็นได้ว่า มุม $ADC \neq 90^\circ$

ดังนั้น พ.ท. $\triangle ABC$ เท่ากับ 120 ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน ตัวเลือก 2. และ 4. ก็ใช้ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

14. ตอบ 3.

แนวคิด โดยการตั้งหารยาวจะได้

$$\begin{array}{r}
 \overline{) \begin{array}{l} x^3 - x^2y + xy^2 + y^3 \\ 2x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - y^4 \\ \hline 2x^4 - x^3y \\ \hline -2x^3y + 3x^2y^2 \\ -2x^3y + x^2y^2 \\ \hline 2x^2y^2 + xy^3 \\ 2x^2y^2 - xy^3 \\ \hline 2xy^3 - y^4 \\ \hline 2xy^3 - y^4 \end{array} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{2x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - y^4}{2x - y}$$

เท่ากับ $x^3 - x^2y + xy^2 + y^3$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

ถ้าพหุนาม x, y คูณกับ $2x - y$ แล้วได้ $2x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - y^4$ จะ
ต้องได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ y^3 พหุนามนั้นต้องเป็น + ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ
4. ทั้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นใช้การแทนค่า $x = 1, y = 1$ ก็ได้

โจทย์
$$\frac{2x^4 - 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3 - y^4}{2x - y}$$

$$= \frac{2-3+3+1-1}{2-1}$$

$$= 2.$$

ตัวเลือก 1. $1-1-1+1 = 0$

ตัวเลือก 2. $1-1-1-1 = -2$

ตัวเลือก 3. $1-1+1+1 = 2$

ตัวเลือก 4. $1-1+1-1 = 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทั้งได้

15. ตอบ 3.

แนวคิด โดยการตั้งหารยาวเพื่อหา $r(x)$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ x^2 - 2x + 1 \overline{) x^4 - 2x^2 + 3x - 1} \\ \underline{x^4 - 2x^3 + x^2} \\ 2x^3 - 3x^2 + 3x \\ \underline{2x^3 - 4x^2 + 2x} \\ 7x^2 - x \\ \underline{7x^2 - 7x + 7} \\ 10x - 7 \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{3x - 2}$$

เพราะฉะนั้น $r(x) = 3x - 2$

$$\begin{aligned} r(x)(3x^2 - 4x + 6) &= (3x - 2)(3x^2 - 4x + 6) \\ &= (9x^3 - 12x^2 + 18x - 6x^2 + 8x - 12) \\ &= 9x^3 - 18x^2 + 26x - 12 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เมื่อได้ $r(x) = 3x - 2$

$$\text{และ } r(x)(3x^2 - 4x + 6) = (3x - 2)(3x^2 - 4x + 6)$$

ใช้การแทนค่า $x = 0$ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

$$r(0)(0^2 - 0 + 6) = (-2)(6) = -12$$

ตัวเลือก 1. 6

ตัวเลือก 2. 6

ตัวเลือก 3. -12

ตัวเลือก 4. 12

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เพราะว่า $r(x)$ เป็นเศษเหลือของการหารด้วย $x^2 - 2x + 1$ ซึ่งเป็นพหุนามดีกรี 2

ดังนั้น ดีกรีของ $r(x) \leq 1$

ดังนั้น ดีกรีของ $r(x)(3x^2 - 4x + 6)$

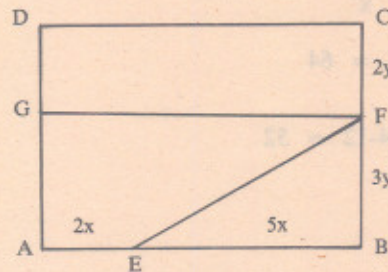
ต้องน้อยกว่าหรือเท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ตอนที่ 2

1. ตอบ 3 : 14

แนวคิด



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \triangle EBF &= \frac{1}{2} \cdot BE \cdot BF \\ &= \frac{1}{2} (5x)(3y) \\ &= \frac{15}{2} xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ } \square ABCD &= AB \cdot BC \\ &= (7x)(5y) \\ &= 35xy \end{aligned}$$

$$\frac{\text{พื้นที่ } \triangle EBF}{\text{พื้นที่ } \square ABCD} = \frac{\frac{15}{2} xy}{35xy} = \frac{15}{70} = \frac{3}{14}$$

ข้อสังเกต ข้อสอบแบบนี้เข้าลักษณะคำตอบเป็นค่าแน่นอนที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วน 2 : 5 และ 3 : 2 ดังนั้นหากเรากำหนดให้ AB = 7 เซนติเมตร, BC = 5 เซนติเมตร, EB = 5 เซนติเมตร และ BF = 3 เซนติเมตร ก็จะได้คำตอบ 3 : 14 เหมือนกัน

2. ตอบ 52

แนวคิด

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &= 4 \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 &= 4^3 \end{aligned}$$

$$x^3 + 3x^2 \left(\frac{1}{x} \right) + 3x \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \frac{1}{x^3} = 64$$

$$x^3 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} = 64$$

$$x^3 + 3(4) + \frac{1}{x^3} = 64$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 64 - 12 = 52$$

3. ตอบ 0

แนวคิด วิธีที่ 1 $x^3 + 3x - 4 = 0$

แทนค่า $x=1$ จะได้ $1^3 + 3 - 4 = 0$

เพราะฉะนั้น $x=1$ เป็นรากสมการ $x^3 + 3x - 4 = 0$

และ $\frac{x^3 + 3x - 4}{x - 1} = x^2 + x + 4$

ดังนั้น $x^3 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 + x + 4) = 0$

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16}}{2}$$

สรุปรากของสมการ $x^3 + 3x - 4 = 0$ คือ $1, \frac{-1 + \sqrt{-15}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{-15}}{2}$

มีผลบวก = $1 + \left(\frac{-1 + \sqrt{-15}}{2} \right) + \left(\frac{-1 - \sqrt{-15}}{2} \right) = 0$.

หมายเหตุ ถ้าเน้นเฉพาะรากที่เป็นจำนวนจริง คำตอบของข้อนี้ต้องมีรากตัวเดียวคือ 1 เท่านั้น

วิธีที่ 2 ถ้า a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 + 3x - 4 = 0$

$$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + 3x - 4$$

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = 0$$

เพราะฉะนั้น $a + b + c = 0$ สรุปผลบวกของรากเท่ากับ 0

4. ตอบ $\frac{1}{6}$

แนวคิด 5 ทหาร $xy+1$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ หลักหน่วยของ xy เป็นตัวเลข 4 หรือ 9

กรณี 1 $x=1$ xy มีหลักหน่วยเป็นเลข 4 หรือ 9 ได้ 1 วิธี

กรณี 2 $x=2$ xy มีหลักหน่วยเป็นเลข 4 หรือ 9 ได้ 0 วิธี

กรณี 3 $x=3$ xy มีหลักหน่วยเป็นเลข 4 หรือ 9 ได้ 1 วิธี

กรณี 4 $x=4$ xy มีหลักหน่วยเป็นเลข 4 หรือ 9 ได้ 0 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่ xy ลงท้ายด้วย 4 หรือ 9 มี 2 วิธี

ดังนั้น $xy+1$ ทหารด้วย 5 ลงตัวมี 2 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมด $= 4 \times 3 = 12$

สรุป ความน่าจะเป็นที่ 5 ทหาร $xy+1$ ลงตัว เท่ากับ $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

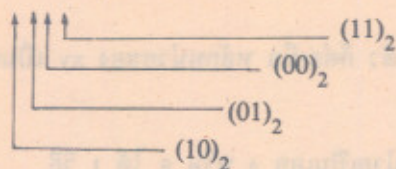
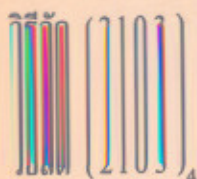
5. ตอบ $(223)_8$

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด } (2103)_4 &= 2 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 3 \times 4^0 \\ &= 128 + 16 + 0 + 3 \\ &= 147 \end{aligned}$$

เปลี่ยน $(147)_{10}$ เป็นฐาน 8

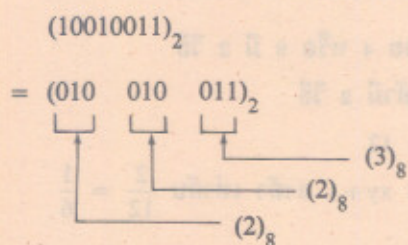
$$\begin{array}{r} 8 \overline{) 147} \\ \underline{8 } 18 \text{ เศษ } 3 \\ \underline{8 } 2 \text{ เศษ } 2 \\ \underline{0} \text{ เศษ } 2 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น $(2103)_4 = (147)_{10} = (223)_8$



เพราะฉะนั้น $(2103)_4 = (10010011)_2$

การเปลี่ยนจากฐานสองเป็นฐานแปด



เพราะฉะนั้น $(10010011)_2 = (223)_8$

สรุป $(2103)_4 = (223)_8$

คำถามเพิ่มเติม

1. จงเปลี่ยนตัวเลขต่อไปนี้เป็นตัวเลขฐานสอง

1.1 $(1245)_{10}$

1.2 $(2312)_4$

1.3 $(4572)_8$

2. จงเปลี่ยนตัวเลขต่อไปนี้เป็นตัวเลขฐานสี่

2.1 $(10011101)_2$

2.2 $(124356)_8$

2.3 $(34023)_{10}$

3. จงเปลี่ยนตัวเลขต่อไปนี้เป็นตัวเลขฐานแปด

3.1 $(78942)_{10}$

3.2 $(123120)_4$

3.3 $(1101101)_2$

คำตอบ 1.1 $(10011011101)_2$

1.2 $(10110110)_2$

1.3 $(100101111010)_2$

2.1 $(2131)_4$

2.2 $(22130232)_4$

2.3 $(20103213)_4$

3.1 $(232136)_8$

3.2 $(3330)_8$

3.3 $(155)_8$

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 6

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ผลลัพธ์ของ $\left(\frac{4^2 a^3 b}{16 a^{-6} b^4 c^2}\right)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{a^9}{b^{-3} c^{-2}}$

2. $\frac{a^9}{b^8 c^4}$

3. $\frac{a^{18}}{b^7 c^4}$

4. $\frac{a^{18}}{b^6 c^4}$

2. ค่าของ $\sqrt[3]{x^{-6} y^9 z^{12}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $x^2 y^3 z^4$

2. $x^{-2} y^3 z^4$

3. $x^3 y^2 z^3$

4. $x^{-3} y^3 z^4$

3. ค่าของ $(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)$ เท่ากับเท่าใด

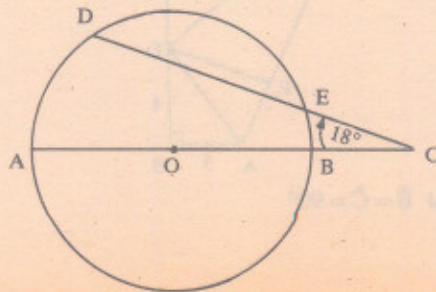
1. $x^6 + 8x^3 y^3 - 64y^6$

2. $x^6 - 8x^3 y^3 - 64y^6$

3. $x^6 - 64y^6$

4. $x^6 + 64y^6$

4. จากรูปที่กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม CE ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม มุม ACE = 18 องศา





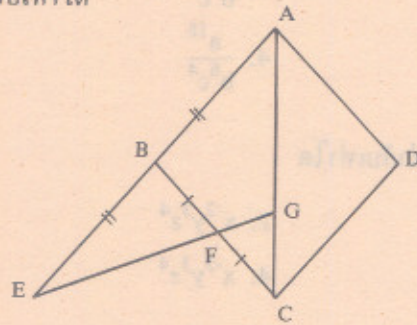
1. 3π

2. $\frac{9}{2}\pi$

3. 6π

4. 9π

5. กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน ต่อ AB ถึง E ให้ $BE = AB$, F เป็นจุดกึ่งกลางของ BC, AC ยาวเท่ากับ 12 เซนติเมตร ความยาวของ CG เท่ากับเท่าใด



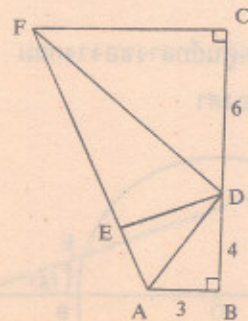
1. 6 เซนติเมตร

2. 4 เซนติเมตร

3. 3 เซนติเมตร

4. น้อยกว่า 3 เซนติเมตร

6. จากรูป



\square ABCF มีมุม $\hat{B} = \hat{C} = 90^\circ$

$AB = 3$

$BC = 10$

D เป็นจุดบน BC และ $BD=4$, $DC=6$

ถ้า $\angle EDA = \angle ADB$ และ $\angle EDF = \angle FDC$

แล้วความยาว $FD+FA$ เท่ากับเท่าใด

1. 12
2. 13
3. $10+5\sqrt{3}$
4. $10+5\sqrt{5}$

7. คำตอบของสมการ $x+b_1y+c_1 = 0$
 $x+b_2y+c_2 = 0$

มีค่า x เท่ากับเท่าใดเมื่อ $b_1 \neq b_2$

1. $\frac{c_1-c_2}{b_1-b_2}$
2. $\frac{c_2-c_1}{b_1-b_2}$
3. $\frac{b_2c_2-b_1c_1}{b_2-b_1}$
4. $\frac{b_1c_2-b_2c_1}{b_2-b_1}$

8. ถ้ากราฟของสมการ $ax+by+10 = 0$ ตัดกับกราฟของสมการ $y=5$ ที่จุด $(1, a)$ ค่าของ a และ b เป็นเท่าใด

1. $a=3$, $b=5$
2. $a=5$, $b=3$
3. $a=5$, $b=-3$
4. $a=-3$, $b=-5$

9. กำหนดให้ $p(x) = 3xy-4xy^2+x^2y$
 $q(x) = -2xy+4xy^2$
 $r(x) = -4x^2y+2xy^2$

ค่าของ $4(r(x)) - (p(x) - q(x))$ ตรงกับตัวเลือกใด

1. $-17x^2y+16xy^2-5xy$
2. $-15x^2y+5xy$
3. $-17x^2y+8xy^2-5xy$
4. $-17x^2y+8xy^2-xy$

5. ค่าของ $\frac{\sqrt{54y^3}}{\sqrt{6}} + y\sqrt{49}$ เท่ากับเท่าใด

1. $10y$
2. $10\sqrt{y}$
3. $y\sqrt{10y}$
4. $3\sqrt{y} + 7y$
5. $y\sqrt{3y} + 7y$

แทนค่า $y=1$ ก็สามารถตัดตัวเลือก 3. และ 5. ได้แล้ว

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

10. ถ้าคำตอบหนึ่งของสมการ $(q-r)x^2 + (r-p)x + (p-q) = 0$ เท่ากับ 1 แล้ว
คำตอบอีกคำตอบหนึ่งของสมการมีค่าเท่าใด

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $\frac{q-r}{p-q}$ | 2. $\frac{r-p}{p-q}$ |
| 3. $\frac{p-q}{q-r}$ | 4. $\frac{p-q}{r-p}$ |

11. ค่าของ x และ y จากสมการ

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 0$$

และ $px + qy = r$ มีค่าเท่าใด

- | |
|--|
| 1. $x = \frac{pr}{p^2+q^2}$, $y = \frac{qr}{p^2+q^2}$ |
| 2. $x = \frac{pr}{p^2-q^2}$, $y = \frac{qr}{p^2-q^2}$ |
| 3. $x = \frac{pr}{p^2-q^2}$, $y = \frac{qr}{q^2-p^2}$ |
| 4. $x = \frac{qr}{p^2-q^2}$, $y = \frac{pr}{q^2-p^2}$ |

12. ค่าตอบของสมการ

$$\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

มีค่าเท่ากับเท่าใด

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $x = a + b + c$ | 2. $x = a + b - c$ |
| 3. $x = a - b + c$ | 4. $x = a - b - c$ |

13. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ยาว 10 หน่วย

$\cos B = \frac{4}{5}$ และ $\cot C = \frac{17}{6}$ ความยาวด้าน AC และ BC เท่ากับเท่าใด

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. 325, 25 | 2. $5\sqrt{13}$, 25 |
| 3. $\sqrt{325}$, 17 | 4. 325, 14 |

14. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มี BC เป็นฐานยาว 6 เซนติเมตร มุม B มีขนาด 30 องศา ความสูงของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด
1. $5\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 2. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ เซนติเมตร
 3. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ เซนติเมตร
 4. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ เซนติเมตร
15. กำหนดให้เส้นทแยงมุม AC และ BD ของสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD ตัดกันที่ O, M เป็นจุดกึ่งกลางของ AD, MH \parallel DB พบ AC ที่ H, MK \parallel AC พบ DB ที่ K
- ถ้าสี่เหลี่ยม ABCD มีพื้นที่ 120 ตารางเมตร แล้วสี่เหลี่ยม MHOK มีพื้นที่เท่าไร
1. 12 ตารางเซนติเมตร
 2. 15 ตารางเซนติเมตร
 3. 18 ตารางเซนติเมตร
 4. 20 ตารางเซนติเมตร

คณิตศาสตร์ปรานัย เล่มที่ 13

คู่มือคัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

เป็นหนังสือที่มีข้อสอบเหมือนกับคณิตศาสตร์ ม.ต้น ตัวอย่างข้อสอบเช่น

5. ค่าของ $\frac{\sqrt{54y^3}}{\sqrt{6}} + y\sqrt{49}$ เท่ากับเท่าใด

1. $10y$
2. $10\sqrt{y}$
3. $y\sqrt{10y}$
4. $3\sqrt{y} + 7y$
5. $y\sqrt{3y} + 7y$

แทนค่า $y=1$ ก็สามารรถคัดตัวเลือก 3. และ 5. ได้แล้ว

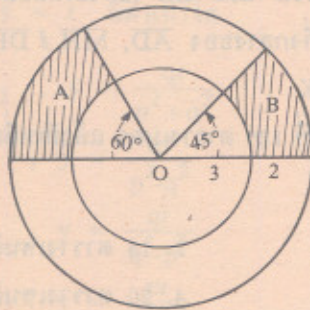
ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 2

1. ถ้า $\frac{1+x^2}{2+x^2} = \frac{4}{5}$ แล้ว $\frac{x^4+1}{x^4+2}$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$
อัตราส่วน $AC^2 : AB^2 : BC^2$ เท่ากับเท่าใด

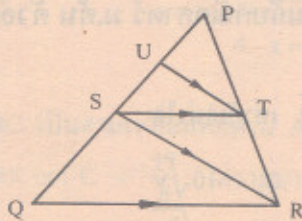
3.



วงกลมรัศมี 5 เซนติเมตร และ 3 เซนติเมตร มีจุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุด O
อัตราส่วน พื้นที่อาณาบริเวณ A : พื้นที่อาณาบริเวณ B เท่ากับเท่าใด

4. ถ้า $x^2 + \frac{1}{x^2} = 16$ และ $x > 0$ แล้ว $x^3 + \frac{1}{x^3}$ เท่ากับเท่าใด

5. จากรูป



$ST \parallel QR$ และ $UT \parallel SR$

ถ้า $PU=4$ และ $US=6$ แล้ว SQ เท่ากับเท่าใด

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 6

ตอนที่ 1

1. ตอบ 4.

แนวคิด

$$\begin{aligned} \left(\frac{4^2 a^3 b}{16 a^{-6} b^4 c^2} \right)^2 &= \left(\frac{16 a^{3+6}}{16 b^{4-1} c^2} \right)^2 \\ &= \left(\frac{a^9}{b^3 c^2} \right)^2 \\ &= \frac{a^{18}}{b^6 c^4} \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\left(\frac{4^2 a^3 b}{16 a^{-6} b^4 c^2} \right)^2$ เป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร

a, b และ c เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะตัวแปรบางตัวก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่น พจน์ของ a จะมี $\left(\frac{a^3}{a^{-6}} \right)^2 = a^{18}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปดูพจน์ของ b จะมี $\left(\frac{b}{b^4} \right)^2 = \frac{1}{b^6}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

2. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^{-6} y^9 z^{12}} &= \left[x^{-6} y^9 z^{12} \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x^{-\frac{6}{3}} y^{\frac{9}{3}} z^{\frac{12}{3}} \\ &= x^{-2} y^3 z^4 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 2.



เพราะว่า $\sqrt[3]{x^{-6} y^9 z^{12}}$ ต้องมีพจน์ของตัวแปร $\sqrt[3]{x^{-6}} = x^{-2}$
 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทั้งได้

3. ตอบ 3.

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad & (x+2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y) \\
 &= \left[(x-2y)(x^2+2xy+4y^2) \right] \left[(x+2y)(x^2-2xy+4y^2) \right] \\
 &= \left[x^3-(2y)^3 \right] \left[x^3+(2y)^3 \right] \\
 &= \left(x^3 \right)^2 - \left((2y)^3 \right)^2 \\
 &= x^6-64y^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{หมายเหตุ} \quad & A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2) \\
 & A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

โดยพิจารณาจากพจน์ของ y^6 จะได้ว่า

พจน์ของ y^6 จาก $(x+2y)(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)(x-2y)$

คือ $(2y)(4y^2)(4y^2)(-2y) = -64y^6$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทั้งได้

เพราะว่าโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้น แทนค่า $x=1, y=1$

ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

$$\begin{aligned} \text{จากโจทย์ } (1+2)(1+2+4)(1-2+4)(1-2) &= 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot (-1) \\ &= -63 \end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $1+8-64 = 55 \neq -63$

ตัวเลือก 2. $1-8-64 = -71 \neq -63$

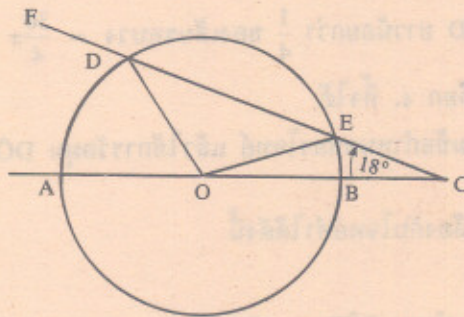
ตัวเลือก 3. $1-64 = -63$

ตัวเลือก 4. $1+64 = 65 \neq -63$

จากการแทนค่านี้ทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

4. ตอบ 2.

แนวคิด



ลากเส้น OD และ OE ช่วยในการคำนวณ จะเห็นได้ว่า $|OE| = |CE| = |OD|$
 เพราะฉะนั้น $\triangle OEC$ และ $\triangle OED$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 เพราะฉะนั้น $\angle OEC = \angle ECB = 18^\circ$

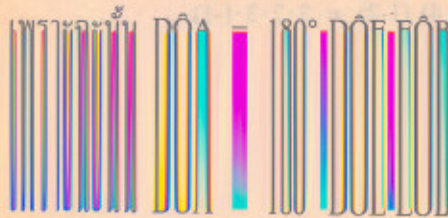
และ $\angle OEC = 180^\circ - \angle OEC - \angle ECB = 180 - 18 - 18 = 144$

$$\begin{aligned} \angle DEO &= 180^\circ - \angle OEC \\ &= 180^\circ - 144^\circ \\ &= 36^\circ \end{aligned}$$

เพราะว่า $\triangle ODE$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว และ $|OE| = |OD|$

เพราะฉะนั้น $\angle ODE = \angle DEO = 36^\circ$

$$\begin{aligned} \text{และ } \angle DOE &= 180^\circ - \angle ODE - \angle DEO \\ &= 180^\circ - 36^\circ - 36^\circ \\ &= 108^\circ \end{aligned}$$



$$= 180^\circ - 108^\circ - 18^\circ$$

$$= 54^\circ$$

ความยาวเส้นรอบวงกลม = $2\pi r = 2\pi(15) = 30\pi$

เพราะฉะนั้นส่วนโค้ง AD ยาวเท่ากับ $\left(\frac{54^\circ}{360^\circ}\right) \times 30\pi = 4.5\pi$

การตัดตัวเลือก ความยาวเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับ $2\pi r = 30\pi$

จากรูปส่วนโค้ง AD ยาวน้อยกว่า $\frac{1}{4}$ ของเส้นรอบวง = $\frac{30}{4}\pi = 7.5\pi$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ต่อไปลองวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ แล้วใช้การวัดมุม DOA.

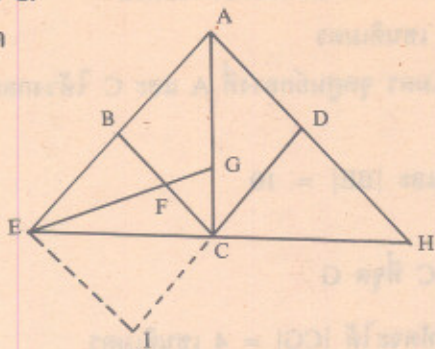
การวาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์ทำได้ดังนี้

1. ลากเส้นตรง CB
 2. ลากเส้นตรง CF ทำมุม $\angle FCB = 18^\circ$
 3. กางวงเวียนรัศมี 15 เซนติเมตร จุดศูนย์กลางที่ C ตัดเส้นตรง CF ที่จุด E (ใช้สเกล 1 เซนติเมตรต่อ 5 เซนติเมตร)
 4. ต่อเส้นตรง CB มาทางซ้าย
 5. ให้ E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม กางวงเวียนรัศมี 15 เซนติเมตร ตัดเส้นตรง BC ที่จุด O
 6. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลาง เขียนวงกลมตัดเส้นตรง CF ที่ D และตัดเส้นตรง CB ที่ A จะได้รูปภาพตามข้อกำหนดของโจทย์
- วัดมุม ADO ได้ 54°

ในทำนองเดียวกันจะได้ส่วนโค้ง AD ยาวเท่ากับ $\frac{54}{360} (30\pi) = 4.5\pi$

5 ตอบ 2.

แนวคิด



ขั้นตอนการวาดรูปเป็นดังนี้

1. ลากเส้น $EI \parallel BC$ และ $CI \parallel BE$
2. ลาก $DH \parallel BC$ และ $|DH| = |AD|$
3. ลากเส้น EC และ EH
4. เพราะว่า $\square AEID$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน
และ $|BF| = |FC|$

เพราะฉะนั้น EG และ GD อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

5. ในสามเหลี่ยม AEH , $|AD| = |DH|$
เพราะฉะนั้น ED เป็นเส้นมัธยฐาน

6. เพราะว่า $\widehat{BAC} = \widehat{CAD}$
 \overline{AC} ด้านร่วม
 $|AE| = |AH|$

เพราะฉะนั้น $\triangle AEC$ และ $\triangle ACH$ เหมือนกันทุกประการ
ดังนั้น AC เป็นเส้นมัธยฐานของ $\triangle AEH$

7. G เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐาน
เพราะฉะนั้น $AG : GC = 2:1$

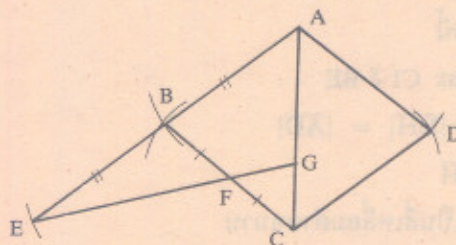
เพราะว่า $|AC| = 12$

เพราะฉะนั้น $|CG| = \frac{1}{3} |AC| = \frac{1}{3} (12) = 4$ เซนติเมตร

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์ทำได้ดังนี้

1. ลากเส้นตรง AC ยาว 12 เซนติเมตร
2. กางวงเวียนรัศมี 10 เซนติเมตร จุดศูนย์กลางที่ A และ C ให้วงกลมตัดกันที่จุด B และ D
3. ต่อเส้นตรง AB ไปที่ E และ $|BE| = 10$
4. แบ่งครึ่ง BC ที่จุด F
5. ลากเส้นตรง EF มาตัด AC ที่จุด G

วัดความยาว CG ด้วยไม้บรรทัดจะได้ $|CG| = 4$ เซนติเมตร



หมายเหตุ

1. จากรูปของโจทย์จะเห็นว่า CG สั้นกว่าครึ่งหนึ่งของ AC ดังนั้น $|CG| < 6$ แน่แน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

2. การวาดรูปอาจไม่ต้องให้ AC ยาวเท่ากับ 12 เซนติเมตร จริง ๆ ก็ได้ เพราะว่าเราสามารถนำความยาวมาเทียบเป็นอัตราส่วนได้

6. ตอบ 4.

แนวคิด



จากข้อกำหนดของโจทย์ $3 = 4$, $\hat{1} = 2$

$$\text{และ } \hat{1} + 2 + 3 + 4 = 180^\circ$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 2 + 3 = 90^\circ \text{ และ } \hat{1} + 4 = 90^\circ$$

$$\text{เพราะว่า } \hat{1} + 6 = 90^\circ$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 6 = 4$$

$$\text{เพราะว่า } \hat{1} + 4 = 90^\circ \text{ และ } 3 + 5 = 90^\circ$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \hat{1} = 3$$

พิจารณา $\triangle ABD$ และ $\triangle CDF$

$$\text{เพราะว่า } 6 = 4$$

$$\text{และ } \hat{1} = 3$$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABD$ และ $\triangle CDF$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

$$\frac{AB}{CD} = \frac{BD}{CF} = \frac{AD}{FD}$$

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{CF} = \frac{AD}{FD}$$

เพราะว่า ABD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{เพราะฉะนั้น } AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2} = \frac{4}{CF} = \frac{5}{FD}$$

$$CF = 8$$

$$FD = 10$$

เพราะว่า FDA เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } FA^2 &= FD^2 + AD^2 = 10^2 + 5^2 \\ &= 100 + 25 \\ &= 125 \end{aligned}$$

$$FA = 5\sqrt{5}$$

$$\text{สรุป } FD + FA = 10 + 5\sqrt{5}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทาง

1. ลากเส้น AB ยาว 3 ซม.
2. ลาก $BC \perp AB$ และ $BC = 10$ ซม.
3. เขียนจุด D และ $BD = 4$ ซม.
4. ลาก AD
5. วัดมุม $\angle ADB$ ได้ 32°
6. ลาก ED โดยทำให้ $\angle ADE = 32^\circ$
7. ลองแบ่งครึ่งมุม $\angle EDC$ ด้วยวงเวียนบ้างก็ได้ และลาก FD แบ่งครึ่งมุม $\angle EDC$
8. ลากเส้น CF ให้ $CF \perp BC$
9. ลากเส้น FA และให้ E อยู่บน FA

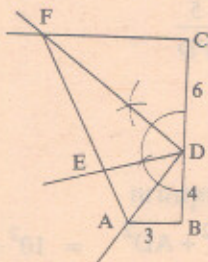
ขณะนี้เราได้รูปตามข้อกำหนดของโจทย์แล้ว

วัดความยาวของ $FD = 10$

$$FA = 11$$

$$\text{ดังนั้น } FD + FA = 21$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. ทิ้งได้



$$\text{เพราะว่า } 10 + 5\sqrt{3} = 10 + 5(1.7) = 18.5$$

$$\text{และ } 10 + 5\sqrt{5} = 10 + 5(2.2) = 21$$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

7. ตอบ 4.

$$\text{แนวคิด} \quad x + b_1 y + c_1 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

$$x + b_2 y + c_2 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

$$b_2 \times (1); \quad b_2 x + b_1 b_2 y + b_2 c_1 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (3)$$

$$b_1 \times (2); \quad b_1 x + b_1 b_2 y + b_1 c_2 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (4)$$

$$(3)-(4); \quad b_2 x - b_1 x + b_2 c_1 - b_1 c_2 = 0$$

$$(b_2 - b_1)x = b_1 c_2 - b_2 c_1$$

$$\text{เพราะว่า } b_2 - b_1 \neq 0 \quad \text{เพราะฉะนั้น } x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{b_2 - b_1}$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก การแทนค่า b_1, b_2, c_1, c_2 บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้
 เช่นลองแทนค่า $b_1 = 2, b_2 = 4, c_1 = 4, c_2 = 4$
 ในโจทย์และตัวเลือก

$$x + 2y + 4 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

$$x + 4y + 4 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

$$2 \times (1) \quad 2x + 4y + 8 = 0 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (3)$$

$$(3)-(2) \quad x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{c_1 - c_2}{b_1 - b_2} = 0 \neq -4$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } \frac{c_2 - c_1}{b_1 - b_2} = 0 \neq -4$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{b_2 c_2 - b_1 c_1}{b_2 - b_1} = \frac{16 - 8}{1} \neq -4$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทั้งได้



แนวคิด

เพราะว่าจุดตัดต้องอยู่บนเส้นตรง $y = 5$

เพราะฉะนั้น $a = 5$

ดังนั้น $(1, 5)$ เป็นจุดบนเส้นตรง

$$ax + by + 10 = 0$$

นั่นคือ $(5)(1) + b(5) + 10 = 0$

$$5b = -15$$

$$b = -3$$

สรุป $a = 5, b = -3$ ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $(1, a)$ อยู่บนกราฟของสมการ $y = 5$

เพราะฉะนั้น $a = 5$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทน $a = 5$ และ $b = 3$ ในสมการโจทย์

$$ax + by + 10 = 0$$

$$5x + 3y + 10 = 0$$

แต่เมื่อแทนค่า $x = 1, y = 5$ แล้ว

$$(5)(1) + (3)(5) + 10 \neq 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

9. ตอบ 1.

แนวคิด $4r(x) - (p(x) - q(x))$

$$= 4r(x) - p(x) + q(x)$$

$$= 4(-4x^2y + 2xy^2) - (3xy - 4xy^2 + x^2y) + (-2xy + 4xy^2)$$

$$= (-16-1)x^2y + (8+4+4)xy^2 + (-3-2)xy$$

$$= -17x^2y + 16xy^2 - 5xy$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า x และ y บางค่าที่คำนวณได้ง่าย ๆ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่น $x=1, y=1$

$$\text{จากโจทย์ } r(1) = -4+2 = -2$$

$$p(1) = 3-4+1 = 0$$

$$q(1) = -2+4 = 2$$

$$4r(1)-(p(1)-q(1)) = 4(-2)-(0-2) = -6$$

ตัวเลือก 1. $-17+16-5 = -6$

ตัวเลือก 2. $-15+5 = -10$

ตัวเลือก 3. $-17+8-5 = -14$

ตัวเลือก 4. $-17+8-1 = -10$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทั้งได้

10. ตอบ 3.

แนวคิด จากสูตรคำตอบ $ax^2+bx+c = 0$ คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการ $(q-r)x^2+(r-p)x+(p-q) = 0$ คือ

$$x = \frac{-(r-p) \pm \sqrt{(r-p)^2-4(q-r)(p-q)}}{2(q-r)}$$

เพราะว่ามีคำตอบ $x = 1$

$$\text{เพราะฉะนั้นให้ } \frac{-(r-p) + \sqrt{(r-p)^2-4(q-r)(p-q)}}{2(q-r)} = 1$$

ดังนั้น

$$\sqrt{(r-p)^2-4(q-r)(p-q)} = 2(q-r) + (r-p)$$

$$\begin{aligned}
 \text{คำตอบอีกสมการหนึ่งคือ } x &= \frac{-(-r-p) - \sqrt{(r-p)^2 - 4(q-r)(p-q)}}{2(q-r)} \\
 &= \frac{-(-r-p) - 2(q-r) - (-r-p)}{2(q-r)} \\
 &= \frac{2(p-q)}{2(q-r)} \\
 &= \frac{p-q}{q-r}
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า p, q, r บางค่าก็สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เช่น $p=1, q=2$ และ $r=4$ จะได้ $(q-r)x^2 + (r-p)x + (p-q) = 0$

$$-2x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$(2x-1)(x-1) = 0$$

$$x = 1, \frac{1}{2}$$

คำตอบอีกคำตอบหนึ่งคือ $x = \frac{1}{2}$

แทนค่า $p = 1, q = 2$ และ $r = 4$ ในตัวเลือกจะได้

$$\text{ตัวเลือก 1. } \frac{q-r}{p-q} = \frac{-2}{-1} = 2 \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } \frac{r-p}{p-q} = \frac{4-1}{1-2} = -3 \neq \frac{1}{2}$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } \frac{p-q}{q-r} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } \frac{p-q}{r-p} = \frac{1-2}{4-1} = -\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทั้งได้

11. ตอบ 3

แนวคิด

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 0 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (1)$$

$$px + qy = r \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (2)$$

จาก (1) เอา xy คูณตลอดจะได้

$$py + qx = 0 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (3)$$

$$qx(2); \quad pqx + q^2y = qr \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (4)$$

$$px(3); \quad pqx + p^2y = 0 \quad \underline{\hspace{10em}} \quad (5)$$

$$(4)-(5); \quad q^2y - p^2y = qr$$

$$y = \frac{qr}{q^2 - p^2}$$

เมื่อคำนวณค่า y ได้แล้วนักเรียนควรดูตัวเลือกด้วยว่าขณะนี้เราสามารถเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้แล้ว

การหาค่า x

$$\text{จาก (1)} \quad \frac{p}{x} = \frac{-q}{y}$$

$$\frac{x}{p} = \frac{-y}{q}$$

$$x = \frac{-p}{q} \left(\frac{qr}{q^2 - p^2} \right)$$

$$= \frac{-pr}{q^2 - p^2}$$

$$= \frac{pr}{p^2 - q^2}$$

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า p, q และ r บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่น $p=1, q=2, r=4$ แทนค่าในสมการของโจทย์

$$\text{จะได้ } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 0$$

$$\text{และ } x + 2y = 4$$

จากตัวเลือก 1. $x = \frac{pr}{p^2+q^2} = \frac{4}{5}$ และ $y = \frac{qr}{p^2+q^2} = \frac{8}{5}$

แต่ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{5}{4} + \frac{10}{8} = \frac{20}{8} \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จากตัวเลือก 2. $x = \frac{pr}{p^2-q^2} = \frac{4}{-3}$

$$y = \frac{qr}{p^2-q^2} = \frac{8}{-3}$$

แต่ $x + 2y = \frac{-4}{3} - \frac{16}{3} \neq 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

จากตัวเลือก 3. $x = \frac{pr}{p^2-q^2} = \frac{4}{-3}$

$$y = \frac{8}{3}$$

และ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{-3}{4} + \frac{3}{4} = 0$

และ $x + 2y = \frac{-4}{3} + 2\left(\frac{2}{3}\right) = 4$

ดังนั้นยังตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไม่ได้

จากตัวเลือก 4. $x = \frac{qr}{p^2-q^2} = \frac{8}{-3}$

$$y = \frac{pr}{q^2-p^2} = \frac{4}{3}$$

แต่ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{-3}{8} + 2\left(\frac{4}{3}\right) \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

12. ตอบ 1.

แนวคิด $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$

เอา abc คูณตลอด

$$a(x-a) + b(x-b) + c(x-c) = 2(bc + ac + ab)$$

$$ax + bx + cx - a^2 - b^2 - c^2 = 2(bc + ac + ab)$$

$$(a+b+c)x = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ac + ab + bc)$$

$$= (a+b+c)^2$$

$$x = a+b+c$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a=1, b=1, c=1$

จะได้ $\frac{x-1}{1} + \frac{x-1}{1} + \frac{x-1}{1} = 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \right)$

$$3x-3 = 6$$

$$3x = 9$$

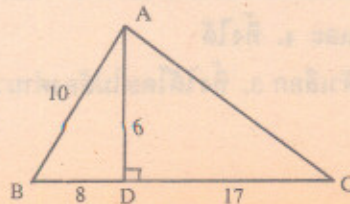
$$x = 3$$

ตัวเลือก 1. $a+b+c = 1+1+1 = 3$ ตัวเลือก 2. $a+b-c = 1+1-1 = 1 \neq 3$ ตัวเลือก 3. $a-b+c = 1-1+1 = 1 \neq 3$ ตัวเลือก 4. $a-b-c = 1-1-1 = -1 \neq 3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทั้งได้

13. ตอบ 2.

แนวคิด





$$\cos B = \frac{|BD|}{|AB|}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{|BD|}{|AB|}$$

$$BD = \frac{4}{5} \times |AB| = \frac{4}{5} \times 10 = 8$$

$$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$$

$$|AD| = 6$$

$$\cot C = \frac{|CD|}{|AD|}$$

$$\frac{17}{6} = \frac{|CD|}{6}$$

$$|CD| = 17$$

เพราะฉะนั้น $|BC| = |BD| + |CD| = 8 + 17 = 25$

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 = 6^2 + 17^2$$

$$= 36 + 289$$

$$= 325$$

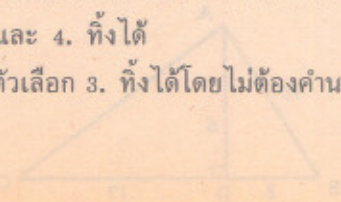
$$|AC| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่าด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่ 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

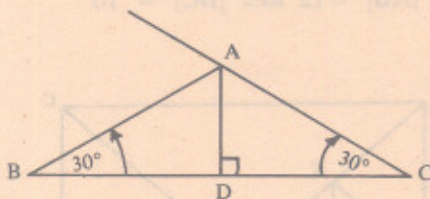
เมื่อได้ $|BC| = 25$ เราตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้โดยไม่ต้องคำนวณค่า $|AC|$ ก็ได้



14. ตอบ 4.

แนวคิด

ลาก AD ตั้งฉากกับฐาน BC จะได้ $|BD| = \frac{5}{2}$



$$|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$$

$$\text{ใน } \triangle ABD, \tan B = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AD|}{|BD|}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{|AD|}{|BD|}$$

$$|AD| = |BD| \cdot \tan 30^\circ = \frac{5}{2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดความยาว AD ได้ 1.4 เซนติเมตร

เพราะว่า $\sqrt{3} = 1.73$

$$5\sqrt{3} = 5(1.73) = 8.65$$

ประมาณค่าตัวเลขในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $5\sqrt{3} = 8.65$

ตัวเลือก 2. $\frac{5\sqrt{3}}{2} = 4.325$

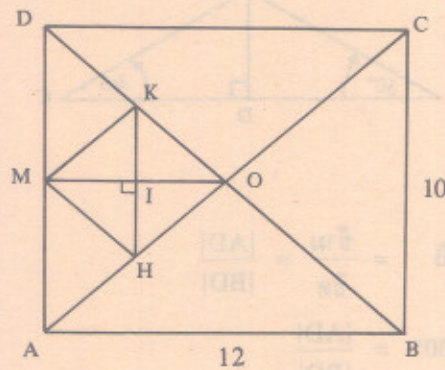
ตัวเลือก 3. $\frac{5\sqrt{3}}{3} = 2.88$

ตัวเลือก 4. $\frac{5\sqrt{3}}{6} = 1.44$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทั้งสี่ที่ว่า.

15. ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์กำหนด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานและมีพื้นที่เท่ากับ 120 ตารางเซนติเมตร ดังนั้นเราสามารถเลือกให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าได้ นอกจากนั้นเลือกให้ $|AB| = 12$ และ $|BC| = 10$



เส้นทแยงมุม \overline{AC} และ \overline{BD} จะแบ่งพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม AOD เท่ากับ $\frac{120}{4} = 30$

ลากเส้น HK เพื่อช่วยให้ดูรูปง่ายขึ้น

เพราะว่า $|MD| = |MA|$ และ $MK \parallel AO$ และ $MH \parallel DO$

เพราะฉะนั้น K เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{OD} และ H เป็นจุดกึ่งกลางของ \overline{AO}

นอกจากนั้นจะได้ว่า MK, KH, HM แบ่งสามเหลี่ยม ADO ออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน

ดังนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม MHK และพื้นที่สามเหลี่ยม HKO เท่ากับ $\frac{30}{4} = 7.5$

สรุปพื้นที่สี่เหลี่ยม MHOK = พ.ท. $\triangle MHK$ + พ.ท. $\triangle HKO$

$$\cong 7.5 + 7.5$$

$$= 15 \text{ ตารางเซนติเมตร}$$

การตัดตัวเลือก การที่เราเลือกใช้สี่เหลี่ยมผืนผ้าก็เป็นส่วนหนึ่งของการตัดตัวเลือก ซึ่งสามารถใช้ได้กับโจทย์ข้อนี้ ต่อไปวัดความยาว HK ได้เท่ากับ 5 วัดส่วนสูง MI และ IO

ได้ $|MI| = 3$ และ $|IO| = 3$

$$\begin{aligned} \text{จะได้พื้นที่ } \triangle MHK &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times |HK| \times |MI| \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \\ &= 7.5 \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันพื้นที่ $\triangle KHO$ เท่ากับ 7.5

$$\begin{aligned} \text{สรุป พ.ท. } \square MHOK &= \text{พ.ท. } \triangle MHK + \text{พ.ท. } \triangle KHO \\ &= 7.5 + 7.5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 13

คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

เป็นหนังสือที่มีข้อสอบเหมือนกับคณิตศาสตร์ ม.ต้น ตัวอย่างข้อสอบเช่น

ตัวอย่าง 1.3 $2x^3 - 10x^2 - 48x$ เท่ากับเท่าใด

1. $2x(x+8)(x-3)$ 2. $2x(x-8)(x+3)$ 3. $2(x-3)(x-8)(x+1)$
4. $2(x-3)(x-8)(x-1)$ 5. $2x(x-2)(x+12)$

แทนค่า $x=0$ ก็สามารถตัดตัวเลือก 3. และ 4. ได้แล้ว

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตอนที่ 2

1. ตอบ $\frac{10}{11}$

$$\begin{aligned} \text{แนวคิด} \quad \frac{1+x^2}{2+x^2} &= \frac{4}{5} \\ 5+5x^2 &= 8+4x^2 \\ x^2 &= 3 \\ x^4 &= 9 \\ \frac{x^4+1}{x^4+2} &= \frac{9+1}{9+2} = \frac{10}{11} \end{aligned}$$

2. ตอบ $AC^2:AB^2:BC^2 = 4:3:1$

แนวคิด

สมมติ $BC = x$

$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{AC}$$

$$AC = 2x$$

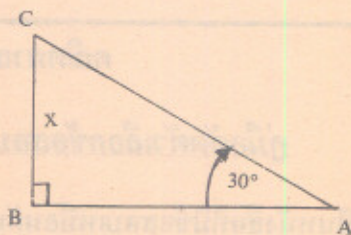
$$AB^2 = AC^2 - BC^2$$

$$= 4x^2 - x^2$$

$$= 3x^2$$

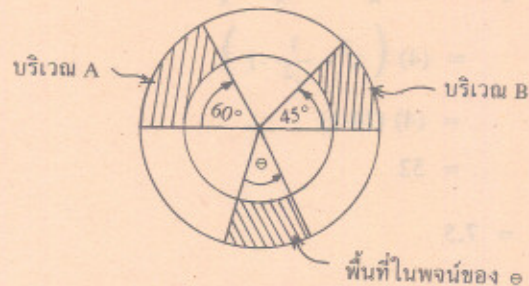
$$\text{สรุป } AC^2:AB^2:BC^2 = 4x^2:3x^2:x^2$$

$$= 4:3:1$$



3. ตอบ 4:3

แนวคิด



พื้นที่วงแหวนที่มีรัศมีวงนอก = 5 เซนติเมตร

รัศมีวงใน = 3 เซนติเมตร

มีพื้นที่เท่ากับ $\pi 5^2 - \pi 3^2 = 25\pi - 9\pi = 16\pi$ มุมรอบจุด 360° คิดเป็นพื้นที่ 16π มุมรอบจุด θ° คิดเป็นพื้นที่ $\frac{16\pi \theta}{360}$

$$\text{พื้นที่บริเวณ A} = \frac{16\pi (60)}{360}$$

$$\text{พื้นที่บริเวณ B} = \frac{16\pi (45)}{360}$$

$$\text{อัตราส่วน พื้นที่บริเวณ A : พื้นที่บริเวณ B} = \frac{16\pi (60)}{360} : \frac{16\pi (45)}{360}$$

$$= 60:45$$

$$= 4:3$$

4. ตอบ 52

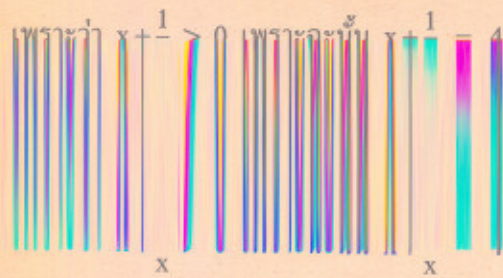
แนวคิด

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$= 14 + 2$$

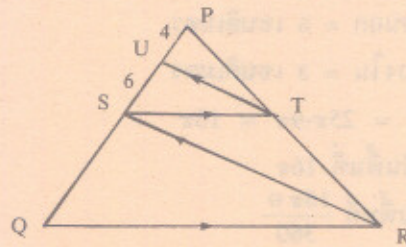
$$= 16$$



$$\begin{aligned} x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x^2 - x\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= (4) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 1\right) \\ &= (4) (14-1) \\ &= 52 \end{aligned}$$

5. ตอบ SQ = 7.5

แนวคิด



ในสามเหลี่ยม PSR, $UT \parallel SR$

เพราะฉะนั้น $PT:TR = PU:US = 4:6$

ในสามเหลี่ยม PQR, $ST \parallel QR$

เพราะฉะนั้น $PS:SQ = PT:TR = 4:6$

$$\frac{PS}{SQ} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{4+6}{SQ} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{10}{SQ} = \frac{2}{3}$$

$$SQ = \frac{15}{2} = 7.5$$

ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 7

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ตัวเลือกใดเป็นการแยกตัวประกอบของ $16a^4 + b^4 - 28a^2b^2$

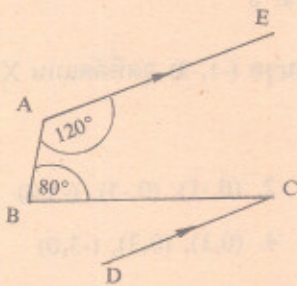
1. $(4a^2 + 7ab + b^2)(4a^2 - 4ab + b^2)$

2. $(4a^2 - 7ab + b^2)(4a^2 + 4ab + b^2)$

3. $(4a^2 - 6ab + b^2)(4a^2 + 6ab + b^2)$

4. $(4a^2 - 6ab - b^2)(4a^2 + 6ab - b^2)$

2.



$$\overline{AE} \parallel \overline{CD}$$

$$\angle EAD = 120^\circ$$

$$\angle ABC = 80^\circ$$

ขนาดของมุม BCD เท่ากับเท่าใด

1. 40°

2. 30°

3. 20°

4. 15°

3. เซตคำตอบของสมการ $\frac{x^2 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} = 0$

คือเซตในตัวเลือกใด

1. $\{0, 2, -2, 3, -3\}$

2. $\{0, 2, 3, -3\}$

3. $\{0, 2, -3\}$

4. $\{0, -3\}$

4. วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุด O และมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ 10 หน่วย

AB เป็นคอร์ดของวงกลม และ C เป็นจุดบนเส้นตรง AB โดยที่ $AB \perp OC$
ถ้าความยาว OC เท่ากับ 3 หน่วย แล้ว ความยาว AB เท่ากับเท่าใด

1. 4 หน่วย
 2. 8 หน่วย
 3. 10 หน่วย
 4. 16 หน่วย
5. ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และสมการ $x^2 + ax + 2b = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงแล้ว ค่าที่น้อยที่สุดของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด
1. 2
 2. 3
 3. 4
 4. 5
6. กราฟของสมการ $y = -x^2 + 4x + k$ ผ่านจุด $(-1, -8)$ จุดที่ตัดแกน X และแกน Y ตรงกับตัวเลือกใด
1. $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -3)$
 2. $(0, -1)$, $(0, -3)$, $(-3, 0)$
 3. $(-1, 0)$, $(-3, 0)$, $(0, -3)$
 4. $(0, 1)$, $(0, 3)$, $(-3, 0)$
7. อัตราส่วนระหว่างจำนวนสองจำนวนเป็น 3:4 ผลบวกของสองเท่าของจำนวนที่น้อยกว่ากับสามเท่าของจำนวนที่มากกว่ามีค่าเท่ากับ 45, จำนวนทั้งสองนั้น คือจำนวนในตัวเลือกใด
1. $7\frac{16}{17}$ และ $10\frac{10}{17}$
 2. $1\frac{67}{68}$ และ $2\frac{11}{17}$
 3. 7.5 และ 10
 4. $3\frac{3}{4}$ และ 5
8. ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ $3x^2 - 7x - 6$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงมีค่าเท่ากับเท่าใด
1. มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $-4\frac{23}{26}$
 2. มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $-10\frac{1}{12}$
 3. มีค่าสูงสุดเท่ากับ $-4\frac{23}{26}$
 4. มีค่าสูงสุดเท่ากับ $-10\frac{1}{12}$

9. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ C เป็นมุมฉาก ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sin A \cos A < 1$ 2. $\sin A \cos A > 1$
 3. $\sin A \cos A = 1$ 4. $\sin A \cos A = 0$

10. เซตคำตอบของสมการ $x^4 + 5x^3 = 6x^2$ คือเซตใด

1. $\{0, 1, 6\}$ 2. $\{-6, 0, 1\}$
 3. $\{-6, -1, 0\}$ 4. $\{-1, 0, 6\}$

11. สมการ $ax^2 - bx + c = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงเมื่อเงื่อนไขในตัวเลือกใดเป็นจริง

1. $-b^2 + 4ac \geq 0$ 2. $-b^2 - 4ac \geq 0$
 3. $b^2 + 4ac \geq 0$ 4. $b^2 - 4ac \geq 0$

12. ถ้า $x+2$ ทหาร $x^3 + 2x^2 + 3x + a$ และ $x^3 + x^2 + 9$ เหลือเศษเท่ากัน แล้วค่าของ a เป็นเท่าใด

1. -1 2. 5
 3. -11 4. 11

13. กำหนดให้ $A(x) = x^5 - 4x^4 + x^2 - 3x + 5$ $B(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 - x - 5$

$C(x) = x - 1$ ค่าของ $\frac{A(x)}{C(x)} - 2B(x) + A(1)$ เท่ากับเท่าใด

1. $x^5 - 5x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 3x + 10$ 2. $3x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 4x - 15$
 3. $x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ 4. $-x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 5$

14. กำหนดให้ $1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$ ค่าของ $(x-1)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2
 3. 3 4. 4

15. กำหนดให้ $A(x) = x^2 - ax$ $B(x) = x^3 - 2ax^2$

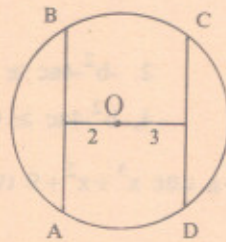
และ $C(x) = ax^2 - 3a^2x + 2a^3$

แล้ว ค.ร.น. ของ $A(x)$, $B(x)$ และ $C(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $ax^3(x-a)(x-2a)$
2. $ax^2(x-a)(x-2a)$
3. $ax(x-a)(x-2a)$
4. $a(x-a)(x-2a)$

ตอนที่ 2

1.



วงกลมจุดศูนย์กลางที่จุด O มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร

คอร์ด AB ห่างจากจุด O เท่ากับ 2 เซนติเมตร

คอร์ด CD ห่างจากจุด O เท่ากับ 3 เซนติเมตร

อัตราส่วน $AB^2 : CD^2$ เท่ากับเท่าใด

2. จำนวนคำตอบของสมการ $|x-2|-1| = 4$ เท่ากับเท่าใด
3. x, y เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $x+y+xy = 54$ แล้ว $x+y$ เท่ากับเท่าใด
4. คำตอบของสมการ $8^{2x} = 16^{1-2x}$ เท่ากับเท่าใด
5. x, y, z, w เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ ${}^3\sqrt{xyz} = 4$
และ ${}^4\sqrt{xyzw} = 2\sqrt{10}$
ค่าของ w เท่ากับเท่าใด

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 7

ตอนที่ 1

1. ตอบ 3.

$$\begin{aligned}
 \text{แนวคิด} \quad 16a^4 + b^4 - 28a^2b^2 &= 16a^4 - 28a^2b^2 + b^4 \\
 &= 16a^4 + 8a^2b^2 + b^4 - 36a^2b^2 \\
 &= (4a^2 + b^2)^2 - (6ab)^2 \\
 &= ((4a^2 + b^2) - 6ab)((4a^2 + b^2) + 6ab) \\
 &= (4a^2 - 6ab + b^2)(4a^2 + 6ab + b^2)
 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a=1, b=1$ ในโจทย์และตัวเลือกจะได้

$$16a^4 + b^4 - 28a^2b^2 = 16 + 1 - 28 = -11$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } (4+7+1)(4-4+1) = 12 \neq -11$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } (4-7+1)(4+4+1) = -18 \neq -11$$

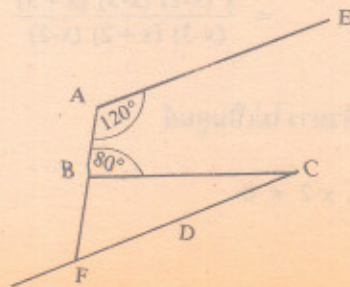
$$\text{ตัวเลือก 3. } (4-6+1)(4+6+1) = -11$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } (4-6-1)(4+6-1) = -27 \neq -11$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

2. ตอบ 3.

แนวคิด



ลาก AB และ CD มาพบกันที่จุด F

$$\text{จะได้ } \angle AFC = 180^\circ - \angle AFB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle FBC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } \angle BCD &= 180^\circ - \angle FBC - \angle AFC \\ &= 180^\circ - 100^\circ - 60^\circ \\ &= 20^\circ \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก ใช้ไม้โปรและครึ่งวงกลมวัดมุมช่วยในการวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์

1. ลากเส้น AE
2. ลากเส้น BA ทำมุม $\angle BAE = 120^\circ$
3. ลากเส้น BC ทำมุม $\angle CBA = 80^\circ$
4. ลากเส้น CD ให้ขนานกับ AE
5. วัดมุม $\angle BCD$ ด้วยครึ่งวงกลมจะได้มุม 20°

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทั้งดีกว่า

3. ตอบ 4.

แนวคิด โดยการแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned} \frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} &= \frac{x(x^3 - 2x^2 - 9x + 18)}{(x-3)(x^2-4)} \\ &= \frac{x(x-2)(x^2-9)}{(x-3)(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x(x-2)(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

เพราะว่าเราต้องเลือกกรณีที่ตัวหารไม่เป็นศูนย์

ดังนั้น $x-3 \neq 0$, $x+2 \neq 0$, $x-2 \neq 0$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 18x}{x^3 - 3x^2 - 4x + 12} = \frac{x(x+3)}{x+2}$$

$$\frac{x(x+3)}{x+2} = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$x = 0, -3$$

สรุปเซตคำตอบคือ $\{0, -3\}$

การตัดตัวเลือก

เลือกค่า x ในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ และต้องเลือกค่า x ชนิดจำแนกตัวเลือกได้ เช่น

$x = 0$ และ $x = -3$ ไม่ควรใช้

ลองแทนค่า $x = 2$

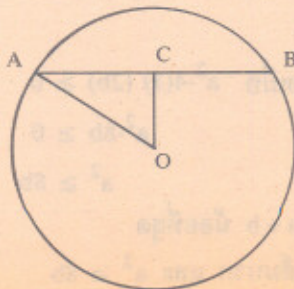
$$\begin{aligned} \text{จะได้ } x^3 - 3x^2 - 4x + 12 & \\ &= 8 - 12 - 8 + 12 \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x = 2$ เป็นคำตอบของสมการโจทย์ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

4. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 10 หน่วย เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมยาวเท่ากับ 5 หน่วย



เพราะว่า $OC \perp AB$

เพราะฉะนั้น $|\overline{AC}| = |\overline{BC}|$

เพราะว่า $|\overline{OA}| = 5$ และ $|\overline{OC}| = 3$

$$|\overline{AC}|^2 = |\overline{OA}|^2 - |\overline{OC}|^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$$|\overline{AC}| = 4$$

เพราะฉะนั้น $|\overline{AB}| = 2|\overline{AC}| = 8$ หน่วย

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่าเส้นผ่านศูนย์กลางเป็นคอร์ดที่ยาวที่สุด

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เขียนรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทาง

1. เขียนวงกลมรัศมี 5 ซม.
 2. ลากเส้น OC ยาว 3 ซม.
 3. ลากเส้น AB ให้ตั้งฉากกับ OC
- วัดความยาว AB ได้ 8 ซม.

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

5. ตอบ 3.

แนวคิด สมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$

มีคำตอบเป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $B^2 - 4AC \geq 0$

ดังนั้น $x^2 + ax + 2b = 0$

มีรากเป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $a^2 - 4(1)(2b) \geq 0$

$$a^2 - 8b \geq 0$$

$$a^2 \geq 8b$$

การเลือกค่า a, b ที่ทำให้ $a + b$ น้อยที่สุด

เพราะว่า a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a^2 \geq 8b$

เพราะฉะนั้นเลือก $b = 1$

เพราะว่า $a^2 \geq 8$

ดังนั้นเลือก $a = 3$

สรุป $a+b$ น้อยที่สุดเท่ากับ $1+3 = 4$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้นลอง

$a=1, b=1$ ก่อนว่าใช้ได้หรือไม่

$$x^2 + ax + 2b = 0$$

$$x^2 + x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2} \quad \text{ไม่เป็นจำนวนจริง}$$

เพราะฉะนั้น $a=1, b=1$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $a=1, b=2$

$$x^2 + ax + 2b = 0$$

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} \quad \text{ไม่เป็นจำนวนจริง}$$

$a=2, b=1$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} \quad \text{ไม่เป็นจำนวนจริง}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

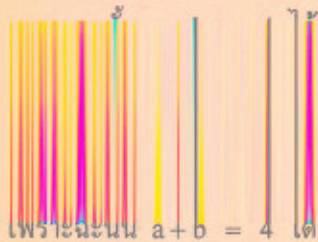
$a=3, b=1$

$$x^2 + ax + 2b = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

$$(x+2)(x+1) = 0$$

$$x = -1, -2$$



เพราะฉะนั้น $a + b = 4$ ได้

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

6. ตอบ 1.

แนวคิด $y = -x^2 + 4x + k$ ผ่านจุด $(-1, -8)$

ดังนั้น $-8 = -(-1)^2 + 4(-1) + k$

$$-8 = -1 - 4 + k$$

$$k = -3$$

เพราะฉะนั้น $y = -x^2 + 4x - 3$

เมื่อ $x=0$ จะได้ $y=-3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เมื่อ $y=0$ จะได้ $-x^2 + 4x - 3 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-3)(x-1) = 0$$

$$x = 3, 1$$

จุดตัดแกน X คือ $(3,0)$ และ $(1,0)$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก ต้องฝึกสังเกตจากตัวเลือก

เช่นตัวเลือก 3. มีจุด $(0, -1), (0, -3)$

แสดงว่า $x=0 \rightarrow y=-1$

และ $x=0 \rightarrow y=-3$ ดังนั้น $k=-1$ และ 3

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เราจึงต้องตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันก็ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้เลย

7. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ x, y เป็นจำนวนที่ต้องการ และ $x < y$

เพราะว่า $x:y = 3:4$ เพราะฉะนั้นให้ $x=3k$ และ $y=4k$

เพราะว่า $2x + 3y = 45$

$$6k + 12k = 45$$

$$18k = 45$$

$$k = \frac{5}{2}$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{5}{2}(3) = \frac{15}{2} = 7.5$

$$y = \frac{5}{2}(4) = 10$$

สรุปตัวเลือกคือข้อ 3.

การตัดตัวเลือก

นำค่าจากตัวเลือกมาแทนค่า เช่น

$$\begin{aligned} 2\left(7\frac{16}{17}\right) + 3\left(10\frac{10}{17}\right) &= \frac{270}{7} + \frac{540}{7} \\ &= \frac{810}{7} \\ &\neq 45 \end{aligned}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

$$\begin{aligned} 2\left(1\frac{67}{68}\right) + 3\left(2\frac{11}{17}\right) &= \frac{270}{68} + \frac{135}{17} \\ &= \frac{270}{68} + \frac{540}{68} \\ &= \frac{810}{68} \\ &\neq 45 \end{aligned}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

$$2(7.5) + 3(10) = 45 \quad \text{และ} \quad 7.5:10 = 3:4$$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย



แนวคิด

$$\begin{aligned}
 y &= 3x^2 - 7x - 6 \\
 &= 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x\right) - 6 \\
 &= 3\left(x^2 - \frac{7}{3}x + \left(\frac{7}{6}\right)^2\right) - 6 + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \\
 &= 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - 6 - \frac{49}{12} \\
 &= 3\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{121}{12}
 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $y \geq -\frac{121}{12} = -10\frac{1}{12}$

สรุป ค่าต่ำสุดของ y เท่ากับ $-10\frac{1}{12}$ เมื่อ $x = \frac{7}{6}$

การตัดตัวเลือก

สมการ $y = AX^2 + BX + C$ ถ้า $A > 0$ แล้วกราฟเป็นรูปหงาย มีค่าต่ำสุดและไม่มีค่าสูงสุดถ้า $A < 0$ แล้วกราฟเป็นรูปคว่ำ มีค่าสูงสุด และไม่มีค่าต่ำสุดเพราะฉะนั้น $y = 3x^2 - 7x - 6$ มีค่าต่ำสุดและไม่มีค่าสูงสุด

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทั้งได้

9. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\hat{C} = 90^\circ$ เพราะฉะนั้น $0 < A < 90^\circ$ ดังนั้น $0 < \sin A < 1$ และ $0 < \cos A < 1$ เพราะฉะนั้น $0 < \sin A \cos A < 1$.

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก การแทนค่ามุม A บางมุมก็สามารถตัดตัวเลือกได้เช่น $A = 30^\circ$

$$\sin A = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A \cos A = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

10. ตอบ 2.

$$\text{แนวคิด } x^4 + 5x^3 = 6x^2$$

$$x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(x^2 + 5x - 6) = 0$$

$$x^2(x-1)(x+6) = 0$$

$$x = 0, 1, -6$$

เซตคำตอบคือ $\{-6, 0, 1\}$ ตรงกับตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก เลือกค่า x ที่จำแนกตัวเลือกได้ไปแทนค่าในโจทย์

$$\text{เช่น } x=1 \text{ จะได้ } 1^4 + 5(1)^3 = 6 = 6(1)^2$$

เพราะฉะนั้น $x=1$ เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

$$\text{แทนค่า } x=6 \text{ จะได้ } 6^4 + 5(6)^3 = 1296 + 1080 = 2376 \neq 6(6)^2$$

ดังนั้น $x=6$ ไม่เป็นคำตอบของสมการ

เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

11. ตอบ 4.

แนวคิด $Ax^2 + Bx + C = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

เมื่อ $B^2 - 4AC \geq 0$

$$\text{จากสมการ } ax^2 - bx + c = 0$$

$$A = a$$

$$B = -b$$

$$C = c$$

$$\begin{aligned} B^2-4AC &= (-b)^2-4ac \\ &= b^2-4ac \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $ax^2-bx+c = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง เมื่อ $b^2-4ac \geq 0$

การตัดตัวเลือก เลือกค่า a, b, c ที่ทำให้เงื่อนไขของโจทย์เป็นจริง เช่น

$$a=0$$

$$b=1$$

$$c=1$$

จะได้สมการ $0x^2 - x + 1 = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง $x = 1$

จากตัวเลือกแต่ละตัวเมื่อแทนค่า $a=0, b=1, c=1$

$$1. -b^2+4ac = -1 \neq 0$$

$$2. -b^2-4ac = -1 \neq 0$$

$$3. b^2+4ac = 1 \geq 0$$

$$4. b^2-4ac = 1 \geq 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. ทิ้งได้

เลือก $a=1, b=0, c=-1$

$$\text{สมการ } ax^2+bx+c = 0$$

คือ $x^2-1=0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

$$\text{แต่ } b^2+4ac = 0-4 \neq 0$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

12. ตอบ 4.

แนวคิด วิธีที่ 1 โดยการตั้งหารยาว

$$\begin{array}{r|l}
 x^2-x+2 & \\
 \hline
 x+2 \overline{) x^3+x^2+9} & \\
 \underline{x^3+2x^2} & \\
 -x^2+9 & \\
 \underline{-x^2-2x} & \\
 2x+9 & \\
 \underline{2x+4} & \\
 \underline{\quad 5} & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 x^2+3 & \\
 \hline
 x+2 \overline{) x^3+2x^2+3x+a} & \\
 \underline{x^3+2x^2} & \\
 3x+a & \\
 \underline{3x+6} & \\
 \underline{\quad a-6} & \\
 \hline
 \end{array}$$

เพราะฉะนั้น $5 = a-6$

$$a = 11$$

วิธีที่ 2 เพราะว่าเศษเหลือจากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $x-k$ คือ $p(k)$ เพราะฉะนั้น $p(x) = x^3+x^2+9$ หารด้วย $x+2$ เหลือเศษเท่ากับ

$$\begin{aligned}
 p(-2) &= (-2)^3 + (-2)^2 + 9 \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

 $q(x) = x^3+2x^2+3x+a$ หารด้วย $x+2$ เหลือเศษเท่ากับ

$$q(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 + 3(-2) + a = a-6$$

ดังนั้น $a-6 = 5$

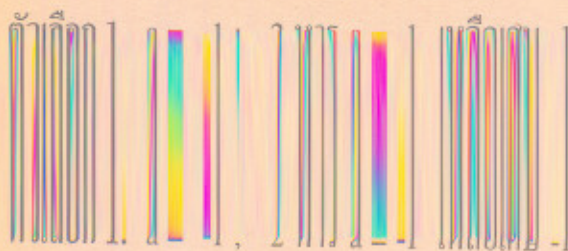
$$a = 11$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า x บางค่าก็สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เช่น

$$x=0 \text{ จะได้ } x+2 = 2$$

$$x^3+2x^2+3x+a = a \text{ และ } x^3+x^2+9 = 9$$

เศษเหลือจากการหาร 9 ด้วย 2 คือ 1



ตัวเลือก 2. $a = 5$; 2 ทหาร $a = 5$ เหลือเศษ 1

ตัวเลือก 3. $a = -11$; 2 ทหาร $a = -11$ เหลือเศษ -1

ตัวเลือก 4. $a = 11$; 2 ทหาร $a = 11$ เหลือเศษ 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้ แทนค่า $x=2$ จะได้ $x+2 = 4$

$$x^3 + 2x^2 + 3x + a = 8 + 8 + 6 + a = 22 + a$$

$$x^3 + x^2 + 9 = 8 + 4 + 9 = 21$$

เศษเหลือจากการหาร 21 ด้วย 4 คือ 1

ตัวเลือก 2. ถ้า $a=5$ แล้ว $22+a=27$ ซึ่งหารด้วย 4 จะเหลือเศษ 3

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

13. ตอบ 4.

แนวคิด $A(1) = 1 - 4 + 1 - 3 + 5 = 0$

เพราะฉะนั้น $x-1$ หาร $A(x)$ ลงตัว และโดยการตั้งหารยาวจะได้

$$A(x) = (x-1)(x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 5)$$

$$\frac{A(x)}{x-1} = x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 5$$

$$\frac{A(x)}{C(x)} = x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 5 \quad (1)$$

$$2B(x) = 2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x - 10$$

สรุป $\frac{A(x)}{C(x)} - 2B(x) + A(1)$

$$= [x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x - 5] - [2x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 2x - 10] + 0$$

$$= -x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 5$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

$A(1)$ ค่าคงตัว

$B(x)$ ดีกรีเท่ากับ 4

$\frac{A(x)}{C(x)}$ ดีกรีเท่ากับ $5-1 = 4$

สรุป $\frac{A(x)}{C(x)} = 2B(x) + A(1)$ มีดีกรีเท่ากับ 4

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

แทนค่า $x=0$ ในโจทย์และตัวเลือก

$$A(0) = 5, B(0) = -5, C(0) = -1$$

$$\frac{A(0)}{C(0)} - 2B(0) + A(1) = \frac{5}{-1} - 2(-5) + 0 = 5$$

$$\text{ตัวเลือก 1. } x^5 - 5x^4 - 9x^3 - 2x^2 - 3x - 10 = 10$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } 3x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 4x - 15 = -15$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } x^5 - 3x^3 + 3x^2 - 2x - 5 = -5$$

$$\text{ตัวเลือก 4. } -x^4 - 9x^3 - 9x^2 + 5 = 5$$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

14. ตอบ 4.

$$\text{แนวคิด } 1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

$$x-1 = 3$$

$$(x-1)^2 = 4$$

การตัดตัวเลือก

ถ้า $(x-1)^2 = 1$ จะได้ $x-1 = 1, -1$

$$x = 0, -2$$

แต่จากโจทย์ $x = 0$ ไม่ได้

$$\text{และ } 1 - \frac{0}{-2} + \frac{9}{-4} \neq 0$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ลองดูตัวเลือก 4. ก่อน เพราะคิดเลขง่ายกว่า

$$(x-1)^2 = 4$$

$$x-1 = \pm 2$$

$$x = 3, -1$$

$$\text{เพราะว่า } 1 - \frac{6}{3} + \frac{9}{9} = 0$$

เพราะฉะนั้น $(x-1)^2 = 4$ ได้

สรุปเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้

15. ตอบ 2.

$$\text{แนวคิด } A(x) = x^2 - ax$$

$$= x(x-a)$$

$$B(x) = x^3 - 2ax^2$$

$$= x^2(x-a)$$

$$C(x) = ax^2 - 3a^2x + 2a^3$$

$$= a(x^2 - 3ax + 2a^2)$$

$$= a(x-a)(x-2a)$$

สรุป ค.ร.น. ของ $A(x)$, $B(x)$ และ $C(x)$

เท่ากับผลคูณของ

$$x^2, (x-a), a, (x-2a)$$

ซึ่งเท่ากับ $ax^2(x-a)(x-2a)$

ตรงกับตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เมื่อได้ $A(x) = x(x-a)$ และตัวเลือก 4. ไม่มี x

ควรจะตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

เมื่อได้ $B(x) = x^2(x-a)$

และตัวเลือก 3. ไม่มี x^2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่ากำลังสูงสุดของ x ใน $A(x), B(x), C(x)$ คือ x^3

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ของ $A(x), B(x), C(x)$

ต้องมีกำลังของ x ไม่เกิน 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่า a และ x บางค่าก็จะตัดตัวเลือกได้

เช่น แทนค่า $x=3, a=1$

$$A(x) = x^2 - ax = 9 - 3 = 6$$

$$B(x) = x^3 - 2ax^2 = 27 - 18 = 9$$

$$C(x) = ax^2 - 3ax + 2a^3 = 9 - 9 + 2 = 2$$

ค.ร.น. ของ 6, 9, 2 เท่ากับ 18

$$\text{ตัวเลือก 1. } ax^3(x-a)(x-2a) = (27)(2)(1) = 54$$

$$\text{ตัวเลือก 2. } ax^2(x-a)(x-2a) = (9)(2)(1) = 18$$

$$\text{ตัวเลือก 3. } ax(x-a)(x-2a) = (3)(2)(1) = 6$$

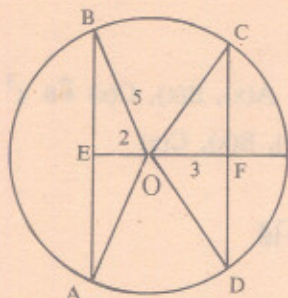
$$\text{ตัวเลือก 4. } a(x-a)(x-2a) = (1)(2)(1) = 2$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้



1. ตอบ 21:16

แนวคิด



$\triangle OBE$ และ $\triangle OCF$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$BE^2 = OB^2 - OE^2 = 5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21$$

$$BE = \sqrt{21}$$

$$CF^2 = OC^2 - OF^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16$$

$$CF = 4$$

เพราะว่า EF ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ด AB และ CD

$$\text{เพราะฉะนั้น } AB = 2BE = 2\sqrt{21}$$

$$CD = 2CF = 8$$

$$\text{สรุป } AB^2 : CD^2 = (2\sqrt{21})^2 : 8^2$$

$$= 84 : 64$$

$$= 21 : 16$$

2. ตอบ มีราก 2 ตัว

$$\text{แนวคิด } |x-2|-1 = 4$$

$$\text{กรณี 1 } |x-2|-1 = 4$$

$$|x-2| = 5$$

$$x-2 = 5 \text{ หรือ } x-2 = -5$$

$$x=7 \text{ หรือ } x = -3$$

กรณี 2 $|x-2|-1 = -4$

$$|x-2| = -3 \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

สรุป $|x-2|-1 = 4$ มีราก 2 ตัว คือ $x = -3, 7$

3. ตอบ $x+y = 14$

แนวคิด วิธีที่ 1

เพราะว่า $x+y+xy = 54$ และ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น $2 \leq x+y < 54$

เพราะว่า $1 \leq x, y \leq x+y < 54$

เพราะฉะนั้นลองแทนค่า $x+y$ ด้วยค่าต่าง ๆ เช่น

$$x+y = 2, 3, 4, \dots$$

จะได้ว่า $x+y = 14$ ทำให้ $xy = 54 - 14 = 40$

ทำให้มีค่า $x=10$ และ $y=4$ หรือ $x=4$ และ $y=10$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x+y+xy = 54$

สรุป $x+y = 14$

วิธีที่ 2 $x+y+xy = 54$

$$x+y(1+x) = 54$$

$$y(1+x) = 54-x$$

$$y = \frac{54-x}{1+x}$$

$$= \frac{55-1-x}{1+x}$$

$$= \frac{55}{1+x} - 1$$

y เป็นจำนวนเต็ม ก็ต่อเมื่อ $\frac{55}{1+x}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $55 = 5 \cdot 11$ และ $1+x > 1$

เพราะฉะนั้น $x+1 = 5$ หรือ 11

$$x = 4 \text{ หรือ } 10$$

จะได้ $y = 10$ หรือ 4

สรุป $x+y = 14$

4. ตอบ $x = \frac{2}{7}$

แนวคิด $8^{2x} = 16^{1-2x}$

$$(2^3)^{2x} = (2^4)^{1-2x}$$

$$2^{6x} = 2^{4-8x}$$

$$6x = 4-8x$$

$$14x = 4$$

$$x = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

5. ตอบ $w = 25$

แนวคิด $\sqrt[3]{xyz} = 4$

$$xyz = 4^3 = 64$$

$$\sqrt[4]{xyzw} = 2\sqrt{10}$$

$$xyzw = (2\sqrt{10})^4$$

$$= (2^4)(10)^2$$

$$= 1600$$

เพราะฉะนั้น $\frac{xyzw}{xyz} = \frac{1600}{64}$

$$w = 25$$

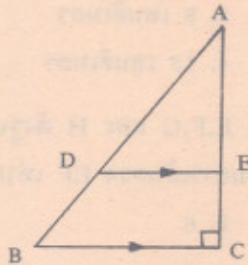
ข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 8

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ $\left(\frac{1}{x} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + x\right)^2$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------|------|
| 1. -4 | 2. 0 |
| 3. 4 | 4. 5 |

2.



$BC = 12$, $BD = 5$, $DA = 10$ และ $DE \parallel BC$

DE ยาวเท่ากับเท่าใด

- | | |
|------|-------|
| 1. 6 | 2. 7 |
| 3. 8 | 4. 10 |

3. ถ้า $0^\circ < \theta < 90^\circ$ และ $\sqrt{3} - 2\cos\theta = 0$ แล้ว θ เท่ากับเท่าใด

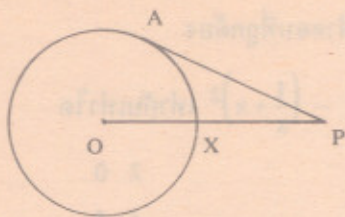
- | | |
|---------------|---------------|
| 1. 30° | 2. 45° |
| 3. 60° | 4. 90° |

4. ค่า x ที่ทำให้ $x^2 + 2x < 0$ ตรงกับตัวเลือกใด

- | | |
|--------------------------|-----------------|
| 1. $x < 0$ | 2. $x > -2$ |
| 3. $x < 0$ หรือ $x > -2$ | 4. $-2 < x < 0$ |

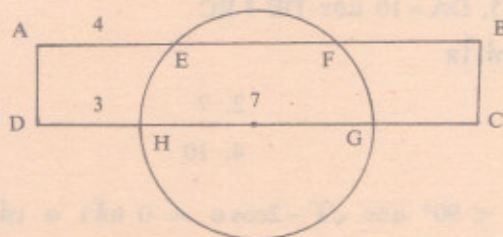
5. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี 5 เซนติเมตร, P เป็นจุดภายนอกวงกลม,

AP เป็นเส้นสัมผัสตั้งฉากกับวงกลม, $AP = 12$, OP ตัดกับวงกลมที่จุด X

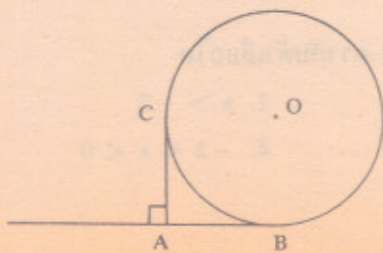


ความยาว PX เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-----------------|-----------------|
| 1. 6 เซนติเมตร | 2. 8 เซนติเมตร |
| 3. 10 เซนติเมตร | 4. 13 เซนติเมตร |
6. สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD ตัดวงกลมที่ E, F, G และ H ดังรูป ถ้า $|AE| = 4$, $|DH| = 3$ และ $|GH| = 7$ ความยาวเส้นตรง EF เท่ากับเท่าใด
- | | |
|------|------|
| 1. 5 | 2. 6 |
| 3. 7 | 4. 8 |



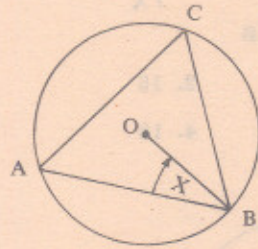
7.



AB เป็นเส้นสัมผัสวงกลม, $CAB = 90^\circ$, $AC = 6$, $AB = 18$ รัศมีของวงกลม เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 20 | 2. 24 |
| 3. 28 | 4. 30 |

8. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม, ABC เป็นสามเหลี่ยมบรรจุในวงกลม,



ถ้ามุม $OBA = x$ องศา แล้วมุม ACB เท่ากับเท่าใด

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| 1. $90 - x$ องศา | 2. $90 + x$ องศา |
| 3. $90 - \frac{x}{2}$ องศา | 4. $90 + \frac{x}{2}$ องศา |

9. ค่าของจำนวน $\sqrt{\frac{1}{0.0625}}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{4}$ | 2. $\frac{1}{2}$ |
| 3. 2 | 4. 4 |

10. ถ้า $8 < x < 9$

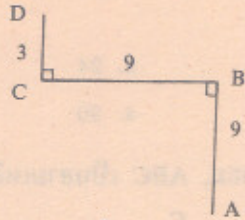
แล้ว $\sqrt{(8-x)^2} + \sqrt{(x-10)^2}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|--------------|--------------|
| 1. $18 - 2x$ | 2. $2x - 18$ |
| 3. 2 | 4. -2 |

11. ถ้า $x + y = 0$ แล้ว $\frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{4(x-y)x}$ เท่ากับเท่าใด

- | | |
|------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{2}$ | 2. $\frac{1}{3}$ |
| 3. $\frac{1}{4}$ | 4. $\frac{1}{5}$ |

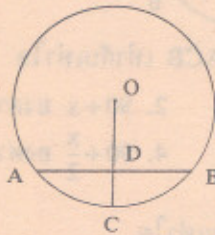
12.



จากรูป ความยาว AD เท่ากับเท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 12 | 2. 15 |
| 3. 16 | 4. 18 |

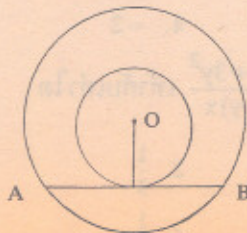
13. O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม



AB เป็นคอร์ด, OC ตั้งฉากกับ AB ที่จุด D
 AB = 24 เซนติเมตร, DC = 8 เซนติเมตร
 รัศมีวงกลมยาวเท่าใด

- | | |
|-------|-------|
| 1. 11 | 2. 12 |
| 3. 13 | 4. 14 |

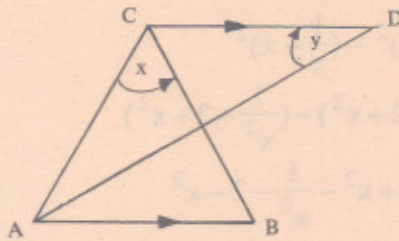
14. O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมสองวงดังรูป



AB เป็นคอร์ดของวงกลมวงใหญ่ และสัมผัสวงกลมวงเล็ก
ถ้า $AB = 10$ เซนติเมตรแล้ว พื้นที่วงแหวนเท่ากับเท่าใด

- | | |
|------------|------------|
| 1. 15π | 2. 20π |
| 3. 25π | 4. 30π |

15.



จากรูป $AB \parallel CD$, $\widehat{CAD} = \widehat{DAB}$, \widehat{ACB} ทาง x องศา \widehat{CDA} ทาง y องศา,
 $AC = BC$
ตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $y = 45^\circ + \frac{x}{4}$ | 2. $y = 45^\circ - \frac{x}{4}$ |
| 3. $y = 90^\circ + \frac{x}{4}$ | 4. $y = 90^\circ - \frac{x}{4}$ |

ตอนที่ 2

- กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้า $3x + 2y + 3xy = 42$ แล้ว $x + y$ เท่ากับเท่าใด
- สัมประสิทธิ์ของ x^3 ในพหุนาม $(3x^2 - 4 + 6x^2)(2 + 4x^2 - 3x + 5x^3)$ เท่ากับเท่าใด
- จงหาค่า k ที่ทำให้ $x^3 + kx^2 + 5x + 6$ หารด้วย $x^2 + x + 2$ ลงตัว
- กล่องลูกบาศก์มีปริมาตรเท่ากับ 3375 ลูกบาศก์เซนติเมตร พื้นที่ผิวกล่องทั้งหมดด้านเท่ากับเท่าใด
- คำตอบของสมการ $|x^2 - 4| = 2$ มีทั้งหมดกี่ค่า

เฉลยข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก ชุดที่ 8

ตอนที่ 1

1. ตอบ 1.

แนวคิด

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 - \left(\frac{1}{x} + x\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{x^2} - 2 + x^2\right) - \left(\frac{1}{x^2} + 2 + x^2\right) \\ &= \frac{1}{x^2} - 2 + x^2 - \frac{1}{x^2} - 2 - x^2 \\ &= -4 \end{aligned}$$

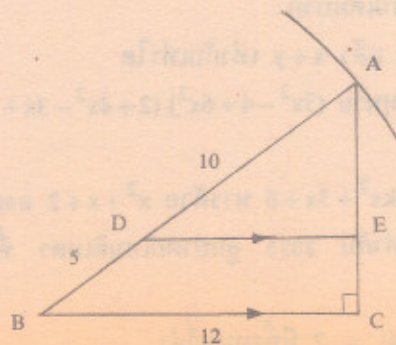
การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้น แทนค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x=1$ จะได้

$$\left(\frac{1}{1} - 1\right)^2 - \left(\frac{1}{1} + 1\right)^2 = 0 - 4 = -4$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

2. ตอบ 3.

แนวคิด



$\triangle ABC$ มี $DE \parallel BC$

เพราะฉะนั้น $\triangle ABC$ และ $\triangle ADE$ คล้ายกัน

$$\begin{aligned}\frac{AD}{AB} &= \frac{DE}{BC} \\ \frac{10}{15} &= \frac{DE}{12} \\ DE &= \frac{120}{15} = 8\end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก BC ยาว 12 หน่วย
2. ลากเส้นตรง AC ตั้งฉากกับ BC
3. กางวงเวียนรัศมี 15 หน่วย จุดศูนย์กลางที่ B ตัดแนว AC ที่จุด A
4. ลากเส้นตรง BD ยาว 5 หน่วย
5. ลากเส้น DE ขนานกับ BC
6. วัดความยาว DE ได้ 8 หน่วย

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

3. ตอบ 1.

แนวคิด $\sqrt{3} - 2\cos \theta = 0$

$$2\cos \theta = \sqrt{3}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

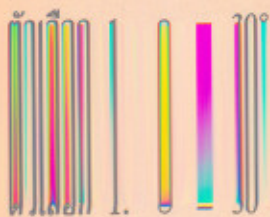
$$\theta = 30^\circ$$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $0^\circ < \theta < 90^\circ$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.ทิ้งได้

นำค่าในตัวเลือกแทนค่าในโจทย์



$$\cos \theta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{3} - 2\cos \theta = 0$

สรุปเราเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

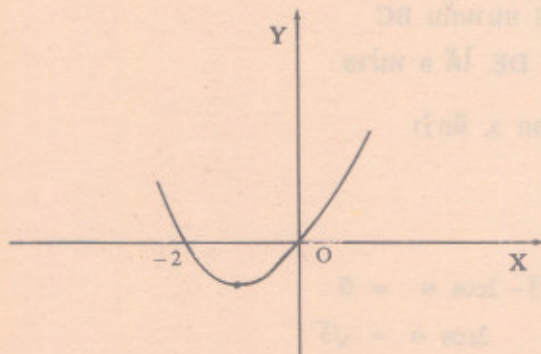
4. ตอบ 4.

แนวคิด วิธีที่ 1 ให้ $y = x^2 + 2x$

$$= x^2 + 2x + 1 - 1$$

$$= (x+1)^2 - 1$$

กราฟของ $y = (x+1)^2 - 1$ คือ



กราฟของ $y = (x+1)^2 - 1$ ตัดแกน X ที่จุด -2 และ 0

จากกราฟจะได้ $y < 0$ เมื่อ $-2 < x < 0$

สรุป $x^2 + 2x < 0$ เมื่อ $-2 < x < 0$

วิธีที่ 2 $x^2 + 2x < 0$

$$x(x+2) < 0$$

ตารางแสดงเครื่องหมายของ $x(x+2)$

		$x = -2$		$x = 0$	
x	-	-	-	0	+
$x+2$	-	0	+	+	+
$x(x+2)$	+	0	-	0	+

สรุป $x(x+2) < 0$ เมื่อ $-2 < x < 0$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x=0$ จะได้ $x^2+2x = 0^2+2(0) = 0 \not< 0$

ดังนั้น $x=0$ ไม่ได้ ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 3.ทิ้งได้

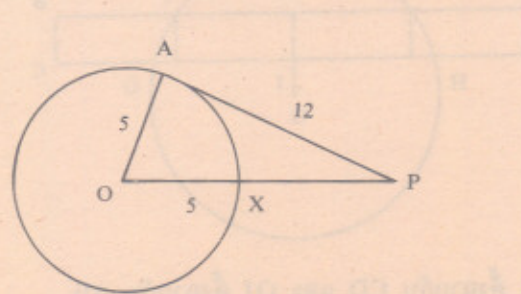
แทนค่า $x=-4$ จะได้ $x^2+2x = (-4)^2+2(-4) = 8 \not< 0$

ดังนั้น $x=-4$ ไม่ได้ทำให้เราตัดตัวเลือก 1.ทิ้งได้

สรุปเหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวเป็นคำตอบแน่นอน

5. ตอบ 2.

แนวคิด

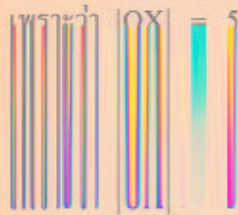


$\triangle OAP$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{A} = 90^\circ$

$$|OP|^2 = |OA|^2 + |AP|^2$$

$$|OP|^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$|OP| = 13$$



เพราะฉะนั้น $|PX| = 13 - 5 = 8$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทางตามขั้นตอนดังนี้

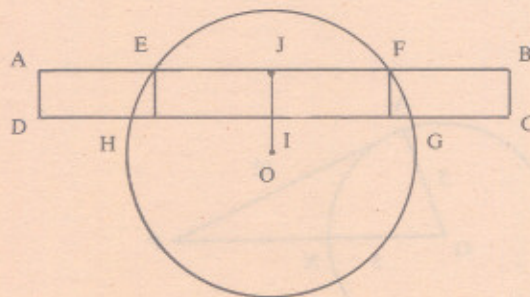
1. เขียนวงกลมรัศมี 5 ซม.
2. ลากเส้น OA
3. ลาก AP ตั้งฉากกับ OA และ $|AP| = 12$ ซม.
4. ลากเส้น OP
5. วัดระยะทาง PX ได้ 8 ซม.

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

หมายเหตุ ในห้องสอบนักเรียนอาจต้องย่อสเกลลงโดยใช้ 0.5 ซม. ต่อ 1 ซม.

6. ตอบ 1.

แนวคิด



ลากเส้นตรง OI ตั้งฉากกับ CD และ OJ ตั้งฉากกับ AB

เพราะว่า $AB \parallel CD$

เพราะฉะนั้น OI, OJ เป็นเส้นตรงเดียวกัน

เพราะว่ารัศมีที่ตั้งฉากกับคอร์ดจะแบ่งครึ่งคอร์ด

เพราะฉะนั้น $|HI| = |IG| = 3.5$

และ $|EJ| = |JF|$

$$\begin{aligned}
 |AJ| &= |DI| \\
 &= |DH| + |HI| \\
 &= 3 + 3.5 \\
 &= 6.5 \\
 |EJ| &= |AJ| - |AE| \\
 &= 6.5 - 4 \\
 &= 2.5 \\
 |EF| &= 2 |EJ| \\
 &= 2 (2.5) \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

เห็นได้ชัดเจนว่า EF สั้นกว่า GH

ดังนั้น EF ยาวน้อยกว่า 7

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทั้งได้

เพราะว่า $|AF| < |DH| = 3 + 7$

$$|AE| + |EF| < 10$$

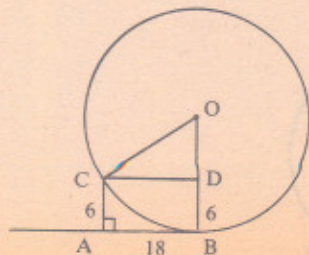
$$4 + |EF| < 10$$

$$|EF| < 6$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทั้งได้อีก

7. ตอบ 4.

แนวคิด





ลาก CD ตั้งฉากกับ OB ดังนั้น $BD=6$

OCD เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\begin{aligned} OC^2 &= CD^2 + OD^2 \\ &= 18^2 + (OC-6)^2 && (\because OC = OB) \\ &= 324 + OC^2 - 12OC + 36 \end{aligned}$$

$$12OC = 360$$

$$OC = 30$$

สรุปรัศมีวงกลมยาวเท่ากับ 30

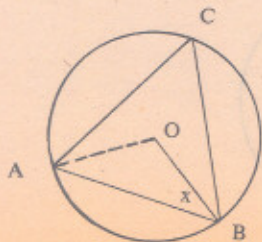
การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้น AB ยาว 18 หน่วย
(แนะนำให้ย่อสเกลเป็น 0.1 นิ้วต่อ 1 หน่วย)
 2. ลากเส้น $AC \perp AB$ และ $AC=6$ หน่วย
 3. ลากเส้น BC
 4. แบ่งครึ่ง BC ที่ D
 5. ลากเส้นตั้งฉากกับ BC ที่ D และเส้นตั้งฉาก AB ที่ B ให้ไปตัดกันที่จุด O
จะได้ว่า O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ
วัดความยาว OB ได้ 30 หน่วย
- สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

8. ตอบ 1.

แนวคิด



สามเหลี่ยม AOB มี $OA=OB$ ดังนั้น $\triangle AOB$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
 เพราะฉะนั้น $\angle OAB = x$

$$\begin{aligned}\angle AOB &= 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA \\ &= 180^\circ - x - x \\ &= 180^\circ - 2x\end{aligned}$$

เพราะว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมที่เส้นรอบวง

$$\begin{aligned}\text{เพราะฉะนั้น } \angle ACB &= \frac{1}{2} \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - 2x) \\ &= 90^\circ - x\end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

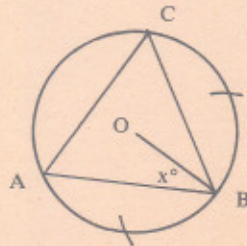
เพราะว่า $\angle ACB$ เป็นมุมแหลม

เพราะฉะนั้น $\angle ACB < 90^\circ$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แบบที่ 2 เพราะหัวใจและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของมุม x

ดังนั้นการแสดงด้วยรูปบางรูปก็จะตัดตัวเลือกได้ เช่น ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม
 ด้านเท่าบรรจุในวงกลม



จะได้ $x = 30^\circ$ และ $\angle ACB = 60^\circ$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2., 3. และ 4. ผิดแน่นอน



แนวคิด

$$\sqrt{\frac{1}{0.0625}} = \sqrt{\frac{10000}{625}}$$

$$= \sqrt{\frac{10^4}{5^4}}$$

$$= \frac{100}{25}$$

$$= 4$$

การตัดตัวเลือก

เหตุผลสำคัญที่นักเรียนควรท่องจำคือ

1. ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $0 < \sqrt{x} < 1$
2. ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $\frac{1}{x} > 1$
3. ถ้า $x > 1$ แล้ว $\sqrt{x} > 1$

เพราะว่า $\frac{1}{0.0625} > 1$ เพราะ $\sqrt{\frac{1}{0.0625}} > 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$$\text{สมมติ } \sqrt{\frac{1}{0.0625}} = 2$$

$$\frac{1}{0.0625} = 4$$

$$1 = 4(0.0625)$$

$$1 = 0.25 \text{ ไม่จริง}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

10. ตอบ 3.

$$\text{แนวคิด } \sqrt{(8-x)^2} = |8-x| = x-8 \quad (\because 8 < x)$$

$$\sqrt{(x-10)^2} = |x-10| = 10-x \quad (\because x < 9)$$



$$\begin{aligned}\sqrt{(8-x)^2} + \sqrt{(x-10)^2} &= (x-8) + (10-x) \\ &= 2\end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่า $\sqrt{(8-x)^2} > 0$ และ $\sqrt{(10-x)^2} > 0$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{(8-x)^2} + \sqrt{(10-x)^2} > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $x < 9$

$$2x < 18$$

$$2x - 18 < 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

แบบที่ 2

$$\begin{aligned}\text{ลองแทนค่า } x=8.5 \text{ จะได้ } &\sqrt{(8-8.5)^2} + \sqrt{(8.5-10)^2} \\ &= \sqrt{(0.5)^2} + \sqrt{(-1.5)^2} \\ &= 0.5 + 1.5 \\ &= 2\end{aligned}$$

แทนค่า $x=8.5$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $18 - 2x = 18 - 2(8.5) = 1 \neq 2$

ตัวเลือก 2. $2x - 18 = 2(8.5) - 18 = -1 \neq 2$

ตัวเลือก 3. 2

ตัวเลือก 4. -2

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้



แนวคิด $x + y = 0$

$$y = -x$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{4(x-y)x} &= \frac{x^2 + 2x(-x) + 3(-x)^2}{4(x - (-x))x} \\ &= \frac{x^2 - 2x^2 + 3x^2}{8x^2} \\ &= \frac{2x^2}{8x^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก

โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x และ y เมื่อกำหนด $x + y = 0$

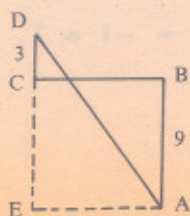
เราจึงสามารถแทนค่า $x=1$ และ $y=-1$ ได้

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 2xy + 3y^2}{4(x-y)x} &= \frac{(1)^2 + (2)(1)(-1) + 3(-1)^2}{4(1 - (-1))} \\ &= \frac{1 - 2 + 3}{8} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทั้งได้

12. ตอบ 2.

แนวคิด



ลากเส้น CE และ AE ให้ตั้งฉากกัน

จะได้ $CE = 9$, $AE = 9$

เพราะฉะนั้น $DE = 12$

ดังนั้น $AD^2 = DE^2 + EA^2$

$$= (12)^2 + (9)^2$$

$$= 144 + 81$$

$$= 225$$

$$AD = 15$$

การตัดตัวเลือก

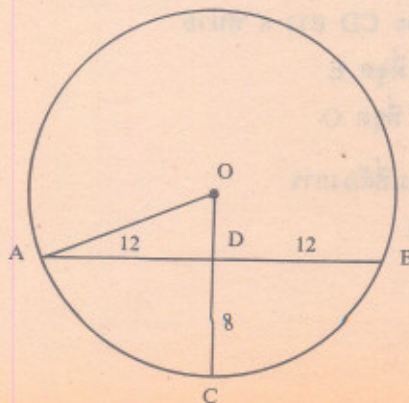
วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

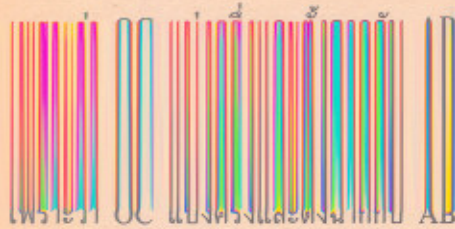
1. ลาก AB ยาว 9 เซนติเมตร
2. ลาก BC ยาว 9 เซนติเมตร
3. ลาก CD ยาว 3 เซนติเมตร
4. วัดความยาว AD ได้ 15 เซนติเมตร

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

13. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ $OA = r$





เพราะฉะนั้น $AD = 12$

$\triangle AOD$ เป็นสามเหลี่ยมฉาก

$$OA^2 = AD^2 + OD^2$$

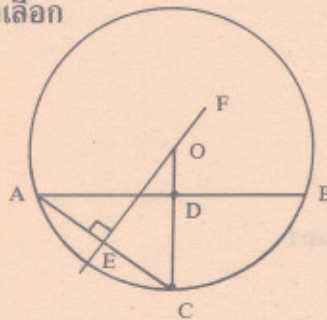
$$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$$

$$= 144 + r^2 - 16r + 64$$

$$16r = 208$$

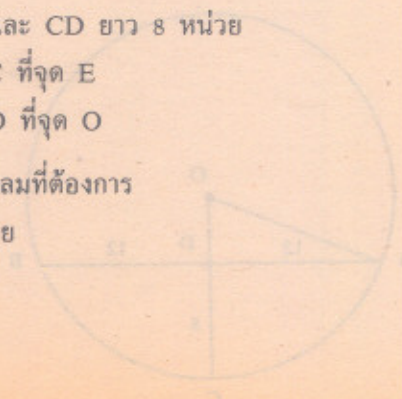
$$r = 13$$

การตัดตัวเลือก



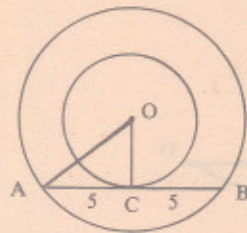
1. ลาก AB ยาว 24 หน่วย
2. แบ่งครึ่ง AB ที่จุด D
3. ลาก DC ตั้งฉากกับ AB และ CD ยาว 8 หน่วย
4. ลาก AC และแบ่งครึ่ง AC ที่จุด E
5. ลาก EF ไปตัดกับแนว CD ที่จุด O

จะได้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมที่ต้องการ
วัดความยาว OC ได้ 13 หน่วย
สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า



14. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้เราไม่จำเป็นต้องรู้รัศมีวงกลม
ก็สามารถหาพื้นที่วงแหวนได้ดังนี้



$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่วงแหวน} &= \pi OA^2 - \pi OC^2 \\
 &= \pi (OA^2 - OC^2) \\
 &= \pi (AC)^2 \\
 &= \pi 5^2 \\
 &= 25\pi
 \end{aligned}$$

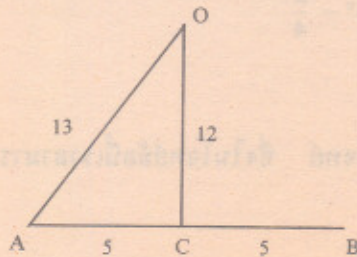
การตัดตัวเลือก

ข้อสอบนี้จัดเป็นโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของคอร์ด AB

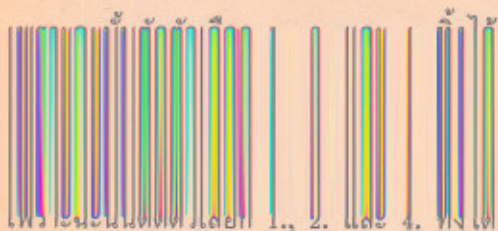
ดังนั้นเลือกวงกลมที่มีเงื่อนไขตามโจทย์ เช่น

เลือก $OA = 13$, $OC = 12$

จะได้รูปที่สอดคล้องตามเงื่อนไขของโจทย์



$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น พื้นที่วงแหวน} &= \pi 13^2 - \pi 12^2 \\
 &= 169\pi - 144\pi \\
 &= 25\pi
 \end{aligned}$$

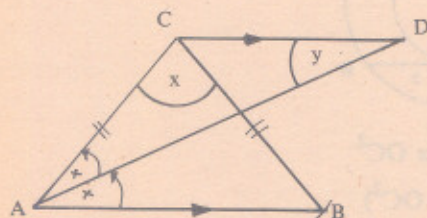


หมายเหตุ อัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉากที่ควรจำได้คือ

3:4:5, 5:12:13, 7:24:25

15. ตอบ 2.

แนวคิด



เพราะว่า $CD \parallel AB$ เพราะฉะนั้น $y = \widehat{CAD}$

และ $\widehat{CAB} = 2(\widehat{CAD}) = 2y$

เพราะว่า $AC = CB$ เพราะฉะนั้น $\widehat{CBA} = \widehat{CAB} = 2y$

ในสามเหลี่ยม ABC

$$\widehat{ACB} + \widehat{CAB} + \widehat{CBA} = 180^\circ$$

$$x + 2y + 2y = 180^\circ$$

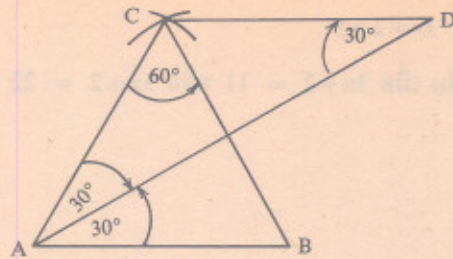
$$4y = 180^\circ - x$$

$$y = 45^\circ - \frac{x}{4}$$

การตัดตัวเลือก

วาดรูปเพื่อเขียนแบบเงื่อนไขของโจทย์ ซึ่งในโจทย์ข้อนี้เราสามารถเลือกรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าได้

1. วาดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC
2. แบ่งครึ่งมุม \widehat{CAB}
3. ลาก CD ให้ขนานกับ AB



จากรูปจะได้ว่า $x = 60^\circ$, $y = 30^\circ$

ตัวเลือก 1. $45^\circ + \frac{x}{4} = 45^\circ + 15^\circ \neq 30^\circ$

ตัวเลือก 2. $45^\circ - \frac{x}{4} = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$

ตัวเลือก 3. $90^\circ + \frac{x}{4} = 90^\circ + 15^\circ \neq 30^\circ$

ตัวเลือก 4. $90^\circ - \frac{x}{4} = 90^\circ - 15^\circ \neq 30^\circ$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตอนที่ 2

1. ตอบ $x + y = 6$

แนวคิด $3x + 2y + 3xy = 42$

$$3x + y(3x + 2) = 42$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{42 - 3x}{3x + 2} \\ &= \frac{44 + (-3x - 2)}{3x + 2} \\ &= \frac{44}{3x + 2} - 1 \end{aligned}$$

y เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ $\frac{44}{3x + 2}$ เป็นจำนวนเต็ม

ก็ต่อเมื่อ $\frac{2 \cdot 2 \cdot 11}{3x + 2}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $x > 1$ เพราะฉะนั้น $3x + 2 > 5$

ดังนั้น $\frac{2 \cdot 2 \cdot 11}{3x+2}$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $3x+2 = 11$ หรือ $3x+2 = 22$ เท่านั้น

$$3x+2 = 22 \text{ เท่านั้น}$$

$$\text{กรณี 1} \quad 3x+2 = 11$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$\text{จะได้} \quad y = \frac{44}{11} - 1 = 3$$

$$\text{กรณี 2} \quad 3x+2 = 22$$

$$3x = 20$$

$$x = \frac{20}{3} \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{สรุป } x+y = 3+3 = 6$$

2. ตอบ -17

แนวคิด

แบบที่ 1 โดยการตั้งคูณและคิดเฉพาะสัมประสิทธิ์ที่ทำให้เกิด x^3

$$5x^3 + 4x^2 - 3x + 2$$

$$6x^3 + 3x^2 \quad -4$$

$$\hline 12x^3$$

$$-9x^3$$

$$\hline -20x^3$$

สรุปพจน์ที่มี x^3 คือ $12x^3 - 9x^3 - 20x^3 = -17x^3$ เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^3 คือ -17

แบบที่ 2 คิดเฉพาะพจน์ที่ทำให้เกิด x^3

$$(3x^2 - 4 + 6x^3)(2 + 4x^2 - 3x + 5x^3)$$

$$\begin{aligned} & (3x^2)(-3x) + (-4)(5x^3) + (6x^3)(2) \\ &= -9x^3 - 20x^3 + 12x^3 \\ &= -17x^3 \end{aligned}$$

3. ตอบ $k=4$.

แนวคิด สมมติ $(x+B)(x^2+x+2) = x^3+kx^2+5x+6$

การหาสัมประสิทธิ์ของ x^2

$$(x+B)(x^2+x+2)$$

พจน์ที่มี x^2 คือ $x^2+Bx^2 = (1+B)x^2$

เพราะฉะนั้น $(1+B) = k$

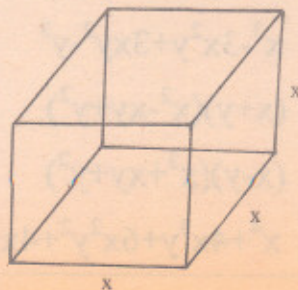
เพราะว่า ค่าคงตัว $2B = 6$

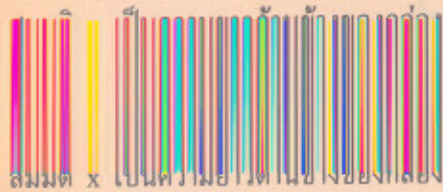
$$B = 3$$

สรุป $k = 1+B = 1+3 = 4$

4. ตอบ 1350 ตารางเซนติเมตร

แนวคิด





$$\begin{aligned}x^3 &= 3375 \\ &= 15^3 \\ x &= 15\end{aligned}$$

$$\text{พื้นที่ผิวด้านข้างขวาของกล่องหนึ่งข้าง} = x^2 = 15^2 = 225$$

$$\text{พื้นที่ผิวด้านข้างทั้งหมด 6 ด้าน} = 6(225) = 1350$$

5. ตอบ 4 คำ

$$\text{แนวคิด } |x^2-4| = 2$$

$$x^2-4 = 2 \quad \text{หรือ} \quad x^2-4 = -2$$

$$x^2 = 6 \quad \text{หรือ} \quad x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{6} \quad \text{หรือ} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

สรุป คำตอบของสมการ $|x^2-4| = 2$ มีทั้งหมด 4 คำ

สูตรที่สำคัญควรจำให้ได้

$$1. (x+y)(x-y) = x^2-y^2$$

$$2. (x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$3. (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$$

$$4. (x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

$$5. (x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$$

$$6. x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$

$$7. x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$8. (x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

9 กรณีตัวอย่าง ในการพัฒนาคุณภาพข้อสอบ

โจทย์ข้อสอบที่มีลักษณะเป็นสูตรหรือนิพจน์ในเทอมของ x ที่ต้องการ
วัดผลเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบ ถ้าการสร้างตัวเลือกไม่รัดกุมเพียงพอ การ
วัดผลในการทำโจทย์ข้อนั้น นักเรียนที่ทำคะแนนได้ในข้อนั้นอาจจะไม่มีความรู้
ตามวัตถุประสงค์ของโจทย์ที่ผู้ออกข้อสอบต้องการ

บทความนี้เป็นการนำเสนอกรณีตัวอย่างของข้อสอบและข้อเสนอแนะ
ในการปรับปรุงตัวข้อสอบและตัวเลือกให้ดีขึ้น

ตัวอย่าง 9.1 ผลลัพธ์ของนิพจน์

$$\left(\frac{2}{x+1}\right) \left(x^3 - x + \frac{1}{x} + 1\right) - \frac{x^2(x-1)^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 - x - \frac{1}{x}}$$

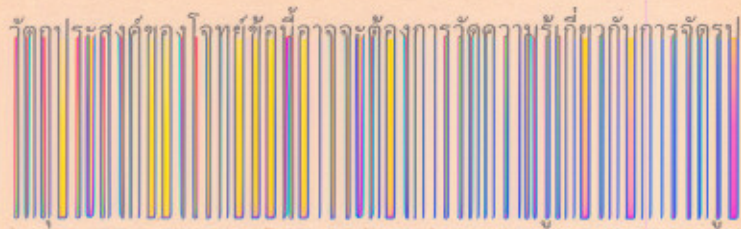
มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. $(x^2 + \frac{1}{x}) - x$

ข. $(x^2 - \frac{1}{x}) - x$

ค. $(x^2 + \frac{1}{x}) + x$

ง. $(x^2 - \frac{1}{x}) + x$



นิพจน์การแยกตัวประกอบ ซึ่งแนวทางในการต้องใช้การจัดรูป แต่เนื่องจากตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x ด้วย ดังนั้นหากนักเรียนทำการแทนค่าบางค่าที่เหมาะสมเช่น $x=1$;

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{x+1}\right) \left(x^3 - x + \frac{1}{x} + 1\right) - \frac{x^2(x-1)^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 - x - \frac{1}{x}} &= \left(\frac{2}{1+1}\right) (1-1+1-1) - \frac{(0-1)}{1-1-1} \\ &= (1)(0) - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

แทนค่าในแต่ละตัวเลือกจะได้

ก. $(1+1)-1 = 1$

ข. $(1-1)-1 = -1$

ค. $(1+1)+1 = 3$

ง. $(1-1)+1 = 1$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ค. และ ง. ผิดแน่นอน

ซึ่งการได้คะแนนเต็มในข้อนี้ นักเรียนอาจจะแยกตัวประกอบไม่เป็นก็ได้ ดังนั้นเราจึงต้องพัฒนาคุณภาพของคำถามและตัวเลือกเพื่อบังคับทิศทางคำตอบของนักเรียนที่จะต้องใช้ความรู้ในการแยกตัวประกอบ

คำแนะนำในการพัฒนาคุณภาพของข้อสอบข้อนี้คือ

$$\text{ให้ } \left(\frac{2}{x+1}\right) \left(x^3 - x + \frac{1}{x} + 1\right) - \frac{x^2(x-1)^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 - x - \frac{1}{x}} = Ax^2 + Bx + \frac{C}{x}$$

จงหาค่าของ A, B และ C

การถามคำถามในลักษณะนี้จะเป็นการบังคับทิศทางการทำโจทย์ว่า ต้องมีการจัดรูปก่อนเสมอจึงจะหาค่า A, B และ C ได้นั้นคือ

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{x+1}\right) \left(x^3 - x + \frac{1}{x} + 1\right) - \frac{x^2(x-1)^2 - \frac{1}{x^2}}{x^2 - x - \frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{2}{x+1}\right) \left[x(x^2-1) + \left(\frac{x+1}{x}\right) \right] - \left[\frac{(x(x-1) - \frac{1}{x})(x(x-1) + \frac{1}{x})}{x(x-1) - \frac{1}{x}} \right] \\ &= \frac{2}{x+1} (x+1) \left[x(x-1) + \frac{1}{x} \right] - x(x-1) + \frac{1}{x} \\ &= x(x-1) + \frac{1}{x} \\ &= x^2 - x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A=1$, $B=-1$ และ $C=1$

ตัวอย่าง 9.2 $\frac{(x^3+2x)(x^2+1) + x(x^4+x^2-2) - (x^3-x)(x^2+2)}{x^4+4x^2+4}$

เมื่อจัดนิพจน์ให้มีรูปแบบอย่างง่ายและมีค่าเท่าใด

ก. $\frac{x(x^2-1)^2}{x^2+2}$

ข. $\frac{x(x^2-1)}{x^2+2}$

ค. $\frac{x(x^2+1)^2}{x^2+2}$

ง. $\frac{x(x^2+1)}{x^2+2}$

โจทย์ข้อนี้เมื่อเราแทนค่า $x = 1$

$$\begin{aligned} \text{ค่าของโจทย์จะเท่ากับ } & \frac{(1+2)(1+1) + (1)(1+1-2) - (1-1)(1+2)}{1+4+4} \\ & = \frac{(3)(2)}{9} \\ & = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ค่าในแต่ละตัวเลือกคือ

ก. 0

ข. 0

ค. $\frac{4}{3}$

ง. $\frac{2}{3}$

ดังนั้นตัวเลือก ก. ข. และ ค. ผิดแน่นอน

แนวทางในการพัฒนาคุณภาพข้อสอบข้อนี้อาจทำได้ดังนี้

โจทย์ กำหนดให้

$$\frac{[(x^3 + 2x)(x^2 + 1) + x(x^4 + x^2 - 2) - (x^3 - x)(x^2 + 2)]}{x^4 + 4x^2 + 4} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

และ $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 และ $q(0) = 8$ จงหา $p(x)$

ตัวเลือกแต่ละข้อเป็นดังนี้

ก. $4x(x^2 - 1)^2$

ข. $x(x^2 - 1)^2$

ค. $4x(x^2 + 1)^2$

ง. $x(x^2 + 1)^2$

จากคำถามในลักษณะเป็นการบังคับให้นักเรียนต้องทำการจัดรูป

$$\begin{aligned}
 & (x^3 + 2x)(x^2 + 1) + x(x^4 + x^2 - 2) - (x^3 - x)(x^2 + 2) \\
 &= x(x^2 + 2)(x^2 + 1) + 2(x^2 + 2)(x - 1) - x(x^2 - 1)(x^2 + 2) \\
 &= x(x^2 + 2)(x^2 + 1)
 \end{aligned}$$

$$\text{และ } x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x(x^2 + 2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^2} = \frac{x(x^2 + 1)}{x^2 + 2}$$

เนื่องจากโจทย์บังคับว่า $q(0) = 8$ ดังนั้นเราต้องให้

$$q(x) = 4x^2 + 8$$

$$\text{และ } p(x) = 4x(x^2 + 1)$$

ดังนั้นตัวเลือกต้องเป็นข้อ ค.

ตัวอย่าง 9.3 นิพจน์ในพจน์ของตัวแปร x , y และ z

$$\frac{[2x^2z + 6xy + x^2 + 6z^2 + 12xyz + 3z]}{6xy + 3z + x^2} - 1$$

เท่ากับเท่าใด

ก. $2x$

ข. $2z$

ค. $2y$

ง. $2xyz$

ในการแทนค่านั้นเราควรเลือกค่าที่จำแนกตัวเลือกได้ เช่น
เช่น $x=1$, $y=2$, $z=3$ ใช้ได้

แต่ $x=1$, $y=1$, $z=1$ ไม่ได้เพราะตัวเลือกทุกตัวจะมีค่าเป็น 2
ทำให้ตัดตัวเลือกไม่ได้

ต่อไปแทนค่า $x=3$, $y=2$ และ $z=1$ จะได้สะดวกในการคำนวณ

ค่าจากโจทย์เท่ากับ

$$\begin{aligned} & \frac{[2(9)(1) + 6(3)(2) + (9) + 6(1) + 12(3)(2)(1) + 3]}{6(3)(2) + 3(1) + 9} - 1 \\ &= \frac{[18 + 36 + 9 + 6 + 72 + 3]}{36 + 3 + 9} - 1 \\ &= \frac{144}{48} - 1 = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

แทนค่าในตัวเลือกจะได้

ก. 6

ข. 4

ค. 2

ง. 12

เพราะฉะนั้นตัวเลือก ก. ข. และ ง. ผิดแน่ ๆ

จึงเหลือคำตอบที่ถูกต้องคือ ค.

ในการปรับปรุงคุณภาพข้อสอบสามารถทำได้หลายลักษณะ เช่น

ในการจัดพจน์ให้เป็นรูปแบบอย่างง่ายและส่วนของตัวหารเป็น 1 ของนิพจน์

$$\frac{(2x^2z + 6xy + x^2 + 6z^2 + 12xyz + 3z)}{6xy + 3z + x^2} - 1$$

จะมีตัวแปรใดเหลืออยู่บ้าง

ก. x

ข. y

ค. z

ง. x, y และ z

หากคำตอบเป็นลักษณะนี้ เวลานั้นนักเรียนทำโจทย์ก็ต้องกระจายพจน์ต่าง ๆ และจัดรูป

$$\begin{aligned}
 & \frac{2x^2z + 6xy + x^2 + 6z^2 + 12xyz + 3z}{6xy + 3z + x^2} - 1 \\
 &= \frac{2x^2z + 6xy + x^2 + 6z^2 + 12xyz + 3z - 6xy - 3z - x^2}{6xy + 3z + x^2} \\
 &= \frac{2x^2z + 6z^2 + 12xyz}{6xy + 3z + x^2} \\
 &= \frac{2z(6xy + 3z + x^2)}{6xy + 3z + x^2} \\
 &= 2z
 \end{aligned}$$

นั่นคือเหลือตัวแปร z ตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 9.4 นิพจน์

$$\frac{(3x^3 + 10x^2 + x - 6)(x^2 - x - 2)}{(3x^3 + 4x^2 - x - 2)(x^2 - 5x + 6)}$$

มีผลลัพธ์ตรงกับนิพจน์ในข้อใด

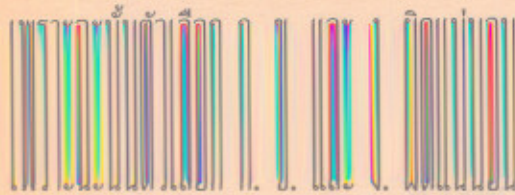
- | | |
|----------------------|----------------------|
| ก. $\frac{x+2}{x-2}$ | ข. $\frac{x-2}{x+2}$ |
| ค. $\frac{x+3}{x-3}$ | ง. $\frac{x-3}{x+3}$ |

แทนค่า $x=1$ ในโจทย์จะมีค่าเท่ากับ

$$\frac{(3+10+1-6)(1-1-2)}{(3+4-1-2)(1-5+6)} = \frac{(8)(-2)}{(4)(2)} = -2$$

ค่าในตัวเลือกเมื่อ $x = 1$ คือ

- | | |
|---------|-------------------|
| ก. -3 | ข. $-\frac{1}{3}$ |
| ค. -2 | ง. $-\frac{1}{2}$ |



ดังนั้นตัวเลือกต้องเป็น ค.

เราสามารถปรับปรุงคำถามในทำนองเดียวกับข้อ 9.2 ได้ เช่น กำหนดให้

$$\frac{(3x^3 + 10x^2 + x - 6)(x^2 - x - 2)}{(3x^3 + 4x^2 - x - 2)(x^2 - 5x + 6)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x ที่มีดีกรีต่ำที่สุด และ $q(4) = 4$

คำถามและตัวเลือกอาจจะเป็น

(4.1) $p(1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ก. 3

ข. 4

ค. 12

ง. 16

หรือ

(4.2) $p(x)$ คือพหุนามในตัวเลือกใด

ก. $x - 3$

ข. $4(x - 3)$

ค. $x + 3$

ง. $4(x + 3)$

จากคำถามในลักษณะของข้อ (4.1) และข้อ (4.2) จะเป็นการบังคับให้ต้องทำการจัดรูปพหุนาม

$$\begin{aligned} & \frac{(3x^3 + 10x^2 + x - 6)(x^2 - x - 2)}{(3x^3 + 4x^2 - x - 2)(x^2 - 5x + 6)} \\ &= \frac{(x+3)(3x-2)(x+1)(x-2)(x+1)}{(x+1)(3x-2)(x+1)(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+3}{x-3} \end{aligned}$$

ขณะนี้พหุนามทั้งบนและล่างมีค่าต่ำสุดแล้ว แต่เรายังเลือก $q(x) = x - 3$ ไม่ได้
 เพราะหัวใจห้อยบังคับ $q(4) = 4$ ดังนั้นต้องเลือก $q(x) = 4(x - 3)$

และเลือก $p(x) = 4(x + 3)$

เพราะฉะนั้น $p(1) = 16$

นั่นคือ (4.1) ตอบ ง.

(4.2) ตอบ ง.

สถาบันกวดวิชา ENG-MATH สัมมากร

159/10 ถนนนน C หมู่บ้านสัมมากร ถนน สุขุมวิท 3 ซอย 10240 โทร. 3739640
 เปิดทำการทุกวัน (เว้นวันจันทร์)

เปิดสอน ป. 6 ม. 1-2-3 ม. 4-5-6 และเตรียม ENTRANCE และ MBA

วิชา ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ ภาษาฝรั่งเศส
 ฟิสิกส์ เคมี CONVERSATION GMAT MBA

โดย ทีมงานอาจารย์มหาวิทยาลัย โรงเรียนสาธิตและโรงเรียน
 มัธยมที่มีชื่อเสียงหลายสถาบัน

หลักสูตรการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. ต้น ม. ปลาย GMAT และ MBA

สอนโดยผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โชธา

ตัวอย่างข้อสอบเข้าเรียนต่อระดับปริญญาโท แต่ใช้ความรู้ ม.ต้น

ถ้า $ab : bc : ca = 3 : 2 : 1$ แล้ว $\frac{ab}{c} : \frac{bc}{a}$ เท่ากับเท่าใด

1. 4 : 9

2. 9 : 4

3. 3 : 2

4. 2 : 3

5. 4 : 19

ตอบ 2.

แนวคิด ใช้เทคนิคการเลือกตัวเลขให้สอดคล้องกับโจทย์เพื่อช่วยใน

การตัดตัวเลือกทำได้โดยเลือกค่า a, b, c ที่ทำให้ $ab : bc : ca = 3 : 2 : 1$

หรือ $a : c : \frac{ca}{b} = 3 : 2 : 1$ โดยการเลือก $a = 3, c = 2, b = 6$ จะได้ว่า

$$(3)(6) : (6)(2) : (3)(2) = 18 : 12 : 6 = 3 : 2 : 1$$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์และ $\frac{ab}{c} : \frac{bc}{a} = \frac{(3)(6)}{2} : \frac{(6)(2)}{3} = 9 : 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3., 4. และ 5.ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $ab : bc : ca = 3 : 2 : 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{ab}{bc} = \frac{3}{2}$

$$\text{ดังนั้น } \frac{a}{c} = \frac{3}{2} \text{ ผลที่ตามมาคือ } \frac{\left(\frac{ab}{c}\right)}{\left(\frac{bc}{a}\right)} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{a}{bc} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a}{c} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\text{สรุป } \frac{ab}{c} : \frac{bc}{a} = 9 : 4$$

หาอ่านข้อสอบแนวนี้เพิ่มเติมได้จาก คณิตศาสตร์ปรัญ เล่มที่ 13

คู่มือตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

10

เสริมความรู้

มุ่งสู่อโอลิมปิกคณิตศาสตร์

1. จงหาจำนวนเต็มบวก x และ y ที่ทำให้ $x+y+xy = 115$
2. จงหาจำนวนเต็ม n ทั้งหมดที่ทำให้ $2n+1$ หาร n^4+n^2 ลงตัว
3. กำหนดให้ $x > y$ จงหาคำตอบของสมการ $2x+3y = 16$ และ $xy = 10$
4. กำหนดให้ $x < y < z$ จงหาคำตอบของสมการ

$$x+y+z = 14$$

$$xy+yz+xz = 59$$

$$xyz = 70$$

5. กำหนด $x+y+z = 0$ และ $xyz = 10$

$$\text{จงหาค่าของ } x^3+y^3+z^3$$

6. กำหนดให้ $x+\frac{1}{x} = 3$

$$\text{จงหาค่าของ } x^6 + \frac{1}{x^6}$$

7. กำหนดให้ $x+\frac{1}{x} = 4$

$$\text{จงหาค่าของ } x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$8. \text{ จงหาจำนวนเต็ม } n \text{ ที่ทำให้ } (x-1)^2 \text{ หาร } x^{n+1} - n(x-1) - x \text{ ลงตัว}$$

9. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$$

10. จงหาจำนวนเต็มทุกจำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็ม

1. ตอบ $x=1, y=56$ หรือ $x=56, y=1$

แนวคิด $x + y + xy = 115$

$$x + y(1+x) = 115$$

$$1 + x + y(1+x) = 114$$

$$(1+x)(1+y) = 114$$

เพราะว่า $114 = (2)(57)$

เพราะฉะนั้น $(1+x)(1+y) = (2)(57)$

ดังนั้น $(1+x=2, 1+y=57)$ หรือ $(1+x=57, 1+y=2)$

สรุป $(x=1, y=56)$ หรือ $(x=56, y=1)$

2. ตอบ $n=2$ ตัวเดียวเท่านั้น

แนวคิด พิจารณาค่า $n=1,2,3,\dots$

$$n=1; \frac{n^4+n^2}{2n+1} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} \text{ ไม่เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$n=2; \frac{n^4+n^2}{2n+1} = \frac{16+4}{4+1} = 4 \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$

การหาค่า n ทั้งหมดที่ทำให้ $\frac{n^4+n^2}{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

$$\begin{aligned} \frac{n^4+n^2}{2n+1} &= \frac{n^2(n^2+1)}{2n+1} \\ &= \frac{n^2}{4} \left(\frac{4n^2+4}{2n+1} \right) \\ &= \left(\frac{n}{2} \right)^2 \left(2n-1 + \frac{5}{2n+1} \right) \end{aligned}$$

เงื่อนไขที่จะทำให้ $\left(\frac{n}{2} \right)^2 \left(2n-1 + \frac{5}{2n+1} \right)$ เป็นจำนวนเต็ม คือ

1. $\frac{n}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

และ 2. $\frac{5}{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

สรุป $n=2$ เท่านั้น

3. ตอบ $x=5, y=2$

แนวคิด วิธีที่ 1

$$2x + 3y = 16 \quad (1)$$

$$xy = 10 \quad (2)$$

$$y = \frac{10}{x}$$

$$2x + 3 \left(\frac{10}{x} \right) = 16$$

$$2x^2 + 30 = 16x$$

$$2x^2 - 16x + 30 = 0$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

$$x = 3, 5$$

$$y = \frac{10}{3}, 2$$



เพราะฉะนั้น $x=5, y=2$.

วิธีที่ 2 $2x+3y = 16$

$$xy = 10$$

$$6xy = 60$$

เพราะว่า $2x$ และ $3y$ เป็นคำตอบของสมการ $(A-2x)(A-3y) = 0$

เพราะฉะนั้นพิจารณาค่า x และ y จากสมการ

$$(A-2x)(A-3y) = 0$$

$$A^2 - (2x+3y)A + 6xy = 0$$

$$A^2 - 16A + 60 = 0$$

$$(A-10)(A-6) = 0$$

$$A = 10, 6$$

เพราะว่า $x > y$

เพราะฉะนั้น $2x=10$ และ $3y = 6$

สรุป $x=5, y=2$

4. ตอบ $x=2, y=5, z=7$

แนวคิด สมการ $x+y+z = 14$

$$xy+yz+zx = 59$$

$$xyz = 70$$

ถ้าเราทำการหาคำตอบโดยวิธีแทนค่าหรือกำจัดตัวแปรจะเป็นวิธีที่ยุ่งยากมาก
ดังนั้น ควรใช้วิธีเฉพาะสำหรับปัญหาโดยการใช้อยุทธศาสตร์ดังนี้

ให้ x, y, z เป็นคำตอบของสมการ

$$(A-x)(A-y)(A-z) = 0$$

$$A^3 - (x+y+z)A^2 + (xy+yz+zx)A - xyz = 0$$

$$A^3 - 14A^2 + 59A - 70 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } A=2; \quad & 2^3 - 14(2)^2 + 59(2) - 70 \\ & = 8 - 56 + 118 - 70 \\ & = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A=2$ ทหาร $A^3 - 14A^2 + 59A - 70$ ลงตัว
 และ $A^3 - 14A^2 + 59A - 70 = (A-2)(A^2 - 12A + 35)$
 $0 = (A-2)(A-5)(A-7)$

สรุปรากของสมการ $A^3 - 14A^2 + 59A - 70 = 0$ คือ
 $A = 2, 5, 7$

เพราะว่า $x < y < z$

เพราะฉะนั้น $x=2, y=5, z=7$

5. ตอบ $x^3 + y^3 + z^3 = 30$

แนวคิด $x + y + z = 0$

$$x + y = -z$$

$$(x + y)^3 = (-z)^3$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = -z^3$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = -3x^2y - 3xy^2$$

$$= -3xy(x + y)$$

$$= -3xy(-z)$$

$$= 3xyz$$

$$= 3(10)$$

$$= 30$$

6. ตอบ 322

แนวคิด $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 + 3x^2\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^3}$$

$$3^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$27 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 = x^6 + 2x^3\left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{x^6}$$

$$18^2 = x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}$$

$$324 = x^6 + \frac{1}{x^6} + 2$$

$$x^6 + \frac{1}{x^6} = 322$$

7. ตอบ $209\sqrt{2}$

แนวคิด $x + \frac{1}{x} = 4$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$4^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$$

$$= 14 - 2$$

$$= 12$$

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{12}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}$$

$$(14)^2 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$$

$$196 = x^4 + \frac{1}{x^4} + 2$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$$

$$x^5 + \frac{1}{x^5} = \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + x^3 \left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) + x \left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{1}{x^4}\right)$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} + 1\right)$$

$$= \sqrt{2} (194 + 14 + 1)$$

$$= 209 \sqrt{2}$$

8. ตอบ $(x-1)^2$ ทหาร $x^{n+1} - n(x-1) - x$ ลงตัวทุกจำนวนเต็มบวก n

แนวคิด

$$n=1; \quad x^{1+1} - 1(x-1) - x = x^2 - x + 1 - x$$

$$= (x-1)^2$$

$$n=2; \quad x^3 - 2(x-1) - x = x^3 - 2x + 2 - x$$

$$= x^3 - 3x + 2$$

$$= (x-1)^2 (x-2)$$

$$\text{พิจารณาค่า } x \text{ และ } y \text{ ที่เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$x^{n+1} - n(x-1) - x$$

$$= x^{n+1} - nx + n - x$$

$$= x(x^n - 1) - n(x-1)$$

$$= x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n(x-1)$$

$$= (x-1) [x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n]$$

การแสดงว่า $x-1$ ทหาร $x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n$

เพราะว่า $1(1^{n-1} + 1^{n-2} + \dots + 1 + 1) - n$

$$= 1(1+1+\dots+1+1) - n$$

$$= n - n$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $x-1$ ทหาร $x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n$ ลงตัว

ดังนั้นต้องมีพหุนาม $p(x)$ ที่ทำให้

$$x(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1) - n = (x-1)p(x)$$

$$\text{สรุป } x^{n+1} - n(x+1) - n = (x-1)^2 p(x)$$

นั่นคือ $(x-1)^2$ ทหาร $x^{n+1} - n(x+1) - n$ ลงตัวทุกค่า n

9. ตอบ $(x,y) = (0,0), (0,-1), (-1,0), (-1,1), (2,-6), (2,5)$

แนวคิด

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$$

$$4(x^4 + x^3 + x^2 + x) = 4y^2 + 4y$$

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 4y^2 + 4y + 1$$

$$= (2y+1)^2$$

พิจารณาค่า x และ y ที่เป็นจำนวนเต็ม

$$x=0; \quad 1 = (2y+1)^2$$

$$y = 0, -1$$

$$x = 1; \quad 17 = (2y+1)^2$$

ไม่มีค่า y ที่เป็นจำนวนเต็ม

$$x = -1; \quad 1 = (2y+1)^2$$

$$y = 0, -1$$

$$x = 2; \quad 64 + 32 + 16 + 8 + 1 = (2y+1)^2$$

$$121 = (2y+1)^2$$

$$2y+1 = \pm 11$$

$$2y = -12, 10$$

$$y = -6, 5$$

$$x = -2; \quad 64 - 32 + 16 - 8 + 1 = (2y+1)^2$$

$$41 = (2y+1)^2$$

ไม่มีค่า y ที่เป็นจำนวนเต็ม

สรุปขณะนี้เราได้คำตอบที่เป็นจำนวนเต็มของสมการ

$$x^4 + x^3 + x^2 + x = y^2 + y$$

คือ $(x, y) = (0, 0), (0, -1), (-1, 0), (-1, -1), (2, -6), (2, 5)$

การแสดงว่า $3x^2 + 4x + 1 > 0$ เมื่อ $x \leq -2$ หรือ $x \geq 3$

$$3x^2 + 4x + 1 = 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x\right) + 1$$

$$= 3\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + 1 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + 1 - \frac{4}{3}$$

$$= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}$$

เมื่อ $x \geq 3$, $3x^2 + 4x + 1 > 0$ แน่นอน

เมื่อ $x \leq -2$ 

$$x + \frac{2}{3} \leq -2 + \frac{2}{3}$$

$$\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \geq \frac{16}{9}$$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 \geq \frac{16}{3}$$

$$3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} \geq \frac{16}{3} - \frac{1}{3} > 0$$

สรุป ถ้า $x \leq -2$ หรือ $x \geq 3$ แล้ว $3x^2 + 4x + 1 > 0$ การแสดงว่า $x^2 + 2x + 1 > 4x + 1$ เมื่อ $x \leq -2$ หรือ $x \geq 3$ เพราะว่า $(x^2 + 2x + 1) - (4x + 1) = x^2 - 2x = x(x - 2)$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x \geq 3$ แล้ว $x(x - 2) > 0$ ถ้า $x \leq -2$ แล้ว $x(x - 2) > 0$ ดังนั้น $x^2 + 2x + 1 - (4x + 1) > 0$ สรุป $x^2 + 2x + 1 > 4x + 1$ เมื่อ $x \leq -2$ หรือ $x \geq 3$ การแสดงว่าไม่มี (x, y) ค่าอื่น ๆ อีกแล้ว นอกจากที่หามาได้ข้างต้นเมื่อ $x \leq -2$ หรือ $x \geq 3$

$$(2x^2 + x)^2 = 4x^2 + 4x^3 + x^2 < 4x^4 + 4x^3 + x^2 + (3x^2 + 4x + 1)$$

$$= 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

$$= 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + x^2 + 2x + 1$$

$$(2x^2 + x + 1)^2 = 4x^4 + 2(2x^2)(x + 1) + (x + 1)^2$$

$$> 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1$$

$$(2x^2 + x)^2 < 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2 + x + 1)^2$$

ดังนั้น $(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2$

เพราะว่า $2x^2+x$ และ $2x^2+x+1$ เป็นจำนวนเต็มที่เกี่ยวข้องลำดับกัน

เพราะฉะนั้นจะไม่มีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $(2x^2+x)^2 < k < (2x^2+x+1)^2$

10. ตอบ 2, -2

แนวคิด เพราะว่าเราพิจารณาจำนวนเต็มในรูปแบบ $\frac{x}{y}$ และ $\frac{y}{x}$ ดังนั้นเราเลือก

กรณี $x \neq 0, y \neq 0$ และ x กับ y เป็นตัวเลขที่ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน นอกจากนั้นเรายังคิดเฉพาะกรณี $x > y$

สมมติ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ เป็นจำนวนเต็ม ให้ k เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = k$

$$\frac{x^2+y^2}{xy} = k$$

$$x^2+y^2 = kxy$$

$$y^2 = kxy - x^2$$

$$= x(ky - x)$$

เพราะว่า y ทหาร y^2 ลงตัว เพราะฉะนั้น y ทหาร $x(ky-x)$ ลงตัว

เพราะว่า x และ y ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน เพราะฉะนั้น y ทหาร $ky-x$ ลงตัว

เพราะว่า y ทหาร ky ลงตัว

เพราะฉะนั้น y ทหาร $-x$ ลงตัว

ดังนั้น $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ ก็ต่อเมื่อ $y = x$ หรือ $y = -x$

$$y = x; \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 1 + 1 = 2$$

$$y = -x; \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -1 + (-1) = -2$$

สรุป $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ หรือ 2 เท่านั้น

สถาบันกวดวิชา ENG-MATH สัมมากร

159/10 ถนนแมน C หมู่บ้านสัมมากร ถนน สุขุมวิท 3 บึงกุ่ม 10240 โทร. 3739640
เปิดทำการทุกวัน (เว้นวันจันทร์)

เปิดสอน ป. 6 ม. 1-2-3 ม. 4-5-6 และเตรียม ENTRANCE และ MBA

หลักสูตรการตัดตัวเลือก
คณิตศาสตร์ ม. ต้น ม. ปลาย GMAT และ MBA
สอนโดยผู้เชี่ยวชาญ รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

