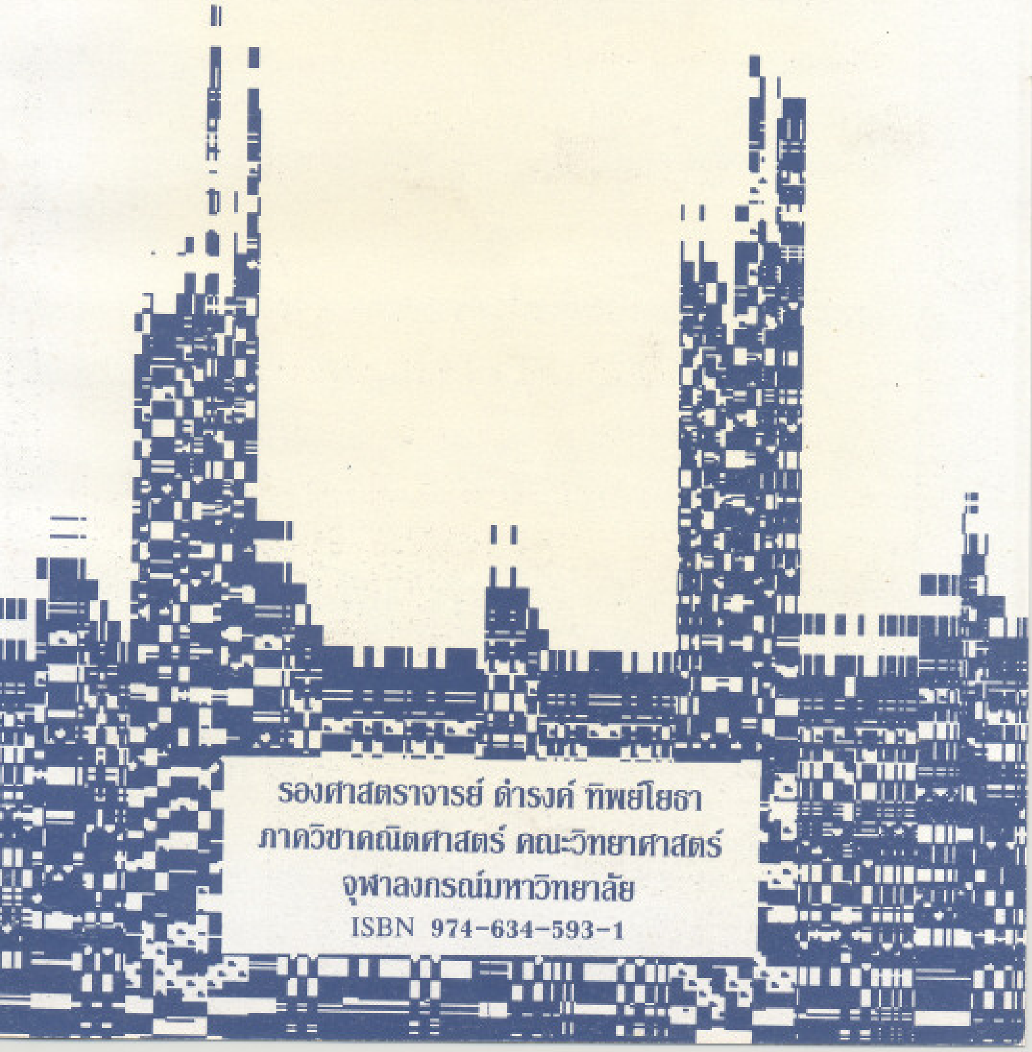
คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก [ภาค 2]

เฉลย คณิตศาสตร์ ก. 2539

เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2539



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-634-593-1

วิธีที่ได้คำตอบอย่างรวดเร็ว

คณิตศาสตร์ ก. 2539 ข้อ 42

ค่าของ $\left[\dfrac{729^{n} + 81^{2n}}{27^{n} + 243^{n}}\right]^{\frac{1}{n}}$

มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 **2.** 27 **3.** 3^{2n} **4.** $3^{\frac{1}{n}}$

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

แทนค่า n = 1 ในโจทย์และตัวเลือกจะได้

$$\left[\frac{729^{1} + 81^{2}}{27^{1} + 243^{1}}\right]^{\frac{1}{1}} = \left[\frac{729 + 6561}{270}\right] = \frac{7290}{270} = 27$$

1. 9 **2.** 27 **3.** 9 **4.** 3

สรุปตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก [ภาค 2]
เฉลย คณิตศาสตร์ ก. 2539
เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2539

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 10) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

1. คู่มือตัดตัวเลือก (ภาค 2) เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. 2539
และคณิตศาสตร์ กข. 2539

ISBN 974-634-593-1

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 4000 เล่ม พ.ศ. 2539

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980-2,2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ พิทักษ์การพิมพ์

โทร. 4112765

คำนำ

เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบต่าง ๆที่ผู้เขียนได้จัดทำไปแล้วตั้งแต่คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 1-9 ปรากฏว่าใช้ได้ผลเป็นอย่างมาก เพราะว่าข้อสอบทั้งคณิตศาสตร์ ก. และ คณิตศาตร์ กข. ปี 2539 มีข้อสอบหลายข้อที่ออกสอบตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกอย่างชัดเจน ตัวอย่างเช่น

● โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร (ก. 2539 ข้อ 1,3,8,9,42 และ กข. 2539 ข้อ 1,37)

● เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้ (ก. 2539 ข้อ 11,13,41 และ กข. 2539 ข้อ 11,17,18,39,43)

กล่าวโดยรวมหากคิดคะแนนเต็มเฉพาะส่วนที่เป็นข้อสอบปรนัย 82 คะแนนการตัดตัวเลือกทำคะแนนได้ดังนี้

● คณิตศาสตร์ ก. ทำได้ประมาณ 28 คะแนนคิดเป็น 34 %

● คณิตศาสตร์ กข. ทำได้ประมาณ 33 คะแนนคิดเป็น 40 %

เพื่อเตรียมพร้อมสำหรับข้อสอบ ENTRANCE 2540 ในหนังสือเล่มนี้จึงได้รวบรวมเทคนิคการตัดตัวเลือกอื่นๆ เพิ่มเติมให้นักเรียนได้ศึกษา นอกจากนั้นยังมีเทคนิคการจำสูตร

สำหรับ คู่มือตัดตัวเลือก (ภาค 2) นี้ผมได้ปรับปรุงให้ดีขึ้นโดยได้แสดงการหาคำตอบทั้งวิธีจริงวิธีลัดเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีการตัดตัวเลือก นอกจากนั้นยังมีเฉลยข้อสอบ ENTRANCE ทั้งคณิตศาสตร์ ก. และ กข. 2539
โดยใช้วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

สุดท้ายนี้ขอฝากประชาสัมพันธ์หนังสือ
คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 9 (คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ต้น)
หรือจะซื้อไปฝากน้องๆ ที่อยู่ ม. ต้น เลยก็ได้

พบกันใหม่เล่มต่อไปสวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

บทความพิเศษ

คณิตศาสตร์ ก. และ กข. 2539 ของใหม่ VS. ของเก่า

บทความนี้เขียนขึ้นเพื่อเป็นกำลังใจให้กับนักเรียนผู้ขยันทำข้อสอบทุกท่าน ความจริงที่พิสูจน์ได้คือข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. และ กข. 2539 มีหลายข้อที่เหมือนข้อสอบ ENTRANCE เก่าทั้งแนวทางของคำถามและแนวคิดหาคำตอบ

คณิตศาสตร์ ก. 2539 ข้อ 3.

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า 5 หาร m เหลือเศษ 4 และ 5 หาร n เหลือเศษ 2 แล้ว 5 หาร (m+n) เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

เปรียบเทียบกับที่เคยออกมาแล้วใน คณิตศาสตร์ ก. 2538 ข้อ 38

ให้ a,b,c เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า 7 หาร a เหลือเศษ 1, 7 หาร b เหลือเศษ 3 และ 7 หาร c เหลือเศษ 5 แล้ว หาร a(b+c) เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 4 4. 6

คณิตศาสตร์ ก. 2539 ข้อ 23.

กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16)$ และ

$$A = \{ x \in R \mid f'(x) > 0 \}$$

ดังนั้น A คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty,-2) \cup (0,2)$ 2. $(-2,0) \cup (2,\infty)$
3. $(-\infty,-2)$ 4. $(2,\infty)$

เปรียบเทียบกับที่เคยออกมาแล้วใน คณิตศาสตร์ ก. 2536 ข้อ 24

ให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้วเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \geq 3$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{1}{16}]$ 2. $[0, \frac{1}{16}]$ 3. $(0, \frac{1}{4}]$ 4. $[0, \frac{1}{4}]$

ตัวอย่างต่อไปขอนำมาให้ดูเพื่อนักเรียนจะได้ไม่จำแนกตัวเราเองว่าเป็นพวก คณิตศาสตร์ ก. หรือเป็นพวก คณิตศาสตร์ กข. เพราะว่าข้อสอบทั้งสองแบบมีแนวคำถามและคำตอบเหมือนกัน ตัวอย่างเช่น

คณิตศาสตร์ ก. 2539 ข้อ 32.

ถ้า [a,b] เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{x+7} \geqslant |x-5|$

แล้ว a+b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 2. 11 3. 17 4. 19

เปรียบเทียบกับที่เคยออกมาแล้วใน คณิตศาสตร์ กข. 2538 ข้อ 33

ให้ $f(x) = 2x+2$ และ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

ถ้า $\{ x \mid f(x) \leqslant g(x) \}$ เท่ากับช่วงปิด [a,b] แล้ว a+b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -8/3 3. -1 4. 0

คณิตศาสตร์ กข. 2539 ข้อ 33.

ให้ $A = \{ x \in R \mid \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geqslant 1 \}$

$B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบซึ่ง $n \leqslant -2 \}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -3 3. -2 4. -1

ของเก่าที่เคยออกคือ คณิตศาสตร์ ก. 2537 ข้อ 4

ให้ $A = \{ x \in R \mid |x-1| \leqslant 4 \}$

$B = \{ x \in R \mid \frac{x+2}{x-1} \geqslant 0 \}$

C = เซตของจำนวนเต็ม

แล้ว $A \cap B \cap C$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. { -2,2,3,4 }　　　2. {-3,-2,2,3,4 }
3. { -3,-2,1,2,3,4 }　　4. { -3,-2,1,2,3,4,5 }

จากตัวอย่างที่นำมาให้ดูนี้ถือว่าเป็นส่วนน้อย เพราะว่ายังมีอีกหลายข้อเช่น

ใหม่ล่าสุด	ของเก่า
ก. 2539 ข้อ 18	ก. 2538 ข้อ 23
ก. 2539 ข้อ 20	ก. 2538 ข้อ 46
กข. 2539 ข้อ 19	กข. 2538 ข้อ 8
กข. 2539 ข้อ 27	กข. 2538 ข้อ 52
....	...

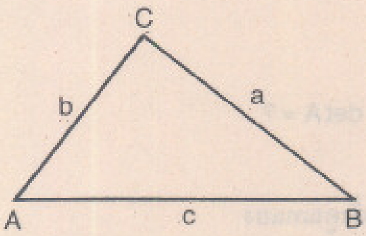
หวังว่าบทความพิเศษนี้คงจะเป็นกำลังใจอย่างมากสำหรับนักเรียนผู้ขยันทำโจทย์ข้อสอบทุกคน และหวังว่าต่อไปนี้นักเรียนคงจะไม่กีดกันตัวเองจาก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. และ คณิตศาสตร์ กข. เพราะว่าข้อสอบทั้งสองแบบมีความคล้ายกันมาก เพราะฉะนั้นยิ่งทำข้อสอบมากก็จะเห็นแนวทางของคำถามมากขึ้น

สารบัญ

1. เทคนิคการจำสูตรคณิตศาสตร์

ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์มีสูตรต่างๆ มากมายที่นักเรียนยิ่งจำได้มากก็จะเป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาโจทย์ข้อสอบและการศึกษาเรียนรู้ แต่ในบางครั้งเราอาจจะจำสูตรหรือคุณสมบัติสับสน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. จำเครื่องหมายผิดเช่นสูตรพื้นที่สามเหลี่ยม



$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

พ.ท. Δ ABC $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ———— (A)

พ.ท. Δ ABC $= \sqrt{s(s+a)(s+b)(s+c)}$ ———— (B)

สูตร (A) หรือ (B) กันแน่ที่ถูกต้อง

2. จำสัมประสิทธิ์ได้ไม่ครบ เช่น

พ.ท. Δ ABC $= ab\sin C$ ———— (C)

พ.ท. Δ ABC $= \frac{1}{2}ab\sin C$ ———— (D)

สูตร (C) หรือ (D) กันแน่ที่ถูกต้อง

3. กฎของโคไซน์

$a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos A$ ———— (E)

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ ———— (F)

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$ ———— (G)

สูตร (E) , (F) หรือ (G) กันแน่ที่ถูกต้อง

4. ในขณะที่นักเรียนจำได้ว่า

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

แต่ลืมไปว่า k มีค่าเท่าใด ทำอย่างไรจึงจะจำค่า k ได้

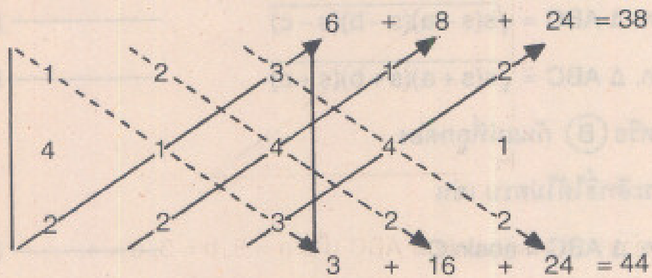
5. พาราโบลา $y = 4x^2 + x + 4$ คว่ำหรือหงาย

6. พาราโบลา $x = 2 + 3y + y^2$ เปิดทางซ้ายหรือเปิดทางขวา

7. การหา det (A) เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det A = ?$$

สิ่งที่นักเรียนอาจจำได้ คือการตั้งคูณทแยง



แต่สิ่งที่นักเรียนอาจจำสับสน คือ

$\det A = 38 - 44$ ——— (E)

หรือ $\det A = 44 - 38$ ——— (F)

สูตร (E) หรือ (F) กันแน่ที่ถูกต้อง

8. ในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน f(x) เรามีขั้นตอนดังนี้

1. หา f'(x) 2. หา f''(x)

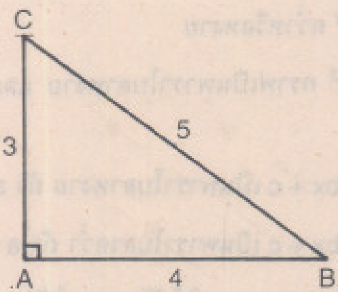
3. แก้สมการ $f'(x) = 0$ เพื่อหาค่าวิกฤต $x = c$

4. ทดสอบว่า $f''(c) > 0$ หรือ $f''(c) < 0$

สิ่งที่นักเรียนอาจจำสับสนว่า ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ปัญหาต่างๆ เกี่ยวกับการจำสูตรหรือคุณสมบัติที่กล่าวมาข้างต้นนี้ มีแนวทางในการจำสูตรและคุณสมบัติต่างๆ โดยการหยิบสิ่งของที่เราคุ้นเคย เช่น สามเหลี่ยมด้านเท่า, สามเหลี่ยมมุมฉาก, กราฟของ $y = x^2$,............ เข้ามาช่วยในการจำสูตร แนวทางและเทคนิคในการจำสูตรต่างๆ มีดังต่อไปนี้

การใช้สามเหลี่ยมมุมฉาก



ช่วยในการจำสูตรพื้นที่สามเหลี่ยม ABC เมื่อ $a = 5, b = 3, c = 4$

จะได้ $s = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3+4+5}{2} = 6$

พื้นที่จริงของสามเหลี่ยม $ABC = \dfrac{1}{2}\cdot AB \cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot 3 \cdot 4 = 6$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6(3)(2)(1)} = 6$$

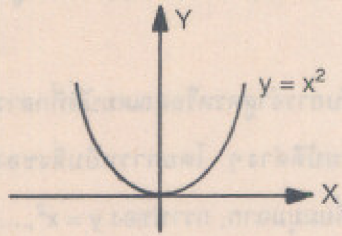
$$\sqrt{s(s+a)(s+b)(s+c)} = \sqrt{6(6+3)(6+4)(6+5)}$$

$$= \sqrt{6(9)(10)(11)} \neq 6$$

เพราะฉะนั้นสูตรพื้นที่ที่ถูกต้องคือ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

1. เทคนิคการจำสูตรที่ได้จากกราฟของ $y = x^2$

กราฟของ $y = x^2$ เป็นสิ่งที่นักเรียนเคยพบมาแล้วตั้งแต่ ม.ต้น พอมาเรียน ม.ปลายก็พบอีก สิ่งที่สำคัญของ $y = x^2$ คือกราฟ



ประโยชน์ข้อที่ 1 ของ $y = x^2$ เมื่อนักเรียนสับสนว่ากราฟของพาราโบลา

$y = x^2 + x - 4$ คว่ำหรือหงาย

$y = 2 - 4x - x^2$ คว่ำหรือหงาย

ขอให้นักเรียนนึกถึง $y = x^2$ กราฟเป็นพาราโบลาหงาย และสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็นบวก

เพราะฉะนั้น $y = ax^2 + bx + c$ เป็นพาราโบลาหงาย ถ้า $a > 0$

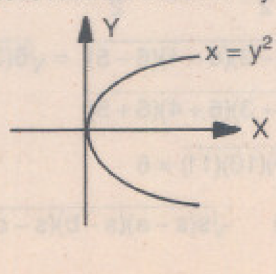
และ $y = ax^2 + bx + c$ เป็นพาราโบลาคว่ำ ถ้า $a < 0$

ต่อไปนี้เมื่อนักเรียนนึกถึงกราฟของ $y = x^2$ ได้ก็จะตอบได้ว่า

$y = 3x^2 - 4x + 4$ มีกราฟเป็นพาราโบลาหงาย

$y = 4 - 4x - x^2$ มีกราฟเป็นพาราโบลาคว่ำ

ในทำนองเดียวกันเมื่อเราจำได้ว่ากราฟของ $x = y^2$



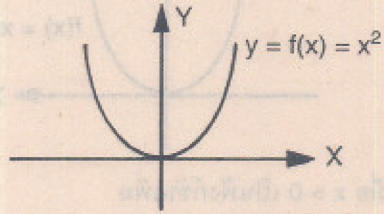
มีกราฟเป็นพาราโบลาเปิดทางขวา ก็จะทำให้จำได้ว่า

$x = 4 + 3y + y^2$ มีกราฟเป็นพาราโบลาเปิดทางขวา

$x = 3 + 2y - y^2$ มีกราฟเป็นพาราโบลาเปิดทางซ้าย

ประโยชน์ข้อที่ 2 ของ $y = x^2$

จากกราฟของ $y = x^2$



จะเห็นว่าจุด (0, 0) เป็นจุดต่ำสุดของกราฟ เพราะฉะนั้น $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ เราจะนำความจริงนี้ไปเป็นประโยชน์ช่วยในการจำเงื่อนไขว่า "ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์"

จาก $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$ $f''(x) = 2$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ $f''(0) = 2 > 0$

เราจะใช้เหตุผลว่า " $f''(0) = 2 > 0$ " ของ $f(x) = x^2$ มาช่วยในการจำว่า "ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์"

ซึ่งมีผลทำให้เราจำอีกกรณีหนึ่งได้คือ "ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์"

ประโยชน์ข้อที่ 3 ของ $y = x^2$

ในเรื่องของฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดบนช่วง (a, b) มีทฤษฎีบทที่สำคัญประการหนึ่งคือ

ถ้า $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, b)

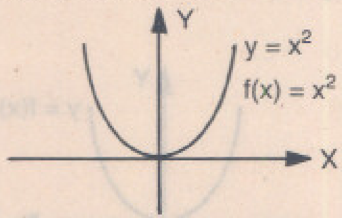
ถ้า $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (a, b)

เมื่อเกิดความสับสนขึ้นมานักเรียนอาจจำสับกันว่า $f'(x) > 0$ หรือ $f'(x) < 0$ จึงทำให้

f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เทคนิคการจำเราจะนำ $f(x) = x^2$ มาใช้ประโยชน์ดังนี้

จากกราฟของ $f(x) = x^2$ ที่ต้องจำให้ได้จะเห็นว่า



ลักษณะของกราฟเมื่อ $x > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

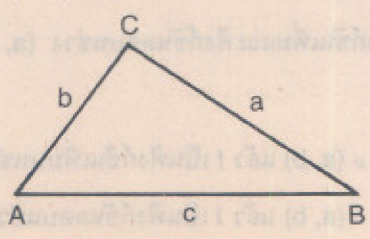
เพราะว่า $f'(x) = 2x$ และ $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x > 0$

เพราะฉะนั้นเราจะนำประโยชน์จาก $f'(x) = 2x > 0$ ทุกค่า $x > 0$ มาช่วยในการจำว่า "ถ้า $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a, b)"

การจดจำสูตรต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ วิธีที่ดีที่สุดคือการท่องจำให้แม่นยำและถูกต้อง แต่ในบางครั้งเราอาจหลงลืมไปบ้างเล็กน้อย หรือจำได้บางส่วนแต่ไม่ค่อยแน่ใจ ในบทความนี้จึงขอนำเสนอวิธีการลดจำนวนสูตรที่ต้องท่องและการตรวจสอบสูตรที่ท่องได้บางส่วน

กฎของโคไซน์

จากสามเหลี่ยมดังรูป



เราอาจสับสนระหว่างสูตร

$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$ —— (1)

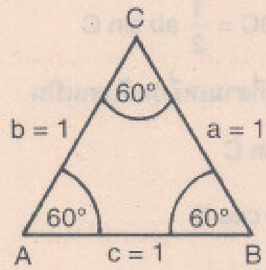
หรือ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ —— (2)

หรือ $a^2 = b^2 + c^2 - bc \cos A$ —— (3)

หรือ $a^2 = b^2 + c^2 + bc \cos A$ —— (4)

ซึ่งเมื่อถึงเวลาต้องการใช้สูตรขึ้นมาจริง ๆ อาจจะทำให้ผิดพลาดได้

ในบทความนี้จะขอแนะนำการจดจำสูตรและการตรวจสอบว่าสูตรที่เราท่องนั้นที่ถูกต้องควรจะเป็นอย่างไรแน่ โดยใช้สามเหลี่ยมด้านเท่ายาวด้านละ 1 หน่วยมาช่วยพิจารณาสูตร (1) – (4) ว่าสูตรใดถูกต้องดังนี้



(1) จะได้ $1^2 = 1^2 + 1^2 + 2(1)(1) \cos 60° = 3$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

(2) จะได้ $1^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos 60° = 1$ ถูกต้อง

(3) จะได้ $1^2 = 1^2 + 1^2 - (1)(1) \cos 60° = \frac{3}{2}$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

(4) จะได้ $1^2 = 1^2 + 1^2 + (1)(1) \cos 60° = \frac{5}{2}$ ซึ่งไม่ถูกต้อง

ในที่นี้เราจึงควรมั่นใจว่าสูตรกฎของโคไซน์ที่ถูกต้องคือ

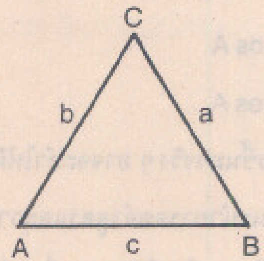
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

และจากสูตรที่ถูกต้องนี้ทำให้เราสามารถจำได้ว่าสูตรที่ถูกต้องอีก 2 สูตรคือ

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

กฎของไซน์และพื้นที่สามเหลี่ยมในพจน์ของไซน์ จากรูปสามเหลี่ยมดังรูป



$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \qquad \text{———— (5)}$$

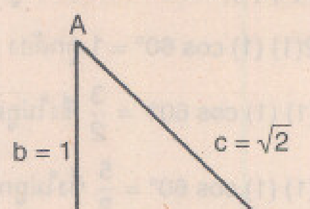
และสูตรพื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}ab \sin C$ ———— (6)

ในบางครั้งเราอาจจำสูตรพื้นที่สามเหลี่ยมสับสนเป็น

พ.ท. $\Delta = ab \sin C$ ———— (7)

หรือ พ.ท. $\Delta = \frac{1}{2}ab \cos C$ ———— (8)

ในการพิจารณาสูตรพื้นที่สามเหลี่ยมเราเทียบจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป



ซึ่งเรารู้ค่าพื้นที่จริงเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย

จากสูตร (6) $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}(1)(1)\sin 90^\circ = \frac{1}{2}$

(7) $ab\sin C = 1$

(8) $\frac{1}{2}ab\cos C = \frac{1}{2}(1)(1)\cos 90^\circ = 0$

ดังนั้นสูตร (7) และ (8) ไม่ถูกต้อง

จากสูตร (5) หากเราอยากทราบว่าอัตราส่วนที่เท่ากันนั้นเท่ากับเท่าใด ก็สามารถพิจารณาต่อไปได้ดังนี้ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = K$

$\frac{1}{2}abc$ คูณตลอดจะได้

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}abcK$$

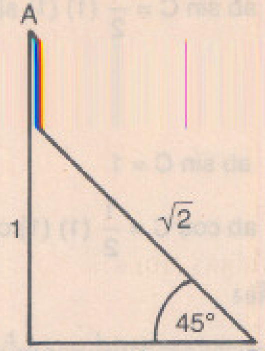
เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}abcK =$ พื้นที่ Δ ABC

นั่นคือ $K = \frac{2\ \text{พ.ท.}\ \Delta ABC}{abc}$

การจดจำฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin, cos ของมุม 30°, 45°, 60°

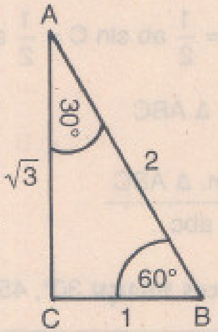
	30°	45°	60°	90°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

วิธีที่ดีอีกประการหนึ่งคือ เมื่อคิดเกี่ยวกับมุม 45° ให้นึกถึงสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประกอบมุมฉากยาว 1 หน่วย, ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทของปีทากอรัส



จะได้ว่า $\sin 45° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45° = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

และเมื่อนึกถึงมุม 30° และ 60° ให้ใช้สามเหลี่ยม



จะได้ว่า $\sin 30° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 60° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60° = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{1}{2}$

การจดจำสูตร sin, cos ของมุม A + B และ A − B จากสูตรที่ต้องท่องคือ

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A \quad \text{———} \quad (9)$$

$$\sin(A-B) = \sin A \cos B - \sin B \cos A \quad \text{———} \quad (10)$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \text{———} \quad (11)$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \text{———} \quad (12)$$

จากสูตรที่ต้องจำถึง 4 สูตรนี้ หากเราจำได้ว่า

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

ก็จะสามารถจำแค่สูตร (9) ก็จะได้สูตร (10) ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin(A-B) &= \sin(A+(-B))\\ &= \sin A\cos(-B)+\sin(-B)\cos A\\ &= \sin A\cos B-\sin B\cos A\end{aligned}$$

หรือเมื่อจำสูตร (11) ได้ ก็จะได้สูตร (12) ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(A-B) &= \cos(A+(-B))\\ &= \cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)\\ &= \cos A\cos B+\sin A\sin B\end{aligned}$$

นอกจากนี้ถ้าเราใช้ประโยชน์จาก

$$\sin(\frac{\P}{2}+\theta)=\cos\theta \quad , \quad \sin(\frac{\P}{2}-\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\P}{2}+\theta)=-\sin\theta \quad , \quad \cos(\frac{\P}{2}-\theta)=\sin\theta$$

เมื่อเราจำสูตรที่ (9) ได้ก็จะได้สูตรที่ (11) ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos(\frac{\P}{2}-(A+B+\frac{\P}{2}))\\ &= \sin(A+B+\frac{\P}{2})\\ &= \sin A\cos(B+\frac{\P}{2})+\sin(B+\frac{\P}{2})\cos A\\ &= \sin A(-\sin B)+\cos B\cos A\\ &= \cos A\cos B-\sin A\sin B\end{aligned}$$

การจดจำเกี่ยวกับสูตรผลบวกหรือผลคูณของ sin และ cos

จากสูตรที่ต้องจดจำคือ sin, cos ผลคูณเป็น sin, cos ผลบวกหรือผลต่าง

$$2 \sin A \cos B = \sin (A + B) + \sin (A - B) \quad \text{———} \quad (13)$$

$$2 \cos A \sin B = \sin (A + B) - \sin (A - B) \quad \text{———} \quad (14)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B) \quad \text{———} \quad (15)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A - B) - \cos (A + B) \quad \text{———} \quad (16)$$

หรือสูตร sin, cos ผลบวกหรือผลต่างเป็น sin, cos ผลคูณ

$$\sin A + \sin B = 2 \cos \left(\frac{A-B}{2}\right) \sin \left(\frac{A+B}{2}\right) \quad \text{———} \quad (17)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2}\right) \sin \left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \text{———} \quad (18)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2}\right) \cos \left(\frac{A-B}{2}\right) \quad \text{———} \quad (19)$$

$$\cos A - \cos B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2}\right) \sin \left(\frac{B-A}{2}\right) \quad \text{———} \quad (20)$$

สูตร (13) และสูตร (14) ถ้าเปรียบเทียบแล้วก็จะเป็นสูตรเดียวกันโดยการสลับ A กับ B เท่านั้น ดังนั้นจำแค่สูตร (13) ก็พอ

เมื่อจำสูตร (13) ได้ก็จะได้สูตร (15) และ (16) ดังนี้

$$
\begin{aligned}
2 \cos A \cos B &= 2 \sin\left(\frac{\P}{2} - A\right) \cos B \\
&= \sin\left(\frac{\P}{2} - A + B\right) + \sin\left(\frac{\P}{2} - A - B\right) \\
&= \sin\left(\frac{\P}{2} - (A - B)\right) + \sin\left(\frac{\P}{2} - (A + B)\right) \\
&= \cos (A - B) + \cos (A + B) \\
&= \cos (A + B) + \cos (A - B)
\end{aligned}
$$

$$2\sin A\sin B = 2\sin A\cos(\frac{\pi}{2}-B)$$

$$= \sin(A+(\frac{\pi}{2}-B))+\sin(A-(\frac{\pi}{2}-B))$$

$$= \sin(\frac{\pi}{2}+(A-B))+\sin(-(\frac{\pi}{2}-(A+B)))$$

$$= \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

ในที่นี้จึงอยากสรุปว่าสูตร (13) – (16) จำสูตรที่ (13) ให้แม่นก็น่าจะเพียงพอ

ในกรณีของสูตร (17) – (20) จะเห็นว่า

ถ้าเราจำสูตร (17) ได้ก็จะได้สูตร (18) – (20) ดังนี้

$$\sin A-\sin B = \sin A+\sin(-B)$$

$$= 2\cos(\frac{A-(-B)}{2})\sin(\frac{A+(-B)}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{A+B}{2})\sin(\frac{A-B}{2})$$

$$\cos A+\cos B = \sin(\frac{\pi}{2}+A)+\sin(\frac{\pi}{2}+B)$$

$$= 2\cos(\frac{\frac{\pi}{2}+A-(\frac{\pi}{2}+B)}{2})\sin(\frac{\frac{\pi}{2}+A+\frac{\pi}{2}+B}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{A-B}{2})\sin(\frac{\pi}{2}+\frac{A+B}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{A-B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$$

และ $\cos A-\cos B = \cos A+\cos(\pi-B)$

$$= 2\cos(\frac{A+\pi+B}{2})\cos(\frac{A-\pi+B}{2})$$

$$= 2\cos(\frac{\pi}{2}+(\frac{A+B}{2}))\cos(-(\frac{A+B}{2}))$$

$$= 2\,(-\sin(\frac{A-B}{2}))\,\sin(\frac{A+B}{2})$$

$$= 2\sin(\frac{B-A}{2})\,\sin(\frac{A+B}{2})$$

$$= 2\sin(\frac{A+B}{2})\,\sin(\frac{B-A}{2})$$

ดังนั้นสูตร (17) – (20) จำแค่สูตร (17) น่าจะเพียงพอ

สูตรต่อไปที่เราอาจจำสับสนคือ $\cos^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ หรือ $\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

ในที่นี้หากเราเปรียบเทียบโดยใช้มุม $\theta = 0°$ ก็จะได้ว่า

$$\cos^2 0° = 1, \frac{1-\cos 0°}{2} = 0 \text{ และ } \frac{1+\cos 0°}{2} = 1$$

ดังนั้น $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$ จึงจะถูกต้อง

ในทำนองเดียวกันสูตร $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ หรือ $\frac{\cos 2\theta - 1}{2}$ กันแน่

เมื่อเราเลือก $\theta = \frac{\P}{2}$ จะได้ $\sin^2\frac{\P}{2} = 1$, $\frac{1-\cos\P}{2} = 1$ และ $\frac{\cos\P - 1}{2} = -1$

ดังนั้นสูตร $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ จึงจะถูกต้อง

จะเห็นได้ว่าเมื่อเราท่องจำสูตรต่างๆ มามากมายหลายสูตรแต่เมื่อเกิดความสับสน เมื่อต้องการใช้งานจริง การแทนค่าเล็กๆ น้อยๆ ก็จะทำให้เราได้ใช้สูตรที่ถูกต้องและเป็นจริง

สูตรที่จะขอกล่าวต่อไปคือสูตรเกี่ยวกับเมตริกซ์ที่อาจสับสนบ่อยคือ

$$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} \text{ หรือ } B^{-1}A^{-1}$$

ในการตรวจสอบขอใช้คุณสมบัติการคูณตรวจสอบดังนี้

เพราะว่า $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B \quad = B^{-1}(IB) \quad = B^{-1}B \quad = I$

ดังนั้น $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ จึงจะถูกต้อง

สำหรับสูตร $(AB)^t = A^t B^t$ หรือ $B^t A^t$

เราตรวจสอบโดยการเทียบมิติดังนี้

เลือกตัวอย่าง A มีมิติ 2 x 3 และ B มีมิติ 3 x 2

จะได้ $(AB)^t$ มีมิติ 2 x 2

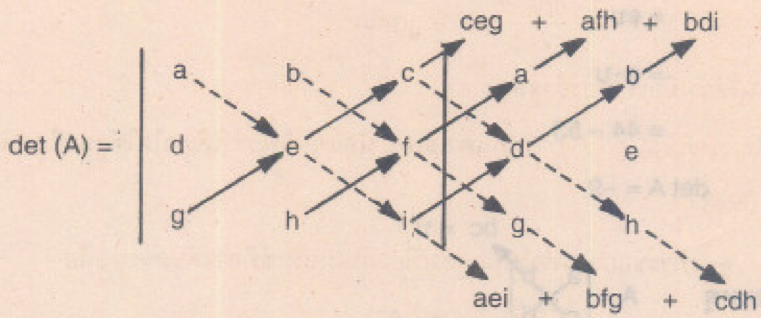
ส่วน $A^t B^t$ มีมิติเท่ากับ 3 x 3 และ $B^t A^t$ มีมิติเท่ากับ 2 x 2

ดังนั้น $(AB)^t = B^t A^t$ จึงจะถูกต้อง

การหาค่า det (A) เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ 3 x 3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

1. นำหลักที่ 1 มาต่อท้ายหลักที่ 3
2. นำหลักที่ 2 มาต่อท้ายหลักที่ 4
3. ทำการคูณทแยง



สิ่งที่นักเรียนอาจจะลืมหรือจำแล้วสับสนคือไม่รู้ว่าจะเอาอะไรเป็นตัวตั้งและเอาอะไรเป็นตัวลบ

ขอแนะนำ เทคนิคการจำดังนี้คือ ให้นึกถึงคำว่า ลบ

det (A) = ลบ

= ล - บ

= ล่าง - บน

= ผลบวกข้างล่าง - ผลบวกข้างบน

= [ceg + afh + bdi] – [aei + bfg + edh]

ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

15 + 6 + 32 = 53

$$\det A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

20 + 12 + 12 = 44

= ลบ

= ล-บ

= 44 – 53

det A = –9

bc = บ

หมายเหตุ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ad = ล

det A = ลบ

= ล-บ

= ad – bc

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\det A = 3 - 8 = -5$$

$p \rightarrow q$ สมมูลกับอะไร

สูตรข่องประพจน์ที่สมมูลกัน เช่น $p \rightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ใดซึ่งข้อสอบออกบ่อยครั้ง นักเรียนอาจสับสนว่าเป็น $p \vee {\sim}q$ หรือ ${\sim}p \vee q$ การตรวจสอบว่าเป็นสูตรใดนักเรียนอาจใช้เหตุผลช่วยตรวจสอบ 2 แบบคือ

1. ใช้ตรวจค่าความจริง
2. ใช้เหตุผลว่า $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ เมื่อ หน้าจริงหลังเท็จ นั่นคือ p เป็นจริง q เป็นเท็จ

   แต่ถ้า p เป็นจริงแล้ว $p \vee {\sim}q$ เป็นจริงแน่นอน

   เพราะฉะนั้น $p \rightarrow q$ ต้องไม่สมมูลกับ $p \vee {\sim}q$

   ดังนั้น $p \rightarrow q$ สมมูลกับ ${\sim}p \vee q$ เสมอ

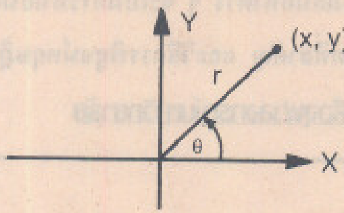
การเปลี่ยนรูปแบบมุมฉากเป็นรูปแบบเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

$$z = x + yi$$
$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

เช่น $z = 1 + i$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

หลักการเปลี่ยนพิกัด



$$z = x + yi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

สิ่งที่นักเรียนอาจสับสนคือ $x = r \sin \theta$ หรือ $x = r \cos \theta$

ข้อแนะนำ ตามลำดับของตัวอักษร x มาก่อน y และ c มาก่อน s เพราะฉะนั้น x ต้องคู่กับ c และ y ต้องคู่กับ s

สรุป $x = r \cos \theta$

$y = r \sin \theta$

2. การประมาณค่าช่วยในการตัดตัวเลือก

ข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับ ม.ปลาย สามารถนำความรู้เกี่ยวกับการประมาณค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้ การประมาณค่าที่สำคัญจะขอจำแนกเป็น 3 กรณีที่สำคัญดังนี้

2.1. การประมาณค่าตัวเลข

2.2. การประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2.3. การประมาณค่าลอการิทึม

2.1. การประมาณค่าตัวเลข

ค่าตัวเลขที่สำคัญที่นักเรียนควรจำได้ เช่น

$\sqrt{2} = 1.414$ $\quad\sqrt{3} = 1.732$

$\sqrt{5} = 2.236$ $\quad\sqrt{7} = 2.646$

$\sqrt{11} = 3.317$ $\quad\sqrt{13} = 3.606$

$\sqrt{17} = 4.123$ $\quad\sqrt{19} = 4.359$

$\sqrt{23} = 4.796$ $\quad\sqrt{29} = 5.385$

ข้อแนะนำ ในการสอบจริงนักเรียนอาจจดจำเพียงทศนิยม 1 ตำแหน่ง ก็พอ เช่น $\sqrt{2} = 1.4$, $\sqrt{3} = 1.7$, $\sqrt{5} = 2.2$............

การจดจำค่าตัวเลขเราจะจดจำเฉพาะรากที่สองของจำนวนเฉพาะก็พอ เมื่อเราจำเป็นจะต้องใช้ค่ารากที่สองของผลคูณของจำนวนเฉพาะ เช่น $\sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{20}, \sqrt{27}$ จะประมาณด้วยผลคูณ

ตัวอย่างเช่น $\quad\sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = (1.4)(1.7) = 2.38 = 2.4$

$$\sqrt{6} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = (1.414)(1.732) = 2.449$$

ค่าจริง $\sqrt{6} = 2.4494897$

$$\sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (1.4)(2.2) = 3.08 = 3.1$$

$$\sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = (1.414)(2.236) = 3.162$$

ค่าจริง $\sqrt{10} = 3.16227766$

$$\sqrt{39} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = (1.7)(3.6) = 6.12 = 6.1$$

$$\sqrt{39} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} = (1.732)(3.606) = 6.246$$

ค่าจริง $\sqrt{39} = 6.244997998$

การหารากที่สองโดยการตั้งหารยาว

ตัวอย่างเช่นการหารากที่สองของ 19

```
                            4.35
                  4       )19
เอา 2 คูณ                  16
                  83       300   ← เติม 0 สอง
หาเลข X ที่ใหญ่             249
ที่สุดและ (8X)X
ไม่เกิน 300      865       5100  ← เติม 0 สองตัว
                           4325
ได้จากเอา 2 คูณ
เฉพาะเลข 3

หาเลข x ที่ใหญ่
ที่สุดที่ (86x)x
ไม่เกิน 5100
```

สรุป $\sqrt{19} \sim 4.35$

หมายเหตุค่าจริง $\sqrt{19} = 4.358898943$

ตัวอย่าง 2.1 คณิตศาสตร์ ก. 2538

จำนวน $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ มีค่าเท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{7-\sqrt{10}}{3}$
2. $\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3}$
3. $\dfrac{8-\sqrt{10}}{3}$
4. $\dfrac{8-2\sqrt{10}}{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

$$= \frac{5-2\sqrt{2}\sqrt{5}+2}{5-2} \quad = \frac{7-2\sqrt{10}}{3}$$

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า $\sqrt{5}=2.2,\ \sqrt{2}=1.4,\ \sqrt{10}=3.2$

เพื่อเปรียบค่าของโจทย์กับตัวเลือก

จากโจทย์ $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{2.2-1.4}{2.2+1.4} = \dfrac{0.8}{3.6} = \dfrac{8}{36} < \dfrac{1}{2}$

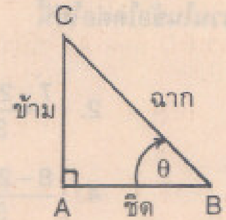
1. $\dfrac{7-\sqrt{10}}{3} = \dfrac{7-3.2}{3} = \dfrac{3.8}{3} > \dfrac{1}{2}$
2. $\dfrac{7-2\sqrt{10}}{3} = \dfrac{7-6.4}{3} = \dfrac{0.8}{3} = \dfrac{8}{30} < \dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{8-\sqrt{10}}{3} = \dfrac{8-3.2}{3} = \dfrac{4.8}{3} > \dfrac{1}{2}$
4. $\dfrac{8-2\sqrt{10}}{3} = \dfrac{8-6.4}{3} = \dfrac{1.8}{3} > \dfrac{1}{2}$

ขณะนี้จะเห็นได้ว่า ค่าในตัวเลือก 1., 3. และ 4. ต่างจากโจทย์มาก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

2.2. การประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และ A = 90°



sin θ = $\frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{BC}$, cosec θ = $\frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{BC}{AC}$

cos θ = $\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AB}{BC}$, sec θ = $\frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{BC}{AB}$

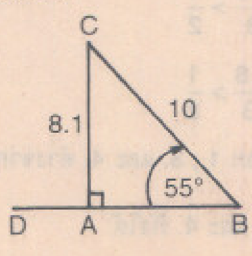
tan θ = $\frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{AC}{AB}$, cot θ = $\frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{AB}{AC}$

การประมาณค่า sin θ และ cos θ เราจะใช้สามเหลี่ยมที่มีมุม B = θ และเลือกให้ BC ยาวเท่ากับ 10 เซนติเมตร

การประมาณค่า tan θ นั้นเราจะใช้สามเหลี่ยมที่มีความยาวด้าน AB เท่ากับ 10 เซนติเมตร

สรุปโดยรวมคือ หากต้องการประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของสูตรใดๆ ก็ตามเราต้องเลือกให้ด้านที่เป็นตัวหารมีความยาวเท่ากับ 10 เซนติเมตร เพื่อความสะดวกในการหาร

ตัวอย่าง การประมาณค่า sin 55°



1. ลากเส้นตรง BD

2. ลากเส้น BC ยาว 10 เซนติเมตร และ $C\hat{B}D = 55°$

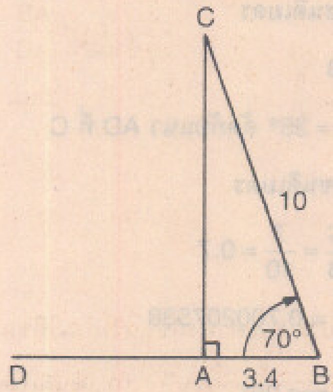
3. จาก C ลากเส้นมาตั้งฉากกับแนว BD ที่จุด A (ใช้บรรทัดแบบสามเหลี่ยมมุมฉากจะทำให้ลากเส้น AC ได้สะดวก)

4. วัดความยาว AC ได้ 8.1

เพราะฉะนั้น $\sin 55° = \frac{AC}{BC} = \frac{8.1}{10} = 0.81$

หมายเหตุ ค่าจริง $\sin 55° = 0.819152044$

ตัวอย่าง การประมาณค่า $\cos 70°$



1. ลาก BD

2. ลาก BC = 10 เซนติเมตรและ $C\hat{B}A = 70°$

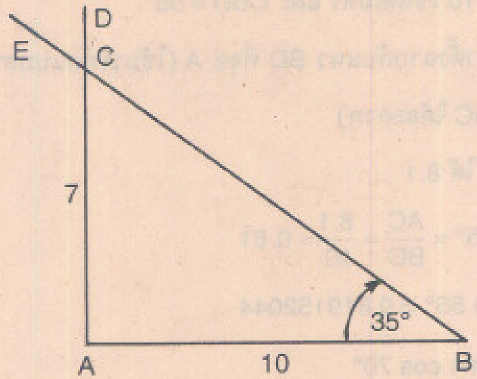
3. จากจุด C ลากเส้นมาตั้งฉากกับแนว BD ที่จุด A

4. วัดความยาว AB ได้ 3.4 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\cos 70° = \frac{AB}{BC} = \frac{3.4}{10} = 0.34$

หมายเหตุ ค่าจริง $\cos 70° = 0.34202014$

ตัวอย่าง การประมาณค่า tan 35°



1. ลากเส้น AB ยาว 10 เซนติเมตร

2. ลาก DA ตั้งฉากกับ AB

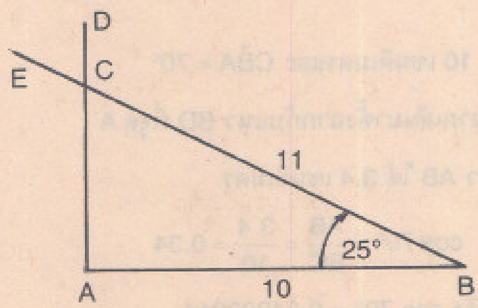
3. ลาก BE ที่ทำให้ $A\hat{B}E = 35°$ ตัดกับแนว AD ที่ C

4. วัดความยาว AC = 7 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\tan 35° = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{10} = 0.7$

หมายเหตุ ค่าจริง tan 35° = 0.700207538

ตัวอย่าง การประมาณค่า sec 25°

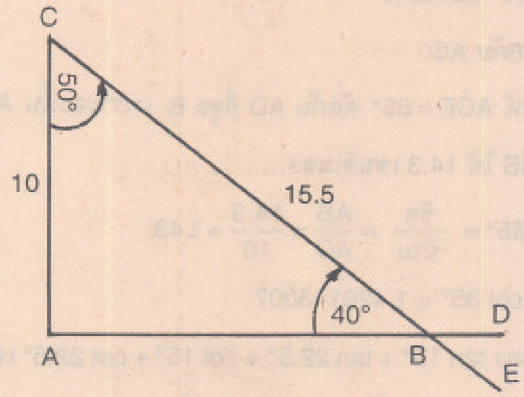


1. ลากเส้น AB ยาว 10 เซนติเมตร
2. ลาก DA ตั้งฉากกับ AB
3. ลาก BE ที่ทำให้ $E\hat{B}A = 25°$ ตัดกับแนว AD ที่ C
4. วัดความยาว BC ได้ 11 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\sec 25° = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{BC}{AB} = \frac{11}{10} = 1.1$

หมายเหตุ ค่าจริง sec 25° = 1.103377919

ตัวอย่าง การประมาณค่า cosec 40°

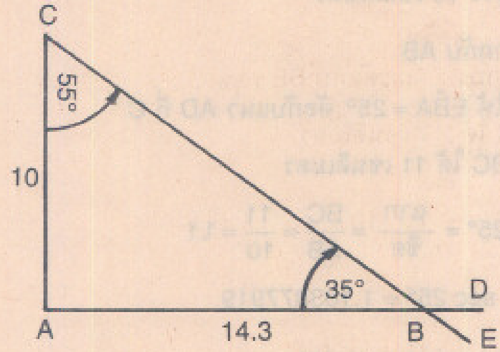


1. ลากเส้น AC ยาว 10 เซนติเมตร
2. ลาก AD ตั้งฉากกับ AC
3. ลาก CE ทำมุม 50° กับ AC และตัดกับ AD ที่จุด B
   เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C = 40°$
4. วัดความยาว BC = 15.5 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\operatorname{cosec} 40° = \operatorname{cosec} A\hat{B}C = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}} = \frac{BC}{AC} = \frac{15.5}{10} = 1.55$

หมายเหตุ ค่าจริง cosec 40° = 1.555723827

ตัวอย่าง การประมาณค่า cot 35°



1. ลาก AC ยาว 10 เซนติเมตร
2. ลาก AD ตั้งฉากกับ AC
3. ลาก EC ที่ทำให้ $A\hat{C}E = 55°$ ตัดกับ AD ที่จุด B เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C = 35°$
4. วัดความยาว AB ได้ 14.3 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\cot 35° = \dfrac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{14.3}{10} = 1.43$

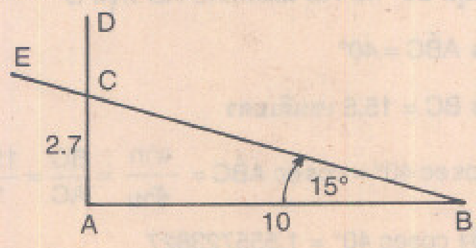
หมายเหตุ ค่าจริง cot 35° = 1.428148007

ตัวอย่าง 2.2 ค่าของ $\tan 15° + \tan 22.5° + \cot 15° + \cot 22.5°$ เท่ากับเท่าใด

1. $2+\sqrt{2}$ 2. $4+2\sqrt{2}$ 3. $2+\sqrt{3}$ 4. $4+2\sqrt{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด การประมาณค่า tan 15° และ cot 15°

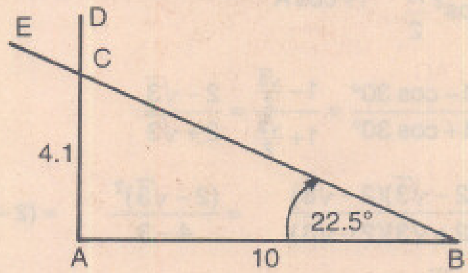


1. ลาก AB ยาว 10 เซนติเมตร
2. ลาก BE ที่ทำให้ $E\hat{B}A = 15°$
3. ลาก AD ตั้งฉากกับ AB และตัดกับ BE ที่จุด C
4. วัดความยาว AC ได้ 2.7 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\tan 15° = \frac{AC}{AB} = \frac{2.7}{10} = 0.27$

และ $\cot 15° = \frac{1}{\tan 15°} = \frac{10}{2.7} = 3.7$

การประมาณค่า tan 22.5° และ cot 22.5°



ในทำนองเดียวกันกับการวาดรูปข้างต้น จะได้ความยาว AC = 4.1

เพราะฉะนั้น $\tan 22.5° = \frac{AC}{AB} = \frac{4.1}{10} = 0.41$

และ $\cot 22.5° = \frac{1}{\tan 22.5°} = \frac{10}{4.1} = 2.44$

สรุป $\tan 15° + \tan 22.5° + \cot 15° + \cot 22.5°$

$= 0.27 + 0.41 + 3.7 + 2.44 \qquad = 6.82$

ประมาณค่าในแต่ละตัวเลือกจะได้ว่า

1. $2+\sqrt{2} = 2 + 1.414 = 3.414$
2. $4+2\sqrt{2} = 4 + 2(1.414) = 6.828$

3. $2+\sqrt{3} = 2 + 1.732 = 3.732$

4. $4+2\sqrt{3} = 4 + 2(1.732) = 7.464$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง แบบที่ 1. ใช้สูตรตรีโกณมิติ

$$\sin^2\frac{A}{2} = \frac{1-\cos A}{2}, \cos^2\frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$$

$$\tan^2\frac{A}{2} = \frac{\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{1-\cos A}{1+\cos A}$$

$$\tan^2 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{(2-\sqrt{3})^2}{4-3} = (2-\sqrt{3})^2$$

ดังนั้น $\tan 15^\circ = 2-\sqrt{3}$

และ $\cot 15^\circ = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$

$$\tan^2 22.5 = \frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{2-1} = (\sqrt{2}-1)^2$$

$$\tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$$

$$\cot 22.5^\circ = \frac{1}{\tan 22.5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$$

สรุป $\tan 15^\circ + \tan 22.5^\circ + \cot 15^\circ + \cot 22.5^\circ$

$$= (2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) + (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}-1)$$

$$= 4 + 2\sqrt{2}$$

วิธีจริง แบบที่ 2 ใช้เทคนิควิธีรวมพจน์ดังนี้

$$\tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \quad = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{1}{\sin A \cos A} \quad = \frac{2}{2\sin A \cos A} \quad = \frac{2}{\sin 2A}$$

เพราะฉะนั้น $\tan 15^\circ + \tan 22.5^\circ + \cot 15^\circ + \cot 22.5^\circ$

$$= (\tan 15^\circ + \cot 15^\circ) + (\tan 22.5^\circ + \cot 22.5^\circ)$$

$$= \frac{2}{\sin 30^\circ} + \frac{2}{\sin 45^\circ} \qquad = \frac{2}{(\frac{1}{2})} + \frac{2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})} \qquad = 4 + 2\sqrt{2}$$

การประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

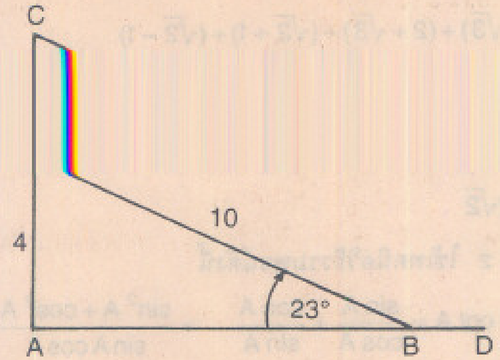
การประมาณค่า arcsin 0.4

ให้ $\theta = \arcsin 0.4 = \arcsin \frac{4}{10}$

$$\sin\theta = \frac{4}{10}$$

ดังนั้นวาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 4 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย แล้ววัดมุม θ ดังนี้

1. ลาก AC ยาว 4 เซนติเมตร
2. ลาก AD ตั้งฉากกับ AC
3. การวงเวียนรัศมี 10 เซนติเมตร จุดศูนย์กลางที่ C ตัดแนว AD ที่ B วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 23°



เพราะว่า $\sin A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{10} = 0.4$

เพราะฉะนั้น $\arcsin 0.4 = 23°$

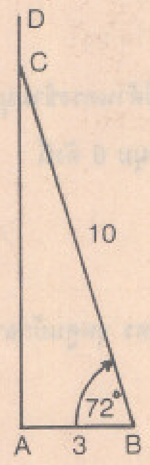
หมายเหตุ ค่าจริง $\arcsin 0.4 = 23.57817848°$

การประมาณค่า arccos 0.3

$$B = \arccos 0.3$$

$$\cos B = 0.3 = \frac{3}{10}$$

วาดรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านตรงข้ามฉากยาว 10 หน่วยและด้านประชิดมุม B ยาว 3 หน่วย ตามขั้นตอนดังนี้



1. ลาก AB ยาว 3 เซนติเมตร

2. ลาก AD ตั้งฉากกับ AB

3. การวงเวียนรัศมี 10 เซนติเมตรจุดศูนย์กลางที่ B ตัดแนว AD ที่ C วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 72°

$$\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{10} = 0.3$$

เพราะฉะนั้น $\arccos 0.3 = \hat{B} = 72^\circ$

หมายเหตุ ค่าจริง $\arccos 0.3 = 72.54239688^\circ$

การประมาณค่า arctan 0.45

$$B = \arctan 0.45$$

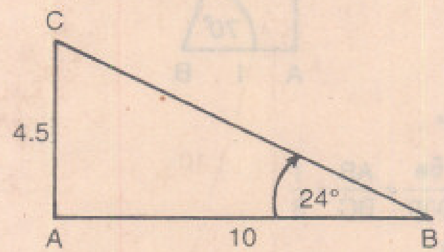
$$\tan B = 0.45 = \frac{4.5}{10}$$

วาดรูปสามเหลี่ยม ABC ตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 10 เซนติเมตร

2. ลาก AC ยาว 4.5 เซนติเมตร และ AC ตั้งฉากกับ AB

3. ลาก BC และวัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 24°



$$\tan A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{AC}{AB} = \frac{4.5}{10} = 0.45$$

$$\arctan(0.45) = A\hat{B}C = 24^\circ$$

หมายเหตุ ค่าจริง arctan 0.45 = 24.22774532°

การประมาณค่า arcsec 3

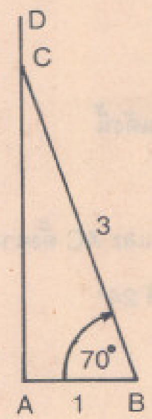
$B = \text{arcsec } 3$

$\sec B = 3$

$\cos B = \frac{1}{3}$

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB = 1 นิ้ว
2. ลาก AD ตั้งฉากกับ AB
3. การวงเวียนรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ B ตัดแนว AD ที่ C



วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 70°

$\cos A\hat{B}C = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$

$\sec A\hat{B}C = 3$

$\text{arc}\sec 3 = A\hat{B}C = 70°$

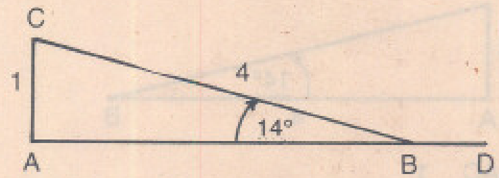
หมายเหตุ ค่าจริง arcsec 3 = 70.52878139

การประมาณค่า arccosec 4

$B = \text{arccosec } 4$

$\text{cosec } B = 4$

$\sin B = \frac{1}{4}$



วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AD
2. ลาก AC ยาว 1 นิ้ว และ AC ตั้งฉากกับ AB
3. กาววงเวียนรัศมี 4 นิ้ว จุดศูนย์กลางที่ C ตัดแนว AD ที่ B
4. ลาก BC และวัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 14°

$$\sin A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{4}$$

$$\text{cosec } A\hat{B}C = 4$$

$$\text{arccosec } 4 = A\hat{B}C = 14^\circ$$

หมายเหตุ ค่าจริง arccosec 4 = 14.47751219°

การประมาณค่า arccot 4

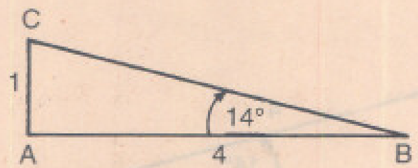
$B = \text{arccot } 4$

$\cot B = 4$

$\tan B = \frac{1}{4}$

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 4 นิ้ว
2. ลาก AC ยาว 1 นิ้ว และ AC ตั้งฉากกับ AB
3. ลาก BC และวัดมุม $A\hat{B}C$ จะได้ $A\hat{B}C = 14°$



$$\tan A\hat{B}C = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\cot A\hat{B}C = 4$$

$$\text{arccot } 4 = A\hat{B}C = 14°$$

หมายเหตุ ค่าจริง arccot 4 = 14.03624347

ตัวอย่าง 2.3 ค่าของ $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - 2\arctan(-\frac{1}{2})\right]$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2\sqrt{5}}{3}$
2. $\frac{11\sqrt{5}}{25}$
3. $\frac{2\sqrt{5}}{25}$
4. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

ตอบ 3.

แนวคิด ให้ $A = \arcsin\frac{4}{5}$ และ $B = \arctan(-\frac{1}{2})$

จะได้ $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = \frac{3}{5}$ และ $\tan B = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - 2\arctan(-\frac{1}{2})\right]$

$= \cos(\frac{A}{2} - 2B) \qquad = \cos\frac{A}{2}\cos 2B + \sin\frac{A}{2}\sin 2B$

$$=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\cdot\frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}+\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\cdot\frac{2\tan B}{1+\tan^2 B}$$

$$=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2})^2}{1+(-\frac{1}{2})^2}+\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}\cdot\frac{2(-\frac{1}{2})}{1+(-\frac{1}{2})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot\frac{3}{5}+\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\frac{-4}{5}$$

$$=\frac{6}{5\sqrt{5}}-\frac{4}{5\sqrt{5}} \qquad =\frac{2}{5\sqrt{5}} \qquad =\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

การตัดตัวเลือก

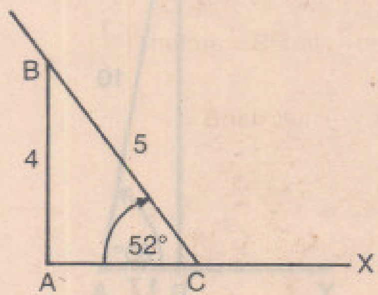
เพราะว่า $-1\leq \cos\theta \leq 1$ และ $\frac{2\sqrt{5}}{3}=\frac{2(2.2)}{3}>1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้ เพราะว่า arctan $(-x) = -$arctan x

เพราะฉะนั้น $\cos(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}-2\arctan(-\frac{1}{2}))=\cos(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5}+2\arctan\frac{1}{2})$

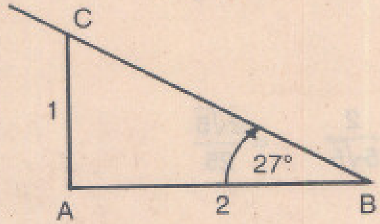
การหามุม $\arcsin\frac{4}{5}$ เป็นหน่วยองศา

1. ลากเส้น AX
2. ลาก BA ตั้งฉากกับ AX และ AB = 4
3. กางวงเวียนรัศมี 5 จุดศูนย์กลางที่ B ตัดเส้น AX ที่ C
4. วัดมุม ACB ได้ 52°



เพราะว่า $\sin C = \frac{AB}{BC}$ หรือ $\sin 52^\circ = \frac{4}{5}$ เพราะฉะนั้น $\arcsin \frac{4}{5} = 52^\circ$

การหาค่ามุม $\arctan \frac{1}{2}$ เป็นหน่วยองศา



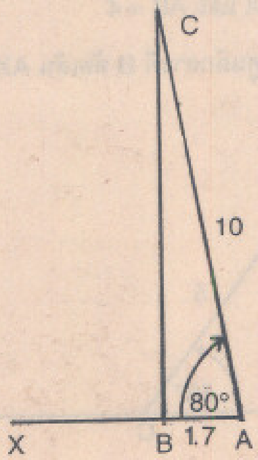
1. ลากเส้น AB = 2
2. ลากเส้น AC ตั้งฉากกับ AB และ AC = 1
3. วัดมุม ABC ได้ 27°

เพราะว่า $\tan B = \frac{AC}{AB}$, $\tan 27^\circ = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\arctan \frac{1}{2} = 27^\circ$

และ $\cos(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} + 2\arctan\frac{1}{2})$

$= \cos(\frac{1}{2}(52^\circ) + 2(27^\circ))$ $= \cos(26 + 54)$ $= \cos 80^\circ$

การประมาณค่า $\cos 80^\circ$



1. ลากเส้น AX

2. ลาก AC และ $C\hat{A}X = 80$ และ AC = 10 เซนติเมตร

3. ลาก CB ตั้งฉากกับ AX

4. วัดความยาว AB = 1.7

เพราะฉะนั้น $\cos 80^\circ = \cos B\hat{A}C = \frac{AB}{AC} = \frac{1.7}{10} = 0.17$

สรุป $\cos\left[\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - 2\arctan(-\frac{1}{2})\right] = 0.17$

ประมาณค่าในตัวเลือกที่เหลือ

2. $\frac{11\sqrt{5}}{25} = \frac{11(2.2)}{25} = 0.968$

3. $\frac{2\sqrt{5}}{25} = \frac{2(2.2)}{25} = 0.176$

4. $\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2.2}{5} = 0.44$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

ตัวอย่าง 2.4 ถ้า $\sin 2x = \frac{24}{25}$ แล้ว $\sin^4 x + \cos^4 x$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{337}{625}$ 2. $\frac{576}{625}$ 3. $\frac{674}{625}$ 4. $\frac{625}{1250}$

ตอบ 1.

แนวคิด การประมาณค่ามุม 2x

เพราะว่า $2x = \arcsin\frac{24}{25}$ เพราะฉะนั้นเราควรวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้น AD

2. ลาก AC ตั้งฉากกับ AD และ AC = 24 หน่วย ($\frac{1}{2}$ ซม/หน่วย)

3. การวงเวียนรัศมี 25 หน่วยจุดศูนย์กลางที่ C ตัดแนว AD ที่ B

จากรูป $\sin A\hat{B}C = \dfrac{AC}{BC}$

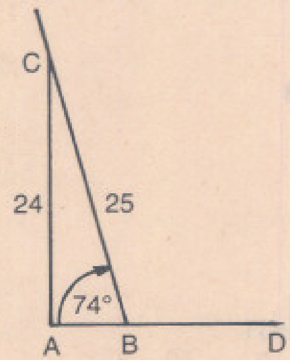
$$\sin A\hat{B}C = \frac{24}{25}$$

$$\arcsin \frac{24}{25} = A\hat{B}C$$

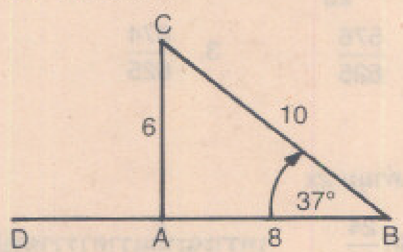
วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 74°

เพราะฉะนั้น $2x = 74^\circ$

$$x = 37^\circ$$



การประมาณค่า $\sin 37^\circ$ และ $\cos 37^\circ$



1. ลากเส้นตรง DB
2. ลาก BC ยาว 10 เซนติเมตร และ $C\hat{B}D = 37^\circ$
3. ลาก CA ตั้งฉากกับ BD
4. วัดระยะทาง AC และ AB ได้ AC = 6 และ AB = 8

เพราะฉะนั้น $\sin x = \sin 37° = \sin A\hat{B}C = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos x = \cos 37° = \cos A\hat{B}C = \frac{AB}{BC} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

และ $\sin^4 x + \cos^4 x = (\frac{3}{5})^4 + (\frac{4}{5})^4 \quad = \frac{81}{625} + \frac{256}{625} \quad = \frac{337}{625}$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

วิธีจริง แบบที่ 1

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1-\sqrt{1-\sin^2 2x}}{2} \quad = \frac{1-\sqrt{1-(\frac{24}{25})^2}}{2}$$

$$= \frac{1-\sqrt{\frac{625-576}{625}}}{2} \quad = \frac{1-\frac{7}{25}}{2} = \frac{18}{50} \quad = \frac{9}{25}$$

$$\sin^4 x = \frac{81}{625}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1+\frac{7}{25}}{2} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

$$\cos^4 x = \frac{256}{625}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{81}{625} + \frac{256}{625} \quad = \frac{337}{625}$$

แบบที่ 2 ใช้เทคนิคการจัดรูปทางพีชคณิต

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - \frac{1}{2}(2\sin x \cos x)^2$$

$$= 1^2 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(\frac{24}{25})^2 \quad = 1 - \frac{288}{625} \quad = \frac{337}{625}$$

ตัวอย่าง 2.5 คณิตศาสตร์ ก. 2534

ค่าของ $\log_3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
2. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
3. $\dfrac{11}{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$
4. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด $\log_3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} = \log_3(3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}\log_3 3\sqrt{3}$

$$= \frac{1}{3}\log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$= (\frac{3}{2})(\frac{1}{3})$$

$$= \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{2(1.4)}{1+1.4-1.7} = \frac{2.8}{0.7} = 4$$

สรุป $\log_3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cong 4.5$

ประมาณค่าในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $2+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 2+1.4+1.7 = 5.1$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{3}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1.5+1.4+1.7 = 4.6$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{11}{6}+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1.83+1.4+1.7 = 4.93$

ตัวเลือก 4. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3} = 1+1.4+1.7 = 4.1$

สรุปเลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง $\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})^2-3} \quad = \dfrac{2\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{1+2\sqrt{2}+2-3} \quad = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

สรุป $\log_3 \sqrt[3]{3\sqrt{3}} + \dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2}+1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \quad = \dfrac{3}{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 2.6 คณิตศาสตร์ กข. 2536

ถ้า $\tan A = \dfrac{1}{7}$ และ $\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ เมื่อ A และ B เป็นมุมแหลม แล้ว $\tan(A+2B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

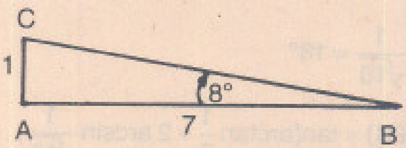
1. $\dfrac{1}{2}$ 2. 1 3. $\dfrac{3}{2}$ 4. 2

ตอบ 2.

แนวคิด $\tan A = \dfrac{1}{7}$, $A = \arctan\dfrac{1}{7}$

$\sin B = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, $B = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

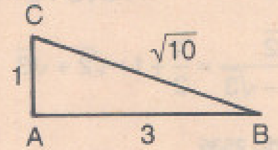
การประมาณค่า $\arctan\dfrac{1}{7}$



1. ลาก AB = 7 เซนติเมตร
2. ลาก AC = 1 เซนติเมตร และ CA ⊥ AB
3. ลาก BC
4. วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 8°

เพราะฉะนั้น $\arctan\frac{1}{7} = 8°$

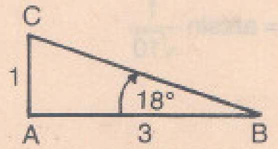
การประมาณค่า $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$



ถ้าด้านตรงข้ามมุม = 3 และด้านตรงข้ามมุมฉาก = $\sqrt{10}$
แล้วด้านประชิดมุมจะต้อง = 1

วาดรูปเพื่อประมาณค่า $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$

1. ลาก AB = 3
2. ลาก AC = 1 และ AC ⊥ AB
3. ลาก BC และวัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 18 °



เพราะฉะนั้น $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = 18°$

จากโจทย์ $\tan(A+2B) = \tan(\arctan\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})$

$= \tan(8° + 2(18°))$

$= \tan(44°)$

$\sim \tan(45°) \quad = 1$

สรุปเลือกตัวเลือก 2 ดีกว่า

วิธีจริง $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$$\cos B = \sqrt{1-\sin^2 A} = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{1}{3}$$

$$\tan 2B = \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2}$$

$$= \frac{(\frac{2}{3})}{1-\frac{1}{9}} \qquad = \frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{8}{9})} \qquad = \frac{3}{4}$$

$$\tan(A+2B) = \frac{\tan A + \tan 2B}{1-\tan A \tan 2B}$$

$$= \frac{(\frac{1}{7})+(\frac{3}{4})}{1-(\frac{1}{7})(\frac{3}{4})} \qquad = \frac{4+21}{28-3} \qquad = 1$$

ตัวอย่าง 2.7 คณิตศาสตร์ กข. 2536

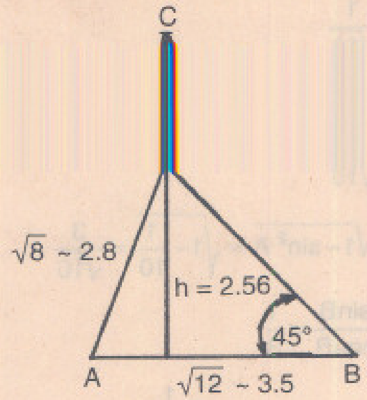
กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว $\sqrt{12}$ หน่วย ด้าน AC ยาว $\sqrt{8}$ หน่วย มุม B = 45°

พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$
2. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$
3. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$
4. $\sqrt{3}+1$

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์แล้วใช้การประมาณค่า ช่วยตัดตัวเลือกได้



โดยการประมาณค่า $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2(1.73) \cong 3.5$

และ $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2(1.414) \cong 2.8$

1. ลาก AB ยาว $\sqrt{12}$ ~ 3.5
2. ลากเส้นตรง BD ทำมุม 45° ที่จุด B
3. การวงเวียนรัศมี $\sqrt{8}$ ~ 2.8 ตัด BD ที่ C

จะได้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่ต้องการ

4. วัดส่วนสูงได้ h = 2.6

ดังนั้นพื้นที่ Δ ABC $= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{12} \cdot (2.6) \quad = \frac{1}{2}(3.5)(2.6) = 4.6$

เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = 2(1.7)(1.7-1) = 2.38$
2. $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) = (1.7)(1.7+1) = 4.59$
3. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) = (1.7)(1.7-1) = 1.19$
4. $\sqrt{3}+1 = 2.7$

เมื่อเราต้องตัดสินใจตัดตัวเลือก เราควรตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ วิธีจริงหาได้ดังนี้

จากโจทย์ $c = \sqrt{12}$ $\quad b = \sqrt{8}$ $\quad \hat{B} = 45°$

จาก $\dfrac{\sin\hat{C}}{c} = \dfrac{\sin\hat{B}}{b}$

$$\sin\hat{C} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\hat{C} = 60^\circ$$

เพราะฉะนั้น $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 75^\circ$

$$\sin\hat{A} = \sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$$

$$= \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม $ABC = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{12}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

ตัวอย่าง 2.8 คณิตศาสตร์ กข. 2533

กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 36 = 0$ และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x - 2y - 5 = 0$ ถ้าให้ θ เป็นมุมแหลมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง L_1 กับ L_2 แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\cos\theta = \dfrac{11}{5\sqrt{5}}$
2. $\cos\theta = \dfrac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{17}}$
3. $\cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$
4. $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$

ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $4x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 36 = 0$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 2(y^2 + 4y + 4) = -36 + 36 + 8$$

$$4(x-3)^2 + 2(y+2)^2 = 8$$

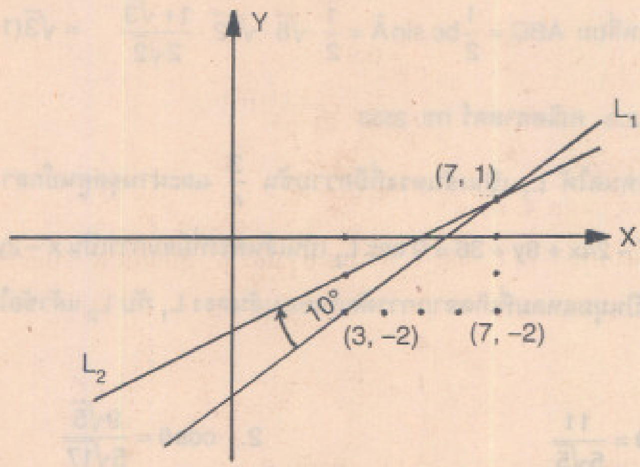
$$\frac{(x+3)^2}{2} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

จุดศูนย์กลางของวงรีคือ (3, −2)

การเขียนเส้นตรง L_1

1. เขียนจุด (3, −2)
2. เลื่อนจาก (3, −2) มาทาง (7, −2)   เลื่อนจาก (7, −2) ขึ้นบนไปที่ (7, 1)
3. ลากเส้นผ่านจุด (3, −2) และ (7, 1)

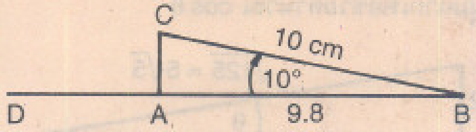
จะได้ L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (3, −2) และมีความชัน $\frac{3}{4}$ ลากเส้น L_2



วัดมุมแหลมระหว่าง L_1 และ L_2 ได้ 10°   เพราะฉะนั้น $\theta = 10°$

การประมาณค่า cos 10°

1. ลาก BD
2. ลาก BC, $D\hat{B}C = 10°$ และ BC = 10
3. ลาก $AC \perp BD$



วัดระยะทาง AB ได้ 9.8

เพราะฉะนั้น $\cos 10^\circ = \frac{AB}{BC} = \frac{9.8}{10} = 0.98$

ประมาณค่า cos θ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{11}{5\sqrt{5}} = \frac{11}{5(2.24)} = \frac{11}{11.2} = 0.98$

ตัวเลือก 2. $\frac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{85}} = \frac{9}{9.2} = 0.978$

ตัวเลือก 3. $\frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4}{4.12} = 0.97$

ตัวเลือก 4. $\frac{4}{5} = 0.8$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 ให้ L_1 และ L_2 ทำมุม θ_1 และ θ_2 กับแกน X ตามลำดับ

ความชัน L_1 เท่ากับ $\frac{3}{4}$ ดังนั้น $\tan\theta_1 = \frac{3}{4}$

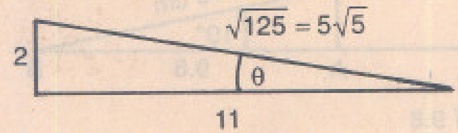
ความชัน L_2 เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น $\tan\theta_2 = \frac{1}{2}$

มุมแหลมระหว่าง L_1 กับ L_2 เท่ากับ $\theta_1 - \theta_2$

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{1 + (\frac{3}{4})(\frac{1}{2})} = \frac{2}{11}$$

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเพื่อช่วยคำนวณ $\cos\theta$



เพราะฉะนั้น $\quad \theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

แบบที่ 2 L_1 มีความชัน $= \frac{3}{4}$ เลือกเวกเตอร์ $\bar{v} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ จะได้ $\bar{v} // L_1$

ความชัน L_2 เท่ากับ $\frac{1}{2}$ เลือกเวกเตอร์ $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$ จะได้ $\bar{u} // L_2$

เพราะว่า มุมแหลมระหว่าง L_1 กับ L_2 เท่ากับ มุมแหลมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $\quad \cos\theta = \frac{\bar{u} \cdot \bar{v}}{|\bar{u}| \cdot |\bar{v}|}$

$$= \frac{(2\bar{i} + \bar{j}) \cdot (4\bar{i} + 3\bar{j})}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{11}{\sqrt{5} \cdot 5} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$$

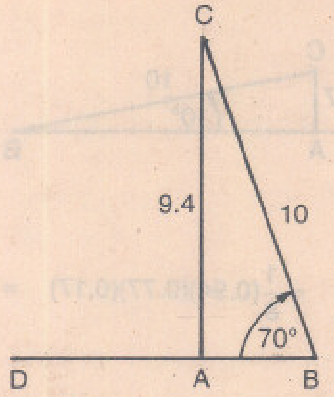
ตัวอย่าง 2.9 คณิตศาสตร์ กข. 2533

ค่าของ $\frac{1}{8}\sin 70^\circ \sin 50^\circ \sin 10^\circ$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{16}$
3. $\frac{1}{32}$
4. $\frac{1}{64}$

ตอบ 4.

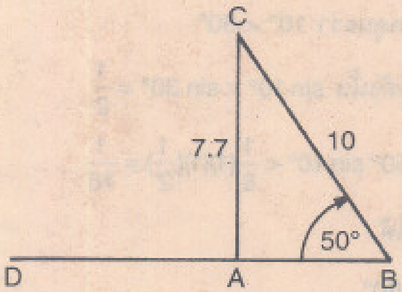
แนวคิด การประมาณค่า $\sin 70^\circ$



1. ลากเส้น BD
2. ลาก BC ยาว 10 เซนติเมตร และ $A\hat{B}C = 70°$
3. ลาก AC ตั้งฉากกับ BC
4. วัดความยาว AC ได้ 9.4

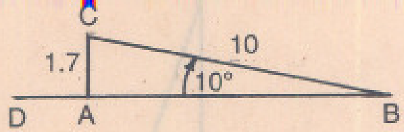
เพราะฉะนั้น $\sin 70° = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{9.4}{10} = 0.94$

การประมาณค่า sin 50°



$\sin 50° = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{7.7}{10} = 0.77$

การประมาณค่า sin 10°



$\sin 10° = \frac{AC}{BC} = 0.17$

$\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° \quad = \frac{1}{8}(0.94)(0.77)(0.17) \quad = 0.0154$

ประมาณค่าในตัวเลือก

1. $\frac{1}{8} = 0.125$
2. $\frac{1}{16} = 0.0625$
3. $\frac{1}{32} = 0.03125$
4. $\frac{1}{64} = 0.015625$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

หมายเหตุ การตัดตัวเลือก 1 ทิ้งก่อนด้วยเหตุง่ายๆ คือ

$$0 < \sin 70° < 1,\ 0 < \sin 50° < 1 \text{ และ } 0 < \sin 10° < 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° < \frac{1}{8}$ แน่นอน

การตัดตัวเลือก 2. ใช้เหตุผลว่า $10° < 30°$

และ sin เป็นฟังก์ชันเพิ่มดังนั้น $\sin 10° < \sin 30° = \frac{1}{2}$

จะได้ว่า $\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° < \frac{1}{8}(1)(1)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

แต่การใช้เหตุผล $50° < 60°$

$$\sin 50° < \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° < \frac{1}{8}(1)(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{32}$

ซึ่งเหตุผลนี้ใช้ตัดตัวเลือก 3. ไม่ได้

วิธีจริง ต้องมีการจัดรูปและใช้สูตรตรีโกณมิติดังนี้

$$2\sin 70° \sin 50° = \cos(70°-50°) - \cos(70°+50°)$$

$$= \cos 20° - \cos 120°$$

$$= \cos 20° + \frac{1}{2}$$

$$\sin 70° \sin 50° = \frac{1}{2}(\cos 20° + \frac{1}{2})$$

$$\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}(\cos 20° + \frac{1}{2})\right]\sin 10°$$

$$= \frac{1}{16}\cos 20° \sin 10° + \frac{1}{32}\sin 10°$$

$$= \frac{1}{32}(2\cos 20° \sin 10°) + \frac{1}{32}\sin 10°$$

$$= \frac{1}{32}(\sin(20°+10°) - \sin(20°-10°)) + \frac{1}{32}\sin 10°$$

$$= \frac{1}{32}\sin 30° - \frac{1}{32}\sin 10° + \frac{1}{32}\sin 10° \quad = \frac{1}{32}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{64}$$

2.3 การประมาณค่า log n

โจทย์ข้อสอบ ENTRANCE และข้อสอบแข่งขันระดับ ม.ปลาย มีหลายข้อที่สามารถนำค่าประมาณของ log 2, log 3,...... ช่วยในการตัดตัวเลือกได้ ดังนั้นนักเรียนควรจะจำค่าประมาณาของ log 1 ถึง log 10 ให้ได้ ซึ่งเทคนิคในการจำค่าของ log มีดังนี้

1. ตัวที่จำค่าได้ง่ายที่สุดคือ log 1 = 0 และ log 10 = 1
2. การจำค่าของ log 2. ≅ 0.30103

ข้อสังเกต ให้นึกถึงรูปหน้าของคน

3 0 1 0 ε

หู ตา จมูก ตา หู

3. ค่าของ log 4 และ log 8

$\log 4 \cong \log 2^2 = 2 \log 2 = 2(0.30103) = 0.60206$

$\log 8 \cong \log 2^3 = 3 \log 2 = 3(0.30103) = 0.90309$

4. การประมาณค่า log 5

เพราะว่า $\log 5 \cong \log(\frac{10}{2})$

$= \log 10 - \log 2 \quad = 1 - 0.30103 \quad = 0.69897$

n	log n
1	0
2	0.30103
3	–
4	0.60206
5	0.69897
6	–
7	–
8	0.90309
9	–
10	1

5. การประมาณตัวต่อไปขอแนะนำให้ประมาณค่า log 9 โดย

$$\log 9 \cong \frac{\log 10 + \log 8}{2}$$

$$= \frac{1 + 0.90309}{2}$$

$$= 0.951545$$

6. log 3 เราจะประมาณค่าโดย

$$\log 3 = \log \sqrt{9}$$

$$= \log 9^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log 9$$

$$= \frac{0.951545}{2}$$

$$= 0.4757725$$

หมายเหตุ ค่าจริง log 3 = 0.477121255

ถ้าเราประมาณด้วย $\log 3 = \frac{\log 2 + \log 4}{2}$

$$= \frac{\log 8}{2}$$

$$= 0.451545$$

ดังนั้นเราประมาณ log 3 ด้วย $\log \sqrt{9} = 0.4757725$ ดีกว่า

7. การประมาณค่า log 6

$$\log 6 \cong \log (2 \cdot 3)$$

$$= \log 2 + \log 3$$

$$= 0.30103 + 0.4757725$$

$$= 0.7768025$$

8. ตัวสุดท้ายที่เราจะประมาณค่า คือ log 7

$$\log 7 = \log(\frac{6+8}{2})$$
$$\cong \frac{\log 6 + \log 8}{2}$$
$$= \frac{0.7768025 + 0.90309}{2}$$
$$= 0.8399625$$

ค่าประมาณของ log n เปรียบเทียบกับค่าจริง

n	ค่าจริง log n	ค่าประมาณ log n	ค่าที่ควรจำ 2 ตำแหน่ง
1	0	0	0
2	0.301029996	0.30103	0.3
3	0.477121255	0.4757725	0.48
4	0.602059991	0.60206	0.6
5	0.698970004	0.69897	0.7
6	0.77815125	0.7768025	0.78
7	0.84509804	0.83994625	0.84
8	0.903089987	0.90309	0.9
9	0.954242509	0.951545	0.95
10	1	1	1

ตัวอย่าง 2.10 จำนวนในตัวเลือกใดมีค่ามากที่สุด

1. 3.2^4
2. $4^{3.2}$
3. 1.6^8
4. 2.5^6

ตอบ 4.

แนวคิด $\log 3.2^4 = 4\log 3.2 = 4\log\frac{32}{10}$

$= 4(\log 32 - \log 10)$

$= 4\log 2^5 - 4(1)$

$= 20\log 2 - 4$

$= 20(0.3) - 4$

$= 2$

หมายเหตุ การประมาณค่าเพื่อจำแนกตัวเลือกคิดทศนิยม 1 ตำแหน่งพอ

$$\begin{aligned}
\log 4^{3.2} &= \log(2)^{2(3.2)} \\
&= (6.4)\log 2 \\
&= (6.4)(0.3) \\
&= 1.92
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 1.6^8 &= 8\log 1.6 = 8\log\left(\frac{16}{10}\right) \\
&= 8(\log 16 - \log 10) \\
&= 8(\log 2^4 - 1) \\
&= 32\log 2 - 8 \\
&= 32(0.3) - 8 \\
&= 1.6
\end{aligned}$$

$$\log 2.5^6 = 6\log 2.5 = 6\log\frac{25}{10}$$

$$= 6(\log 25 - \log 10)$$

$$= 6(\log 5^2 - 1)$$

$$= 12\log 5 - 6$$

$$= 12(1 - \log 2) - 6$$

$$= 12(1 - 0.3) - 6 \qquad = 2.4$$

สรุป $1.6 < 1.92 < 2 < 2.4$

$$\log 1.6^8 < \log 4^{3.2} < \log 3.2^4 < \log 2.5^6$$

เพราะว่า log ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $1.6^8 < 4^{3.2} < 3.2^4 < 2.5^6$

สรุป 2.5^6 เป็นค่ามากที่สุด

ตัวอย่าง 2.11 จำนวนในตัวเลือกใดมีค่าน้อยที่สุด

1. $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$
2. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$
3. $(\sqrt{2})(\sqrt{3})$
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

ตอบ 4.

แนวคิด $\log(\sqrt{3})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\log\sqrt{3}$

$$= \sqrt{2}\log 3^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\log 3$$

$$= \frac{(1.414)}{2}(0.48)$$

$$= (1.414)(0.24) \qquad = 0.3394$$

$$\log(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\log\sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\log 2$$

$$= \frac{(1.732)(0.3)}{2}$$

$$= (1.732)\ (0.15)$$

$$= 0.2598$$

$$\log(\sqrt{2}\sqrt{3}) = \log\sqrt{2} + \log\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{1}{2}\log 3$$

$$= \frac{1}{2}(0.3 + 0.48)$$

$$= 0.39$$

$$\log(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) = \log\sqrt{3} - \log\sqrt{2}$$

$$= \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{1}{2}(0.48 - 0.3)$$

$$= 0.09$$

เพราะว่า $0.09 < 0.2598 < 0.3394 < 0.39$

$$\log\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \log\sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \log\sqrt{3}^{\sqrt{2}} < (\sqrt{2})(\sqrt{3})$$

และ log ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^{\sqrt{3}} < \sqrt{3}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}\sqrt{3}$

ตัวอย่าง 2.12 คณิตศาสตร์ กข. 2537

ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ

$$2 \log_3 0.5 \ \log_{0.5} x = \log_3 4$$

และ $3^{y-1} = 2^{2y-3}$

แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < y < x$
2. $0 < x < y$
3. $y < 0 < x$
4. $0 < x = y$

ตอบ 2.

แนวคิด $2 \log_3 0.5 \ \log_{0.5} x = \log_3 4$

$$2 \frac{\log 0.5}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 0.5} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

$$2 \log x = \log 4 = \log 2^2$$

$$2 \log x = 2 \log 2$$

$$\log x = \log 2$$

$$x = 2$$

คำแนะนำ เมื่อนักเรียนได้ค่าบางค่ามาแล้วต้องสังเกตตัวเลือกด้วยว่า จะตัดตัวเลือกได้หรือยัง เช่น ตัวเลือก 4. $0 < x = y$

ถ้า $y = 2$ จะได้ว่า $3^{2-1} = 3 \neq 2^{2(2)-3}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การหาค่า y $3^{y-1} = 2^{2y-3}$

$$\log 3^{y-1} = \log 2^{2y-3}$$

$$(y-1) \log 3 = (2y-3) \log 2$$

$$(y-1)(0.5) = (2y-3)(0.3)$$

หมายเหตุ ถ้า log 3 ~ 0.5 จำแนกตัวเลือกไม่ได้

แล้วจึงประมาณด้วย log 3 = 0.48 หรือ 0.477 ต่อไป

$0.5y - 0.5 = 0.6y - 0.9$

$0.1y = 0.4$

$y = 4$

สรุป $0 < x < y$

วิธีจริง $3^{y-1} = 2^{2y-3}$

$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$

$$\frac{2y-3}{y-1} = \frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\frac{2y-3}{y-1} - 2 = \frac{\log 3}{\log 2} - 2$$

$$\frac{2y-3-2y+2}{y-1} = \frac{\log 3 - 2\log 2}{\log 2}$$

$$\frac{-1}{y-1} = \frac{\log 3 - \log 4}{\log 2}$$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{\log 4 - \log 3}{\log 2}$$

$$y-1 = \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3}$$

$$y = \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3} + 1$$

$$y = \frac{\log 2 + \log 4 - \log 3}{\log 4 - \log 3}$$

$$= \frac{3\log 2 - \log 3}{2\log 2 - \log 3}$$

$$= \frac{3(0.301) - 0.477}{2(0.301) - 0.477}$$

$$= \frac{0.903 - 0.477}{0.602 - 0.477}$$

$$= \frac{0.426}{0.125}$$

$$= 3.408$$

หมายเหตุ การแสดงว่า $y > 2$ อาจทำโดยใช้เหตุผลดังนี้

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$\frac{3^y}{3} = \frac{2^{2y}}{2^3} \quad = \frac{4^y}{2^3}$$

$$\frac{3^y}{4^y} = \frac{3}{8}$$

$$(\frac{3}{4})^y = (\frac{3}{4})(\frac{1}{2}) < (\frac{3}{4})(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^2$$

เพราะว่า $f(t) = (\frac{3}{4})^t$ เป็นฟังก์ชันลด   เพราะฉะนั้น $y > 2$

3. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ข้อสอบชนิดที่โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรเป็นข้อสอบที่นักเรียนต้องจำแนกให้ดีว่าข้อสอบนั้นเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปรอะไร เช่น

1. ตัวแปรเป็นมุม θ
2. ตัวแปรเป็นตัวเลข x
3. ตัวแปรเป็นอัตราส่วน r
4. ตัวแปรเป็นพจน์ที่ n
5. ตัวแปรเป็นพิกัดของจุด
6. ตัวแปรเป็นรูปทรงเรขาคณิต
7. ตัวแปรเป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่รวบรวมมาให้นี้จะทำให้นักเรียนเข้าใจความหมายของข้อสอบชนิดโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรได้มากขึ้น

ตัวอย่าง 3.1 คณิตศาสตร์ กข. 2538

ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิตโดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\dots\dots\dots+\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}}=2n$$

แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$
3. -2 4. 2

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น $a_2 = ra_1, a_3 = ra_2, a_4 = ra_3, \ldots$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2n$$

$$\frac{a_1}{a_1 + ra_1} + \frac{a_2}{a_2 + ra_2} + \ldots + \frac{a_n}{a_n + ra_n} = 2n$$

$$\frac{1}{1 + r} + \frac{1}{1 + r} + \ldots + \frac{1}{1 + r} = 2n$$

$$\frac{n}{1 + r} = 2n$$

$$1 + r = \frac{1}{2}$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n ดังนั้นแทนค่า n = 1 จะได้

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = 2(1)$$

$$\frac{a_1}{a_1 + ra_1} = 2$$

$$\frac{1}{1 + r} = 2$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.2 กำหนด $a(x) = x + 1$

$b(x) = x - 1$

$c(x) = x^2+1$

$d(x) = x^2-1$

และกำหนดความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการ

$(a \circ f)(x) + (b \circ g)(x) = 2$

$(c \circ f)(x) - (d \circ g)(x) = 4x$

แล้ว $f(x)$ และ $g(x)$ ตรงกับตัวเลือกใด

1. $f(x) = x + \frac{1}{2}$ และ $g(x) = \frac{3}{2} - x$
2. $f(x) = x - \frac{1}{2}$ และ $g(x) = \frac{3}{2} + x$
3. $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ และ $g(x) = 1 - \frac{3x}{2}$
4. $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ และ $g(x) = 1 + \frac{3x}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด $(a \circ f)(x) + (b \circ g)(x) = 2$

$a(f(x)) + b(g(x)) = 2$

$(f(x) + 1) + (g(x) - 1) = 2$

$f(x) + g(x) = 2$ ———— (1)

$(c \circ f)(x) - (d \circ g)(x) = 4x$

$c(f(x)) - d(g(x)) = 4x$

$((f(x))^2 + 1) - ((g(x))^2 - 1) = 4x$

$$(f(x))^2 - (g(x))^2 = 4x - 2$$

$$(f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) = 4x - 2$$

จาก (1);

$$(f(x) - g(x))(2) = 4x - 2$$

$$f(x) - g(x) = 2x - 1 \quad \text{———} (2)$$

(1) + (2); $2f(x) = 2x + 1$

$$f(x) = x + \frac{1}{2} \quad \text{———} (3)$$

จาก (1); $g(x) = 2 - f(x) = 2 - x - \frac{1}{2}$

$$= \frac{3}{2} - x$$

ข้อสังเกต ในการสอบจริงนักเรียนไม่จำเป็นต้องหา g(x) ก็ได้ ได้เพราะว่าจากสมการ (3) เมื่อเราดูจากตัวเลือกจะเห็นได้ว่าเราเลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 1. ได้แล้ว

การตัดตัวเลือก

ในโจทย์ข้อนี้สังเกตให้ดีจะเห็นว่า $x = 0$ จะสามารถจำแนกตัวเลือกคือ

1. $f(0) = \frac{1}{2}$, $g(0) = \frac{3}{2}$
2. $f(0) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = \frac{3}{2}$
3. $f(0) = 1$, $g(0) = 1$
4. $f(0) = -1$, $g(0) = 1$

ต่อไปลองดูจากสมการของโจทย์

$(a \circ f)(0) + (b \circ g)(0) = 2$

$a(f(0)) + b(g(0)) = 2$

$(f(0) + 1) + (g(0) - 1) = 2$

$f(0) + g(0) = 2$

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไป $(c \circ f)(0) - (d \circ g)(0) = 4(0)$

$c(f(0)) - d(g(0)) = 0$

$((f(0))^2 + 1) - ((g(0))^2 - 1) = 0$

ลองแทนค่า f(0) และ g(0) จากตัวเลือก 3. จะเห็นว่า

$((1)^2 + 1) - ((1)^2 - 1) \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.3 ค่าของ $\log_9 a + \log_{27} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} + \frac{1}{\log_a 27}$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{5}{9}\log_3 a$
2. $-\frac{1}{8}\log_3 a$
3. $-\frac{13}{9}\log_3 a$
4. $-\frac{4}{9}\log_3 a$

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัว a

ดังนั้นเราเลือกค่า a ที่คิดเลขได้ง่ายกับทุกพจน์ในข้อสอบเช่น

เลือก a = 27 จะได้

$\log_9 a = \log_9 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{3}{2}$

$\log_{27} \sqrt[3]{a} = \log_{27} \sqrt[3]{27} = \frac{1}{3}$

$\log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} = \log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt{27} = \frac{\log_3 27\sqrt{27}}{\log_3(\frac{1}{3})}$

$$= \frac{\log_3 3^3 . 3^{\frac{3}{2}}}{(-1)} = -\log_3 3^{\frac{9}{2}}$$

$$= -\frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{\log_{27}27} = \frac{1}{1} = 1$$

ดังนั้น $\log_9 27 + \log_{27} \sqrt[3]{27} + \log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt{27} + \frac{1}{\log_{27}27}$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{3} - \frac{9}{2} + 1$$

$$= \frac{9 + 2 - 27 + 6}{6}$$

$$= \frac{-10}{6} = \frac{-5}{3}$$

แทนค่า a = 27 ในตัวเลือก

1. $\frac{-5}{9}\log_3 27 = \frac{-5}{9}(3) = \frac{-5}{3}$
2. $\frac{-1}{18}\log_3 27 = \frac{-3}{18} = \frac{-1}{6}$
3. $\frac{13}{9}\log_3 27 = \frac{13}{9}(3) = \frac{13}{3}$
4. $\frac{4}{9}\log_3 27 = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

คำแนะนำเพิ่มเติม เพราะว่า $\log_3 a = \log_3 27 > 0$

ดังนั้นตัวเลือก 3. $\frac{13}{9}\log_3 9 > 0$

4. $\frac{4}{9}\log_3 a > 0$

ซึ่งเราสามารถตัดตัวเลือก 3. , 4. ทิ้งได้โดยไม่ต้องคำนวณค่าออกมาจริงๆ ก็ได้

วิธีจริง $\log_9 a + \log_{27} \sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} + \frac{1}{\log_a 27}$

$$= \frac{\log_3 a}{\log_a 9} + \frac{\log_3 \sqrt[3]{a}}{\log_3 27} + \frac{\log_3 \sqrt[a]{a}}{\log_3 (\frac{1}{3})} + \frac{1}{\left(\frac{\log_3 27}{\log_3 a}\right)}$$

$$= \frac{\log_3 a}{2} + \frac{\frac{1}{3}\log_3 a}{3} + \frac{\frac{3}{2}\log_3 a}{(-1)} + \frac{\log_3 a}{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot \log_3 a$$

$$= \left(\frac{9+2-27+6}{18}\right) \log_3 a$$

$$= -\frac{5}{9} \log_3 a$$

ตัวอย่าง 3.4 ค่าของ

$$9\left(\frac{1}{1^2-2^2} + \frac{1}{2^2-4^2} + \frac{1}{4^2-8^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}\right)$$ เท่ากับเท่าใด

1. $4 - 2^{2-2n}$
2. $2^{2-2n} - 4$
3. $4 - 2^{-2n}$
4. $2^{-2n} - 4$

ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

ลองแทนค่า n = 1 ในโจทย์จะได้

$$9\left(\frac{1}{1^2-2^2}\right) = 9\left(\frac{1}{1-4}\right) = -3$$

แทนค่า n = 1 ในตัวเลือก

1. $4 - 2^{2-2(1)} = 4 - 2^0 = 4 - 1 = 3 \neq -3$
2. $2^{2-2(1)} - 4 = 2^0 - 4 = 1 - 4 = -3$
3. $4 - 2^{-2(1)} = 4 - 2^{-2} \neq -3$
4. $2^{-2(1)} - 4 = 2^{-2} - 4 \neq -3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.ทิ้งได้

วิธีจริง

$$9\left(\frac{1}{1^2-2^2}+\frac{1}{2^2-4^2}+\frac{1}{4^2-8^2}+\dots\dots+\frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}\right)$$

$$=9\left(\frac{1}{1^2-2^2}+\frac{1}{2^2-2^4}+\frac{1}{2^4-2^6}+\dots\dots+\frac{1}{2^{2n-2}-2^{2n}}\right)$$

$$=9\left(\frac{1}{1^2-2^2}+\frac{1}{(1^2-2^2)2^2}+\frac{1}{(1^2-2^2)2^4}+\dots\dots+\frac{1}{(1^2-2^2)2^{2n-2}}\right)$$

$$=\frac{9}{1^2-2^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\dots\dots+\frac{1}{2^{2n-2}}\right)$$

$$=(-3)\left(\frac{(1)\left(1-\left(\frac{1}{2^2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2^2}}\right)$$

$$=(-3)\ \frac{\left(1-\frac{1}{2^{2n}}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$=-4\,(1-2^{-2n})$$

$$=4\cdot 2^{-2n}-4 \qquad =2^{2-2n}-4$$

ตัวอย่าง 3.5 ถ้า $w=\dfrac{1+z}{i\,(1-z)}$ แล้ว z มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{w^2+2iw-1}{w^2+1}$ 2. $\dfrac{w^2+2iw+1}{w^2+1}$

3. $\dfrac{w^2+2iw-1}{w^2-1}$ 4. $\dfrac{w^2+2iw+1}{w^2-1}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร z และ w

แทนค่า w = 0 ในโจทย์จะได้ $0 = \frac{1+z}{i(1-z)}$

$$1 + z = 0$$

$$z = -1$$

แทนค่า w = 0 ในทุกตัวเลือกจะได้ค่า z ดังนี้

1. $z = -1$
2. $z = 1$
3. $z = 1$
4. $z = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3 ทิ้งได้

ลองแทนค่า w = 1 ในโจทย์จะได้ $1 = \frac{1+z}{i(1-z)}$

$$i(1-z) = 1 + z$$

$$-iz - z = 1 - i$$

$$z = \frac{1-i}{-1-i}$$

เมื่อแทนค่า w = 1 ในตัวเลือก 4. จะทำให้ $\frac{w^2 + 2iw + 1}{w^2 - 1}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $w = \frac{1+z}{i(1-z)}$

$$wi = \frac{1+z}{1-z}$$

$$wi + 1 \quad \frac{1+z}{1-z} + 1 = \frac{1+z+1-z}{1-z} = \frac{2}{1-z}$$

$$1 - z = \frac{2}{wi+1}$$

$$z = \frac{-2}{wi+1} + 1 \quad \text{———————} \quad (*)$$

$$= \frac{-2 + wi + 1}{wi + 1}$$

$$= \frac{wi - 1}{wi + 1}$$

$$= \frac{(wi - 1)(wi - 1)}{(wi + 1)(wi - 1)}$$

$$= \frac{(wi)^2 - 2wi + 1}{(wi)^2 - 1}$$

$$= \frac{-w^2 - 2iw + 1}{-w^2 - 1}$$

$$= \frac{w^2 + 2iw - 1}{w^2 + 1}$$

คำแนะนำ ในการหาสูตรของ z ในพจน์ของ w ขอให้นักเรียนสังเกตว่าจากสมการ (∗) เราได้สูตร z แล้วแต่ยังไม่ตรงกับตัวเลือก ซึ่งในความเป็นจริง เรายังไม่รู้ด้วยซ้ำว่าจะจัดรูปไปยังตัวเลือกใด ดังนั้นจึงขอแนะนำว่า ขณะที่ทำตามวิธีจริง เมื่อเราได้สมการ (∗) ควรจะแทนค่า w เพื่อตัดตัวเลือก เช่น แทนค่า w = 0 จะได้

$$z = \frac{-2}{0+1} + 1 = -1$$

ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3 ได้เหมือนกัน

ตัวอย่าง 3.6 ถ้า $g(x) = 3x^2$ แล้ว $\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}$ เท่ากับเท่าใด

1. $6x$ 2. $6x + h$

3. $6x + 3h$ 4. $3h^2$

ตอบ 3.

แนวคิด คำถามข้อนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร x, h

แทนค่า $x = 1, h = 1$ ในโจทย์จะได้

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{g(1+1)-g(1)}{1}\\ &= g(2)-g(1)\\ &= 3(2^2)-3(1^2)\\ &= 12-3\\ &= 9\end{aligned}$$

ตัวเลือก 1. $6x = 6(1) = 6 \neq 9$

ตัวเลือก 2. $6x + h = 6(1) + 1 = 7 \neq 9$

ตัวเลือก 3. $6x + 3h = 6(1) + 3(1) = 9$

ตัวเลือก 4. $3h^2 = 3(1^2) = 3 \neq 9$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกอย่างรวดเร็วก็คือ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ต้องมีทั้งตัวแปร x และ h เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้เร็วที่สุด

วิธีจริง ใช้การจัดรูปทางพีชคณิตดังนี้

$$\begin{aligned}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}\\ &= \frac{3}{h}((x+h)^2-x^2)\\ &= \frac{3}{h}(x+h-x)(x+h+x)\end{aligned}$$

$$= \frac{3h\,(h + 2x)}{h}$$

$$= 6x + 3h$$

ตัวอย่าง 3.7 ข้อมูล n ตัวประกอบด้วย

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{1}{n2^n}$
2. $\dfrac{2^n + 1}{n}$
3. $\dfrac{2^n - 1}{n}$
4. $\dfrac{2^n - 1}{n2^n}$

ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตรผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต

$$a + ar + ar^2 + \cdots\cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\cdots + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2^n}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}$ เท่ากับ

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2^n}}{n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{n}$$

$$= \frac{2^n - 1}{n2^n}$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก

โดยการแทนค่า n = 2 จะได้ว่ามีข้อมูล 2 ตัวเท่านั้นคือ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$

ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{2}$

แทนค่า n = 2 ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{1}{n2^n} = \dfrac{1}{(2)(4)} = \dfrac{1}{8} \neq \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{2^n+1}{n} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2} \neq \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{2^n-1}{n} = \dfrac{2^2-1}{2} = \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{2^n-1}{n2^n} = \dfrac{4-1}{(2)(2)} = \dfrac{3}{8}$

สรุปตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.8 ข้อมูล n ตัวประกอบด้วย

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots, \frac{1}{2^n}$$

ค่ากึ่งกลางพิสัยมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{2^n+1}{2}$
2. $\dfrac{2^n+1}{2n}$
3. $\dfrac{2^n+2}{2^{n+2}}$
4. $\dfrac{2^n-2}{2^{n+2}}$

ตอบ 3.

แนวคิด ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \dfrac{\text{ค่าต่ำสุด} + \text{ค่าสูงสุด}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}{2}$

$$= \frac{2^n+2}{2(2\cdot 2^n)}$$

$$= \frac{2^n+2}{2^{n+2}}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $n = 2$ เพื่อจะได้ข้อมูล 2 ตัวเพื่อสะดวกในการหาค่ากึ่งกลางพิสัย

ข้อมูลเมื่อ $n = 2$ คือ $\frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{4}$

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \dfrac{3}{8}$

แทนค่า $n = 2$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{2^n+1}{2} = \dfrac{4+1}{2} = \dfrac{5}{2} \neq \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{2^n+1}{2n} = \dfrac{4+1}{4} = \dfrac{5}{4} \neq \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{2^n+2}{2^{n+2}} = \dfrac{4+2}{2^4} = \dfrac{6}{16} = \dfrac{3}{8}$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{2^n-2}{2^{n+2}} = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} \neq \dfrac{3}{8}$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.9 การทดลองโยนลูกเต๋า n ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง

ให้ X_1 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 1

X_2 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 2

X_3 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 3

X_4 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 4

X_5 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 5

X_6 = จำนวนลูกเต๋าที่ขึ้นแต้ม 6

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = n$

ความน่าจะเป็นที่ $X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots\ldots, X_6 = n_6$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

2. $\dfrac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!}$

3. $\dfrac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!}$

4. $\dfrac{n!}{6^n 6!n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

ตอบ 1.

แนวคิด

S = แซมเปิลสเปซของการโยนลูกเต๋า n ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง

= $\{(A_1, A_2, \ldots, A_n) \mid A_i$ เป็นแต้มลูกเต๋าลูกที่ $i = 1,2,3,\ldots\ldots,n\}$

จำนวนสมาชิกของ $S = \underbrace{(6)(6)(6)\ldots\ldots(6)}_{n \text{ ครั้ง}} = 6^n$

E = เหตุการณ์ที่ได้แต้มหนึ่ง n_1 ลูก, แต้มสอง n_2 ลูก,........, แต้มหก n_6 ลูก

จำนวนสมาชิกของ E = จำนวนวิธีจัดลำดับของ n สิ่งที่มีการซ้ำหนึ่ง n_1 ครั้ง ซ้ำสอง n_2 ครั้ง,.........., ซ้ำแต้มหก n_6 ครั้ง

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง n_1 ลูก, แต้มสอง n_2 ลูก,........, แต้มหก n_6 ลูก มีค่าเท่ากับ

$$= \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $n = 1$

$$n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง 1 ลูกในการโยนลูกเต๋าหนึ่งลูกเท่ากับ $\frac{1}{6}$

ตัวเลือก 1. $\frac{1!}{6^1\ 1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!} = \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!}{6^1\ 1!} = \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 3. $\frac{1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!}{6^1\ 6!\ 1!} = \frac{1}{6(6!)} \neq \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 4. $\frac{1!}{6^1\ 6!\ 1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!} = \frac{1}{6(6!)} \neq \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า n = 2

$n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

ในการโยนลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มหนึ่ง 1 ลูก และแต้มสอง 1 ลูกเท่ากับ $\frac{2}{36}$ (เหตุการณ์ (1,2), (2,1))

ตัวเลือก 1. $\dfrac{2!}{6^2\ 1!\ 1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!} = \dfrac{2}{36}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{1!\ 1!\ 0!\ 0!\ 0!\ 0!}{6^2\ 2!} = \dfrac{1}{72} \neq \dfrac{2}{36}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.10

กำหนดให้ $|x| \geq 1$

arcsin (cos(arcsin $\frac{1}{x}$)) + arccos (sin(arccos $\frac{1}{x}$)) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. $\frac{¶}{3}$
3. $\frac{¶}{2}$
4. ¶

ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์เป็นสูตร, ตัวเลือกเป็นค่าคงตัว

ใช้การแทนค่า x บางค่าที่เหมาะสมดีกว่า เลือก x = 1

จะได้ arcsin (cos(arcsin 1)) = arcsin (cos $\frac{¶}{2}$)

= arcsin (0)

= 0

และ arccos (sin(arccos 1)) = arccos(sin(0))

$= \arccos 0 \quad = \frac{\P}{2}$

สรุป arcsin (cos(arcsin 1)) + arccos(sin(arccos 1)) = $\frac{\P}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\arcsin(\cos(\arcsin\frac{1}{x})) + \arccos(\sin(\arccos\frac{1}{x}))$

$= \arcsin(\sin(\frac{\P}{2} - \arcsin\frac{1}{x})) + \arccos(\cos(\frac{\P}{2} - \arccos\frac{1}{x}))$

$= \frac{\P}{2} - \arcsin\frac{1}{x} + \frac{\P}{2} - \arccos\frac{1}{x} = \P - (\arcsin\frac{1}{x} + \arccos\frac{1}{x})$

$= \P - \frac{\P}{2} = \frac{\P}{2}$

ตัวอย่าง 3.11 ถ้า $y = 5^{\ln(x+5)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}$
2. $\frac{(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}}{5}$
3. $(x+5)\ln 5\,(x+5)^{\ln 5}$
4. $\frac{(\ln 5)\,5^{\ln(x+5)}}{x+5}$

ตอบ 4.

แนวคิด $y = 5^{\ln(x+5)}$

$\ln y = \ln 5^{\ln(x+5)} \quad = \ln(x+5)\ln 5 \quad = \ln 5 \ln(x+5)$

$= \ln(x+5)^{\ln 5}$

$y = (x+5)^{\ln 5}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+5)^{\ln 5} \qquad = \ln 5\,(x+5)^{\ln 5 - 1}\,\frac{d}{dx}(x+5)$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln 5)(x+5)^{\ln 5}}{x+5}$ __________ (*)

เพราะว่า $(x+5)^{\ln 5} = y = 5^{\ln(x+5)}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(\ln 5)\,(5^{\ln(x+5)})}{x+5}$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก

จากสมการ (✱) แทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า x = 0 ในสมการ (✱)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln 5)\,(5^{\ln 5})}{5}$$

ตัวเลือก 1. $(\ln 5)(5^{\ln 5}) \neq \dfrac{dy}{dx}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{(\ln 5)\,(5^{\ln 5})}{5}$

ตัวเลือก 3. $(5\ln 5)(5^{\ln 5}) \neq \dfrac{dy}{dx}$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{(\ln 5)\,(5^{\ln 5})}{5}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เลือก x ที่ทำให้ x + 5 = e จะทำให้คิดเลขง่าย

แทนค่า x = e - 5 ในสมการ (✱)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\ln 5)\,(e^{\ln 5})}{e} = \frac{(\ln 5)5}{e}$$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{(\ln 5)\,(e^{\ln 5})}{5} \neq \dfrac{5\ln 5}{e}$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{(\ln 5)\,(e^{\ln 5})}{e} \neq \dfrac{5\ln 5}{e}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.12 ถ้า $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = \frac{6}{x}$ แล้ว

$(f \circ g)^{-1}(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{12}{x} - 1$ 2. $\frac{12}{x+1}$

3. $12 - \frac{1}{x}$ 4. $\frac{12}{x-1}$

ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

ดังนั้นพิจารณาการส่งค่าของฟังก์ชันบางตัวก็จะตัดตัวเลือกได้ เช่น

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= f(g(2)) \\ &= f(\tfrac{6}{2}) \\ &= f(3) \\ &= 2(3) - 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(5) = 2$

ต่อไปให้แทนค่า $x = 5$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{12}{x} - 1 = \frac{12}{5} - 1 \neq 2$

ตัวเลือก 2. $\frac{12}{x+1} = \frac{12}{5+1} = 2$

ตัวเลือก 3. $12 - \frac{1}{x} = 12 - \frac{1}{5} \neq 2$

ตัวเลือก 4. $\frac{12}{x-1} = \frac{12}{5-1} = 3 \neq 2$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$$= f(\frac{6}{x})$$

$$= 2(\frac{6}{x}) - 1$$

$$= \frac{12}{x} - 1$$

การหา $(f \circ g)^{-1}(x)$

ให้ $y = \frac{12}{x} - 1$

$$\frac{12}{x} = y + 1$$

$$x = \frac{12}{y+1}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{12}{x+1}$

ตัวอย่าง 3.13 คณิตศาสตร์ กข. 2536

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

$f = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + 2y = 5\}$

$g = \{(x,y) \in R \times R \mid 2x - y = 3\}$

แล้ว $g \circ f$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + y = 2\}$
2. $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + 4y = 11\}$
3. $\{(x,y) \in R \times R \mid x^2 + 4x - 2y = 5\}$
4. $\{(x,y) \in R \times R \mid 4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0\}$

ตอบ 1.

แนวคิด คำถามข้อนี้พยายามถามของที่ง่ายด้วยคำถามที่ยากๆ เพราะว่าคำถามนี้ก็เหมือนกันกับปัญหา

ถ้า $f(x) = \frac{1}{2}(5 - x^2)$ และ $g(x) = 2x - 3$

แล้ว $g \circ f$ ตรงกับตัวเลือกใด

1. $2 - x^2$
2. $\frac{1}{4}(11 - x^2)$
3. $-\frac{1}{2}(5 - 4x - x^2)$
4. $\frac{1}{2}(-4 + 12x - 4x^2)$

วิธีจริง $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= g(\tfrac{1}{2}(5 - x^2))$$

$$= 2(\tfrac{1}{2}(5 - x^2)) - 3$$

$$= 5 - x^2 - 3$$

$$= 2 - x^2$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$ ใน $(g \circ f)(x)$ และตัวเลือก

$$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(\tfrac{5}{2}) = 2(\tfrac{5}{2}) - 3 = 5 - 3 = 2$$

ตัวเลือก 1. $2 - x^2 = 2$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{4}(11 - x^2) = \frac{11}{4} \neq 2$

ตัวเลือก 3. $-\frac{1}{2}(5 - 4x - x^2) = -\frac{5}{2} \neq 2$

ตัวเลือก 4. $\frac{1}{2}(-4 + 12x - 4x^2) = -2 \neq 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกที่เร็วที่สุดคือการใช้ประโยชน์จาก $(g \circ f)(0) = 2$

เพราะฉะนั้น $(0, 2) \in g \circ f$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = 2$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $x^2 + y = 0^2 + 2 = 2$

ตัวเลือก 2. $x^2 + 4y = 0^2 + 4(2) = 8 \neq 11$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ไม่ใช่ $g \circ f$

ตัวเลือก 3. $x^2 + 4x - 2y = 0 + 0 - 2(2) = -4 \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ไม่ใช่ $g \circ f$

ตัวเลือก 4. $4x^2 - 12x + 2y + 4 = 0 - 0 + 2(2) + 4 = 8 \neq 2$

เฉพาะฉะนั้นตัวเลือก 4. ไม่ใช่ $g \circ f$

ตัวอย่าง 3.14 คณิตศาสตร์ กข. 2535

ถ้า $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $g(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

แล้ว $f(x + y)$ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(x)g(y) + g(x)f(y)$
2. $f(x)g(x) + f(y)g(y)$
2. $g(x)f(y) - f(x)g(y)$
4. $f(y)g(y) - f(x)g(x)$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x, y, f และ g

จากสูตรของ f และ g ที่กำหนดให้ จะได้

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = 0 \text{ และ } f(1) = \frac{e - e^{-1}}{2} \neq 0 \text{ และ } \neq 1$$

$$g(0) = \frac{e^0 - e^0}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1 \text{ และ } g(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} \neq 0 \text{ และ } \neq 1$$

แทนค่า $x = 1$ และ $y = 0$

โจทย์ $f(x + y) = f(1 + 0) = f(1)$

ตัวเลือก 1. $f(x)g(y) + g(x)f(y) = f(1)g(0) + g(1)f(0)$

$= (f(1))(1) + (g(1))(0) = f(1)$

ตัวเลือก 2. $f(x)g(x) + f(y)g(y) = f(1)g(1) + f(0)g(0)$

$= f(1)g(1) + (0)(1)$

$= f(1)g(1)$

$\neq f(1)$

ตัวเลือก 3. $g(x)f(y) - f(x)g(y) = g(1)f(0) - f(1)g(0)$

$= (g(1))(0) - (f(1))(1)$

$= - f(1)$

$\neq f(1)$

ตัวเลือก 4. $f(y)g(y) - f(x)g(x) = f(0)g(0) - f(1)g(1)$

$= (0)(1) - f(1)g(1)$

$= - f(1)g(1)$

$\neq f(1)$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก ชนิดเร็วที่สุดขอให้นักเรียนสังเกตดีๆ จะเห็นว่า

$f(x + y) = f(y + x)$ นั่นคือแทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x จะได้ค่าเท่าเดิม

ตัวเลือก 3. แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ค่าจะต่างกัน

ตัวเลือก 4. แทน x ด้วย y และแทน y ด้วย x ค่าจะต่างกัน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3., 4. ทิ้งได้ก่อนที่จะแทนค่า

วิธีจริง $f(x+y) = \dfrac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}$

$$g(x)f(y) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,[e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}]$$

$$f(x)g(y) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \cdot \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,[e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-(x+y)}]$$

$$f(x)g(y) + g(x)f(y) = \frac{1}{4}\,[2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}]$$

$$= \frac{e^{(x+y)} - e^{-(x+y)}}{2}$$

$$= f(x+y)$$

หมายเหตุ วิธีจริงยากมากเพราะว่าจริงๆ แล้วเราไม่รู้ว่าตัวเลือกใดถูกต้อง จึงไม่รู้ว่าจะจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือกใด เพียงแต่ข้อนี้โชคดีที่คำตอบอยู่ที่ตัวเลือก 1.

ตัวอย่าง 3.15 คณิตศาสตร์ กข. 2535

ถ้า $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

แล้ว det(AB) มีค่าเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. $1 + \cos^2\theta + \cos^2 3\theta$ 2. $1 - \cos^2\theta + \cos^2 3\theta$

3. $1 + \cos^2\theta - \cos^2 3\theta$ 4. $1 - \cos^2\theta - \cos^2 3\theta$

ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ θ

แทนค่า θ = 0 จะได้คิดเลขง่าย ๆ

โจทย์ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, det (A) = − 1

$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, det (B) = 1

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B = (-1)(1) = -1$$

เพราะว่า $\cos^2\theta = 1$ และ $\cos^2 3\theta = \cos^2 0 = 1$

เพราะฉะนั้นค่าตัวเลขในแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $1 + 1 + 1 = 3 \neq -1$

ตัวเลือก 2. $1 - 1 + 1 = 1 \neq -1$

ตัวเลือก 3. $1 + 1 - 1 = 1 \neq -1$

ตัวเลือก 4. $1 - 1 - 1 = -1$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $AB = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sin\theta\cos2\theta-\cos\theta\sin2\theta & \cos\theta\cos2\theta-\sin\theta\sin2\theta \\ \cos\theta\cos2\theta-\sin\theta\sin2\theta & \sin\theta\cos2\theta-\cos\theta\sin2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin(\theta-2\theta) & \cos(\theta+2\theta) \\ \cos(\theta+2\theta) & \sin(\theta-2\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos3\theta \\ \cos3\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$$

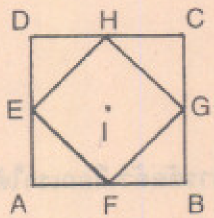
$$\det(AB) = \sin^2\theta - \cos^2 3\theta$$

$$= 1 - \cos^2\theta - \cos^2 3\theta$$

ตัวอย่าง 3.16

กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E,F,G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, AB, BC และ CD ตามลำดับ

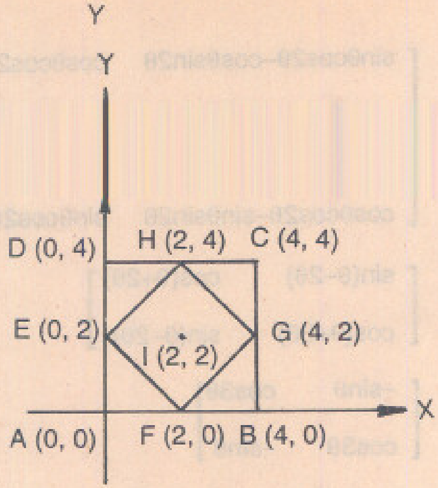
I เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด



1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH}$
3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$
4. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$

ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์ที่มีภาพประกอบแบบนี้เราใช้รูปจริงในพิกัดมุมฉาก จะทำให้ตัดตัวเลือกได้ ตัวอย่างเช่น



พิจารณาแต่ละตัวเลือก

1. $\overrightarrow{DE} = -\overline{2j}$

$\overrightarrow{HG} = \overline{2i} - \overline{2j}$

$\overrightarrow{EH} = \overline{2j} + \overline{2j}$

$\overrightarrow{FE} = -\overline{2i} + \overline{2j}$

$\overrightarrow{FA} = -\overline{2i}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0}$

2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = (-\overline{2j}) - (-\overline{2i} - \overline{2j}) = \overline{2i}$

$\overrightarrow{GH} = -\overline{2i} + \overline{2j} \neq \overline{2i}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิดแน่นอน

สรุปผลจากการเลือกพิกัดข้างต้นแทนที่จะเป็นการตัดตัวเลือกเราได้คำตอบที่ต้องการทันที เพราะโจทย์ข้อนี้ถามว่าตัวเลือกใดผิด

หมายเหตุ ข้อสอบแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกโดยการสมมิติพิกัดของจุดเป็นวิธีดีที่สุด

ตัวอย่าง 3.17

ถ้า $\sin 2\theta = a$ และ $0 < \theta < \frac{\P}{2}$ แล้ว $\cos\theta + \sin\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{a+1}$
2. $(\sqrt{2}-1)\,a+1$
3. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a^2+a}$
4. $\sqrt{a+1} + \sqrt{a^2+a}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a

สมมติ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\sin 2\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \sin \frac{\P}{3}$

เพราะฉะนั้น $2\theta = \frac{\P}{3}$

$\theta = \frac{\P}{6}$

และ $\cos\theta + \sin\theta = \text{ws}\ \frac{\P}{6} + \sin \frac{\P}{6}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$= \frac{1.732+1}{2} = 1.366 \simeq 1.4$

แทนค่า $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\sqrt{a+1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$

$= \sqrt{\frac{1.732+2}{2}}$

$= \sqrt{\frac{3.732}{2}}$

$= \sqrt{1.866} \qquad = 1.366$

ตัวเลือก 2. $(\sqrt{2}-1)a+1 = (\sqrt{2}-1)(\frac{\sqrt{3}}{2})+1$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$= \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+2}{2}$

$= \frac{2.45-1.732+2}{2}$

$= \frac{2.718}{2}$

$= 1.359$

ตัวเลือก 3. $\sqrt{a+1} - \sqrt{a^2+a}$

$= \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}+1} - \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} - \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{4}}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{3+2\sqrt{3}})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{4+2(1.732)} - \sqrt{3+2(1.732)})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{4+3.464} - \sqrt{3+3.464})$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{7.464} - \sqrt{6.464})$

< 1

ตัวเลือก 4. $\sqrt{a+1}-\sqrt{a^2+a}$

จากตัวเลือก 3 จะได้ว่า

$$\sqrt{a+1}-\sqrt{a^2+a} = \frac{1}{2}\sqrt{7.464}+\sqrt{6.464}$$

$$> \frac{1}{2}(2+2)$$

$$= 2$$

สรุปตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

วิธีจริง $(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 1 + \sin 2\theta$$

$$= 1 + a$$

เพราะว่า $0 < \theta < \frac{\P}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta + \cos\theta > 0$

สรุป $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{1+a}$

ตัวอย่าง 3.18 คณิตศาสตร์ กข. 2531

สัมประสิทธิ์ของ x^r ในการกระจาย $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{2n+r}{3}\right)!\left(\frac{4n-r}{3}\right)!}$

2. $\dfrac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!}$

3. $\dfrac{(2n)!}{r!(2n-r)!}$

4. $\dfrac{(2n)!}{(2r)!}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n และ r

แทนค่า n = 1

จะได้ $(x^2 + \frac{1}{x})^{2(1)} = x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}$

เมื่อ r = 4 จะได้สัมประสิทธิ์ x^4 เท่ากับ 1

แทนค่า r = 4 และ n = 1 ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n+r}{3}\right)!\left(\frac{4n-r}{3}\right)!} = \frac{2!}{2!0!} = 1$

ตัวเลือก 2. $\frac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!} = \frac{2!}{0!} = 2 \neq 1$

ตัวเลือก 3. $\frac{(2n)!}{r!\,(2n-r)!} = \frac{2!}{4!\,(-2)!}$ หาค่าไม่ได้

ตัวเลือก 4. $\frac{(2n!)}{(2r)!} = \frac{2!}{8!} \neq 1$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

พจน์ที่ k + 1 ของการกระจายทวินามของ $(a + b)^m$

$$T_{k+1} = \binom{m}{k} a^{m-k} b^k$$

พจน์ที่ k + 1 ของการกระจายทวินามของ $(x^2 + \frac{1}{x})^{2n}$

$$\begin{aligned} T_{k+1} &= \binom{2n}{k} (x^2)^{2n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k \\ &= \binom{2n}{k} x^{4n-2k} x^{-k} \\ &= \binom{2n}{k} x^{4n-3k} \end{aligned}$$

การหาค่า k ที่ทำให้ $4n - 3k = r$

$$k = \frac{4n - r}{3}$$

สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^r คือ $\binom{2n}{k}$

$$= \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!\left(2n-\left(\frac{4n-r}{3}\right)\right)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!\left(\frac{2n+r}{3}\right)!}$$

ตัวอย่าง 3.19 ให้ $a \in R^+$

$A = \{x \in R \mid x - a \le \sqrt{|x-a|}\}$

$B = [-a, a]$

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A - B = (-\infty, -a) \cup \neq (a, a + 1]$
2. $A \cup B = [-a, a]$
3. $B - A = (-\infty, -a)$
4. $A \cap B = \{-a, o, a\}$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a

เลือก $a = 1$ เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก

$A = \{x \in R \mid x - 1 \le \sqrt{|x-1|}\}$

$B = [-1, 1]$

ตัวเลือกทุกตัวจะเปลี่ยนเป็น

1. $A - B = (-\infty, -1) \cup (1, 2]$
2. $A \cup B = [-1, 1]$
3. $B - A = (-\infty, -1)$
4. $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$

เพราะว่า $B = [-1, 1]$ และ $B - A \subset B$ เสมอ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $2 - 1 = 1 \le \sqrt{|2-1|}$

เพราะฉะนั้น $2 \in A$ ดังนั้น $2 \in A \cup B$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 0.5$ ทำให้ $0.5 - 1 \le \sqrt{|0.5-1|}$

เพราะฉะนั้น $0.5 \in A$

ดังนั้น $0.5 \in A \cap B$

สรุปตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง $a \in R^+$

$x - a \quad \sqrt{|x-a|}$

1. $x < a$; $\quad x - a \le 0$

ดังนั้น $x - a \le \sqrt{|x - a|}$

2. $x \ge a$; $0 < x - a \le \sqrt{x - a}$

$$0 < (x - a)^2 \le x - a$$

$$[(x - a)^2 - (x - a)] \le 0$$

$$(x - a)\,(x - a - 1) \le 0$$

$$(x - a)\,(x - (a + 1)) \le 0$$

$$a \le x \le a + 1$$

สรุป $A = \{x \in R \mid x - a \le \sqrt{|x - a|}\,\}$

$$= (-\infty, a) \cup [a, a + 1]$$

$$= (-\infty, a + 1]$$

เพราะฉะนั้น $A - B = (-\infty, a + 1] - [-a, a]$

$$= (-\infty, -a) \cup (a, a + 1]$$

ตัวอย่าง 3.20 คณิตศาสตร์ กข. 2533

ถ้า $10^y = \left(\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)^{\frac{1}{2}}$ เมื่อ $\dfrac{\P}{2} < x < \P$

แล้ว y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log\left|\sec x + \tan x\right|$
2. $(\log\left|\sin x\right|) - (\log\left|\cos x\right|)$
3. $\log\left|\operatorname{cosec} x - \cot x\right|$
4. $(\log\left|\sec x\right|) + (\log\left|\tan x\right|)$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x และ y

สมมติ $x = 150^\circ = \dfrac{5\P}{6}$

$$\sin x = \sin\frac{5\P}{6} = \frac{1}{2}$$

$$10^y = \left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\log 10^y = \log 3^{\frac{1}{2}}$$

$$y = \log\sqrt{3}$$

แทนค่า $x = \frac{5\pi}{6}$ ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก ๑. $\log\left|\sec x + \tan x\right| = \log\left|\sec\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{5\pi}{6}\right|$

$$= \log\left|\frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{-2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \log\left|\frac{3}{\sqrt{3}}\right|$$

$$= \log\sqrt{3}$$

ตัวเลือก ๒. $\log\left|\sin x\right| - \log\left|\cos x\right|$

$$= \log\left|\frac{\text{sinx}}{\text{cosx}}\right|$$

$$= \log\left|\tan x\right|$$

$$= \log\left|\tan\frac{5\pi}{6}\right|$$

$$= \log\left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right|$$

$$\neq \log \sqrt{3}$$

ตัวเลือก 3. $\log \left| \operatorname{cosec} x - \cot x \right|$

$$= \log \left| \operatorname{cosec} x \frac{5¶}{6} - \cot x \frac{5¶}{6} \right|$$

$$= \log \left| 2 + \sqrt{3} \right|$$

$$\neq \log \sqrt{3}$$

ตัวเลือก 4. $\log \left| \sec x \right| + \log \left| \tan x \right|$

$$= \log \left| \sec \frac{5¶}{6} \right| + \log \left| \tan \frac{5¶}{6} \right|$$

$$= \log \left| -\frac{2}{\sqrt{3}} \right| + \log \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right|$$

$$= \log \left| \frac{2}{\sqrt{3}} \right|$$

$$\neq \log \sqrt{3}$$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ต้องใช้การจัดรูปทางพีชคณิตและสูตรตรีโกณมิติ

$$10^{y} = \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$10^{2y} = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$= \left(\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} \right) \cdot \left(\frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} \right)$$

$$= \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}$$

$$10^y = \sqrt{\frac{(1+\sin x)^2}{\cos^2 x}} = \left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right|$$

$$= \left|\sec x + \tan x\right|$$

สรุป $y = \log\left|\sec x + \tan x\right|$

ผลงานตำราของผู้เขียน

พีชคณิตเชิงเส้น

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา เมทริกซ์ ตัวกำหนด ระบบสมการเชิงเส้น ค่าเจาะจง เวกเตอร์เจาะจง พหุนามเชิงเส้นคู่ และพหุนามเอกพันธ์กำลังสอง โดยนำเสนอเนื้อหาด้วย บทนิยาม ทฤษฎีบท พร้อมการพิสูจน์

(ราคาเล่มละ 250 บาท)

ระเบียบวิธีการคำนวณตัวกำหนดและเมทริกซ์

เป็นหนังสือสำหรับนิสิตระดับปริญญาตรีของจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ประกอบด้วยเนื้อหา การหารากของสมการ $f(x) = 0$ การเขียนกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ เวกเตอร์ เมทริกซ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ปัญหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจง การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ การหาผลเฉลยของระบบสมการที่มิใช่เชิงเส้น การประยุกต์ของเวกเตอร์และเมทริกซ์ พร้อมโปรแกรมภาษาเบสิกที่ช่วยในการคำนวณตามหลักการที่กล่าวถึงในแต่ละเรื่องนั้น

(ราคาเล่มละ 125 บาท)

4. เซตคำตอบเป็นข้อใด

หลักการตัดตัวเลือกข้อสอบที่ถามว่าเซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใด ให้นักเรียนเลือกค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์ ถ้าค่าที่เลือกจากตัวเลือกนั้นแทนค่าในโจทย์ไม่เป็นจริงก็ให้ตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

ตัวอย่างเช่น เซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 3x - 4 > 0$

ตรงกับตัวเลือกใด

1. $(-\infty,1]$
2. $[-4, \infty)$
3. $(-4, 1)$
4. $(-\infty, -4)\cup(1, \infty)$

จากตัวเลือก 1.

เลือก $x = 1$; $1^2 + 3(1) - 4 = 0 \not> 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

จากตัวเลือก 2.

เลือก $x = 0$; $0 + 0 - 4 = -4 \not> 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

คำแนะนำ 1. การเลือกค่า x ให้เลือกค่าที่คิดเลขได้ง่าย และ

2. ให้เลือกค่าที่จำแนกตัวเลือกได้ยิ่งดี

ตัวอย่าง 4.1 เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{|x^2+2x-2|}{\sqrt{x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}} \le \sqrt{3}$

คือเซตในตัวเลือกใด

1. $[-1-2\sqrt{3},-1]$
2. $[1,1+2\sqrt{3}]$
3. $[-1-2\sqrt{3},1]$
4. $[-1,1+2\sqrt{3}]$

ตอบ 1.

แนวคิด $x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}$

$$= x^2+(2-2\sqrt{3})x+(4-2\sqrt{3})$$
$$= x^2+2(1-\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})^2$$
$$= \left(x+(1-\sqrt{3})\right)^2$$
$$= \left((x+1)-\sqrt{3}\right)^2$$

และ $x^2+2x-2 = x^2+2x+1-3$

$$= (x+1)^2-(\sqrt{3})^2$$
$$= (x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{|x^2+2x-2|}{\sqrt{x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}}$

$$= \frac{|(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})|}{\sqrt{\left((x+1)-\sqrt{3}\right)^2}}$$

$$= \frac{|x+1-\sqrt{3}|\cdot|x+1+\sqrt{3}|}{|x+1-\sqrt{3}|}$$

$$= \quad |x+1+\sqrt{3}| \quad \text{เมื่อ} \quad x+1-\sqrt{3} \neq 0$$

พิจารณา $|x+1+\sqrt{3}| \le \sqrt{3}$

$$-\sqrt{3} \le x+1+\sqrt{3} \le \sqrt{3}$$

$$-\sqrt{3}-1-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}-1-\sqrt{3}$$

$$-1-2\sqrt{3} \le x \le -1$$

สรุปเซตคำตอบคือ $\left[-1-2\sqrt{3},-1\right]$

การตัดตัวเลือก

เลือกค่า x ที่จำแนกตัวเลือกได้และคิดเลขง่ายเช่น $x = 0$

$$\frac{|0^2+2(0)-2|}{\sqrt{0^2+2(0)-2\sqrt{3}(0)+4-2\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{2}{1.7-1}$$

$$= \frac{2}{0.7}$$

$$= 2.85 \nleq \sqrt{3}$$

เพราะว่าเซตของตัวเลือก 3. $\left[-1-2\sqrt{3},1\right]$ และ 4. $\left[-1,1+2\sqrt{3}\right]$ มี 0 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เลือกค่า x ที่ทำให้คิดเลขง่าย เช่น $x = -1$

$$\frac{|(-1)^2+2(-1)-2|}{\sqrt{(-1)^2+2(-1)-2\sqrt{3}(-1)+4-2\sqrt{3}}} = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{1-2+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$=\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $x=-1$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

แต่ $-1\notin\left[1,1+2\sqrt{3}\right]$ ของตัวเลือก 2.

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 4.2 เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2}\le 1-x$

คือเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty,0]\cup[\frac{5}{4},\infty)$
2. $(-\infty,0]$
3. $[-1,0]$
4. $[-1,0]\cup[\frac{5}{4},\infty)$

ตอบ 3.

แนวคิด เลือกค่า x ที่จำแนกตัวเลือกได้และคิดเลขง่ายเช่น $x=3$

$$\sqrt{\sqrt{3+1}+3^2}=\sqrt{2+9}=\sqrt{11}\not\le 1-3$$

เพราะฉะนั้น $x=3$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เลือก $x=-3$ จะเห็นว่า $\sqrt{-3+1}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x=-3$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ข้อสังเกต การใช้เหตุผลตัดตัวเลือกของนักเรียนบางคนอาจจะอ้างว่าในโจทย์

มีพจน์ $\sqrt{x+1}$ ดังนั้น $x+1\ge 0$

$$x\ge -1$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งก่อน

ต่อไปใช้เหตุผลว่า $x = 3$ ทำให้

ด้านซ้ายมือ $\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2}$ เป็นบวก

ด้านขวามือ $1 - x = 1 - 3 = -2$ เป็นลบ

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ไม่อยู่ในเซตคำตอบ

วิธีจริง $0<\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2} \le 1-x$

$$\sqrt{x+1}+x^2 \le (1-x)^2$$
$$\sqrt{x+1}+x^2 \le 1-2x+x^2$$
$$0<\sqrt{x+1} \le 1-2x$$
$$x+1 \le (1-2x)^2$$
$$x+1 \le 1-4x+4x^2$$
$$0 \le 4x^2-5x$$
$$4x^2-5x \ge 0$$
$$x(4x-5) \ge 0$$
$$-\infty < x \le 0 \text{ หรือ } \frac{5}{4} \le x < \infty \qquad \text{———— (1)}$$

เพราะว่าในอสมการมีพจน์ $\sqrt{x+1}$ ดังนั้น $x+1 \ge 0$

$$x \ge -1 \qquad \text{———— (2)}$$

และ $1-x \ge \sqrt{\sqrt{x+1}+x^2} \ge 0$

$$1-x \ge 0$$
$$1 \ge x \qquad \text{———— (3)}$$

จากทั้ง 3 เงื่อนไขจะได้ว่าเซตคำตอบของอสมการคือ

$$\left[(-\infty,0] \cup [\frac{5}{4},\infty)\right] \cap [-1,\infty) \cap (-\infty,1] = [-1,0]$$

ตัวอย่าง 4.3 คณิตศาสตร์ กข. 2535

กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง

ถ้า $A = \{\arcsin x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

$B = \{\arccos x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

$C = \{\arctan x \mid x$ เป็นจำนวนจริง $\}$

แล้ว $(A \cap C)' \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\P}{2}, \P]$
2. $[0, \frac{\P}{2}]$
3. $(-\frac{\P}{2}, 0]$
4. $(-\frac{\P}{2}, \frac{\P}{2})$

ตอบ 1.

แนวคิด ใช้วิธีจริงผสมกับการตัดตัวเลือกดีที่สุด

จากเหตุผลแท้จริงนักเรียนต้องรู้ก่อนว่า

$$B = \{\arccos x \mid -1 \leq x \leq 1\} = [0, \P]$$

ดังนั้นเรามีเหตุผลของการตัดตัวเลือกแล้ว

เพราะว่า $(A \cap C)' \cap B \subset B$ เสมอโดยยังไม่ต้องรู้ว่า A, C เป็นอะไร

เพราะฉะนั้น $(A \cap C)' \cap B$ ต้องเป็นสับเซตของ $[0, \P]$

แต่ $(\frac{-\P}{2}, 0] \not\subset [0, \P]$ และ $(\frac{-\P}{2}, \frac{\P}{2}) \not\subset [0, \P]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกอาจใช้เหตุผลบางจุดก็ได้

เพราะว่า $\arcsin 0 = 0$ และ $\arctan 0 = 0$

เพราะฉะนั้น $0 \in A$ และ $0 \in C$ ดังนั้น $0 \in A \cap C$

และ $0 \notin (A \cap C)'$

เพราะฉะนั้น $0 \notin (A \cap C)' \cap B$

สรุปเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง นักเรียนต้องจำเรนจ์ของ arcsin, arccos และ arctan ได้

$$A = \{\arcsin x \mid -1 \le x \le 1\} = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$B = \{\arccos x \mid -1 \le x \le 1\} = [0, \pi]$$

$$C = \{\arctan x \mid x \in R\} = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A \cap C = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(A \cap C)' = \left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \infty\right)$$

$$(A \cap C)' \cap B = \left[(-\infty, \frac{-\pi}{2}] \cap [\frac{\pi}{2}, \infty)\right] \cap [0, \pi] \quad = [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

ตัวอย่าง 4.4 คณิตศาสตร์ กข. 2535

ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

เซต $\{k \in R \mid \; |x^3 - 6x^2 + 9x + 1| < k$ สำหรับทุกๆ $x \in [0,3]\}$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(\frac{1}{2}, \infty)$
2. $(1, \infty)$
3. $(\frac{31}{8}, \infty)$
4. $(5, \infty)$

ตอบ 4.

แนวคิด คำถามนี้ตรงกับคำว่า เซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใด

พิจารณาการแทนค่าแบบง่ายๆของ $x \in [0,3]$

x	$\left\|x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right\|$
0	1
1	5
2	3
3	1

เพราะฉะนั้น $x = 1$ ทำให้ $\left|x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right| = 5$

ดังนั้น $k = 1$ ไม่ได้ แต่ $1 \in (\frac{1}{2}, \infty)$ เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

$k = 2$ ไม่ได้ แต่ $2 \in (1, \infty)$ เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

$k = 4$ ไม่ได้ แต่ $4 \in (\frac{31}{8}, \infty)$ เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง ปัญหานี้คือการกำหนดโดเมน $x \in [0,3]$ และจงหาค่าสูงสุดของ $\left|x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right|$

ให้ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $3x^2 - 12x + 9 = 0$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x-3)(x-1) = 0$

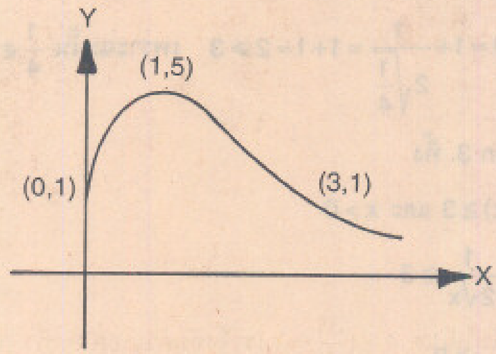
$x = 1, 3$

เพราะว่า $f''(1) = -6 < 0$ เพราะฉะนั้น $f(1) = 5$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f''(3) = 1 > 0$ เพราะฉะนั้น $f(3) = 1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $f'(x) < 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (0,1)

เพราะว่า ถ้า $1 < x < 3$ แล้ว $f'(x) < 0$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (1,3)



สรุป $f(1) = 5$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $\left| x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \right| \le 5$ ทุกค่า $x \in [0,3]$

สรุป $\left\{ k \in R \,\middle|\, \left| x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \right| < k \text{ ทุกค่า } x \in [0,3] \right\} = (5, \infty)$

ตัวอย่าง 4.5 คณิตศาสตร์ กข. 2536

ให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้วเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \ge 3$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,\frac{1}{16}]$ 2. $[0,\frac{1}{16}]$

3. $(0,\frac{1}{4}]$ 4. $[0,\frac{1}{4}]$

ตอบ 1.

แนวคิด $f(x)=\sqrt{x}+x=x^{\frac{1}{2}}+x$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1=1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

เพราะว่า $f'(0)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $0\notin\{x\mid f'(x)\geq 3\}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $f'(\frac{1}{4})=1+\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}}=1+1=2\ngeq 3$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{4}\notin\{x\mid f'(x)\geq 3\}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง $f'(x)\geq 3$ และ $x>0$

$$1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 3$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\geq 2$$

$$1\geq 4\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{4}\geq\sqrt{x}$$

$$\frac{1}{16}\geq x$$

$$x\in(0,\frac{1}{16}]$$

สรุป $\{x\mid f'(x)\geq 3\}=(0,\frac{1}{16}]$

5. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด

ข้อสอบที่ถามว่าเซตคำตอบเป็นสับเซตของเซตในตัวเลือกใด เช่น คำถาม

$A = \{x \in R \mid |x+4| < 3\}$ เป็นสับเซตของตัวเลือกใด

1. (0, 1)
2. (–4, 7)
3. (–7, –1)
4. (1, 7)

เราจะใช้เหตุผลว่า ถ้า $a \in A$ แต่ $a \notin$ เซตของตัวเลือกใดแล้วให้ตัดตัวเลือกนั้นทิ้ง

เพราะว่า $x = -2$ ทำให้ $|-2+4| = 2 < 3$ เพราะฉะนั้น $-2 \in A$

แต่ $-2 \notin (0,1)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

และ $-2 \notin (1,7)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ต่อไปเลือก $x = -4$ จะได้ว่า $|-4+4| = 0 < 3$

ดังนั้น $-4 \in A$ แต่ $-4 \notin (-4,7)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ข้อแนะนำ การเลือกค่า x ควรเลือกค่าที่คิดเลขได้ง่าย และจำแนกตัวเลือกได้

ตัวอย่าง 5.1 คณิตศาสตร์ กข. 2534

กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}$

$g(x) = \sqrt{3-x}$

$h(x) = \sqrt{-x^2+5x+6}$

ถ้า $U = \frac{g}{h}$ แล้ว $R_f \cap D_U$ เป็นสับเซตของเซตในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. (–4, 1)
2. (–1, 5)
3. (2, 7)
4. (4, 8)

ตอบ 2.

แนวคิด $U(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{-x^2+5x+6}}$

$$=\sqrt{\frac{x-3}{x^2-5x-6}}$$

$$=\sqrt{\frac{x-3}{(x-6)(x+1)}}$$

เพราะฉะนั้น $U(1)$ หาค่าได้ นั่นคือ $1\in D_U$

เพราะว่า $f(1)=\frac{1}{2}\sqrt{3+1}=1$ เพราะฉะนั้น $1\in R_f$

สรุป $1\in R_f\cap D_U$

เพราะว่า $1\notin(-4,1)$, $1\notin(2,7)$ และ $1\notin(4,8)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $U=\frac{g}{h}$ เพราะฉะนั้น

$$D_U=\left(D_g\cap D_h\right)-\{x\mid h(x)=0\}$$

เพราะว่า $g(x)=\sqrt{3-x}$

เพราะฉะนั้น $D_g=\{x\mid 3-x\geq 0\}=\{x\mid 3\geq x\}=(-\infty,3]$

เพราะว่า $h(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$

และ $-x^2+5x+6\geq 0$

$x^2-5x-6\leq 0$

$(x-6)(x+1)\leq 0$

เพราะฉะนั้น $D_h=[-1,6]$

และ $\{x \mid h(x) = 0\} = \{-1,6\}$

สรุป $D_U = ((-\infty,3] \cap [-1,6]) - \{-1,6\}$

$= (-1,3]$

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}$

$3x^2+1 \geq 1$

$\sqrt{3x^2+1} \geq 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1} \geq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $R_f = [\frac{1}{2},\infty)$

ดังนั้น $R_f \cap D_U = [\frac{1}{2},\infty) \cap (-1,3] \quad = [\frac{1}{2},3] \quad \subset (-1,5)$

ตัวอย่าง 5.2 คณิตศาสตร์ ก. 2530

ประโยค $\forall x\,[\,|2x+5| \leq 2]$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง

เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตในข้อใด

1. $\{x \mid -7 \leq x \leq -3\}$
2. $\{x \mid 1.5 \leq x \leq 3.5\}$
3. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
4. $\{x \mid -3.5 \leq x \leq -1.5\}$

ตอบ 4.

แนวคิด ความหมายของโจทย์ข้อนี้คือเซตในตัวเลือกใดเป็นสับเซตของเซตคำตอบ

ของอสมการ $|2x+5| \leq 2$

$x = -7; \quad |2(-7)+5| = |-14+5| = 9 \nleq 2$

$x = 3.5; \quad |2(3.5)+5| = |7+5| = 12 \nleq 2$

$x = 2; \quad |2(2)+5| = |4+5| = 9 \nleq 2$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. เลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $|2x+5| \le 2$

$-2 \le 2x+5 \le 2$

$-7 \le 2x \le -3$

$-3.5 \le x \le 1.5$

เพราะฉะนั้น $\forall x \in [-3.5, -1.5]\ [|2x+5| \le 2]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 5.3 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง

$$A = \left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{x^2-9}{x-3} \ge 0 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R \,\middle|\, \sqrt{x+3} < 5 \right\}$$

$$C = \left\{ x \in R \,\middle|\, x \le -4 \quad 9 \le x \right\}$$

$B-(A \cap C')$ เป็นสับเซตของตัวเลือกใด

1. $\{-3\} \cup (3,9]$
2. $[9,22)$
3. $[-3,9)$
4. $\{-3\} \cup (9,22)$

ตอบ 2.

แนวคิด

ตัวเลข $x = 9$ เป็นตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้

$\frac{(9)^2-9}{9-3} \ge 0$ ดังนั้น $9 \in A$

$\sqrt{9+3} = 0 < 5$ ดังนั้น $9 \in B$

$9 \leq 9$ ดังนั้น $9 \in C$ และ $9 \notin C'$

เพราะฉะนั้น $9 \in B-(A \cap C')$

สรุปตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การหาเซต A หรือ

$$\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)}=x+3\ ;\ x \neq 3$$

$$\frac{x^2-9}{x-3} \geq 0$$

$$x+3 \geq 0\ ;\ x \neq 3$$

$$x \geq -3\ ;\ x \neq 3$$

สรุป $A=[-3,\infty)-\{3\}=[-3,3)\cup(3,\infty)$

การหาเซต B $\sqrt{x+3}<5$ และ $x+3 \geq 0$

$$x+3<25 \quad \text{และ} \quad x \geq -3$$

$$x<22$$

$$B=[-3,22)$$

การหาเซต C $C=\{x \in R \mid x \leq -4 \text{ หรือ } 9 \leq x\}$

$$C=(-\infty,-4]\cup[9,\infty)$$

$$C'=(-4,9)$$

$$A \cap C'=[[-3,3)\cup(3,\infty)]\cap(-4,9)$$

$$=[3,9)-\{3\}$$

$$B-(A \cap C')=[-3,22)-([-3,9)-\{3\})$$

$$=[9,22)$$

ตัวอย่าง 5.4 เซตคำตอบของอสมการ $-\sqrt{2} \le \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \le \sqrt{2}$

เมื่อ $\theta \in [0,\pi]$ เป็นสับเซตของเซตในตัวเลือกใด

1. $[0,\frac{\pi}{4}]$
2. $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$
3. $[\frac{\pi}{3},\pi]$
4. $[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{12}]$

ตอบ 3.

แนวคิด คำถามแบบนี้เลือกค่า θ แล้วทำการตัดตัวเลือกดีกว่า

เลือก $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} = 1 + \sqrt{3}(0) = 1$

$$-\sqrt{2} \le \sin\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} \le \sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{2}$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

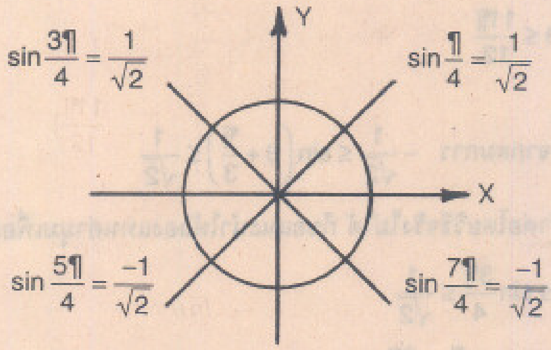
แต่ $\frac{\pi}{2} \notin [0,\frac{\pi}{4}]$ และ $\frac{\pi}{2} \notin [\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{12}]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง
$$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta\right)$$
$$= 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

จากอสมการ
$$-\sqrt{2} \le \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \le \sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2} \le 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \le \sqrt{2}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

การหาช่วงของมุม θ ให้พิจารณาจากมุมในรอบวงกลมดังนี้



เพราะฉะนั้น $\quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

มี 3 บริเวณคือ 1. $0 \le \theta+\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{4}$

$$-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{-\pi}{3} \le \theta \le \frac{-\pi}{12}$$

2. $\frac{3\pi}{4} \le \theta+\frac{\pi}{3} \le \frac{5\pi}{4}$

$$\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{5\pi}{12} \le \theta \le \frac{11\pi}{12}$$

3. $\frac{7\pi}{4} \le \theta+\frac{\pi}{3} \le 2\pi$

$$\frac{7\pi}{4}-\frac{\pi}{3} \le \theta \le 2\pi-\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{17\pi}{12} \le \theta \le \frac{5\pi}{3}$$

เพราะว่าเราสนใจเฉพาะ $\theta \in [0, \pi]$

เพราะฉะนั้น $-\sqrt{2} \le \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \le \sqrt{2}$

เมื่อ $\frac{5\pi}{12} \le \theta \le \frac{11\pi}{12}$

หมายเหตุ จากสมการ $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

ถ้านักเรียนทำต่อโดยวิธีจริงไม่ได้ ก็ขอแนะนำให้ลองแทนค่ามุมเพื่อการตัดตัวเลือก

เช่น $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le \sin\frac{3\pi}{4} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$

ดังนั้นเราเลือก $\theta + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{5\pi}{12}$$

ดังนั้น $\theta = \frac{5\pi}{12}$ ทำให้ $-\sqrt{2} \le \sin\frac{5\pi}{12} + \sqrt{3}\cos\frac{5\pi}{12} \le \sqrt{2}$

นั่นคือ $\frac{5\pi}{12}$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ แต่ $\frac{5\pi}{12} \notin [\frac{2\pi}{3}, \frac{11\pi}{12}]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 5.5 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x}$ และ $A = \left\{x \in R \,\middle|\, f(\frac{1}{x}) \ge \frac{1}{x}\right\}$

A เป็นสับเซตของตัวเลือกใด

1. $(-\infty, 0)$
2. $[-1, 2]$
3. $(0, 2)$
4. $(2, \infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด เลือกค่า x ที่คิดเลขได้ง่ายและจำแนกตัวเลือกได้

$x = 1;\quad f(\frac{1}{x}) = f(\frac{1}{1}) = f(1) = \frac{1+1}{1} = 2 \ge \frac{1}{1}$

เพราะฉะนั้น $1 \in A$ แต่ $1 \notin (-\infty, 0)$ และ $1 \notin (2, \infty)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

เลือกค่า x ที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 3. ได้เช่น $x = -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$

เลือก $x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{(-\frac{1}{2})}\right) &= f(-2) = \frac{-2+1}{-2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &\ge -2 \\ &= \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2} \in A$

เพราะว่า $-\frac{1}{2} \in (0,2)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง $f(x) = \frac{x+1}{x}$

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{x}) &= \frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}} \\ &= 1+x \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, f\left(\frac{1}{x}\right) \ge x^2 \right\}$

$= \left\{ x \in R \,\middle|\, 1 + x \ge x^2 \right\}$

เพราะว่า $1 + x \ge x^2$

$x^2 - x - 1 \le 0$

$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \le 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \le 0$

$\left[x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right]\left[x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right] \le 0$

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

เพราะฉะนั้น $A = \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

$= [-0.618, 1.61803]$

6. โดเมนและเรนจ์คือเซตใด

ข้อสอบที่ถามว่าโดเมนและเรนจ์คือเซตใด ความจริงก็คือการถามว่าเซตค่าตอบตรงกับเซตในตัวเลือกใด ตัวอย่างเช่น

คำถาม กำหนด $r=\left\{(x,y)\,\middle|\,y=1+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}\right\}$ โดเมนของ r ตรงกับตัวเลือกใด

1. $(-\infty,4]$
2. $[-4,\infty)$
3. $(-4,\infty)$
4. $[-4,4]$

ดังนั้นความหมายของโจทย์ก็คือ

$$D_r=\left\{x\,\middle|\,y=1+\frac{1}{\sqrt{x+4}}\text{ หาค่าได้}\right\}\text{ ตรงกับตัวเลือกใด}$$

เพราะว่า $x=-4$ ทำให้ $y=1+\dfrac{1}{\sqrt{-4+4}}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $-4\notin D_r$

จากเหตุผลนี้ทำให้ตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 6.1 กำหนดให้ $r=\{(x,y)\in RxR\mid y^2=(1-x)^2\text{ และ }x\geq 1\}$

กราฟของความสัมพันธ์ r มีกราฟเหมือนความสัมพันธ์ในตัวเลือกใด

1. $r_1=\{(x,y)\in RxR\mid x=|y|-1\}$
2. $r_2=\{(x,y)\in RxR\mid x=|y|+1\}$
3. $r_3=\{(x,y)\in RxR\mid y=|x|-1\}$
4. $r_4=\{(x,y)\in RxR\mid y=|x|+1\}$

ตอบ 2.

แนวคิด คำถามแบบนี้น่าจะจำแนกเป็นโดเมนและเรนจ์คือเซตใด

เนื่องจากเราสามารถใช้เหตุผลของโดเมนและเรนจ์ช่วยตัดตัวเลือกได้

จากโจทย์ $r=\left\{(x,y)\in R\times R \;\middle|\; y^2=(1-x)^2 \text{ และ } x\geq 1\right\}$

จากเงื่อนไข $x\geq 1$ ทำให้เราได้เหตุผลว่า $D_r\subset[1,\infty)$

เราจะใช้เหตุผลว่า $0\notin D_r$ ช่วยในการตัดตัวเลือกดังนี้

1. $x=0$ อยู่ในโดเมนของ r_1 ได้เมื่อ $y=1$ แต่ $0\notin D_r$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

3. $x=0$ และ $y=-1$ ทำให้ $(0,-1)\in r_2$ ดังนั้น $0\in D_{r_2}$
   เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

4. $x=0$ จะได้ $y=1$ ดังนั้น $(0,1)\in r_4$ ทำให้ $0\in D_{r_4}$
   เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง **แบบที่ 1** วาดรูปดูทุกความสัมพันธ์ ซึ่งเป็นวิธีที่ยากและยุ่งยากมากที่สุด

แบบที่ 2 พิจารณาเงื่อนไขของความสัมพันธ์ดังนี้

$y^2=(1-x)^2$ และ $x\geq 1$

$|y|=|1-x|$ และ $x\geq 1$

$|y|=(1-x)$ และ $x\geq 1$

$|y|=x-1$ และ $x\geq 1$

$x=|y|+1$

สรุป $r=\left\{(x,y)\in R\times R \;\middle|\; y^2=(1-x)^2 \text{ และ } x\geq 1\right\}$

$=\left\{(x,y)\in R\times R \;\middle|\; x=|y|+1\right\}$

$=r_2$

ตัวอย่าง 6.2 คณิตศาสตร์ กข. 2529

กำหนดความสัมพันธ์

$$r_1 = \left\{(x,y) \in RxR \,\middle|\, x^2+y^2=1\right\}$$

$$r_2 = \left\{(x,y) \in RxR \,\middle|\, y = \frac{1}{x^2+1} - 1\right\}$$

ให้ A เป็นโดเมนของ r_1 และ B เป็นเรนจ์ของ r_2 A – B คือเซตในข้อต่อไปนี้

1. $[0,1] \cup \{-1\}$
2. $(0,1] \cup \{-1\}$
3. $(0,1]$
4. $\{-1\}$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $x^2+y^2=1$ มีกราฟเป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (0,0)

และรัศมี 1 ดังนั้น $-1 \le x \le 1$ และ $-1 \le y \le 1$

นั่นคือ $D_{r_1} = [-1,1]$ และ $R_{r_1} = [-1,1]$

พิจารณาตัวเลือก 1. และ 2. มี 0 เป็นสมาชิกที่จำแนกตัวเลือกได้

ดังนั้นเราพิจารณาว่า 0 อยู่ในเซต B ได้หรือไม่

เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $\frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1}{0+1} - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $(0,0) \in r_2$ นั่นคือ $0 \in R_{r_2}$, $0 \in B$ สรุป $0 \in A$ และ $0 \in B$

ดังนั้น $0 \notin A-B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. และ 3. มี –1 เป็นตัวจำแนกได้ ดังนั้นพิจารณาว่า $-1 \in A-B$ หรือไม่

สมมติ $-1 \in B$ ดังนั้น $-1 = \frac{1}{x^2+1} - 1$

$$\frac{1}{x^2+1} = 0 \text{ เป็นไปไม่ได้}$$

ดังนั้น $-1 \notin B$ สรุป $-1 \in A-B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวเลือกที่เหลือคือ 2. และ 4. ดูว่า $-1 \in A-B$ หรือไม่ก็พอ

สมมติ $1 \notin A-B$ เพราะว่า $1 \in A$ ดังนั้น $1 \in B$

พิจารณา $1 = \frac{1}{x^2+1} - 1$

$$\frac{1}{x^2+1} = 2$$

$$1 = 2x^2 + 2$$

$$2x^2 = -1 \quad \text{เป็นไปไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้นที่สมมติว่า $1 \in A-B$ ไม่จริง

ดังนั้น $1 \in A-B$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $A = D_{r_1} = [-1,1]$

$$r_2 = \left\{(x,y) \in RxR \,\middle|\, y = \frac{1}{x^2+1} - 1\right\}$$

พิจารณาค่าของ y ในเงื่อนไขของ r_2

$$x^2 + 1 \ge 1$$

$$0 < \frac{1}{x^2+1} \le 1$$

$$-1 < \frac{1}{x^2+1} - 1 \le 0$$

$$-1 < y \le 0$$

เพราะฉะนั้น $B = R_{r_2} = (-1,0]$

สรุป $A-B = [-1,1]-(-1,0] \quad = \{-1\} \cup (0,1]$

ตัวอย่าง 6.3 คณิตศาสตร์ ก. 2529

ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$f = \left\{(x,y) \in IxI \,\middle|\, y = x^2\right\}$$

$$g = \left\{(x,y) \in RxR \,\middle|\, y = 2x\right\}$$

$$h = \left\{(x,y) \in R^{+}xR \,\middle|\, y = x+5\right\}$$

แล้วโดเมนของ $\frac{f+g}{h}$ คือข้อใด

1. $\{x \mid x$ เป็นจำนวนจริงบวก $\}$
2. $\{x \mid x$ เป็นจำนวนจริง และ $x \neq -5\}$
3. $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก $\}$
4. $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x \neq -5\}$

ตอบ 3.

แนวคิด $D_{\frac{f+g}{h}} = D_f \cap D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\}$

เพราะว่า $f = \left\{(x,y) \in IxI \,\middle|\, y = x^2\right\}$ เพราะฉะนั้น D_f เป็นสับเซตของจำนวนเต็ม

ดังนั้น $D_{\frac{f+g}{h}}$ ต้องเป็นสับเซตของจำนวนเต็ม

สรุปขณะนี้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $(-1,1) \in f,\ (-1,-2) \in g,\ (-1,4) \in h$

เพราะฉะนั้น $-1 \in D_f \cap D_g \cap D_h$ และ $h(-1) \neq 0$ ดังนั้น $-1 \in D_{\frac{f+g}{h}}$

สรุปเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง $D_f = I$ $\quad D_g = R$

$D_h = R^{+}$ $\quad \{x \mid h(x) = 0\} = \{-5\}$

$D_f \cap D_g \cap D_h - \{-5\} \quad = I \cap R \cap R^+ - \{-5\} \quad = I \cap R^+$

$= \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก $\}$

ตัวอย่าง 6.4 คณิตศาสตร์ ก. 2531

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และกำหนดให้โดเมนของ f เป็น $\left\{x \in R \,\middle|\, -\frac{1}{2} < x \le \frac{1}{4}\right\}$ แล้ว

เรนจ์ของ f คือข้อใด

1. $\left\{y \in R \,\middle|\, -\frac{15}{16} < y \le -\frac{3}{4}\right\}$
2. $\left\{y \in R \,\middle|\, -\frac{15}{16} \le y < -\frac{3}{4}\right\}$
3. $\left\{y \in R \,\middle|\, -1 \le y \le -\frac{3}{4}\right\}$
4. $\left\{y \in R \,\middle|\, -1 \le y < -\frac{3}{4}\right\}$

ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = x^2 - 1$ โดเมนของ f คือ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

เพราะว่า $0 \in D_f$ และ $f(0) = -1$ เพราะฉะนั้น $-1 \in R_f$

แต่ $-1 \notin \left\{y \in R \,\middle|\, -\frac{15}{16} < y \le -\frac{3}{4}\right\}$ $-1 \notin \left\{y \in R \,\middle|\, -\frac{15}{16} \le y < -\frac{3}{4}\right\}$

สรุปตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้ ต่อไปพิจารณาว่า $-\frac{3}{4} \in R_f$ ได้หรือไม่

สมมติ $f(x) = -\frac{3}{4}$

$$x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$$

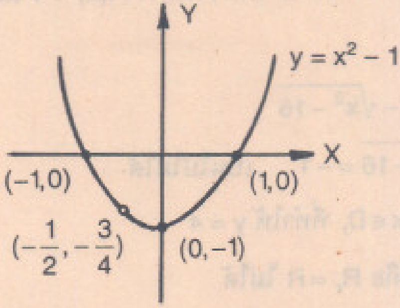
$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}$$

เพราะว่า $D_f = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ เพราะฉะนั้นไม่มี $x \in D_f$ ที่ทำให้ $f(x) = -\frac{3}{4}$

สรุป $-\frac{3}{4} \notin R_f$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x) = x^2 - 1$ มีกราฟบนช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$ ดังนี้



$$-1 \le f(x) < -\frac{3}{4}$$

นั่นคือ $R_f = \left[-1, -\frac{3}{4}\right)$

ตัวอย่าง 6.5 คณิตศาสตร์ ก. 2531

กำหนดความสัมพันธ์ $r = \left\{(x,y) \in RxR \,\middle|\, y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}\right\}$

โดเมน (D_r) และเรนจ์ (R_r) ของ r คือข้อใด

1. $D_r = \{x \mid x \le -4 \text{ หรือ } x \ge 4\}; R_r = R$
2. $D_r = \{x \mid x \le -4 \text{ หรือ } x \ge 4\}; R_r = \{y \mid y \le 3\}$
3. $D_r = \{x \mid x \ge 4\} \quad ; R_r = \{y \mid y \le 3\}$
4. $D_r = \{x \mid -4 \le x \le 4\} \quad ; R_r = \{y \mid y \ge 0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด ข้อสอบที่มีตัวเลือก D_r และ R_r แบบนี้ยิ่งตัดตัวเลือกง่าย

เพราะว่า $y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = -10$ ทำให้ $y = 3 - \sqrt{(-10)^2 - 16}$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $-10 \in D_r$ แต่ $-10 \notin \{x \mid x \geq 4\}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

การจำแนกตัวเลือก 1. และ 2. ให้พิจารณาว่า $f(x) = 4$ ได้หรือไม่

สมมติ $\quad y = 4$

$$4 = 3 - \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\sqrt{x^2 - 16} = -1 \quad \text{เป็นไปไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้นไม่มี $x \in D_r$ ที่ทำให้ $y = 4$

ดังนั้น $4 \notin R_r$ นั่นคือ $R_r = R$ ไม่ได้

สรุปตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง จากเงื่อนไข $y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}$

ดังนั้นโดเมน r ดูจากเงื่อนไข $x^2 - 16 \geq 0$

$$x^2 \geq 16$$

$$-4 \leq x \text{ หรือ } x \geq 4$$

สรุป $D_r = \{X \mid -4 \leq x \text{ หรือ } x \geq 4\}$

การหาเรนจ์ของ r

$$\sqrt{x^2 - 16} \geq 0$$

$$-\sqrt{x^2 - 16} \leq 0$$

$$3 - \sqrt{x^2 - 16} \leq 3$$

$$y \leq 3$$

สรุป $R_r = \{y \mid y \leq 3\}$

7. เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้

ข้อสอบทุกเรื่องทุกหัวข้อในวิชาคณิตศาสตร์ ถ้านักเรียนวาดรูปประกอบได้ขอให้พยายามฝึกฝนการวาดรูป โดยเฉพาะหลักสูตร ม.ปลาย เมื่อข้อสอบส่วนใหญ่เป็นข้อสอบปรนัย การวาดรูปจริงโดยใช้เสกลจริงจะสามารถช่วยตัดตัวเลือกได้ เนื้อหาสำคัญที่การวาดรูปช่วยเราได้มากคือ

- ภาคตัดกรวย (เส้นตรง, วงกลม, พาราโบลา)
- ตรีโกณมิติ
- เวกเตอร์
- ระยะทางและพื้นที่
- ฯลฯ

ขอให้นักเรียนศึกษาจากตัวอย่างที่เตรียมไว้ให้ต่อไปนี้จะได้เห็นประโยชน์ของการวาดรูป

ข้อแนะนำ เนื่องจากมีข้อจำกัดในการพิมพ์หนังสือรูปภาพจึงอาจจะเล็กไป ขอให้นักเรียนลองวาดรูปเองด้วยเพื่อเป็นการฝึกฝนการวาดรูปตามขั้นตอนที่ถูกต้อง และอย่าลืมว่าต้องใช้เสกลจริง ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญที่สุดด้วย

ตัวอย่าง 7.1 กำหนดให้วงกลมสัมผัสกับไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $y^2 = 2x$ และมีจุดศูนย์กลางที่จุดโฟกัสของพาราโบลา

จุดที่วงกลมตัดกับพาราโบลาคือจุดใด

1. $(0, 0)$ 2. $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ และ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

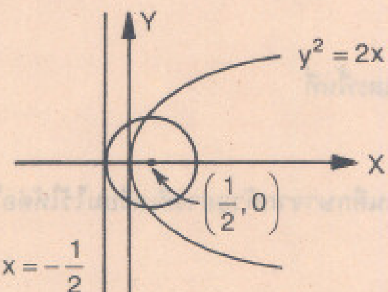
3. $(1, -\sqrt{2})$ และ $(1, \sqrt{2})$ 4. $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ และ $\left(\frac{3}{2}, -\sqrt{3}\right)$

ตอบ 2.

แนวคิด $y^2 = 2x \quad = 4\left(\frac{1}{2}\right)x$

เพราะฉะนั้นแกนสมมาตรของพาราโบลาทับแกน X, จุดยอด (0, 0), โฟกัส $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

สมการไดเรกตริกซ์ $x = -\frac{1}{2}$



จุดศูนย์กลางวงกลมคือ $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ และ รัศมี = 1

สมการวงกลมคือ $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 0)^2 = 1^2$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - x = \frac{3}{4}$$

แทนค่า $y^2 = 2x$; $x^2 + 2x - x = \frac{3}{4}$

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \qquad \underline{\hspace{4cm}} (*)$$

$$4x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$(2x+3)(2x-1) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$ เท่านั้น

สรุปจุดตัดของวงกลมและพาราโบลาคือ $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, -1\right)$

คำแนะนำ การทำข้อสอบนักเรียนจะต้องฝึกสังเกตตัวเลือกด้วยว่าจะสามารถนำมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้แล้วหรือยัง เช่น จากสมการ (*) จะเห็นว่า

$x = 0$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$x = 1$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$x = \frac{3}{2}$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก เป็นวิธีที่ง่ายกว่าสำหรับโจทย์ข้อนี้ เพราะว่าเมื่อเราวาดรูปได้ก็จะเห็นอย่างชัดเจนว่า จุด (x, y) ที่วงกลมกับพาราโบลาตัดกันนั้นพิกัด $x \neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จากรูปจะเห็นว่าวงกลมมีรัศมี $r = 1$ และจุดศูนย์กลาง $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

ดังนั้นจะตัดแกน X ที่จุด $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 3. อาจใช้เหตุผลนี้ได้

โดยการวัดระยะทางจากจุด $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ กับจุด $\left(1, \sqrt{2}\right)$ พบว่า

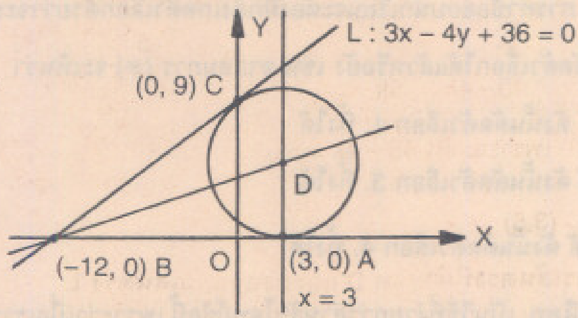
มีค่ามากกว่า 1 ซึ่งมากกว่ารัศมีวงกลม   เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 7.2 วงกลม O มีจุดศูนย์กลางอยู่ในควอดรันท์ที่ 1 สัมผัสแกน X ที่จุด (3, 0) และสัมผัสเส้นตรง $3x - 4y + 36 = 0$ ที่จุด M จุด M ห่างจากจุดกำเนิดเท่ากับเท่าใด

1. 7 หน่วย 2. 8 หน่วย 3. 9 หน่วย 4. 10 หน่วย

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้วาดรูปตัดตัวเลือกเป็นวิธีที่ดีที่สุด



1. เขียนจุด (3, 0)
2. ลากเส้นตรง L : $3x - 4y + 36 = 0$ ตัดแกน X ที่จุด (−12, 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0, 9)
3. เพราะว่าวงกลมสัมผัสแกน X ที่จุด (3, 0)

   เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางต้องอยู่บนเส้นตรง $x = 3$
4. เพราะว่า AB และ BC เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

   เพราะฉะนั้นเส้นแบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ จะต้องผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

5. วัดมุม $A\hat{B}C$ ได้ 36°

6. แบ่งครึ่งมุม $A\hat{B}C$ และลากเส้นตัดกับเส้นตรง $x = 3$ ที่จุด D

7. การวงเวียนรัศมีเท่ากับ DA, จุดศูนย์กลางที่ D เขียนวงกลม จะได้ว่าวงกลมสัมผัสเส้นตรง L ที่จุด C

สรุปวงกลมสัมผัสเส้นตรงที่จุด (0, 9) ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

วิธีจริง สมมติพิกัด D คือ (3, k)

D ห่างจากเส้นตรง $L = \dfrac{|3(3) - 4(k) + 36|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \dfrac{|45 - 4k|}{5}$

D ห่างจากแกน X เท่ากับ k เพราะฉะนั้น $\dfrac{|45 - 4k|}{5} = k$

$$|45 - 4k| = 5k$$

เพราะว่า $k > 0$ เพราะฉะนั้น $45 - 4k = 5k$; $k = 5$

สรุปพิกัดจุด D (3,5)

การหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด D และตั้งฉากกับเส้นตรง L

ความชันเส้นตรง L เท่ากับ $\dfrac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด D และตั้งฉากกับเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ $-\dfrac{4}{3}$ ทำให้ได้สมการเป็น $y - 5 = \left(-\dfrac{4}{3}\right)(x - 3)$

$$3y - 15 = -4x + 12$$

$$4x + 3y - 27 = 0$$

เส้นตรง L : $3x - 4y + 36 = 0$ ตัดกับเส้นตรง $4x + 3y - 27 = 0$ ที่จุด (0, 9)

สรุป M(0, 9) ห่างจากจุดกำเนิดเท่ากับ 9

ข้อแนะนำ ในการหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกันอย่างรวดเร็ว

เส้นตรง $ax + by + c_1 = 0$ จะตั้งฉากกับ $bx - ay + c_2 = 0$

จากโจทย์ $L : 3x - 4y + 36 = 0$

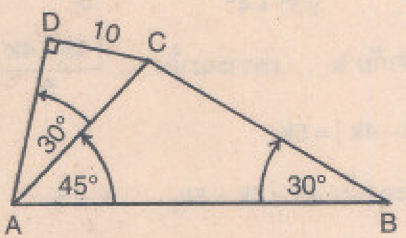
เส้นที่ตั้งฉากกับ L จะมีสมการเป็น $4x + 3y + c_2 = 0$

เพราะว่าผ่านจุด D(3, 5) เพราะฉะนั้น $4(3) + 3(5) + C_2 = 0$

$$C_2 = -27$$

ได้สมการเส้นตรงเป็น $4x + 3y - 27 = 0$

ตัวอย่าง 7.3 จากรูปที่กำหนดให้



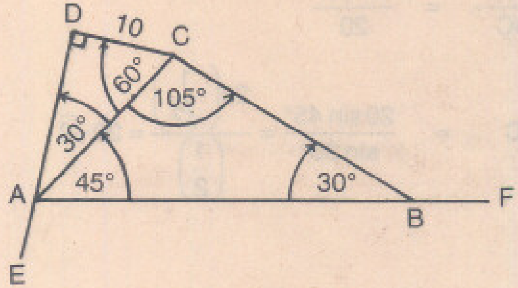
ความยาวของด้าน BC เท่ากับเท่าใด

1. $10\sqrt{2}$ 2. $10\sqrt{3}$ 3. $20\sqrt{2}$ 4. $20\sqrt{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด การวาดรูปให้เหมือนกับโจทย์ทำได้ดังนี้

1. ลาก DC ยาว 10 หน่วย (ใช้ 0.1 นิ้ว ต่อ 1 หน่วย)
2. ลาก ED ตั้งฉากกับ CD
3. ลากเส้นทำมุม 60° กับ DC ที่จุด C และตัดแนว DE ที่ A
4. ลากเส้น AF ที่ทำให้ $F\hat{A}C = 45°$ จากโจทย์ $A\hat{C}B = 180° - 45° - 30° = 105°$
5. ลากเส้นทำมุม 105° กับเส้น AC ที่จุด C ลากมาตัดกับแนว AF ที่จุด B



ขณะนี้เราได้รูปที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้ว วัดความยาว BC ได้ 28 หน่วย

เปรียบเทียบค่าในตัวเลือก

1. $10\sqrt{2} = 14.14$ 2. $10\sqrt{3} = 17.32$

3. $20\sqrt{2} = 28.28$ 4. $20\sqrt{3} = 34.64$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

วิธีจริง จากโจทย์ ในสามเหลี่ยม ADC $\sin D\hat{A}C = \frac{DC}{AC}$

$$\sin 30^\circ = \frac{10}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{10}{AC}$$

$$AC = 20$$

ข้อสังเกต ถึงจุดนี้เรามีเหตุผลตัดตัวเลือกได้อีกแล้ว

เพราะว่า BC อยู่ตรงข้ามมุม 45° และ AC อยู่ตรงข้ามมุม 30°

เพราะฉะนั้น BC > AC แน่นอน นั่นคือ BC > 20

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งก่อน ต่อไปทำตามวิธีจริงอีก จากกฎของไซน์

$$\frac{\sin C\hat{A}B}{BC} = \frac{\sin A\hat{B}C}{AC}$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{BC} = \frac{\sin 30^\circ}{20}$$

$$BC = \frac{20\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{20\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 20\sqrt{2}$$

ตัวอย่าง 7.4 เส้นตรง L มีสมการเป็น $y = x$

วงกลม C_1 มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + 6x = 0$

พาราโบลาที่มีแกน X เป็นแกนสมมาตรและผ่านจุดตัดของเส้นตรง L กับวงกลม C_1

จะผ่านจุดในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. $(3, 3)$ 2. $\left(1, \sqrt{3}\right)$ 3. $(-2, 6)$ 4. $\left(-4, \sqrt{12}\right)$

ตอบ 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้ต้องวาดรูปของเส้นตรง L และวงกลม C_1

เพราะว่า $x^2 + y^2 + 6x = 0$

$(x^2 + 6x + 9) + y^2 = 9$

$(x+3)^2 + y^2 = 3^2$

เพราะฉะนั้น C_1 มีจุดศูนย์กลาง $(-3, 0)$ และรัศมี 3

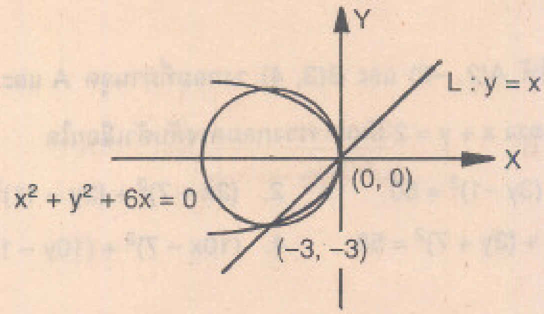
การหาจุดตัดของวงกลมและเส้นตรง $x^2 + y^2 + 6x = 0$

แทนค่า $y = x$; $x^2 + x^2 + 6x = 0$

$2x^2 + 6x = 0$

$x(x + 3) = 0$

$x = 0, -3$



เพราะว่าแกน X เป็นแกนสมมาตร และจุดตัดคือ (0, 0) และ (–3, –3)

เพราะฉะนั้น (0, 0) เป็นจุดยอดของพาราโบลาและเป็นพาราโบลาเปิดทางซ้าย

จากลักษณะของพาลาโบลาที่ได้

ถ้า (x, y) อยู่บนพาราโบลา แล้ว $x \le 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

จากลักษณะของพาราโบลาตามรูปที่ได้จะเห็นว่า เมื่อ (x, y) เป็นจุดบนพาราโบลา

ถ้า $-3 \le x \le 0$ แล้ว $-3 \le y \le 3$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่าพาราโบลามีจุดยอด (0, 0) และแกน X เป็นแกนสมมาตร

เพราะฉะนั้นมีสมการเป็น $y^2 = 4cx$

เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด (–3, –3) เพราะฉะนั้น $(-3)^2 = 4c(-3)$

$$9 = 4c(-3)$$

$$4c = -3$$

สรุปสมการพาราโบลาคือ $y^2 = -3x$ เมื่อ $x = -4$ จะได้ $y^2 = -3(-4) = 12$

$$y = \pm\sqrt{12}$$

สรุป $\left(-4, \sqrt{12}\right)$ เป็นจุดบนพาราโบลา

ตัวอย่าง 7.5

กำหนดให้ A(2, –2) และ B(3, 4) วงกลมที่ผ่านจุด A และ B มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ มีสมการวงกลมตรงกับตัวเลือกใด

1. $(3x - 5)^2 + (3y - 1)^2 = 50$
2. $(2x + 7)^2 + (2y - 11)^2 = 346$
3. $(2x - 11)^2 + (2y + 7)^2 = 58$
4. $(10x - 7)^2 + (10y - 13)^2 = 1258$

ตอบ 4.

แนวคิด จากเหตุผลว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB

1. หาจุดกึ่งกลาง AB ได้ $C = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{4-2}{2}\right)$; $C = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$
2. หาสมการเส้นตรงที่ผ่าน C และตั้งฉากกับ AB

ความชัน $AB = \frac{4-(-2)}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$ ดังนั้นความชัน L_1 เท่ากับ $-\frac{1}{6}$

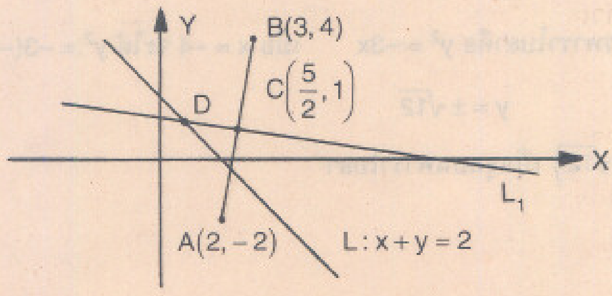
สมการ L_1 คือ $(y-1) = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

$$6y - 6 = -x + \frac{5}{2}$$

$$12y - 12 = -2x + 5$$

$L_1 : 2x + 12y = 17$ ———————— (1)

$L \;: x + y \quad = 2$ ———————— (2)



จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการอยู่บน L_1 ตัดกับ L แทนค่า $y = 2 - x$ ใน (1)

$$2x + 12(2-x) = 17$$

$$2x + 24 - 12x = 17$$

$$-10x = -7$$

$$x = \frac{7}{10}$$

$$y = 2 - \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$$

จุดศูนย์กลางคือ $D\left(\frac{7}{10}, \frac{13}{10}\right)$

รัศมีวงกลม = ความยาว BD $= \sqrt{\left(3 - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(4 - \frac{13}{10}\right)^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{23}{10}\right)^2 + \left(\frac{27}{10}\right)^2} \quad = \sqrt{\frac{529 + 729}{100}} \quad = \sqrt{\frac{1258}{100}}$$

สรุปสมการวงกลมคือ

$$\left(x - \frac{7}{10}\right)^2 + \left(y - \frac{13}{10}\right)^2 = \frac{1258}{100}$$

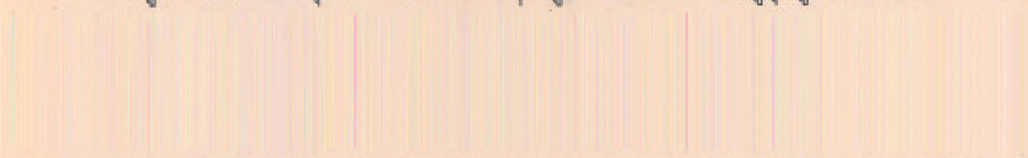
$$(10x - 7)^2 + (10y - 13)^2 = 1258$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 วาดรูปตามโจทย์กำหนด

1. ลากเส้นตรง $L : x + y = 2$
2. เขียนจุด A, B
3. แบ่งครึ่ง AB ที่ C
4. ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุด C

จากรูปจะเห็นได้ว่า จุดตัดของ L และ L_1 อยู่ในควอดรันท์ที่ 1 ดูจุดศูนย์กลางของ



แต่ละตัวเลือก

1. $\left(\frac{11}{2},-\frac{7}{2}\right)$ 2. $\left(-\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$

3. $\left(\frac{7}{10},\frac{13}{10}\right)$ 4. $\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้ วัดพิกัดของจุด D โดยวัดเฉพาะค่า y ก็พอ

จากรูปค่า y ที่พิกัดของ D มากกว่า 1 ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

ให้เหตุผลว่าระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยัง A หรือ B ต้องเท่ากับรัศมี

ตัวเลือก 1 จุดศูนย์กลาง $O\left(\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$, รัศมี $=\sqrt{50}$

$$OA^2=\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(-2-\frac{1}{3}\right)^2 \qquad =\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{7}{3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{49}{9} \qquad =\frac{50}{9} \qquad \neq 50$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

ตัวเลือก 2 จุดศูนย์กลาง $O\left(-\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$, รัศมี $=\sqrt{346}$

$$OA^2=\left(-\frac{7}{2}-2\right)^2+\left(\frac{11}{2}+2\right)^2 \qquad =\left(-\frac{11}{2}\right)^2+\left(\frac{15}{2}\right)^2$$

$$=\frac{121}{4}+\frac{225}{4} \qquad =\frac{346}{4} \qquad \neq 346$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

ตัวเลือก 3 จุดศูนย์กลาง $O\left(\frac{11}{2},-\frac{7}{2}\right)$, รัศมี $=\sqrt{58}$

$$OA^2 = \left(\frac{11}{2}-2\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}+2\right)^2 \qquad = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \frac{49}{4}+\frac{9}{4} \qquad = \frac{58}{4} \qquad \neq 58$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก เหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวเลือกเป็นคำตอบได้เลย

หมายเหตุ จากการใช้เหตุผลในแบบที่ 2. นี้นักเรียนยังไม่ต้องวาดรูปหรือนำเส้นตรง $x + y = 2$ มาใช้เลย

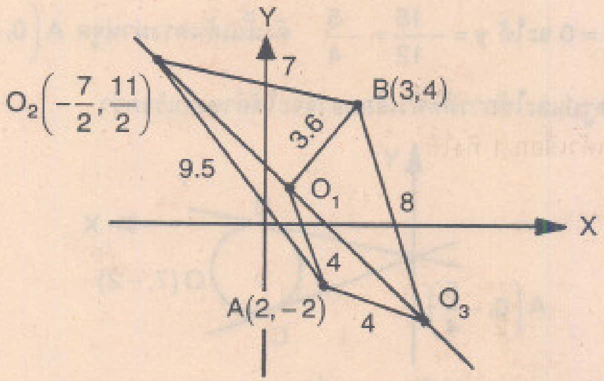
การตัดตัวเลือก แบบที่ 3

เขียนจุด A, B และจุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละตัวเลือก

ถ้า $OA \neq OB$ ก็ตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $O_1\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ตัวเลือก 2. $O_2\left(-\frac{7}{2}, \frac{11}{2}\right)$

ตัวเลือก 3. $O_3\left(\frac{11}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ ตัวเลือก 4. $O_4\left(\frac{7}{10}, \frac{13}{10}\right)$



จากการวัดระยะทางโดยประมาณเห็นได้ชัดว่า

$O_1A \neq O_1B$ $O_2A \neq O_2B$ $O_3A \neq O_3B$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 7.6 คณิตศาสตร์ กข. 2535

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้เส้นตรง $ax + 12y + 15 = 0$

สัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 14x + 4y + 49 = 0$

แล้วค่าของ a จะอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(0, 4)$ 2. $(4, 8]$ 3. $(8, 12]$ 4. $(12, 16]$

ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการเพื่อหาจุดศูนย์กลางและรัศมีวงกลม

$$x^2 + y^2 - 14x + 4y + 49 = 0$$

$$(x^2 - 14x + 49) + (y^2 + 4y + 4) = 4$$

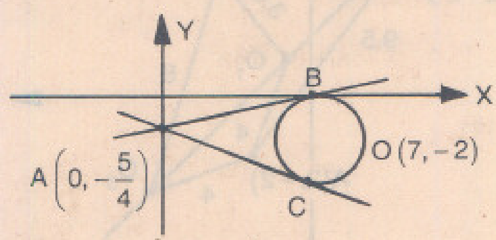
$$(x - 7)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

วงกลมมีจุดศูนย์กลาง (7, −2) และรัศมี 2.

เพราะว่าสมการเส้นตรงคือ $ax + 12y + 15 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ จะได้ $y = -\frac{15}{12} = -\frac{5}{4}$ ดังนั้นเส้นตรงผ่านจุด $A\left(0, -\frac{5}{4}\right)$

ถึงขั้นนี้การวาดรูปและใช้การตัดตัวเลือกอาจจะได้คำตอบเร็วกว่า



จากรูปลากเส้นจากจุด A มาสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C

เพราะว่า $y = -\frac{a}{12}x - \frac{15}{12}$ และ $a > 0$

เพราะฉะนั้นความชันเส้นตรงต้องเป็นลบและความชัน $AC = -\frac{a}{12}$

ดังนั้นเส้นตรง ax + 12y + 15 = 0 ต้องอยู่บนแนว AC

วัดพิกัด C' โดยประมาณจะได้ (6.3, –3.9)

ความชัน $AC = \dfrac{-3.9-\left(-\frac{5}{4}\right)}{6.3-0} = \dfrac{-3.9+1.25}{6.3}$

$$-\frac{a}{12} = -\frac{2.65}{6.3}$$

$$a = \frac{(2.65)(12)}{6.3} = 5.05$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง AC เป็นเส้นสัมผัสวงกลม เพราะฉะนั้น CO = 2

ระยะทางจากจุด O(7, –2) มายังเส้นตรง ax + 12y + 15 = 0

มีค่าเท่ากับ $\dfrac{|a(7)+12(-2)+15|}{\sqrt{a^2+12^2}} = \dfrac{|7a-9|}{\sqrt{a^2+144}}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{|7a-9|}{\sqrt{a^2+144}} = 2$

$$|7a-9| = 2\sqrt{a^2+144}$$

$$(7a-9)^2 = 4(a^2+144)$$

$$49a^2 - 126a + 81 = 4a^2 + 576$$

$$45a^2 - 126a - 495 = 0$$

$$5a^2 - 14a - 55 = 0$$

$$(5a + 11)(a - 5) = 0$$

$$a = -\frac{11}{5}, 5$$

เพราะว่า a > 0 เพราะฉะนั้น a = 5

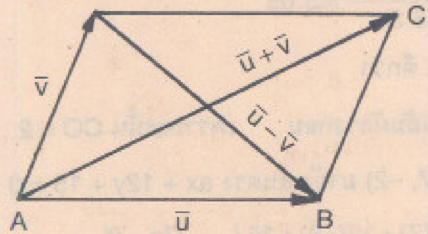
ตัวอย่าง 7.7 คณิตศาสตร์ กข. 2535

ถ้า $|\bar{u}| = 4, |\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 6$ แล้ว $|\bar{u}-\bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

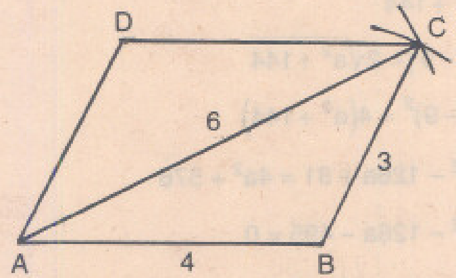
1. 1 2. $\sqrt{14}$ 3. $\sqrt{11}$ 4. $\frac{11}{2}$

ตอบ 2.

แนวคิด จากเหตุผลที่สำคัญเกี่ยวกับเวกเตอร์ คือ



ดังนั้นเราวาดรูปให้ 3, 4, 5 เป็นความยาวของด้านสามเหลี่ยม ABC โดยให้ AB = 4, BC = 3 และ AC = 6



การวาดรูปทำตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB = 4 เซนติเมตร
2. การวงเวียนรัศมี 6 จุดศูนย์กลางที่ A เขียนส่วนโค้ง
3. การวงเวียนรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ B เขียนส่วนโค้งตัดกันที่จุด C

$\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ จะได้ $|\bar{u}| = 4$

$\overrightarrow{BC} = \bar{v}$ จะได้ $|\bar{v}| = 3$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \bar{u} + \bar{v}$ และ $|\bar{u} + \bar{v}| = |\overrightarrow{AC}| = 6$

ขณะนี้เราได้รูปตามข้อกำหนดของโจทย์แล้ว ลาก AD ให้ขนานกับ BC ลาก CD ให้ขนานกับ AB วัดความยาว BD ได้ 3.8 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $\bar{u} - \bar{v} = \overrightarrow{DB}$

$$|\bar{u} - \bar{v}| = |\overrightarrow{DB}| = 3.8$$

เปรียบเทียบค่า $|\bar{u} - \bar{v}| = 3.8$ กับตัวเลือกทั้ง 4 ตัว

ข้อแนะนำ แทนที่เราจะประมาณค่า $\sqrt{14}$ และ $\sqrt{11}$ เรามีวิธีที่ง่ายกว่านั้นคือใช้การยกกำลังสองแทน $|\bar{u} - \bar{v}|^2 = (3.7)^2 = 13.69$

ตัวเลือก 1. $(1)^2 = 1$ **ตัวเลือก 2.** $\left(\sqrt{14}\right)^2 = 14$

ตัวเลือก 3. $\left(\sqrt{11}\right)^2 = 11$ **ตัวเลือก 4.** $\left(\frac{11}{2}\right)^2 = 30.25$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง

$$|\bar{u} + \bar{v}| = 6$$
$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = 36$$
$$(\bar{u} + \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = 36$$
$$|\bar{u}|^2 + 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 36$$
$$16 + 2\bar{u} \cdot \bar{v} + 9 = 36$$
$$2\bar{u} \cdot \bar{v} = 11$$
$$-2\bar{u} \cdot \bar{v} = -11$$
$$16 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + 9 = 16 - 11 + 9$$
$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u} \cdot \bar{v} + |\bar{v}|^2 = 14$$
$$(\bar{u} - \bar{v})(\bar{u} - \bar{v}) = 14$$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = 14$$

$$|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{14}$$

ตัวอย่าง 7.7 คณิตศาสตร์ กข. 2533

ให้ O เป็นจุดกำเนิด A และ B เป็นจุดในระนาบ จุด B อยู่ทางทิศใต้ของ A และห่างจาก A 2 หน่วย หมุนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OB}$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาไป 90° และให้จุดปลายเวกเตอร์หลังจากหมุน $\overrightarrow{OB}$ ไปแล้วอยู่ที่จุด C ถ้าจุดพิกัดของ c คือ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ดังนั้นค่า $|OA|^2$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 3. 3 4. 7

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

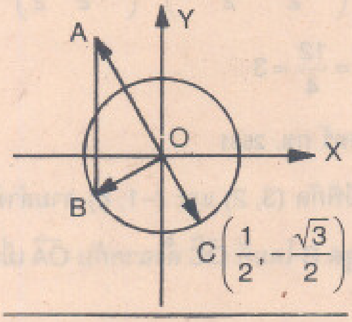
เพราะฉะนั้นจุด B และ C ต้องอยู่บนวงกลมรัศมี 1 จุดศูนย์กลาง (0, 0)

การวาดรูปทำตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนวงกลมรัศมี หน่วยจุดศูนย์กลางที่ (0, 0)
2. เขียนจุด C $\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
3. ลากเส้น OB ตั้งฉาก OC และ B ได้จาก C โดยการหมุนทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น B ต้องอยู่ในควอดรันท์ที่ 3.

   (หมายเหตุ เราไม่ต้องคำนวนพิกัดของจุด B ก็ได้)
4. ลากเส้น BA ขนานกับแกน Y โดยให้ AB = 2 หน่วย และ A อยู่สูงกว่าจุด B
5. วัดความยาว OA ได้ 1.7

ดังนั้น $|OA|^2 = (1.7)^2 = 2.89$ สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า



วิธีจริง สมมติ B(x,y)

เพราะว่า $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ และ $\overrightarrow{OB} = x\bar{i} + y\bar{j}$ และ $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$

$$\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0$$

$$x = \sqrt{3}y$$

เพราะว่า $|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$ เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 1$

$$\left(\sqrt{3}y\right)^2 + y^2 = 1$$

$$4y^2 = 1$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

เพราะว่า B ต้องอยู่ในควอดรันท์ที่ 3

เพราะฉะนั้น $y = -\frac{1}{2}$ และ $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

สรุป $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

เพราะว่า A อยู่สูงกว่า B 2 หน่วย

เพราะฉะนั้นพิกัด A คือ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+2\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

สรุป $|\overrightarrow{OA}|^2 = \frac{3}{4} + \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3$

ตัวอย่าง 7.8 คณิตศาสตร์ กข. 2531

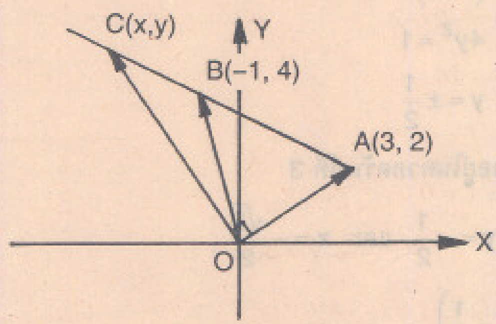
ให้จุด A และ B มีพิกัด (3, 2) และ (–1, 4) ตามลำดับ ถ้าจุด C อยู่บนเส้นตรงที่ลากผ่านจุด A และจุด B โดยที่ $\overrightarrow{OC}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OA}$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิดแล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{35}{2}$
2. $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{49}{2}$
3. $|\overrightarrow{AB}| > |\overrightarrow{AC}|$
4. $|\overrightarrow{OA}| > |\overrightarrow{OC}|$

ตอบ 2.

แนวคิด เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนจุด A (3, 2), B (–1, 4)
2. ลากเส้นตรง L ผ่านจุด AB
3. ให้ C อยู่บนเส้นตรง L และ $OC \perp OA$



จากรูปเห็นได้ชัดเจนว่า $|\overrightarrow{OA}| \ngtr |\overrightarrow{OC}|$ และ $|\overrightarrow{AB}| \ngtr |\overrightarrow{AC}|$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อน

$\overrightarrow{OB} = -\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

ต่อไปเราวัดพิกัดของ C ได้เป็น (-3.5, 5.2) จะได้

$\overrightarrow{OC} = -3.5\bar{i} + 5.2\bar{j}$

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = (-3.5)(-1) + (5.2)(4) \qquad = 3.5 + 10.4$

$= 13.9$ ห่างจาก $\frac{35}{2}$ มากไป

$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = (-3.5)(-4) + (5.2)(2) \qquad = 14 + 10.4$

$= 24.4$ ใกล้เคียง $\frac{49}{2}$ มากกว่า

สรุปตัดตัวเลือก 1. ทิ้งดีกว่า

วิธีจริง พิกัด C หาได้จาก (x, y) ที่ทำให้ $\left(x\bar{i} + y\bar{j}\right) \cdot \overrightarrow{OA} = 0$

$$\left(x\bar{i} + y\bar{j}\right) \cdot \left(3\bar{i} + 2\bar{j}\right) = 0$$

$$3x + 2y = 0 \qquad \text{———— (1)}$$

และ $\dfrac{y-4}{x+1} = \dfrac{2-4}{3+1}$

$$4(y-4) = -2(x+1)$$

$$4y - 16 = -2x - 2$$

$$2x + 4y - 14 = 0$$

$$x + 2y - 7 = 0 \qquad \text{———— (2)}$$

(1) − (2) ; $2x + 7 = 0$

$x = -3.5$ และ $y = 5.25$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = (-3.5)(-1) + (5.25)(4)$

$= 3.5 + 21$

$= 24.5$

ตัวอย่าง 7.9 คณิตศาสตร์ กข. 2536

ถ้ากำหนดสมการของวงรีเป็น $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$ แล้ว

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. วงรีสัมผัสทั้งแกน X และแกน Y

ข. ระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2\sqrt{5}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก ข. ถูก 2. ก. ถูก ข. ผิด 3. ก. ผิด ข. ถูก 4. ก. ผิด ข. ผิด

ตอบ 3.

แนวคิด จากสมการ $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y - 23 = 0$

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 2y + 1) = 23 + 4 + 9$$

$$4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 36$$

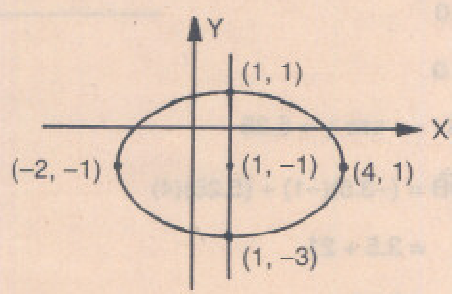
$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} = 1$$

เป็นสมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (1, −1)

แกนเอกขนานแกน X $a = 3$

$b = 2$

และ $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$



จากรูปวงรีไม่สัมผัส แกน X และแกน Y

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อน

เพราะว่า $c = \sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นระยะห่างระหว่างโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $2\sqrt{5}$

เลือกตัวเลือก 3. ได้เลย

ตัวอย่าง 7.10 คณิตศาสตร์ ก. 2531

ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x + 3y - 4 = 0$, N เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $\left(2, \frac{13}{2}\right)$ และตั้งฉากกับ L ถ้า P เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับ N แล้ว โพรเจกชันของจุด P บนแกน Y คือจุดใด

1. $(-1, 0)$
2. $(0, 2)$
3. $\left(-\frac{49}{5}, 0\right)$
4. $\left(0, \frac{121}{5}\right)$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าจุดบนแกน Y มีพิกัดเป็น $(0, k)$ เสมอ

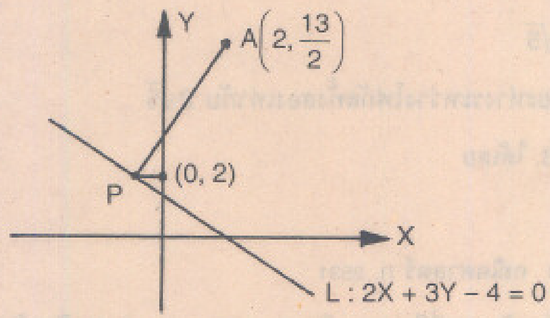
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้ก่อน

ต่อไปวาดรูปและใช้การวัดพิกัดตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนเส้นตรง $L : 2x + 3y - 4 = 0$
2. เขียนจุด $A\left(2, \frac{13}{2}\right)$
3. ลาก AP ตั้งฉากกับ L

4. ลากเส้นจากจุด P มาตั้งฉากกับแกน Y

วัดพิกัดที่ได้เป็น (0, 2)



สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง ความชันเส้นตรง L เท่ากับ $-\frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นความชันเส้นตรง N เท่ากับ $\frac{3}{2}$

สมการเส้นตรง N คือ $y-\frac{13}{2}=\left(\frac{3}{2}\right)(x-2)$

$2y - 13 = 3x - 6$

$3x - 2y = -7$ ———————— (1)

สมการ L ; $2x + 3y - 4 = 0$ ———————— (2)

คำตอบของสมการ (1) และ (2) คือ (−1, 2)

สรุป P (−1, 2)

เพราะฉะนั้นโพรเจกชันของ P บนแกน Y คือ (0, 2)

8. ฟังก์ชัน f(x) เท่ากับเท่าใด

คำถามของข้อสอบที่ชอบถามว่า $f(x)$, $f^{-1}(x)$, $(f\circ g)(x)$,.......มีสูตรตรงกับตัวเลือกใด ในความเป็นจริงแล้วก็คือข้อสอบที่เข้ากับประเภทโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร x ดังนั้นการแทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกทิ้ง

ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้ $f(x) = 1+\frac{1}{x}$

$g(x) = f(\frac{1}{x})$

แล้ว $(f\circ g)(x)$ ตรงกับตัวเลือกใด

1. $\frac{2}{1+x}$
2. $\frac{1}{2+x}$
3. $\frac{1+x}{2+x}$
4. $\frac{2+x}{1+x}$

เลือกค่า x ที่คิดเลขง่ายๆ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น x = 1

$(f\circ g)(1) = f(g(1)) = f(f(\frac{1}{1})) = f(f(1)) = f(1+\frac{1}{1})$

$= f(2) = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

แทนค่า x = 1 ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+1} = 1 \neq \frac{3}{2}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \neq \frac{3}{2}$

ตัวเลือก 3. $\frac{1+x}{2+x} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

ตัวเลือก 4. $\frac{2+x}{1+x} = \frac{2+1}{1+1} = \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้นสูตรในตัวเลือก 1., 2. และ 3. ต้องไม่ใช่ (f∘g) (x) แน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $(f\circ g)(x) = f(g(x))$

$$= f(f(\frac{1}{x})) = f(1+x)$$

$$= 1+\frac{1}{(1+x)} \quad = \frac{2+x}{1+x}$$

การตัดตัวเลือกเราคิดเฉพาะ x = 1 ซึ่งเป็นการคิดเลขที่ง่ายกว่า อย่างไรก็ตามเพื่อเป็นประโยชน์ต่อตัวนักเรียนเองก็ควรจะแสดงวิธีหาสูตรที่แท้จริงได้ด้วย

ตัวอย่าง 8.1 คณิตศาสตร์ กข. 2534

กำหนดฟังก์ชัน f และ g จากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R โดย $f(x) = 1+|x|$

$g(x) = \frac{1}{f(x)}$ $(g\circ f)(x)$ มีค่าเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. $1+|x|$
2. $2+|x|$
3. $\frac{1}{1+|x|}$
4. $\frac{1}{2+|x|}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือกโดยวิธีแทนค่าจะได้คำตอบเร็วที่สุด เช่นแทนค่า x = 1

$(g\circ f)(1) = g(f(1)) = g(1+|1|) = g(2)$

$$= \frac{1}{f(2)} \quad = \frac{1}{1+|2|} \quad = \frac{1}{3}$$

ตัวเลือก 1. $1+|1| = 2 \neq \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 2. $2+|x|=2+|1|=3\neq\frac{1}{3}$

ตัวเลือก 3. $\frac{1}{1+|x|}=\frac{1}{1+|1|}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$

ตัวเลือก 4. $\frac{1}{2+|x|}=\frac{1}{2+|1|}=\frac{1}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $(g\circ f)(x)=g(f(x)) = \frac{1}{f(f(x))} = \frac{1}{f(1+|x|)}$

$$=\frac{1}{1+(1+|x|)} = \frac{1}{2+|x|}$$

ตัวอย่าง 8.2 คณิตศาสตร์ กข. 2534

ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ. จุดใดๆ เป็น $x - 1$ และเส้นโค้งนี้มีความชันเป็น 1. ณ. จุด $(-1, 0)$ แล้วสมการของเส้นโค้งนี้คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}$
2. $y=\frac{x^2}{2}-x+\frac{3}{2}$
3. $y=\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{6}$
4. $y=x^3-\frac{x^2}{2}-\frac{3x}{2}-\frac{13}{6}$

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบและตัวเลือกแบบนี้สามารถตัดตัวเลือกได้มากมายเช่น

1. หาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือก

   1. $y'=2x-1,\ y''=2$
   2. $y'=2x-1,\ y''=2$
   3. $y'=\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2},\ y''=x-1$
   4. $y'=3x^2-x-\frac{3}{2},\ y''=6x-1$

เพราะว่าโจทย์กำหนดอัตราเปลี่ยนแปลงของความชัน $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = x-1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

2. ใช้เหตุผลของจุดผ่านคือ (–1, 0) แสดงว่าเมื่อ $x = -1$ จะได้ $y = 0$

ตัวเลือก 1. $\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \neq 0$

ตัวเลือก 2. $\frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \neq 0$

ตัวเลือก 3. $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

ตัวเลือก 4. $x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{13}{6} = \frac{-13}{6} \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

3. ใช้เหตุผล $\frac{dy}{dx} = 1$ เมื่อ $x = -1$ นั้นคือ $y'(-1) = 1$

ตัวเลือก 1. $y' = 2x - 1$, $y'(-1) = -3 \neq 1$

ตัวเลือก 2. $y' = 2x - 1$, $y'(-1) = -3 \neq 1$

ตัวเลือก 3. $y' = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$, $y'(-1) = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$

ตัวเลือก 4. $y' = 3x^2 - x - \frac{3}{2}$, $y'(-1) = 3 + 1 - \frac{3}{2} \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

4. ใช้เหตุผลเกี่ยวกับกำลังของ x เพราะว่าโจทย์กำหนด $\frac{d^2y}{dx^2} = x - 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = \int (x-1)dx$ ต้องมีพจน์ของ x กำลัง 2

และ $\int (\frac{dy}{dx})dx$ ต้องมีพจน์ของ x กำลัง 3 ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

หมายเหตุ ในโจทย์ข้อนี้นักเรียนคงจะเห็นประโยชน์ของการใช้เหตุผลเล็กๆ น้อยๆ ที่สามารถนำมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้

วิธีจริง เพราะว่า $\frac{d^2y}{dx^2}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความชัน เพราะฉะนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x-1$$

$$\frac{dy}{dx} = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + K$$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx}(x=-1) = 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{(-1)^2}{2} - (-1) + K = 1$

$$\frac{1}{2} + 1 + K = 1$$

$$K = \frac{-1}{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$$

$$y = \int (\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2})dx \quad = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (–1, 0) เพราะฉะนั้น $0 = \frac{-1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C$

$C = \frac{1}{6}$ สรุป $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$

หมายเหตุ ขณะที่นักเรียนได้ $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$ และสังเกตที่ตัวเลือกทุกตัว ก็จะเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้แล้ว

ตัวอย่าง 8.3 คณิตศาสตร์ กข. 2529

ถ้า $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{x}{1-x}$ 2. $\dfrac{x}{1-|x|}$

3. $\dfrac{x}{1+|x|}$ 4. $\dfrac{x}{1+x}$

ตอบ 2.

แนวคิด คำถามและตัวเลือกแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกดีที่สุด

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $f(1) = \dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(\dfrac{1}{2}) = 1$ แทนค่า $x = \dfrac{1}{2}$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = 1$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{x}{1-|x|} = \dfrac{(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = 1$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{x}{1+|x|} = \dfrac{(\frac{1}{2})}{1+(\frac{1}{2})} \neq 1$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{(\frac{1}{2})}{1+\frac{1}{2}} \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -2$ จะได้ $f(-2) = \dfrac{-2}{1+|-2|} = \dfrac{-2}{3}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-\dfrac{2}{3}) = -2$

แทนค่า $x = -\dfrac{2}{3}$ ในตัวเลือก 1. และ 2. เท่านั้น

ตัวเลือก 1. $\dfrac{x}{1-x}=\dfrac{(-\frac{2}{3})}{1-(-\frac{2}{3})}=\dfrac{(-\frac{2}{3})}{(\frac{5}{3})}\neq -2$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{x}{1-|x|}=\dfrac{(-\frac{2}{3})}{1-(\frac{2}{3})}=\dfrac{(-\frac{2}{3})}{(\frac{1}{3})}=-2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$ ให้ $y=\dfrac{x}{1+|x|}$

$x=0$ จะได้ $y=0$ ดังนั้น $f^{-1}(0)=0$

$x<0$ จะได้ $y=\dfrac{x}{1-x}$ และ $y<0$

และ $y(1-x)=x$

$y-xy=x$

$y=x+xy \quad =x(1+y)$

$x=\dfrac{y}{1+y}=\dfrac{y}{1-(-y)}=\dfrac{y}{1-|y|},\ y<o$

$x>0$ จะได้ $y=\dfrac{x}{1+x}$ และ $y>0$

$y(1+x)=x$

$y+xy=x$

$y=x-xy \quad =x(1-y)$

$x=\dfrac{y}{1-y}=\dfrac{y}{1-|y|},\ y>0$

สรุป $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

ตัวอย่าง 8.4 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x},\ x \neq 0$

ถ้า $(f \circ g)(x) = x$ แล้ว $g(x)$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{x}{x-1}$
2. $\frac{x}{x+1}$
3. $\frac{1}{1-x}$
4. $\frac{1}{x-1}$

ตอบ 4.

แนวคิด นำสูตรในแต่ละตัวเลือกแทนค่าในโจทย์

ตัวเลือก 1. ตรวจสอบว่า $g(x) = \frac{x}{x-1}$ ได้หรือไม่

$$g(2) = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$f(g(2)) = f(2) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$(f \circ g)(2) = \frac{3}{2} \neq 2$$

สรุป $(f \circ g)\ (x) \neq x$

ตัวเลือก 2. ตรวจสอบว่า $g(x) = \frac{x}{x+1}$ ได้หรือไม่

$$g(1) = \frac{1}{2}$$

$$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(\frac{1}{2})$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}} \quad = 3 \quad \neq 1$$

ตัวเลือก 3. ตรวจสอบว่า $g(x) = \frac{1}{1-x}$ ได้หรือไม่

$$g(2) = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(-1)$$

$$= \frac{1-1}{1} = 0 \quad \neq -1$$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1. $(f \circ g)(x) = x$

$$f(g(x)) = x$$

$$\frac{g(x)+1}{g(x)} = x$$

$$1+\frac{1}{g(x)} = x$$

$$\frac{1}{g(x)} = x$$

$$\frac{1}{g(x)} = x-1$$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

ตัวอย่าง 8.5 กำหนดให้ $f'(x) = x^2 - x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ $f(0) = 1$ แล้ว $f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$
2. $\frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$
3. 1
4. $x^2 - x + 1$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือกในโจทย์ข้อนี้ทำได้หลายวิธี

1. หาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $f'(x) = x^2 - x$

ตัวเลือก 2. $f'(x) = x^2 - x$

ตัวเลือก 3. $f'(x) = 0$

ตัวเลือก 4. $f'(x) = 2x - 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ได้

2. ใช้เหตุผลว่า $f(0) = 1$

ตัวเลือก 1. $f(0) = 0$

ตัวเลือก 2., 3. และ 4. $f(0) = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

3. ใช้เหตุผลว่า $f'(x) = x^2 - x$ ดังนั้น $f(x)$ ต้องมีพจน์ของ x^3 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $f'(x) = x^2 - x$

$$f(x) = \int f'(x)dx \quad = \int (x^2 - x)dx \quad = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$$

เพราะว่า $f(0) = 1$ เพราะฉะนั้น $0 - 0 + C = 1$

สรุป $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$

ตัวอย่าง 8.6 คณิตศาสตร์ ก. 2531

อินเวอร์สของฟังก์ชัน $f(x) = e^{x-1}$ คือข้อใด

1. $f^{-1}(x) = 1 + \ln(x)$
2. $f^{-1}(x) = \ln(x + 1)$
3. $f^{-1}(x) = \frac{1}{e^{x-1}}$
4. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

ตอบ 1.

แนวคิด ใช้การแทนค่า x บางค่าดีกว่า เลือก $x = 1$, $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(1) = 1$

ตัวเลือก 1. $f^{-1}(1) = 1 + \ln(1) = 1 + 0 = 1$

ตัวเลือก 2. $f^{-1}(1) = \ln(1 + 1) = \ln 2 \neq 1$

ตัวเลือก 3. $f^{-1}(1) = \frac{1}{e^{1-1}} = 1$

ตัวเลือก 4. $f^{-1}(1) = \frac{1}{\ln(1)} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

สรุปตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เลือก $x = 2$, $f(2) = e^{2-1} = e$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(e) = 2$

ตัวเลือก 1. $f^{-1}(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2$

ตัวเลือก 3. $f^{-1}(e) = \frac{1}{e^{e-1}} \neq 2$

สรุปตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x) = e^{x-1}$

$y = e^{x-1}$

$\ln y = \ln e^{x-1} = (x-1)\ln e = x - 1$

$x = 1 + \ln y$

สรุป $f^{-1}(x) = 1 + \ln x$

ตัวอย่าง 8.7 คณิตศาสตร์ กข. 2531

กำหนดให้ $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ $f'(x^2) - f'(1)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3}$
2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3}$
3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3}$
4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$

ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$= 9x^2 - 12x + 4 + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 18x - 12 + 4(-\frac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 18x - 12 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3}$$

$$f'(x) = 18 - 12 - 2 = 4$$

การตัดตัวเลือก เมื่อเราได้สูตร $f'(x) = 18x - 12 - 2x^{-\frac{3}{2}}$

จะได้ $f'(1) = 4$ และ $f'(x^2) - f'(1) = f'(x^2) - 4$

แทนค่า $x = 2$ จะได้ $f'(2^2) - 4 = f'(4) - 4$

$$= 18(4) - 12 - 2(4^{-\frac{3}{2}}) - 4$$

$$= 72 - 12 - \frac{2}{8} - 4$$

$$= 55.75$$

แทนค่า $x = 2$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3} = 24 - 2 - \frac{4}{8} \neq 55.75$

ตัวเลือก 2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3} = 24 - 4 - \frac{2}{8} \neq 55.75$

ตัวเลือก 3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3} = 72 - 14 - \frac{4}{8} = 57.5 \neq 55.75$

ตัวเลือก 4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3} = 72 - 16 - \frac{2}{8} = 55.75$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $f'(x) = 18x - 12 - 2x^{-\frac{3}{2}}$

$$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3}$$

$$f'(x^2) - f'(1) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3} - 4$$

$$= 18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$$

การตัดตัวเลือกที่เร็วขึ้นไปอีกนักเรียนต้องฝึกสังเกตว่า

$f'(1)$ เป็นค่าคงตัว

$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3}$

$f'(x^2) - f'(1)$ ต้องมีพจน์ $18x^2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อน

$f'(x^2) - f'(1)$ ต้องมีพจน์ $\frac{-2}{x^3}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่าง 8.8 คณิตศาสตร์ กข. 2531

กำหนดให้ $f(x) = \frac{-1}{x}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง x + h มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-2x-h}{hx(x+h)}$
2. $\frac{1}{x(x+h)}$
3. $\frac{2x+h}{hx(x+h)}$
4. $\frac{1}{x^2}$

ตอบ 2.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกจะได้คำตอบเร็วกว่าวิธีจริง

การตัดตัวเลือก อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x และ x + h มีสูตรเป็น $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

แทนค่า x = 1 และ h = 1 จะได้

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(2)-f(1)}{1} = (-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{1}) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า $x = 1$ และ $h = 1$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{-2x-h}{hx(x+h)} = \dfrac{-2-1}{(1)(1)(2)} = -\dfrac{3}{2} \neq \dfrac{1}{2}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{1}{x(x+h)} = \dfrac{1}{(1)(2)} = \dfrac{1}{2}$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{2x+h}{hx(x+h)} = \dfrac{2+1}{(1)(1)(2)} = \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{1}{2}$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \neq \dfrac{1}{2}$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่าสูตร $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ต้องมีตัวแปร h เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{-1}{x+h}+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-x+x+h}{hx(x+h)}$$

$$= \frac{1}{x(x+h)}$$

9. ทวินามและไฮเพอร์จีออเมตริก

ข้อสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นมีหลายข้อที่มีเนื้อหาตรงกับความน่าจะเป็นแบบทวินามโดยมีหลักการที่สำคัญดังนี้

1. การกระทำหรือการทดลองแต่ละครั้งมีผล 2 แบบ

   เช่น การโยนเหรียญ ได้หัวหรือก้อย การสุ่มหยิบหลอดไฟมีดีหรือเสีย การหยิบสินค้าได้ดีหรือชำรุด

2. ผลการทดลองที่มี 2 แบบนั้นเราแยกเป็น

   การได้ผลสำเร็จ มีความน่าจะเป็นเท่ากับ p

   การได้ผลไม่สำเร็จ มีความน่าจะเป็นเท่ากับ 1 – p

   เช่น การโยนเหรียญ $P(\text{หัว}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{ก้อย}) = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{2}$

   การโยนลูกเต๋า - ผลสำเร็จคือได้แต้ม 1

   - ผลไม่สำเร็จคือไม่ได้แต้ม 1

   $P(\text{ผลสำเร็จ}) = \frac{1}{6}$ $\quad P(\text{ผลไม่สำเร็จ}) = \frac{5}{6}$

3. ทำการทดลองทั้งหมด n ครั้ง

   ให้ X = จำนวนผลสำเร็จของการทดลอง

   = 0, 1, 2, 3........n

จะได้ว่า $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

หมายเหตุ ตัวแปร X เรียกว่าตัวแปรสุ่มทวินาม

ตัวอย่าง 9.1 การโยนเหรียญ 1 อัน 5 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 3 อัน

วิธีทำ 1. $n = 5$

2. ผลสำเร็จคือการได้หัว

3. p = ความน่าจะเป็นที่จะได้หัวในแต่ละครั้ง = 0.5

4. $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

คำถามถามว่า ความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 3 อัน

$$= P(X=3) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{5}{3} (0.5)^3 (1-0.5)^{5-3} = (10)(0.5)^5 = 0.3125$$

ตัวอย่าง 9.2 ในการโยนลูกเต๋า 10 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่ได้แต้ม 1 จำนวน 6 ลูก

วิธีทำ การโยนลูกเต๋า 10 ลูกพร้อมกันเหมือนกับการโยนลูกเต๋าที่ละ 1 ลูก 10 ครั้ง

ดังนั้น $n = 10$

ผลสำเร็จคือ การได้แต้มเป็น 1

p = ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 $= \frac{1}{6}$

X = จำนวนผลสำเร็จ (การได้แต้ม 1)

$= 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots, 10$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 จำนวน 6 ลูก

$$= P(X=6) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \binom{10}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(1-\frac{1}{6}\right)^4 = \binom{10}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^6\left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{(210)5^4}{6^{10}}$$

ตัวอย่าง 9.3

ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีเขียว 6 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วออกจากถุงครั้งละ 1 ลูก 4 ครั้ง โดยใส่ลูกแก้วคืนถุงก่อนหยิบครั้งต่อไปทุกครั้งก่อนหยิบครั้งต่อไป ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีเขียวเพียงครั้งเดียวเท่ากับเท่าใด

1. 0.0384 2. 0.0864 3. 0.1536 4. 0.3456

ตอบ 3.

แนวคิด $n = 4$

ผลสำเร็จ = การได้ลูกแก้วสีเขียว

$$p = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

X = จำนวนลูกแก้วสีเขียวที่ได้ $= 0, 1, 2, 3, 4$

ความน่าจะเป็นที่ได้ลูกแก้วสีเขียว 1 ลูก

$$= P(X = 1) = \binom{4}{1}\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(1-\frac{3}{5}\right)^3$$

$$= 4\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.1536$$

ข้อสอบเกี่ยวกับความน่าจะเป็นอีกแบบหนึ่งเช่น

1. คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 6 คน หญิง 4 คน สุ่มเลือกคนจากกลุ่มนี้ออกมาพร้อมกัน 3 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ ชาย 2 คน
2. มีลูกแก้วสีแดง 10 ลูก ลูกแก้วสีขาว 5 ลูก รวมกันอยู่ในกล่อง สุ่มเลือกลูกแก้ว 5 ลูก ออกจากกล่องพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีแดง 3 ลูก
3. มีฉลาก 10 ใบ เขียนหมายเลข 0, 1, 2,..........., 9 อยู่ในกล่องในการหยิบฉลาก 4 ใบพร้อมกันออกจากกล่อง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ทุกใบ

จากตัวอย่างที่กล่าวมานี้จะเห็นว่ามีลักษณะคล้ายกันคือ

1. สิ่งของทั้งหมดจำแนกเป็น 2 จำพวก
2. หยิบสิ่งของออกมาพร้อมกัน

โดยทั่วไปเราจะจำแนกดังนี้

1. ของทั้งหมดรวมกัน N สิ่ง
2. จำแนกของสองสิ่งออกเป็น
   2.1 พวกที่จัดว่าเป็นผลสำเร็จ หรือผลที่เราต้องการ มี k สิ่ง
   2.2 พวกที่จัดว่าเป็นผลไม่สำเร็จ มี N – k สิ่ง
3. หยิบของออกมาพร้อมกัน n สิ่ง
4. ให้ X = จำนวนผลสำเร็จที่เป็นไปได้ X = 0, 1, 2,.........., n

ตัวแปร X มีชื่อเรียกว่า <u>ตัวแปรสุ่มไฮเพอร์จีออเมตริก</u>

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

จากคำถามที่ 1. N = จำนวนคนทั้งหมด = 10

k = จำนวนผู้ชาย = 6

N – k = จำนวนผู้หญิง = 4

n = จำนวนคนที่เลือกออกมาพร้อมกัน = 3

ความน่าจะเป็นที่จะได้ชาย 2 คน = P(X = 2)

$$=\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{(15)(4)}{120}=\frac{1}{2}$$

จากคำถามที่ 2. N = จำนวนลูกแก้วทั้งหมด = 15

k = จำนวนลูกแก้วสีแดง = 10

$N - k$ = จำนวนลูกแก้วสีขาว = 5

n = จำนวนลูกแก้วที่หยิบออกมา = 5

ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีแดง 3 ลูก = $P(X = 3)$

$$= \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{2}}{\binom{15}{5}} = \frac{(120)(10)}{3003} = 0.3996$$

จากคำถามที่ 3. N = จำนวนหมายเลขทั้งหมด = 10

k = จำนวนเลขคี่ = 5

$N - k$ = จำนวนเลขคู่ = 5

n = จำนวนฉลากที่หยิบออกมา = 4

ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ทุกใบ = $P(X = 4)$

$$= \frac{\binom{5}{4}\binom{5}{0}}{\binom{10}{4}} = \frac{1}{42}$$

ตัวอย่าง 9.4 คณิตศาสตร์ ก. 2536

มีแคปซูลซึ่งบรรจุยาชนิดหนึ่งจำนวน 5 แคปซูล ปนกับแคปซูล ซึ่งบรรจุแป้ง จำนวน 10 แคปซูล ถ้าหยิบมา 2 แคปซูล อย่างสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้แคปซูล ซึ่งบรรจุยาทั้งสองแคปซูลเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{5}{15}$ 3. $\frac{2}{21}$ 4. $\frac{10}{21}$

ตอบ 3.

แนวคิด N = จำนวนแคปซูลทั้งหมด = 15

k = จำนวนแคปซูลยา = 5

$N - k$ = จำนวนแคปซูลแป้ง = 10

n = จำนวนที่หยิบแคปซูลออกมา = 2

ความน่าจะเป็นที่จะได้แคปซูลยาทั้งสองแคปซูล = $P(X = 2)$

$$= \frac{\binom{5}{2}\binom{10}{0}}{\binom{15}{2}} = \frac{10}{105} = \frac{2}{21}$$

ตัวอย่าง 9.5 คณิตศาสตร์ ก. 2534

ในการเลือกกรรมการชุดหนึ่งจากชาย 6 คน หญิง 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะเลือกกรรมการ 3 คนให้มีทั้งหญิงและชาย

ตอบ 0.8

แนวคิด N = จำนวนคนทั้งหมด = 10

k = จำนวนกรรมการชาย = 6

$N - k$ = จำนวนกรรมการหญิง = 4

n = จำนวนคนที่เลือกออกมา = 3

X = จำนวนชายที่ได้ = 0, 1, 2, 3

ความน่าจะเป็นที่จะได้ชายและหญิง

= P (ได้ชาย 1, หญิง 2) + P (ได้ชาย 2, หญิง 1) $= P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(6)(6)}{120} + \frac{(15)(4)}{120} = \frac{96}{120} = 0.8$$

ในกรณีที่ของทั้งหมดจำแนกได้มากกว่า 2 ชนิดเช่น ในบริษัทมีพนักงาน 3 แผนก แผนกขาย 4 คน, แผนกบัญชี 5 คน และ แผนกส่งของ 6 คน สุ่มพนักงานออกมา 5 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้คนจากแผนกขาย 2 คน, แผนกบัญชี 2 คน และ แผนกส่งของ 1 คน

ในปัญหานี้ N = จำนวนคนทั้งหมด $= 4 + 5 + 6 = 15$

k_1 = จำนวนคนในกลุ่มที่ 1 (แผนกขาย) = 4

k_2 = จำนวนคนในกลุ่มที่ 2 (แผนกบัญชี) = 5

k_3 = จำนวนคนในกลุ่มที่ 3 (แผนกส่งของ) = 6

n = จำนวนคนที่เลือกออกมาพร้อมกัน = 5

$i = 1, 2, 3.$; X_i = จำนวนคนจากกลุ่มที่ i ที่อาจเป็นไปได้ในการเลือก

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3) = \frac{\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\binom{k_3}{x_3}}{\binom{N}{n}}$$

P(ได้แผนกขาย 2 คน, แผนกบัญชี 2 คน, แผนกส่งของ 1 คน)

$$= P(X_1 = 2, X_2 = 2, X_3 = 1)$$

$$= \frac{\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{6}{1}}{\binom{15}{5}} = \frac{(6)(10)(6)}{3003} = \frac{120}{1001}$$

สรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ว่าเมื่อ

N = จำนวนของทั้งหมด แบ่งเป็น m กลุ่ม

k_i = จำนวนของกลุ่มที่ i , $i = 1, 2, \ldots, m$

n = จำนวนที่เลือกออกมาพร้อมกัน

X_i = จำนวนสิ่งของจากกลุ่มที่ i

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots\ldots, X_m = x_m)$

$$= \frac{\binom{k_1}{x_1}\binom{k_2}{x_2}\cdots\cdots\binom{k_m}{x_m}}{\binom{N}{n}}$$

ตัวอย่าง 9.6 คณิตศาสตร์ กข. 2535

กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 นอกนั้นเป็นสีเหลืองสุ่มหยิบลูกแก้วออกมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกันเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{54}{78}$ 2. $\frac{26}{78}$ 3. $\frac{24}{78}$ 4. $\frac{13}{78}$

ตอบ 1.

แนวคิด ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกัน

= P(ได้แดง 1, ขาว 1, เหลือง 0) + P (ได้แดง 1, ขาว 0, เหลือง 1) + P (ได้แดง 0, ขาว 1, เหลือง 1)

ดังนั้นการคำนวนเราพิจารณาดังนี้

N = จำนวนลูกแก้วทั้งหมด = 13

k_1 = จำนวนลูกแก้วสีแดง = 6

k_2 = จำนวนลูกแก้วสีขาว = 4

k_3 = จำนวนลูกแก้วสีเหลือง = 3

n = จำนวนที่หยิบออกมาพร้อมกัน = 2

$$P(\text{ได้แดง } 1, \text{ ขาว } 1, \text{ เหลือง } 0) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{0}}{\binom{13}{2}} = \frac{24}{78}$$

$$P\ (\text{ได้แดง } 1, \text{ ขาว } 0, \text{ เหลือง } 1) = \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{0}\binom{3}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{18}{78}$$

$$P\ (\text{ได้แดง } 0, \text{ ขาว } 1, \text{ เหลือง } 1) = \frac{\binom{6}{0}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{13}{2}} = \frac{12}{78}$$

สรุปความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีต่างกัน $= \frac{24}{78} + \frac{18}{78} + \frac{12}{78} = \frac{54}{78}$

ตัวอย่าง 9.7 คณิตศาสตร์ กข. 2534

กล่องใบหนึ่งบรรจุปากกา 1 โหล เป็นปากกาสีแดง 3 ด้าม สีเขียว 4 ด้าม ที่เหลือเป็นสีน้ำเงิน ความน่าจะเป็นที่หยิบปากกามา 3 ด้าม แล้วได้ครบทุกสีมีค่าเท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{22}$ 3. $\frac{3}{11}$ 4. $\frac{3}{12}$

ตอบ 3.

แนวคิด N = จำนวนปากกาทั้งหมด = 12

k_1 = จำนวนปากกาสีแดง = 3

k_2 = จำนวนปากกาสีเขียว = 4

k_3 = จำนวนปากกาสีน้ำเงิน = 5

n = จำนวนปากกาที่เลือกหยิบออกมา

ความน่าจะเป็นที่จะได้ครบทุกสี = P(ได้แดง 1, เขียว 1, น้ำเงิน 1)

$$= P(x_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)$$

$$= \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

ตัวอย่าง 9.8 คณิตศาสตร์ กข. 2533

คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 6 คน และ หญิง 4 คน ในกลุ่มนี้มีผู้ถนัดซ้าย 7 คน ซึ่งเป็นชาย 5 คน ถ้าสุ่มเลือกคนมา 3 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่ได้ชายที่ถนัดซ้ายมากกว่าหญิงที่ถนัดซ้ายเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{24}$ 2. $\frac{6}{24}$ 3. $\frac{12}{24}$ 4. $\frac{15}{24}$

ตอบ 4.

แนวคิด จากข้อมูลที่โจทย์ให้มาจำแนกได้ดังนี้

	ถนัดซ้าย	ถนัดขวา	
ชาย	5	1	6
หญิง	2	2	4
	7	3	10

N = จำนวนคนทั้งหมด = 10

ต่อไปเราจำแนกเป็น 3 กลุ่มคือ

k_1 = จำนวนชายที่ถนัดซ้าย = 5

k_2 = จำนวนหญิงที่ถนัดซ้าย = 2

k_3 = จำนวนคนที่ถนัดขวา (ชาย & หญิงรวมกัน) = 3

n = จำนวนคนที่สุ่มเลือกมา = 3

X_1 = จำนวนชายที่ถนัดซ้าย

X_2 = จำนวนหญิงที่ถนัดซ้าย

X_3 = จำนวนคนที่ถนัดขวา

ความน่าจะเป็นที่ได้ชายที่ถนัดซ้ายมากกว่าหญิงที่ถนัดซ้าย

$= P(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 2) + P(X_1 = 2, X_2 = 0, X_3 = 1)$

$+ P(X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 0) + P(X_1 = 3, X_2 = 0, X_3 = 0)$

$$= \frac{\binom{5}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{10}{3}}$$

$$= \frac{15}{120} + \frac{30}{120} + \frac{20}{120} + \frac{10}{120} \quad = \frac{75}{120} \quad = \frac{15}{24}$$

ตัวอย่าง 9.9 คณิตศาสตร์ ก. 2534

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 4 ลูก สีแดง 6 ลูก สีเขียว 6 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลขึ้นมา 2 ลูก อย่างไม่เจาะจง ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีต่างกันคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{34}$ 2. $\frac{25}{34}$ 3. $\frac{72}{144}$ 4. $\frac{108}{144}$

ตอบ 2.

แนวคิด N = จำนวนลูกบอลทั้งหมด = 17

k_1 = จำนวนลูกบอลสีขาว = 1

k_2 = จำนวนลูกบอลสีดำ = 4

k_3 = จำนวนลูกบอลสีแดง = 6

k_4 = จำนวนลูกบอลสีเขียว = 6

n = จำนวนลูกบอลที่หยิบออกมา = 2

X_1, X_2, X_3, X_4 = จำนวนลูกบอลสีขาว, ดำ, แดง, เขียว ที่หยิบได้ตามลำดับ

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีต่างกัน

= P(ได้ขาว 1, ดำ 1) + P(ได้ขาว 1, แดง 1) + P(ได้ขาว 1, เขียว 1)

+ P(ได้ดำ 1, แดง 1) + P(ได้ดำ 1, เขียว 1) + P(ได้แดง 1, เขียว 1)

$$= \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{6}{0}\binom{6}{0}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{0}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{0}\binom{6}{0}\binom{6}{1}}{\binom{17}{2}}$$

$$+ \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{6}{1}\binom{6}{0}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{1}\binom{6}{0}\binom{6}{1}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{6}{1}\binom{6}{1}}{\binom{17}{2}}$$

$$= \frac{4}{136} + \frac{6}{136} + \frac{6}{136} + \frac{24}{136} + \frac{24}{136} + \frac{36}{136}$$

$$= \frac{100}{136} \quad = \frac{25}{34}$$

วิธีที่ 2 ใช้แนวคิดแบบเหตุการณ์ตรงข้าม

ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีต่างกัน

= 1 – ความน่าจะเป็นที่จะให้ลูกบอลสีเหมือนกัน

= 1 – (P(ได้ดำ 2) + P(ได้แดง 2) + P(ได้เขียว 2))

$$= 1 - \left[\frac{\binom{1}{0}\binom{4}{2}\binom{6}{0}\binom{6}{0}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{6}{2}\binom{6}{0}}{\binom{17}{2}} + \frac{\binom{1}{0}\binom{4}{0}\binom{6}{0}\binom{6}{2}}{\binom{17}{2}}\right]$$

$$= 1 - \left[\frac{6}{136} + \frac{15}{136} + \frac{15}{136}\right]$$

$$= \frac{25}{34}$$

ตัวอย่าง 9.10 คณิตศาสตร์ ก. 2534

ในกล่องใบหนึ่งมีบัตร 10 ใบ เขียนเลขที่เป็นจำนวนบวก 6 ใบ และจำนวนลบ 4 ใบ ถ้าหยิบบัตรขึ้นมาอย่างสุ่ม 3 ใบ และนำเลขบนบัตรมาแทนค่า A, B, C ในสมการ $D = \frac{(A)(B)}{C}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ D เป็นจำนวนบวก คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{4}{15}$ 3. $\frac{11}{30}$ 4. $\frac{7}{15}$

ตอบ 4.

แนวคิด N = จำนวนบัตรทั้งหมด = 10

k_1 = จำนวนเลขบวก = 6

k_2 = จำนวนเลขลบ = 4

n = จำนวนบัตรที่หยิบออกมา = 3

เหตุการณ์ที่ $D = \frac{AB}{C}$ เป็นจำนวนบวก มี 2 กรณีคือ

1. ได้ บวก 3 ใบ
2. ได้ บวก 1 ใบ, ลบ 2 ใบ

ความน่าจะเป็นที่จะได้ $D = \frac{AB}{C}$ เป็นจำนวนบวก

= P(ได้บวก 3 ใบ) + P(ได้บวก 1 ใบ, ลบ 2 ใบ)

$$= \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} + \frac{36}{120} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

สูตรที่สำคัญ

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2\cdot b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3-3a^2\cdot b+3ab^2-b^3$$

$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+b^3 = (a+b)\cdot(a^2-ab+b^2)$$

$$a^4-b^4 = (a-b)\cdot(a^3+a^2\cdot b+ab^2+b^3)$$

$$a^4+b^4 = \left(a^2+\sqrt{2}\cdot ab+b^2\right)\cdot\left(a^2-\sqrt{2}\cdot ab+b^2\right)$$

$$a^5-b^5 = (a-b)\cdot(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4)$$

$$a^5+b^5 = (a+b)\cdot(a^4-b\cdot a^3+b^2\cdot a^2-b^3\cdot a+b^4)$$

$$a^6-b^6 = (a+b)\cdot(a^2-a\cdot b+b^2)\cdot(a-b)\cdot(b^2+a\cdot b+a^2)$$

$$a^6+b^6 = (a^2+b^2)\cdot(a^4-a^2\cdot b^2+b^4)$$

$$a^7-b^7 = (a-b)\cdot(a^6+a^5\cdot b+a^4\cdot b^2+a^3\cdot b^3+a^2\cdot b^4+a\cdot b^5+b^6)$$

$$a^7+b^7 = (a+b)\cdot(b^6-a\cdot b^5+a^2\cdot b^4-a^3\cdot b^3+a^4\cdot b^2-a^5\cdot b+a^6)$$

$$a^8-b^8 = (a+b)\cdot(a-b)\cdot(a^2+b^2)\cdot(a^4+b^4)$$

$$a^n+b^n = (a+b)\cdot(a^{n-1}-a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2-\ldots\ldots+b^{n-1})$$

$$a^n-b^n = (a-b)\cdot(a^{n-1}+a^{n-2}\cdot b+a^{n-3}\cdot b^2+\ldots\ldots+b^{n-1})$$

10 ข้อสอบต่างประเทศก็ตัดตัวเลือกได้

ข้อสอบแข่งขันของไทยหรือต่างประเทศก็แล้วแต่ หากถ้าเป็นข้อสอบปรนัยก็ต้องมีเหตุผลเล็ก ๆ น้อย ๆ ที่สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้เสมอ นอกจากนั้นลักษณะการตัดตัวเลือกก็ยังเหมือนกันคือ

- โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
- เซตคำตอบคือเซตใด
- สูตรฟังก์ชัน
- การวาดรูปก็ตัดตัวเลือกได้
- ฯลฯ

ซึ่งมีตัวอย่างข้อสอบต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 10.1 Let $f: R \to R$ $\quad f(x) = \sin x + \cos x$

It follows that $f(R^+)$ equals

1. $[-1, 1]$ 2. $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

3. $[-2, 2]$ 4. $[0, \sqrt{2}]$ 5. $[0, 2]$

ตอบ 2.

แนวคิด คำถามในที่นี้คือ $f(x) = \sin x + \cos x$ และโดเมนของ f คือ R^+ เรนจ์ของ f ตรงกับตัวเลือกใด

เพราะว่า $\quad \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

เมื่อ $x \in R^+$ จะได้ว่า $-1 \le \sin\left(\frac{¶}{4}+x\right) \le 1$

$$-\sqrt{2} \le \sqrt{2}\sin\left(\frac{¶}{4}+x\right) \le \sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้น $-\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}$ สรุป $f(R^+) = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า x บางค่าก็จะตัดตัวเลือกได้ เช่น

$x = \frac{5¶}{4}$ จะได้ $f(\frac{5¶}{4}) = \sin\frac{5¶}{4} + \cos\frac{5¶}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $-\sqrt{2} \in f(R^+)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 4. และ 5. ทิ้งได้

สมมติ $f(x) = 2$ ดังนั้น $\sin x + \cos x = 2$

เพราะว่าค่าสูงสุดของ sinx และ cosx คือ 1

แต่ sinx และ cosx เท่ากับ 1 พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้น $f(x) \ne 2$ แน่นอน

สรุปตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 10.2 For $x > 1$ $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{x-1}+1}$ equals

1. 2
2. $\frac{1}{x}$
3. $\frac{-1}{x}$
4. $x-1$
5. $\frac{x-1}{x}$

ตอบ 2.

แนวคิด โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$1-\frac{1}{\frac{1}{x-1}+1} = 1-\frac{1}{\left(\frac{1+x-1}{x-1}\right)} = 1-\frac{x-1}{x}$$

$$= \frac{x-x+1}{x} = \frac{1}{x}$$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

เพราะฉะนั้นแทนค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้เช่นแทนค่า x = 3

$$f(3) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{3-1}+1} \quad = 1 - \frac{1}{1.5} \quad = \frac{1.5-1}{1.5} \quad = \frac{1}{3}$$

แทนค่า x = 3 ในตัวเลือก

1. 2
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{-1}{3}$
4. $3 - 1 = 2$
5. $\frac{2}{3}$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3., 4. และ 5. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 10.3 The domain D of the function $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ is $R - \{\frac{1}{2}\}$

The image f(D) is

1. $R - (-1, 0)$
2. $R - (0, 1)$
3. $R - (-2, 0)$
4. $R - (0, 2)$
5. R

ตอบ 2.

แนวคิด กำหนดโดเมนของ f คือ $R - \{\frac{1}{2}\}$ $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$

การหาเรนจ์ของ f ให้ $y = \frac{x^2}{2x-1}$

$$2xy - y = x^2$$

$$x^2 - 2xy + y = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-2y) \pm \sqrt{4y^2 - 4(1)(y)}}{2} = \frac{2y \pm 2\sqrt{y^2 - y}}{2} = y \pm \sqrt{y^2 - y}$$

x หาค่าได้ ก็ต่อเมื่อ $\quad y^2 - y \ge 0$

$y(y-1) \ge 0$

$y \le 0$ หรือ $y \ge 1$

$y \in R - (0, 1)$

สรุปเรจน์ของ f คือ $R - (0, 1)$

การตัดตัวเลือก ลองแทนค่าเพื่อดูว่า $f(x) = 1$ ได้หรือไม่

เพราะว่า $\quad 1 = \dfrac{x^2}{2x-1}$

$2x - 1 = x^2$

$x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)^2 = 0$

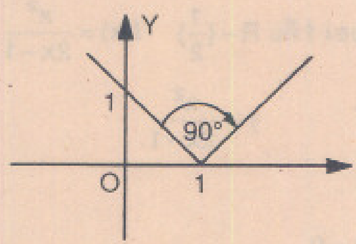
$x - 1 = 0$

$x = 1$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$ ดังนั้น 1 เป็นสมาชิกของเรนจ์ของ f

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 10.4



The figure shows the graph of a function that map x to

1. $|x|+1$ $\qquad$ 2. $|x|-1$

3. $|x-1|$ $\qquad$ 4. $|x+1|$ $\qquad$ 5. $1-|x|$

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ข้อสอบ ENTRANCE เคยออกสอบหลายครั้งเหมือนกัน เช่น คณิตศาสตร์ กข. 2531, คณิตศาสตร์ ก. 2533

คำถามในโจทย์ข้อนี้กำหนดกราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ มาให้ แล้วถามว่า $f(x)$ มีสูตรตรงกับตัวเลือกใด จากกราฟที่ผ่านจุด (1, 0) และ (0, 1) สามารถนำเหตุผลนี้ช่วยในการตัดตัวเลือกได้ (1, 0) อยู่บนกราฟ ดังนั้น $x = 1, y = 0$

แทนค่า $x = 1$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $y = |x| + 1 = |1| + 1 = 2 \neq 0$
2. $y = |x| - 1 = |1| - 1 = 0$
3. $y = |x - 1| = |1 - 1| = 0$
4. $y = |x + 1| = |1 + 1| = 2 \neq 0$
5. $y = 1 - |x| = 1 - |1| = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

(0, 1) อยู่บนกราฟ ดังนั้น $x = 0, y = 1$ แทนค่า $x = 0$ ในตัวเลือก 2., 3. และ 5.

2. $y = |x| - 1 = |0| - 1 = -1 \neq 1$
3. $y = |x - 1| = |0 - 1| = 1$
5. $y = 1 - |x| = 1 - |0| = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ เหลือตัวเลือก 3. กับ 5. ต้องสังเกตให้ดีกว่า

3. $y = |x - 1|$ เป็นบวกเสมอ
5. $y = 1 - |x|$ เป็นลบได้เมื่อ $x > 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 5. ทิ้งได้

สรุปเหลือตัวเลือก 3. เพียงตัวเดียวที่ยังตัดทิ้งไม่ได้

วิธีจริง เมื่อ $x \le 1$ กราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (0, 1) และ (1, 0)

มีสมการเป็น $\dfrac{y-1}{x-0} = \dfrac{0-1}{1-0} = -1$

$$y - 1 = -x$$

$$y = 1 - x$$

เมื่อ $x > 1$ กราฟผ่านจุด (1, 0) และตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -1

เพราะฉะนั้นเส้นตรงเมื่อ $x > 1$ มีความชันเท่ากับ 1 ดังนั้นสมการเส้นตรงคือ

$$y - 0 = (1)(x - 1)$$

$$y = x - 1$$

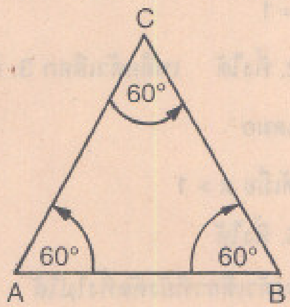
เพราะว่า $y = \begin{cases} 1-x & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ x-1 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$ เพราะฉะนั้น $y = |x-1|$

ตัวอย่าง 10.5 If the angle A, B and C of a triangle form the successive terms of an arithmetic sequence, then $\dfrac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} = ?$

1. $3\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 4. 1 5. $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

ตอบ 2.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้เป็นลักษณะโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของมุมภายในสามเหลี่ยม ดังนั้นเราเลือก ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าก็จะได้คำตอบทันที

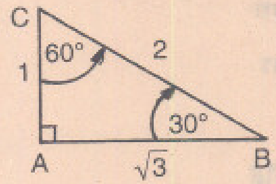


$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{\sin 60^\circ+\sin 60^\circ+\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ+\cos 60^\circ+\cos 60^\circ}$$

$$=\frac{3\sin 60^\circ}{3\cos 60^\circ}\quad=\tan 60^\circ\quad=\sqrt{3}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. $\sqrt{3}$ เป็นคำตอบได้เลย

หมายเหตุ สำหรับนักเรียนที่ไม่แน่ใจลองสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}=\frac{\sin 90^\circ+\sin 30^\circ+\sin 60^\circ}{\cos 90^\circ+\cos 30^\circ+\cos 60^\circ}$$

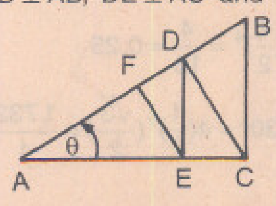
$$=\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{0+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}\quad=\frac{2+1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\quad=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}\quad=\sqrt{3}$$

อธิบายเพิ่มเติม คำว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของรูปสามเหลี่ยม ทุกรูปสามเหลี่ยมต้องมีค่า $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\cos A+\cos B+\cos C}$ เป็นค่าคงตัวแน่นอน ดังนั้นเราจึงเลือกสามเหลี่ยมที่มีมุมซึ่งคำนวณค่า sin และ cos ง่ายๆ

ตัวอย่าง 10.6 In a right triangle ABC, AB = 4,

$\hat{A}=\theta$. Moreover, $CD\perp AB$, $DE\perp AC$ and $EF\perp AB$.



The lenght of EF equals

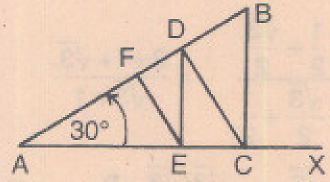
1. $4\sin^4\theta$
2. $4\sin^3\theta\cos\theta$
3. $4\sin^2\theta\cos^2\theta$
4. $4\sin\theta\cos^3\theta$
5. $4\cos^4\theta$

ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์ข้อนี้จัดอยู่ในประเภท

- โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
- วาดรูปก็ตัดตัวเลือกได้
- ประมาณค่าก็ตัดตัวเลือกได้

เลือกมุม $\theta = 30°$ วาดรูปและวัดระยะทางตามขั้นตอนดังนี้



1. ลากเส้นตรง AX
2. ลาก AB ยาว 4 นิ้ว และ $B\hat{A}X = 30°$
3. ลาก BC ตั้งฉากกับ AX
4. ลาก $CD \perp AB$, ลาก $DE \perp AC$ และ ลาก $EF \perp AB$
5. วัดความยาว EF ได้ 1.3

แทนค่า $\theta = 30°$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $4\sin^4 30° = 4(\frac{1}{2})^4 = \frac{4}{16} = 0.25$

ตัวเลือก 2. $4\sin^3 30°\cos 30° = 4(\frac{1}{2})^3(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1.732}{4} = 0.433$

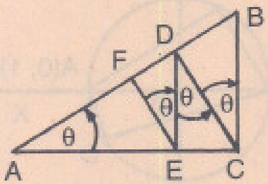
ตัวเลือก 3. $4\sin^2 30^\circ \cos^2 30^\circ = 4(\frac{1}{2})^2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{3}{4} = 0.75$

ตัวเลือก 4. $4\sin 30^\circ \cos^3 30^\circ = 4(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = \frac{3\sqrt{3}}{4} = 1.3$

ตัวเลือก 5 $4\cos^4 30^\circ = 4(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง



จากรูปจะได้ $B\hat{A}C = \theta,\ F\hat{E}D = \theta,\ E\hat{D}C = \theta$ และ $D\hat{C}B = \theta$

ในสามเหลี่ยม ABC $\sin B\hat{A}C = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{4}$

$$\sin\theta = \frac{BC}{4}$$

$$BC = 4\sin\theta$$

ในสามเหลี่ยม BCD $\cos B\hat{C}D = \frac{DC}{BC}$

$$\cos\theta = \frac{DC}{4\sin\theta}$$

$$DC = 4\sin\theta\cos\theta$$

ในสามเหลี่ยม DEC $\cos C\hat{D}E = \frac{DE}{DC}$

$$\cos\theta = \frac{DE}{4\sin\theta\cos\theta}$$

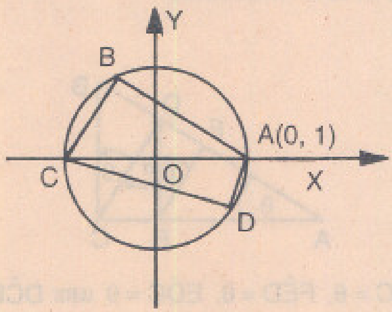
$$DE = 4\sin\theta\cos^2\theta$$

ในสามเหลี่ยม DEF $\quad \cos D\hat{E}F = \dfrac{EF}{DE}$

$$\cos\theta = \frac{EF}{4\sin\theta\cos^2\theta}$$

สรุป $\quad EF = 4\sin\theta\cos^3\theta$

ตัวอย่าง 10.7 On a goniometric circle the following points are given:



A, the image of 0° $\qquad$ B, the image of 120°

C, the image of 180° $\qquad$ D, the image of 330°

The area of quadrangle ABCD equals

1. $\sqrt{3}+1$ $\qquad$ 2. $\sqrt{3-1}$

3. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ $\qquad$ 4. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ $\qquad$ 5. $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{6}$

ตอบ 3.

แนวคิด A, B, C และ D เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

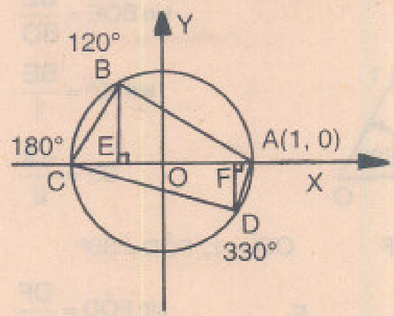
OA ทำมุม 0° กับแกน X

OB ทำมุม 120° กับแกน X

OC ทำมุม 180° กับแกน X

OD ทำมุม 330° กับแกน X

เพราะฉะนั้นเราสามารถวาดรูปและประมาณค่าพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD ได้



ความยาว AC = 2 วัดความสูง BE = 0.9 และ DE = 0.5

พ.ท. $\square$ ABCD = พ.ท. Δ ABC + พ.ท. Δ ADC

$$= \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE + \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DE$$

$$= \frac{1}{2}(2)(0.9) + \frac{1}{2}(2)(0.5) \quad = 1.4$$

ประมาณค่าในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\sqrt{3} + 1 = 1.732 + 1 = 2.732 > 1.4$

ตัวเลือก 2. $\sqrt{3} - 1 = 0.732 < 1.4$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{2.732}{2} = 1.366 \sim 1.4$

ตัวเลือก 4. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{0.732}{2} = 0.366 < 1.4$

ตัวเลือก 5. $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{6} = \dfrac{2(1.732)+3}{6} = \dfrac{6.464}{6} \quad = 1.08 < 1.4$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

วิธีจริง หาพิกัด B บนวงกลมหนึ่งหน่วย

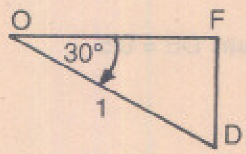
ในสามเหลี่ยม OBE $\quad B\hat{O}E = 60°,\ OB = 1$

$$\sin B\hat{O}E = \frac{BE}{BO}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{BE}{1}$$

$$BE = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ในสามเหลี่ยม DOF $\qquad OD = 1,\ F\hat{O}D = 30^\circ$



$$\sin F\hat{O}D = \frac{DF}{DO}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{DF}{1}$$

$$DF = \frac{1}{2}$$

สรุปพื้นที่ □ ABCD = พ.ท. Δ ABC + พ.ท. Δ ACD

$$= \frac{1}{2}\cdot AC\cdot BE + \frac{1}{2}\cdot AC\cdot DF$$

$$= \frac{1}{2}(2)(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}(2)(\frac{1}{2}) \quad = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

ตัวอย่าง 10.8 The line having equation $y = ax$ and the line with equation $y = -x + b$ intersect in a point with strictly negative coordinates. It follows that

1. $a > 0$ and $b > 0$ 2. $a > 0$ and $b > 0$

3. $a < 0$ and $b > 0$ 4. $a < 0$ and $b < 0$

5. $a \cdot b = 0$

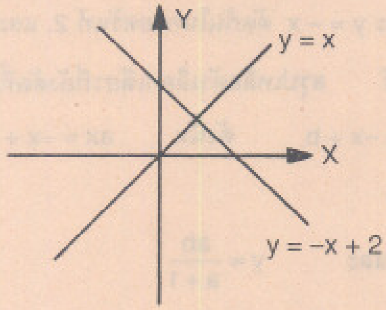
ตอบ 2.

แนวคิด จากคำถามที่ถามว่าเส้นตรง $y = ax$ และ $y = -x + b$ ตัดกันที่จุด ซึ่งมี

พิกัดน้อยกว่าศูนย์ (หมายถึงจุดตัดอยู่ในควอดรันท์ 3) และข้อสอบมีตัวเลือกในพจน์ของ a, b ดังนั้นจึงจัดว่าข้อสอบข้อนี้จัดเป็นโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a และ b นอกจากนั้นการวาดรูปก็ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $a > 0$ และ $b > 0$ ดังนั้นเราลองเลือก $a = 1, b = 2$

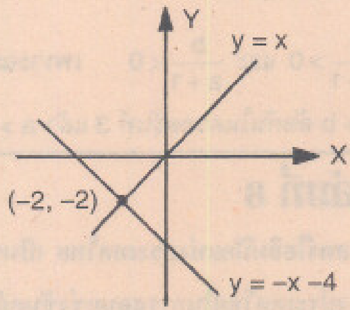
$y = x$ และ $y = -x + 2$



จากรูปมีจุดตัดในควอดรันท์ 1. คือ (1, 1) ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. $a > 0$ และ $b < 0$

เลือก $a = 1$ และ $b = -4$ จะได้เส้นตรง $y = x$ และ $y = -x - 4$



จุดตัดของเส้นตรงคือ (−2, −2) สอดคล้องกับโจทย์

ตัวเลือก 3. $a < 0$ และ $b > 0$

เลือก $a = -1$ และ $b = 4$ ในที่นี้เราจะใช้เหตุผลแบบนี้บ้าง

เพราะว่าเส้นตรง $y = (-1)x$ ผ่านควอดรันท์ 2 และ 4 เท่านั้น จึงไม่มีทางที่จุดตัดของเส้นตรงทั้งสองเส้นจะอยู่ในควอดรันท์ 3

ตัวเลือก 4. สามารถตัดทิ้งได้ โดยใช้เหตุผลแบบเดียวกับตัวเลือก 3.

ตัวเลือก 5. $a \cdot b = 0$

ถ้า $a = 0$ แล้ว $y = 0$ ดังนั้นจุดตัดของเส้นตรงไม่อยู่ในควอดรันท์ 3.

ถ้า $b = 0$ แล้ว $y = ax$ และ $y = -x$ ตัดกันในควอดรันท์ 2. และ 4.

เราจึงตัดตัวเลือก 5. ทิ้งได้ สรุปเหลือตัวเลือกเดียวที่ยังตัดทิ้งไม่ได้

วิธีจริง $y = ax$ และ $y = -x + b$ ดังนั้น $ax = -x + b$

$$(a+1)x = b$$

$$x = \frac{b}{a+1} \quad \text{และ} \quad y = \frac{ab}{a+1}$$

เพราะว่าโจทย์บังคับให้จุดตัดอยู่ในควอดรันท์ที่ 3

เพราะฉะนั้น $\frac{b}{a+1} < 0$ และ $\frac{ab}{a+1} < 0$

เพราะว่า $(a)(\frac{b}{a+1}) < 0$ เพราะฉะนั้น $a > 0$

เพราะว่า $a + 1 > 0$ และ $\frac{1}{a+1} > 0$ และ $\frac{b}{a+1} < 0$ เพราะฉะนั้น $b < 0$

สรุป ถ้า $y = ax$ และ $y = -x + b$ ตัดกันในควอดรันท์ 3 แล้ว $a > 0$ และ $b < 0$

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1-30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ให้ A, B, C, D เป็นเซตใดๆ

   $(A \cap C) - (B \cup D)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(A - B) \cap (D - C)$ 2. $(A - B) \cap (C - D)$
   3. $(A - B) \cup (D - C)$ 4. $(A - B) \cup (C - D)$

2. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดซึ่งหาร 90 เหลือเศษ 6 และหาร 150 เหลือเศษ 3 แล้ว n หาร 41 เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 5 2. 6 3. 18 4. 20

3. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ พจน์ที่ m ของลำดับเลขคณิต 2, 5, 8, ... มีค่ามากกว่า 1000 จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นตัวหารของ m

   1. 67 2. 111 3. 166 4. 167

4. นิเสธของข้อความ $\exists x \forall y\, [xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\forall x \exists y [(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   2. $\exists x \forall y [(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$
   3. $\exists x \forall y [(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   4. $\forall x \exists y [(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

5. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก) เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. $q \rightarrow s$

3. $\sim s$

ผล $\sim p \vee s$

ข) เหตุ $p \rightarrow (r \vee s)$

ผล $\sim p \vee (r \vee s)$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผลทั้งคู่
2. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่
3. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
4. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล

6. ถ้าเซต A มีสมาชิก 10 ตัวแล้ว จำนวนทั้งหมดของความสัมพันธ์จาก $A \times A$ ไป A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2^{100} 2. 2^{1000}

3. 100^2 3. 1000^2

7. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $B = \{a, b\}$ แล้วจำนวนของฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับข้อใด

1. 14 2. 63

3. 126 4. 252

8. ให้ $A = \left\{ \frac{\pi}{n+1} \mid n \text{ เป็นจำนวนนับ} \right\}$ และ

$f(x) = \sin x$ เมื่อ $x \in A$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็น<u>เท็จ</u>

1. มี $a, b \in A$ ซึ่ง $f(a) = 2f(b)$
2. มี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = 0$
3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4. $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in A$

9. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{32}$　　2. $\frac{11}{16}$
3. $\frac{9}{16}$　　4. $\frac{9}{12}$

10. ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1　　2. 1
3. $\frac{4}{3}$　　4. $-\frac{4}{3}$

11. เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 5$ มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $4x - 3y + 12 = 0$　　2. $4x - 3y - 12 = 0$
3. $4x - 3y - 36 = 0$　　4. $4x - 3y + 36 = 0$

12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = [x \;\; y]$ เซตของจุด (x, y) ซึ่งสอดคล้องสมการ $BAB^t = [12]$ เป็นกราฟของข้อใดต่อไปนี้

1. วงรีซึ่งมีแกนเอกทับแกน X
2. วงรีซึ่งมีแกนเอกทับแกน Y
3. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีแกนตามขวางทับแกน X
4. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีแกนตามขวางทับแกน Y

13. กำหนดให้ $f(x) = \log(1+x)$ สำหรับ $x \in R$

ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(n+1)$
2. $f(n)$
3. $f(\frac{1}{n})$
4. $f(\frac{1}{n+1})$

14. เซตคำตอบของสมการ $\left(\sqrt{|x|}\right)^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 3]$
2. $[2, 4]$
3. $[-3, -2] \cup [2, 3]$
4. $[-2, -1] \cup [1, 2]$

15. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ให้ $C_{ij}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i หลักที่ j ของ A

ถ้า $C_{12}(A) = 1$ และ $\det(A) = -5$ แล้ว a เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -5
2. -1
3. 2
4. 3

16. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์เอกฐานคือข้อใด

1. $\left\{1, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$
2. $\left\{1, 5+3\sqrt{3}, 5-3\sqrt{3}\right\}$
3. $\left\{1, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right\}$
4. $\left\{1, 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\right\}$

17. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี D มีจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB เป็นอัตราส่วน $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3:2$ และ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{15}$ 2. $\frac{11}{5}$

3. $\frac{13}{5}$ 4. $\frac{14}{5}$

18. กำหนดให้ A, B และ C คือ จุดที่มีพิกัดเป็น (−5, 0), (3, 6) และ $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ตามลำดับ ถ้า D(a, b) เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ และขนาดของ $\overrightarrow{CD}$ เท่ากับ 2 แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 6 3. $\frac{29}{5}$ 4. $\frac{71}{5}$

19. กำหนดให้ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. −1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1

20. ถ้าอนุกรม $1 + \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2} + \frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3} + \ldots$ มีผลบวกเท่ากับ 9 แล้ว อนุกรม $\log_2 x - (\log_2 x)^2 + (\log_2 x)^3 - (\log_2 x)^4 + \ldots$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{1+\log_2 3}$
2. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\log_2 3}{1-\log_2 3}$
3. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3}$
4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

21. สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 4$ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$

ลำดับ a_n เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีลิมิตเป็น 1
2. มีลิมิตเป็น 2
3. มีลิมิตเป็น 4
4. เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

22. ค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 0
3. 1
4. หาค่าไม่ได้

23. กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16)$ และ $A = \{x \in R \mid f'(x) > 0\}$

ดังนั้น A คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
2. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$
3. $(-\infty, -2)$
4. $(2, \infty)$

24. ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} = 3x-2$ ทุก $x \in R$ และ $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนกราฟของ f

1. $(1, 0)$
2. $(-1, 0)$
3. $(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, 0)$
4. $(\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}, 0)$

25. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (-1, 0) และผ่านจุด (3, 6)

ค่าของ $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9
2. 12
3. 15
4. 18

26. มีลูกแก้ว 7 ลูกซึ่งมีสีต่างกันหมดโดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จำนวนวิธีที่จะวางเรียงลูกแก้วเป็นวงกลมโดยให้สีน้ำเงินเรียงอยู่ติดกับสีขาวและติดกับสีแดงเท่ากับข้อใด

1. 24
2. 48
3. 120
4. 240

27. ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักให้แต้มคู่แต่ละหน้ามีโอกาสเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของแต้มคี่ แต่ละหน้า ความน่าจะเป็นที่โยนลูกเต๋า 1 ครั้ง ได้แต้มเป็น 1 หรือแต้มคู่เท่ากับข้อใด

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{7}{9}$
4. $\frac{5}{8}$

28. ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{31}{36}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{5}{36}$

29. ถ้าคะแนนวิชาสถิติและคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

นักเรียนคนที่	1	2	3	4	5
คะแนนวิชาสถิติ	8	5	4	2	1
คะแนนวิชาคณิตศาสตร์	9	6	5	3	2

แล้วอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของความแปรผันระหว่างคะแนนวิชาสถิติ และคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{25}{16}$　　2. $\frac{16}{25}$

3. $\frac{4}{5}$　　4. $\frac{5}{4}$

30. กำหนดข้อมูล 2 ชุด ดังนี้

ชุดที่ 1 : 6, 12, 9, 10, 6, 8

ชุดที่ 2 : 60, 64, 56, 70, 52, 63

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายน้อยกว่าชุดที่ 2
2. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายมากกว่าชุดที่ 2
3. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายเท่ากับชุดที่ 2
4. เปรียบเทียบการกระจายของข้อมูล 2 ชุดนี้ไม่ได้

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(S)$ = เพาเวอร์เซตของ S

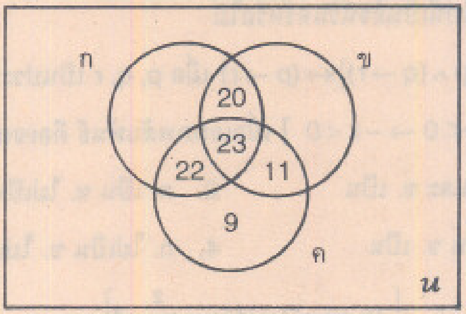
ถ้า $X = \{ A \in P(S) \mid 1 \in A$ และ $7 \notin A \}$

และ $Y = \{ A \in X \mid$ ผลบวกของสมาชิกใน A ไม่เกิน 6 $\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของ X และ Y (ตามลำดับ) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16, 5　　2. 16, 6　　3. 32, 5　　4. 32, 6

32. ในการสำรวจความนิยมของคนจำนวน 100 คน ที่มีต่อนาย ก นาย ข และนาย ค โดยทุกคนต้องแสดงความนิยมคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน ปรากฏว่านาย ก ได้รับคะแนนความนิยมมากกว่า นาย ข อยู่ 6 คะแนน และเขียนเป็นแผนภาพได้ ดังรูป



ต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. นาย ข ได้คะแนนนิยมน้อยที่สุด
2. ผลรวมของคะแนนนิยมของนาย ก นาย ข และนาย ค คือ 199
3. ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้เฉพาะ นาย ก เท่านั้น มีจำนวน 10 คน
4. ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้ นาย ข มีจำนวน 64 คน

33. ให้ $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geq 1 \right\}$

$B = \{\, n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2 \,\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –4 2. –3 3. –2 4. –1

34. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) $3 \mid (a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a)$ ทุกจำนวนเต็ม a

ข) $\{x \in I^- \mid 6x^3 + 17x^2 + 14x + 3 \geq 0\}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

35. ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ก) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$ เมื่อ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ

ข) $\forall x[\, x \nless 0 \to -x < 0 \,]$ เมื่อเอกภพสัมพันธ์ คือเซตของจำนวนจริง

1. ก. เป็น และ ข. เป็น
2. ก. เป็น ข. ไม่เป็น
3. ก. ไม่เป็น ข. เป็น
4. ก. ไม่เป็น ข. ไม่เป็น

36. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

และ $s = \{(x,y) \in R \times R \mid x = |y|\}$

ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $r^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$
2. $r^{-1} \circ s^{-1} = r^{-1}$
3. $r^{-1} \circ r^{-1} = r^{-1}$
4. $s^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1}$

37. ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ แล้ว

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าของ $g(|x| - x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x| - x)$
2. $x(x - |x|)$
3. $2x(|x| - x)$
4. $2x(x - |x|)$

38. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $0 \leq x \leq \pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
2. ถ้า $\pi \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
3. ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $f(x) = 0$
4. ถ้า $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 0$

39. กำหนดให้เส้นไดเรกตริกซ์และแกนของพาราโบลา $y^2 - 4y + 8x = 20$ ตัดกันที่จุด P ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดกำเนิด, จุด P และจุดโฟกัสของพาราโบลานี้แล้ว กำลังสองของรัศมีของวงกลมวงนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{35}{4}$ 2. $\frac{37}{4}$

3. $\frac{143}{16}$ 4. $\frac{145}{16}$

40. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

ถ้า E เป็นวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ใน E ไปยังจุดที่กราฟของ H ตัดแกน X ทั้งสองจุดเท่ากับ 8 แล้ว สมการของ E คือข้อใดต่อไปนี้

1. $3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 48$ 2. $4(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 48$

3. $3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 64$ 4. $4(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 64$

41. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ทำให้ AB = BA = I แล้วค่าของ $\det(\operatorname{adj} B^{-1})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 16

3. 25 4. 36

42. ค่าสูงสุดของ A เมื่อ A = 6x + y โดยที่ $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2, 2x - y \leq 2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. $\frac{26}{3}$

3. $\frac{32}{3}$ 4. 12

43. ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{v} = 5, |\bar{u}| = 2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา แล้ว $|\bar{u} + \bar{v}|$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 12

3. $\sqrt{29}$ 4. $\sqrt{39}$

44. กำหนดให้ g(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและ $f(x) = (x-1)^2 g(x)$

ถ้า x–2 หาร f(x) เหลือเศษ 3 และ

x–2 หาร $f'(x)$ เหลือเศษ 4 แล้ว ค่าของ $g'(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –3 2. –2 3. 1 4. 4

45. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z \neq 0$ และ $(5-12i)z^3(-3+4i) = 130\bar{z}$

แล้ว |z| (ค่าสัมบูรณ์ของ z) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\frac{1}{2}$ 4. 2

46. กำหนดให้ $a_n = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad n = 1, 2 \\ a_{n-2} + 2 & \text{เมื่อ} \quad n = 3, 5, 7, \ldots \\ 2a_{n-2} & \text{เมื่อ} \quad n = 4, 6, 8, \ldots \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{101} a_i$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(50)(51) + 2^{50} - 1$ 2. $(51)^2 + 2^{50} - 1$

3. $(50)(51) + 2^{49} - 1$ 4. $(51)^2 + 2^{49} - 1$

47. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $f_n(x) = nx^2 - n^2x$ และ $g(x) = \sum_{n=1}^{10} f_n(x)$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น g มีค่าต่ำสุดที่ x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2.5 2. 2.7

3. 3.2 4. 3.5

48. กำหนดให้ $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1 < x \le 2 \\ 3-x & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ ถูก

1. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
3. h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ และต่อเนื่องที่ $x = 2$
4. h ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

49. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{2x-a}{x+b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $f'(0) = 4$ และ $f''(0) = -8$ แล้ว ค่าของ $f(0)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. −2
3. 1
4. −1

50. จำนวนจริงบวก a ที่ทำให้

$$\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^a dx = 0.95$$

เป็นสมาชิกของช่วงใดต่อไปนี้

1. [0, 9]
2. [10, 18]
3. [19, 25]
4. [26, ∞)

51. จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใด

1. 350
2. 380
3. 470
4. 500

52. ในการจัดงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้แจกบัตรแก่ผู้เข้าชมงาน 100 ใบ ซึ่งมีหมายเลขตั้งแต่ 00 ถึง 99 กำกับอยู่ สุ่มหยิบต้นขั้วของบัตรมา 1 ใบ เพื่อมอบรางวัลแก่ผู้เข้าชมงาน ผู้ที่มีบัตรซึ่งมีหลายเลขตรงกับต้นขั้วที่หยิบได้จะได้รับรางวัลที่ 1 ส่วนผู้ที่มีบัตรหมายเลขซึ่งมีหลักหน่วยตรงกันกับต้นขั้วหรือหลักสิบตรงกันกับต้นขั้วเพียงหลักเดียวจะได้รับรางวัลที่ 2 ถ้าสมชายได้รับแจกบัตรมา 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่สมชายจะได้รับรางวัลคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$
2. $\frac{1}{10}$
3. $\frac{19}{100}$
4. $\frac{1}{5}$

53. ผลการสอบวิชาภาษาไทย 2 ครั้ง ของนักเรียนชั้นหนึ่งซึ่งมีเด็กหญิงกัลยาและเด็กชายปัญญารวมอยู่ด้วยปรากฏผลดังตาราง

	กลางภาค	ปลายภาค
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	62	55
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	7	5
คะแนนของกัลยา	97	40
คะแนนของปัญญา	76	50

ถ้าคิดคะแนนกลางภาค 40% และปลายภาค 60% แล้วผลการเปรียบเทียบคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของเด็กทั้งสองเป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. กัลยาได้มากกว่าปัญญา
2. กัลยาได้น้อยกว่าปัญญา
3. กัลยาได้เท่ากับปัญญา
4. ข้อมูลไม่เพียงพอที่จะเปรียบเทียบได้

54. กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานทางขวามือของ $z = 0.67$ เท่ากับ 0.25 ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยที่ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับ 2 และสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับ $\frac{2}{3}$ แล้ว สำหรับข้อมูลนี้ ข้อใดเป็นจริง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 3 ความแปรปรวนเท่ากับ 8.88
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 ความแปรปรวนเท่ากับ 8.88
3. ค่าฐานนิยมเท่ากับ 6 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.98
4. ค่ามัธยฐานเท่ากับ 3 ความแปรปรวนเท่ากับ 2.98

55. คะแนนสอบวิชาหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้ามีนักเรียนสอบได้คะแนนน้อยกว่า 40 คะแนน อยู่ 15.87 เปอร์เซนต์ และได้คะแนนมากกว่า 70 คะแนน อยู่ 2.27 เปอร์เซนต์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) สัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนชุดนี้เท่ากับ 20 เปอร์เซนต์

ข) มีนักเรียนสอบได้คะแนนมากกว่า 30 คะแนน อยู่ 90 เปอร์เซนต์

กำหนดให้

z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3413	0.4330	0.4773	0.4938

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

56. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 3 มัธยฐานของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{4}{3}$
3. 12
4. 36

ตอนที่ 3 เติมคำตอบข้อ 1-6 ข้อละ 3 คะแนน

1. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน a, b, c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B, C ซึ่งมีความยาวเป็น 3, 2.5, 1 หน่วยตามลำดับ ค่าของ $b \cos C + c \cos B$ เท่ากับเท่าใด

2. ให้ $A = \left\{ x \in R \,\middle|\, 3^{x^2+2x} - 3^{x^2+1} - 9^{x+1} + 27 = 0 \right\}$

   ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เท่ากับเท่าใด

3. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 3, 4, และ 5 นิ้ว ตามลำดับ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่สามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว

4. ถ้า $\int (f \circ g)(x)\,dx = x^2 + 5x + c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = 4x - 3$ แล้ว ค่าของ $\int_0^1 g(x)dx$ เท่ากับเท่าใด

5. มีสลาก 6 ใบมีหมายเลข 1–6 กำกับไว้ ให้สุ่มหยิบสลาก 2 ครั้งๆ ละใบ ถ้าครั้งแรกได้เลขคู่ให้ใส่สลากใบนั้นกลับคืนก่อนหยิบครั้งที่สอง แต่ถ้าครั้งแรกได้เลขคี่ ก็หยิบครั้งที่สองได้เลยโดยไม่ต้องใส่สลากกลับคืน ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ครั้งที่สองเป็นเลขคู่มีค่าเท่าใด

6. กำหนดให้ $x = -3, -2, -1, 0\ 1, 2, 3$ แทนปี พ.ศ. 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537 ตามลำดับ และ y แทนราคาปุ๋ย (หน่วยเป็น 100 บาท) โดยมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y เป็นสมการ

$$y = 0.25x^2 - 0.5x + 1.25$$

   ถ้าใช้ปี พ.ศ. 2533 เป็นปีฐานแล้ว ดัชนีราคาของปุ๋ยในปี พ.ศ. 2537 จะเท่ากับเท่าใด

เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1-30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ตอบ 2.

แนวคิด สูตรของเซตที่สำคัญในโจทย์ข้อนี้คือ $X - Y = X \cap Y'$

$$
\begin{aligned}
(A \cap C) - (B \cup D) &= (A \cap C) \cap (B \cup D)' \\
&= (A \cap C) \cap (B' \cap D') \\
&= (A \cap B') \cap (C \cap D') \\
&= (A - B) \cap (C - D)
\end{aligned}
$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ข้อสอบมีลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

แทนค่า
$A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{1, 2\}$
$C = \{3\}$
$D = \{4\}$

จากโจทย์ $(A \cap C) - (B \cup D) = \{3\} - \{1, 2, 4\} = \{3\}$

ตัวเลือก 1. $(A - B) \cap (D - C) = \{3, 4\} \cap \{4\} = \{4\}$

ตัวเลือก 2. $(A - B) \cap (C - D) = \{3, 4\} \cap \{3\} = \{3\}$

ตัวเลือก 3. $(A - B) \cup (D - C) = \{3, 4\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$

ตัวเลือก 4. $(A - B) \cup (C - D) = \{3, 4\} \cup \{3\} = \{3, 4\}$

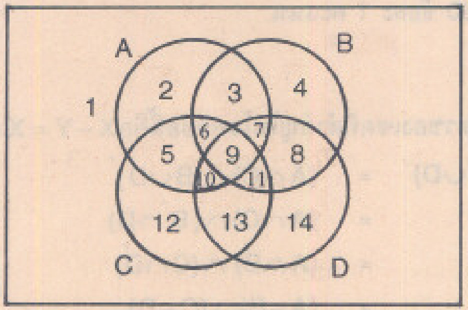
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ ขอให้นักเรียนลองฝึกหัดโดยการเลือกเซต A, B, C และ D ให้แตกต่างจากข้างต้นแล้วแทนค่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ในการสมมติว่า A, B, C, D ควรจะมีสมาชิก [illegible]

อย่างไรนั้นอาจจะเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียน ดังนั้นจึงขอให้ดูรูปแสดงเซตและสมาชิกในเซตโดยใช้แผนภาพของเวนน์

สำหรับโจทย์ข้อนี้ต้องใช้วงกลม 4 วงตัดกันแทน A, B, C และ D



โดยการใส่สมาชิกแต่ละบริเวณดังรูป

จากรูป $A \cap C = \{5, 6, 9, 10\}$

$B \cup D = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$

ดังนั้น $(A \cap C) - (B \cup C) = \{5\}$

ตัวเลือก 1. $(A-B) \cap (D-C) = \{2, 5, 10\} \cap \{7, 8, 14\} = \varnothing$

ตัวเลือก 2. $(A-B) \cap (C-D) = \{2, 5, 10\} \cap \{5, 6, 12\} = \{5\}$

ตัวเลือก 3. $(A-B) \cup (D-C) = \{2, 5, 10, 7, 8, 14\}$

ตัวเลือก 4. $(A-B) \cup (C-D) = \{2, 5, 10, 6, 12\}$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

2. **ตอบ** 4.

แนวคิด เพราะว่า n หาร 90 เหลือเศษ 6 เพราะฉะนั้น n หาร $90-6 = 84$ ลงตัว

เพราะว่า n หาร 150 เหลือเศษ 3 เพราะฉะนั้น n หาร $150-3 = 147$ ลงตัว

เพราะว่าเราต้องการ n ใหญ่ที่สุดที่หาร 84 และ 147 ลงตัว

เพราะฉะนั้น n = ห.ร.ม. (84, 147)

เพราะว่า $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ และ $147 = 3 \cdot 7 \cdot 7$

เพราะฉะนั้น n = ห.ร.ม. (84, 147) = 21

สรุป n = 21 หาร 41 เหลือเศษ 20

3. ตอบ 4.

แนวคิด ลำดับเลขคณิต 2, 5, 8,... มี $a = 2, d = 3$

พจน์ที่ m คือ $a_m = a + (m-1)d = 2 + (m-1)3 = 3m-1$

การหาค่า m ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$$\begin{aligned} a_m &> 1000 \\ 3m-1 &> 1000 \\ 3m &> 1001 \\ m &> 333.67 \end{aligned}$$

สรุปจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 334

ตัวเลขจากตัวเลือก 67, 111, 166 และ 167 ที่หาร 334 ลงตัวคือ 167

4. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตร $\sim(\exists x \forall y\,[P(x,y)]) \equiv \forall x \exists y\,[\sim P(x,y)]$

เพราะฉะนั้น $\sim(\exists x \forall y[xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)])$

$\equiv \forall x \exists y\,[\sim(xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0))]$

$\equiv \forall x \exists y\,[\sim(\sim(xy < 0) \vee (x < 0 \vee y < 0))]$ __________ (*)

$\equiv \forall x \exists y\,[(xy < 0) \wedge (\sim(x < 0 \vee y < 0))]$ __________ (1)

$\equiv \forall x \exists y\,[(xy < 0) \wedge (\sim(x < 0) \wedge \sim(y < 0))]$

$\equiv \forall x \exists y\,[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก ถ้านักเรียนจำได้ว่า $\sim(\exists x \forall y)$ คือ $\forall x \exists y$

ก็สามารถตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

จากสมการ (1) จะเห็นว่านิพจน์ของ xy ต้องอยู่ในรูป $xy < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้เลยโดยไม่จำเป็นต้องพยายามจัดรูปต่อ

* **หมายเหตุ** สูตร $P \to Q$ สมมูลกับ $\sim P \vee Q$ ต้องใช้ในการสอบ ENTRANCE ทุกปี

5. **ตอบ** 1.

แนวคิด พิจารณาอ้างเหตุผล ก. โดยการใช้ตารางแสดงค่าความจริง

p	q	s	~s	$p \to q$	$q \to s$	$(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s$	$\sim p \vee s$
T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T

จากตารางแสดงค่าความจริงจะเห็นว่าทุกกรณีของค่าความจริงของ p, q และ s

จะได้ว่า $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นจริงทุกกรณี

สรุป $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นสัจนิรันดร์

เพราะฉะนั้น ก.สมเหตุสมผล

พิจารณาการอ้างเหตุผล ข.

เพราะว่า $A \to B$ สมมูลกับ $\sim A \vee B$

เพราะฉะนั้น $p \to (r \vee s)$ สมมูลกับ $\sim p \vee (r \vee s)$

ดังนั้น $(p \to (r \vee s)) \to (\sim p \vee (r \vee s))$ เป็นจริงทุกกรณี

สรุป ข. สมเหตุสมผล

หมายเหตุ การแสดงว่า $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นจริงทุกกรณี

สามารถแสดงโดยใช้เหตุผลดังนี้

สมมติ $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s$ เป็นจริง และ $(\sim p \vee s)$ เป็นเท็จ

$p \to q, q \to s, \sim s$ เป็นจริง และ $\sim p \vee s$ เป็นเท็จ

จาก $\sim p \vee s$ เป็นเท็จ จะได้ว่า $\sim p$ เป็นเท็จ และ s เป็นเท็จ

ดังนั้น p เป็นจริง และ $\sim s$ เป็นจริง

เพราะว่า $q \to s$ เป็นจริงและ s เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น q เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \to q$ เป็นเท็จ ขัดแย้งกับ $p \to q$ เป็นจริง

สรุปที่เราสมมติไว้นั้นไม่จริง

ข้อแนะนำ การตีตารางค่าความจริงอาจดูว่าเป็นการทำงานที่มากแต่ความถูกต้องจะเชื่อถือได้มากกว่า และคิดค่าความจริงได้ง่ายกว่าอีกด้วย

6. ตอบ 2.

แนวคิด $n(A) = 10$

$n(A \times A) = n(A) \times n(A) = 10 \times 10 = 100$

จำนวนความสัมพันธ์จากเซต $A \times A$ ไป A เท่ากับ $n(P((A \times A) \times A))$

$$= 2^{n((A \times A) \times A)} = 2^{100 \times 10} = 2^{1000}$$

7. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่1 สมาชิกแต่ละตัวของเซต A เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

ดังนั้นจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เท่ากับ $2^7 = 128$

ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงมี 2 ลักษณะคือ

1. ฟังก์ชันที่ทุกตัวของ A ส่งค่าไปที่ตัว a มี 1 ฟังก์ชัน

2. ฟังก์ชันที่ทุกตัวของ A ส่งค่าไปที่ตัว b มี 1 ฟังก์ชัน

สรุปจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับ $128-1-1=126$

วิธีที่ 2 จำแนกเป็น 6 กรณีดังนี้

1. สมาชิก 1 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{1}$ วิธี
2. สมาชิก 2 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{2}$ วิธี
3. สมาชิก 3 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี
4. สมาชิก 4 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{4}$ วิธี
5. สมาชิก 5 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{5}$ วิธี
6. สมาชิก 6 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{6}$ วิธี

หมายเหตุ แต่ละกรณีสมาชิกส่วนที่เหลือจับคู่กับ b

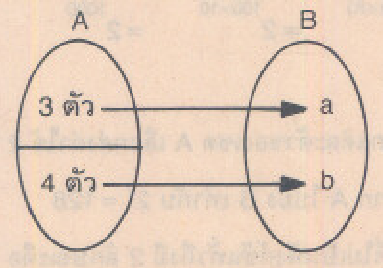
สรุป จำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับ

$$= \binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$$

$$= 7+21+35+35+21+7$$

$$= 126$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ ถ้านักเรียนสามารถนับได้บางส่วนก็ควรจะนำมาใช้ในการตัดตัวเลือกเช่น



3 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนที่เหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{3} = 35$ วิธี

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

4 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนที่เหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{4} = 35$ วิธี

ดังนั้นจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงเพิ่มเป็น 70 ตัว ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

8. ตอบ 2.

แนวคิด ตัวเลือก 1. ถูกต้อง ให้ $a = \frac{\pi}{2}$ และ $b = \frac{\pi}{6}$

จะได้ว่า $a, b \in A$, $f(a) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

และ $f(b) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $f(a) = 2f(b)$

ตัวเลือก 2. ผิด แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่า $\sin\theta = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

และ $0 < \frac{\pi}{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้นไม่มี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = 0$

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่าน จะแสดงข้อพิสูจน์ของตัวเลือกที่เหลือถูกต้อง

ตัวเลือก 3. เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

และ $\sin x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2}]$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sin x$ เมื่อ $x \in A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวเลือก 4. เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leqslant \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น $\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \geqslant 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

สรุป $f(x) \geqslant 0$ ทุก $x \in A$

คำแนะนำ การทำโจทย์ที่ถามว่าตัวเลือกใดถูกต้องหรือตัวเลือกใดผิด นักเรียน

ควรจะอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วพิจารณาตัวเลือกที่ง่ายก่อนเช่นในโจทย์ข้อนี้

เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$,n = 1, 2, 3,...

ดังนั้น $A \subset (0, \frac{\pi}{2}]$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sin x \geq 0$ ทุก $x \in A$

จะเห็นได้ว่าการแสดงว่าตัวเลือก 4. ถูกต้อง ใช้เหตุผลที่ง่ายกว่าการแสดงว่าตัวเลือก 2. ผิด

9. ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่ 1 จากสูตรตรีโกณมิติ $2 \sin x \sin y = \cos(x\text{-}y) - \cos(x+y)$

เพราะฉะนั้น
$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \cos(\frac{A}{2} - \frac{5A}{2}) - \cos(\frac{A}{2} + \frac{5A}{2})$$
$$= \cos(-2A) - \cos(3A)$$
$$= \cos(2A) - \cos(3A)$$
$$= (2\cos^2 A - 1) - (4\cos^3 A - 3\cos A)$$
$$= (2(\frac{3}{4})^2 - 1) - (4(\frac{3}{4})^3 - 3(\frac{3}{4}))$$
$$= \frac{9}{8} - 1 - \frac{27}{16} + \frac{9}{4}$$
$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \frac{11}{16}$$

สรุป
$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$$

วิธีที่ 2
$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin(2A + \frac{A}{2})$$
$$= \sin \frac{A}{2}(\sin 2A \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos 2A)$$
$$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin 2A + 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos 2A$$
$$= \sin A \sin 2A + (1 - \cos A) \cos 2A \;......(*)$$

$$= 2\sin^2 \cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2(1-\cos^2 A)\cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2[1-(\frac{3}{4})^2](\frac{3}{4}) + (1-\frac{3}{4})(2(\frac{3}{4})^2 - 1)$$

$$= 2(\frac{7}{16})(\frac{3}{4}) + (\frac{1}{4})(\frac{18}{16} - 1)$$

$$= \frac{21}{32} + (\frac{1}{4})(\frac{2}{16})$$

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{21}{32} + \frac{1}{32} = \frac{22}{32}$$

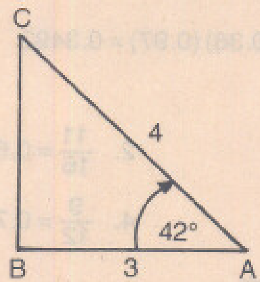
สรุป $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$

การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $\cos A = \frac{3}{4}$

วาดรูปสามเหลี่ยมตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 3 cm.
2. เขียนวงกลมรัศมี 4 cm. จุดศูนย์กลางที่ A
3. ลากเส้นตั้งฉากกับ B ตัดส่วนโค้งของวงกลมที่ C

จะได้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{4}$

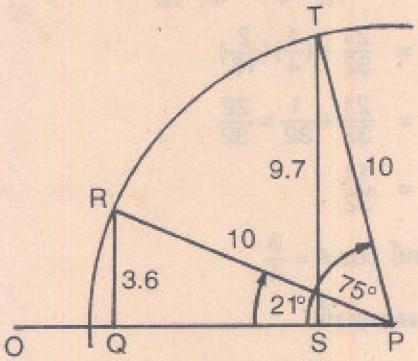


จากรูปวัดมุม A ได้ 42° ดังนั้น $\sin\frac{A}{2} = \sin 21^\circ$

และ $\sin\frac{5A}{2} = \sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$

การประมาณค่า sin 21° และ sin 75°

1. ลาก OP
2. เขียนวงกลมรัศมี 10 cm. จุดศูนย์กลางที่ P
3. ลาก RP ทำมุม 21° กับ OP, TP ทำมุม 75° กับ OP
4. ลาก PQ ตั้งฉากกับ OP, ลาก TS ตั้งฉากกับ OP



จากรูปสามเหลี่ยม PQR

$$\sin 21^\circ = \frac{RQ}{PR} = \frac{3.6}{10} = 0.36$$

จากรูปสามเหลี่ยม PST

$$\sin 75^\circ = \frac{ST}{PT} = \frac{9.7}{10} = 0.97$$

ดังนั้น $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = (0.36)(0.97) = 0.3492$

จากค่าในตัวเลือก

1. $\frac{11}{32} = 0.34375$ 2. $\frac{11}{16} = 0.6875$

3. $\frac{9}{16} = 0.5625$ 4. $\frac{9}{12} = 0.75$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

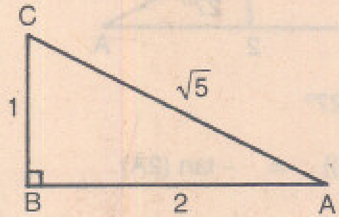
10. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตร arcsin (-x) = -arcsin x จะได้

$$\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = \tan(-2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$$

$$= -\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังภาพ



จะได้ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ และ $\tan A = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) = A = \arctan(\frac{1}{2})$

$$\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2\arctan(\frac{1}{2}))$$

$$= \frac{-2\tan(\arctan(\frac{1}{2}))}{1-(\tan(\arctan(\frac{1}{2})))^2}$$

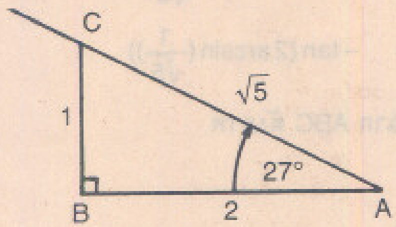
$$= \frac{-2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$

เราประมาณค่ามุม $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$ ก่อนดังนี้

ให้ $A = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$ จะได้ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่ AB = 2 และ BC = 1



จากรูปวัดมุม A ได้ A = 27°

$$-\tan\left(2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\tan(2A)$$

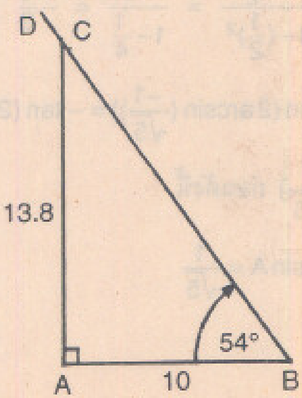
$$\tan\left(2\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\tan(2(27^\circ))$$

$$= -\tan 54^\circ$$

เพราะว่า $-\tan 54^\circ < 0$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

การประมาณค่า tan 54°

1. ลาก AB ยาว 10 cm.
2. ลาก DB ทำมุม 54° กับ AB
3. ลาก AC ตั้งฉากกับ AB
4. วัดระยะทาง AC ได้ 13.8



เพราะฉะนั้น $\tan(54^\circ) = \frac{AC}{AB}$

$= \frac{13.8}{10}$

$= 1.38$

ดังนั้น $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) = -\tan 54^\circ$

$= -1.38$

พิจารณาตัวเลือก

1. -1
2. 1
3. $\frac{4}{3} = 1.333$
4. $\frac{-4}{3} = -1.333$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เพราะว่า $0 \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น $0 \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqslant \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant \frac{\pi}{4}$

$\frac{-\pi}{4} \leqslant -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leqslant 0$

$\frac{-\pi}{4} \leqslant \arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}}) \leqslant 0$

$\frac{-\pi}{2} \leqslant 2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}}) \leqslant 0$

เพราะฉะนั้น $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

11. ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$

$4(x^2-12x+36)+9(y^2+8y+16)=-144+144+144$

$4(x-6)^2+9(y+4)^2=144$

$\dfrac{(x-6)^2}{6^2}+\dfrac{(y+4)^2}{4^2}=0$

จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(6, -4)$

ความชันของเส้นตรง $3x+4y=5$ มีค่าเท่ากับ $-\dfrac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นความชันเส้นตรงที่โจทย์ต้องการเท่ากับ $\dfrac{4}{3}$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(6, -4)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x+4y=5$

คือ
$$\begin{aligned} y-(-4) &= \frac{4}{3}(x-6) \\ 3y+12 &= 4x-24 \\ 4x-3y-36 &= 0 \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

วิธีลัด เส้นตรง $ax+by=c$ และ $bx-ay=k$ ตั้งฉากกันเสมอ

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $3x+4y=5$ คือ $4x-3y=k$

เพราะว่า $4x-3y=k$ ต้องผ่านจุด $(6, -4)$

เพราะฉะนั้น $k=4(6)-3(-4)=36$

สรุปเส้นตรงที่ต้องการคือ $4x-3y=36$, $4x-3y-36=0$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 เพราะว่า $(6, -4)$ ต้องอยู่บนเส้นตรง

เพราะฉะนั้นแทนค่า $x=6$, $y=-4$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $4x-3y+12=4(6)-3(-4)+12 \neq 0$

ตัวเลือก 2. $4x-3y-12=4(6)-3(-4)-12 \neq 0$

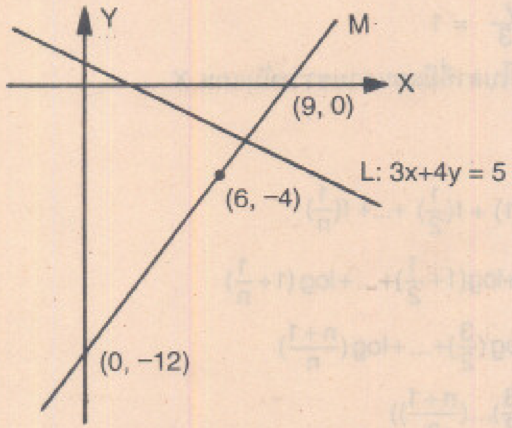
ตัวเลือก 3. $4x - 3y - 36 = 4(6) - 3(-4) - 36 = 0$

ตัวเลือก 4. $4x - 3y + 36 = 4(6) - 3(-4) + 36 \neq 0$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

1. เขียนจุด (6, −4)
2. ลากเส้นตรง L: $3x+4y = 5$
3. ลากเส้นตรง M ผ่านจุด (6, −4) และตั้งฉากกับ L



จากลักษณะของเส้นตรง M และการวัดระยะทางจะได้จุดตัดแกน X คือ (9, 0) และจุดตัดแกน Y คือ (0, −12)

	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y
ตัวเลือก 1.	(−3, 0)	(0, 4)
ตัวเลือก 2.	(3, 0)	(0, −4)
ตัวเลือก 3.	(9, 0)	(0, −12)
ตัวเลือก 4.	(−9, 0)	(0, 12)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

12. ตอบ 3.

แนวคิด $\quad BAB' = [x\ y]\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$[12] = [3x-7y \;\; 7x-4y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [(3x-7y)\,x + (7x-4y)\,y]$$

$$12 = (3x-7y)\,x + (7x-4y)\,y$$

$$= 3x^2 - 7xy + 7xy - 4y^2$$

$$3x^2 - 4y^2 = 12$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$$

เป็นรูปไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางทับแกน X

13. ตอบ 3.

แนวคิด $\quad f(1) + f(\frac{1}{2}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$

$$= \log(1+1) + \log(1+\frac{1}{2}) + \ldots + \log(1+\frac{1}{n})$$

$$= \log(2) + \log(\frac{3}{2}) + \ldots + \log(\frac{n+1}{n})$$

$$= \log((2)(\frac{3}{2})\ldots(\frac{n+1}{n}))$$

$$= \log(n+1) = f(n)$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบมีลักษณะของโจทย์และตัวเลือก เป็นสูตรดังนั้นแทนค่า $n = 1$ ก็พอที่จะตัดตัวเลือกได้

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $f(1) = \log(1+1) = \log 2$

ตัวเลือกแต่ละตัวเมื่อ $n = 1$ จะได้ ค่าต่างๆ ดังนี้

1. $f(1+1) = f(2) = \log(1+2) = \log 3$
2. $f(n) = f(1) = \log(1+1) = \log 2$

3. $f(\frac{1}{n}) = f(1) = \log(1+1) = \log 2$

4. $f(\frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{2}) = \log(1+\frac{1}{2}) \neq \log 2$

สรุปตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เมื่อ $n = 2$ จะได้ว่า $f(1) + f(\frac{1}{2}) \neq f(\frac{1}{2})$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

14. ตอบ 1.

แนวคิด สมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นจริงเมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = x$

ดังนั้น $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

$$(x^{\frac{1}{2}})^{x^2} = x^3$$

$$x^{\frac{x^2}{2}} = x^3$$

$$\log(x^{\frac{x^2}{2}}) = \log x^3$$

$$\frac{x^2}{2}\log x = 3 \log x$$

$$(\frac{x^2}{2} - 3)\log x = 0$$

$\log x = 0$ หรือ $\frac{x^2}{2} - 3 = 0$

$x = 1$ หรือ $x^2 = 6$

$x = 1$ หรือ $x = \sqrt{6}$

สรุป คำตอบของสมการคือ $x = 1, \sqrt{6} \cong 2.45$ และ $\{1, \sqrt{6}\}$ เป็นสับเซตของ $[0, 3]$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 $A = \{x \mid (\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3\}$

เพราะว่า $(\sqrt{|x|})^{x} \geqslant 0$ เพราะฉะนั้น $x^3 \geqslant 0$

ดังนั้น $x \geqslant 0$ ซึ่งจะได้ว่า $A \subset [0, \infty)$

เพราะฉะนั้นแต่ละตัวเลือกเราจึงสนใจเฉพาะกรณีส่วนที่เป็นสับเซตของ $[0, \infty)$

1. $[0, 3]$ 2. $[2, 4]$

3. $[2, 3]$ 4. $[1, 2]$

ถ้า $A \subset [2, 3]$ แล้ว $A \subset [0, 3]$

ถ้า $A \subset [1, 2]$ แล้ว $A \subset [0, 3]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า มิฉะนั้นโจทย์ข้อนี้ผิดแน่นอน

ต่อไปเราแทนค่า $x = 1$ จะได้ว่า $(\sqrt{|1|})^{1} = 1^3$

เพราะฉะนั้น $1 \in A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 จากสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

เห็นได้ชัดเจนว่า $x = 1$ เป็นคำตอบ

แต่ $1 \notin [2, 4]$ และ $1 \notin [-3, -2] \cup [2, 3]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $(\sqrt{|x|})^{x^2} \geqslant 0$ เพราะฉะนั้น $x^3 \geqslant 0$ ดังนั้น $x \geqslant 0$

ให้ $A = \{x \in R \mid (\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3\}$

เพราะฉะนั้น $A \subset [0, \infty)$

ถ้า $A \subset [-2, -1] \cup [1, 2]$ แล้ว $A \subset [1, 2]$ และ $A \subset [0, 3]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งดีกว่า

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกทั้ง 2 แบบนี้ นักเรียนอาจจะคิดว่าเหมือนกัน แต่ที่ต้องเขียนให้ดูทั้ง 2 แบบ เพื่อสนับสนุนเหตุผลที่ว่าการตัดตัวเลือกนั้น นักเรียนอาจจะใช้เหตุผลอะไรก่อนก็ได้ ขอให้ตัดตัวเลือกได้ก็พอ

15. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ไมเนอร์ของ a_{12} คือ $\det\left(\begin{bmatrix} b & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}\right) = -b-c$

$C_{12}(A) = (-1)^{1+2}$ (ไมเนอร์ของ a_{12})

$1 = (-1)(-b-c)$

$1 = b+c$

เพราะว่า $\det(A) = a(-1-1)-(-1)(-b-c)+0$

$-5 = -2a-(b+c)$

และ $b+c=1$ เพราะฉะนั้น $-5=-2a-1$ สรุป $a=2$

16. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$

ดังนั้นเราพิจารณาสมการ

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$0 = (1)(5-0)-0+(-x^2)(6-x)$$

$$0 = 5-6x^2+x^3$$

$$0 = (x-1)(x^2-5x-5)$$

เพราะว่า $x^2 5x-5=0$ มีรากเป็น

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(-5)}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $(\begin{bmatrix}1&0&-x^2\\2&1&0\\x&3&5\end{bmatrix})=0$ มีเซตคำตอบเป็น $\left\{1,\frac{5+3\sqrt{5}}{2},\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$

ข้อแนะนำ ขณะที่นักเรียนได้สมการ $0=5-6x^2+x^3$ เมื่อสังเกตที่ตัวเลือก พบว่าทุกตัวเลือกมี $x=1$ เป็นสมาชิก แสดงว่า $x=1$ เป็นรากของสมการ $0=5-6x^2+x^3$ แน่นอน ดังนั้นเอา $x-1$ ไปหาร $5-6x^2+x^3$ ได้ x^2-5x-5 จะได้ $0=(x-1)(x^2-5x-5)$ เร็วขึ้น

17. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 เพราะว่า $\overrightarrow{CA}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB}=2\bar{i}+3\bar{j}$

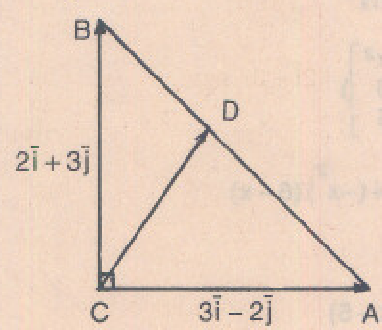
$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ และ $|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

เพราะว่า $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(3)(2)+(-2)(3)=0$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

เพราะว่า $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DB}|=3:2$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AB})$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CA}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{CA}+\frac{3}{5}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\\ &= \overrightarrow{CA}+\frac{3}{5}(-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{2}{5}(3\bar{i}-2\bar{j})+\frac{3}{5}(2\bar{i}+3\bar{j})\\ &= \frac{1}{5}(12\bar{i}+5\bar{j})\end{aligned}$$

สรุป $|\overrightarrow{CD}|=\frac{1}{5}\sqrt{144+25}=\frac{13}{5}=2.6$

วิธีที่ 2 บังเอิญ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากจึงได้ว่า $C\hat{A}D=45^\circ$

และ $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{CB}|^2}=\sqrt{13+13}=\sqrt{26}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2-2\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos C\hat{A}D$

$$\begin{aligned}&=13+(\tfrac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|)^2-2\cdot\sqrt{13}\cdot\tfrac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &=13+\frac{(9)(26)}{25}-2\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\ &=13+\frac{234}{25}-\frac{78}{5}\\ &=\frac{325+234-390}{25}=\frac{169}{25}\end{aligned}$$

สรุป $|\overrightarrow{CD}|=\frac{13}{5}=2.6$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 จากโจทย์ให้ $\overrightarrow{CA}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB}=2\bar{i}+3\bar{j}$

ดังนั้นให้ C (0, 0) , A (3, -2) และ B (2, 3)

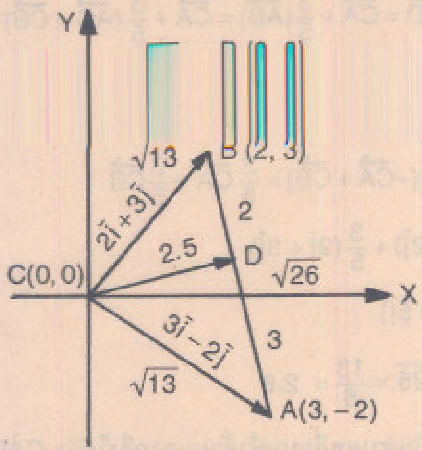
จะได้ $\overrightarrow{CA}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB}=2\bar{i}+3\bar{j}$ ตามเงื่อนไขของโจทย์

ลากเส้นตรง AB แล้ววัดระยะทางด้วยไม้บรรทัดได้ความยาวโดยประมาณของ

$|AB|=5$ (หมายเหตุค่าจริง $=\sqrt{26}=5.099$)

ให้ D เป็นจุดที่ห่างจาก A เท่ากับ 3

ดังนั้นจะได้ $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DB}|=3:2$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์



วัดความยาว $|\overrightarrow{CD}|$ ได้ 2.5 เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $\frac{9}{5} = 1.8$ 2. $\frac{11}{5} = 2.2$

3. $\frac{13}{5} = 2.6$ 4. $\frac{14}{5} = 2.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เนื่องจากโจทย์ถามว่า $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับเท่าใด

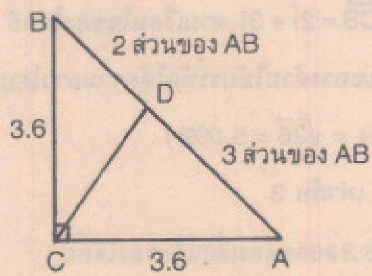
ดังนั้นเราไม่จำเป็นต้องใช้พิกัดจริงก็ได้

จากเหตุผล $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{13} = 3.6$ นิ้ว, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{13} = 3.6$ นิ้ว

และ $\overrightarrow{CA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CB}$

ดังนั้นใช้สามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = \sqrt{13} = 3.6$

วัดความยาว AB ได้ประมาณ 5 นิ้ว



แบ่ง AB ออกเป็น 5 ส่วนเท่าๆ กัน และ $|AD| = 3$

วัดความยาว CD ได้ 2.6 นิ้ว สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

18. ตอบ 1.

แนวคิด $A(-5, 0), B(3, 6), C(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ และ $D(a, b)$

$AB = (3-(-5))\bar{i} + (6-0)\bar{j} = 8\bar{i} + 6\bar{j}$

$CD = (a - \frac{2}{5})\bar{i} + (b - (-\frac{1}{5}))\bar{j} = (a - \frac{2}{5})\bar{i} + (b + \frac{1}{5})\bar{j}$

จากสูตร เวกเตอร์ขนาด k หน่วย ทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ คือ $k\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ 2 หน่วย ทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)$

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น} \qquad \overrightarrow{CD} &= 2\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \\
|\overrightarrow{AB}| \cdot \overrightarrow{CD} &= 2\overrightarrow{AB} \\
(\sqrt{8^2+6^2})\overrightarrow{CD} &= 2(8\bar{i} + 6\bar{j}) \\
10\overrightarrow{CD} &= 16\bar{i} + 12\bar{j} \\
\overrightarrow{CD} &= \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}
\end{aligned}
$$

$$(a - \frac{2}{5})\bar{i} + (b + \frac{1}{5})\bar{j} = \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น $a - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$ และ $b + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$

$a = 2$ และ $b = 1$

สรุป $a+b = 3$

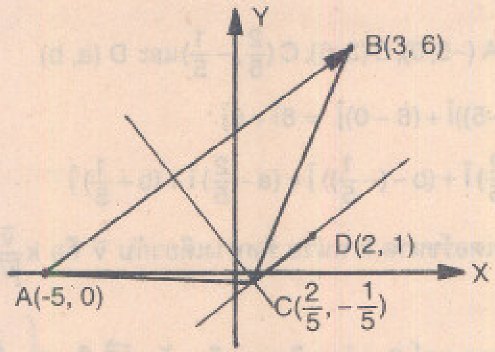
การตัดตัวเลือก เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. เขียนจุด $A(-5, 0)$, $B(3, 6)$ และ $C(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ ใช้หน่วยเซนติเมตร

2. ลากเส้นตรง AB

3. ลากเส้น CD ให้ $\overline{CD}$ มีทิศเดียวกับ $\overline{AB}$ และ CD ยาว 2 เซนติเมตร

4. วัดพิกัดของจุด D ได้เป็น (2, 1)



เพราะฉะนั้น a = 2, b = 1 และ a + b = 3

เมื่อดูจากค่าในตัวเลือก เราเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

19. ตอบ 3.

แนวคิด

$$z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z^5 = (\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^5 = \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= \cos(2\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1+z^5 = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{1}{1+z^5} = \frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2(\frac{1}{3-\sqrt{3}i})$$

$$= 2\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}i}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) = \frac{2(3+\sqrt{3}i)}{9+3}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

สรุป ส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

หมายเหตุ ถ้านักเรียนจำสูตรการเปลี่ยน $z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ เป็น

$z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ ไม่ได้ ก็สามารถหาค่า z^5 ได้โดยการคูณทีละตัว หรือ

ใช้ผลคูณทวินามก็ได้

จาก $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 5ab^4 + b^5$

จะได้ $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ เหมือนกัน

ขอแนะนำ การหาผลคูณโดยไม่ต้องคิดเลขในลักษณะของเศษส่วน

$$z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2z = 1+\sqrt{3} \qquad \underline{\hspace{4cm}}(1)$$

$$(2z)^2 = (1+\sqrt{3}i)^2 = 1+2\sqrt{3}i-3$$

$$4z^2 = -2+2\sqrt{3}i$$

$$2z^2 = -1+\sqrt{3}i$$

$$(2z^2)^2 = (-1+\sqrt{3}i)^2 = 1-2\sqrt{3}i-3$$

$$4z^4 = -2-2\sqrt{3}i$$

$$2z^4 = -1-\sqrt{3}i \qquad \underline{\hspace{4cm}}(2)$$

จาก (1), (2), $4z^5 = (1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i) = -1-2\sqrt{3}i+3 = 2-2\sqrt{3}i$

$$z^5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. ตอบ 4.

แนวคิด อนุกรมเรขาคณิต $1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3}+\ldots$

มีพจน์แรก a = 1, อัตราส่วนร่วม $r=\frac{2^x}{1+2^x}$

เพราะว่า $\left|\frac{2^x}{1+2^x}\right|<1$ เพราะฉะนั้น

$$1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3}+\ldots = \frac{a}{1-r}$$

$$9 = \frac{1}{1-(\frac{2^x}{1+2^x})}$$

$$9 = \frac{1+2^x}{1+2^x-2^x}$$

$$9 = 1+2^x$$

$$2^x = 8=2^3$$

$$x = 3$$

อนุกรม $\log_2 3-(\log_2 3)^2+(\log_2 3)^3-(\log_2 3)^4+\ldots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรก $a=\log_2 3$ และอัตราส่วนร่วม $r=-\log_2 3$

เพราะว่า $|r|=|-\log_2 3|=\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{0.47}{0.301}>1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม$\log_2 3-(\log_2 3)^2+(\log_2 3)^3-(\log_2 3)^4+\ldots$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

หมายเหตุ การแสดงว่า $\log_2 3>1$ อาจใช้เหตุผลดังนี้

เพราะว่า $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและ 3>2

เพราะฉะนั้น $\log_2 3>\log_2 2=1$

21. ตอบ 3.

แนวคิด $a_n = \dfrac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3} = \dfrac{n^4+1}{(\frac{n}{2}(n+1))^2}$

$= \dfrac{4(n^4+1)}{n^2(n+1)^2} = \dfrac{4n^4+4}{n^2(n^2+2n+1)}$

$= \dfrac{4n^4+4}{n^4+2n^3+n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^4+4}{n^4+2n^3+n^2}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{4+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right] = 4$

22. ตอบ 1.

แนวคิด $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$

เพราะว่า x เข้าใกล้ 2 ทางด้านลบ

เพราะฉะนั้นพิจารณากรณี x<2 ดังนั้น $|x-2| = -(x-2)$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-}(-1) = -1$

สรุป $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = -1$

23. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16) = x^{\frac{8}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \dfrac{d}{dx}(x^{\frac{8}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}})$

$$= \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - 16\left(\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{32}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-4)$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$$

ตารางแสดงเครื่องหมาย $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$ บนช่วงต่าง ๆ

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$x^{-\frac{1}{3}}$	$-$	$-$	$-$	∞	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$

สรุป $A = \{x \in r \,|\, f'(x) > 0\} = (-2, 0) \cup (2, \infty)$

การตัดตัวเลือก เมื่อนักเรียนได้ $f'(x) = \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-4)$

โดยการแทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว

ขณะนี้ปัญหาเหมือนกับเซตคำตอบของสมการ $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-4) > 0$

ตรงกับตัวเลือกใด

โดยการแทนค่า $x = -8$ จะได้

$\frac{8}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}}((-8)^2-4)=\frac{8}{3}(-\frac{1}{2})(64-4)=-80 \not> 0$

เพราะฉะนั้น $x=-8$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า $x=-8$ จะได้ $\frac{8}{3}(-1)^{-\frac{1}{3}}((-1)^2-4)=\frac{8}{3}(-1)(-3)=8>0$

เพราะฉะนั้น $x=-1$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ สรุปตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

24. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{-(-h)}$

$= -\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)}$

$= -\lim\limits_{(-h)\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)} = -f'(x)$

เพราะฉะนั้น $-f'(x)=3x-2$ ดังนั้น $f'(x)=-\frac{3}{2}x+2$

และ $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+2)\,dx=-\frac{3x^2}{2}+2x+c$

เพราะว่า $f(0)=-\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2}=c$

ดังนั้น $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$

เพราะว่า $f(1)=-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{2}=0$ เพราะฉะนั้นจุด (1, 0) อยู่บนกราฟของ f

หมายเหตุ 1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\neq f'(x)$

ตัวอย่างเช่น $f(x)=x$ จะได้ $f'(x)=1$

แต่ $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{(x-h)-x}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}-\frac{h}{h}$

$= -1$

$\neq f'(x)$

2. ข้อสอบนี้มีตัวเลือกสำหรับนักเรียนที่คิดเลขผิดด้วยนั้นคือ

ถ้านักเรียนคิดว่า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} = f'(x)$

แล้วจะได้ว่าจุด $(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, 0)$ อยู่บนกราฟของ f ซึ่งผิด

25. ตอบ 2.

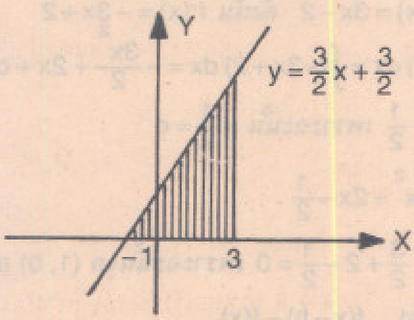
แนวคิด $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,0)$ และ $(3, 6)$

สมการเส้นตรงคือ $\dfrac{y-0}{x-(-1)} = \dfrac{6-0}{3-(-1)}$

$$\frac{y}{x+1} = \frac{6}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

สรุป $f(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2}$

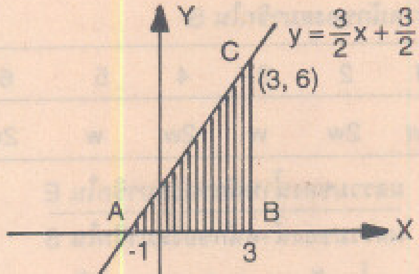


$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (\frac{3}{2}x + \frac{3}{2})\,dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2}x\right]_{x=-1}^{x=3}$$

$$= (\frac{27}{4} + \frac{9}{2}) - (\frac{3}{4} - \frac{3}{2}) = 12$$

วิธีลัด ใช้ประโยชน์จากการวาดรูป



$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} \left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}\right) dx = \text{พ.ท } \Delta ABC$$

$$= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot(4)\cdot(6) = 12$$

26. ตอบ 2.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำลูกแก้วสีน้ำเงิน, สีขาว และสีแดงนำมาเรียงติดกัน ในลักษณะน้ำเงินต้องติดกับแดงและขาวคือ

ขาว น้ำเงิน แดง หรือ แดง น้ำเงิน ขาว

นำไปวางเรียงติดกันในลำดับของวงกลมทำได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ลูกแก้วทั้ง 4 สี ที่เหลือเรียงลำดับได้ 4! = 24 วิธี

สรุป จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ (2) (24) = 48 วิธี

27. ตอบ 3.

แนวคิด ปัญหาข้อนี้เป็นการหาความน่าจะเป็นแบบถ่วงน้ำหนัก

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E = เหตุการณ์ได้แต้ม 1 หรือเลขคู่ = $\{1, 2, 4, 6\}$

ตารางแสดงค่าน้ำหนักของสมาชิกใน S

แต้ม	1	2	3	4	5	6
น้ำหนัก	w	2w	w	2w	w	2w

$$P(E) = \frac{\text{ผลรวมของน้ำหนักของสมาชิกใน E}}{\text{ผลรวมของน้ำหนักของสมาชิกใน S}}$$

$$= \frac{\text{น้ำหนักของ 1, 2, 4, 6 รวมกัน}}{\text{น้ำหนักของ 1, 2, 3, 4, 5, 6 รวมกัน}}$$

$$= \frac{w+2w+2w+2w}{w+2w+w+2w+w+2w} = \frac{7w}{9w} = \frac{7}{9}$$

28. ตอบ 4.

แนวคิด M = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

C = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาเคมี

จากโจทย์จะได้ $P(M)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{4}{9}$ และ $P(M\cap C)=\frac{1}{4}$

เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบไม่ผ่านทั้งสองวิชาคือ $(M\cup C)'$

ความน่าจะเป็นที่จะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชา

$= P((M\cup C)') = 1-P(M\cup C)$

$= 1-[P(M)+P(C)-P(M\cap C)] = 1-[\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{1}{4}] = \frac{5}{36}$

29. ตอบ 4.

แนวคิด คะแนนวิชาสถิติ 8, 5, 4, 2, 1

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{8+5+4+2+1}{5} = \frac{20}{5} = 4$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{5}$

$$= \frac{(8-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(2-4)^2+(1-4)^2}{5}$$

$$= \frac{16+1+0+4+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\sqrt{6}$

ค่าของสัมประสิทธิ์ของความแปรผัน = $\frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ 9, 6, 5, 3, 2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{9+6+5+3+2}{5} = \frac{25}{5} = 5$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{5}$

$$= \frac{(9-5)^2+(6-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2}{5}$$

$$= \frac{16+1+0+4+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\sqrt{6}$

ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผัน = $\frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของความแปรผันระหว่างคะแนนวิชาสถิติ และคะแนนวิชาคณิตศาสตร์

$$= \frac{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของคะแนนวิชาสถิติ}}{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์}}$$

$$= \frac{(\sqrt{6}/4)}{(\sqrt{6}/5)} = \frac{5}{4}$$

วิธีลัด ขอให้นักเรียนสังเกตข้อมูลที่ตัวข้อสอบให้ดีๆ จะเห็นว่าคะแนนข้อมูลคณิตศาสตร์ ได้จากคะแนนข้อมูลสถิติบวกด้วย 1 เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐานจะเท่ากันทำให้ลดเวลาคำนวณลงไป

30. ตอบ 2. หรือ 4.

แนวคิด ข้อมูลชุดที่ 1: 6, 12, 9, 10, 6, 8

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{MAX-MIN}{MAX+MIN} = \frac{12-6}{12+6} = \frac{6}{18} = 0.3333$

ข้อมูลชุดที่ 2: 60, 64, 56, 70, 52, 63

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{MAX - MIN}{MAX + MIN} = \frac{70-52}{70+52} = \frac{18}{122}$

$= 0.1475$

สรุป ข้อมูลชุดที่ 1. กระจายมากกว่าข้อมูลชุดที่ 2.

หมายเหตุ ในกรณีที่ใช้สัมประสิทธิ์การแปรผัน

ข้อมูลชุดที่ 1. $\overline{X}_1 = 8.5, S_1 = 2.141$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{S_1}{\overline{X}_1} = \frac{2.141}{8.5} = 0.2519$

ข้อมูลชุดที่ 2 $\overline{X}_2 = 60.833, S_2 = 5.786$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{S_2}{\overline{X}_2} = \frac{5.786}{60.833} = 0.0951$

จะเห็นได้ว่าข้อมูลชุดที่ 1 กระจายมากกว่าชุดที่ 2

ข้อแนะนำ ในกรณีที่โจทย์ไม่บังคับสูตรที่ใช้วัดการกระจายนักเรียนควรจะเลือกกรณีที่คิดเลขง่ายดีกว่า

การตัดตัวเลือก การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลที่มีค่าแน่นอน จะต้องสรุปว่า มากกว่า, น้อยกว่า หรือเท่ากับได้แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

คำขอร้องจากผู้เขียน การออกข้อสอบในลักษณะนี้สำหรับนักเรียนที่มีความรู้ชนิดแทนค่าตามสูตรแล้วได้คำตอบ คงจะได้ตัวเลือกตามแนวคิดข้างต้น แต่สำหรับนักเรียนที่มีความรู้มากกว่าเช่นรู้ว่าข้อมูลมีหน่วยต่างกัน อาจจะเปรียบเทียบกันไม่ได้ ตัวอย่างเช่น

ชุดที่ 1	6, 12, 9, 10, 6, 8	หน่วยเป็นบาท
ชุดที่ 2	16, 64, 56, 70, 52, 63	หน่วยเป็นล้านบาท

ถ้าเราจะเปรียบเทียบการกระจายลักษณะนี้ต้องทำหน่วยให้เท่ากันก่อนแล้วจึงเปรียบเทียบ ซึ่งจะได้ว่าข้อมูลชุดที่ 2 กระจายมากกว่าชุดที่ 1 คำขอร้องของผู้เขียนตรงนี้ก็คือ หากต้องการให้นักเรียนเปรียบเทียบข้อมูลควรจะระบุหน่วยให้ชัดเจน หรืออย่างน้อยบอกว่าใช้หน่วยเดียวกันก็ยังดี

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ตอบ 4.

แนวคิด $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(S) = \{A \mid A \subset S\}$

การนับจำนวนสับเซต A ของ S ที่มีเงื่อนไข $1 \in A$ และ $7 \notin A$

นับจำนวนสับเซต B ของเซต $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

จะได้ว่าจำนวน B ที่ B เป็นสับเซตของ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ มีจำนวนเท่ากับ

$2^5 = 32$ เซต

เลือก $A = \{1\} \cup B$ เมื่อ B เป็นสับเซตของ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

เพราะฉะนั้น $X = \{A \in P(S) \mid 1 \in A$ และ $7 \notin A\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 32

การตัดตัวเลือก ขณะนี้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้แล้ว

การนับจำนวนสมาชิกของเซต Y

$Y = \{A \in X \mid$ ผลบวกของสมาชิกใน A ไม่เกิน 6$\}$

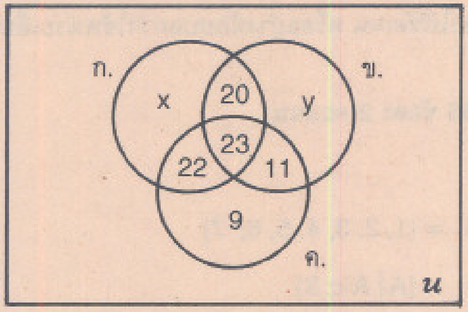
ใช้วิธีแจกนับสมาชิกของเซต Y ดีกว่า ซึ่งมีดังนี้ $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}$

ดังนั้นจำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับ 6

32. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ x = จำนวนคนที่นิยม นาย ก. คนเดียวเท่านั้น

y = จำนวนคนที่นิยม นาย ข. คนเดียวเท่านั้น



เพราะว่าคนทั้ง 100 คนต้องแสดงความนิยมคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน

เพราะฉะนั้น $x+y+20+23+22+11+9 = 100$

$x+y+85 = 100$

$x+y = 15$ ________ (1)

จำนวนคนที่นิยมนาย ก. = $x+20+23+22 = x+65$

จำนวนคนที่นิยมนาย ข. = $y+20+23+11 = y+54$

เพราะว่า นาย ก. ได้รับคะแนนความนิยมมากกว่า นาย ข. อยู่ 6 คะแนน

เพราะฉะนั้น $(x+65) - (y+54) = 6$

$x-y = -5$ ________ (2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = 5$ และ $y = 10$

เพราะฉะนั้น จำนวนคนที่นิยม นาย ก. = 70

จำนวนคนที่นิยม นาย ข. = 64

จำนวนคนที่นิยม นาย ค. = 65

สรุป ตัวเลือก 3 ผิด เพราะว่าคะแนนนิยมเฉพาะ นาย ก. เท่านั้นมีค่าแท้จริง เท่ากับ 5

33. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณอสมการ $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geqslant 1$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} \geqslant 1$$

$$\frac{1}{|x+2|} \geqslant 1$$

พิจาณากรณี $x \neq -2$ จะได้

$$1 \geqslant |x+2|$$

$$-1 \leqslant x+2 \leqslant 1$$

$$-3 \leqslant x \leqslant -1$$

สรุป $A = [-3,-1] - \{-2\} = [-3,-2) \cup (-2,-1]$

$B = \{n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบซึ่ง $n \leqslant -2\} = \{\dots,-4,-3,-2\}$

ดังนั้น $A \cap B = ([-3,-2) \cup (-2,-1]) \cap \{\dots,-4,-3,-2\} = \{-3\}$

สรุป ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ มีค่าเท่ากับ -3

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \cap B \subset B$ เพราะฉะนั้นทุกค่า $x \in A \cap B,\ x \leqslant -2$

เพราะฉะนั้น -1 ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

โดยการแทนค่า $x = -3$ จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4(-3)+4}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geqslant 1$$

ดังนั้น $-3 \in A$ และ $-3 \in A \cap B$

เพราะฉะนั้น –4 ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

โดยการแทนค่า $x = -2$ จะได้

$\dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+4}} = \dfrac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-2 \notin A$ และ $-2 \notin A \cap B$

ขณะนี้เราจะได้ว่า $-1 \notin A \cap B, -2 \notin A \cap B$ และ $-3 \in A \cap B$

ดังนั้นสรุปได้เลยว่า –3 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$

34. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. การแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}
a^4+2a^3-a^2-2a &= a^3(a+2)-a(a+2) \\
&= (a+2)(a^3-a) \\
&= (a+2)a(a^2-1) \\
&= (a+2)a(a+1)(a-1) \\
&= (a-1)a(a+1)(a+2)
\end{aligned}$$

เพราะว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกค่า a ที่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น 3 หาร (a-1) a (a+1) (a+2) ลงตัวทุกค่า a ที่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น 3 หาร $a^4+2a^3-a^2-2a$ ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

สรุป ข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

ให้ $f(x) = 6x^3+17x^3+14x+3$

เพราะว่า $f(-1) = 6(-1)^3+17(-1)^2+14(-1)+3 = 0$

เพราะฉะนั้น (x+1) หาร $6x^3+17x^2+14x+3$ ลงตัว

โดยการตั้งหารยาวจะได้ $f(x)=(x+1)(6x^2+11x+3)$

$f(x) = (x+1)(2x+3)(3x+1)$

ตารางแสดงเครื่องหมายของ (x+1) (2x+3) (3x+1)

	$x<\frac{-3}{2}$	$x=\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{3}$	$x=\frac{-1}{3}$	$x>\frac{-1}{3}$
x+1	–	–	–	0	+	+	+
2x+3	–	0	+	+	+	+	+
3x+1	–	–	–	–	–	0	+
(x+1) (2x+3) (3x+1)	–	0	+	0	–	0	+

เพราะฉะนั้น $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \in [-\frac{3}{2}, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)$

ดังนั้น $\{x \in I^- \mid 6x^3+17x^2+14x+3 \geq 0\}$

$= \{x \in I^- \mid x \in [-\frac{3}{2}, -1] \cup [-\frac{1}{3}, \infty)\}$

$= \{-1\}$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

การแสดงข้อพิสูจน์ว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

จำแนกตามกรณีของค่า a ดังนี้

กรณีที่ 1. a = ..., –3, 0, 3, 6,... (3 หาร a ลงตัว)

จะได้ 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวแน่นอน

กรณีที่ 2. a = ..., –5, –2, 1, 4, 7, ... (3 หาร 9 เหลือเศษ 1)

จะได้ว่า 3 หาร a+2 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัว

กรณีที่ 3. $a = ..., -4, -1, 2, 5, 8, ...$ (3 หาร a เหลือเศษ 2)

จะได้ว่า 3 หาร a+1 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัว

จากทั้งสามกรณีของค่า a จะได้ว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

หมายเหตุ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันจะได้ว่าทุกจำนวนเต็ม a

3 หาร (a+1) (a+2) (a+3) ลงตัว

4 หาร (a+1) (a+2) (a+3) (a+4) ลงตัว

กรณีทั่วไปคือ n หาร (a+1) (a+2)...(a+n) ลงตัว

35. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. เพราะว่า $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$ เป็นเท็จเมื่อ p เป็นจริง, q เป็นเท็จ และ r เป็นจริง ซึ่งจะได้ว่า

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r) = [(T \to F) \wedge (F \to T)] \leftrightarrow (T \to T)$

$= [F \wedge T] \leftrightarrow T = F \leftrightarrow T = F$

สรุปข้อความ ก. ไม่เป็นสัจนิรันดร์

หมายเหตุ การหากรณีที่เป็นเท็จของ $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$ อาจทำได้โดยการตีตารางค่าความจริง ซึ่งเมื่อพบกรณีที่เป็นเท็จเราก็สรุปได้เลยว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาข้อความ ข. เพราะว่า $p \to q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[x \not< 0 \to -x < 0] \equiv \forall x\,[\sim (x \not< 0) \vee (-x < 0)]$

$\equiv \forall x\,[(x < 0) \vee (-x < 0)]$

สรุป $\forall x\,[x \not< 0 \to -x < 0]$ เป็นเท็จ

นั่นคือข้อความ ข. ไม่เป็นสัจนิรันดร์

36. ตอบ 3.

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

$r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

$= \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$

เพราะฉะนั้น r^{-1} เป็นฟังก์ชัน, $D_{r^{-1}} = R, R_{r^{-1}} = [1, \infty)$

$s = \{(x, y) \in R \times R \mid x = |y|\}$

$s^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = |y|\}$

$= \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x|\}$

เพราะฉะนั้น s^{-1} เป็นฟังก์ชัน, $D_{s^{-1}} = R, R_{s^{-1}} = [0, \infty)$

พิจารณาเลือก 1.

เพราะว่า $R_{s^{-1}} = [0, \infty) \subset R = D_{r^{-1}}$ เพราะฉะนั้น $D_{r^{-1} o s^{-1}} = D_{s^{-1}} = R$

เพราะว่า $R_{r^{-1}} = [1, \infty) \subset R = D_{s^{-1}}$ เพราะฉะนั้น $D_{s^{-1} o r^{-1}} = D_{r^{-1}} = R$

เพราะว่า $(r^{-1} \circ s^{-1})(x) = r^{-1}(s^{-1}(x)) = r^{-1}(|x|)$

$= (|x|)^2 + 1 = x^2 + 1$

และ $(s^{-1} \circ r^{-1})(x) = s^{-1}(r^{-1}(x)) = s^{-1}(x^2 + 1)$

$= |x^2 + 1| = x^2 + 1$

สรุป $r^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 2

$D_{r^{-1} o s^{-1}} = D_{r^{-1}} = R$

$(r^{-1} \circ s^{-1})(x) = x^2 + 1 = r^{-1}(x)$ ทุกค่า $x \in R$

สรุป $r^{-1} \circ s^{-1} = r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 3.

$(r^{-1} \circ r^{-1}\ (x) = r^{-1}(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x^2+1)$

$= (x^2+1)^2+1 = x^4+2x^2+2$

$r^{-1}(x) \quad = x^2+1$

เพราะว่ามี $x = 0$ ทำให้ $(r^{-1} \circ r^{-1})(0) = 2 \neq 1 = r^{-1}(0)$

สรุป $r^{-1} \circ r^{-1} \neq r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 4.

$D_{s^{-1} \circ s^{-1}} \quad = \quad R = D_{s^{-1}}$

$(s^{-1} \circ s^{-1})(x) \quad = \quad s^{-1}(s^{-1}(x)) = s^{-1}(|x|)$

$= \quad ||x|| = |x| = s^{-1}(x)$

สรุป $s^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1}$

การตัดตัวเลือก ใช้สมาชิกบางตัวของ r และ r^{-1} ช่วยตัดตัวเลือก

$r \quad = \quad \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2+1\}$

$= \quad \{(1, 0), (2, 1), \ldots\}$

$r^{-1} = \quad \{(0, 1), (1, 2), \ldots\}$

โดยการทดลองแทนค่าบางค่าจะได้ว่า $(r^{-1} \circ r^{-1})(0) = r^{-1}(r^{-1}(0)) = r^{-1}(1) = 2$

และ $r^{-1}(0) = 1$ ดังนั้น $(0, 2) \in r^{-1} \circ r^{-1}$ แต่ $(0, 2) \notin r^{-1}$

เพราะฉะนั้น $r^{-1} \circ r^{-1} \neq r^{-1}$

ดังนั้นเราได้ตัวเลือก 3 เป็นตัวเลือกที่ต้องการ

37. ตอบ 4.

แนวคิด จำแนกค่าของ $g(|x|-x)$ ตามกรณีของ x ดังนี้

กรณีที่ 1. $x = 0$; $g(|x|-x) = g(0) = 0$

กรณีที่ 2. $x > 0$; $g(|x| - x) = g(x - x) = g(0) = 0$

กรณีที่ 3. $x < 0$; $g(|x| - x) = g(-x - x)$

$= g(-2x)$ (เพราะว่า $-2x > 0$)

$= (-2x)^2 = 4x^2$

$= 2x(2x) = 2x(x + x)$

$= 2x(x - (-x)) = 2x(x - |x|)$

สรุป $g(|x| - x) = 2x(x - |x|)$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $g(|x| - x) = g(|-1| - (-1)) = g(2) = 4$

ตัวเลือก 1. $x(|x| - x) = (-1)(|-1| - (-1)) = -2 \neq 4$

ตัวเลือก 2. $x(x - |x|) = (-1)((-1) - |-1|) = 2 \neq 4$

ตัวเลือก 3. $2x(|x| - x) = 2(-1)(|-1| - (-1)) = -4 \neq 4$

ตัวเลือก 4. $2x(x - |x|) = 2(-1)((-1) = |-1|) = 4$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2, และ 3. ทิ้งได้

38. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้เข้าลักษณะของโจทย์ และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นการแทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกจึงได้คำตอบเร็วกว่าวิธีจริง

ตัวเลือก 1. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{3\pi}{4}$ จะได้ $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

แต่ $f(x) = \sqrt{\cos^2\frac{3\pi}{4}} + \cos\frac{3\pi}{4} = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\neq 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cos\frac{3\pi}{4}$

ตัวเลือก 2. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{5\pi}{4}$ จะได้ $\pi \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi$

แต่ $\quad f(x) = \sqrt{\cos^2(\frac{5\pi}{4})} + \cos(\frac{5\pi}{4}) = 0$

$$\neq 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cos\frac{5\pi}{4}$$

ตัวเลือก 4. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{7\pi}{4}$ จะได้ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{4} \leq 2\pi$

แต่ $\quad f(x) = \sqrt{\cos^2\frac{7\pi}{4}} + \cos\frac{7\pi}{4} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 0$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

การหาค่าของ f(x) พิจาณาดังนี้

1. $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x \geq 0$

$\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = \cos x + \cos x = 2\cos x$

2. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\cos \leq 0$

$\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$

3. $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$, $\cos x > 0$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = 2\cos x$

สรุป $f(x) = \begin{cases} 2\cos x \; ; & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ หรือ } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ 0 \; ; & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

ดังนั้น ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $f(x) = 0$ จึงถูกต้อง

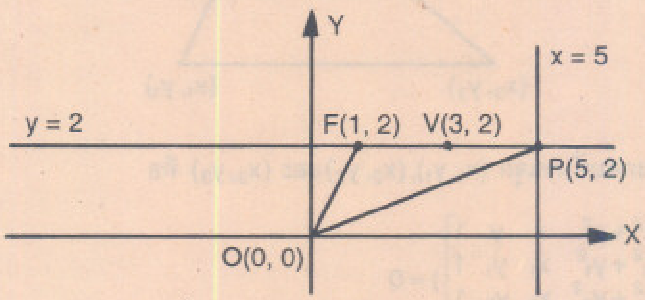
39. ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2 - 4y + 8x = 20$

$$
\begin{aligned}
y^2 - 4y + 4 &= -8x + 24 \\
(y-2)^2 &= -8(x-3) \\
&= 4(-2)(x-3)
\end{aligned}
$$

เป็นรูปพาราโบลามีจุดยอด $V(3,2)$ แกนพาราโบลาขนานแกน X

$c = -2$ โฟกัส $F(1,2)$ และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ $x = 5$ ดังนั้นจุด P คือ $(5,2)$



การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $O(0,0)$ $F(1,2)$ และ $P(5,2)$

วิธีที่ 1 สมมติสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

แทนค่าจุดผ่านเพื่อหาค่า A, B, C

$O(0,0)$; $C = 0$ ______(1)

$F(1,2)$; $1+4+A+2B+0 = 0$ ______(2)

$P(5,2)$; $25+4+5A+2B+0 = 0$ ______(3)

แก้สมการหาค่า A, B, C จะได้ $A = -6, B = \frac{1}{2}, C = 0$

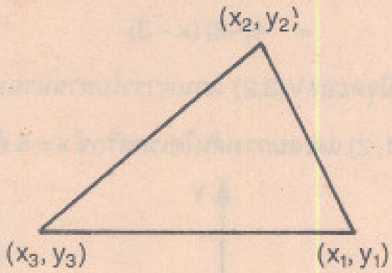
ดังนั้นสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 - 6x + \frac{1}{2}y = 0$

$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}) = 9 + \frac{1}{16}$

$(x-3)^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{145}{6} = r^2$

สรุปกำลังสองของรัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับ $\frac{145}{16}$

วิธีที่ 2 ใช้สูตรความสัมพันธ์ระหว่างสมการค่ากำหนดกับภาคตัดกรวย สูตรสมการวงกลมในรูปแบบค่ากำหนดจะได้



สมการวงกลมที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) คือ

$$\det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

ดังนั้นสมการวงกลมที่ผ่านจุด O(0, 0), F(1, 2) และ P(5, 2) คือ

$$\det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+4 & 1 & 2 & 1 \\ 25+4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{2+4} \det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 5 & 1 & 2 \\ 29 & 5 & 2 \end{bmatrix}\right) \\ &= (x^2+y^2)(2-10) - x(10-58) + y(25-29) \\ &= -8(x^2+y^2) + 48x - 4y \\ &= -2(x^2+y^2) + 12x - y \end{aligned}$$

จัดรูปแบบสมการวงกลมเพื่อหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

$-2(x^2+y^2)+12x-y=0$

$2x^2-12x-2y^2+y=0$

$2(x^2-6x+9)+2(y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{6})=18+\frac{1}{8}$

$(x-3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{145}{8}$

$(x-3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{145}{16}$

วิธีที่ 3 ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ FP ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x = 3$ ต่อไปลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ OF

ความชัน OF เท่ากับ $\frac{2-0}{1-0} = 2$

จุดกึ่งกลาง OF คือ $(\frac{1}{2}, 1)$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง OF คือ $y-1=(-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

แทนค่า $x = 3$ จะได้ $y-1=-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}, y=-\frac{1}{4}$

เพราะว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ OFP อยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ด OF และ FP

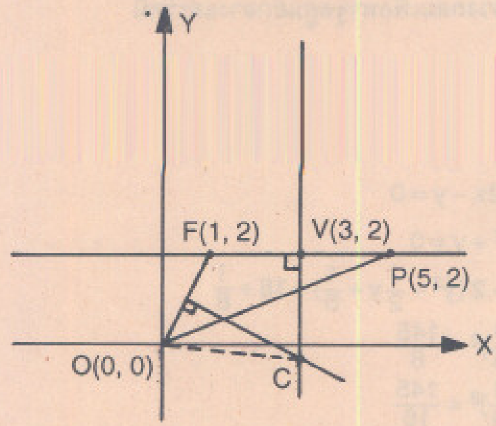
เพราะฉะนั้น $(3, -\frac{1}{4})$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ระยะทางจากจุด (0, 0) ไปยัง $(3, -\frac{1}{4})$ เท่ากับ

$$\sqrt{9+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{145}{16}}$$

สรุป รัศมีกำลังสองเท่ากับ $\frac{145}{16}$

การตัดตัวเลือก เมื่อได้พิกัดจุด O(0, 0), F(1, 2), P(5, 2) ใช้การวาดรูปวัดระยะทางได้ดังนี้



1. แบ่งครึ่ง PF ที่จุด (3, 2) แล้วลากเส้นตั้งฉาก
2. แบ่งครึ่ง OF ที่จุด $(\frac{1}{2}, 1)$ แล้วลากเส้นตั้งฉากตัดกับเส้นแรกที่จุด C จะได้ว่า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม OFP วัดความยาว OC ได้ประมาณ 3

ดังนั้นรัศมี OC ยกกำลังสองได้เท่ากับ 9

เปรียบเทียบกับตัวเลือก

1. $\frac{35}{4} = 8.75$
2. $\frac{37}{4} = 9.25$
3. $\frac{143}{16} = 8.9375$
4. $\frac{145}{16} = 9.0625$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

40. ตอบ ตัวเลือกที่ต้องการไม่มี

แนวคิด สมการ $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ มีจุดศูนย์กลาง (1, 2), จุดยอด (−1, 2) และ (3, 2)

การหาจุดตัดแกน X ของไฮเพอร์โบลา H ทำได้โดยแทนค่า y = 0 จะได้

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(0-2)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}=\frac{13}{9}$$

$$(x-1)^2=\frac{52}{9}$$

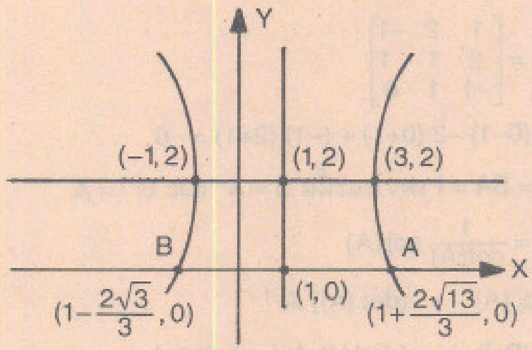
$$x-1=\pm\frac{2\sqrt{13}}{3}$$

$$x=1\pm\frac{2\sqrt{13}}{3}$$

เพราะฉะนั้นจุดตัดแกน X ของไฮเพอร์โบลา H คือ $A(1+\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$ และ $B(1-\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$

ให้ P(x, y) เป็นจุดบนวงรี E จะได้ว่า $|AP|+|BP|=8$

ดังนั้นจุด A, B เป็นจุดโฟกัสของวงรี



โดยบทนิยามของวงรีจะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด $(1-\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$ และ $(1+\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$ ซึ่งคือจุด (1, 0)

มีเหตุผลอยู่หลายเหตุผลที่สรุปได้ว่าทุกตัวเลือกผิด

1. เพราะว่าจุดยอดของทุกตัวเลือกคือ (1, 2) ไม่ใช่ (1, 0)

   เพราะฉะนั้นทุกตัวเลือกไม่ใช่คำตอบ

2. เพราะว่า $A(1+\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0)$ และ $B(1-\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0)$ เป็นโฟกัส

เพราะฉะนั้นแกนเอกของวงรี E คือ แกน X

แต่ทุกตัวเลือกไม่มีสมการใดที่มีแกน X เป็นแกนเอก

ดังนั้นทุกตัวเลือกจึงผิด

การตัดตัวเลือก เมื่ออ่านโจทย์แล้วจะเห็นได้ว่าวงรีที่โจทย์กำหนดให้หามีค่า $a = 4$ แต่ค่า a ของแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น

1. $a = 4$
2. $a = 4$
3. $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$
4. $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

41. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A) = (1)(0-1) - 2(0+1) + (-1)(2+1) = -6$

เพราะว่า $AB = BA = I$ เพราะฉะนั้น $B = A^{-1}$ และ $B^{-1} = A$

จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$

ดังนั้น $\operatorname{adj}(A) = (\det(A))\, A^{-1}$

$\operatorname{adj}(B^{-1}) = (\det(A))\, A^{-1} = (-6)A^{-1}$

$\det(\operatorname{adj}(B^{-1})) = \det((-6)A^{-1})$

$= (-6)^3 \det(A^{-1})$ (เพราะว่า A^{-1} มีมิติ 3×3)

$= \frac{(-6)^3}{\det(A)} = \frac{(-6)^3}{-6} = 36$

หมายเหตุ โดยวิธีลัดนักเรียนต้องจำสูตรนี้ได้

ถ้า x เป็นเมตริกซ์มิติ nxn และ $\det(x) \neq 0$

แล้ว $\det(\operatorname{adj} x) = (\det(x))^{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\det(\operatorname{adj}(B^{-1})) = (\det(B^{-1}))^{3-1} = (\det(A))^2$

$= (-6)^2 = 36$

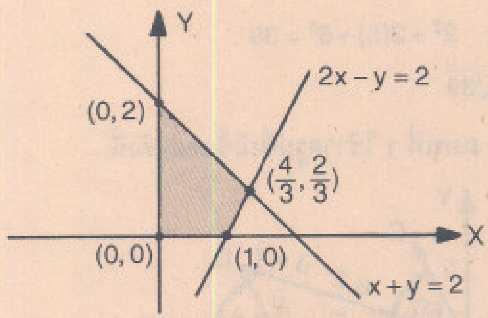
42. ตอบ 2.

แนวคิด ปัญหาหาค่าสูงสุด $A = 6x+y$

ภายใต้อสมการข้อจำกัด $x+y \leq 2$

$2x - y \leq 2$

$x \geq 0,\ y \geq 0$



เขียนกราฟเพื่อหาอาณาบริเวณผลเฉลย

จุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลยคือ (0, 0), (0, 2), (1, 0), $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

จุดมุม	$A = 6x+y$
(0, 0)	0
(0,2)	2
(1, 0)	6
$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{26}{3}$

สรุปค่าสูงสุดของ A เท่ากับ $\frac{26}{3}$

43. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $60°$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 60°$

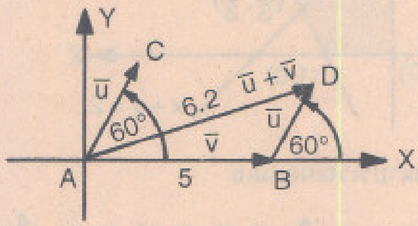
$$5 = 2\cdot|\bar{v}|\cdot(\tfrac{1}{2})$$

ดังนั้น $|\bar{v}| = 5$

$$\begin{aligned} |\bar{u}+\bar{v}|^2 &= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) \\ &= \bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{u}+\bar{v}\cdot\bar{v} \\ &= |\bar{u}|^2+2\,\bar{u}\cdot\bar{v}+|\bar{v}|^2 \\ &= 2^2+2(5)+5^2 = 39 \end{aligned}$$

สรุป $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{39}$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ใช้วาดรูปซึ่งมีขั้นตอนดังนี้



1. ลากเส้นตรง AB ยาว 5 เซนติเมตร
2. ลาก AC ทำมุม $C\hat{A}B = 60°$ และ AC ยาว 2 เซนติเมตร
3. ลาก BD ขนานกับ AC และ CD ขนานกับ AB
4. ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$

จะได้ $|\bar{u}| = 5$ และ $|\bar{v}| = 2$ และความยาว AD เท่ากับ $|\bar{u}+\bar{v}|$

วัดความยาว AD ได้ 6.2 เซนติเมตร

เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. 7   2. 12

3. $\sqrt{29} < 6$ 4. $\sqrt{39} - 6$

สรุปเลือกตัวเลือก 4 ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้เหตุผลว่า $|\bar{u}+\bar{v}| \le |\bar{u}|+|\bar{v}|$

เพราะว่า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u}+\bar{v}| < |\bar{u}|+|\bar{v}|$ ดังนั้น $|\bar{u}+\bar{v}| < 7$

สรุป ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

44. ตอบ 2.

แนวคิด จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับพหุนาม p(x) จะได้ว่า

ถ้า x–c หาร p(x) จะเหลือเศษเท่ากับ p(c)

เพราะว่า x–2 หาร f(x) เหลือเศษ 3 เพราะฉะนั้น $f(2) = 3$

เพราะว่า f(x) เป็นพหุนาม เพราะฉะนั้น $f'(x)$ เป็นพหุนาม

เพราะว่า x–2 หาร $f'(x)$ เหลือเศษ 4 เพราะฉะนั้น $f'(2)=4$

เพราะว่า $f(x) = (x-1)^2 g(x)$

$f(2) = (2-1)^2 g(2)$

เพราะฉะนั้น $3 = g(2)$

และ $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}((x-1)^2 g(x))$

$f'(x) = 2(x-1)\,g(x) + (x-1)^2 g'(x)$

ดังนั้น $f'(2) = 2(2-1)\,g(2) + (2-1)^2 g'(2)$

$4 = (2)(1)(3) + (1)\,g'(2)$

$4 = 6 + g'(2)$

สรุป $g'(2) = -2$

45. ตอบ 1.

แนวคิด

$$\begin{aligned}
(5-12i)\,z^3\,(-3+4i) &= 130\,\bar{z} \\
\left|(5-12i)\,z^3(-3+4i)\right| &= \left|130\,\bar{z}\right| \\
|5-12i|\cdot|z|^3\cdot|-3+4i| &= 130\cdot|\bar{z}| \\
\sqrt{25+144}\cdot|z|^3\cdot\sqrt{9+16} &= 130\cdot|z| \\
13\cdot|z|^2\cdot 5 &= 130 \\
|z|^2 &= 2 \\
|z| &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

46. ตอบ 2.

แนวคิด จากโจทย์กำหนด

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = 1, 2 \\ a_{n-2}+2 & \text{เมื่อ } n = 3, 5, 7, \ldots. \\ 2a_{n-2} & \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases}$$

จะได้ว่า $a_3 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$a_4 = 2a_2 = 2(1) = 2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	3	2	5	4	7	8	9	16

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{101} a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} + a_{101} \\
&= (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots a_{101}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100}) \\
&= (1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 101) + (1 + 2 + 4 + \ldots\ldots + 2^{(\frac{100}{2}-1)})
\end{aligned}$$

เพราะว่า $1+3+5+\ldots+101 = \sum_{n=1}^{51}(2n-1) = 2\sum_{n=1}^{51} n - 51$

$= 2(\frac{51}{2})(51+1)-51 = (51)(52)-51$

$= 51(52-1) = (51)^2$

และ $1+2+4+........+2^{\frac{100}{2}-1} = 1+2+4+........+2^{49}$

$= \frac{(1)(1-2^{50})}{1-2} = 2^{50}-1$

สรุป $\sum_{i=1}^{101} a_i = (51)^2 + 2^{50} - 1$

47. ตอบ 4.

แนวคิด $g(x) = \sum_{n=1}^{10} f_n(x) = \sum_{n=1}^{10} (nx^2 - n^2x)$

$= x^2\sum_{n=1}^{10} n - x\sum_{n=1}^{10} n^2$

$= x^2(\frac{10}{2})(10+1) - x(\frac{10}{6})(10+1)(20+1)$

$= 55x^2 - 385x = 55(x^2-7x)$

เพราะว่า $g(x) = 55(x^2-7x+(\frac{7}{2})^2) - 55(\frac{7}{2})^2$

$= 55(x-\frac{7}{2})^2 - \frac{2695}{4}$

$\geqslant -\frac{2695}{4}$

เพราะฉะนั้น $g(x)$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{7}{2} = 3.5$

48. ตอบ 1.

แนวคิด การแสดงว่า h ไม่ต่อเนื่องที่ x = 1

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$ หาค่าไม่ได้

สรุป $\lim_{x \to 1} h(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น h ไม่ต่อเนื่องที่ x=1

ข้อสังเกต ขณะนี้นักเรียนควรจะขีดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อน เผื่อเวลา

จำเป็นจะต้องเดาคำตอบจะได้ไม่เผลอไปเลือก ตัวเลือก 3. และ 4.

การแสดงว่า h ต่อเนื่องที่ x=2 $h(2) = \frac{1}{2-1} = 1$

$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{x-1} = 1$, $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} 3 - x = 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 2} h(x) = 1 = h(2)$ สรุป h ต่อเนื่องที่ x=2

49. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 $f(x) = \frac{2x-a}{x+b}$

$$f'(x) = \frac{(x+b)(2)-(2x-a)(1)}{(x+b)^2}$$

$$= \frac{2x+2b-2x+a}{(x+b)^2} = \frac{a+2b}{(x+b)^2}$$

$$= (a+2b)(x+b)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(a+2b)(x+b)^{-3}$$

เพราะว่า $f'(0) = 4$ เพราะฉะนั้น $4 = \frac{a+2b}{(0+b)^2}$

จะได้ $4b^2 = a+2b$ ____________ (1)

เพราะว่า $f''(0) = -8$ เพราะฉะนั้น $-8 = (-2)(a+2b)(0+b)^{-3}$

จะได้ $4b^3 = a+2b$ ____________ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $4b^2 = 4b^3$

เพราะว่า $b \neq 0$ เพราะฉะนั้น $b = 1$

ดังนั้นจาก (2) จะได้ $4 = a+2$, $a = 2$

เพราะฉะนั้น $f(0) = \frac{2(0)-a}{0+b} = -\frac{a}{b} = -\frac{2}{1} = -2$

วิธีที่ 2 จาก $f(x) = \frac{2x-a}{x+b}$

จะได้ $(x+b)\,f(x) = 2x - a$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$(x+b)\,f'(x) + f(x) = 2$ ——————— (3)

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$(x+b)\,f''(x) + f'(x) + f'(x) = 0$ ——————— (4)

แทนค่า $x = 0$ ใน (3) จะได้ $(0+b)\,f'(0) + f(0) = 2$

$f(0) = 2 - b\,f'(0) = 2 - 4b$ ——————— (5)

แทนค่า $x=0$ ใน (4) จะได้ $(0+b)\,f''(0) + f'(0) + f'(0) = 0$

$$b\,f''(0) + 2\,f'(0) = 0$$

$$b(-8) + 2(4) = 0$$

$$b = 1$$

จาก (5) จะได้ $f(0) = 2 - 4b = 2 - 4(1) = -2$

50. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^a dx = \int_0^a \frac{x^a}{a^a}\,dx$

$$= \frac{1}{a^a}\int_0^a x^a\,dx = \frac{1}{a^a}\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{1}{a^a}\left(\frac{a^{a+1}}{a+1} - 0\right) = \frac{a}{a+1}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{a+1} = 0.95$

$$a = 0.95\,a + 0.95$$

$$0.05\,a = 0.95$$

สรุป $a = 19$

51. ตอบ 1.

แนวคิด A = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักหน่วยเป็นจำนวนเฉพาะ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
1-9	0-9	3, 5, 7
9 วิธี	10 วิธี	3 วิธี

เพราะฉะนั้น n(A) = (9) (10) (3) = 270

B = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
2, 3, 5, 7	0-9	1,3, 5, 7, 9
4 วิธี	10 วิธี	5 วิธี

เพราะฉะนั้น n(B) = (4) (10) (5) = 200

A∩B = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักหน่วยและหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
2, 3, 5, 7	0-9	3, 5, 7
4 วิธี	10 วิธี	3 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = (4)(10)(3) = 120$

จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะเท่ากับ $n(A \cup B)$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 270 + 200 - 120 = 350$$

การตัดตัวเลือก จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 คือ

101, 103, 105,...,997, 999 มีจำนวน 450 ตัวเท่านั้น

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

52. ตอบ 3.

แนวคิด S = เซตของตัวเลขในบัตรทุกใบ = {00, 01, 02,...,98, 99}

$n(s) = 100$

สมมติต้นขั้วของบัตรที่หยิบขึ้นมาคือหมายเลข xy

เมื่อ $x, y \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

E_1 = เซตของเหตุการณ์ที่ได้รับรางวัลที่ 1 = {xy}

$n(E_1) = 1$ และ $P(E_1) = \frac{1}{100}$

E_2 = เซตของเหตุการณ์ที่ได้รับรางวัลที่ 2

$$= \{\underbrace{x0, x1, x2, \ldots, x9}_{\text{ยกเว้น } xy}, \underbrace{0y, 1y, \ldots, 9y}_{\text{ยกเว้น } xy}\}$$

$n(E_2) = 9 + 9 = 18$ และ $P(E_2) = \frac{18}{100}$

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ และ $P(E_1 \cap E_2) = 0$

P (นายสมชายได้รับรางวัล) = P (นายสมชายได้รางวัลที่ 1 หรือ รางวัลที่ 2)

$$= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{18}{100} - 0 = \frac{19}{100}$$

53. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบนี้ต้องใช้ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก

ถ้า z_1, z_2 มีค่าน้ำหนักเป็น w_1, w_2 ตามลำดับ

แล้วค่าเฉลี่ยของ z เท่ากับ $\dfrac{z_1w_1 + z_2w_2}{w_1 + w_2}$

ให้ z_1 เป็นคะแนนมาตรฐานกลางภาค

z_2 เป็นคะแนนมาตรฐานปลายภาค

เพราะว่าคะแนนกลางภาคคิดเป็น 40% เพราะฉะนั้นค่าน้ำหนักของ z_1 เท่ากับ 40

เพราะว่าคะแนนปลายภาคคิดเป็น 60% เพราะฉะนั้นค่าน้ำหนักของ z_2 เท่ากับ 60

$$\text{สรุปคะแนนมาตรฐานเฉลี่ย} = \frac{z_1(40) + z_2(60)}{40 + 60} = \frac{40z_1 + 60z_2}{100}$$

การหาคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของกัลยา

$$\text{คะแนนมาตรฐานกลางภาค} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{97 - 62}{7} = 5$$

$$\text{คะแนนมาตรฐานปลายภาค} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{40 - 55}{5} = -3$$

$$\text{คะแนนมาตรฐานเฉลี่ย} = \frac{40(5) + 60(-3)}{100} = 0.2$$

การหาคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของปัญญา

$$\text{คะแนนมาตรฐานกลางภาค} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{76 - 62}{7} = 2$$

$$\text{คะแนนมาตรฐานปลายภาค} = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{50 - 55}{5} = -1$$

$$\text{คะแนนมาตรฐานเฉลี่ย} = \frac{40(2) + 60(-1)}{100} = 0.2$$

สรุป คะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของกัลยาได้เท่ากับปัญญา

54. ตอบ 1.

แนวคิด ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 2

ดังนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 2$

$Q_3 - Q_1 = 4$ ______ (1)

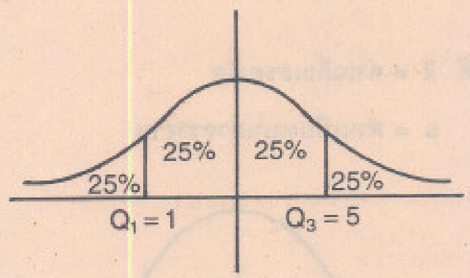
สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{2}{3}$

ดังนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{2}{3} \rightarrow 3Q_3 - 3Q_1 = 2Q_3 + 2Q_1$

$Q_3 - 5Q_1 = 0$ ______ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $Q_1 = 1$ และ $Q_3 = 5$

เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ เพราะฉะนั้นการกระจายภายใต้โค้งปกติคือ



ให้ $\overline{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เพราะว่าพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานทางขวามือของ z = 0.67 เท่ากับ 0.25

เพราะฉะนั้น $P(z<-0.67) = 0.25$ และ $P(z> 0.67) = 0.25$

เพราะว่าจำนวนคะแนนที่น้อยกว่า Q_1 มี 25% ของทั้งหมด

เพราะฉะนั้น z = –0.67 ตรงกับคะแนน $Q_1 = 1$

ดังนั้น $\frac{Q_1 - \overline{x}}{s} = -0.67$

$1 - \overline{x} = -0.67\,s$ ______ (1)

เพราะว่าจำนวนคะแนนที่มากกว่า Q_3 มี 25% ของทั้งหมด

เพราะฉะนั้น $z = 0.67$ ตรงกับคะแนน $Q_3 = 5$

ดังนั้น $\frac{Q_3 - \bar{x}}{s} = 0.67$

$5 - \bar{x} = 0.67\,s$ ____________ (2)

$(1)+(2);\quad 6 - 2\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 3$

และ $5 - 3 = 0.67\,s \rightarrow s = \frac{2}{0.67} = 2.98$

ดังนั้นค่าความแปรปรวน $s^2 = (2.98)^2 = 8.88$

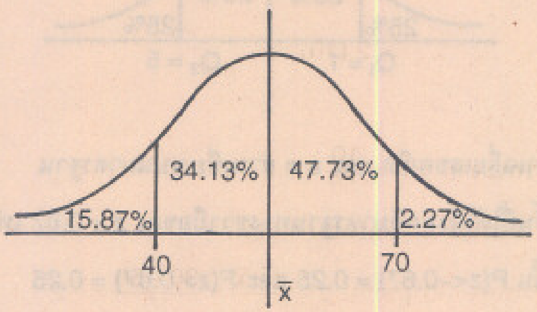
เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ ดังนั้นฐานนิยม $= \bar{x} = 3$

สรุปตัวเลือก 1. เท่านั้นถูกต้อง

55. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน



เพราะว่า $P(0<z<1) = 0.3413$

$P(0<z<2) = 0.4773$

เพราะฉะนั้น $P(z>1) = 0.5-0.3413 = 0.1587$

$P(z>2) = 0.5-0.4773 = 0.0227$

ดังนั้น $P(z<-1) = 0.1587$

เพราะว่าจำนวนข้อมูลที่มีคะแนนน้อยกว่า 40 คะแนนเท่ากับ 15.87%

เพราะฉะนั้น คะแนน 40 ตรงกับ $z = -1$

ดังนั้น $\frac{x-\bar{x}}{s} = z$

$$\frac{40-\bar{x}}{s} = -1$$

$$40-\bar{x} = -s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

เพราะว่าจำนวนข้อมูลที่ได้คะแนนมากกว่า 70 คะแนนมี 2.27%

เพราะฉะนั้น คะแนน 70 ตรงกับ $z = 2$

ดังนั้น $\frac{70-\bar{x}}{s} = 2$

$$70-\bar{x} = 2s \quad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(2)}$$

(2) – (1) ; $30 = 3s$

$$s = 10$$

จาก (2) ; $70-\bar{x} = 2(10)$

$$\bar{x} = 50$$

สัมประสิทธิ์การกระจาย $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{10}{50} = 0.2$

สรุปสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนชุดนี้เท่ากับ 20 เปอร์เซนต์

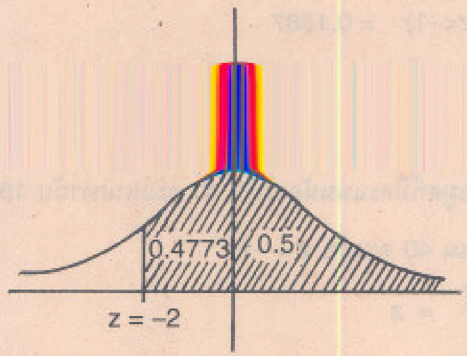
เพราะว่า คะแนน $x = 30$ ตรงกับ $z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{30-50}{10} = -2$

และ $P(x>30) = P(z>-2) = 0.5+P(-2<z<0)$

$$= 0.5+P(0<z<2)$$

$$= 0.5+0.4773$$

$$= 0.9773$$



เพราะฉะนั้นมีนักเรียนสอบได้คะแนนมากกว่า 30 คะแนน อยู่ 97.73%

สรุป ข้อความ ก. ถูก และ ข้อความ ข. ผิด

56. ตอบ 3.

แนวคิด สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $= \frac{s}{\overline{x}}$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{\overline{x}}$$

$$\overline{x} = 4s$$

เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $s = 3$ เพราะฉะนั้น $\overline{x} = 4(3) = 12$

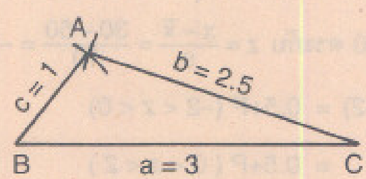
เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = มัธยฐาน

สรุป มัธยฐานของคะแนนสอบ = 12

ตอนที่ 3 เติมคำตอบข้อ 1-6 ข้อละ 3 คะแนน

1. ตอบ $b \cos C + c \cos B = 3$

แนวคิด



จากสูตรตรีโกณมิติ $a = b \cos C + c \cos B$

สรุป $b \cos C + c \cos B = 3$

การแสดงว่า b cos C + c cos B = a

วิธีที่ 1 $b\cos C + c\cos B = b[\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}] + c[\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}]$

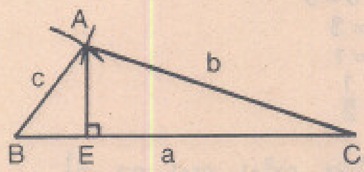
$$= [\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}] + [\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}]$$

$$= \frac{2a^2}{2a} = a$$

หมายเหตุ สูตร $a = b\cos C + c\cos B$ มีในหนังสือรวมสูตร

คณิตศาสตร์หลายเล่ม แต่ไม่มีในหนังสือ ค. 0.11 - ค .016

วิธีที่ 2



ลาก AE ตั้งฉากกับ BC

$\cos B = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{c}$; $BE = c\cos B$

$\cos C = \frac{EC}{AC} = \frac{EC}{b}$; $EC = b\cos C$

$a = BE + EC = c\cos B + b\cos C$

วิธีที่ 3

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2+c^2-2ac\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \\ b^2+c^2 &= 2a^2+b^2+c^2-2ac\cos B-2ab\cos C \\ 2a^2 &= 2a(c\cos B+b\cos C) \\ a &= c\cos B+b\cos C \end{aligned}$$

หมายเหตุ สูตรที่เหมือนกันคือ $b = a\cos C + c\cos A$

$c = a\cos B + b\cos A$

2. ตอบ 4.25

แนวคิด $3^{x^2+2x}-3^{x^2+1}-9^{x+1}+27 = 0$

$$3^{x^2}\cdot 3^{2x}-3^{x^2}\cdot 3-3^{2(x+1)}+3^3 = 0$$

$$3^{x^2}\cdot 3^{2x}-3^{x^2}\cdot 3-3^{2x}\cdot 3^2+3^3 = 0$$

$$3^{x^2}[3^{2x}-3]-3^2[3^{2x}-3] = 0$$

$$[3^{x^2}-3^2][3^{2x}-3] = 0$$

$3^{x^2}-3^2=0$ หรือ $3^{2x}-3=0$

$3^{x^2}-3^2=0$	$3^{2x}-3=0$
$3^{x^2}=3^2$	$3^{2x}=3$
$x^2=2$	$2x=1$
$x=\sqrt{2},-\sqrt{2}$	$x=\frac{1}{2}$

สรุป $A = \left\{x\in R \,\middle|\, 3^{x^2+2x}-3^{x^2+1}-9^{x+1}+27=0\right\}$

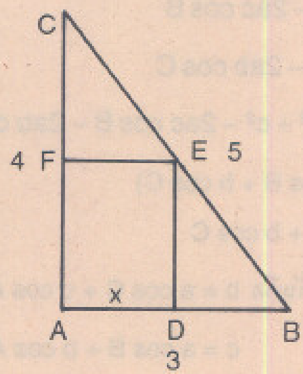
$= \{\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{1}{2}\}$

ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เท่ากับ $(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2+(\frac{1}{2})^2$

$=2+2+\frac{1}{4}=4.25$

3. ตอบ 3.

แนวคิด



ให้ x = ความยาวด้าน AD

ลาก DE ขนานกับ AC และลาก EF ขนานกับ AB จะได้ ADEF เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า บรรจุในสามเหลี่ยม ABC

เพราะว่า AC ขนานกับ DE เพราะฉะนั้น Δ ABC และ Δ BDE คล้ายกัน

ดังนั้น $\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|DB|}$

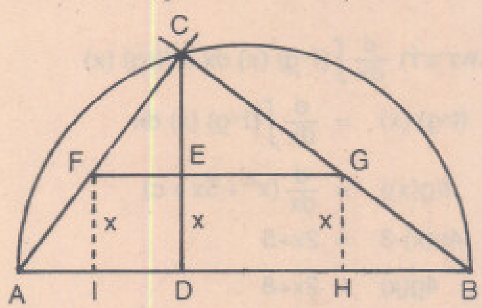
$|DE| = \frac{|DB|\cdot|AC|}{|AB|} = \frac{(3-x)4}{3} = \frac{4}{3}(3-x)$

$$\begin{aligned}
\text{พ.ท. } \square \text{ ADEF} &= |AD|\cdot|DE| = x\left(\tfrac{4}{3}(3-x)\right) = 4x - \frac{4x^2}{3} \\
&= -\frac{4}{3}(x^2-3x) = -\frac{4}{3}\left(x^2-3x+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2\right) + \frac{4}{3}\left(\tfrac{3}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \le 3
\end{aligned}$$

สรุป พ.ท. $\square$ ADEF มีค่ามากสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $x = \frac{3}{2}$

หมายเหตุ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสามเหลี่ยม ABC มีหลายลักษณะ แต่ถ้าต้องการให้มีพื้นที่มากที่สุดมีค่าได้เดียวคือ 3 ดังนั้น ถึงแม้จะบังคับให้ฐานของสี่เหลี่ยมอยู่ด้านตรงข้ามมุมฉาก ก็จะได้พื้นที่มากสุดเท่ากับ 3 เหมือนกัน

กำหนดให้สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก



ลากเส้นจาก C มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด D

ให้ x = ความยาว DE

ลากเส้นผ่าน E ขนานกับ AB ตัดกับ AC และ BC ที่ F และ G ตามลำดับ ลาก GH และ FI ตั้งฉากกับ AB จะได้ FGHI เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าบรรจุในสามเหลี่ยม ABC

$$\frac{|FI|}{|AI|} = \tan F\hat{A}I = \tan C\hat{A}B = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{4}{3}$$

ดังนั้น $|AI| = \frac{3}{4}|FI| = \frac{3}{4}x$

$$\frac{|GH|}{|BH|} = \tan G\hat{B}H = \tan A\hat{B}C = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น $|BH| = \frac{4}{3}|GH| = \frac{4}{3}x$

$$|HI| = |AB| - |AI| - |HB| = 5 - \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}x = 5 - \frac{25}{12}x$$

พ.ท. $\square$ FGHI $= |FI| \cdot |IH| = x(5 - \frac{25}{12}x)$

$$= -\frac{25}{12}(x^2 - \frac{12}{5}x) = -\frac{25}{12}(x^2 - \frac{12}{5}x + (\frac{12}{10})^2) + \frac{25}{12}(\frac{12}{10})^2$$

$$= -\frac{25}{12}(x - \frac{12}{10})^2 + 3 \leq 3$$

สรุป พ.ท. $\square$ FGHI มีค่ามากสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $x = \frac{12}{10}$

4. ตอบ 2.25

แนวคิด เพราะว่า $\frac{d}{dx}\int (f \circ g)(x)\,dx = (f \circ g)(x)$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= \frac{d}{dx}\int (f \circ g)(x)\,dx \\ f(g(x)) &= \frac{d}{dx}(x^2 + 5x + c) \\ 4g(x)-3 &= 2x+5 \\ 4g(x) &= 2x+8 \\ g(x) &= \frac{x}{2}+2\end{aligned}$$

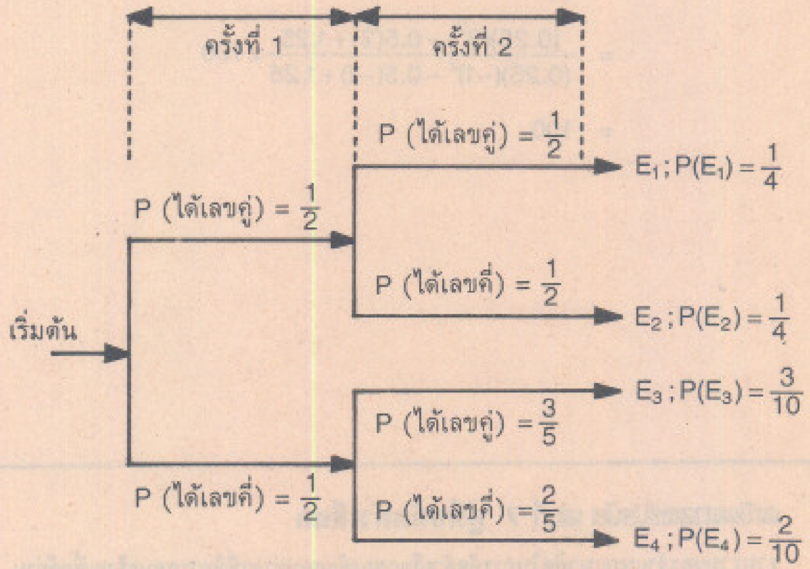
สรุป $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (\frac{x}{2}+2)\,dx = (\frac{x^2}{4}+2x\Big]_{x=0}^{x=1}$

$= (\frac{1}{4}+2)-0$

$= 2.25$

5. ตอบ 0.55

แนวคิด การคำนวณความน่าจะเป็นใช้แผนภูมิต้นไม้เป็นวิธีดีสำหรับปัญหาข้อนี้



ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ครั้งที่สองเป็นเลขคู่

= P (ครั้งแรกได้เลขคู่และครั้งที่สองเป็นเลขคู่) +P (ครั้งแรกได้เลขคี่ และครั้งที่สองเป็นเลขคู่)

$= P(E_1)+P(E_3) = \frac{1}{4}+\frac{3}{10} = 0.55$

6. ตอบ 100

แนวคิด ดัชนีราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2537 เมื่อกำหนดปีฐานเป็นปี พ.ศ. 2533

$$= \frac{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2537}}{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ 2533}} \times 100$$

$$= \frac{y\ (\text{พ.ศ. 2537})}{y\ (\text{พ.ศ. 2533})} \times 100$$

$$= \frac{y(x=3)}{y(x=-1)} \times 100$$

$$= \frac{(0.25)(3^2) - 0.5(3) + 1.25}{(0.25)(-1)^2 - 0.5(-1) + 1.25} \times 100$$

$$= 100$$

คุณสมบัติเกี่ยวกับเซต

ให้ A, B และ C เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U

(1) $\phi \subset A$

(2) $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

(3) $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

(4) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

(5) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

(6) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = A \cap B$

(7) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$

(9) $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

(10) $A \cup B = U$ ก็ต่อเมื่อ $A' \subset B$

(11) $A \cup B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ และ $B = \phi$

(12) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

(13) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cup C \subset B \cup D$

(14) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cap C \subset B \cap D$

(15) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$

(16) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(17) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

(18) $A \cup A = A$

(19) $A \cap A = A$

(20) $A \cup \phi = A$

(21) $A \cap \phi = \phi$

(22) $A \cup U = U$

(23) $A \cap U = A$

(24) $A \cup B = B \cup A$

(25) $A \cap B = B \cap A$

(26) $A \cup A' = U$

(27) $A \cap A' = \phi$

(28) $(A')' = A$

(29) $U' = \phi$

(30) $\phi' = U$

(31) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(32) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(33) $A - B = A \cap B'$

(34) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(35) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(36) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(37) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(38) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

(39) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(40) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(41) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(42) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

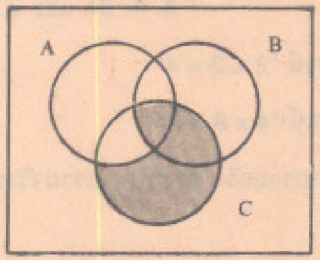
(43) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $B \subset A$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด

(44) ถ้า $n(A) = m$ แล้ว $n(P(A)) = 2^m$ = จำนวนสับเซตของ A

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 30 ข้อละ 1 คะแนน

1.



ส่วนที่แรเงา คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $C-(A\cup B)$ 2. $C-(B'\cap A)$

3. $A'\cap C$ 4. $B'\cap C$

2. ถ้า $A=[1,3), B=(2,4]$ และ $C=(3,5)$ แล้ว

คือกราฟของเซตใดต่อไปนี้

1. $(A\cup C)-B$ 2. $(C\cup B)-A$

3. $(A\cup B)-C$ 4. $(A\cup C)-B'$

3. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า 5 หาร m เหลือเศษ 4 และ 5 หาร n เหลือเศษ 2 แล้ว 5 หาร (m + n) เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

4. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว $a < b$

   ข. ถ้า $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ แล้ว $a < b$

   ข้อใดสรุปได้ถูกต้อง

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก　　　　2. ก. ถูก และ ข. ผิด

   3. ก. ผิด และ ข. ถูก　　　　4. ก. ผิด และ ข. ผิด

5. ถ้ากำหนดให้ p แทนประพจน์ "2 + 2 = 4"

   q แทนประพจน์ "4 x 8 = 24"

   แล้ว ประพจน์ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริง ตรงกับค่าความจริงของประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $p \leftrightarrow \sim q$　　　　2. $\sim p \leftrightarrow q$

   3. $(p \wedge q) \rightarrow p$　　　　4. $(p \vee q) \rightarrow q$

6. ถ้า กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ {–1, 0, 1, 2} แล้ว ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

   1. $\forall x\,[x^2 + 1 < 5]$　　　　2. $\forall x\,[x^2 - 1 \geq 0]$

   3. $\exists x\,[x^2 - 1 < 0]$　　　　4. $\exists x\,[x^2 + 1 \leq 0]$

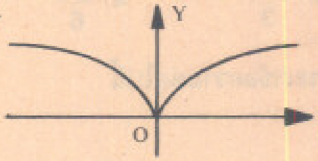
7. เรนจ์ของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-5}\}$ คือข้อใดต่อไปนี้

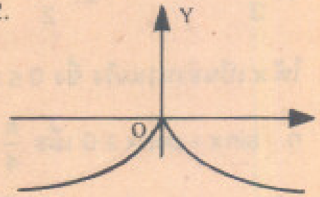
   1. $\{y \in R \mid y \neq 5\}$　　　　2. $\{y \in R \mid y \neq -2\}$

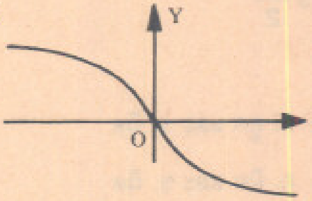
   3. $\{y \in R \mid y \neq 1\}$　　　　4. $\{y \in R \mid y \neq -5\}$

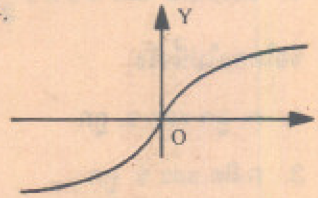
8. ฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

   มีกราฟเป็นรูปใดต่อไปนี้

1. 

2. 

3. 

4. 

9. กำหนด $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = x^2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $(g \circ f)(x) = x - 1$
2. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3. $(f \circ g)(x) = x - 1$
4. $(f \circ g)(x) = x^2 - 1$

10. ถ้า $f(x) = x^3 + 1$ แล้ว $[(f^{-1} \circ f) \circ f^{-1}](9)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 3
3. 9
4. 10

11. สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x - 3y - 11 = 0$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 5y - 7 = 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x - 3y + 1 = 0$
2. $x - 3y - 1 = 0$
3. $x - 3y + 7 = 0$
4. $x - 3y - 7 = 0$

12. กำหนดให้สมการวงรีคือ $9x^2 + 4y^2 = 36$ ข้อใดต่อไปนี้<u>ผิด</u>

1. ความยาวแกนเอก = 6
2. ความยาวแกนโท = 4
3. โฟกัสอยู่ที่ $(0, \pm\sqrt{13})$
4. จุดยอดอยู่ที่ $(0, \pm 3)$

13. ถ้า $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ และ $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ เป็นจุดบนเส้นรอบวง ของวงกลม 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แล้วส่วนโค้ง PQ ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

14. ให้ x เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $0 \le x \le 2\pi$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\sin x + \cos x \ge 0$ เมื่อ $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{4}$

ข. $\tan x \ge 0$ เมื่อ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ หรือ $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$

ข้อใดต่อไปนี้จริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก.ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

15. กำหนดให้ $\log 2 = a$ และ $\log 3 = b$

ค่าของ $\log 45$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + b - 2a$ 2. $1 + a - 2b$

3. $1 - a + 2b$ 4. $1 - b + 2a$

16. ถ้า $27^{(x+y)} = 3^6$ และ $2^{3x+y} = 1$ แล้วค่าของ $3^{x+1} + 3^{y-1}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4 3. 6 4. 10

17. ให้ $\det A = a$ ซึ่ง $a > 0$ และ $a^2 - 2a - 3 = 0$ ค่าของ $\det A^{-1}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 1 4. 3

18. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 7

19. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{เมื่อ } x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \end{cases}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง

ค่าของ a ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x = 2 คือข้อใดต่อไปนี้

1. –2 2. 0 3. 1 4. 2

20. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 3 \\ 2x & , x \geq 3 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) < \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$
2. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) > \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$
3. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7.5$

21. กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ และ

a แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

b แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ x = 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. a = 7, b = 10
2. a = 10, b = 7
3. $a = \dfrac{7}{2}$, b = 10
4. $a = \dfrac{7}{2}$, b = 7

22. กำหนดให้ $g(x) = [f(x)]^4$

ถ้า f(1) = 2 และ $f'(x) = \dfrac{5}{x}$ แล้ว ค่าของ g'(1) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 100 2. 120 3. 140 4. 160

23. ถ้า $f(x) = 3x^2 + 2x$ และ $\int [f(x) + g(x)]dx = x^5 + C$ แล้ว $\int g(x)dx$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^5 - x^3 - x^2 + C_1$
2. $x^5 + x^3 + x^2 + C_1$

3. $\frac{x^6}{6} - x^3 - x^2 + C_1$ 4. $\frac{x^6}{6} + x^3 + x^2 + C_1$

24. ข้อใดต่อไปนี้เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x^2(2x - 3)$

1. $(x^3 - 2)x$ 2. $(2 - x^3)x$ 3. $(2 - x)x^3$ 4. $(x - 2)x^3$

25. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ S

ถ้า $P(A' \cap B) = P(A \cap B') = P(A \cap B) = 0.2$

แล้ว $P((A \cup B)')$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.3 2. 0.4 3. 0.5 4. 0.6

26. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 15 ลูก เป็นสีแดง 1 ลูก สีขาว 2 ลูก นอกนั้นเป็นสีอื่น ถ้าเลือกลูกบอล 3 ลูก จากกล่องใบนี้ ให้ได้สีแดง 1 ลูก และไม่ได้สีขาว จะมีวิธีเลือกได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 54 วิธี 2. 66 วิธี 3. 78 วิธี 4. 94 วิธี

27. ในงานชุมนุมครั้งหนึ่ง มีบุคคลอาชีพต่างๆ เข้าชุมนุม 300 คน ในจำนวนนี้มีอาชีพทนายความ 160 คน อาชีพขายประกัน 90 คน ทนายความและขายประกัน 40 คน ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มเลือกตัวแทน 1 คน ที่ไม่เป็นทนายความและไม่ขายประกัน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{2}{15}$ 3. $\frac{3}{10}$ 4. $\frac{17}{30}$

28. บริษัทแห่งหนึ่งจำแนกลูกจ้างเป็น 2 กลุ่ม คือคนงานและพนักงาน โดยที่คนงานมีค่าจ้างรายวันเฉลี่ย 120 บาทต่อคน พนักงานมีค่าจ้างรายวันเฉลี่ย 440 บาทต่อคน ถ้าจำนวนคนงานเป็น 3 เท่าของจำนวนพนักงาน แล้วลูกจ้างของบริษัทนี้มีค่าจ้างรายวันเฉลี่ยต่อคน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 200 บาท 2. 266 บาท 3. 288 บาท 4. 360 บาท

29. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 40 และค่าพิสัยเท่ากับ 20 ดังนั้นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของข้อมูลชุดนี้ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 0 และ 40 2. 10 และ 30 3. 20 และ 60 4. 30 และ 50

30. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยตัวเลขต่อไปนี้

3 8 3 12 9 9 5 30 8 7

ในการพิจารณาค่ากลางของข้อมูลชุดนี้ ควรใช้ค่าในข้อใดต่อไปนี้ จึงจะเหมาะสมที่สุด

1. กึ่งกลางพิสัย 2. มัธยฐาน 3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 4. ฐานนิยม

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. กำหนดให้ $P(X)$ คือเพาเวอร์เซตของเซต X

ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{4, 5, 6, 7\}$

แล้วเซต $[P(A)-P(B)]$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 2. 17 3. 28 4. 29

32. ถ้า $[a, b]$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{x+7} \geq |x-5|$

แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 2. 11 3. 17 4. 19

33. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|8x+7| \geq 6$

และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|2x-3| < 4$

แล้ว B – A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-\frac{1}{8}, \frac{7}{2})$ 2. $(-\infty, -\frac{13}{8}]$

3. $(-\infty, -\frac{13}{8}] \cup (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$ 4. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8})$

34. กำหนดให้ $P = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

$Q = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

และความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in P \times Q \mid 2x - y = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_r - R_r = \{-1, 1, 3, 4\}$ 2. $R_r - D_r = \{-2, 6\}$

3. $Q - R_r = \{-6, 0\}$ 4. $P - D_r = \{4\}$

35. กำหนด $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$

$B = \{x \mid x(x-1)(x-2) = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $\{(3, 0), (-1, 1)\}$ 2. $\{(3, 2), (1, -1)\}$

3. $\{(-3, 1), (1, 2), (1, 0)\}$ 4. $\{(-3, 1), (1, 2), (-3, 0)\}$

36. ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(0) = 2$, $f(1) = 3$

และ $f(x+2) = 2f(x) - f(x+1)$ ทุกๆ $x \in R$

แล้ว $f(3)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. 5 3. 7 4. 13

37. ให้ p แทน "3^2 เป็นจำนวนคู่" q แทน "π เป็นจำนวนอตรรกยะ"

และ r เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ประพจน์ $p \wedge (q \rightarrow r)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. ประพจน์ $\sim(r \vee \sim p) \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

38. กำหนดให้ประพจน์ $X \rightarrow Y$ สมมูลกับประพจน์ $Y \vee \sim X$

ประพจน์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $(r \wedge p) \wedge (\sim r \wedge q)$ 2. $(r \wedge p) \vee (r \vee \sim q)$
3. $(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q)$ 4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q)$

39. ถ้า $y = \cos(3x - \pi)$ และ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ แล้ว เมื่อ y มีค่าสูงสุด tan2x จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. –1 3. $\sqrt{3}$ 4. $-\sqrt{3}$

40. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ และมีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรีนี้ มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 2. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$
3. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ 4. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

41. ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และตัดแกน X ที่จุด (4, 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0, –2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 2. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$
3. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ 4. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$

42. ค่าของ $\left[\frac{729^n + 81^{2n}}{27^n + 243^n}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9 2. 27 3. 3^{2n} 4. $3^{\frac{1}{n}}$

43. สมการ $2^{2x+2} - 9(2^x) + 2 = 0$ มีราก 2 ราก

ให้ s เท่ากับผลบวกของรากทั้งสอง

p เท่ากับผลคูณของรากทั้งสอง

ค่าของ s และ p เท่ากับค่าใดในข้อต่อไปนี้

1. $s = -1, p = -2$ 2. $s = -1, p = 2$

3. $s = 1, p = -2$ 4. $s = 1, p = 2$

44. ให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{l} a, b \text{ เป็นจำนวนจริง} \\ \text{และ } a \neq 0, b \neq 0 \end{array} \right\}$

สำหรับเมตริกซ์ A, B ใดๆ ใน M ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \in M$ 2. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \notin M$

3. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \in M$ 4. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \notin M$

45. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} ax & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ x + b & , x > 1 \end{cases}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x = 1 แล้ว (a + b) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –1 2. 1 3. 7 4. 9

46. กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^3$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และมีความชันเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง y = f(x) ที่จุด x = –1 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7x + 3y - 13 = 0$ 2. $11x + 3y - 17 = 0$

3. $-7x + 3y + 1 = 0$ 4. $-11x + 3y + 5 = 0$

47. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + 4$ เมื่อ A, B เป็นจำนวนจริง

ถ้า f(1) = 4 และ f′(0) = 1 แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. 1 3. $\frac{4}{3}$ 4. 2

48. กำหนดให้ $f(x) = (x-1)^2$ และ $g(x) = \int f(x)dx$ โดยที่ $(fg)(2) = 0$

ถ้า $(fg)(0) = a$ และ $(f + g)(0) = b$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$
2. $a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{3}$
3. $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{2}{3}$
4. $a = -\frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$

49. กำหนดให้ $f(x) = px^2 + qx + r$ เมื่อ p, q, r เป็นจำนวนจริง

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ $F(0) = 0$ แล้ว $F(1) + F(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. p
3. q
4. r

50. สมศรีต้องการเรียงกระถางต้นไม้ไว้บนระเบียงบ้านให้เป็นแนวเส้นตรง โดยมีต้นกุหลาบ 3 ต้น โป๊ยเซียน 2 ต้น และมะลิ 4 ต้น จำนวนวิธีที่จะเรียงต้นไม้ทั้งหมด โดยให้ต้นมะลิทุกต้นต้องอยู่ติดกันเสมอ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36
2. 60
3. 720
4. 1260

51. ในการเลือกตัวเลขสามตัวโดยไม่เจาะจงจาก {1, 2, 3, 4} โดยเลือกทีละตัวและไม่ซ้ำกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวเลขสามตัวที่มีผลบวกเป็น 6 เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{3}{4}$

52. จากประวัติของผู้ป่วยของคลีนิคแห่งหนึ่ง ที่ป่วยเป็นโรคหัวใจหรือโรคความดันโลหิตสูง ซึ่งมีจำนวน 50 คน โดยมีผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจ 20 คน มีผู้ป่วยที่เป็นทั้งโรคหัวใจและโรคความดันโลหิตสูง 15 คน

ถ้าสุ่มหยิบประวัติผู้ป่วย 1 ราย แล้วความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะป่วยด้วยโรคหัวใจอย่างเดียว หรือป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{5}$ 2. $\frac{3}{5}$ 3. $\frac{7}{10}$ 4. $\frac{9}{10}$

53. คะแนนสอบวิชาภาษาไทยของนักเรียนห้องหนึ่งเป็นดังนี้

25, 30, 32, 35, 25, 39, 45, 44, 40, 45

ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับ 7.4 และค่ามาตรฐานของคะแนนสอบวิชานี้ของเด็กชายสดเป็น 1.08 แล้วคะแนนสอบของเด็กชายสดเป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. อยู่ระหว่างควอไทล์ที่หนึ่ง และควอไทล์ที่สอง
2. เท่ากับควอไทล์ที่สอง
3. อยู่ระหว่างควอไทล์ที่สอง และควอไทล์ที่สาม
4. เท่ากับควอไทล์ที่สาม

54. ในการสอบย่อยครั้งหนึ่งคะแนนเต็ม 20 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และความแปรปรวนของคะแนนที่นักเรียนสอบได้เป็น 12.5 และ 1.2 ตามลำดับ ถ้าครูจะปรับคะแนนเต็มเป็น 60 คะแนน ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของคะแนนนักเรียนชุดใหม่ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 37.5, 3.6 2. 37.5, 10.8 3. 52.5, 1.2 4. 52.5, 10.8

55. กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2534 เป็น 120 ถ้านายวิบูลย์ได้รับเงินเดือน 8,400 บาท ในปี 2537 เขาจะมีรายได้ที่แท้จริงเมื่อเทียบกับปี 2534 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6,000 บาท 2. 6,720 บาท 3. 7,000 บาท 4. 10,080 บาท

56. ตารางต่อไปนี้แสดงค่าจ้างเฉลี่ยต่อชั่วโมง ของคนงานในโรงงานแห่งหนึ่งในปี พ.ศ. 2530-2533

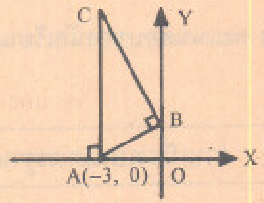
	2530	2531	2532	2533
ค่าจ้างเฉลี่ย (บาท/ช.ม.)	1.20	1.30	1.40	1.50
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100.00	113.00	114.00	116.00

ค่าจ้างเฉลี่ยที่แท้จริงต่อชั่วโมง เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เพิ่มขึ้นปีละ 0.10 บาท/ช.ม.
2. เพิ่มขึ้นปีละ 0.15 บาท/ช.ม.
3. เพิ่มขึ้นปีละ 0.02 บาท/ช.ม.
4. เพิ่มขึ้นปีละไม่เท่ากัน

ตอนที่ 3 ข้อละ 3 คะแนน

1.



จากรูป

ส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ มีความชัน $\frac{1}{2}$

ส่วนของเส้นตรง $\overline{AC}$ ยาวกี่หน่วย

2. นักเรียนห้องหนึ่งมี 48 คน ทำการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ภาษาอังกฤษ และภาษาไทย ปรากฏผลดังนี้

มีนักเรียนสอบได้วิชาคณิตศาสตร์	20 คน
สอบได้วิชาภาษาอังกฤษ	15 คน
สอบได้วิชาภาษาไทย	25 คน
สอบได้วิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว	10 คน
สอบตกทั้งสามวิชา	3 คน

นักเรียนที่สอบได้ทั้งวิชาภาษาไทย และภาษาอังกฤษ มีกี่คน

ก.2539 – 14

3. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & y \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ถ้า $\det(AB + B) = 84$ แล้ว y มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. จำนวนวิธีที่จะเลือกผู้แทน 3 คน จากคน 9 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 4 คน หญิง 5 คน เข้าไปร่วมในคณะกรรมการชุดหนึ่ง โดยอย่างน้อยต้องมีชาย 1 คน มีกี่วิธี

5. พ่อค้าผลิตสินค้าชนิดหนึ่ง x กิโลกรัม ต้องลงทุนทั้งหมด $2x^2 + 6x + 300$ บาท และขายไปกิโลกรัมละ $310 - 2x$ บาท ถ้าพ่อค้าต้องการขายให้กำไรมากที่สุด แล้วเขาต้องผลิตสินค้าชนิดนี้กี่กิโลกรัม

6. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 2 ห้อง คะแนนสอบของนักเรียนเป็นดังนี้

	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ห้องที่ 1	60	3.0
ห้องที่ 2	65	5.0

ถ้า นาย ก. เป็นนักเรียนห้องที่ 1 มีคะแนนมาตรฐานเท่ากับ 2.5
นาย ข. เป็นนักเรียนห้องที่ 2 มีคะแนนมาตรฐานเท่ากับ –2.0
แล้ว คะแนนของนาย ก. และนาย ข. ต่างกันเท่าใด

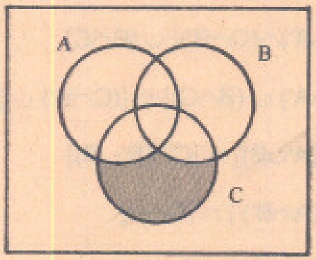
เฉลย คณิตศาสตร์ ก. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1-30 ข้อ 1 คะแนน

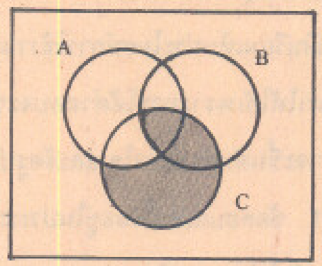
1. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 ข้อสอบแบบนี้การทำโดยวิธีจริงนักเรียนควรเขียนแผนภาพของเวนน์ของตัวเลือกดูว่าตรงกับโจทย์หรือไม่

ตัวเลือก 1. ส่วนแรเงาของ $C - (A \cup B)$ คือ

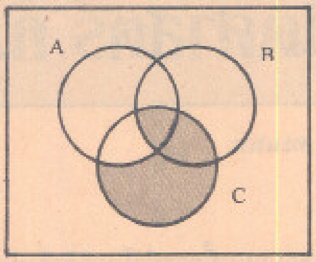


ตัวเลือก 2. ส่วนแรเงาของ $C - (B' \cap A)$ คือ



สรุป เลือกตัวเลือก 2 เป็นคำตอบได้เลย

วิธีที่ 2 พยายามจัดรูปทางพีชคณิตของเซต



เซตในส่วนที่แรเงา $= [C - (A \cup B)] \cup [B \cap C]$

$= [C \cap (A \cup B)'] \cup [B \cap C]$

$= [C \cap (A' \cap B')] \cup [B \cap C]$

$= [(C \cap A') \cap (C \cap B')] \cup [B \cap C]$

$= [(C \cap A') \cup (B \cap C)] \cap [(C \cap B') \cup (B \cap C)]$

$= [C \cap (A' \cup B)] \cap [C \cap (B' \cup B)]$

$= [C \cap (A \cap B')'] \cap [C \cap U]$

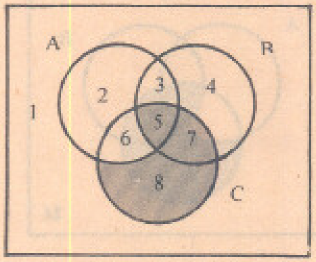
$= [C \cap (B' \cap A)'] \cap C$

$= C \cap (B' \cap A)'$

$= C - (B' \cap A)$

วิธีที่ 2 นี้เขียนให้ดูเพื่อให้นักเรียนเห็นประโยชน์การใช้งานสูตรทางพีชคณิตของเซต แต่ในการสอบจริงไม่แนะนำให้ใช้เพราะการได้คำตอบจะช้ากว่าวิธีแรก นอกจากนั้นวิธีที่ 2 ยังมีปัญหาว่าเราจะขึ้นต้นด้วยเซตใด และจัดรูปไปหาตัวเลือกใดอีกด้วย

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ข้อสอบแบบนี้จัดอยู่ในประเภทโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นเราใส่สมาชิกเข้าไปช่องละตัวของแผนภาพเวนน์ก็จะสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้ ซึ่งเป็นวิธีที่จะได้ 1 คะแนนดีที่สุด



U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,}

A = {2, 3, 5, 6}

B = {3, 4, 5, 7}

C = {5, 6, 7, 8}

ส่วนที่แรเงาคือเซต {5, 7, 8} ต่อไปดูสมาชิกแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $C - (A \cup B) = C - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{8\}$

ตัวเลือก 2. $C - (B' \cap A) = C - \{2, 6\}$

$= \{5, 7, 8\}$

ตัวเลือก 3. $A' \cap C = \{1, 4, 7, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{7, 8\}$

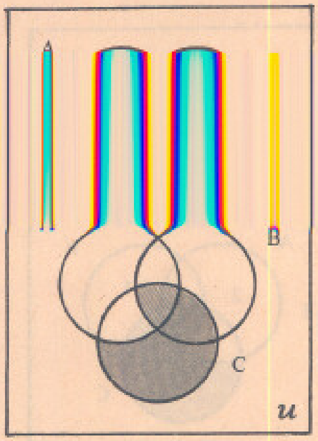
ตัวเลือก 4. $B' \cap C = \{1, 2, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\}$

$= \{6, 8\}$

จากตัวอย่างที่เราเลือกนี้ยืนยันได้ว่าตัวเลือก 1., 3. และ 4. ไม่ใช่เซตส่วนที่แรเงาแน่นอนจึงตัดตัวเลือกทิ้งไปได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

การตัดตัวเลือกเป็นการฝึกหัดสังเกตและใช่เหตุผลเล็กๆ น้อยจากข้อสอบและตัวเลือกมาช่วยกันดังนั้นจากโจทย์



จากรูปเราใช้เหตุผลว่า ส่วนที่แรเงา ไม่เป็นสับเซตของ A'

แต่ A'∩C ⊂ A' ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันส่วนที่แรเงาไม่เป็นสับเซตของ B'

แต่ B'∩C ⊂ B' ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

เพราะว่า C – (A∪B) ต้องไม่มีสมาชิกของ B ปนอยู่

แต่จากรูปจะเห็นว่ามีสมาชิกของ B บางตัวปนอยู่

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

2. ตอบ 1.

แนวคิด จากรูปที่โจทย์กำหนด

คือเซต [1, 2] ∪ (4, 5)

จากโจทย์กำหนด A = [1, 3), B = (2, 4] และ C = (3, 5)

ตัวเลือก 1. (A∪C)–B = [[1, 3) ∪ (3, 5)] – (2, 4]

= [1, 2] ∪ (4, 5)

เป็นโชคดีของนักเรียนแล้วเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบเลย

หมายเหตุ (C∪B) – A = (2, 5) – [1, 3) = [3, 5)

(A∪B) – C = [1, 4] – (3, 5) = [1, 3]

$$(A \cup C) - B' = [\,[1,3) \cup (3, 5)\,] - [\,(-\infty, 2] \cup (4, \infty)\,]$$

$$= (2, 3) \cup (3, 4]$$

การตัดตัวเลือก ต้องฝึกสังเกตอีกแล้ว

เพราะว่ากราฟของโจทย์หมายถึงเซต $[1, 2] \cup (4, 5)$ เพราะฉะนั้น 2 เป็นสมาชิก

แต่ไม่มี 3 เป็นสมาชิก

เพราะว่า $2 \notin C \cup B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่า $2 \in A \cup C$ และ $2 \in B'$ เพราะฉะนั้น $2 \notin (A \cup C) - B'$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่า $3 \in A \cup B$ และ $3 \notin C$ เพราะฉะนั้น $3 \in (A \cup B) - C$

แต่ $3 \notin [1, 2] \cup (4, 5)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

3. **ตอบ 1.**

แนวคิด เพราะว่า 5 หาร m เหลือเศษ 4

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $m = 5k + 4$

เพราะว่า 5 หาร n เหลือเศษ 2 เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม l ที่ทำให้ $n = 5l + 2$

เพราะว่า $m + n = (5k + 4) + (5l + 2)$

$$= 5k + 5l + 6$$

$$= 5k + 5l + 5 + 1$$

$$= 5(k + l + 1) + 1$$

เพราะฉะนั้น 5 หาร m + n เหลือเศษ 1.

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ m, n

เลือก $m = 4$ และ $n = 2$

จะได้ 5 หาร m เหลือเศษ 4, 5 หาร n เหลือเศษ 2 สอดคล้องกับโจทย์

ดังนั้น $m + n = 6$ เมื่อหารด้วย 5 จะเหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

4. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อความ ก. ผิด ตัวอย่างเช่น $a = -1, b = -2$

จะได้ $a^2 = 1 < 4 = b^2$ แต่ $-1 \nless -2$

นั่นคือ $a^2 < b^2$ แต่ $a \nless b$

ข้อความ ข. ถูกต้อง เพราะว่า $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

$$0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b})^2$$

$$a < b$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ แล้ว $a < b$ ถูกต้อง

5. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่าข้อความ "2 + 2 = 4" เป็นจริง เพราะฉะนั้นประพจน์ p เป็นจริง

เพราะว่าข้อความ "4 x 8 = 24" เป็นเท็จ เพราะฉะนั้นประพจน์ q เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \to q = T \to F = F$ สรุป $p \to q$ เป็นเท็จ

ตัวเลือก 1. $p \leftrightarrow \sim q = T \leftrightarrow \sim F = T$

ตัวเลือก 2. $\sim p \leftrightarrow q = \sim T \leftrightarrow F = T$

ตัวเลือก 3. $(p \wedge q) \to p = (T \wedge F) \to T = T$

ตัวเลือก 4. $(p \vee q) \to q = (T \vee F) \to F = F$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $p \leftrightarrow \sim q$ สมมูลกับ $\sim p \leftrightarrow q$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 2. มีค่าความจริงเหมือนกัน

ดังนั้นตัวเลือก 1. และ 2. ต้องไม่เป็นคำตอบที่ต้องการแน่นอน (ถ้าใช่ก็หมายความว่าโจทย์ผิด)

6. ตอบ 3.

แนวคิด ตัวเลือก 1. เป็นเท็จ เพราะว่ามี $x = 2$ ทำให้ $x^2 + 1 = 5 \nless 5$

ตัวเลือก 2. เป็นเท็จ เพราะว่ามี $x = 0$ ทำให้ $x^2 - 1 = -1 \ngeq 0$

ตัวเลือก 3. เป็นจริง เพราะว่ามี $x = 0$ ทำให้ $x^2 - 1 = -1 < 0$

ตัวเลือก 4. เป็นเท็จ เพราะว่า $x^2 + 1 \geq 1$ ทุกค่า x

7. ตอบ 3.

แนวคิด คำถามและตัวเลือกแบบโจทย์ข้อนี้ใช้การตัดตัวเลือกดีกว่า

ให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-5}\}$

ตัวเลือก 1. พิจารณาว่า $y = 5$ ได้หรือไม่

เพราะว่า $5 = \frac{x+2}{x+5} \Rightarrow x = -\frac{23}{4}$

เพราะฉะนั้น $(-\frac{23}{4}, 5) \in r$ ดังนั้น $5 \in R_r$

สรุปตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. พิจารณาว่า $y = -2$ ได้หรือไม่

เพราะว่า $-2 = \frac{x+2}{x-5} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

เพราะฉะนั้น $(\frac{8}{3}, -2) \in r$ ดังนั้น $-2 \in R_r$

สรุปตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน $(\frac{9}{2}, -5) \in r$ ดังนั้น $-5 \in R_r$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

วิธีจริง จัดรูป x ในพจน์ของ y แล้วดูจากเงื่อนไขของสูตรที่ได้ว่า y เป็นอะไรได้บ้าง

$$y = \frac{x+2}{x-5}$$

$$y-1 = \frac{x+2}{x-5} - 1 = \frac{7}{x-5} \qquad \text{———————— } (*)$$

$$\frac{7}{y-1} = x-5$$

$$x = \frac{7}{y-1} + 5 = \frac{5y+2}{y-1}$$

เพราะฉะนั้น $R_r = \{y \mid y \neq 1\}$

หมายเหตุ จากเงื่อนไข (*) ถ้านักเรียนสังเกตจะเห็นว่า $\frac{7}{x-5} \neq 0$

ดังนั้น $y-1 \neq 0$ นั่นคือ $y \neq 1$ ซึ่งจะสรุปได้ว่า $R_r = \{y \mid y \neq 1\}$

หมายเหตุ ถ้านักเรียนพบฟังก์ชัน $f(x) = y = \frac{Ax+B}{Cx+D}$

ใช้การจำสูตร $D_f = \{x \in R \mid x \neq \frac{-D}{C}\}$ และ $R_f = \{y \in R \mid y \neq \frac{A}{C}\}$

เป็นวิธีที่ได้โดเมนและเรนจ์เร็วที่สุด

8. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ออกสอบมาหลายปีแล้วทั้งคณิตศาสตร์ ก. และ กข. เช่น ก. 2533 ข้อ 13, ก. 2538 ข้อ 34, กข. 2531 ข้อ 3

ถ้าข้อสอบ ENTRANCE ยังออกแบบนี้อยู่อีกวิธีที่ดีที่สุดคือการตัดตัวเลือก

เลือก $x = -1$, $f(-1) = -\sqrt{-(-1)} = -1$ ดังนั้น $(-1, -1)$ อยู่บนกราฟ f ดูจากกราฟทุกตัวเลือกพบว่ากราฟของตัวเลือก 1. และ 3. ไม่มีจุดในควอดรันท์ 4 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

ต่อไปลองใช้เหตุผลง่ายๆ โดยใช้ x เพียงจุดเดียวเช่น $x = 9$

$f(x) = f(9) = \sqrt{9} = 3$

เพราะฉะนั้น (9, 3) ต้องอยู่บนเส้นโค้ง $y = f(x)$

จากรูปของตัวเลือก 2. ไม่มีจุด (9, 3) อยู่บนเส้นโค้ง ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

9. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{x-1}, D_f = [1, \infty), R_f = [0, \infty)$

$g(x) = x^2, D_g = (-\infty, \infty), R_g = [0, \infty)$

เพราะฉะนั้น $R_f \subset D_g$ และ $R_g \not\subset D_f$

การพิจารณาค่า $f \circ g$ ต้องหา $D_{f \circ g}$ และ $R_{f \circ g}$ ก่อน

เพราะว่า $R_g \not\subset D_f$ เพราะฉะนั้น $D_{f \circ g} \neq D_g$

เพราะว่า $x^2 \geq 1$ ก็ต่อเมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

เพราะฉะนั้น $D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, $R_{f \circ g} = [0, \infty)$

เมื่อ $x \in D_{f \circ g}$, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. และ 4. ผิด

การพิจารณาค่า $g \circ f$ ต้องหา $D_{g \circ f}$ และ $R_{g \circ f}$

เพราะว่า $R_f \subset D_g$ เพราะฉะนั้น $D_{g \circ f} = D_f = [1, \infty)$

เมื่อ $x \in D_f$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2 = x - 1$

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก ข้อสอบเป็นลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้น

แทนค่า $x = 2$ จะตัดตัวเลือกได้เร็วที่สุด

$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 1$

ตัวเลือก 1. $x - 1 = 2 - 1 = 1 = (g \circ f)(2)$

ตัวเลือก 2. $\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3} \neq 1 = (g \circ f)(2)$

ตัวเลือก 3. $x - 1 = 2 - 1 = 1 \neq \sqrt{3} = (f \circ g)(2)$

ตัวเลือก 4. $x^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \neq \sqrt{3} = (f \circ g)(2)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

10. ตอบ 1.

แนวคิด การหาค่า $f^{-1}(9)$

สมมติ $f(x) = 9$ จะได้ $x^3 + 1 = 9$

$$x^3 = 8$$

ดังนั้น $x = 2$

สรุป $f(2) = 9$ และ $f^{-1}(9) = 2$

$$\begin{aligned}[(f^{-1} \circ f) \circ f^{-1}](9) &= (f^{-1} \circ f)(f^{-1}(9)) \\ &= (f^{-1} \circ f)(2) \\ &= f^{-1}(f(2)) \\ &= f^{-1}(2^3 + 1) \\ &= f^{-1}(9) \\ &= 2\end{aligned}$$

วิธีลัด เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

เพราะฉะนั้น $(f^{-1} \circ f)(x) = x$

ดังนั้น $[(f^{-1} \circ f) \circ f^{-1}](9) = [f^{-1} \circ f](f^{-1}(9))$

$$= f^{-1}(9)$$

$$= 2$$

หมายเหตุ เพราะว่าโจทย์มีการใช้ f^{-1} ในคำถาม ดังนั้นเราสรุปตามเงื่อนไขของโจทย์ได้เลยว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

11. ตอบ 4.

แนวคิด $x - 5y - 9 = 0$ ———————— (1)

$3x + 5y - 7 = 0$ ———————— (2)

(1) + (2) จะได้ $4x - 16 = 0 \rightarrow x = 4$

ดังนั้น $5y = 7 - 3x = 7 - 3(4) = -5 \rightarrow y = -1$

สรุป $(4, -1)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ และ $3x + 5y - 7 = 0$

เพราะว่าความชันเส้นตรง $x - 3y - 11 = 0$ มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงที่ต้องการคือเส้นตรงที่ผ่านจุด $(4, -1)$ และมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ซึ่งมีสมการเป็น

$$y - (-1) = \frac{1}{3}(x - 4)$$

$$3y + 3 = x - 4$$

$$x - 3y - 7 = 0$$

การตัดตัวเลือกแบบที่ 1 หาจุดตัดเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ และ $3x + 5y - 7 = 0$ เป็น $(4, -1)$ แทนค่า $x = 4$ และ $y = -1$ ในตัวเลือกก็จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $x - 3y + 1 = 4 - 3(-1) + 1 \neq 0$

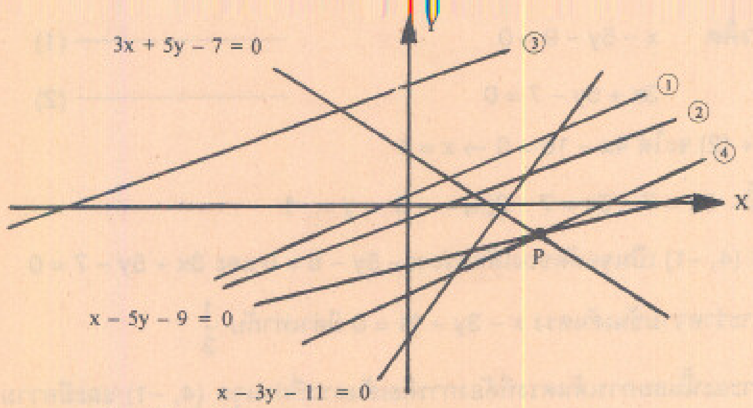
ตัวเลือก 2. $x - 3y - 1 = 4 - 3(-1) - 1 \neq 0$

ตัวเลือก 3. $x - 3y + 7 = 4 - 3(-1) + 7 \neq 0$

ตัวเลือก 4. $x - 3y - 7 = 4 - 3(-1) - 7 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 ข้อสอบแบบนี้วาดรูปเส้นตรง 7 เส้นก็ได้คำตอบแล้ว



จากรูป P เป็นจุดตัดของ $x - 5y - 9 = 0$ และ $3x + 5y - 7 = 0$

ลากเส้นตรงทุกตัวเลือกจะเห็นว่ามีตัวเลือก 4 เท่านั้นที่ผ่านจุด P

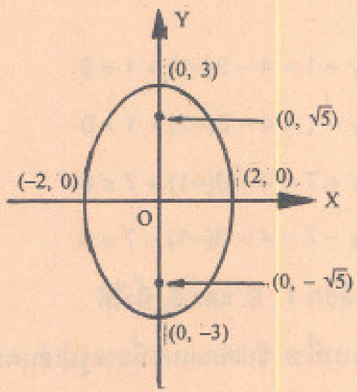
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

12. ตอบ 3.

แนวคิด จากสมการ $9x^2 + 4y^2 = 36$ จะได้ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลาง (0, 0), แกนเอกทับแกน Y, a = 3, b = 2

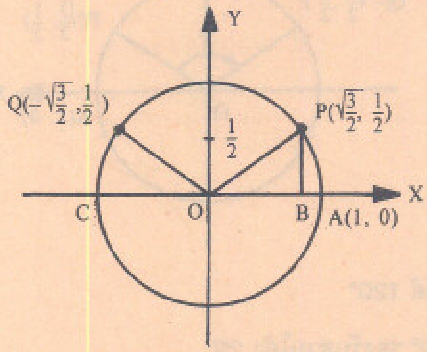
$C = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$, จุดยอด $(0, \pm 3)$ โฟกัส $(0, \pm\sqrt{5})$



สรุปตัดตัวเลือก 3. ผิด

13. ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปดูก่อนจะได้คิดเลขง่ายขึ้น



เส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยเท่ากับ 2¶r = 2¶(1) = 2¶

ข้อสอบน่าจะถามให้ชัดเจนว่าส่วนโค้ง PQ ส่วนที่ยาวหรือส่วนที่สั้น แต่เมื่อดูจาก ตัวเลือกทุกตัวมีค่าน้อยกว่า ¶ ดังนั้นเราควรหาความยาวส่วนโค้ง PQ ส่วนที่สั้น

การหาส่วนโค้ง PQ ส่วนที่สั้น

เพราะว่า $\cos B\hat{O}P = \frac{|OB|}{|OP|} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น $B\hat{O}P = \frac{\P}{6}$

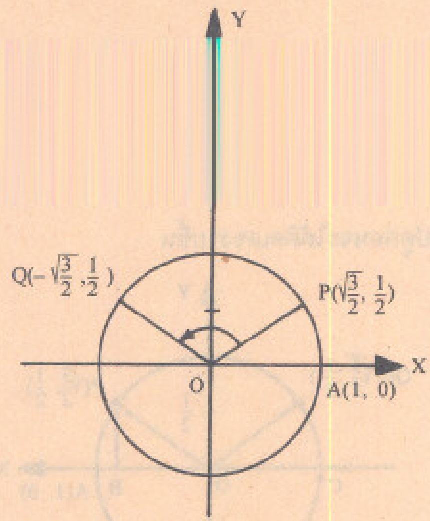
เพราะว่า P และ Q สมมาตรกัน เพราะฉะนั้น $C\hat{O}Q = \frac{\P}{6}$

ดังนั้นมุม $P\hat{O}Q = \P - A\hat{O}P - C\hat{O}Q = \P - \frac{\P}{6} - \frac{\P}{6} = \frac{2\P}{3}$

ในวงกลมหนึ่งหน่วยมุมที่จุดศูนย์กลางกับความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุมนั้นจะมีค่าเท่ากัน

สรุปความยาวส่วนโค้ง PQ ส่วนที่สั้นเท่ากับ $\frac{2\P}{3}$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ใช้การวาดรูปและวัดมุม



วัดมุม $P\hat{O}Q$ ได้ 120°

มุมรอบจุด 360° รองรับส่วนโค้ง $2\P$

มุมรอบจุด 120° รองรับส่วนโค้ง $\frac{2\P(120)}{360} = \frac{2\P}{3}$

สรุปส่วนโค้ง PQ ส่วนที่สั้นมีค่าความยาวเท่ากับ $\frac{2\P}{3}$

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2

เพราะว่าความยาวเส้นตรง PQ เท่ากับ $\sqrt{3} = 1.732$

และค่าในตัวเลือกแต่ละตัวเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $\frac{\P}{3} = \frac{3.14}{3} \doteq 1.04 < 1.732$

ตัวเลือก 2. $\frac{\P}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 < 1.732$

ตัวเลือก 3. $\frac{2\P}{3} = \frac{2}{3}(3.14) = 2.09 > 1.732$

ตัวเลือก 4. $\frac{5\P}{6} = 2.61 > 1.732$

เพราะว่าเส้นตรง PQ ต้องสั้นกว่าเส้นโค้ง PQ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

14. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อความ ก. ผิด

เพราะว่า $x = \P$ ทำให้ $\frac{\P}{4} \le \P \le \frac{5\P}{4}$

แต่ $\sin x + \cos x = \sin \P + \cos \P = 0 - 1 = -1 \ngeqslant 0$

ข้อความ ข. ผิด

เพราะว่า $\tan\frac{\P}{2} = \dfrac{\sin\frac{\P}{2}}{\cos\frac{\P}{2}} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\tan x \geqslant 0$ เมื่อ $0 \le x \le \frac{\P}{2}$ หรือ $\P \le x \le \frac{3\P}{2}$ จึงผิด

15. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 $\log 2 = a$ และ $\log 3 = b$

$\log 45 = \log (3^2 \cdot 5) \quad = \log 3^2 + \log 5$

$= 2 \log 3 + \log (\frac{10}{2}) \quad = 2 \log 3 + \log 10 - \log 2$

$= 2b + 1 - a \quad = 1 - a + 2b$

วิธีที่ 2 ประโยชน์ของการจำค่า log 2 ถึง log 9 จะช่วยในการทำข้อนี้ได้

$a = \log 2 = 0.3$ และ $b = \log 3 = 0.47$

ตัวเลือก 1. $1 + b - 2a = 1 + 0.47 - 2(0.3) = 0.87$

ตัวเลือก 2. $1 + a - 2b = 1 + 0.3 - 2(0.47) = 0.36$

ตัวเลือก 3. $1 - a + 2b = 1 - 0.3 + 2(0.47) = 1.64$

ตัวเลือก 4. $1 - b + 2a = 1 - 0.47 + 2(0.3) = 1.13$

เพราะว่า $\log 45 > \log 10 > 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2 ได้

เพราะว่า $\log 45 = \log 9\ \ 5 = \log 9 + \log 5 = 0.95 + 0.7 = 1.65$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

16. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $27^{(x+y)} = 3^6 = (3^3)^2 = 27^2$ เพราะฉะนั้น $x + y = 2$

เพราะว่า $2^{3x+y} = 1 = 2^0$ เพราะฉะนั้น $3x + y = 0$

ดังนั้น $x = -1$ และ $y = 3$

สรุป $3^{x+1} + 3^{y-1} = 3^{-1+1} + 3^{3-1} = 3^0 + 3^2 = 10$

17. ตอบ 1.

แนวคิด
$$a^2 - 2a - 3 = 0$$
$$(a-3)(a+1) = 0$$
$$a = 3, -1$$

เพราะว่า $a > 0$ เพราะฉะนั้น $a = 3$

สรุป $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{3}$

18. ตอบ 1.

แนวคิด จากสมการเมตริกซ์ที่โจทย์กำหนดให้

$$\begin{bmatrix}6\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+2b+c\\b-c\\c\end{bmatrix}$$

จะได้ระบบสมการ 3 ตัวแปรและ 3 สมการเป็น

$$a + 2b + c = 6 \qquad (1)$$

$$b - c = 2 \qquad (2)$$

$$c = 3 \qquad (3)$$

โดยการแทนค่าย้อนกลับจะได้ $c = 3, b = 5, a = -7$

สรุป $a + b + c = 1$

หมายเหตุ ถ้านักเรียนสังเกตสมการ (1) , (2) , (3) จะได้ว่า (1) – (2) – (3)

จะได้ $a + b + c = 6 - 2 - 3 = 1$

19. **ตอบ** 1.

แนวคิด
$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & , x = 2 \\ \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \end{cases}$$

ดังนั้น
$$f(x) = \begin{cases} 3x + a & , x = 2 \\ x + 2 & , x \neq 2 \end{cases}$$

f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ จะได้ $f(2) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

$$3(2) + a = \lim_{x \to 2^+} (x + 2)$$

$$6 + a = 4$$

$$a = -2$$

20. **ตอบ** 2.

แนวคิด $f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 3 \\ 2x & , x \geq 3 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x = 6$$

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 = 9$$

สรุปตัวเลือก 2. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 9 > 6 = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก เพราะว่าตัวเลือก 1., 2. และ 3. เป็นการเปรียบเทียบตัวเลขสองจำนวนว่ามากกว่า, น้อยกว่า หรือเท่ากัน ดังนั้นต้องมีตัวเลือกที่ถูกต้องแน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปได้เลย

21. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

a = อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f เทียบกับ x เมื่อ x เปลี่ยนจาก 1 ไปเป็น 2

$= \dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = (12-4-1)-(3-2-1) = 7$

เลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลยโดยไม่ต้องคิดค่าของ b ก็ได้

หมายเหตุ b = อัตราการเปลี่ยนแปลงของ f เทียบกับ x ขณะที่ x = 2

ดังนั้น $b = f'(2)$

เพราะว่า $f'(x) = 6x - 2$ เพราะฉะนั้น $b = 12 - 2 = 10$

22. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตรอนุพันธ์ $\dfrac{d}{dx}(u(x))^n = n(u(x))^{n-1}\dfrac{d}{dx}u(x)$

เพราะว่า $g(x) = (f(x))^4$

เพราะฉะนั้น $g'(x) = \dfrac{d}{dx}g(x) = \dfrac{d}{dx}(f(x))^4$

$4(f(x))^3 \dfrac{d}{dx}f(x) = 4(f(x))^3 f'(x)$

เพราะว่า $f(1) = 2$ และ $f'(1) = \dfrac{5}{1} = 5$

เพราะฉะนั้น $g'(1) = 4(2)^3(5) = 160$

23. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = 3x^2 + 2x$

$\int f(x)dx = \int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + L$, L เป็นค่าคงตัว

เพราะว่า $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$$x^5 + C = x^3 + x^2 + L + \int g(x)dx$$

เพราะฉะนั้น $\int g(x)dx = x^5 - x^3 - x^2 + C - L$

สรุป $\int g(x)dx = x^5 - x^3 - x^2 + C_1$ เมื่อ $C_1 = C + L$

24. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\int 2x^2(2x-3)dx = \int (4x^3 - 6x^2)dx$

$$= x^4 - 2x^3 + C = x^3(x-2) + C$$

เพราะฉะนั้น $x^3(x-2)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x^2(2x-3)$

การตัดตัวเลือก ใช้การหาอนุพันธ์ของแต่ละตัวเลือกดูก็จะตัดตัวเลือกได้เช่น

ตัวเลือก 1. $\frac{d}{dx}((x^3-2)x) = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x)$

$$= 4x^3 - 2 \neq 2x^2(2x-3)$$

ในทำนองเดียวกัน ตัวเลือก 2. และ 3. ก็ไม่ใช่ปฏิยานุพันธ์

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

25. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 จากสูตรของเซต $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)$

$$A \cup B = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A')$$

จะได้ $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - P((A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A))$

$= 1 - P((A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A'))$

$= 1 - [P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A')]$

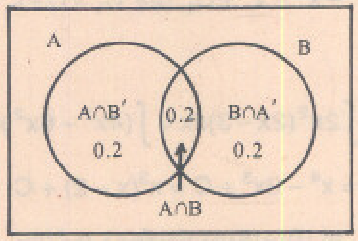
$= 1 - (0.2 + 0.2 + 0.2)$

$= 0.4$

ก.2539 – 34

วิธีที่ 2 ใช้แผนภาพของเวนน์จากโจทย์

$P(A \cap B') = P(A \cap B) = P(B \cap A') = 0.2$ โจทย์ จะได้ บริเวณต่างๆ ของเซตในแผนภาพเวนน์มีค่าความน่าจะเป็นดังนี้

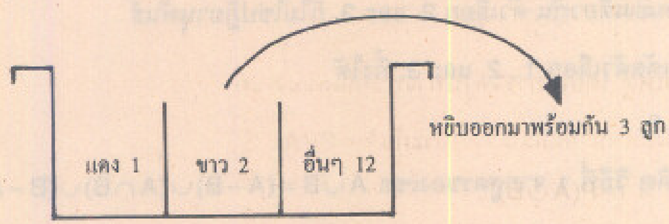


ดังนั้น $P(A \cup B) = 0.6$

สรุป $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

26. ตอบ 2.

แนวคิด



ขั้นที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดงทำได้ $\binom{1}{1} = 1$ วิธี

ขั้นที่ 2 หยิบได้สีอื่นที่ไม่ใช่สีขาว $\binom{12}{2} = 66$ วิธี

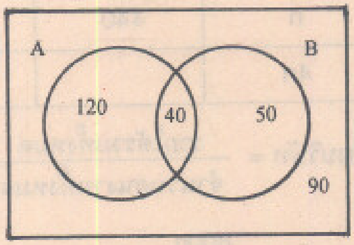
สรุปจำนวนวิธีที่จะได้สีแดง 1 ลูกและไม่ได้สีขาว = (1)(66) = 66 วิธี

27. ตอบ 3.

แนวคิด A = เซตของคนที่มีอาชีพทนาย

B = เซตของคนที่มีอาชีพขายประกัน

จากโจทย์จะได้ว่า $n(A) = 160$, $n(B) = 90$ และ $n(A \cap B) = 40$ เขียนแผนภาพของเวนน์ได้เป็น



ในการสุ่มคน 1 คนจากทั้งหมด

S = เซตของคนทั้งหมด, $n(S) = 300$

E = เซตของคนที่ไม่เป็นทนายความและไม่ขายประกัน

จากแผนภาพของเวนน์ $n(E) = 90$

ดังนั้น $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{90}{300} = \dfrac{3}{10}$

หมายเหตุ โดยใช้การจัดรูปทางพีชคณิตของเซต

P (ไม่เป็นทนายและไม่ขายประกัน) $= P((A \cup B)')$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)]$

$= 1 - [\dfrac{160}{300} + \dfrac{90}{300} - \dfrac{40}{300}]$

$= 1 - \dfrac{210}{300} = \dfrac{90}{300} = \dfrac{3}{10}$

28. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนพนักงาน ดังนั้นจำนวนคนงานเท่ากับ 3n จากโจทย์เราสรุปเป็นตารางดังนี้

กลุ่ม	จำนวนคน	ค่าเฉลี่ย	รายได้
คนงาน	3n	120	360n
พนักงาน	n	440	440n
	4n		800n

$$\text{รายได้เฉลี่ยของลูกจ้างบริษัท} = \frac{\text{รายได้รวมทั้งหมด}}{\text{จำนวนคนงานทั้งหมด}}$$

$$= \frac{800n}{4n} = 200$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้จัดอยู่ในประเภทข้อสอบและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของจำนวนคนงาน

ดังนั้นขอให้นักเรียนกล้าที่จะแทนค่าจำนวนคนงานเท่ากับ 3

และจำนวนพนักงานเท่ากับ 1 ได้เลย

เพราะฉะนั้น รายได้รวมทั้งหมด = (3)(120) + (1)(440) = 800

จำนวนคนงานทั้งหมด = 4

รายได้เฉลี่ย $= \frac{800}{4} = 200$ สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

29. ตอบ 4.

แนวคิด ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{X_{max} + X_{min}}{2}$

$$40 = \frac{X_{max} + X_{min}}{2}$$

$X_{max} + X_{min} = 80$ ———— (1)

ค่าพิสัย $= X_{max} - X_{min}$

$20 = X_{max} - X_{min}$ ———— (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $X_{max} = 50, X_{min} = 30$

การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาใช้อาจจะได้คำตอบเร็วกว่า

ตัวเลือก 1. 0, 40 มีพิสัยเท่ากับ $40 \neq 20$

ตัวเลือก 2. 10, 30 มีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ $20 \neq 40$

ตัวเลือก 3. 20, 60 มีพิสัยเท่ากับ $40 \neq 20$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

30. ตอบ 2.

แนวคิด เรียงข้อมูลจากน้อยได้เป็น 3, 3, 5, 7, 8, 8, 9, 9, 12, 30

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \dfrac{3+30}{2} = 16.5$

มัธยฐาน $= 8$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \dfrac{3+3+5+7+8+8+9+9+12+30}{10} = \dfrac{94}{10} = 9.4$

ฐานนิยม = 3, 8 หรือ 9

ค่ากึ่งกลางพิสัยไม่เหมาะสมเพราะแตกต่างจากข้อมูลส่วนใหญ่มากที่สุด

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตก็ไม่เหมาะสมเนื่องจากแตกต่างจากข้อมูลส่วนใหญ่มากกว่ามัธยฐานและฐานนิยม

การตัดสินใจขณะนี้เหลือแต่จะเลือก ค่ากลางเป็น 8 หรือ 9 เท่านั้น

ดูจากข้อมูลโดยรวมเลือกค่ากลางเป็น 8 ดีกว่า

สรุปค่ากลางที่เหมาะสมคือมัธยฐาน = 8

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ตอบ 3

แนวคิด $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $n(A) = 5$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$, $n(B) = 4$

$A \cap B = \{4, 5\}$, $n(A \cap B) = 2$

เพราะว่า $P(A) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $n(P(A) - P(B)) = n(P(A) - P(A \cap B))$

$= n(P(A)) - n(P(A \cap B))$

$= 2^5 - 2^2 = 32 - 4 = 28$

การแสดงว่า $P(A) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

เพราะว่า $A \cap B \subset B$ จะได้ $P(A \cap B) \subset P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A) - P(B) \subset P(A) - P(A \cap B)$

ให้ $X \in P(A) - P(A \cap B)$ ดังนั้น $X \subset A$ และ $X \not\subset A \cap B$

$X \subset A$ และ $X \not\subset B$

$X \in P(A) - P(B)$

นั่นคือ $P(A) - P(A \cap B) \subset P(A) - P(B)$

สรุป $P(A) - P(B) = P(A) - P(A \cap B)$

32. ตอบ 2.

แนวคิด $\sqrt{x+7} \geq |x-5|$

$\sqrt{x+7} \geq |x-5| \geq 0$

$x+7 \geq |x-5|^2$

$x + 7 \geqslant x^2 - 10x + 25$

$0 \geqslant x^2 - 11x + 18$

$(x-9)(x-2) \leqslant 0$

$2 \leqslant x \leqslant 9$

เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{x+7} \geq |x-5|$ คือ $[2, 9]$

สรุป $[a, b] = [2, 9]$ และ $a + b = 2 + 9 = 11$

33. ตอบ 4.

แนวคิด การหาเซต A $|8x+7| \geq 6$

$8x+7 \leqslant -6$ หรือ $8x+7 \geqslant 6$

$8x \leqslant -13$ หรือ $8x \geqslant -1$

$x \leq -\frac{13}{8}$ หรือ $x \geq -\frac{1}{8}$

สรุป $A = (-\infty, -\frac{13}{8}] \cup [-\frac{1}{8}, \infty)$

การหาเซต B $|2x-3| < 4$

$-4 < 2x-3 < 4$

$-1 < 2x < 7$

$-\frac{1}{2} < x < \frac{7}{2}$

สรุป $B = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

ดังนั้น $B - A = (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) - ((-\infty, -\frac{13}{8}] \cup [-\frac{1}{8}, \infty))$

$= (-\frac{1}{2}, \frac{1}{8})$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

เพราะว่า $x = -10$ ทำให้ $|2(-10)-3| = 23 \nless 4$

เพราะฉะนั้น $-10 \notin B$ และ $-10 \notin B - A$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $|8(0)+7| = 7 \geq 6$ ดังนั้น $0 \in A$

และ $|2(0)-3| = 3 < 4$ ดังนั้น $0 \in B$

เพราะฉะนั้น $0 \notin B - A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 $A' = \{x \mid |8x+7| < 6\}$

$B - A = B \cap A' = \{x \mid x \in B \cap A'\}$

$= \{x \mid x \in B$ และ $x \in A'\}$

$= \{x \mid |2x-3| < 4$ และ $|8x+7| < 6\}$

เพราะว่า $x = 1$ ทำให้ $|8(1)+7| \not< 6$

เพราะฉะนั้น $1 \notin B - A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะว่า $x = -2$ ทำให้ $|2(-2)-3| \not< 4$

เพราะฉะนั้น $-2 \notin B - A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

34. ตอบ 4.

แนวคิด $P = \{-1, 1, 2, 3, 4\}$

$Q = \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$

$r = \{(x, y) \in PxQ \mid 2x - y = 0\}$

$= \{(x, y) \in PxQ \mid y = 2x\}$

$= \{(-1, -2), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

ดังนั้น $D_r = \{-1, 1, 2, 3\}$ และ $R_r = \{-2, 2, 4, 6\}$

เพราะฉะนั้น $D_r - R_r = \{-1, 1, 3\}$

$R_r - D_r = \{-2, 4, 6\}$

$Q - R_r = \{-6, -4, 0\}$

$P - D_r = \{4\}$

สรุปตัวเลือก 4 ถูกต้อง

35. ตอบ 1.

แนวคิด $A = \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$

$= \{x \mid (x-3)(x+1) = 0\} = \{-1, 3\}$

$B = \{x \mid x(x-1)(x-2) = 0\} = \{0, 1, 2\}$

ตัวเลือก 1. $\{(3, 0), (-1, 1)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

ตัวเลือก 2. ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า $1 \notin A$

ตัวเลือก 3. ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า (1, 2), (1, 0) เป็นสมาชิก ทำให้เกิดลักษณะ 1 จับคู่กับสมาชิกของ B สองตัว จึงเป็นฟังก์ชันไม่ได้

ตัวเลือก 4. ไม่เป็นฟังก์ชัน เพราะว่า $1 \notin A$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ดูจากโดเมนของแต่ละตัวเลือก

1. โดเมน $= \{-1, 3\}$
2. โดเมน $= \{1, 3\} \neq A$
3. โดเมน $= \{1, -3\} \neq A$
4. โดเมน $= \{1, -3\} \neq A$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 การดูว่าความสัมพันธ์ใดไม่เป็นฟังก์ชัน ให้ดูว่ามีสมาชิก 1 ตัวถูกส่งค่าไป 2 แห่งหรือไม่ ถ้ามีความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวเลือก 3. มี (1, 2) และ (1, 0) เป็นสมาชิก จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวเลือก 4. มี (–3, 1) และ (–3, 0) เป็นสมาชิก จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

จะเห็นได้ว่าการตัดตัวเลือกแบบที่ 2 นี้ เราทำได้โดยไม่ต้องรู้ว่า A, B มีสมาชิกเป็นอย่างไร

36. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x+2) = 2f(x) - f(x+1)$, $f(0) = 2$ และ $f(1) = 3$

$f(2) = f(0+2) = 2f(0) - f(0+1) = 2(2) - f(1) = 4 - 3 = 1$

$f(3) = f(1+2) = 2f(1) - f(1+1) = 2(3) - f(2) = 6 - 1 = 5$

37. ตอบ 3.

แนวคิด p แทน "3^2 เป็นจำนวนคู่" ดังนั้น p เป็นเท็จ

q แทน " ¶ เป็นจำนวนอตรรกยะ" ดังนั้น q เป็นจริง

เพราะว่า p เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $p \wedge (q \rightarrow r)$ เป็นเท็จ

สรุป ข้อความ ก. ผิด

เพราะว่า $\sim(r \vee \sim p) \leftrightarrow q \equiv \sim(r \vee \sim F) \leftrightarrow T$

$$\equiv \sim(r \vee T) \leftrightarrow T$$

$$\equiv \sim T \leftrightarrow T$$

$$\equiv F$$

เพราะฉะนั้น $\sim (r \vee \sim p) \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

38. ตอบ 4.

แนวคิด $(\sim p \vee q) \rightarrow r \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee r \ \equiv (p \wedge \sim q) \vee r$

$$\equiv (p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) \ \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee \sim q)$$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก ข้อสอบเข้าลักษณะโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นแทนค่าความจริงบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = T, q = T, r = F$

โจทย์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r = (\sim T \vee T) \rightarrow F = F$

ตัวเลือก 1. $(r \wedge p) \vee (\sim r \wedge q) = (F \wedge T) \vee (\sim F \wedge T) = T$

ตัวเลือก 2. $(r \wedge p) \vee (r \wedge \sim q) = (F \wedge T) \vee (F \vee \sim T) = F$

ตัวเลือก 3. $(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) = (F \vee T) \wedge (\sim F \vee T) = T$

ตัวเลือก 4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q) = (F \vee T) \wedge (F \vee \sim T) = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งไปก่อน

แทนค่าเพื่อจำแนกตัวเลือก 2. และ 4.

เลือกให้ $p = F, q = F, r = F$

โจทย์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r = (\sim F \vee F) \rightarrow F = F$

ตัวเลือก 2. $(r \wedge p) \vee (r \wedge \sim q) = (F \wedge F) \vee (F \vee \sim F) = T$

ตัวเลือก 4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q) = (F \vee F) \wedge (F \vee \sim F) = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

39. **ตอบ 4.**

แนวคิด เพราะว่า $y = \cos(3x - \pi)$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ 1

เพราะฉะนั้น $3x - \pi = 0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \ldots\ldots$

$$3x = \pi, 3\pi, -\pi, 5\pi, -3\pi, \ldots\ldots$$

$$x = \frac{\pi}{3}, \pi, -\frac{\pi}{3}, \ldots\ldots$$

เพราะว่า $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{3}$

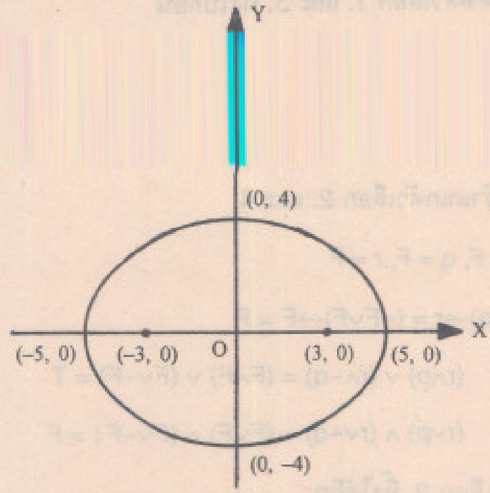
สรุป $\tan 2x = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

40. **ตอบ 2.**

แนวคิด วงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$, $a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$

แกนเอกทับแกน X, จุดยอด $(-5, 0), (5, 0)$, จุดโฟกัส $(-3, 0), (3, 0)$



โจทย์ถามว่าไฮเพอร์โบลามีจุดยอดอยู่ที่โฟกัสของวงรีคือ (–3, 0), (3, 0)

ดังนั้น จุด (0, 0) เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา, a = 3, แกนตามขวางทับแกน X เพราะว่าแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโท

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลามีค่า b = 4

สรุปสมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ มีแกนเอกทับแกน X

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลามีจุดยอดเป็นจุดโฟกัสของวงรีต้องมีแกนตามขวางทับแกน X ด้วย

ตัวเลือก 3. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ มีแกนตามขวางทับแกน Y

ตัวเลือก 4. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$ มีแกนตามขวางทับแกน Y

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า b ของวงรีเท่ากับ 4 และแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาเท่ากับแกนโท

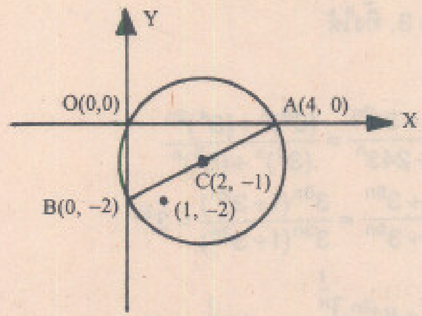
ดังนั้นค่า b ของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 4 ด้วย

ตัวเลือก 1. $a = 4, b = 3 \neq 4$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

41. ตอบ 1.

แนวคิด วงกลม C ผ่านจุด O(0, 0), A(4, 0) และ B(0, −2)



เพราะว่า OAB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก, ดังนั้น AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม C

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงกลม C คือจุด $(\frac{4+0}{2}, \frac{0-2}{2}) = (2, -1)$

สรุปสมการวงกลมที่โจทย์ต้องการคือ

$$(x-2)^2 + (y-(-1))^2 = 3^2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$$

การตัดตัวเลือก จากลักษณะของรูปสามเหลี่ยม OAB จะได้ว่า

จุดศูนย์กลางของวงกลม C ที่ผ่านจุด O, A และ B ต้องอยู่ในควอดรันท์ที่ 4

จุดศูนย์กลางของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. (2, −1) อยู่ในควอดรันท์ 4

ตัวเลือก 2. (−2, 1) อยู่ในควอดรันท์ 2

ตัวเลือก 3. (1, –2) อยู่ในควอดรันท์ 4

ตัวเลือก 4. (–1, 2) อยู่ในควอดรันท์ 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งก่อน

เพราะว่าจุด (1, –2) ห่างจาก A, B ไม่เท่ากัน

เพราะฉะนั้น (1, –2) ไม่เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่าน O, A, B แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

42. ตอบ 2.

แนวคิด
$$\frac{729^n + 81^{2n}}{27^n + 243^n} = \frac{(3^6)^n + (3^4)^{2n}}{(3^3)^n + (3^5)^n}$$
$$= \frac{3^{6n} + 3^{8n}}{3^{3n} + 3^{5n}} = \frac{3^{6n}(1+3^{2n})}{3^{3n}(1+3^{2n})} = 3^{3n}$$

สรุป
$$\left[\frac{729^n + 81^{2n}}{27^n + 243^n}\right]^{\frac{1}{n}} = (3^{3n})^{\frac{1}{n}} = 3^3 = 27$$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

แทนค่า n = 1 จะได้
$$\left[\frac{729^n + 81^{2n}}{27^n + 243^n}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{729 + 81^2}{27 + 243}\right]^{\frac{1}{1}}$$
$$= \frac{729 + 6561}{270} = \frac{7290}{270} = 27$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

43. ตอบ 1.

แนวคิด
$$2^{2x+2} - 9(2^x) + 2 = 0$$
$$2^2(2^x)^2 - 9(2^x) + 2 = 0$$
$$4(2^x)^2 - 9(2^x) + 2 = 0$$
$$[4(2^x) - 1]\,[2^x - 2] = 0$$

เพราะฉะนั้น $4(2^x) = 1$ หรือ $2^x = 2$

$$2^x = \frac{1}{4} \text{ หรือ } x = 1$$

$$2^x = 2^{-2} \text{ หรือ } x = 1$$

$$x = -2 \text{ หรือ } x = 1$$

สรุป s = ผลบวกของราก $= (-2) + 1 = -1$

p = ผลคูณของราก $= (-2)(1) = -2$

44. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}, a \neq 0, b \neq 0$

เพราะว่า $\det(A) = -ab \neq 0$ เพราะฉะนั้น A^{-1} หาได้

จากสูตร $X = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ และ $\det(X) \neq 0$

จะได้ $X^{-1} = \dfrac{1}{\det(x)} \begin{bmatrix} s & -q \\ -r & p \end{bmatrix}$

ดังนั้น
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{-ab} \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -b & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$$

สรุป ถ้า $A \in M$ แล้ว $A^{-1} \in M$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อน

ให้ $B = \begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}, x \neq 0, y \neq 0$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^tB = \begin{bmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ y & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} by & 0 \\ 0 & ax \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^tB \notin M$ สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ ตัวเลือก 2.

หมายเหตุ เพื่อให้นักเรียนมั่นใจมากขึ้น เลือก $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $A, B \in M$

แต่ $A^tB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \notin M$

45. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = \begin{cases} ax & , x < 1 \\ 4 & , x = 1 \\ x + b & , x > 1 \end{cases}$

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ x = 1 เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \quad \text{และ} \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} x + b = 4 \quad \text{และ} \lim_{x \to 1^-} ax = 4$$

$$1 + b = 4 \text{ และ } a(1) = 4$$

$$b = 3 \text{ และ } a = 4$$

สรุป $a + b = 7$

46. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^3$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 3x^2$$

$$f'(-1) = \frac{2}{3}(-1)^{-\frac{1}{3}} - 3(-1)^2 = -\frac{2}{3} - 3 = -\frac{11}{3}$$

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) มีความชันเท่ากับ $-\frac{11}{3}$

สมการเส้นตรงคือ $y - 2 = (-\frac{11}{3})(x - 1)$

$$3y - 6 = -11x + 11$$

$$11x + 3y - 17 = 0$$

การตัดตัวเลือก เมื่อได้ความชันเส้นตรงต้องเท่ากับ $f'(-1) = -\frac{11}{3}$

เราสามารถตัดตัวเลือกได้แล้วโดยใช้เหตุผลความชันของแต่ละตัวเลือก

1. ความชัน $= -\frac{7}{3}$
2. ความชัน $= -\frac{11}{3}$
3. ความชัน $= \frac{7}{3}$
4. ความชัน $= \frac{11}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

47. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + 4$

เพราะว่า $f(1) = 4$ เพราะฉะนั้น $1 + A + B + 4 = 4$

$$A + B = -1 \qquad \text{———— (1)}$$

เพราะว่า $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$ และ $f'(0) = 1$

เพราะฉะนั้น $B = 1$ ดังนั้น $A = -2$

สรุป $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$

$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f''(x) = 6x - 4$

เพราะว่า $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$(3x - 1)(x - 1) = 0$

$x = \frac{1}{3}, 1$

เพราะว่า $f''(\frac{1}{3}) = 2 - 4 = -2 < 0$ และ $f''(1) = 6 - 4 = 2 > 0$

เพราะฉะนั้น f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ $x = 1$

48. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$g(x) = \int f(x)dx = \int (x^2 - 2x + 1)dx = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + C$

เพราะว่า $(fg)(2) = f(2)g(2)$ เพราะฉะนั้น $0 = (1)(\frac{8}{3} - 4 + 2 + C)$

ดังนั้น $C = -\frac{2}{3}$ และ $g(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - \frac{2}{3}$

สรุป $a = (fg)(0) = f(0)g(0) = (1)(-\frac{2}{3}) = -\frac{2}{3}$

และ $b = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{3}$

49. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = px^2 + qx + r$

$F(x)$ = ปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = \int f(x)dx$

$\int (px^2 + qx + r)dx = \frac{px^3}{3} + \frac{qx^2}{2} + rx + C$

เพราะว่า $F(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $C = 0$

ดังนั้น $F(x) = \frac{px^3}{3} + \frac{qx^2}{2} + rx$

สรุป $F(1) + F(-1) = (\frac{p}{3} + \frac{q}{2} + r) + (-\frac{p}{3} + \frac{q}{2} - r) = q$

การตัดตัวเลือก ลองแทนค่า $p = 1, q = 2, r = 3$ จะได้

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 \text{ และ } F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$$

$$F(1) + F(-1) = 2 = q$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

50. **ตอบ** 2. หรือไม่มีตัวเลือก

แนวคิด เพราะว่าโจทย์บังคับว่าต้นมะลิทุกต้นต้องติดกัน

ดังนั้นเรานำต้นมะลิมารวมกันแล้วนับเป็น 1 หน่วยของการจัดลำดับ

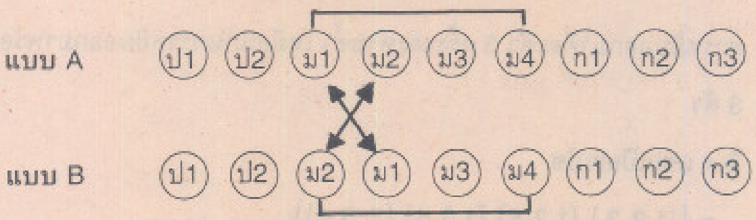
ขณะนี้การจัดลำดับเป็นการจัด ต้นกุหลาบ 3 ต้น, ต้นโป๊ยเซียน 2 ต้น และต้นมะลิ 1 หน่วย ซึ่งถือว่ามีของทั้งหมด 6 หน่วยในการจัดลำดับ จัดลำดับได้

$6! = 720$ วิธี

เพราะว่าต้นมะลิ 4 ต้นสลับที่กันเองได้ $4! = 24$ วิธี

เพราะฉะนั้นวิธีจัดลำดับทั้งหมด $= (720)(24) = 17280$ วิธี

หมายเหตุ ข้อสอบข้อนี้มีปัญหาของคำว่าการเรียงลำดับแบบใดที่เหมือนกันหรือแตกต่างกัน เช่น



ก.2539 – 52

แบบ A และ แบบ B เป็นลักษณะที่ต้นมะลิทุกต้นเรียงติดทั้ง 4 ต้น

ถ้านักเรียนคิดว่า แบบ A และ B เหมือนกัน จะได้จำนวนวิธีเท่ากับ 6! = 720 ซึ่งตรงกับตัวเลือก 3. แต่ก็ยังต้องผิดอยู่ดี เพราะว่า

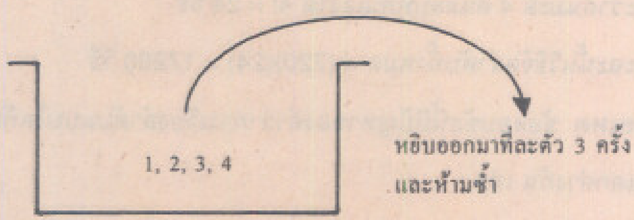
แบบ B ป2 ป1 ม1 ม2 ม3 ม4 ก1 ก2 ก3

คงต้องถือว่าแบบ C เหมือน แบบ A อีก ดังนั้นการนับจำนวนวิธี ต้องคิดเป็นการจัดลำดับของ 3 สิ่งมีโป๊ยเซียน ซ้ำ 2, มะลิถือเป็น 1 หน่วย จึงคิดเป็นซ้ำ 1 และ กุหลาบซ้ำ 3 ซึ่งจัดลำดับได้ $= \frac{6!}{2!\,1!\,3!} = 60$

สรุปถ้าถือว่าโป๊ยเซียนเหมือนกัน, มะลิเหมือนกัน และ กุหลาบเหมือนกัน ต้องตอบตัวเลือก 2. อย่างไรก็ตามอ่านจากโจทย์แล้วไม่ได้ระบุว่าเหมือนกัน

51. ตอบ 1.

แนวคิด



การหยิบออกมาทีละตัว 3 ครั้งและห้ามซ้ำ เหมือนกับการหยิบออกมาพร้อมกัน 3 ตัว

S = แซมเปิลสเปซ

$= \{\{1, 2, 3,\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$

E = เหตุการณ์ที่ตัวเลขสามตัวมีผลบวกเป็น $6=\{\{1,2,3\}\}$

สรุป $P(E)=\frac{n(S)}{n(E)}=\frac{1}{4}$

52. ตอบ 3.

แนวคิด A = เซตของผู้ป่วยโรคหัวใจ

B = เซตของผู้ป่วยโรคความดันโลหิตสูง

ผู้ป่วยโรคหัวใจหรือโรคความดันโลหิตสูงมี 50 คน

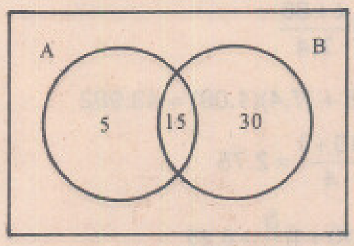
เพราะฉะนั้น $n(A\cup B)=50$

ผู้ป่วยโรคหัวใจมี 20 คน ดังนั้น $n(A)=20$

ผู้ป่วยทั้งโรคหัวใจและโรคความดันโลหิตสูง 15 คน

เพราะฉะนั้น $n(A\cap B)=15$

เขียนจำนวนสมาชิกในแผนภาพเวนน์จะได้ดังนี้



เซตของผู้ป่วยด้วยโรคหัวใจอย่างเดียว = A – B มีสมาชิก 5 คน

เซตของผู้ป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว = B – A มีสมาชิก 30 คน

สรุปความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะป่วยด้วยโรคหัวใจอย่างเดียวหรือป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว เท่ากับ $\frac{5+30}{50}=\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$

หมายเหตุ โดยใช้เหตุผลในลักษณะสูตรของเซตและความน่าจะเป็น

เพราะว่าเหตุการณ์ที่จะเป็นโรคหัวใจอย่างเดียวหรือโรคความดันโลหิตสูงอย่าง

เดียว เป็นเหตุการณ์ที่ตรงกันข้ามกับการเป็นโรคทั้งสองโรค = $(A \cap B)'$ และ

$$P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{15}{50} = \frac{7}{10}$$

สรุปความน่าจะเป็นโรคหัวใจอย่างเดียวหรือโรคความดันโลหิตสูงอย่างเดียว เท่ากับ $\frac{7}{10}$

53. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อมูลคะแนนสอบวิชาภาษาไทย เรียงจากน้อยไปมาก

25, 25, 30, 32, 35, 39, 40, 44, 45, 45

จากข้อมูลจะได้ว่า

$$\bar{x} = \frac{25+25+30+32+35+39+40+44+45+45}{10} = 36$$

เพราะว่า $\quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$$1.08 = \frac{x + 36}{7.4}$$

เพราะฉะนั้น $x = 36 + (7.4)(1.08) = 43.992$

Q_1 คือข้อมูลตัวที่ $\frac{10+1}{4} = 2.75$

Q_3 คือข้อมูลตัวที่ $(10+1)\frac{3}{4} = 8.25$

โดยที่เรายังไม่ต้องคิดค่าจริงของ Q_1, Q_3 ก็สามารถสรุปคำตอบได้

25, 25, 30, 32, 35, 39, 40, 44, 45, 45

$$Q_2 = \frac{35+39}{2} = 37$$

Q_1 อยู่ระหว่าง 25 และ 30 $\qquad$ Q_3 อยู่ระหว่าง 44 และ 45

ดังนั้น $25 < Q_1 < 30$, $Q_2 = 37$ และ $44 < Q_3 < 45$

จากตัวเลือกที่มีอยู่สรุปได้ว่า คะแนนของเด็กชายสด อยู่ระหว่าง Q_2 และ Q_3 ซึ่งคือตัวเลือก 3.

หมายเหตุ ค่าแท้จริงของควอไทล์ที่หนึ่งและควอไทล์ที่สามคือ

$Q_1 = 25 + (0.75)(30 - 25) = 28.75$

$Q_3 = 44 + (0.25)(45 - 44) = 44.25$

54. **ตอบ** 2. และ 3.

แนวคิด $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ เป็นคะแนนสอบของนักเรียนเมื่อมีการคิดคะแนนเต็มเป็น 20 คะแนน, $\bar{x} = 12.5$ และ $s^2 = 1.2$

การปรับคะแนนเต็มจาก 20 คะแนนเป็นคะแนนเต็ม 60 คะแนน

ต้องอาศัยความโชคดีว่าปรับคะแนนด้วยวิธีใดและจะถูกใจผู้ออกข้อสอบหรือไม่

วิธีที่ 1 บวกคะแนนทุกตัวด้วย 40 จะได้ข้อมูลใหม่เป็น

$$x_1 + 40, x_2 + 40, \ldots\ldots\ldots, x_n + 40$$

การปรับคะแนนวิธีนี้จะได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนชุดใหม่ $= \bar{x} + 40 = 52.5$

ค่าความแปรปรวนของคะแนนชุดใหม่เท่ากับของเดิมคือ $s^2 = 1.2$

คำตอบต้องเป็นตัวเลือก 3.

วิธีที่ 2 คูณคะแนนทุกตัวด้วย 3 จะได้ข้อมูลใหม่เป็น $3x_1, 3x_2, 3x_3, \ldots\ldots, 3x_n$

การปรับคะแนนแบบนี้จะได้ค่าเฉลี่ยของคะแนนชุดใหม่ $= 3\bar{x} = 37.5$

ค่าความแปรปรวนของคะแนนชุดใหม่เท่ากับ $3^2s^2 = 9(1.2) = 10.8$

คำตอบตามวิธีที่ 2 ต้องเป็นตัวเลือก 2.

หมายเหตุ หวังว่าคอมพิวเตอร์คงจะสามารถให้คะแนนแก่นักเรียนที่เลือกตัวเลือก 2. หรือ ตัวเลือก 3. ได้

55. ตอบ 3.

แนวคิด ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2534 เป็น 120

รายได้นายวิบูลย์ในปี 2537 เท่ากับ 8400

รายได้แท้จริงของนายวิบูลย์เมื่อเทียบกับปี 2534

$$= \frac{\text{รายได้ปีของนายวิบูลย์ในปี 2537}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เทียบกับปี 2534}} \times 100$$

$$= \frac{8400}{120} \times 100 = 7000$$

56. ตอบ 4.

แนวคิด คิดค่าจ้างเฉลี่ยของทุกปีเทียบกับปี 2530

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2531} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2531}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2531}} \times 100$$

$$= \frac{1.30}{113} \times 100 = 1.15$$

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2532} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2532}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2532}} \times 100$$

$$= \frac{1.4}{114} \times 100 = 1.12$$

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2533} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2533}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2533}} \times 100$$

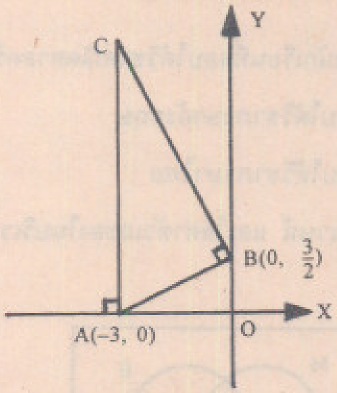
$$= \frac{1.5}{116} \times 100 = 1.29$$

สรุปค่าจ้างเฉลี่ยที่แท้จริงต่อชั่วโมงเพิ่มขึ้นปีละไม่เท่ากัน

ตอนที่ 3 ข้อ 1–6 ข้อละ 3 คะแนน

1. **ตอบ** 7.5

แนวคิด วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์



ความชัน AB เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้น $\tan B\hat{A}O = \frac{1}{2}$

ในสามเหลี่ยม AOB, $\tan B\hat{A}O = \frac{|OB|}{|OA|}$

ดังนั้น $\frac{|OB|}{|OA|} = \frac{1}{2}$ และ $|OB| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{3}{2}$

สรุปพิกัด B คือ $(0, \frac{3}{2})$

เพราะว่า AB ตั้งฉากกับ BC และความชัน AB เท่ากับ $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นความชัน BC เท่ากับ –2

เพราะว่า AC ขนานกับแกน Y เพราะฉะนั้น C มีพิกัด (–3, y)

ความชัน BC เท่ากับ $\frac{y - \frac{3}{2}}{-3 - 0} = -2$

$$y - \frac{3}{2} = 6$$

$$y = 0 + \frac{3}{2} \ldots = \frac{15}{2} = 7.5$$

เพราะว่า C(–3, 7.5) และ A(–3, 0) เพราะฉะนั้น | AC | = 7.5

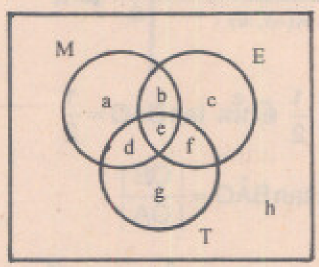
2. ตอบ 5

แนวคิด ให้ M = เซตของนักเรียนที่สอบได้วิชาคณิตศาสตร์

E = เซตของนักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาอังกฤษ

T = เซตของนักเรียนที่สอบได้วิชาภาษาไทย

คำถามแบบนี้ใช้แผนภาพเวนน์ และใส่ค่าตัวเลขลงในบริเวณของเซตเป็นวิธีที่ดีที่สุด



จากข้อกำหนดของโจทย์จะได้ว่า

เพราะว่า		เพราะฉะนั้น	
สอบได้วิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว	10 คน	a = 10	
สอบตกทั้งสามวิชา	3 คน	h = 3	
สอบได้วิชาคณิตศาสตร์	20 คน	a + b + e + d = 20	(1)
สอบได้วิชาภาษาอังกฤษ	15 คน	b + c + e + f = 15	(2)
สอบได้วิชาภาษาไทย	25 คน	d + e + f + g = 25	(3)
นักเรียนในห้องมี	48 คน	a+b+c+d+e+f+g+h=48	(4)

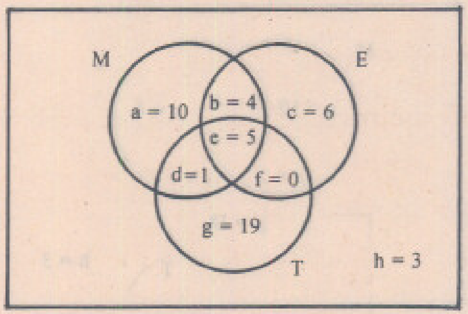
โจทย์ถามว่า นักเรียนที่สอบได้ทั้งวิชาภาษาไทยและภาษาอังกฤษมีกี่คน

นั้นคือถามว่า $e + f$ เท่ากับเท่าใด

ข้อสอบแบบนี้มีเทคนิคการได้คำตอบที่สำคัญ คือ แทนค่า b, d, g, c บางค่า

ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ก็จะได้ค่า $e + f$

ตัวอย่างเช่น ลองให้ $b = 4$ และ $d = 1$



การหาค่าของจำนวนสมาชิกในแต่ละส่วนคิดตามขั้นตอนดังนี้

จะเห็นได้ว่า เมื่อ $b = 4$ และ $d = 1$

(1) ; $a + b + e + d = 20$

$e = 20 - a - b - d = 20 - 10 - 4 - 1 = 5$

(2) ; $b + c + e + f = 15$

$c + f = 15 - b - e = 15 - 4 - 5 = 6$ ———— (5)

(3) ; $d + e + f + g = 25$

$f + g = 25 - d - e = 25 - 1 - 5 = 19$ ———— (6)

(4) ; $a + b + c + d + e + f + g + h = 48$

$10 + 4 + c + 1 + 5 + f + g + 3 = 48$

$c + f + g = 25$ ———— (7)

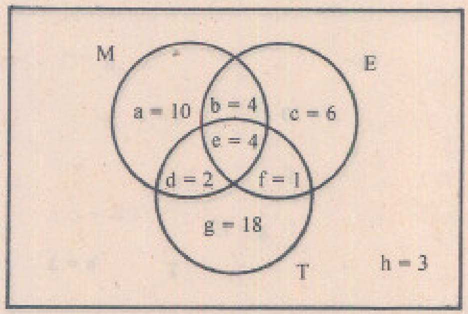
(7) – (5) ; $g = 25 - 6 = 19$

(6) ; $f = 19 - 19 = 0$

(7) – (6) ; $c = 25 - 19 = 6$

สรุป $e + f = 5 + 0 = 5$

ลองแทนค่า $b = 4, d = 2$ จะได้



หมายเหตุ $e + f = 5$ ที่หาได้นั้นเป็นคำตอบที่โจทย์ข้อนี้ต้องการแน่นอน หาก $e + f$ มีค่าอื่นได้อีกก็แสดงว่ามีคำตอบถูกต้องหลายคำตอบ ซึ่ง $e + f = 5$ ก็ต้องถูกต้องด้วย อย่างไรก็ตามขอให้คิดถึงการตรวจข้อสอบด้วยเครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนใหญ่คำตอบมักจะมีค่าเดียวเพื่อความสะดวกของคอมพิวเตอร์ ดังนั้น $e + f = 5$ แน่นอน

วิธีจริง ใช้การจัดรูปทางพีชคณิตเพื่อหาค่า e, f

(1) ; $b + e + d = 10$ ―――― (8)

(2) ; $b + c + e + f = 15$ ―――― (9)

(3) ; $d + e + f + g = 25$ ―――― (10)

(4) ; $b + c + d + e + f + g = 35$ ―――― (11)

(11) – (10) ; $b + c = 10$ ―――― (12)

$(9)-(12)$; $e+f=5$

สรุป $e+f=5$ เสมอโดยไม่ขึ้นอยู่กับค่า b, d, c, g

3. ตอบ 6

แนวคิด $AB+B=AB+IB=(A+I)B$

$\det(AB+B)=\det((A+I)\cdot B)=\det(A+I)\cdot\det(B)$

$\det(A+I)=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\det\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=-6$

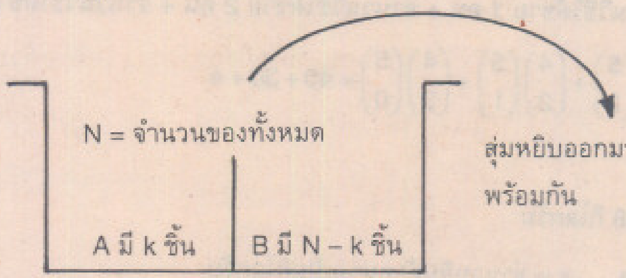
$\det(B)=\det\left(\begin{bmatrix}4 & y\\ 1 & -2\end{bmatrix}\right)=-8-y$

ดังนั้น $84=\det(AB+B)=(-6)(-8-y)=48+6y$

สรุป $y=6$

4. ตอบ 74

แนวคิด สูตรการนับจำนวนวิธีสำหรับกรณีทั่วไป



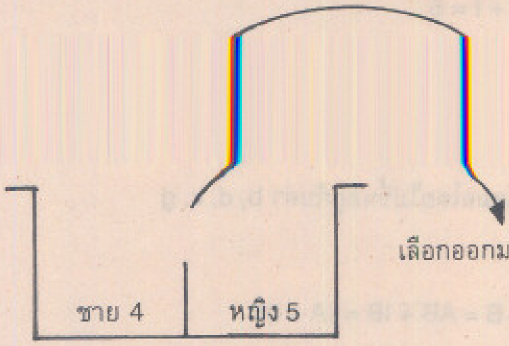
จำนวนวิธีทั้งหมด $=\binom{N}{n}$

จำนวนวิธีที่จะได้ A จำนวน x ชิ้น $=\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}$

จากโจทย์จะได้ A คือ ชาย, $k=4$

B คือ หญิง, $N-k=5$

$N=9$ และ $n=3$



วิธีที่ 1

จำนวนวิธีได้ชายอย่างน้อย 1 คน

= จำนวนวิธีทั้งหมด – จำนวนวิธีที่ไม่ได้ชายแม้แต่คนเดียว

$= \binom{9}{3} - \binom{4}{0}\binom{5}{3} = 84 - 10$

$= 74$

วิธีที่ 2

จำนวนวิธีได้ชายอย่างน้อย 1 คน

= จำนวนวิธีได้ชาย 1 คน + จำนวนวิธีได้ชาย 2 คน + จำนวนวิธีได้ชาย 3 คน

$= \binom{4}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{5}{1} + \binom{4}{3}\binom{5}{0} = 40 + 30 + 4$

$= 74$

5. ตอบ 38 กิโลกรัม

แนวคิด x = จำนวนสินค้าหน่วยเป็นกิโลกรัม

ต้นทุน $= 2x^2 + 6x + 300$ บาท

ราคาขาย $= 310 - 2x$ บาท/กิโลกรัม

รายได้ $= x(310 - 2x) = 310x - 2x^2$

กำไร = รายได้ – ต้นทุน $= (310x - 2x^2) - (2x^2 + 6x + 300)$

$= -4x^2 + 304x - 300$

ให้ $f(x) = -4x^2 + 304x - 300$

$f'(x) = -8x + 304$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $-8x + 304 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x = 38$

เพราะว่า $f(x) = -4x^2 + 304x - 300$ มีกราฟเป็นรูปพาราโบลาคว่ำ

เพราะฉะนั้น $f(38)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

สรุปพ่อค้าต้องผลิต $x = 38$ กิโลกรัมจึงจะได้กำไรมากที่สุด

6. ตอบ 12.5 คะแนน

แนวคิด ห้องที่ 1 $\bar{x} = 60, s = 3$

ให้ x เป็นคะแนน นาย ก. $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$$2.5 = \frac{x - 60}{3}$$

$$x = 67.5$$

เพราะฉะนั้นคะแนน นาย ก. เท่ากับ 67.5 คะแนน

ห้องที่ 2 $\bar{x} = 65, s = 5$

ให้ x เป็นคะแนน นาย ข. $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$$-2 = \frac{x - 65}{5}$$

$$x = 55$$

เพราะฉะนั้นคะแนน นาย ข. เท่ากับ 55 คะแนน

สรุปคะแนน นาย ก. และ นาย ข. ต่างกัน $67.5 - 55 = 12.5$ คะแนน

ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม

ตารางค่าความจริง

p	$\sim p$
T	F
F	T

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

ข้อสังเกต

ประเด็นในการพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม มีดังนี้

(1) $p \wedge q$ เป็นจริง กรณีที่ p, q เป็นจริงทั้งคู่ กรณีอื่นๆ นอกจากนี้ $p \wedge q$ เป็นเท็จ

(2) $p \vee q$ เป็นเท็จ กรณีที่ p, q เป็นเท็จทั้งคู่ กรณีอื่นๆ นอกจากนี้ $p \vee q$ เป็นจริง

(3) $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ กรณีที่ p เป็นจริง q เป็นเท็จ กรณีอื่นๆ นอกจากนี้ $p \rightarrow q$ เป็นจริง

(4) $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง กรณีที่ p, q มีค่าความจริงเหมือนกัน กรณีอื่นๆ นอกจากนี้ $p \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

(5) $\sim p$ มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

สมมูลและสัจนิรันดร์

ประพจน์ 2 ประพจน์สมมูลกัน ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงเหมือนกันทุกกรณี กรณีต่อกรณี เช่น

$p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$ $\qquad\qquad$ $\sim(p \rightarrow q)$ สมมูลกับ $p \wedge \sim q$

ข้อสังเกต

1. ประพจน์ที่สมมูลกัน สามารถนำมาใช้แทนกันได้
2. A สมมูลกับ B ก็ต่อเมื่อ $\sim$A สมมูลกับ $\sim$B
3. ให้ p เป็นประพจน์ใดๆ T แทนประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ F แทนประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ
   จะได้ $p \wedge T$ สมมูลกับ p, $p \vee F$ สมมูลกับ p

   ประพจน์ A เป็นสัจนิรันดร์ (tautology) ก็ต่อเมื่อ A มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

   p สมมูลกับ q ก็ต่อเมื่อ $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

   สัจนิรันดร์ที่เป็นประโยชน์และพบเห็นบ่อยๆ มีดังนี้ ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ

T_1 : $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

T_2 : $[(p \wedge q) \wedge r] \leftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

T_3 : $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$

T_4 : $[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

T_5 : $\sim(\sim p) \leftrightarrow p$

T_6 : $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

T_7 : $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

T_8 : $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

T_9 : $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

T_{10} : $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

T_{11} : $[p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]$

T_{12} : $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$

วิธีที่ได้คำตอบอย่างรวดเร็ว

คณิตศาสตร์ กข. 2539 ข้อ 37

ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geqslant 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ แล้วสำหรับ

จำนวนจริง x ใดๆค่าของ $g(|x|-x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x|-x)$
2. $x(x-|x|)$
3. $2x(|x|-x)$
4. $2x(x-|x|)$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

แทนค่า x = -1 ในโจทย์และตัวเลือกจะได้

โจทย์ $g(|x|-x) = g(|-1|-(-1)) = g(2) = 4$

1. $x(|x|-x) = (-1)(|-1|-(-1)) = -2$
2. $x(x-|x|) = (-1)(-1-|-1|) = 2$
3. $2x(|x|-x) = 2(-1)(|-1|-(-1)) = -4$
4. $2x(x-|x|) = 2(-1)(-1-|-1|) = 4$

สรุปตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก (ภาค 2)

เฉลย คณิตศาสตร์ ก. และ คณิตศาสตร์ กข. 2539

วิธีที่ได้คำตอบอย่างรวดเร็ว

กข. 2539 (14) เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. [0,3] 2. [2,4] 3. [-3,-2]U[2,3] 4. [-2,-1]U[1,2]

เพราะว่า x=1 ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

กข. 2539 (51) จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะมีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใด

1. 350 2. 380 3. 470 4. 500

เพราะว่าเลขคี่ 100 - 999 มี 450 ตัว ดังนั้น ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

อยากได้คำตอบเร็วกว่านี้ให้อ่านเนื้อหาภายในเล่ม

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2,2187000
โทรสาร 2554441

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่ม10
ISBN 974-634-593-1
9 789746 345934
C112
7010 95.00 บาท