คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 11

เฉลยข้อสอบ

คณิตศาสตร์ กข.

โดยใช้

วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

กข.2539

กข.2538

กข.2537

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 11) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา
เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. 2537 - 2539

ISBN 974-7101-41-6

สงวนลิขสิทธิ์

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 3000 เล่ม พ.ศ. 2539

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980-2,2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ พิทักษ์การพิมพ์
โทร. 4112765

คำนำ

หนังสือ รวมเฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2537 - 2539 เล่มนี้มีแนวคิดในการหาคำตอบ ประกอบด้วย วิธีจริง วิธีลัดและใช้เทคนิคการตัดตัวเลือก การเฉลยโดยวิธีจริงจะแสดงให้ดูอย่างเข้าใจง่ายโดยใช้เหตุผลที่ตรงตามหลักสูตร การเฉลยโดยวิธีลัดจะมีการนำเหตุผลทางคณิตศาสตร์อื่นๆเช่น ม. ต้น หรือเหตุผลที่สูงกว่าระดับ ม. ปลายเล็กน้อยมาช่วยในการหาคำตอบ วิธีที่ได้คำตอบเร็วที่สุดคือใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกจะนำเหตุผลทางคณิตศาสตร์ทั้งหมดที่นักเรียนมีแล้ว ประกอบกับสภาพแวดล้อมของโจทย์ข้อสอบและตัวเลือก มาช่วยในการจำแนกว่าตัวเลือกใดสามารถตัดทิ้งได้ซึ่งจะเป็นวิธีที่ได้คะแนนเร็วที่สุด เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบต่างๆนักเรียนสามารถอ่านเพิ่มเติมได้จาก

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7 คู่มือตัดตัวเลือก ม. ปลาย (ภาค 1)

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 9 คู่มือตัดตัวเลือก ม. ต้น

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10 คู่มือตัดตัวเลือก ม. ปลาย (ภาค 2)

สุดท้ายนี้ขอขอบคุณทุกท่านที่ติดตามผลงานของผู้เขียนมาโดยตลอด

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สนใจเทคนิคการหาคำตอบอย่างรวดเร็ว

สอนโดยผู้เขียน สมัครเรียนได้ที่....

สถาบันกวดวิชา
ENG-MATH สัมมากร

159/10 เมนซี หมู่บ้านสัมมากร ถ.สุขาภิบาล 3

เขตบึงกุ่ม กรุงเทพมหานคร 10240 โทร. 373-9640

หลักสูตร เทคนิคการทำข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย และ ENTRANCE

รุ่นที่ 1 วันอาทิตย์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 2 วันเสาร์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 3 วันอาทิตย์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 4 วันเสาร์ เวลา 15.00-17.00 น.

หลักสูตร เทคนิคการทำข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ต้น

รุ่นที่ 1 วันเสาร์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 2 วันอาทิตย์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 3 วันเสาร์ เวลา 15.00-17.00 น.

รุ่นที่ 4 วันอาทิตย์ เวลา 15.00-17.00 น.

เวลาเรียนรุ่นละ 12 ชั่วโมง ค่าเรียน 800 บาท

รุ่นที่ 1 เริ่มวันเสาร์ที่ 8 มิถุนายน - วันอาทิตย์ที่ 14 กรกฎาคม 2539

รุ่นที่ 2 เริ่มวันเสาร์ที่ 3 สิงหาคม - วันอาทิตย์ที่ 8 กันยายน 2539

รุ่นที่ 3 เริ่มวันเสาร์ที่ 23 พฤศจิกายน - วันอาทิตย์ที่ 29 ธันวาคม 2539

รุ่นที่ 4 เริ่มวันเสาร์ที่ 18 มกราคม - วันอาทิตย์ที่ 23 กุมภาพันธ์ 2540

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1-30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ให้ A, B, C, D เป็นเซตใดๆ

   $(A \cap C) - (B \cup D)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(A - B) \cap (D - C)$
   2. $(A - B) \cap (C - D)$
   3. $(A - B) \cup (D - C)$
   4. $(A - B) \cup (C - D)$

2. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุดซึ่งหาร 90 เหลือเศษ 6 และหาร 150 เหลือเศษ 3 แล้ว n หาร 41 เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 5
   2. 6
   3. 18
   4. 20

3. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ พจน์ที่ m ของลำดับเลขคณิต 2, 5, 8, ... มีค่ามากกว่า 1000 จำนวนในข้อใดต่อไปนี้เป็นตัวหารของ m

   1. 67
   2. 111
   3. 166
   4. 167

4. นิเสธของข้อความ $\exists x \forall y [xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\forall x \exists y[(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   2. $\exists x \forall y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$
   3. $\exists x \forall y[(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   4. $\forall x \exists y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

5. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก) เหตุ 1. $p \rightarrow q$
2. $q \rightarrow s$
3. $\sim s$
ผล $\sim p \vee s$

ข) เหตุ $p \rightarrow (r \vee s)$
ผล $\sim p \vee (r \vee s)$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ก และ ข สมเหตุสมผลทั้งคู่
2. ก และ ข ไม่สมเหตุสมผลทั้งคู่
3. ก สมเหตุสมผล แต่ ข ไม่สมเหตุสมผล
4. ก ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข สมเหตุสมผล

6. ถ้าเซต A มีสมาชิก 10 ตัวแล้ว จำนวนทั้งหมดของความสัมพันธ์จาก $A \times A$ ไป A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2^{100}
2. 2^{1000}
3. 100^2
3. 1000^2

7. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ และ $B = \{a, b\}$ แล้วจำนวนของฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับข้อใด

1. 14
2. 63
3. 126
4. 252

8. ให้ $A = \left\{ \frac{\pi}{n+1} \mid n \text{ เป็นจำนวนนับ} \right\}$ และ

$f(x) = \sin x$ เมื่อ $x \in A$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. มี $a, b \in A$ ซึ่ง $f(a) = 2f(b)$
2. มี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = 0$
3. f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4. $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in A$

9. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{32}$
2. $\frac{11}{16}$
3. $\frac{9}{16}$
4. $\frac{9}{12}$

10. ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 1
3. $\frac{4}{3}$
4. $-\frac{4}{3}$

11. เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 5$ มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $4x - 3y + 12 = 0$
2. $4x - 3y - 12 = 0$
3. $4x - 3y - 36 = 0$
4. $4x - 3y + 36 = 0$

12. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}$ และ $B = [x \ \ y]$ เซตของจุด (x, y) ซึ่งสอดคล้องสมการ $BAB^t = [12]$ เป็นกราฟของข้อใดต่อไปนี้

1. วงรีซึ่งมีแกนเอกทับแกน X
2. วงรีซึ่งมีแกนเอกทับแกน Y
3. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีแกนตามขวางทับแกน X
4. ไฮเพอร์โบลาซึ่งมีแกนตามขวางทับแกน Y

13. กำหนดให้ $f(x) = \log(1+x)$ สำหรับ $x \in R$

ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(n+1)$
2. $f(n)$
3. $f(\frac{1}{n})$
4. $f(\frac{1}{n+1})$

14. เซตคำตอบของสมการ $\left(\sqrt{|x|}\right)^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 3]$
2. $[2, 4]$
3. $[-3, -2] \cup [2, 3]$
4. $[-2, -1] \cup [1, 2]$

15. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ให้ $C_{ij}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของสมาชิกในตำแหน่งแถวที่ i หลักที่ j ของ A

ถ้า $C_{12}(A) = 1$ และ $\det(A) = -5$ แล้ว a เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -5
2. -1
3. 2
4. 3

16. เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์

เอกฐานคือข้อใด

1. $\left\{1, \frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$
2. $\left\{1, 5+3\sqrt{3}, 5-3\sqrt{3}\right\}$
3. $\left\{1, \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4}\right\}$
4. $\left\{1, 3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}\right\}$

17. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี D มีจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB เป็นอัตราส่วน $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3:2$ และ $\overrightarrow{CA} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\overrightarrow{CB} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ แล้ว $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{15}$
2. $\frac{11}{5}$
3. $\frac{13}{5}$
4. $\frac{14}{5}$

18. กำหนดให้ A, B และ C คือ จุดที่มีพิกัดเป็น (−5, 0), (3, 6) และ $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ ตามลำดับ ถ้า D(a, b) เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ และขนาดของ $\overrightarrow{CD}$ เท่ากับ 2 แล้ว a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 6
3. $\frac{29}{5}$
4. $\frac{71}{5}$

19. กำหนดให้ $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. −1
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 1

20. ถ้าอนุกรม $1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3}+\ldots$ มีผลบวกเท่ากับ 9 แล้ว อนุกรม $\log_2 x - (\log_2 x)^2 + (\log_2 x)^3 - (\log_2 x)^4 + \ldots$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{1+\log_2 3}$
2. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\log_2 3}{1-\log_2 3}$
3. มีผลบวกเท่ากับ $\frac{\log_2 3}{1+\log_2 3}$
4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

21. สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 4$ กำหนดให้ $a_n = \dfrac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3}$

ลำดับ a_n เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีลิมิตเป็น 1
2. มีลิมิตเป็น 2
3. มีลิมิตเป็น 4
4. เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

22. ค่าของ $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. 0
3. 1
4. หาค่าไม่ได้

23. กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16)$ และ $A = \{x \in R \mid f'(x) > 0\}$

ดังนั้น A คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty,-2) \cup (0,2)$
2. $(-2,0) \cup (2,\infty)$
3. $(-\infty,-2)$
4. $(2,\infty)$

24. ถ้า $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} = 3x-2$ ทุก $x \in R$ และ $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนกราฟของ f

1. $(1, 0)$
2. $(-1, 0)$
3. $(\dfrac{2+\sqrt{7}}{3}, 0)$
4. $(\dfrac{-2-\sqrt{7}}{3}, 0)$

25. กำหนดฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีกราฟเป็นเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (-1, 0) และผ่านจุด (3, 6)

ค่าของ $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9
2. 12
3. 15
4. 18

26. มีลูกแก้ว 7 ลูกซึ่งมีสีต่างกันหมดโดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จำนวนวิธีที่จะวางเรียงลูกแก้วเป็นวงกลมโดยให้สีน้ำเงินเรียงอยู่ติดกับสีขาวและติดกับสีแดงเท่ากับข้อใด

1. 24
2. 48
3. 120
4. 240

27. ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักให้แต้มคู่แต่ละหน้ามีโอกาสเกิดขึ้นเป็นสองเท่าของแต้มคี่ แต่ละหน้า ความน่าจะเป็นที่โยนลูกเต๋า 1 ครั้ง ได้แต้มเป็น 1 หรือแต้มคู่เท่ากับข้อใด

1. $\frac{2}{3}$
2. $\frac{3}{4}$
3. $\frac{7}{9}$
4. $\frac{5}{8}$

28. ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{31}{36}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{5}{36}$

29. ถ้าคะแนนวิชาสถิติและคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

นักเรียนคนที่	1	2	3	4	5
คะแนนวิชาสถิติ	8	5	4	2	1
คะแนนวิชาคณิตศาสตร์	9	6	5	3	2

แล้วอัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของความแปรผันระหว่างคะแนนวิชาสถิติ และคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{25}{16}$ 2. $\frac{16}{25}$

3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{5}{4}$

30. กำหนดข้อมูล 2 ชุด ดังนี้

ชุดที่ 1 : 6, 12, 9, 10, 6, 8

ชุดที่ 2 : 60, 64, 56, 70, 52, 63

ข้อความใดต่อไปนี้ถูก

1. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายน้อยกว่าชุดที่ 2
2. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายมากกว่าชุดที่ 2
3. ข้อมูลชุดที่ 1 กระจายเท่ากับชุดที่ 2
4. เปรียบเทียบการกระจายของข้อมูล 2 ชุดนี้ไม่ได้

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(S)$ = เพาเวอร์เซตของ S

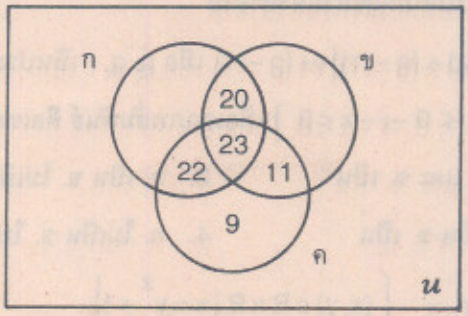
ถ้า $X = \{ A \in P(S) \mid 1 \in A \text{ และ } 7 \notin A \}$

และ $Y = \{ A \in X \mid$ ผลบวกของสมาชิกใน A ไม่เกิน 6 $\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของ X และ Y (ตามลำดับ) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16, 5 2. 16, 6 3. 32, 5 4. 32, 6

32. ในการสำรวจความนิยมของคนจำนวน 100 คน ที่มีต่อนาย ก นาย ข และนาย ค โดยทุกคนต้องแสดงความนิยมคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน ปรากฏว่านาย ก ได้รับคะแนนความนิยมมากกว่า นาย ข อยู่ 6 คะแนน และเขียนเป็นแผนภาพได้ ดังรูป



ต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. นาย ข ได้คะแนนนิยมน้อยที่สุด
2. ผลรวมของคะแนนนิยมของนาย ก นาย ข และนาย ค คือ 199
3. ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้เฉพาะ นาย ก เท่านั้น มีจำนวน 10 คน
4. ผู้ที่ลงคะแนนนิยมให้ นาย ข มีจำนวน 64 คน

33. ให้ $A = \left\{ x \in R \middle| \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geq 1 \right\}$

$B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2 \}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -3 3. -2 4. -1

34. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) $3 \mid (a^4 + 2a^3 - a^2 - 2a)$ ทุกจำนวนเต็ม a

ข) $\{ x \in I^- \mid 6x^3 + 17x^2 + 14x + 3 \geq 0 \}$ มีสมาชิกเพียงตัวเดียว

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
3. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

35. ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ก) $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$ เมื่อ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ

ข) $\forall x[\, x \not< 0 \to -x < 0\,]$ เมื่อเอกภพสัมพันธ์ คือเซตของจำนวนจริง

1. ก. เป็น และ ข. เป็น
2. ก. เป็น ข. ไม่เป็น
3. ก. ไม่เป็น ข. เป็น
4. ก. ไม่เป็น ข. ไม่เป็น

36. กำหนดให้ $r = \left\{ (x,y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1 \right\}$

และ $s = \left\{ (x,y) \in R \times R \mid x = |y| \right\}$

ข้อความใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $r^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$
2. $r^{-1} \circ s^{-1} = r$
3. $r^{-1} \circ r^{-1} = r^{-1}$
4. $s^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1}$

37. ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ แล้ว

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าของ $g(|x| - x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x| - x)$
2. $x(x - |x|)$
3. $2x(|x| - x)$
4. $2x(x - |x|)$

38. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x$ เมื่อ $0 \leq x \leq 2\pi$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $0 \leq x \leq \pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
2. ถ้า $\pi \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 2\cos x$
3. ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $f(x) = 0$
4. ถ้า $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ แล้ว $f(x) = 0$

39. กำหนดให้เส้นไดเรกตริกซ์และแกนของพาราโบลา $y^2 - 4y + 8x = 20$ ตัดกันที่จุด P ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดกำเนิด, จุด P และจุดโฟกัสของพาราโบลานี้แล้ว กำลังสองของรัศมีของวงกลมวงนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{35}{4}$
2. $\frac{37}{4}$
3. $\frac{143}{16}$
4. $\frac{145}{16}$

40. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ ถ้า E เป็นวงรีซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ใน E ไปยังจุดที่กราฟของ H ตัดแกน X ทั้งสองจุดเท่ากับ 8 แล้ว สมการของ E คือข้อใดต่อไปนี้

1. $3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 48$
2. $4(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 48$
3. $3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 64$
4. $4(x-1)^2 + 3(y-2)^2 = 64$

41. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่ทำให้ $AB = BA = I$ แล้วค่าของ $\det(\text{adj}\, B^{-1})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 16
3. 25
4. 36

42. ค่าสูงสุดของ A เมื่อ $A = 6x + y$ โดยที่ $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2, 2x - y \leq 2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. $\frac{26}{3}$
3. $\frac{32}{3}$
4. 12

43. ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v}=5, |\bar{u}|=2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา แล้ว $|\bar{u}+\bar{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7
2. 12
3. $\sqrt{29}$
4. $\sqrt{39}$

44. กำหนดให้ g(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและ $f(x)=(x-1)^2 g(x)$

ถ้า x–2 หาร f(x) เหลือเศษ 3 และ

x–2 หาร f′(x) เหลือเศษ 4 แล้ว ค่าของ g′(2) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –3
2. –2
3. 1
4. 4

45. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z\neq 0$ และ $(5-12i)z^3(-3+4i)=130\bar{z}$

แล้ว $|z|$ (ค่าสัมบูรณ์ของ z) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 2

46. กำหนดให้ $a_n=\begin{cases}1 & \text{เมื่อ } n=1,2\\ a_{n-2}+2 & \text{เมื่อ } n=3,5,7,\ldots\\ 2a_{n-2} & \text{เมื่อ } n=4,6,8,\ldots\end{cases}$

$\sum_{i=1}^{101} a_i$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(50)(51)+2^{50}-1$
2. $(51)^2+2^{50}-1$
3. $(50)(51)+2^{49}-1$
4. $(51)^2+2^{49}-1$

47. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n ให้ $f_n(x)=nx^2-n^2x$ และ $g(x)=\sum_{n=1}^{10} f_n(x)$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้น g มีค่าต่ำสุดที่ x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2.5
2. 2.7
3. 3.2
4. 3.5

48. กำหนดให้ $h(x)=\begin{cases}0 & \text{เมื่อ } x\le 1\\ \frac{1}{x-1} & \text{เมื่อ } 1<x\le 2\\ 3-x & \text{เมื่อ } x>2\end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ ถูก

1. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ แต่ต่อเนื่องที่ $x=2$
2. h ไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$
3. h ต่อเนื่องที่ $x=1$ และต่อเนื่องที่ $x=2$
4. h ต่อเนื่องที่ $x=1$ แต่ไม่ต่อเนื่องที่ $x=2$

49. กำหนดให้ $f(x)=\frac{2x-a}{x+b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $f'(0)=4$ และ $f''(0)=-8$ แล้ว ค่าของ $f(0)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. -2
3. 1
4. -1

50. จำนวนจริงบวก a ที่ทำให้

$$\int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^a dx = 0.95$$

เป็นสมาชิกของช่วงใดต่อไปนี้

1. [0, 9]
2. [10, 18]
3. [19, 25]
4. $[26,\infty)$

51. จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใด

1. 350
2. 380
3. 470
4. 500

52. ในการจัดงานของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้แจกบัตรแก่ผู้เข้าชมงาน 100 ใบ ซึ่งมีหมายเลขตั้งแต่ 00 ถึง 99 กำกับอยู่ สุ่มหยิบต้นขั้วของบัตรมา 1 ใบ เพื่อมอบรางวัลแก่ผู้เข้าชมงาน ผู้ที่มีบัตรซึ่งมีหลายเลขตรงกับต้นขั้วที่หยิบได้จะได้รับรางวัลที่ 1 ส่วนผู้ที่มีบัตรหมายเลขซึ่งมีหลักหน่วยตรงกันกับต้นขั้วหรือหลักสิบตรงกันกับต้นขั้วเพียงหลักเดียวจะได้รับรางวัลที่ 2 ถ้าสมชายได้รับแจกบัตรมา 1 ใบ ความน่าจะเป็นที่สมชายจะได้รับรางวัลคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$
2. $\frac{1}{10}$
3. $\frac{19}{100}$
4. $\frac{1}{5}$

53. ผลการสอบวิชาภาษาไทย 2 ครั้ง ของนักเรียนชั้นหนึ่งซึ่งมีเด็กหญิงกัลยาและเด็กชายปัญญารวมอยู่ด้วยปรากฏผลดังตาราง

	กลางภาค	ปลายภาค
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	62	55
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	7	5
คะแนนของกัลยา	97	40
คะแนนของปัญญา	76	50

ถ้าคิดคะแนนกลางภาค 40% และปลายภาค 60% แล้วผลการเปรียบเทียบคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของเด็กทั้งสองเป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. กัลยาได้มากกว่าปัญญา
2. กัลยาได้น้อยกว่าปัญญา
3. กัลยาได้เท่ากับปัญญา
4. ข้อมูลไม่เพียงพอที่จะเปรียบเทียบได้

54. กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานทางขวามือของ z = 0.67 เท่ากับ 0.25 ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยที่ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับ 2 และสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับ $\frac{2}{3}$ แล้ว สำหรับข้อมูลนี้ ข้อใดเป็นจริง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 3 ความแปรปรวนเท่ากับ 8.88
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 ความแปรปรวนเท่ากับ 8.88
3. ค่าฐานนิยมเท่ากับ 6 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.98
4. ค่ามัธยฐานเท่ากับ 3 ความแปรปรวนเท่ากับ 2.98

55. คะแนนสอบวิชาหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้ามีนักเรียนสอบได้คะแนนน้อยกว่า 40 คะแนน อยู่ 15.87 เปอร์เซนต์ และได้คะแนนมากกว่า 70 คะแนน อยู่ 2.27 เปอร์เซนต์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) สัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนชุดนี้เท่ากับ 20 เปอร์เซนต์

ข) มีนักเรียนสอบได้คะแนนมากกว่า 30 คะแนน อยู่ 90 เปอร์เซนต์

กำหนดให้

z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3413	0.4330	0.4773	0.4938

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

56. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยมีค่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{1}{4}$ ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 3 มัธยฐานของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{4}{3}$
3. 12
4. 36

ตอนที่ 3 เติมคำตอบข้อ 1-6 ข้อละ 3 คะแนน

1. สามเหลี่ยม ABC มีด้าน a, b, c เป็นด้านตรงข้ามมุม A, B, C ซึ่งมีความยาวเป็น 3, 2.5, 1 หน่วยตามลำดับ ค่าของ $b \cos C + c \cos B$ เท่ากับเท่าใด

2. ให้ $A = \left\{ x \in R \middle| 3^{x^2+2x} - 3^{x^2+1} - 9^{x+1} + 27 = 0 \right\}$
ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เท่ากับเท่าใด

3. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านทั้งสามยาว 3, 4, และ 5 นิ้ว ตามลำดับ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่สามารถบรรจุในสามเหลี่ยมนี้ได้จะมีพื้นที่กี่ตารางนิ้ว

4. ถ้า $\int (f \circ g)(x)\,dx = x^2 + 5x + c$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว และ $f(x) = 4x - 3$ แล้ว ค่าของ $\int_0^1 g(x)dx$ เท่ากับเท่าใด

5. มีสลาก 6 ใบมีหมายเลข 1–6 กำกับไว้ ให้สุ่มหยิบสลาก 2 ครั้งๆ ละใบ ถ้าครั้งแรกได้เลขคู่ให้ใส่สลากใบนั้นกลับคืนก่อนหยิบครั้งที่สอง แต่ถ้าครั้งแรกได้เลขคี่ ก็หยิบครั้งที่สองได้เลยโดยไม่ต้องใส่สลากกลับคืน ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ครั้งที่สองเป็นเลขคู่มีค่าเท่าใด

6. กำหนดให้ $x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ แทนปี พ.ศ. 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537 ตามลำดับ และ y แทนราคาปุ๋ย (หน่วยเป็น 100 บาท) โดยมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y เป็นสมการ

$$y = 0.25x^2 - 0.5x + 1.25$$

ถ้าใช้ปี พ.ศ. 2533 เป็นปีฐานแล้ว ดัชนีราคาของปุ๋ยในปี พ.ศ. 2537 จะเท่ากับเท่าใด

เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2539

ตอนที่ 1 ข้อ 1-30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ตอบ 2.

แนวคิด สูตรของเซตที่สำคัญในโจทย์ข้อนี้คือ $X - Y = X \cap Y'$

$$\begin{aligned}(A \cap C) - (B \cup D) &= (A \cap C) \cap (B \cup D)' \\ &= (A \cap C) \cap (B' \cap D') \\ &= (A \cap B') \cap (C \cap D') \\ &= (A - B) \cap (C - D)\end{aligned}$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ข้อสอบมีลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

แทนค่า $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2\}$

$C = \{3\}$

$D = \{4\}$

จากโจทย์ $(A \cap C) - (B \cup D) = \{3\} - \{1, 2, 4\} = \{3\}$

ตัวเลือก 1. $(A-B) \cap (D-C) = \{3, 4\} \cap \{4\} = \{4\}$

ตัวเลือก 2. $(A-B) \cap (C-D) = \{3, 4\} \cap \{3\} = \{3\}$

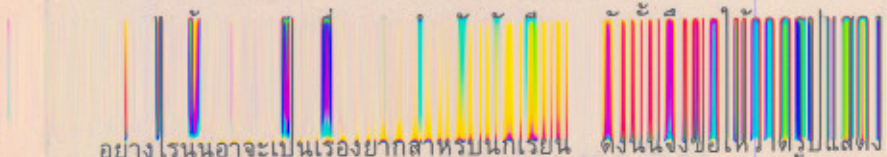
ตัวเลือก 3. $(A-B) \cup (D-C) = \{3, 4\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$

ตัวเลือก 4. $(A-B) \cup (C-D) = \{3, 4\} \cup \{3\} = \{3, 4\}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ ขอให้นักเรียนลองฝึกหัดโดยการเลือกเซต A, B, C และ D ให้แตกต่างจากข้างต้นแล้วแทนค่า

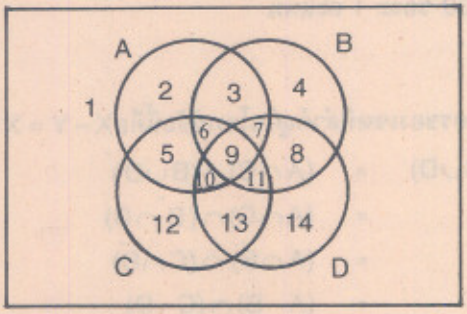
การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ในการสมมติว่า A, B, C, D ควรจะมีสมาชิก



อย่างไรนนอาจจะเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียน ดังนนจึงขอเหวาดูรูปแสดง

เซตและสมาชิกในเซตโดยใช้แผนภาพของเวนน์

สำหรับโจทย์ข้อนี้ต้องใช้วงกลม 4 วงตัดกันแทน A, B, C และ D



โดยการใส่สมาชิกแต่ละบริเวณดังรูป

จากรูป $A \cap C = \{5, 6, 9, 10\}$

$B \cup D = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$

ดังนั้น $(A \cap C) - (B \cup C) = \{5\}$

ตัวเลือก 1. $(A-B) \cap (D-C) = \{2, 5, 10\} \cap \{7, 8, 14\} = \varnothing$

ตัวเลือก 2. $(A-B) \cap (C-D) = \{2, 5, 10\} \cap \{5, 6, 12\} = \{5\}$

ตัวเลือก 3. $(A-B) \cup (D-C) = \{2, 5, 10, 7, 8, 14\}$

ตัวเลือก 4. $(A-B) \cup (C-D) = \{2, 5, 10, 6, 12\}$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

2. **ตอบ** 4.

แนวคิด เพราะว่า n หาร 90 เหลือเศษ 6 เพราะฉะนั้น n หาร $90-6 = 84$ ลงตัว

เพราะว่า n หาร 150 เหลือเศษ 3 เพราะฉะนั้น n หาร $150-3 = 147$ ลงตัว

เพราะว่าเราต้องการ n ใหญ่ที่สุดที่หาร 84 และ 147 ลงตัว

เพราะฉะนั้น n = ห.ร.ม. (84, 147)

เพราะว่า $84 = 2\cdot2\cdot3\cdot7$ และ $147 = 3\cdot7\cdot7$

เพราะฉะนั้น n = ห.ร.ม. (84, 147) = 21

สรุป n =21 หาร 41 เหลือเศษ 20

3. ตอบ 4.

แนวคิด ลำดับเลขคณิต 2, 5, 8,... มี $a = 2, d = 3$

พจน์ที่ m คือ $a_m = a + (m-1)d = 2 + (m-1)3 = 3m-1$

การหาค่า m ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้

$$a_m > 1000$$
$$3m-1 > 1000$$
$$3m > 1001$$
$$m > 333.67$$

สรุปจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดมีค่าเท่ากับ 334

ตัวเลขจากตัวเลือก 67, 111, 166 และ 167 ที่หาร 334 ลงตัวคือ 167

4. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตร $\sim(\exists x \forall y [P(x, y)]) \equiv \forall x \exists y [\sim P(x, y)]$

เพราะฉะนั้น $\sim(\exists x \forall y[xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)])$

$\equiv \forall x \exists y [\sim(xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0))]$

$\equiv \forall x \exists y [\sim(\sim(xy < 0) \vee (x < 0 \vee y < 0))]$ _____(*)

$\equiv \forall x \exists y [(xy < 0) \wedge (\sim(x < 0 \vee y < 0))]$ _____(1)

$\equiv \forall x \exists y [(xy < 0) \wedge (\sim(x < 0) \wedge \sim(y < 0))]$

$\equiv \forall x \exists y [(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

ตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก ถ้านักเรียนจำได้ว่า ~ $(\exists x \forall y)$คือ $\forall x \exists y$

ก็สามารถตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

จากสมการ (1) จะเห็นว่านิพจน์ของ xy ต้องอยู่ในรูป $xy < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้เลยโดยไม่จำเป็นต้องพยามยามจัดรูปต่อ

* หมายเหตุ สูตร $P \rightarrow Q$ สมมูลกับ $\sim P \vee Q$ ต้องใช้ในการสอบ ENTRANCE ทุกปี

5. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาอ้างเหตุผล ก. โดยการใช้ตารางแสดงค่าความจริง

p	q	s	~s	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow s$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \sim s$	$\sim p \vee s$
T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	T	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T
F	F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T	T	T

จากตารางแสดงค่าความจริงจะเห็นว่าทุกกรณีของค่าความจริงของ p, q และ s จะได้ว่า $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \vee s)$ เป็นจริงทุกกรณี

สรุป $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \wedge \sim s) \rightarrow (\sim p \vee s)$เป็นสัจนิรันดร์

เพราะฉะนั้น ก.สมเหตุสมผล

พิจารณาการอ้างเหตุผล ข.

เพราะว่า $A \rightarrow B$ สมมูลกับ $\sim A \vee B$

เพราะฉะนั้น $p \rightarrow (r \vee s)$ สมมูลกับ $\sim p \vee (r \vee s)$

ดังนั้น $(p \rightarrow (r \vee s)) \rightarrow (\sim p \vee (r \vee s))$เป็นจริงทุกกรณี

สรุป ข. สมเหตุสมผล

หมายเหตุ การแสดงว่า $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นจริงทุกกรณี

สามารถแสดงโดยใช้เหตุผลดังนี้

สมมติ $((p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s) \to (\sim p \vee s)$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $(p \to q) \wedge (q \to s) \wedge \sim s$ เป็นจริง และ $(\sim p \vee s)$เป็นเท็จ

$p \to q, q \to s, \sim s$ เป็นจริง และ $\sim p \vee s$เป็นเท็จ

จาก $\sim p \vee s$เป็นเท็จ จะได้ว่า $\sim p$ เป็นเท็จ และ s เป็นเท็จ

ดังนั้น p เป็นจริง และ $\sim s$ เป็นจริง

เพราะว่า $q \to s$ เป็นจริงและ s เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น q เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \to q$ เป็นเท็จ ขัดแย้งกับ $p \to q$เป็นจริง

สรุปที่เราสมมติไว้นั้นไม่จริง

ข้อแนะนำ การตีตารางค่าความจริงอาจดูว่าเป็นการทำงานที่มากแต่ความถูกต้องจะเชื่อถือได้มากกว่า และคิดค่าความจริงได้ง่ายกว่าอีกด้วย

6. **ตอบ** 2.

แนวคิด $n(A) = 10$

$n(A \times A) = n(A) \times n(A) = 10 \times 10 = 100$

จำนวนความสัมพันธ์จากเซต $A \times A$ ไป A เท่ากับ $n(P((A \times A) \times A))$

$$= 2^{n((A \times A) \times A)} \quad = 2^{100 \times 10} \quad = 2^{1000}$$

7. **ตอบ** 3.

แนวคิด วิธีที่1 สมาชิกแต่ละตัวของเซต A เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

ดังนั้นจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เท่ากับ $2^7 = 128$

ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงมี 2 ลักษณะคือ

1. ฟังก์ชันที่ทุกตัวของ A ส่งค่าไปที่ตัว a มี 1 ฟังก์ชัน

2. ฟังก์ชันที่ทุกตัวของ A ส่งค่าไปที่ตัว b มี 1 ฟังก์ชัน

สรุปจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับ $128-1-1=126$

วิธีที่ 2 จำแนกเป็น 6 กรณีดังนี้

1. สมาชิก 1 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{1}$ วิธี
2. สมาชิก 2 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{2}$ วิธี
3. สมาชิก 3 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี
4. สมาชิก 4 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{4}$ วิธี
5. สมาชิก 5 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{5}$ วิธี
6. สมาชิก 6 ตัวของ A ส่งไปจับคู่กับ a ทำได้ $\binom{7}{6}$ วิธี

หมายเหตุ แต่ละกรณีสมาชิกส่วนที่เหลือจับคู่กับ b

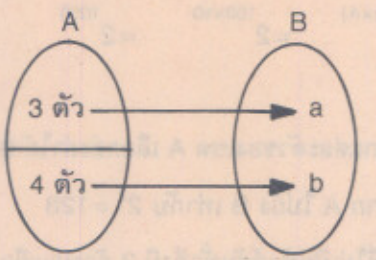
สรุป จำนวนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เท่ากับ

$$= \binom{7}{1}+\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}+\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$$

$$= 7+21+35+35+21+7$$

$$= 126$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ ถ้านักเรียนสามารถนับได้บางส่วนก็ควรจะนำมาใช้ในการตัดตัวเลือกเช่น



3 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนที่เหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{3} = 35$ วิธี

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

4 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนที่เหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{4} = 35$ วิธี

ดังนั้นจำนวนฟังก์ชันทั่วถึงเพิ่มเป็น 70 ตัว ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

8. **ตอบ 2.**

แนวคิด **ตัวเลือก 1.** ถูกต้อง ให้ $a = \frac{\pi}{2}$ และ $b = \frac{\pi}{6}$

จะได้ว่า $a, b \in A$, $f(a) = f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

และ $f(b) = f(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $f(a) = 2f(b)$

ตัวเลือก 2. ผิด แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่า $\sin\theta = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

และ $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้นไม่มี $a \in A$ ซึ่ง $f(a) = 0$

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่าน จะแสดงข้อพิสูจน์ของตัวเลือกที่เหลือถูกต้อง

ตัวเลือก 3. เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

และ $\sin x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $(0, \frac{\pi}{2}]$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sin x$ เมื่อ $x \in A$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวเลือก 4. เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น $\sin(\frac{\pi}{n+1}) \geq 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

สรุป $f(x) \geq 0$ ทุก $x \in A$

คำแนะนำ การทำโจทย์ที่ถามว่าตัวเลือกใดถูกต้องหรือตัวเลือกใดผิด นักเรียนควรจะอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วพิจารณาตัวเลือกที่ง่ายก่อนเช่นในโจทย์ข้อนี้

เพราะว่า $0 < \frac{\pi}{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$,n = 1, 2, 3,...

ดังนั้น $A \subset (0, \frac{\pi}{2}]$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sin x \geq 0$ ทุก $x \in A$

จะเห็นได้ว่าการแสดงว่าตัวเลือก 4. ถูกต้อง ใช้เหตุผลที่ง่ายกว่าการแสดงว่าตัวเลือก 2. ผิด

9. ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่ 1 จากสูตรตรีโกณมิติ $2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$

เพราะฉะนั้น $2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \cos(\frac{A}{2} - \frac{5A}{2}) - \cos(\frac{A}{2} + \frac{5A}{2})$

$= \cos(-2A) - \cos(3A)$

$= \cos(2A) - \cos(3A)$

$= (2\cos^2 A - 1) - (4\cos^3 A - 3\cos A)$

$= (2(\frac{3}{4})^2 - 1) - (4(\frac{3}{4})^3 - 3(\frac{3}{4}))$

$= \frac{9}{8} - 1 - \frac{27}{16} + \frac{9}{4}$

$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \frac{11}{16}$

สรุป $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$

วิธีที่ 2 $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = \sin \frac{A}{2} \sin(2A + \frac{A}{2})$

$= \sin \frac{A}{2} (\sin 2A \cos \frac{A}{2} - \sin \frac{A}{2} \cos 2A)$

$2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{5A}{2} = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin 2A + 2 \sin^2 \frac{A}{2} \cos 2A$

$= \sin A \sin 2A + (1 - \cos A) \cos 2A$ .....(*)

$$= 2\sin^2 \cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2(1-\cos^2 A)\cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2[1-(\tfrac{3}{4})^2](\tfrac{3}{4}) + (1-\tfrac{3}{4})(2(\tfrac{3}{4})^2 - 1)$$

$$= 2(\tfrac{7}{16})(\tfrac{3}{4}) + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{18}{16} - 1)$$

$$= \frac{21}{32} + (\tfrac{1}{4})(\tfrac{2}{16})$$

$$2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{21}{32} + \frac{1}{32} = \frac{22}{32}$$

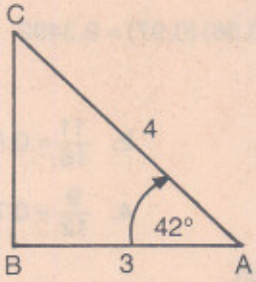
สรุป $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$

การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $\cos A = \frac{3}{4}$

วาดรูปสามเหลี่ยมตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 3 cm.
2. เขียนวงกลมรัศมี 4 cm. จุดศูนย์กลางที่ A
3. ลากเส้นตั้งฉากกับ B ตัดส่วนโค้งของวงกลมที่ C

จะได้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{4}$

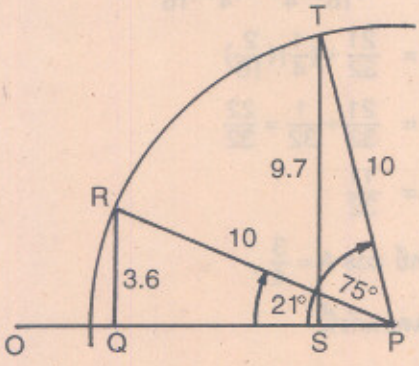


จากรูปวัดมุม A ได้ 42° ดังนั้น $\sin\frac{A}{2} = \sin 21°$

และ $\sin\frac{5A}{2} = \sin 105° = \sin(180° - 75°) = \sin 75°$

การประมาณค่า sin 21° และ sin 75°

1. ลาก OP
2. เขียนวงกลมรัศมี 10 cm. จุดศูนย์กลางที่ P
3. ลาก RP ทำมุม 21° กับ OP, TP ทำมุม 75° กับ OP
4. ลาก PQ ตั้งฉากกับ OP, ลาก TS ตั้งฉากกับ OP



จากรูปสามเหลี่ยม PQR

$$\sin 21^\circ = \frac{RQ}{PR} = \frac{3.6}{10} = 0.36$$

จากรูปสามเหลี่ยม PST

$$\sin 75^\circ = \frac{ST}{PT} = \frac{9.7}{10} = 0.97$$

ดังนั้น $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = (0.36)(0.97) = 0.3492$

จากค่าในตัวเลือก

1. $\frac{11}{32} = 0.34375$
2. $\frac{11}{16} = 0.6875$
3. $\frac{9}{16} = 0.5625$
4. $\frac{9}{12} = 0.75$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

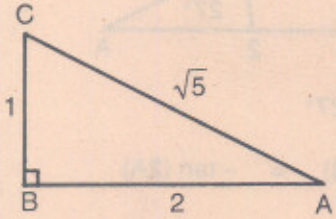
10. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตร arcsin (-x) = -arcsin x จะได้

$\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = \tan(-2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$

$= -\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังภาพ



จะได้ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ และ $\tan A = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) = A = \arctan(\frac{1}{2})$

$\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2\arctan(\frac{1}{2}))$

$= \frac{-2\tan(\arctan(\frac{1}{2}))}{1-(\tan(\arctan(\frac{1}{2})))^2}$

$= \frac{-2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$

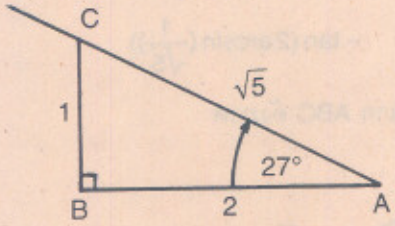
การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$

เราประมาณค่ามุม $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$ ก่อนดังนี้

ให้ $A = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})$ จะได้ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

กข.2539 – 28

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่ AB = 2 และ BC = 1



จากรูปวัดมุม A ได้ A = 27°

$$-\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2A)$$

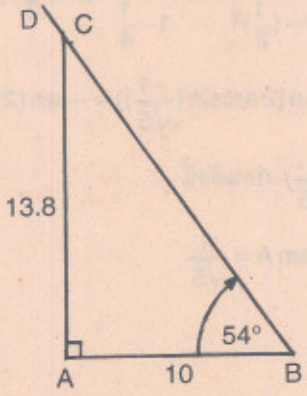
$$\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2(27°))$$

$$= -\tan 54°$$

เพราะว่า $-\tan 54° < 0$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

การประมาณค่า tan 54°

1. ลาก AB ยาว 10 cm.
2. ลาก DB ทำมุม 54° กับ AB
3. ลาก AC ตั้งฉากกับ AB
4. วัดระยะทาง AC ได้ 13.8



เพราะฉะนั้น $\tan(54°) = \frac{AC}{AB}$

$= \frac{13.8}{10}$

$= 1.38$

ดังนั้น $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) = -\tan 54°$

$= -1.38$

พิจารณาตัวเลือก

1. -1 2. 1

3. $\frac{4}{3} = 1.333$ 4. $\frac{-4}{3} = -1.333$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เพราะว่า $0 \leq \frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น $0 \leq \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leq \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \frac{\pi}{4}$

$\frac{-\pi}{4} \leq -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} \leq 0$

$\frac{-\pi}{4} \leq \arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}}) \leq 0$

$\frac{-\pi}{2} \leq 2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}}) \leq 0$

เพราะฉะนั้น $\tan(2\arcsin(\frac{-1}{\sqrt{5}})) < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

11. ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $4x^2+9y^2-48x+72y+144=0$

$4(x^2-12x+36)+9(y^2+8y+16)=-144+144+144$

$4(x-6)^2+9(y+4)^2=144$

$\frac{(x-6)^2}{6^2}+\frac{(y+4)^2}{4^2}=0$

จุดศูนย์กลางของวงรี คือ (6, −4)

ความชันของเส้นตรง $3x+4y=5$ มีค่าเท่ากับ $-\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นความชันเส้นตรงที่โจทย์ต้องการเท่ากับ $\frac{4}{3}$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (6, −4) และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x+4y=5$

คือ $y-(-4) = \frac{4}{3}(x-6)$

$3y+12 = 4x-24$

$4x-3y-36 = 0$

ตรงกับตัวเลือก 3.

วิธีลัด เส้นตรง $ax+by=c$ และ $bx-ay=k$ ตั้งฉากกันเสมอ

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $3x+4y=5$ คือ $4x-3y=k$

เพราะว่า $4x-3y=k$ ต้องผ่านจุด (6, −4)

เพราะฉะนั้น $k=4(6)-3(-4)=36$

สรุปเส้นตรงที่ต้องการคือ $4x-3y=36$, $4x-3y-36=0$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 เพราะว่า (6, −4) ต้องอยู่บนเส้นตรง

เพราะฉะนั้นแทนค่า $x=6$, $y=-4$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $4x-3y+12=4(6)-3(-4)+12\neq 0$

ตัวเลือก 2. $4x-3y-12=4(6)-3(-4)-12\neq 0$

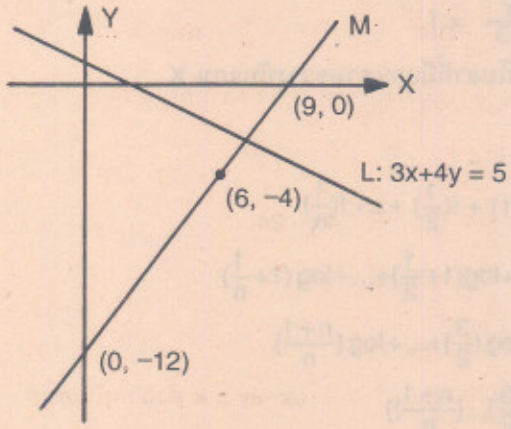
ตัวเลือก 3. $4x - 3y - 36 = 4(6) - 3(-4) - 36 = 0$

ตัวเลือก 4. $4x - 3y + 36 = 4(6) - 3(-4) + 36 \neq 0$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

1. เขียนจุด (6, −4)
2. ลากเส้นตรง L: $3x+4y = 5$
3. ลากเส้นตรง M ผ่านจุด (6, −4) และตั้งฉากกับ L



จากลักษณะของเส้นตรง M และการวัดระยะทางจะได้จุดตัดแกน X คือ (9, 0) และจุดตัดแกน Y คือ (0, −12)

	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y
ตัวเลือก 1.	(−3, 0)	(0, 4)
ตัวเลือก 2.	(3, 0)	(0, −4)
ตัวเลือก 3.	(9, 0)	(0, −12)
ตัวเลือก 4.	(−9, 0)	(0, 12)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

12. ตอบ 3.

แนวคิด $BAB' = [x\ y]\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -7 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$$[12] = [3x-7y\ \ 7x-4y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= [(3x-7y)\,x + (7x-4y)\,y]$$

$$12 = (3x-7y)\,x + (7x-4y)\,y$$

$$= 3x^2 - 7xy + 7xy - 4y^2$$

$$3x^2_2 - 4y^2_2 = 12$$

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$

เป็นรูปไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางทับแกน X

13. ตอบ 3.

แนวคิด $f(1) + f(\frac{1}{2}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$

$= \log(1+1) + \log(1+\frac{1}{2}) + \ldots + \log(1+\frac{1}{n})$

$= \log(2) + \log(\frac{3}{2}) + \ldots + \log(\frac{n+1}{n})$

$= \log((2)(\frac{3}{2})\ldots(\frac{n+1}{n}))$

$= \log(n+1) = f(n)$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบมีลักษณะของโจทย์และตัวเลือก เป็นสูตรดังนั้นแทนค่า n = 1 ก็พอที่จะตัดตัวเลือกได้

เมื่อ n =1 จะได้ $f(1) = \log(1+1) = \log 2$

ตัวเลือกแต่ละตัวเมื่อ n = 1 จะได้ ค่าต่างๆ ดังนี้

1. $f(1+1) = f(2) = \log(1+2) = \log 3$
2. $f(n) = f(1) = \log(1+1) = \log 2$

3. $f(\frac{1}{n}) = f(1) = \log(1+1) = \log 2$

4. $f(\frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{2}) = \log(1+\frac{1}{2}) \neq \log 2$

สรุปตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เมื่อ $n = 2$ จะได้ว่า $f(1) + f(\frac{1}{2}) \neq f(\frac{1}{2})$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

14. ตอบ 1.

แนวคิด สมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นจริงเมื่อ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $|x| = x$

ดังนั้น $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

$$(x^{\frac{1}{2}})^{x^2} = x^3$$

$$x^{\frac{x^2}{2}} = x^3$$

$$\log(x^{\frac{x^2}{2}}) = \log x^3$$

$$\frac{x^2}{2}\log x = 3\log x$$

$$(\frac{x^2}{2} - 3)\log x = 0$$

$\log x = 0$ หรือ $\frac{x^2}{2} - 3 = 0$

$x = 1$ หรือ $x^2 = 6$

$x = 1$ หรือ $x = \sqrt{6}$

สรุป คำตอบของสมการคือ $x = 1$, $\sqrt{6} \doteq 2.45$ และ $\{1, \sqrt{6}\}$ เป็นสับเซตของ $[0, 3]$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 $A = \{x \mid (\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3\}$

เพราะว่า $(\sqrt{|x|})^{x^2} \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x^3 \geq 0$

ดังนั้น $x \geq 0$ ซึ่งจะได้ว่า $A \subset [0, \infty)$

เพราะฉะนั้นแต่ละตัวเลือกเราจึงสนใจเฉพาะกรณีส่วนที่เป็นสับเซตของ $[0, \infty)$

1. $[0, 3]$ 2. $[2, 4]$

3. $[2, 3]$ 4. $[1, 2]$

ถ้า $A \subset [2, 3]$ แล้ว $A \subset [0, 3]$

ถ้า $A \subset [1, 2]$ แล้ว $A \subset [0, 3]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า มิฉะนั้นโจทย์ข้อนี้ผิดแน่นอน

ต่อไปเราแทนค่า $x = 1$ จะได้ว่า $(\sqrt{|1|})^1 = 1^3$

เพราะฉะนั้น $1 \in A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 จากสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

เห็นได้ชัดเจนว่า $x = 1$ เป็นคำตอบ

แต่ $1 \notin [2, 4]$ และ $1 \notin [-3, -2] \cup [2, 3]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $(\sqrt{|x|})^{x^2} \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x^3 \geq 0$ ดังนั้น $x \geq 0$

ให้ $A = \{x \in R \mid (\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3\}$

เพราะฉะนั้น $A \subset [0, \infty)$

ถ้า $A \subset [-2, -1] \cup [1, 2]$ แล้ว $A \subset [1, 2]$ และ $A \subset [0, 3]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งดีกว่า

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกทั้ง 2 แบบนี้ นักเรียนอาจจะคิดว่าเหมือนกัน แต่ที่ต้องเขียนให้ดูทั้ง 2 แบบ เพื่อสนับสนุนเหตุผลที่ว่าการตัดตัวเลือกนั้น นักเรียนอาจจะใช้เหตุผลอะไรก่อนก็ได้ ขอให้ตัดตัวเลือกได้ก็พอ

15. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} a & -1 & 0 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & -1 \end{bmatrix}$

ไมเนอร์ของ a_{12} คือ $\det\left(\begin{bmatrix} b & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}\right) = -b - c$

$C_{12}(A) = (-1)^{1+2}$ (ไมเนอร์ของ a_{12})

$1 = (-1)(-b-c)$

$1 = b+c$

เพราะว่า $\det(A) = a(-1-1) - (-1)(-b-c) + 0$

$-5 = -2a - (b+c)$

และ $b + c = 1$ เพราะฉะนั้น $-5 = -2a-1$ สรุป $a = 2$

16. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า A เป็นเมตริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$

ดังนั้นเราพิจารณาสมการ

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x^2 \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 3 & 5 \end{bmatrix}\right)$$

$$0 = (1)(5-0) - 0 + (-x^2)(6-x)$$

$$0 = 5 - 6x^2 + x^3$$

$$0 = (x-1)(x^2 - 5x - 5)$$

เพราะว่า $x^2 5x-5=0$ มีรากเป็น

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-4(1)(-5)}}{2(1)}=\frac{5\pm\sqrt{45}}{2}=\frac{5\pm3\sqrt{5}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\left(\begin{bmatrix}1&0&-x^2\\2&1&0\\x&3&5\end{bmatrix}\right)=0$ มีเซตคำตอบเป็น $\left\{1,\frac{5+3\sqrt{5}}{2},\frac{5-3\sqrt{5}}{2}\right\}$

ข้อแนะนำ ขณะที่นักเรียนได้สมการ $0=5-6x^2+x^3$ เมื่อสังเกตที่ตัวเลือก พบว่าทุกตัวเลือกมี $x=1$ เป็นสมาชิก แสดงว่า $x=1$ เป็นรากของสมการ $0=5-6x^2+x^3$ แน่นอน ดังนั้นเอา $x-1$ ไปหาร $5-6x^2+x^3$ ได้ x^2-5x-5 จะได้ $0=(x-1)(x^2-5x-5)$ เร็วขึ้น

17. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 เพราะว่า $\overrightarrow{CA}=3\bar{i}-2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB}=2\bar{i}+3\bar{j}$

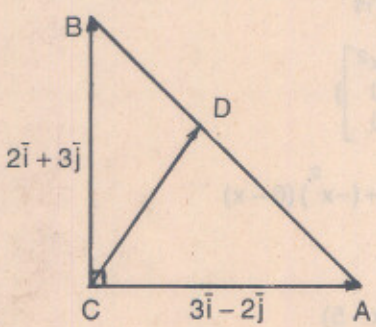
$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ และ $|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$

เพราะว่า $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(3)(2)+(-2)(3)=0$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$

เพราะว่า $|\overrightarrow{AD}|:|\overrightarrow{DB}|=3:2$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AD}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{AB})$



$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$$

$$= \frac{2}{5}(3\bar{i} - 2\bar{j}) + \frac{3}{5}(2\bar{i} + 3\bar{j})$$

$$= \frac{1}{5}(12\bar{i} + 5\bar{j})$$

สรุป $|\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{5}\sqrt{144+25} = \frac{13}{5} = 2.6$

วิธีที่ 2 บังเอิญ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉากจึงได้ว่า $C\hat{A}D = 45°$

และ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{|\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{CB}|^2} = \sqrt{13+13} = \sqrt{26}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - 2\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot\cos C\hat{A}D$

$$= 13 + (\frac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|)^2 - 2\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 13 + \frac{(9)(26)}{25} - 2\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt{26}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 13 + \frac{234}{25} - \frac{78}{5}$$

$$= \frac{325+234-390}{25} = \frac{169}{25}$$

สรุป $|\overrightarrow{CD}| = \frac{13}{5} = 2.6$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 จากโจทย์ให้ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$

ดังนั้นให้ C (0, 0) , A (3, -2) และ B (2, 3)

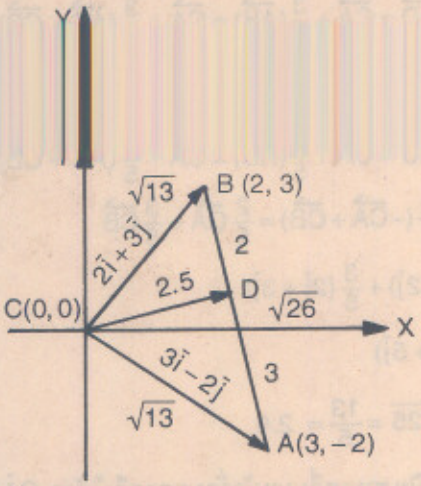
จะได้ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ ตามเงื่อนไขของโจทย์

ลากเส้นตรง AB แล้ววัดระยะทางด้วยไม้บรรทัดได้ความยาวโดยประมาณของ

$|AB| = 5$ (หมายเหตุค่าจริง $= \sqrt{26} = 5.099$)

ให้ D เป็นจุดที่ห่างจาก A เท่ากับ 3

ดังนั้นจะได้ $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3:2$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์



วัดความยาว $|\overrightarrow{CD}|$ ได้ 2.5 เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $\frac{9}{5}=1.8$
2. $\frac{11}{5}=2.2$
3. $\frac{13}{5}=2.6$
4. $\frac{14}{5}=2.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เนื่องจากโจทย์ถามว่า $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับเท่าใด

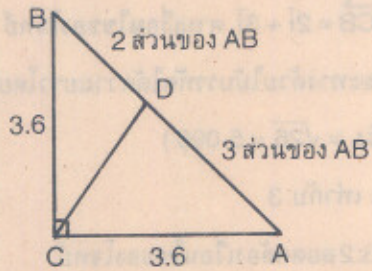
ดังนั้นเราไม่จำเป็นต้องใช้พิกัดจริงก็ได้

จากเหตุผล $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{13}=3.6$ นิ้ว, $|CB|=\sqrt{13}=3.6$ นิ้ว

และ $\overrightarrow{CA}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CB}$

ดังนั้นใช้สามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|=\sqrt{13}=3.6$

วัดความยาว AB ได้ประมาณ 5 นิ้ว



แบ่ง AB ออกเป็น 5 ส่วนเท่าๆ กัน และ $|AD| = 3$

วัดความยาว CD ได้ 2.6 นิ้ว สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

18. ตอบ 1.

แนวคิด $A(-5,0), B(3,6), C(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$ และ $D(a,b)$

$\overrightarrow{AB} = (3-(-5))\bar{i} + (6-0)\bar{j} = 8\bar{i} + 6\bar{j}$

$\overrightarrow{CD} = (a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b-(-\frac{1}{5}))\bar{j} = (a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b+\frac{1}{5})\bar{j}$

จากสูตร เวกเตอร์ขนาด k หน่วย ทิศทางเดียวกับ $\bar{v}$ คือ $k\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ 2 หน่วย ทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $2\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)$

ดังนั้น
$$\overrightarrow{CD} = 2\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$$
$$|\overrightarrow{AB}|\cdot\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$(\sqrt{8^2+6^2})\overrightarrow{CD} = 2(8\bar{i}+6\bar{j})$$
$$10\overrightarrow{CD} = 16\bar{i}+12\bar{j}$$
$$\overrightarrow{CD} = \frac{8}{5}\bar{i}+\frac{6}{5}\bar{j}$$
$$(a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b+\frac{1}{5})\bar{j} = \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น $a-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ และ $b+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$

$a = 2$ และ $b = 1$

สรุป $a+b = 3$

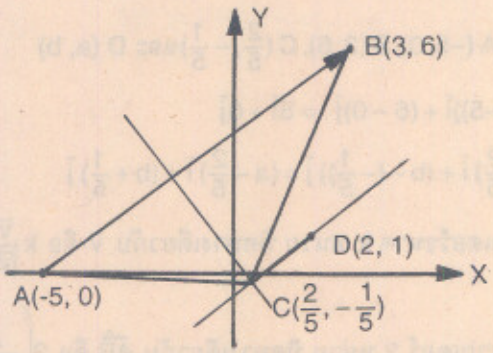
การตัดตัวเลือก เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. เขียนจุด A(–5, 0), B (3, 6) และ C$(\frac{2}{5},-\frac{1}{5})$ ใช้หน่วยเซนติเมตร

2. ลากเส้นตรง AB

3. ลากเส้น CD ให้ $\overline{CD}$ มีทิศเดียวกับ $\overline{AB}$ และ CD ยาว 2 เซนติเมตร

4. วัดพิกัดของจุด D ได้เป็น (2, 1)



เพราะฉะนั้น a = 2, b = 1 และ a + b = 3

เมื่อดูจากค่าในตัวเลือก เราเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

19. ตอบ 3.

แนวคิด $z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$z = \cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$z^5 = (\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})^5 = \cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$= \cos(2\pi-\frac{\pi}{3})+i\sin(2\pi-\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1+z^5 = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{1}{1+z^5} = \frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} = 2(\frac{1}{3-\sqrt{3}i})$$

$$= 2\left(\frac{1}{3-\sqrt{3}i}\right)\left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) = \frac{2(3+\sqrt{3}i)}{9+3}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}i$$

สรุป ส่วนจริงของ $\frac{1}{1+z^5}$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

หมายเหตุ ถ้านักเรียนจำสูตรการเปลี่ยน $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ เป็น

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ ไม่ได้ ก็สามารถหาค่า z^5 ได้โดยการคูณทีละตัว หรือ

ใช้ผลคูณทวินามก็ได้

จาก $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+5ab^4+b^5$

จะได้ $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ เหมือนกัน

ขอแนะนำ การหาผลคูณโดยไม่ต้องคิดเลขในลักษณะของเศษส่วน

$$z = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$2z = 1+\sqrt{3} \qquad \text{_____(1)}$$

$$(2z)^2 = (1+\sqrt{3}\,i)^2 = 1+2\sqrt{3}\,i-3$$

$$4z^2 = -2+2\sqrt{3}\,i$$

$$2z^2 = -1+\sqrt{3}\,i$$

$$(2z^2)^2 = (-1+\sqrt{3}i)^2 = 1-2\sqrt{3}\,i-3$$

$$4z^4 = -2-2\sqrt{3}\,i$$

$$2z^4 = -1-\sqrt{3}\,i \qquad \text{_____(2)}$$

จาก (1), (2), $4z^5 = (1+\sqrt{3}\,i)(-1-\sqrt{3}\,i) = -1-2\sqrt{3}\,i+3 = 2-2\sqrt{3}\,i$

$$z^5 = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

20. ตอบ 4.

แนวคิด อนุกรมเรขาคณิต $1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3}+\ldots$

มีพจน์แรก $a = 1$, อัตราส่วนร่วม $r=\frac{2^x}{1+2^x}$

เพราะว่า $\left|\frac{2^x}{1+2^x}\right|<1$ เพราะฉะนั้น

$$1+\frac{2^x}{1+2^x}+\frac{2^{2x}}{(1+2^x)^2}+\frac{2^{3x}}{(1+2^x)^3}+\ldots = \frac{a}{1-r}$$

$$9 = \frac{1}{1-(\frac{2^x}{1+2^x})}$$

$$9 = \frac{1+2^x}{1+2^{2}-2^x}$$

$$9 = 1+2^x$$

$$2^x = 8 = 2^3$$

$$x = 3$$

อนุกรม $\log_2 3-(\log_2 3)^2+(\log_2 3)^3-(\log_2 3)^4+\ldots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิตมีพจน์แรก $a=\log_2 3$ และอัตราส่วนร่วม $r=-\log_2 3$

เพราะว่า $|r|=|-\log_2 3|=\log_2 3=\frac{\log 3}{\log 2}=\frac{0.47}{0.301}>1$

เพราะฉะนั้น อนุกรม$\log_2 3-(\log_2 3)^2+(\log_2 3)^3-(\log_2 3)^4+\ldots$

เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

หมายเหตุ การแสดงว่า $\log_2 3>1$ อาจใช้เหตุผลดังนี้

เพราะว่า $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มและ $3>2$

เพราะฉะนั้น $\log_2 3>\log_2 2=1$

21. ตอบ 3.

แนวคิด $a_n = \frac{n^4+1}{1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3} = \frac{n^4+1}{(\frac{n}{2}(n+1))^2}$

$= \frac{4(n^4+1)}{n^2(n+1)^2} = \frac{4n^4+4}{n^2(n^2+2n+1)}$

$= \frac{4n^4+4}{n^4+2n^3+n^2}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^4+4}{n^4+2n^3+n^2}$

$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{4+\frac{4}{n^4}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}\right] = 4$

22. ตอบ 1.

แนวคิด $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$

เพราะว่า x เข้าใกล้ 2 ทางด้านลบ

เพราะฉะนั้นพิจารณากรณี $x<2$ ดังนั้น $|x-2| = -(x-2)$

$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} -(-1) = -1$

สรุป $\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} = -1$

23. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16) = x^{\frac{8}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}}$

$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{\frac{8}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}})$

$$= \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - 16\left(\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{32}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2 - 4)$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$$

ตารางแสดงเครื่องหมาย $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$ บนช่วงต่างๆ

	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
$x^{-\frac{1}{3}}$	−	−	−	∞	+	+	+
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
$x+2$	−	0	+	+	+	+	+
$\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$	−	0	+	∞	−	0	+

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ เมื่อ $x \in (-2, 0) \cup (2, \infty)$

สรุป $A = \{x \in r \mid f'(x) > 0\} = (-2, 0) \cup (2, \infty)$

การตัดตัวเลือก เมื่อนักเรียนได้ $f'(x) = \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2 - 4)$

โดยการแทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว

ขณะนี้ปัญหาเหมือนกับเซตคำตอบของสมการ $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2 - 4) > 0$

ตรงกับตัวเลือกใด

โดยการแทนค่า $x = -8$ จะได้

$\frac{8}{3}(-8)^{-\frac{1}{3}}((-8)^2-4)=\frac{8}{3}(-\frac{1}{2})(64-4)=-80 \not> 0$

เพราะฉะนั้น $x=-8$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า $x=-8$ จะได้ $\frac{8}{3}(-1)^{-\frac{1}{3}}((-1)^2-4)=\frac{8}{3}(-1)(-3)=8>0$

เพราะฉะนั้น $x=-1$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ สรุปตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

24. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{-(-h)}$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)}$$

$$= -\lim_{(-h)\to 0}\frac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)} = -f'(x)$$

เพราะฉะนั้น $-f'(x)=3x-2$ ดังนั้น $f'(x)=-\frac{3}{2}x+2$

และ $f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-3x+2)\,dx=-\frac{3x}{2}+2x+c$

เพราะว่า $f(0)=-\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2}=c$

ดังนั้น $f(x)=-\frac{3}{2}x^2+2x-\frac{1}{2}$

เพราะว่า $f(1)=-\frac{3}{2}+2-\frac{1}{2}=0$ เพราะฉะนั้นจุด (1, 0) อยู่บนกราฟของ f

หมายเหตุ 1. $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\neq f'(x)$

ตัวอย่างเช่น $f(x)=x$ จะได้ $f'(x)=1$

แต่ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x-h)-x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}-\frac{h}{h}$$

$$= -1$$

$$\neq f'(x)$$

2. ข้อสอบนี้มีตัวเลือกสำหรับนักเรียนที่คิดเลขผิดด้วยนั้นคือ

ถ้านักเรียนคิดว่า $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

แล้วจะได้ว่าจุด $(\frac{2+\sqrt{7}}{3}, 0)$ อยู่บนกราฟของ f ซึ่งผิด

25. ตอบ 2.

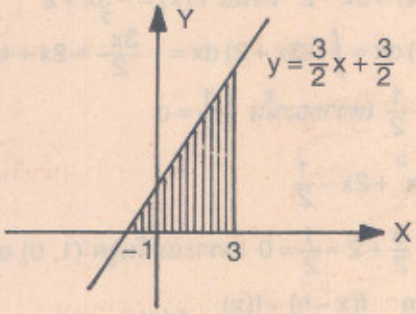
แนวคิด $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1,0)$ และ $(3, 6)$

สมการเส้นตรงคือ $\frac{y-0}{x-(-1)} = \frac{6-0}{3-(-1)}$

$$\frac{y}{x+1} = \frac{6}{4}$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

สรุป $f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

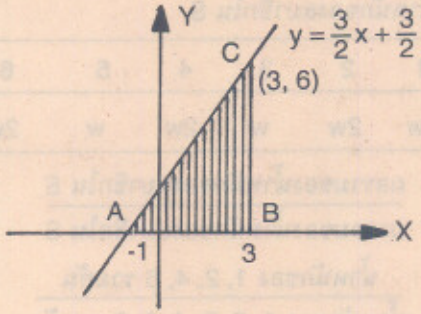


$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (\frac{3}{2}x + \frac{3}{2})\,dx$$

$$= \left(\frac{3x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{x=-1}^{x=3}$$

$$= (\frac{27}{4} + \frac{9}{2}) - (\frac{3}{4} - \frac{3}{2}) = 12$$

วิธีลัด ใช้ประโยชน์จากการวาดรูป



$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} \left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right) dx = \text{พ.ท } \Delta ABC$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot (4) \cdot (6) = 12$$

26. ตอบ 2.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีแบ่งออกเป็น 2 ขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำลูกแก้วสีน้ำเงิน, สีขาว และสีแดงนำมาเรียงติดกัน ในลักษณะน้ำเงินต้องติดกับแดงและขาวคือ

(ขาว) (น้ำเงิน) (แดง) หรือ (แดง) (น้ำเงิน) (ขาว)

นำไปวางเรียงติดกันในลำดับของวงกลมทำได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ลูกแก้วทั้ง 4 สี ที่เหลือเรียงลำดับได้ 4! = 24 วิธี

สรุป จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ (2) (24) = 48 วิธี

27. ตอบ 3.

แนวคิด ปัญหาข้อนี้เป็นการหาความน่าจะเป็นแบบถ่วงน้ำหนัก

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

E = เหตุการณ์ได้แต้ม 1 หรือเลขคู่ = {1, 2, 4, 6}

ตารางแสดงค่าน้ำหนักของสมาชิกใน S

แต้ม	1	2	3	4	5	6
น้ำหนัก	w	2w	w	2w	w	2w

$$P(E) = \frac{\text{ผลรวมของน้ำหนักของสมาชิกใน E}}{\text{ผลรวมของน้ำหนักของสมาชิกใน S}}$$

$$= \frac{\text{น้ำหนักของ 1, 2, 4, 6 รวมกัน}}{\text{น้ำหนักของ 1, 2, 3, 4, 5, 6 รวมกัน}}$$

$$= \frac{w+2w+2w+2w}{w+2w+w+2w+w+2w} = \frac{7w}{9w} = \frac{7}{9}$$

28. ตอบ 4.

แนวคิด M = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

C = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาเคมี

จากโจทย์จะได้ $P(M) = \frac{2}{3}, P(C) = \frac{4}{9}$ และ $P(M \cap C) = \frac{1}{4}$

เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบไม่ผ่านทั้งสองวิชาคือ $(M \cup C)'$

ความน่าจะเป็นที่จะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชา

$= P((M \cup C)') = 1 - P(M \cup C)$

$= 1 - [P(M) + P(C) - P(M \cap C)] = 1 - [\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}] = \frac{5}{36}$

29. ตอบ 4.

แนวคิด คะแนนวิชาสถิติ 8, 5, 4, 2, 1

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{8+5+4+2+1}{5} = \frac{20}{5} = 4$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{5}$

$= \frac{(8-4)^2 + (5-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (1-4)^2}{5}$

$$= \frac{16+1+0+4+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\sqrt{6}$

ค่าของสัมประสิทธิ์ของความแปรผัน = $\frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$

คะแนนวิชาคณิตศาสตร์ 9, 6, 5, 3, 2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{9+6+5+3+2}{5} = \frac{25}{5} = 5$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{5}$

$$= \frac{(9-5)^2+(6-5)^2+(5-5)^2+(3-5)^2+(2-5)^2}{5}$$

$$= \frac{16+1+0+4+9}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\sqrt{6}$

ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผัน = $\frac{\text{ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน}}{\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$

อัตราส่วนของสัมประสิทธิ์ของความแปรผันระหว่างคะแนนวิชาสถิติ และคะแนนวิชาคณิตศาสตร์

$= \frac{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของคะแนนวิชาสถิติ}}{\text{ค่าสัมประสิทธิ์ของความแปรผันของคะแนนวิชาคณิตศาสตร์}}$

$= \frac{(\sqrt{6}/4)}{(\sqrt{6}/5)} = \frac{5}{4}$

วิธีลัด ขอให้นักเรียนสังเกตข้อมูลที่ตัวข้อสอบให้ดีๆ จะเห็นว่าคะแนนข้อมูลคณิตศาสตร์ ได้จากคะแนนข้อมูลสถิติบวกด้วย 1 เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐานจะเท่ากันทำให้ลดเวลาคำนวณลงไป

30. ตอบ 2. หรือ 4.

แนวคิด ข้อมูลชุดที่ 1: 6, 12, 9, 10, 6, 8

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{MAX-MIN}{MAX+MIN} = \frac{12-6}{12+6} = \frac{6}{18} = 0.3333$

ข้อมูลชุดที่ 2: 60, 64, 56, 70, 52, 63

$$\text{สัมประสิทธิ์ของพิสัย} = \frac{MAX}{MAX+MIN} = \frac{70}{70+52} = \frac{18}{122}$$

$$= 0.1475$$

สรุป ข้อมูลชุดที่ 1. กระจายมากกว่าข้อมูลชุดที่ 2.

หมายเหตุ ในกรณีที่ใช้สัมประสิทธิ์การแปรผัน

ข้อมูลชุดที่ 1. $\overline{X}_1 = 8.5, S_1 = 2.141$

$$\text{สัมประสิทธิ์การแปรผัน} = \frac{S_1}{\overline{X}_1} = \frac{2.141}{8.5} = 0.2519$$

ข้อมูลชุดที่ 2 $\overline{X}_2 = 60.833, S_2 = 5.786$

$$\text{สัมประสิทธิ์การแปรผัน} = \frac{S_2}{\overline{X}_2} = \frac{5.786}{60.833} = 0.0951$$

จะเห็นได้ว่าข้อมูลชุดที่ 1 กระจายมากกว่าชุดที่ 2

ข้อแนะนำ ในกรณีที่โจทย์ไม่บังคับสูตรที่ใช้วัดการกระจายนักเรียนควรจะเลือกกรณีที่คิดเลขง่ายดีกว่า

การตัดตัวเลือก การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลที่มีค่าแน่นอน จะต้องสรุปว่า มากกว่า, น้อยกว่า หรือเท่ากับได้แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

คำขอร้องจากผู้เขียน การออกข้อสอบในลักษณะนี้สำหรับนักเรียนที่มีความรู้ชนิดแทนค่าตามสูตรแล้วได้คำตอบ คงจะได้ตัวเลือกตามแนวคิดข้างต้น แต่สำหรับนักเรียนที่มีความรู้มากกว่าเช่นรู้ว่าข้อมูลมีหน่วยต่างกัน อาจจะเปรียบเทียบกันไม่ได้ ตัวอย่างเช่น

ชุดที่ 1 6, 12, 9, 10, 6, 8 หน่วยเป็นบาท

ชุดที่ 2 16, 64, 56, 70, 52, 63 หน่วยเป็นล้านบาท

ถ้าเราจะเปรียบเทียบการกระจายลักษณะนี้ต้องทำหน่วยให้เท่ากันก่อนแล้วจึงเปรียบเทียบ ซึ่งจะได้ว่าข้อมูลชุดที่ 2 กระจายมากกว่าชุดที่ 1

คำขอร้องของผู้เขียนตรงนี้ก็คือ หากต้องการให้นักเรียนเปรียบเทียบข้อมูลควรจะระบุหน่วยให้ชัดเจน หรืออย่างน้อยบอกว่าใช้หน่วยเดียวกันก็ยังดี

ตอนที่ 2 ข้อ 31-56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ตอบ 4.

แนวคิด $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$P(S) = \{A \mid A \subset S\}$

การนับจำนวนสับเซต A ของ S ที่มีเงื่อนไข $1 \in A$ และ $7 \notin A$

นับจำนวนสับเซต B ของเซต $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

จะได้ว่าจำนวน B ที่ B เป็นสับเซตของ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ มีจำนวนเท่ากับ $2^5 = 32$ เซต

เลือก $A = \{1\} \cup B$ เมื่อ B เป็นสับเซตของ $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

เพราะฉะนั้น $X = \{A \in P(S) \mid 1 \in A$ และ $7 \notin A\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 32

การตัดตัวเลือก ขณะนี้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้แล้ว

การนับจำนวนสมาชิกของเซต Y

$Y = \{A \in X \mid$ ผลบวกของสมาชิกใน A ไม่เกิน 6$\}$

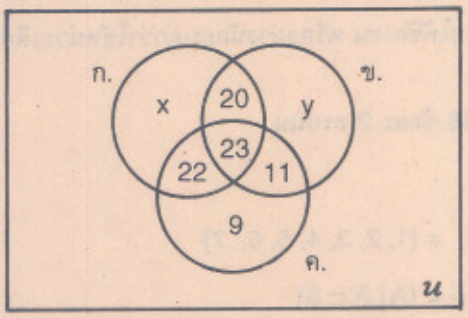
ใช้วิธีแจกนับสมาชิกของเซต Y ดีกว่า ซึ่งมีดังนี้ $\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 2, 3\}$

ดังนั้นจำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับ 6

32. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ x = จำนวนคนที่นิยม นาย ก. คนเดียวเท่านั้น

y = จำนวนคนที่นิยม นาย ข. คนเดียวเท่านั้น



เพราะว่าคนทั้ง 100 คนต้องแสดงความนิยมคนใดคนหนึ่งอย่างน้อยหนึ่งคน

เพราะฉะนั้น $x+y+20+23+22+11+9 = 100$

$x+y+85 = 100$

$x+y = 15$ _____(1)

จำนวนคนที่นิยมนาย ก. = $x+20+23+22 = x+65$

จำนวนคนที่นิยมนาย ข. = $y+20+23+11 = y+54$

เพราะว่า นาย ก. ได้รับคะแนนความนิยมมากกว่า นาย ข. อยู่ 6 คะแนน

เพราะฉะนั้น $(x+65)-(y+54) = 6$

$x-y = -5$ _____(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = 5$ และ $y = 10$

เพราะฉะนั้น จำนวนคนที่นิยม นาย ก. = 70

จำนวนคนที่นิยม นาย ข. = 64

จำนวนคนที่นิยม นาย ค. = 65

สรุป ตัวเลือก 3 ผิด เพราะว่าคะแนนนิยมเฉพาะ นาย ก. เท่านั้นมีค่าแท้จริง เท่ากับ 5

33. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณอสมการ $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geq 1$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} \geq 1$$

$$\frac{1}{|x+2|} \geq 1$$

พิจาณากรณี $x \neq -2$ จะได้

$$1 \geq |x+2|$$

$$-1 \leq x+2 \leq 1$$

$$-3 \leq x \leq -1$$

สรุป $A = [-3,-1] - \{-2\} = [-3,-2) \cup (-2,-1]$

$B = \{n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบซึ่ง $n \leq -2\} = \{\ldots,-4,-3,-2\}$

ดังนั้น $A \cap B = ([-3,-2) \cup (-2,-1]) \cap \{\ldots,-4,-3,-2\} = \{-3\}$

สรุป ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ มีค่าเท่ากับ -3

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \cap B \subset B$ เพราะฉะนั้นทุกค่า $x \in A \cap B, x \leq -2$

เพราะฉะนั้น -1 ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

โดยการแทนค่า $x = -3$ จะได้

$$\frac{1}{\sqrt{(-3)^2+4(-3)+4}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq 1$$

ดังนั้น $-3 \in A$ และ $-3 \in A \cap B$

เพราะฉะนั้น –4 ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

โดยการแทนค่า $x = -2$ จะได้

$\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+4(-2)+4}} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-2 \notin A$ และ $-2 \notin A \cap B$

ขณะนี้เราจะได้ว่า $-1 \notin A \cap B, -2 \notin A \cap B$ และ $-3 \in A \cap B$

ดังนั้นสรุปได้เลยว่า –3 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$

34. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. การแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned} a^4+2a^3-a^2-2a &= a^3(a+2)-a(a+2) \\ &= (a+2)(a^3-a) \\ &= (a+2)a(a^2-1) \\ &= (a+2)a(a+1)(a-1) \\ &= (a-1)a(a+1)(a+2) \end{aligned}$$

เพราะว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกค่า a ที่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น 3 หาร (a-1) a (a+1) (a+2) ลงตัวทุกค่า a ที่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น 3 หาร $a^4+2a^3-a^2-2a$ ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

สรุป ข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

ให้ $f(x) = 6x^3+17x^3+14x+3$

เพราะว่า $f(-1) = 6(-1)^3+17(-1)^2+14(-1)+3 = 0$

เพราะฉะนั้น (x+1) หาร $6x^3+17x^2+14x+3$ ลงตัว

โดยการตั้งหารยาวจะได้ $f(x)=(x+1)(6x^2+11x+3)$

f(x) = (x+1) (2x+3) (3x+1)

ตารางแสดงเครื่องหมายของ (x+1) (2x+3) (3x+1)

	$x<\frac{-3}{2}$	$x=\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}<x<-1$	$x=-1$	$-1<x<\frac{-1}{3}$	$x=\frac{-1}{3}$	$x>\frac{-1}{3}$
x+1	–	–	–	0	+	+	+
2x+3	–	0	+	+	+	+	+
3x+1	–	–	–	–	–	0	+
(x+1) (2x+3) (3x+1)	–	0	+	0	–	0	+

เพราะฉะนั้น $f(x)\geq 0$ เมื่อ $x\in[-\frac{3}{2},-1]\cup[-\frac{1}{3},\infty)$

ดังนั้น $\{x\in I^- \mid 6x^3+17x^2+14x+3\geq 0\}$

$= \{x\in I^- \mid x\in[-\frac{3}{2},-1]\cup[-\frac{1}{3},\infty)\}$

$= \{-1\}$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

การแสดงข้อพิสูจน์ว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

จำแนกตามกรณีของค่า a ดังนี้

กรณีที่ 1. a = ..., –3, 0, 3, 6,... (3 หาร a ลงตัว)

จะได้ 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวแน่นอน

กรณีที่ 2. a = ..., –5, –2, 1, 4, 7, ... (3 หาร 9 เหลือเศษ 1)

จะได้ว่า 3 หาร a+2 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัว

กรณีที่ 3. $a = \ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots$ (3 หาร a เหลือเศษ 2)

จะได้ว่า 3 หาร a+1 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัว

จากทั้งสามกรณีของค่า a จะได้ว่า 3 หาร a(a+1) (a+2) ลงตัวทุกจำนวนเต็ม a

หมายเหตุ โดยการพิสูจน์ทำนองเดียวกันจะได้ว่าทุกจำนวนเต็ม a

3 หาร (a+1) (a+2) (a+3) ลงตัว

4 หาร (a+1) (a+2) (a+3) (a+4) ลงตัว

กรณีทั่วไปคือ n หาร (a+1) (a+2)...(a+n) ลงตัว

35. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. เพราะว่า $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$

เป็นเท็จเมื่อ p เป็นจริง, q เป็นเท็จ และ r เป็นจริง ซึ่งจะได้ว่า

$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r) = [(T \to F) \wedge (F \to T)] \leftrightarrow (T \to T)$

$= [F \wedge T] \leftrightarrow T = F \leftrightarrow T = F$

สรุปข้อความ ก. ไม่เป็นสัจนิรันดร์

หมายเหตุ การหากรณีที่เป็นเท็จของ $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$

อาจทำได้โดยการตีตารางค่าความจริง ซึ่งเมื่อพบกรณีที่เป็นเท็จเราก็สรุปได้

เลยว่าประพจน์นี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

พิจารณาข้อความ ข. เพราะว่า $p \to q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

เพราะฉะนั้น $\forall x [x \not< 0 \to -x < 0] \equiv \forall x [\sim (x \not< 0) \vee (-x < 0)]$

$\equiv \forall x [(x < 0) \vee (-x < 0)]$

สรุป $\forall x [x \not< 0 \to -x < 0]$ เป็นเท็จ

นั่นคือข้อความ ข. ไม่เป็นสัจนิรันดร์

36. ตอบ 3.

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

$r^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

$= \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$

เพราะฉะนั้น r^{-1} เป็นฟังก์ชัน, $D_{r^{-1}} = R, R_{r^{-1}} = [1, \infty)$

$s = \{(x, y) \in R \times R \mid x = |y|\}$

$s^{-1} = \{(y, x) \in R \times R \mid x = |y|\}$

$= \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x|\}$

เพราะฉะนั้น s^{-1} เป็นฟังก์ชัน, $D_{s^{-1}} = R, R_{s^{-1}} = [0, \infty)$

พิจารณาเลือก 1.

เพราะว่า $R_{s^{-1}} = [0, \infty) \subset R = D_{r^{-1}}$ เพราะฉะนั้น $D_{r^{-1} o s^{-1}} = D_{s^{-1}} = R$

เพราะว่า $R_{r^{-1}} = [1, \infty) \subset R = D_{s^{-1}}$ เพราะฉะนั้น $D_{s^{-1} o r^{-1}} = D_{r^{-1}} = R$

เพราะว่า $(r^{-1} \circ s^{-1})(x) = r^{-1}(s^{-1}(x)) = r^{-1}(|x|)$

$$= (|x|)^2 + 1 = x^2 + 1$$

และ $(s^{-1} \circ r^{-1})(x) = s^{-1}(r^{-1}(x)) = s^{-1}(x^2 + 1)$

$$= |x^2 + 1| = x^2 + 1$$

สรุป $r^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 2

$D_{r^{-1} o s^{-1}} = D_{r^{-1}} = R$

$(r^{-1} \circ s^{-1})(x) = x^2 + 1 = r^{-1}(x)$ ทุกค่า $x \in R$

สรุป $r^{-1} \circ s^{-1} = r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 3.

$(r^{-1} \circ r^{-1})(x) = r^{-1}(r^{-1}(x)) = r^{-1}(x^2+1)$

$= (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$

$r^{-1}(x) = x^2 + 1$

เพราะว่ามี $x = 0$ ทำให้ $(r^{-1} \circ r^{-1})(0) = 2 \neq 1 = r^{-1}(0)$

สรุป $r^{-1} \circ r^{-1} \neq r^{-1}$

พิจารณาตัวเลือก 4.

$D_{s^{-1} o s^{-1}} = R = D_{s^{-1}}$

$(s^{-1} \circ s^{-1})(x) = s^{-1}(s^{-1}(x)) = s^{-1}(|x|)$

$= \|x\| = |x| = s^{-1}(x)$

สรุป $s^{-1} \circ s^{-1} = s^{-1}$

การตัดตัวเลือก ใช้สมาชิกบางตัวของ r และ r^{-1}ช่วยตัดตัวเลือก

$r = \{(x, y) \in R \times R \mid x = y^2 + 1\}$

$= \{(1, 0), (2, 1), \ldots\}$

$r^{-1} = \{(0, 1), (1, 2), \ldots\}$

โดยการทดลองแทนค่าบางค่าจะได้ว่า$(r^{-1} \circ r^{-1})(0) = r^{-1}(r^{-1}(0)) = r^{-1}(1) = 2$

และ $r^{-1}(0) = 1$ ดังนั้น $(0, 2) \in r^{-1} \circ r^{-1}$แต่ $(0, 2) \notin r^{-1}$

เพราะฉะนั้น $r^{-1} \circ r^{-1} \neq r^{-1}$

ดังนั้นเราได้ตัวเลือก 3 เป็นตัวเลือกที่ต้องการ

37. ตอบ 4.

แนวคิด จำแนกค่าของ $g(|x| - x)$ ตามกรณีของ x ดังนี้

กรณีที่ 1. $x = 0$; $g(|x| - x) = g(0) = 0$

กรณีที่ 2. $x > 0$; $g(|x| - x) = g(x - x) = g(0) = 0$

กรณีที่ 3. $x < 0$; $g(|x| - x) = g(-x - x)$

$= g(-2x)$ (เพราะว่า $-2x > 0$)

$= (-2x)^2 = 4x^2$

$= 2x(2x) = 2x(x + x)$

$= 2x(x - (-x)) = 2x(x - |x|)$

สรุป $g(|x| - x) = 2x(x - |x|)$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $g(|x| - x) = g(|-1| - (-1)) = g(2) = 4$

ตัวเลือก 1. $x(|x| - x) = (-1)(|-1| - (-1)) = -2 \neq 4$

ตัวเลือก 2. $x(x - |x|) = (-1)((-1) - |-1|) = 2 \neq 4$

ตัวเลือก 3. $2x(|x| - x) = 2(-1)(|-1| - (-1)) = -4 \neq 4$

ตัวเลือก 4. $2x(x - |x|) = 2(-1)((-1) = |-1|) = 4$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2, และ 3. ทิ้งได้

38. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้เข้าลักษณะของโจทย์ และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นการแทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกจึงได้คำตอบเร็วกว่าวิธีจริง

ตัวเลือก 1. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{3\pi}{4}$ จะได้ $0 \leq \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

แต่ $f(x) = \sqrt{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} + \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + (-\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$

$\neq 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cos \frac{3\pi}{4}$

ตัวเลือก 2. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{5\pi}{4}$ จะได้ $\pi \leq \frac{5\pi}{4} \leq 2\pi$

แต่ $f(x) = \sqrt{\cos^2(\frac{5\pi}{4})} + \cos(\frac{5\pi}{4}) = 0$

$\neq 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2\cos\frac{5\pi}{4}$

ตัวเลือก 4. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{7\pi}{4}$ จะได้ $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{4} \leq 2\pi$

แต่ $f(x) = \sqrt{\cos^2\frac{7\pi}{4}} + \cos\frac{7\pi}{4} = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

การหาค่าของ f(x) พิจาณาดังนี้

1. $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $\cos x \geq 0$

$\sqrt{\cos^2 x} = \cos x$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = \cos x + \cos x = 2\cos x$

2. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$, $\cos \leq 0$

$\sqrt{\cos^2 x} = -\cos x$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$

3. $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$, $\cos x > 0$

$f(x) = \sqrt{\cos^2 x} + \cos x = 2\cos x$

สรุป $f(x) = \begin{cases} 2\cos x & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ หรือ } \frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi \\ 0 & ; \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

ดังนั้น ถ้า $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $f(x) = 0$ จึงถูกต้อง

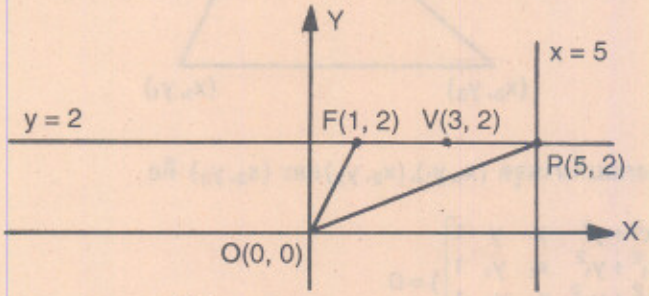
39. ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2-4y+8x=20$

$$y^2-4y+4 = -8x+24$$
$$(y-2)^2 = -8(x-3)$$
$$= 4(-2)(x-3)$$

เป็นรูปพาราโบลามีจุดยอดV(3,2) แกนพาราโบลาขนานแกน X

$c=-2$ โฟกัส F(1, 2) และสมการเส้นไดเรกตริกซ์ $x=5$ ดังนั้นจุด P คือ (5, 2)



การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด O(0, 0) F(1, 2) และ P(5, 2)

วิธีที่ 1 สมมติสมการวงกลมคือ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

แทนค่าจุดผ่านเพื่อหาค่า A, B, C

O(0, 0); $C=0$ _____(1)

F(1, 2); $1+4+A+2B+0=0$ _____(2)

P(5, 2); $25+4+5A+2B+0=0$ _____(3)

แก้สมการหาค่า A, B, C จะได้ $A=-6, B=\frac{1}{2}, C=0$

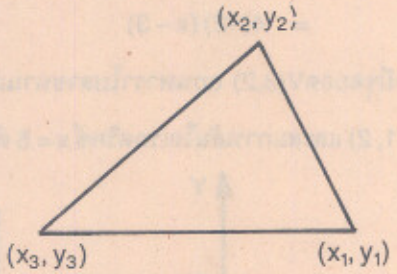
ดังนั้นสมการวงกลมคือ $x^2+y^2-6x+\frac{1}{2}y=0$

$$(x^2-6x+9)+(y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16})=9+\frac{1}{16}$$

$$(x-3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{145}{6}=r^2$$

สรุปกำลังสองของรัศมีของวงกลมมีค่าเท่ากับ $\frac{145}{16}$

วิธีที่ 2 ใช้สูตรความสัมพันธ์ระหว่างสมการค่ากำหนดกับภาคตัดกรวย สูตรสมการวงกลมในรูปแบบค่ากำหนดจะได้



สมการวงกลมที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) คือ

$$\det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

ดังนั้นสมการวงกลมที่ผ่านจุด O(0, 0), F(1, 2) และ P(5, 2) คือ

$$\det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1+4 & 1 & 2 & 1 \\ 25+4 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$0 = (-1)^{2+4} \det\left(\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ 5 & 1 & 2 \\ 29 & 5 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (x^2+y^2)(2-10) - x(10-58) + y(25-29)$$

$$= -8(x^2+y^2) + 48x - 4y$$

$$= -2(x^2+y^2) + 12x - y$$

จัดรูปแบบสมการวงกลมเพื่อหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

$-2(x^2+y^2)+12x-y=0$

$2x^2-12x-2y^2+y=0$

$2(x^2-6x+9)+2(y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{6})=18+\frac{1}{8}$

$(x-3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{145}{8}$

$(x-3)^2+(y+\frac{1}{4})^2=\frac{145}{16}$

วิธีที่ 3 ลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ FP ซึ่งเป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $x=3$ ต่อไปลากเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ OF

ความชัน OF เท่ากับ $\frac{2-0}{1-0}=2$

จุดกึ่งกลาง OF คือ $(\frac{1}{2}, 1)$

สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่ง OF คือ $y-1=(-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$

แทนค่า $x=3$ จะได้ $y-1=-\frac{1}{2}(3-\frac{1}{2})=\frac{5}{4}, y=-\frac{1}{4}$

เพราะว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบ OFP อยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงที่ตั้งฉากและแบ่งครึ่งคอร์ด OF และ FP

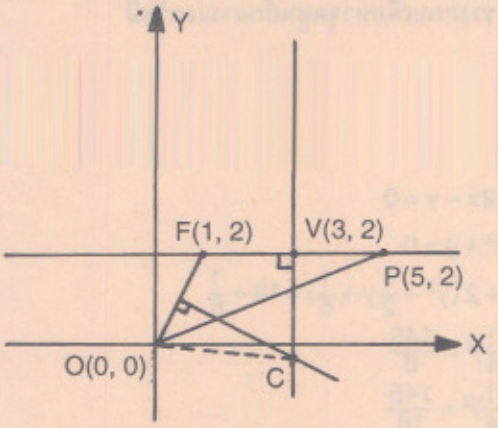
เพราะฉะนั้น $(3, -\frac{1}{4})$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

ระยะทางจากจุด (0, 0) ไปยัง $(3, -\frac{1}{4})$ เท่ากับ

$$\sqrt{9+\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{145}{16}}$$

สรุป รัศมีกำลังสองเท่ากับ $\frac{145}{16}$

การตัดตัวเลือก เมื่อได้พิกัดจุด O(0, 0), F(1, 2), P(5, 2) ใช้การวาดรูปวัดระยะทางได้ดังนี้



1. แบ่งครึ่ง PF ที่จุด (3, 2) แล้วลากเส้นตั้งฉาก
2. แบ่งครึ่ง OF ที่จุด $(\frac{1}{2}, 1)$ แล้วลากเส้นตั้งฉากตัดกับเส้นแรกที่จุด C จะได้ว่า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม OFP วัดความยาว OC ได้ประมาณ 3

ดั้งนั้นรัศมี OC ยกกำลังสองได้เท่ากับ 9

เปรียบเทียบกับตัวเลือก

1. $\frac{35}{4} = 8.75$
2. $\frac{37}{4} = 9.25$
3. $\frac{143}{16} = 8.9375$
4. $\frac{145}{16} = 9.0625$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

40. **ตอบ** ตัวเลือกที่ต้องการไม่มี

แนวคิด สมการ $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ มีจุดศูนย์กลาง (1, 2), จุดยอด (–1, 2) และ (3, 2)

การหาจุดตัดแกน X ของไฮเพอร์โบลา H ทำได้โดยแทนค่า y = 0 จะได้

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(0-2)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{4}{9} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}=\frac{13}{9}$$

$$(x-1)^2=\frac{52}{9}$$

$$x-1=\pm\frac{2\sqrt{13}}{3}$$

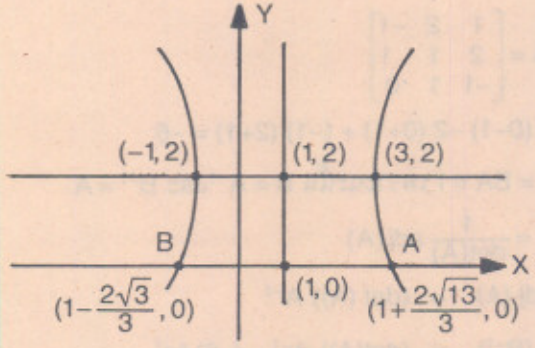
$$x=1\pm\frac{2\sqrt{13}}{3}$$

เพราะฉะนั้นจุดตัดแกน X ของไฮเพอร์โบลา H คือ $A(1+\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$

และ $B(1-\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$

ให้ P(x, y) เป็นจุดบนวงรี E จะได้ว่า $|AP|+|BP|=8$

ดังนั้นจุด A, B เป็นจุดโฟกัสของวงรี



โดยบทนิยามของวงรีจะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีคือ จุดกึ่งกลางระหว่างจุด

$(1-\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$ และ $(1+\frac{2\sqrt{13}}{3},0)$ ซึ่งคือจุด (1, 0)

มีเหตุผลอยู่หลายเหตุผลที่สรุปได้ว่าทุกตัวเลือกผิด

1. เพราะว่าจุดยอดของทุกตัวเลือกคือ (1, 2) ไม่ใช่ (1, 0)

   เพราะฉะนั้นทุกตัวเลือกไม่ใช้คำตอบ

2. เพราะว่า $A(1+\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0)$ และ $B(1-\frac{2\sqrt{13}}{3}, 0)$ เป็นโฟกัส

เพราะฉะนั้นแกนเอกของวงรี E คือ แกน X

แต่ทุกตัวเลือกไม่มีสมการใดที่มีแกน X เป็นแกนเอก

ดังนั้นทุกตัวเลือกจึงผิด

การตัดตัวเลือก เมื่ออ่านโจทย์แล้วจะเห็นได้ว่าวงรีที่โจทย์กำหนดให้หามีค่า $a = 4$ แต่ค่า a ของแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น

1. $a = 4$
2. $a = 4$
3. $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$
4. $a = \frac{8}{\sqrt{3}}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

41. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det(A) = (1)(0-1) - 2(0+1) + (-1)(2+1) = -6$

เพราะว่า $AB = BA = I$ เพราะฉะนั้น $B = A^{-1}$ และ $B^{-1} = A$

จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$

ดังนั้น $\text{adj}(A) = (\det(A))\, A^{-1}$

$\text{adj}(B^{-1}) = (\det(A))\, A^{-1} = (-6)A^{-1}$

$\det(\text{adj}(B^{-1})) = \det((-6)A^{-1})$

$= (-6)^3 \det(A^{-1})$ (เพราะว่า A^{-1} มีมิติ 3×3)

$= \frac{(-6)^3}{\det(A)} = \frac{(-6)^3}{-6} = 36$

หมายเหตุ โดยวิธีลัดนักเรียนต้องจำสูตรนี้ได้

ถ้า x เป็นเมตริกซ์มิติ nxn และ $\det(x) \neq 0$

แล้ว $\det(\text{adj } x) = (\det(x))^{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\det(\text{adj}(B^{-1})) = (\det(B^{-1}))^{3-1} = (\det(A))^2$

$= (-6)^2 = 36$

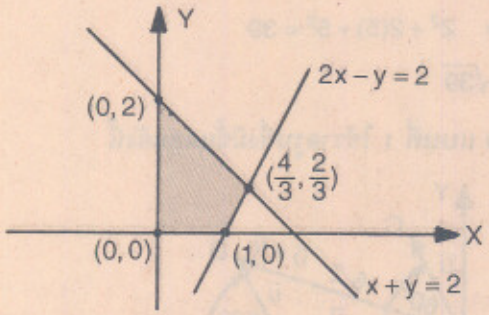
42. ตอบ 2.

แนวคิด ปัญหาหาค่าสูงสุด $A = 6x+y$

ภายใต้อสมการข้อจำกัด $x+y \le 2$

$2x-y \le 2$

$x \ge 0,\ y \ge 0$



เขียนกราฟเพื่อหาอาณาบริเวณผลเฉลย

จุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลยคือ $(0, 0), (0, 2), (1, 0), (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$

จุดมุม	$A = 6x+y$
(0, 0)	0
(0,2)	2
(1, 0)	6
$(\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{26}{3}$

สรุปค่าสูงสุดของ A เท่ากับ $\frac{26}{3}$

กข.2539 – 68

43. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $60°$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 60°$

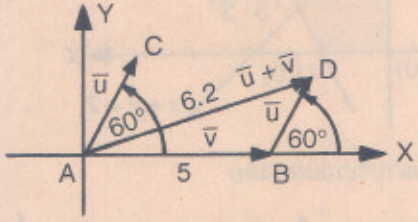
$$5 = 2\cdot|\bar{v}|\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$$

ดังนั้น $|\bar{v}| = 5$

$$\begin{aligned} |\bar{u}+\bar{v}|^2 &= (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}+\bar{v}) \\ &= \bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{u}+\bar{v}\cdot\bar{v} \\ &= |\bar{u}|^2+2\,\bar{u}\cdot\bar{v}+|\bar{v}|^2 \\ &= 2^2+2(5)+5^2 = 39 \end{aligned}$$

สรุป $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{39}$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ใช้วาดรูปซึ่งมีขั้นตอนดังนี้



1. ลากเส้นตรง AB ยาว 5 เซนติเมตร
2. ลาก AC ทำมุม $C\hat{A}B = 60°$ และ AC ยาว 2 เซนติเมตร
3. ลาก BD ขนานกับ AC และ CD ขนานกับ AB
4. ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$

   จะได้ $|\bar{u}| = 5$ และ $|\bar{v}| = 2$ และความยาว AD เท่ากับ $|\bar{u}+\bar{v}|$

วัดความยาว AD ได้ 6.2 เซนติเมตร

เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. 7 2. 12

3. $\sqrt{29} < 6$ 4. $\sqrt{39} \sim 6$

สรุปเลือกตัวเลือก 4 ดีกว่า

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้เหตุผลว่า $|\bar{u}+\bar{v}| \leq |\bar{u}|+|\bar{v}|$

เพราะว่า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u}+\bar{v}| \leq |\bar{u}|+|\bar{v}|$ ดังนั้น $|\bar{u}+\bar{v}| < 7$

สรุป ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

44. ตอบ 2.

แนวคิด จากทฤษฎีบทเกี่ยวกับพหุนาม p(x) จะได้ว่า

ถ้า x–c หาร p(x) จะเหลือเศษเท่ากับ p(c)

เพราะว่า x–2 หาร f(x) เหลือเศษ 3 เพราะฉะนั้น f(2) = 3

เพราะว่า f(x) เป็นพหุนาม เพราะฉะนั้น f′(x) เป็นพหุนาม

เพราะว่า x–2 หาร f′(x) เหลือเศษ 4 เพราะฉะนั้น f′(2)=4

เพราะว่า $f(x) = (x-1)^2 g(x)$

$f(2) = (2-1)^2 g(2)$

เพราะฉะนั้น $3 = g(2)$

และ $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx}((x-1)^2 g(x))$

$f'(x) = 2(x-1)\,g(x) + (x-1)^2 g'(x)$

ดังนั้น $f'(2) = 2(2-1)\,g(2) + (2-1)^2 g'(2)$

$4 = (2)(1)(3) + (1)\,g'(2)$

$4 = 6 + g'(2)$

สรุป $g'(2) = -2$

45. ตอบ 1.

แนวคิด
$$(5-12i)\,z^3\,(-3+4i) = 130\,\bar{z}$$
$$\left|(5-12i)\,z^3(-3+4i)\right| = \left|130\,\bar{z}\right|$$
$$\left|5-12i\right|\cdot\left|z\right|^3\cdot\left|-3+4i\right| = 130\cdot\left|\bar{z}\right|$$
$$\sqrt{25+144}\cdot\left|z\right|^3\cdot\sqrt{9+16} = 130\cdot\left|z\right|$$
$$13\cdot\left|z\right|^2\cdot 5 = 130$$
$$\left|z\right|^2 = 2$$
$$\left|z\right| = \sqrt{2}$$

46. ตอบ 2.

แนวคิด จากโจทย์กำหนด

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n = 1, 2 \\ a_{n-2}+2 & \text{เมื่อ } n = 3, 5, 7, \ldots \\ 2a_{n-2} & \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

จะได้ว่า $a_3 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$

$a_4 = 2a_2 = 2(1) = 2$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	1	1	3	2	5	4	7	8	9	16

$$\sum_{i=1}^{101} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{100} + a_{101}$$
$$= (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots a_{101}) + (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{100})$$
$$= (1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + 101) + (1 + 2 + 4 + \ldots\ldots + 2^{(\frac{100}{2}-1)})$$

เพราะว่า $1+3+5+\ldots+101 = \sum_{n=1}^{51}(2n-1) = 2\sum_{n=1}^{51} n - 51$

$$= 2(\frac{51}{2})(51+1) - 51 = (51)(52) - 51$$

$$= 51(52-1) = (51)^2$$

และ $1+2+4+.....+2^{\frac{100}{2}-1} = 1+2+4+.....+2^{49}$

$$= \frac{(1)(1-2^{50})}{1-2} = 2^{50}-1$$

สรุป $\sum_{i=1}^{101} a_i = (51)^2 + 2^{50} - 1$

47. ตอบ 4.

แนวคิด $g(x) = \sum_{n=1}^{10} f_n(x) = \sum_{n=1}^{10} (nx^2 - n^2x)$

$$= x^2\sum_{n=1}^{10} n - x\sum_{n=1}^{10} n^2$$

$$= x^2(\frac{10}{2})(10+1) - x(\frac{10}{6})(10+1)(20+1)$$

$$= 55x^2 - 385x = 55(x^2 - 7x)$$

เพราะว่า $g(x) = 55(x^2 - 7x + (\frac{7}{2})^2) - 55(\frac{7}{2})^2$

$$= 55(x-\frac{7}{2})^2 - \frac{2695}{4}$$

$$\geqslant -\frac{2695}{4}$$

เพราะฉะนั้น $g(x)$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{7}{2} = 3.5$

48. ตอบ 1.

แนวคิด **การแสดงว่า h ไม่ต่อเนื่องที่ x = 1**

$\lim_{x \to 1^+} h(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1}$ หาค่าไม่ได้

สรุป $\lim_{x \to 1} h(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น h ไม่ต่อเนื่องที่ x=1

ข้อสังเกต ขณะนี้นักเรียนควรจะขีดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งไปก่อน เผื่อเวลา

จำเป็นจะต้องเดาคำตอบจะได้ไม่เผลอไปเลือก ตัวเลือก 3. และ 4.

การแสดงว่า h ต่อเนื่องที่ x=2 $h(2)=\frac{1}{2-1}=1$

$\lim_{x\to 2^-} h(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{x-1}=1,\ \lim_{x\to 2^+} h(x)=\lim_{x\to 2^+} 3-x=1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2} h(x)=1=h(2)$ สรุป h ต่อเนื่องที่ x=2

49. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 $f(x) = \frac{2x-a}{x+b}$

$$f'(x) = \frac{(x+b)(2)-(2x-a)(1)}{(x+b)^2}$$

$$= \frac{2x+2b-2x+a}{(x+b)^2} = \frac{a+2b}{(x+b)^2}$$

$$= (a+2b)(x+b)^{-2}$$

$$f''(x) = (-2)(a+2b)(x+b)^{-3}$$

เพราะว่า $f'(0)=4$ เพราะฉะนั้น $4=\frac{a+2b}{(0+b)^2}$

จะได้ $4b^2=a+2b$ _____(1)

เพราะว่า $f''(0)=-8$ เพราะฉะนั้น $-8=(-2)(a+2b)(0+b)^{-3}$

จะได้ $4b^3=a+2b$ _____(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $4b^2=4b^3$

เพราะว่า $b\neq 0$ เพราะฉะนั้น $b=1$

ดังนั้นจาก (2) จะได้ $4=a+2,\ a=2$

เพราะฉะนั้น $f(0)=\frac{2(0)-a}{0+b}=-\frac{a}{b}=-\frac{2}{1}=-2$

วิธีที่ 2 จาก $f(x)=\frac{2x-a}{x+b}$

จะได้ $(x+b)\,f(x) = 2x - a$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$(x+b)\,f'(x) + f(x) = 2$ _____(3)

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$(x+b)\,f''(x) + f'(x) + f'(x) = 0$ _____(4)

แทนค่า $x = 0$ ใน (3) จะได้ $(0+b)\,f'(0) + f(0) = 2$

$f(0) = 2 - b\,f'(0) = 2 - 4b$ _____(5)

แทนค่า $x=0$ ใน (4) จะได้ $(0+b)\,f''(0) + f'(0) + f'(0) = 0$

$$b\,f''(0) + 2\,f'(0) = 0$$

$$b(-8) + 2(4) = 0$$

$$b = 1$$

จาก (5) จะได้ $f(0) = 2 - 4b = 2 - 4\,(1) = -2$

๕๐. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\int_0^a (\frac{x}{a})^a dx = \int_0^a \frac{x^a}{a^a} dx$

$$= \frac{1}{a^a}\int_0^a x^a dx = \frac{1}{a^a}\left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right]_{x=0}^{x=a}$$

$$= \frac{1}{a^a}\left(\frac{a^{a+1}}{a+1} - 0\right) = \frac{a}{a+1}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{a+1} = 0.95$

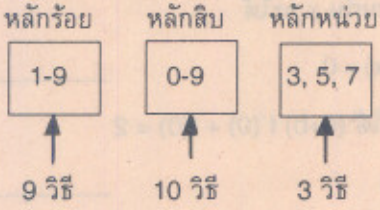
$$a = 0.95\,a + 0.95$$

$$0.05\,a = 0.95$$

สรุป $a = 19$

51. ตอบ 1.

แนวคิด A = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักหน่วยเป็นจำนวนเฉพาะ

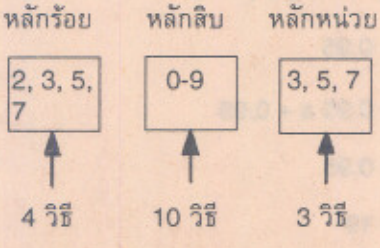


เพราะฉะนั้น $n(A) = (9)(10)(3) = 270$

B = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ

เพราะฉะนั้น $n(B) = (4)(10)(5) = 200$

$A \cap B$ = เซตของจำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 และมีหลักหน่วยและหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะ



เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = (4)(10)(3) = 120$

จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะเท่ากับ $n(A \cup B)$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 270 + 200 - 120 = 350$

การตัดตัวเลือก จำนวนเต็มคี่ซึ่งอยู่ระหว่าง 100 และ 999 คือ

101, 103, 105,...,997, 999 มีจำนวน 450 ตัวเท่านั้น

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

52. **ตอบ** 3.

แนวคิด S = เซตของตัวเลขในบัตรทุกใบ = {00, 01, 02,...,98, 99}

$n(s) = 100$

สมมติต้นขั้วของบัตรที่หยิบขึ้นมาคือหมายเลข xy

เมื่อ $x, y \in \{0, 1, 2,..., 9\}$

E_1 = เซตของเหตุการณ์ที่ได้รับรางวัลที่ 1 = {xy}

$n(E_1) = 1$ และ $P(E_1) = \frac{1}{100}$

E_2 = เซตของเหตุการณ์ที่ได้รับรางวัลที่ 2

= {x0, x1, x2,...,x9, 0y, 1y,..., 9y}

ยกเว้น xy ยกเว้น xy

$n(E_2) = 9 + 9 = 18$ และ $P(E_2) = \frac{18}{100}$

$E_1 \cap E_2 = \varnothing$ และ $P(E_1 \cap E_2) = 0$

P (นายสมชายได้รับรางวัล) = P (นายสมชายได้รางวัลที่ 1 หรือ รางวัลที่ 2)

$$= P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{1}{100} + \frac{18}{100} - 0 = \frac{19}{100}$$

กข.2539 – 76

53. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบนี้ต้องใช้ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก

ถ้า z_1, z_2 มีค่าน้ำหนักเป็น w_1, w_2 ตามลำดับ

แล้วค่าเฉลี่ยของ z เท่ากับ $\frac{z_1w_1 + z_2w_2}{w_1 + w_2}$

ให้ z_1 เป็นคะแนนมาตรฐานกลางภาค

z_2 เป็นคะแนนมาตรฐานปลายภาค

เพราะว่าคะแนนกลางภาคคิดเป็น 40% เพราะฉะนั้นค่าน้ำหนักของ z_1 เท่ากับ 40

เพราะว่าคะแนนปลายภาคคิดเป็น 60% เพราะฉะนั้นค่าน้ำหนักของ z_2 เท่ากับ 60

สรุปคะแนนมาตรฐานเฉลี่ย $= \frac{z_1(40) + z_2(60)}{40 + 60}$

$= \frac{40z_1 + 60z_2}{100}$

การหาคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของกัลยา

คะแนนมาตรฐานกลางภาค $= \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{97 - 62}{7} = 5$

คะแนนมาตรฐานปลายภาค $= \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{40 - 55}{5} = -3$

คะแนนมาตรฐานเฉลี่ย $= \frac{40(5) + 60(-3)}{100} = 0.2$

การหาคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของปัญญา

คะแนนมาตรฐานกลางภาค $= \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{76 - 62}{7} = 2$

คะแนนมาตรฐานปลายภาค $= \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{50 - 55}{5} = -1$

คะแนนมาตรฐานเฉลี่ย $= \frac{40(2) + 60(-1)}{100} = 0.2$

สรุป คะแนนมาตรฐานเฉลี่ยของกัลยาได้เท่ากับปัญญา

54. ตอบ 1.

แนวคิด ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 2

ดังนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 2$

$Q_3 - Q_1 = 4$ _____(1)

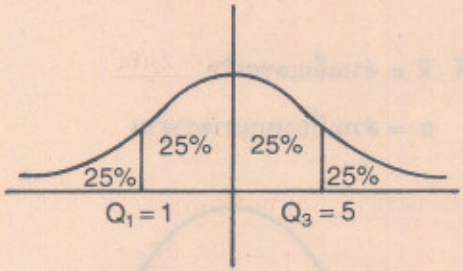
สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{2}{3}$

ดังนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{2}{3} \rightarrow 3Q_3 - 3Q_1 = 2Q_3 + 2Q_1$

$Q_3 - 5Q_1 = 0$ _____(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $Q_1 = 1$ และ $Q_3 = 5$

เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ เพราะฉะนั้นการกระจายภายใต้โค้งปกติคือ



ให้ $\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

เพราะว่าพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานทางขวามือของ z = 0.67 เท่ากับ 0.25

เพราะฉะนั้น $P(z<-0.67) = 0.25$ และ $P(z> 0.67) = 0.25$

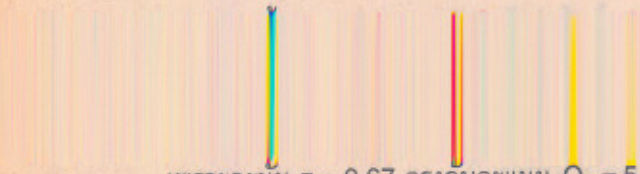
เพราะว่าจำนวนคะแนนที่น้อยกว่า Q_1 มี 25% ของทั้งหมด

เพราะฉะนั้น $z = -0.67$ ตรงกับคะแนน $Q_1 = 1$

ดังนั้น $\frac{Q_1 - \bar{x}}{s} = -0.67$

$1 - \bar{x} = -0.67\ s$ _____(1)

เพราะว่าจำนวนคะแนนที่มากกว่า Q_3 มี 25% ของทั้งหมด



เพราะฉะนั้น $z = 0.67$ ตรงกับคะแนน $Q_3 = 5$

ดังนั้น $\frac{Q_3 - \bar{x}}{s} = 0.67$

$5 - \bar{x} = 0.67\,s$ _____(2)

(1) +(2); $6 - 2\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{x} = 3$

และ $5 - 3 = 0.67\,s \rightarrow s = \frac{2}{0.67} = 2.98$

ดังนั้นค่าความแปรปรวน $s^2 = (2.98)^2 = 8.88$

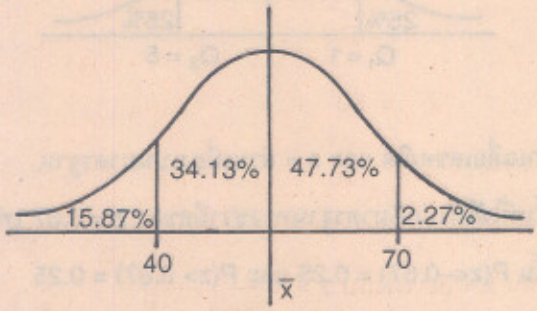
เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ ดังนั้นฐานนิยม $= \bar{x} = 3$

สรุปตัวเลือก 1. เท่านั้นถูกต้อง

55. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

s = ส่วนเบี่ยงเบนมาตราฐาน



เพราะว่า $P(0<z<1) = 0.3413$

$P(0<z<2) = 0.4773$

เพราะฉะนั้น $P(z>1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

$P(z>2) = 0.5 - 0.4773 = 0.0227$

ดังนั้น $P(z<-1) = 0.1587$

เพราะว่าจำนวนข้อมูลที่มีคะแนนน้อยกว่า 40 คะแนนเท่ากับ 15.87%

เพราะฉะนั้น คะแนน 40 ตรงกับ $z = -1$

ดังนั้น $\frac{x-\bar{x}}{s} = z$

$\frac{40-\bar{x}}{s} = -1$

$40-\bar{x} = -s$ _____(1)

เพราะว่าจำนวนข้อมูลที่ได้คะแนนมากว่า 70 คะแนนมี 2.27%

เพราะฉะนั้น คะแนน 70 ตรงกับ $z = 2$

ดังนั้น $\frac{70-\bar{x}}{s} = 2$

$70-\bar{x} = 2s$ _____(2)

(2) – (1) ; $30 = 3s$

$s = 10$

จาก (2) ; $70-\bar{x} = 2(10)$

$\bar{x} = 50$

สัมประสิทธิ์การกระจาย $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{10}{50} = 0.2$

สรุปสัมประสิทธิ์การกระจายของคะแนนชุดนี้เท่ากับ 20 เปอร์เซนต์

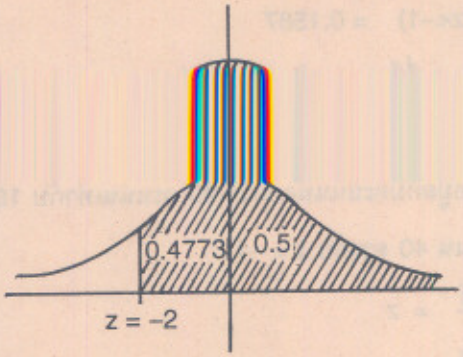
เพราะว่า คะแนน $x = 30$ ตรงกับ $z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{30-50}{10} = -2$

และ $P(x>30) = P(z>-2) = 0.5+P(-2 < z < 0)$

$= 0.5+P(0 < z < 2)$

$= 0.5+0.4773$

$= 0.9773$



เพราะฉะนั้นมีนักเรียนสอบได้คะแนนมากกว่า 30 คะแนน อยู่ 97.73%

สรุป ข้อความ ก. ถูก และ ข้อความ ข. ผิด

56. ตอบ 3.

แนวคิด สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}}$

$$\frac{1}{4} = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$\bar{x} = 4s$$

เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $s = 3$ เพราะฉะนั้น $\bar{x} = 4(3) = 12$

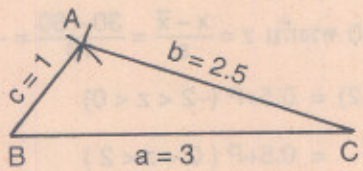
เพราะว่าข้อมูลแจกแจงปกติ เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = มัธยฐาน

สรุป มัธยฐานของคะแนนสอบ = 12

ตอนที่ 3 เติมคำตอบข้อ 1-6 ข้อละ 3 คะแนน

1. ตอบ $b \cos C + c \cos B = 3$

แนวคิด



จากสูตรตรีโกณมิติ $a = b \cos C + c \cos B$

สรุป $b \cos C + c \cos B = 3$

การแสดงว่า b cos C + c cos B = a

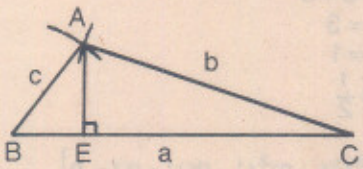
วิธีที่ 1 $b\cos C + c\cos B = b[\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}] + c[\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}]$

$= [\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}] + [\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}]$

$= \frac{2a^2}{2a} = a$

หมายเหตุ สูตร a = b cos C + c cos B มีในหนังสือรวมสูตรคณิตศาสตร์หลายเล่ม แต่ไม่มีในหนังสือ ค. 0.11 - ค .016

วิธีที่ 2



ลาก AE ตั้งฉากกับ BC

$\cos B = \frac{BE}{AB} = \frac{BE}{c}$; $BE = c\cos B$

$\cos C = \frac{EC}{AC} = \frac{EC}{b}$; $EC = b\cos C$

$a = BE + EC = c\cos B + b\cos C$

วิธีที่ 3

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

$b^2 + c^2 = 2a^2 + b^2 + c^2 - 2ac\cos B - 2ab\cos C$

$2a^2 = 2a(c\cos B + b\cos C)$

$a = c\cos B + b\cos C$

หมายเหตุ สูตรที่เหมือนกันคือ $b = a\cos C + c\cos A$

$c = a\cos B + b\cos A$

กข.2539 – 82

2. ตอบ 4.25

แนวคิด $3^{x^2+2x} - 3^{x^2+1} - 9^{x+1} + 27 = 0$

$$3^{x^2} \cdot 3^{2x} - 3^{x^2} \cdot 3 - 3^{2(x+1)} + 3^3 = 0$$

$$3^{x^2} \cdot 3^{2x} - 3^{x^2} \cdot 3 - 3^{2x} \cdot 3^2 + 3^3 = 0$$

$$3^{x^2}[3^{2x} - 3] - 3^2[3^{2x} - 3] = 0$$

$$[3^{x^2} - 3^2][3^{2x} - 3] = 0$$

$3^{x^2} - 3^2 = 0$ หรือ $3^{2x} - 3 = 0$

$3^{x^2} - 3^2 = 0$	$3^{2x} - 3 = 0$
$3^{x^2} = 3^2$	$3^{2x} = 3$
$x^2 = 2$	$2x = 1$
$x = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$	$x = \frac{1}{2}$

สรุป $A = \left\{x \in R \middle| 3^{x^2+2x} - 3^{x^2+1} - 9^{x+1} + 27 = 0\right\}$

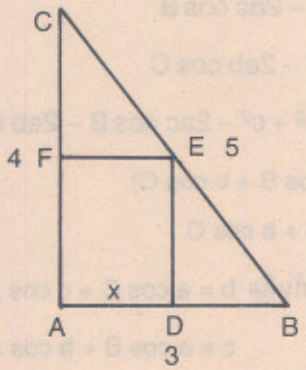
$= \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}\}$

ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดของ A เท่ากับ $(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2})^2$

$= 2 + 2 + \frac{1}{4} = 4.25$

3. ตอบ 3.

แนวคิด



ให้ x = ความยาวด้าน AD

ลาก DE ขนานกับ AC และลาก EF ขนานกับ AB จะได้ ADEF เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า บรรจุในสามเหลี่ยม ABC

เพราะว่า AC ขนานกับ DE เพราะฉะนั้น Δ ABC และ Δ BDE คล้ายกัน

ดังนั้น $\frac{|AC|}{|DE|} = \frac{|AB|}{|DB|}$

$$|DE| = \frac{|DB| \cdot |AC|}{|AB|} = \frac{(3-x)4}{3} = \frac{4}{3}(3-x)$$

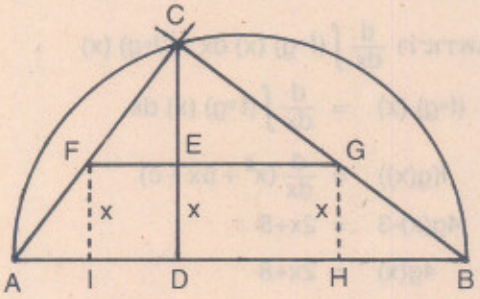
พ.ท. $\square$ ADEF $= |AD| \cdot |DE| = x\left(\frac{4}{3}(3-x)\right) = 4x - \frac{4x^2}{3}$

$$= -\frac{4}{3}(x^2 - 3x) = -\frac{4}{3}(x^2 - 3x + (\tfrac{3}{2})^2) + \frac{4}{3}(\tfrac{3}{2})^2$$

$$= -\frac{4}{3}(x - \tfrac{3}{2})^2 + 3 \leq 3$$

สรุป พ.ท. $\square$ ADEF มีค่ามากสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $x = \frac{3}{2}$

หมายเหตุ สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสามเหลี่ยม ABC มีหลายลักษณะ แต่ถ้าต้องการให้มีพื้นที่มากที่สุดมีค่าได้เดียวคือ 3 ดังนั้น ถึงแม้จะบังคับให้ฐานของสี่เหลี่ยมอยู่ด้านตรงข้ามมุมฉาก ก็จะได้พื้นที่มากสุดเท่ากับ 3 เหมือนกัน กำหนดให้สี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านอยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก



ลากเส้นจาก C มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด D

ให้ x = ความยาว DE

ลากเส้นผ่าน E ขนานกับ AB ตัดกับ AC และ BC ที่ F และ G ตามลำดับ ลาก GH และ FI ตั้งฉากกับ AB จะได้ FGHI เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าบรรจุในสามเหลี่ยม ABC

$$\frac{|FI|}{|AI|} = \tan F\hat{A}I = \tan C\hat{A}B = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{4}{3}$$

ดังนั้น $|AI| = \frac{3}{4}|FI| = \frac{3}{4}x$

$$\frac{|GH|}{|BH|} = \tan G\hat{B}H = \tan A\hat{B}C = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{4}$$

ดังนั้น $|BH| = \frac{4}{3}|GH| = \frac{4}{3}x$

$$|HI| = |AB| - |AI| - |HB| = 5 - \frac{3}{4}x - \frac{4}{3}x = 5 - \frac{25}{12}x$$

พ.ท. $\square FGHI = |FI| \cdot |IH| = x(5 - \frac{25}{12}x)$

$$= -\frac{25}{12}(x^2 - \frac{12}{5}x) = -\frac{25}{12}(x^2 - \frac{12}{5}x + (\frac{12}{10})^2) + \frac{25}{12}(\frac{12}{10})^2$$

$$= -\frac{25}{12}(x - \frac{12}{10})^2 + 3 \leq 3$$

สรุป พ.ท. $\square$ FGHI มีค่ามากสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $x = \frac{12}{10}$

4. ตอบ 2.25

แนวคิด เพราะว่า $\frac{d}{dx}\int (f\circ g)(x)\,dx = (f\circ g)(x)$

เพราะฉะนั้น $(f\circ g)(x) = \frac{d}{dx}\int (f\circ g)(x)\,dx$

$$f(g(x)) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5x + c)$$

$$4g(x)-3 = 2x+5$$

$$4g(x) = 2x+8$$

$$g(x) = \frac{x}{2}+2$$

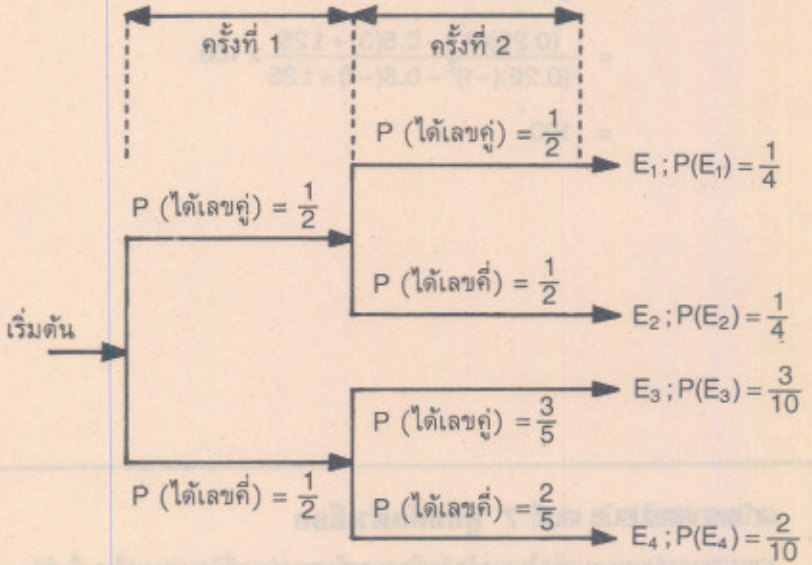
สรุป $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (\frac{x}{2}+2)\,dx = (\frac{x^2}{4}+2x)\Big]_{x=0}^{x=1}$

$= (\frac{1}{4}+2)-0$

$= 2.25$

5. ตอบ 0.55

แนวคิด การคำนวณความน่าจะเป็นใช้แผนภูมิต้นไม้เป็นวิธีดีสำหรับปัญหาข้อนี้



ความน่าจะเป็นที่หยิบได้ครั้งที่สองเป็นเลขคู่

$=$ P (ครั้งแรกได้เลขคู่และครั้งที่สองเป็นเลขคู่) +P (ครั้งแรกได้เลขคี่ และครั้งที่สองเป็นเลขคู่)

$= P(E_1)+P(E_3) = \frac{1}{4}+\frac{3}{10} = 0.55$

6. ตอบ 100

แนวคิด ดัชนีราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2537 เมื่อกำหนดปีฐานเป็นปี พ.ศ. 2533

$$= \frac{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2537}}{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ 2533}} \times 100$$

$$= \frac{y\ (\text{พ.ศ. 2537})}{y\ (\text{พ.ศ. 2533})} \times 100$$

$$= \frac{y(x=3)}{y(x=-1)} \times 100$$

$$= \frac{(0.25)(3^2)-0.5(3)+1.25}{(0.25)(-1)^2-0.5(-1)+1.25} \times 100$$

$$= 100$$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7 คู่มือตัดตัวเลือก

รวบรวมและจำแนกแนวคิดในการตัดตัวเลือกของข้อสอบต่างๆที่มีการสอบจริงๆเพื่อผู้อ่านจะได้เกิดทักษะการคิดแก้ปัญหาเพื่อให้ได้คำตอบที่ต้องการเร็วที่สุด ซึ่งผู้อ่านสามารถนำไปใช้ในการทำข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. ข้อสอบแข่งขันระดับ ม. ปลาย อื่นๆ แนวคิดหรือหลักการตัดตัวเลือกไม่มีกฎเกณฑ์แน่นอน อย่างไรก็ตามสำหรับข้อสอบ ENTRANCE และข้อสอบแข่งขันต่างๆสามารถใช้วิธีตัดตัวเลือกได้

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คุณสมบัติเกี่ยวกับเซต

ให้ A, B และ C เป็นเซตย่อยของเอกภพสัมพัทธ์ U

(1) $\phi \subset A$

(2) $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

(3) $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

(4) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

(5) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

(6) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = A \cap B$

(7) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$

(9) $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

(10) $A \cup B = U$ ก็ต่อเมื่อ $A' \subset B$

(11) $A \cup B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ และ $B = \phi$

(12) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

(13) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cup C \subset B \cup D$

(14) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cap C \subset B \cap D$

(15) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $P(A) \subset P(B)$

(16) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(17) สำหรับเซตจำกัด A และ B ใดๆ $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

(18) $A \cup A = A$

(19) $A \cap A = A$

(20) $A \cup \phi = A$

(21) $A \cap \phi = \phi$

(22) $A \cup U = U$

(23) $A \cap U = A$

(24) $A \cup B = B \cup A$

(25) $A \cap B = B \cap A$

(26) $A \cup A' = U$

(27) $A \cap A' = \phi$

(28) $(A')' = A$

(29) $U' = \phi$

(30) $\phi' = U$

(31) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(32) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(33) $A - B = A \cap B'$

(34) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(35) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(36) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(37) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(38) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

(39) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(40) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(41) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(42) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

(43) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $B \subset A$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด

(44) ถ้า $n(A) = m$ แล้ว $n(P(A)) = 2^m$ = จำนวนสับเซตของ A

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ให้ p,q และ r เป็นประพจน์

ถ้า $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $\sim p \vee q$
2. $p \rightarrow \sim r$
3. $p \wedge q$
4. $q \leftrightarrow \sim r$

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า p และ q เป็นประพจน์โดยที่ $p \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว $p \vee \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์ด้วย

ข. นิเสธของข้อความ $\exists x [x < 6] \rightarrow \forall x [x > 8]$ คือ $\forall x [x \geqslant 6] \wedge \exists x [x \leqslant 8]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก
2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

3. จากการสำรวจผู้ฟังเพลงจำนวน 180 คน พบว่า มีผู้ชอบเพลงไทยสากล 95 คน เพลงไทยเดิม 92 คน เพลงลูกทุ่ง 125 คน เพลงไทยสากลและเพลงไทยเดิม 52 คน เพลงไทยสากลและเพลงลูกทุ่ง 43 คน เพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 57 คน และทั้ง 180 คน จะชอบฟังเพลงอย่างน้อยหนึ่งประเภทในสามประเภทดังกล่าวข้างต้น

จำนวนคนที่ชอบฟังเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 25 3. 30 4. 35

4. ถ้า $A = \{0,1\}$ และ $B = \{0,\{1\},\{0,1\}\}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A \in P(B)$

2. $\{1\} \in P(A) \cap P(B)$

3. จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B) = 2$

4. จำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B) = 8$

5. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

แล้ว โดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. ϕ 2. $(-\infty,2]$

3. $(-3,2)$ 4. $(-3,2]$

6. ถ้า $r = \{(x,y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 2x\}$ แล้วเรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0,2]$ 2. $[0,4]$

3. $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$ 4. $(-\infty,0] \cup [4,\infty)$

7. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$

และ a เป็นค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ S แล้ว a^2+1 เท่ากับข้อใดต่อไป

1. 2 2. 5 3. 10 4. 26

8. ส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน $(\frac{2i}{1+i})^{12}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -16 3. 16 4. 64

9. ให้ m,x,y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

ถ้า $\frac{x}{y} > z > 0$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\frac{y}{x} < \frac{1}{z}$
2. $x > yz$
3. $\frac{my}{x} < mz$
4. $\frac{mx}{y} > mz$

10. ให้ a เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า x-a หาร x^3+2x^2-5x-2 เหลือเศษ 4 แล้ว ผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6
2. -2
3. 2
4. 6

11. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ (3,2) และ (3,-4) โฟกัสที่ (3,-6) มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$
2. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$
3. $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$
4. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

12. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,6) และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2-4y-4x = 8$

1. $3x-4y+21 = 0$
2. $4x-3y+14 = 0$
3. $7x+2y-19 = 0$
4. $2x+7y-44 = 0$

13. เซตคำตอบของสมการ $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. (-4,0)
2. (-3,1)
3. (-2,2)
4. (-1,3)

14. กำหนดให้ $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ และ $\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

ค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-12\sqrt{3}}{25}$
2. $\frac{-6\sqrt{3}}{25}$
3. $\frac{6\sqrt{3}}{25}$
4. $\frac{12\sqrt{3}}{25}$

15. ค่า x ที่สอดคล้องกับสมการ $9^{x} - 3^{x+\log_3 2} = -1$ อยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $(-3,-1)$
2. $(-1,1)$
3. $(1,2)$
4. $(2,3)$

16. กำหนดให้ $\log 3 = c$

ค่าของ $\log_{1/9} 9 + \log_3 \sqrt[3]{3} - \log 0.81$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3} - 4c$
2. $\frac{4}{3} + 4c$
3. $\frac{8}{3} - 4c$
4. $\frac{8}{3} + 4c$

17. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{3x^2+1}$

อนุพันธ์ของ $[f(x) + g(x)]$ ที่ $x = 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{7}{2}$
2. $-\frac{19}{4}$
3. $\frac{13}{2}$
4. $\frac{21}{4}$

18. ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+a_{n+1}} = 2n$

แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. -2 4. 2

19. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt[3]{x^2+2}$ ที่จุด $x = 5$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $10x-27y+31 = 0$ 2. $5x-13y+14 = 0$

3. $27x-10y-105 = 0$ 4. $13x-5y-50 = 0$

20. สินค้าชนิดหนึ่งขายในราคาชิ้นละ 24 บาท ต้นทุนในการผลิต x ชิ้น เท่ากับ $16 + 6x + 0.2x^{3/2}$ บาท ถ้า N เป็นจำนวนชิ้นของสินค้าที่ผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $1 \leqslant N < 2000$ 2. $2000 \leqslant N < 4000$

3. $4000 \leqslant N < 6000$ 4. $6000 \leqslant N < 8000$

21. กำหนดให้ $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{a} \cdot (\bar{a} - \bar{b}) = 23$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ แล้ว $|\bar{b}|\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -0.4 2. -0.2 3. 0.2 4. 0.4

22. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ ให้

$$M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & n \\ -\frac{1}{n} & n+1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad a_n = \det(M_n)$$

แล้ว $\lim_{n \to \infty} a_n$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีค่าเป็น 0 2. มีค่าเป็น 1 3. มีค่าเป็น 2 4. หาค่าไม่ได้

23. กำหนดระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 1 \\ x + 2y &= -2 \\ -x - 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

ค่าของ x ที่เป็นคำตอบของระบบสมการนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 9 3. -9 4. -20

24. ให้ A เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 และ $M_{ij}(A)$ คือไมเนอร์ของ a_{ij} ถ้า $M_{23}(A) = 5$ แล้ว $M_{32}(2A^t)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 20 3. 40 4. 80

25. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง ตัวแทนนักเรียนจากชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4,5 และ 6 ชั้นปีละ 3 คน จะต้องทำการประชุมเพื่อเตรียมการแสดงสำหรับงานคืนสู่เหย้าของโรงเรียน จำนวนวิธีที่จะจัดผู้เข้าร่วมประชุมทั้งหมดนั่งรอบโต๊ะกลม โดยที่ตัวแทนที่มาจากชั้นปีเดียวกันต้องนั่งติดกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 2. 54 3. 432 4. 1296

26. รากที่ 5 รากหนึ่งของ

$$3^{20} - 5\cdot3^{16}\cdot2^3 + 5\cdot3^{12}\cdot2^7 - 5\cdot3^8\cdot2^{10} + 5\cdot3^4\cdot2^{12} - 2^{15}$$

คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 67 2. 69 3. 71 4. 73

27. จากข้อมูลที่กำหนดให้

ข้อมูลชุด A 1, 3, 2, 2, 5, 3, 4, 4, 3

ข้อมูลชุด B 1, 2, 4, 1, 2, 5, 2, 5, 1, 5, 5, 3

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากันและมัธยฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่มัธยฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
3. มัธยฐานของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน แต่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน
4. มัธยฐานของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลสองชุดนี้ไม่เท่ากัน

28. ข้อมูลเกี่ยวกับการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 6 คน เป็นดังนี้

นักเรียนคนที่	คะแนน	ค่ามาตรฐาน
1	30	-1.2
2	40	-0.8
3	45	-0.6
4	60	0
5	85	1.0
6	100	1.6

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนข้างต้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{5}{12}$ 3. $\frac{7}{12}$ 4. $\frac{11}{12}$

29. จากการทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) และระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ดังนี้

t	1	2	3	4
s	2	8	18	32

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดนี้เป็นแบบเส้นตรง แล้วเราจะทำนายระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ขณะที่ t เท่ากับ 1.5 วินาที ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 เมตร 2. 4 เมตร 3. 5 เมตร 4. 6 เมตร

30. ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านอาทิตย์ใน พ.ศ. 2530 และ พ.ศ. 2536

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย (บาท) พ.ศ. 2530	พ.ศ. 2536
สบู่ (ก้อน)	11	13
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

ในการคิดดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน จะได้ 109.97 % ถ้าเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล โดยมีราคาต่อก้อนเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน) เมื่อราคาต่อหน่วยของสบู่คือราคาต่อโหล จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 108.97 %
2. 109.97 %
3. 111.63 %
4. 112.22 %

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. พิจารณาการอ้างเหตุผลดังนี้

เหตุ 1. ถ้าสมชายไปว่ายน้ำแล้วสมหญิงไปดูภาพยนตร์
2. สมทรงไม่ดูโทรทัศน์
3. ถ้าสมชายไม่ไปว่ายน้ำแล้วสมพรไม่นอนพักผ่อน
4. สมพรนอนพักผ่อนหรือสมทรงดูโทรทัศน์

ผล p

p แทนประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้จึงจะทำให้การอ้างเหตุผลข้างต้นสมเหตุสมผล

1. สมพรไม่นอนพักผ่อน

2. สมชายไม่ไปว่ายน้ำ

3. สมชายไปว่ายน้ำ และสมหญิงไม่ไปดูภาพยนตร์

4. สมพรนอนพักผ่อนและสมหญิงไปดูภาพยนตร์

32. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่ทำให้ประพจน์

$$\exists x [x^4 + 3x^2 - 10 = 0]$$

มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. เซตของจำนวนอตรรกยะ
2. $\{x \in R \mid |x| > 2\}$
3. $\{z \in C \mid 1 \leqslant |z| < 2\}$
4. $\{z \in C \mid 2 \leqslant |z| < 3\}$

33. ให้ $f(x) = 2x+2$ และ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$

ถ้า $\{x \mid f(x) \leqslant g(x)\}$ เท่ากับช่วงปิด $[a,b]$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. $-\frac{8}{5}$
3. -1
4. 0

34. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R

ถ้า $f(x) = x^3+1$ และ $(f \circ g)(x) = x^3+3x^2+3x+2$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(-7)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. -2
3. 1
4. 3

35. ให้ r_1 และ r_2 เป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย

$r_1 = \{(x,y) \in R \times R \mid y \leq \sqrt{x-3}\}$

$r_2 = \{(x,y) \in R \times R \mid x + \sqrt{y^2-9} \leq 0 \text{ และ } y \geq 3\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $r_1 \subset r_2$
2. $r_2 \subset r_1$
3. $r_1 \subset r_2^{-1}$
4. $r_2 \subset r_1^{-1}$

36. ให้ a และ b เป็นรากที่ 6 ของ 1 โดยที่ $a^3 \neq b^3$ ถ้า $\overline{A}$ และ $\overline{B}$ ตามลำดับ เป็นเวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน a^3 และ b^3 ในระนาบเชิงซ้อน และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ทั้งสองแล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 1

37. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ

$\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ } 0 \text{ และ } -100 \leq x \leq 100\}$

ให้ $A = \{x \mid \text{ห.ร.ม.ของ } x \text{ กับ } 21 \text{ เป็น } 3\}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 29
2. 34
3. 68
4. 58

38. ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2-4x+2y-4 = 0$ และตัดวงกลมที่จุด A และ B ถ้าจุด C มีพิกัดเป็น $(-1,-2)$ แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$ 2. 3 3. 9 4. $\frac{63}{5}$

39. ให้ A(-1,2), B(3,0) และ C(5,4) เป็นจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x-3y-1 = 0$ 2. $3x-3y+1 = 0$

3. $3x-3y-2 = 0$ 4. $3x-3y+2 = 0$

40. เซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ 2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$

3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$ 4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

41. ถ้า $3\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$ และ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0$ โดยที่ $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ แล้ว $\sin(\alpha+\beta)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ 4. 1

42. ถ้า A และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ (1) และ (2) ตามลำดับดังนี้

$$\log(x-2) + \log(x+2) - \log 5 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 x) = 1 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A = B$ 2. $A \cap B = \phi$

3. A เป็นสับเซตแท้ของ B 4. B เป็นสับเซตแท้ของ A

43. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$

โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2,3)$ 2. $(2,3]$ 3. $(2, \frac{\pi}{2})$ 4. $(2, \frac{\pi}{2}]$

44. ถ้า $\log_a(ax) + 2\log_a(a^2x) + 3\log_a(a^3x) + \ldots + 10\log_a(a^{10}x)$ $= 110$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. a^{-10} 2. a^{-5} 3. $a^{-5/2}$ 4. $a^{-5/4}$

45. ถ้า $a_n = \int_0^2 \frac{1}{x^{2n}}\,dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2n)\,a_n$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ 2. มีผลบวกเป็น $\frac{2}{3}$
3. มีผลบวกเป็น $\frac{1}{2}$ 4. มีผลบวกเป็น 1

46. ให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ และ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim_{x \to 1^-} f(x) > 0$ และ $\lim_{x \to 1^+} f(x) < 0$

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

4. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = -2$

47. กำหนดให้ $f(x) = x^3+bx^2+cx$ เมื่อ b,c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤตของฟังก์ชัน f และ $f''(-1) = 6$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
2. f เป็นฟังก์ชันลด
3. $x = -2$ ให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์
4. $x = -1$ ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

48. ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{\sqrt{x}}$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และแกน X เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{20}{3}$
2. 3
3. $\frac{72}{5}$
4. 5

49. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ถ้า $X = (B + C)A$ แล้ว X^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

50. ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 4×4 โดยที่

$$A(\text{adj } A) - BA = I$$

ถ้า det B = 0 แล้ว det A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

51. ในการผลิตสินค้าสองชนิดโดยใช้วัตถุดิบจากแหล่ง 2 แหล่ง ตามข้อมูลต่อไปนี้

(ก) ปริมาณวัตถุดิบทั้งหมดที่มีให้ใช้จากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 มีค่าเป็น 18 หน่วย และ 10 หน่วย ตามลำดับ

(ข) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1 ต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 เป็นปริมาณ 2 หน่วย และ 1 หน่วย ตามลำดับ

(ค) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 2 ต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 เป็นปริมาณ 3 หน่วย และ 2 หน่วย ตามลำดับ

(ง) แต่ละชิ้นของสินค้าชนิดที่ 1 และชนิดที่ 2 จะให้รายได้เป็นเงิน 300 และ 400 บาท ตามลำดับ

อยากทราบว่าเมื่อผลิตสินค้าจนมีรายได้มากที่สุดตามข้อจำกัดของวัตถุดิบที่มีอยู่แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ยังมีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2
2. ยังมีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 1 แต่ไม่มีวัตถุดิบเหลือจากแหล่งที่ 2
3. ไม่มีวัตถุดิบเหลือจากแหล่งที่ 1 แต่มีวัตถุดิบเหลืออยู่จากแหล่งที่ 2
4. ไม่มีวัตถุดิบเหลือทั้งจากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2

52. ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าถ่วงน้ำหนักลูกเต๋าลูกนี้จนกระทั่งทำให้ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 มีค่าเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{9}$ แล้ว

ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้มคู่ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{8}{15}$ 3. $\frac{13}{15}$ 4. $\frac{14}{15}$

53. ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้าย มีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลง โดยเลือกเพลงจากเพลงทั้งหมด 5 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{25}$ 2. $\frac{9}{25}$ 3. $\frac{12}{25}$ 4. $\frac{13}{25}$

54. สมชายเตรียมตัวเดินทางไปท่องเที่ยวต่างประเทศ ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปเที่ยวประเทศอังกฤษเท่ากับ 0.5 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับ 0.8 และความน่าจะเป็นที่เขาจะไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษและไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.4 2. 0.5 3. 0.7 4. 0.9

55. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

อายุ (ปี)	จำนวนเด็ก
1 - 3	3
4 - 6	a
7 - 9	6
10 - 12	4

ถ้ามัธยฐานของอายุของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 7 ปี แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 4 3. 5 4. 6

56. ข้อมูล 4 จำนวน มีค่าดังนี้

5, a, b, 1 โดยที่ $1 \leqslant a < b$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 5 แล้ว b-a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4 3. 6 4. 8

ตอนที่ 3 ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ และ $B = \{a,b\}$

ถ้า $S = \{r \mid r \subset A \times B\}$ และ

$F = \{r \in S \mid r$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีจำนวนสมาชิกในโดเมนเท่ากับ $2\}$

แล้ว $n(F)$ เท่ากับเท่าใด

2. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $80 < x < 200$ และ $x = pq$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p \neq q$ ถ้า x และ y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ ค.ร.น.ของ x,y เท่ากับ 15015 แล้ว ผลบวกของค่าของ y ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขทั้งหมดที่กำหนดให้เท่ากับเท่าใด

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน BC, CA และ AB ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$ และ $4a^2 = 6b^2$ แล้ว $1 + 2\sin^2(3\hat{A} - 2\hat{B})$ เท่ากับเท่าใด

4. ให้ F_1, F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรีที่มีสมการเป็น $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$ B เป็นจุดที่วงรีตัดแกน Y และอยู่เหนือแกน X ถ้า F_1, B, F_2 ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน และ F_1BF_2 เป็นสามเหลี่ยมที่พื้นที่เท่ากับ $\frac{3\sqrt{7}}{4}$ หน่วย แล้ว k มีค่าเท่าใด

5. ให้ α เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 + 4\sqrt{5}$ β เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 - 4\sqrt{5}$ ถ้า $\alpha + \beta$ และ $\alpha\beta$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $\alpha + \beta$ มีค่าเท่าใด

6. ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติ โดยที่ค่าสูงสุดของข้อมูลมีค่าเท่ากับค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5 และค่าต่ำสุดของข้อมูลมีค่าเท่ากับค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลเท่ากับ 10 แล้ว พิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังนี้

Z	.44	1.96
A	.17	.475

เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2538

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่า $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \wedge \sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

และ $(q \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า $p \wedge \sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะฉะนั้น p มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\sim q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

นั่นคือ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า $q \vee r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น r มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สรุป p เป็นจริง , q เป็นเท็จ , r เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้นค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเลือก 2. $p \rightarrow \sim r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวเลือก 3. $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเลือก 4. $q \leftrightarrow \sim r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อความ ก ผิด ตัวอย่างเช่น p มีค่าความจริงเป็นเท็จ
q มีค่าความจริงเป็นจริง

จะได้ว่า $p \to q$ มีค่าความจริงเป็นจริง

แต่ $p \vee \sim q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข้อความ ข ผิด เพราะว่า $p \to q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

เพราะฉะนั้นนิเสธของข้อความ $p \to q$ คือ $\sim(p \to q)$

$$\sim(p \to q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

ให้ p แทนข้อความ $\exists x\,[x < 6]$

q แทนข้อความ $\forall x\,[x > 8]$

เพราะว่า $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$ คือ $p \to q$

เพราะฉะนั้น นิเสธของ $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$ คือ $\sim(p \to q)$

เพราะว่า $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

$$\equiv \exists x\,[x < 6] \wedge \sim[\forall x\,[x > 8]]$$

$$\equiv \exists x\,[x < 6] \wedge \exists x\,[x \leqslant 8]$$

สรุปนิเสธของ $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$

ไม่ใช่ $\forall x\,[x \geqslant 6] \wedge \exists x\,[x \leqslant 8]$

วิธีลัด ใช้เหตุผลค่าความจริงจะดีกว่า

เพราะว่า $\exists x\,[x < 6]$ เป็นจริง

$\forall x\,[x > 8]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\exists x\,[x < 6] \to \forall x\,[x > 8]$ เป็นเท็จ .....(1)

เพราะว่า $\forall x [x \geqslant 6]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\forall x [x \geqslant 6] \wedge \exists x [x \leqslant 8]$ เป็นเท็จ .....(2)

จาก (1) และ (2) นิเสธของ $\exists x [x < 6] \rightarrow \forall x [x > 8]$

ไม่ใช่ $\forall x [x \geqslant 6] \wedge \exists x [x \leqslant 8]$

3. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ A = เซตของคนชอบเพลงไทยสากล ; $n(A) = 95$

B = เซตของคนชอบเพลงไทยเดิม ; $n(B) = 92$

C = เซตของคนชอบเพลงลูกทุ่ง ; $n(C) = 125$

จากโจทย์ คนชอบเพลไทยสากลและเพลงไทยเดิม 52 คน

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 52$

คนชอบเพลงไทยสากลและเพลงลูกทุ่ง 43 คน

เพราะฉะนั้น $n(A \cap C) = 43$

คนชอบเพลงไทยเดิมและเพลงลูกทุ่ง 57 คน

เพราะฉะนั้น $n(B \cap C) = 57$

เพราะว่าคนทั้ง 180 คน จะชอบเพลงอย่างน้อยหนึ่งประเภทในสามประเภท

เพราะฉะนั้น $n(A \cup B \cup C) = 180$

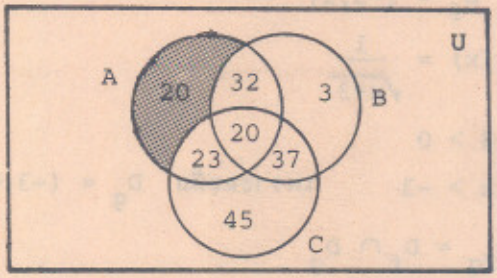
เพราะว่า $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B)$

$- n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

เพราะฉะนั้น $180 = 95 + 92 + 125 - 52 - 43 - 57 + n(A \cap B \cap C)$

$n(A \cap B \cap C) = 20$

การหาสมาชิกในแต่ละส่วนของเซต A, B, C ควรใช้แผนภาพของเวนน์ช่วยในการคำนวณจะเป็นวิธีที่ดีที่สุด



สรุป คนที่ชอบฟังเพลงไทยสากลเพียงอย่างเดียวเท่ากับ 20 คน

. **ตอบ** 3.

แนวคิด เพื่อประโยชน์ต่อการศึกษาพิจารณาทุกตัวเลือกดังนี้

1. **ผิด** เพราะว่า $\{0,1\}$ ไม่เป็นสับเซตของ B

เพราะฉะนั้น $A \notin P(B)$

2. **ผิด** เพราะว่า $\{1\}$ ไม่เป็นสับเซตของ B

เพราะฉะนั้น $\{1\} \notin P(B)$ ดังนั้น $\{1\} \notin P(A) \cap P(B)$

3. **ถูกต้อง** เพราะว่า $A \cap B = \{0\}$

และ $P(A \cap B) = \{\phi, \{0\}\}$ เพราะฉะนั้น $n(P(A \cap B)) = 2$

4. **ผิด** เพราะว่า $A \cup B = \{0,1,\{1\},\{0,1\}\}$

ดังนั้น $n(A \cup B) = 4$ เพราะฉะนั้น $n(P(A \cup B)) = 2^4 = 16$

. **ตอบ** 4.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$

พิจารณา $(3+x)(2-x) \geq 0$

$(x+3)(x-2) \leq 0$

$-3 \leq x \leq 2$

เพราะฉะนั้น $D_f = [-3,2]$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$$

พิจารณา $x+3 > 0$

$x > -3$ เพราะฉะนั้น $D_g = (-3,\infty)$

เพราะว่า $D_{fg} = D_f \cap D_g$

เพราะฉะนั้น $D_{fg} = [-3,2] \cap (-3,\infty) = (-3,2]$

การตัดตัวเลือก 1 คำถามข้อนี้ก็คือเซตคำตอบของอสมการ

$(3+x)(2-x) \geq 0$ และ $x+3 > 0$

ตรงกับตัวเลือกใด

หรือ $A = \{x \in \mathbf{R} \mid (3+x)(2-x) \geq 0$ และ $x+3 > 0\}$ คือเซตในข้อใด

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $(3+2)(2-2) \geq 0$ และ $2+3 > 0$

เพราะฉะนั้น $2 \in A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = -3$ ทำให้ $-3+3 = 0 \not> 0$

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 2 หาค่า fg ที่จุดบางจุดในตัวเลือก เช่น $x = 2$

$(fg)(2) = f(2)\,g(2) = (0)(\frac{1}{\sqrt{5}}) = 0$

ดังนั้น 2 เป็นสมาชิกของโดเมน fg

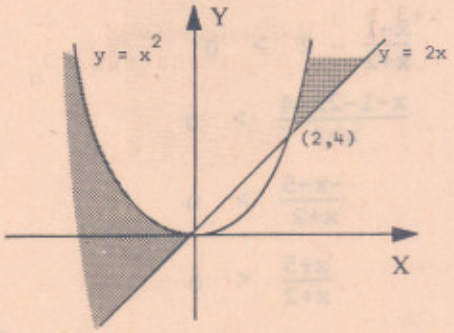
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เลือก $x = -3$ จะได้ว่า $g(-3)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-3 \notin D_{fg}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

6. **ตอบ** 3.

แนวคิด พิจารณาอาณาบริเวณ $y \leq x^2$ และ $y \geq 2x$ จากกราฟ



จุดตัดของเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = 2x$ คือ $(2,4)$

เพราะว่า $r = \{(x,y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 2x\}$ และดูจากกราฟ

เพราะฉะนั้น $D_r = (-\infty,0] \cup [2,\infty)$ $R_r = (-\infty,\infty)$

เพราะว่า $R_{r^{-1}} = D_r$ เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ r^{-1} คือ $(-\infty,0] \cup [2,\infty)$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $0 \leq (-1)^2$ และ $0 \geq 2(-1)$

เพราะฉะนั้น $(-1,0) \in r$ ดังนั้น $(0,-1) \in r^{-1}$

แสดงว่า $-1 \in R_{r^{-1}}$ แต่ -1 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 1. และ 2.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $(2,4) \in r$ เพราะฉะนั้น $(4,2) \in r^{-1}$

ดังนั้น $2 \in R_{r^{-1}}$

แต่ 2 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

แนวคิด **วิธีที่ 1** พิจารณาอสมการ $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$\frac{x-1}{x+2} - 2 > 0$$

$$\frac{x-1-2x-4}{x+2} > 0$$

$$\frac{-x-5}{x+2} > 0$$

$$\frac{x+5}{x+2} < 0$$

$-5 < x < -2$ **เพราะฉะนั้น** $S = (-5,-2)$

เพราะว่าขอบเขตบนน้อยสุดของ S **คือ** -2

เพราะฉะนั้น $a = -2$ **และ** $a^2+1 = (-2)^2+1 = 5$

วิธีที่ 2 **จำแนกค่า** x **เป็น 2 กรณีคือ** $x < -2$ **หรือ** $x > -2$

กรณีที่ 1 $x < -2$ **จะได้** $x+2 < 0$ **จาก** $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$x-1 < 2x+4$$

$$-5 < x$$

เพราะฉะนั้น $x \in (-\infty,-2) \cap (-5,\infty) = (-5,-2)$

กรณีที่ 2 $x > -2$ **จะได้** $x+2 > 0$ **จาก** $\frac{x-1}{x+2} > 2$

$$x-1 > 2x+4$$

$$-5 > x$$

เพราะฉะนั้น $x \in (-2,\infty) \cap (-\infty,-5) = \phi$

สรุป $S = \{x \mid \frac{x-1}{x+2} > 2\} = (-5,-2)$

8. **ตอบ** 1.

แนวคิด **วิธีที่ 1** $(2i)^{12} = 2^{12} i^{12} = 2^{12} = 4096$

$(1+i)^2 = -2i$

$(1+i)^{12} = ((1+i)^2)^6 = (-2i)^6$

$= (-2)^6 i^6 = (64)(-1) = -64$

เพราะว่า $(\frac{2i}{1+i})^{12} = \frac{(2i)^{12}}{(1+i)^{12}} = \frac{4096}{-64} = -64$

เพราะฉะนั้นส่วนจริงของ $(\frac{2i}{1+i})^{12}$ มีค่าเท่ากับ -64

วิธีที่ 2 $2i = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$(2i)^{12} = 2^{12}(\cos \frac{12\pi}{2} + i \sin \frac{12\pi}{2}) = 2^{12}$

$1+i = \sqrt{2}\,(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}(\cos \frac{12\pi}{4} + i \sin \frac{12\pi}{4})$

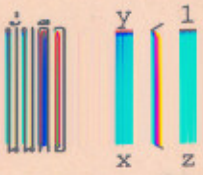
$= 2^6 \cos 3\pi = -2^6$

เพราะฉะนั้น $(\frac{2i}{1+i})^{12} = \frac{2^{12}}{-2^6} = -2^6 = -64$

9. **ตอบ** 1.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้จัดอยู่ในประเภทโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการเลือกค่า m,x,y,z ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\frac{x}{y} > z > 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{(\frac{x}{y})} < \frac{1}{z}$



เพื่อประโยชน์แก่ผู้อ่านจะยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าตัวเลือกที่เหลือผิด

2. เลือก $x = -4$, $y = -1$ และ $z = 1$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $(-4) \not> (-1)(1)$

3. เลือก $x = -4$, $y = -1$, $z = 1$ และ $m = -2$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $\frac{(-2)(-1)}{(-4)} \not> (-2)(1)$

4. เลือก $x = -4$, $y = -1$, $z = 1$ และ $m = -2$ จะได้

$\frac{(-4)}{(-1)} > 1 > 0$ แต่ $\frac{(-2)(-4)}{(-1)} = -8 \not> -2 = (-2)(1)$

10. **ตอบ** 2.

แนวคิด

> จากทฤษฎีบทเศษเหลือ (ดูได้ที่หน้า 77 ค.014)
>
> ถ้า $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$
>
> แล้วเศษที่เหลือจากการหาร $f(x)$ ด้วย $x-k$ คือ $f(k)$

ให้ $f(x) = x^3+2x^2-5x-2$ เพราะว่า $x-a$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ 4

และเศษที่เหลือจากการหาร $f(x)$ ด้วย $(x-a)$ คือ $f(a)$

เพราะฉะนั้น $f(a) = 4$

การหาค่า a ทำดังนี้ จาก $f(a) = 4$

$$a^3+2a^2-5a-2 = 4$$

$$a^3+2a^2-5x-6 = 0$$

ลองแทนค่า $a = -1$; $(-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0$

เพราะฉะนั้น $(a+1)$ หาร a^3+2a^2-5a-6 ลงตัว

และ $a^3+2a^2-5a-6 = (a+1)(a^2+a-6)$

$0 = (a+1)(a+3)(a-2)$

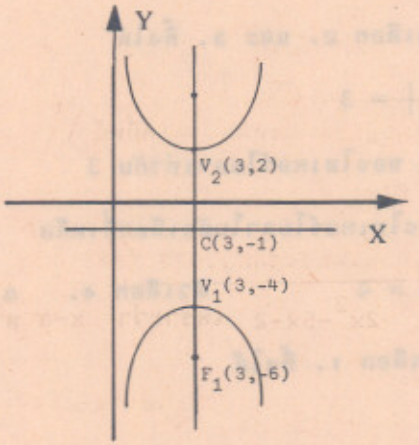
เพราะฉะนั้น a ที่ทำให้ $a^3+2a^2-5a-6 = 0$ คือ $a = -1,-3,2$

สรุป a ที่ทำให้ $x-a$ หาร x^3+2x^2-5x-2 เหลือเศษ 4 คือ

$a = -1,-3,2$ และผลบวกของค่า a ทั้งหมดเท่ากับ $(-1)+(-3)+2 = -2$

11. ตอบ 4.

แนวคิด เขียนจุดตามโจทย์กำหนดเพื่อสะดวกในการคำนวณ



เพราะว่าจุดยอดคือ $V_1(3,-4)$, $V_2(3,2)$

ดังนั้นจุดกึ่งกลางระหว่าง V_1, V_2 คือ $(3,-1)$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาคือ $C(3,-1)$

และ a,b,c ของไฮเพอร์โบลาคือ $a = |CV_1| = 3$

$c = |CF_1| = 5$, $b = \sqrt{c^2-a^2} = \sqrt{25-9} = 4$

เพราะว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y

เพราะฉะนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$$

ซึ่งตรงกับตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก เมื่อเขียนจุดยอด $V_1(3,-4)$, $V_2(3,2)$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางคือ $C(3,-1)$ พิจารณาจุดยอดของตัวเลือก

1. จุดยอด $(3,-1)$
2. จุดยอด $(-3,1)$
3. จุดยอด $(-3,1)$
4. จุดยอด $(3,-1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $|CV_1| = 3$

เพราะฉะนั้นค่า a ของไฮเพอร์โบลาเท่ากับ 3

พิจารณาค่า a ของไฮเพอร์โบลาในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 1. $a = 4$ ตัวเลือก 4. $a = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

12. **ตอบ** 2.

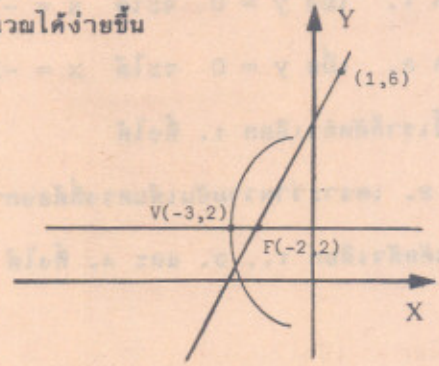
แนวคิด จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2-4y-4x = 8$

$$y^2-4y+4 = 4x+12$$

$$(y-2)^2 = 4(1)(x+3)$$

เพราะฉะนั้นพาราโบลาเปิดทางด้านขวา, แกนพาราโบลาขนานแกน X, จุดยอด $(-3,2)$, ค่า $c = 1$ และโฟกัส $(-2,2)$

วาดรูปดู เพื่อช่วยให้คำนวณได้ง่ายขึ้น



เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด (1,6) และ F(-2,2)

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $\frac{y-6}{x-1} = \frac{2-6}{-2-1} = \frac{4}{3}$

$$3y-18 = 4x-4$$

$$4x-3y+14 = 0$$

การตัดตัวเลือก จากรูปกราฟของเส้นตรงมีความชันเป็นบวก

พิจารณาความชันเส้นตรงแต่ละตัวเลือก

1. ความชัน = $\frac{3}{4}$
2. ความชัน = $\frac{4}{3}$
3. ความชัน = $-\frac{7}{2}$
4. ความชัน = $-\frac{2}{7}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด (-2,2) ลองแทนค่า $x = -2$, $y = 2$

ในตัวเลือก 1. $3(-2) - 4(2) + 21 = -6-8+21 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ข้อสังเกต 1. ประโยชน์ที่เห็นได้อย่างชัดเจนเมื่อเราวาดรูปโดยใช้สเกลจริง จากรูปเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (-3.5,0)

จากตัวเลือก 1. เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = -7$

จากตัวเลือก 2. เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = -3.5$

ด้วยเหตุผลนี้เราก็ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

2. เพราะว่าความชันเส้นตรงที่ต้องการเท่ากับ $\frac{6-2}{1+2} = \frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

13. **ตอบ** 3.

แนวคิด $\arctan(1+x) + \arctan(1-x) = \frac{\pi}{4}$

$$\tan(\arctan(1+x) + \arctan(1-x)) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(\arctan(1+x)) + \tan(\arctan(1-x))}{1 - \tan(\arctan(1+x))\tan(\arctan(1-x))} = 1$$

$$\frac{(1+x) + (1-x)}{1 - (1+x)(1-x)} = 1$$

$$2 = 1 - (1-x^2)$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$ ซึ่งเป็นสับเซตของ $(-2,2)$

14. **ตอบ** 4.

แนวคิด **วิธีที่ 1** จากสูตร $2\sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

เพราะฉะนั้น $2\sin(2\alpha)\sin(2\beta) = \cos(2\alpha-2\beta) - \cos(2\alpha+2\beta)$

$= \cos(2(\alpha-\beta)) - \cos(2(\alpha+\beta))$

$= [2\cos^2(\alpha-\beta) - 1] - [2\cos^2(\alpha+\beta) - 1]$

$= 2[\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)]$

ดังนั้น $\sin(2\alpha)\sin(2\beta) = \cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta)$

$= [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)][\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$

$= \left[\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right) - \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\right)\right]\left[\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{10}\right) + \left(\frac{3-4\sqrt{3}}{10}\right)\right]$

$= \left[\frac{8\sqrt{3}}{10}\right]\left[\frac{6}{10}\right] = \left(\frac{4\sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{12\sqrt{3}}{25}$

วิธีที่ 2 $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$ .....(1)

$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$

$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ .....(2)

(1)+(2) ; $2\cos\alpha\cos\beta = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} + \frac{3+4\sqrt{3}}{10} = \frac{6}{10}$

(2)-(1) ; $2\sin\alpha\sin\beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} - \frac{3-4\sqrt{3}}{10} = \frac{8\sqrt{3}}{10}$

เพราะฉะนั้น $\sin(2\alpha)\sin(2\beta) = (2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\beta\cos\beta)$

$= (2\sin\alpha\sin\beta)(2\cos\alpha\cos\beta) = \left(\frac{8\sqrt{3}}{10}\right)\left(\frac{6}{10}\right) = \frac{12\sqrt{3}}{25}$

5. **ตอบ** 2.

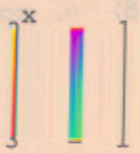
แนวคิด **เพราะว่า** $3^{x+\log_3 2} = 3^x(3^{\log_3 2}) = 3^x(2)$

เพราะฉะนั้น $9^x - 3^{x+\log_3 2} = -1$

$9^x - 2(3^x) + 1 = 0$

$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0$

$$(3^x-1)^2 = 0$$



$$x = 0$$

สรุป x ที่สอดคล้องกับสมการ $9^x - 3^{x+\log_3 2} = 1$ คือ $x = 0$

เป็นสมาชิกของเซต $(-1,1)$ ในตัวเลือก 2.

16. ตอบ 1.

แนวคิด $\log_{\frac{1}{9}} 9 = -1$

$$\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log_3 3 = \frac{1}{3}$$

$$\log 0.81 = \log \frac{81}{100} = \log 81 - \log 100$$

$$= \log 3^4 - 2 = 4\log 3 - 2 = 4c - 2$$

สรุป $\log_{\frac{1}{9}} 9 + \log_3 \sqrt[3]{3} - \log 0.81$

$$= -1 + \frac{1}{3} - (4c-2) = (2 - \frac{2}{3}) - 4c = \frac{4}{3} - 4c$$

17. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(3x+1)' - (2x-1)'(3x+1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)(3) - (2)(3x+1)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(2-1)(3) - (2)(4)}{(2-1)^2} = -5$$

$$g(x) = \sqrt{3x^2+1} = (3x^2+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}(3x^2+1)^{\frac{1}{2}-1}(3x^2+1)' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+1}} \cdot (6x)$$

$$g'(1) = \frac{6}{2\sqrt{3+1}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

อนุพันธ์ของ $[f(x)+g(x)]$ ที่ $x = 1$ คือ $[f(1)+g(1)]'$

เพราะว่า $[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

เพราะฉะนั้น $[f(1)+g(1)]' = f'(1) + g'(1)$

$$= -5 + \frac{3}{2} = -\frac{7}{2}$$

18. **ตอบ** 1.

แนวคิด ให้พจน์แรกของลำดับเรขาคณิต $a_1 = a$

เพราะฉะนั้น $a_n = ar^{n-1}$

จาก $\frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_n+a_{n-1}} = 2n$

จะได้ $\frac{a}{a+ar} + \frac{ar}{ar+ar^2} + \ldots + \frac{ar^{n-1}}{ar^{n-1}+ar^n} = 2n$

$$\frac{1}{1+r} + \frac{r}{r+r^2} + \ldots + \frac{r^{n-1}}{r^{n-1}+r^n} = 2n$$

$$\frac{1}{1+r} + \frac{1}{1+r} + \ldots + \frac{1}{1+r} = 2n$$

$$n\left[\frac{1}{1+r}\right] = 2n$$

$$\frac{1}{1+r} = 2$$

$$1 = 2+2r$$

$$2r = -1$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบจัดอยู่ในประเภทโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ a, r และ n นอกจากนั้นตัวเลือกยังสามารถนำขึ้นมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ด้วย

ลองเลือก $n = 1$ และ $a = 1 \longrightarrow a_2 = r$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1+r} = 2(1)$$

$$r = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3., 4. ทิ้ง

19. **ตอบ** 1.

แนวคิด $y = \sqrt[3]{x^2+2}$

$$y = (x^2+2)^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{\frac{1}{3}-1}(x^2+2)' = \frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2x)$$

ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt[3]{x^2+2}$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{dy}{dx}(x=5) = \frac{1}{3}(5^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2(5)) = \frac{1}{3}(27)^{-\frac{2}{3}}(10) = \frac{10}{27}$$

การหาจุดบนเส้นโค้งเมื่อ $x = 5$ จะได้

$$y = \sqrt[3]{5^2+2} = \sqrt[3]{27} = 3$$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสผ่านจุด $(5,3)$ และมีความชัน $\frac{10}{27}$

มีสมการเป็น $y-3 = (\frac{10}{27})(x-5)$

$$10x-27y+31 = 0$$

การตัดตัวเลือก เมื่อเรารู้ว่าความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ $\frac{10}{27}$

ต่อไปดูความชันของแต่ละตัวเลือกพบว่า

1. ความชัน $= \frac{10}{27}$
2. ความชัน $= \frac{5}{13}$
3. ความชัน $= \frac{27}{10}$
4. ความชัน $= \frac{13}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้ง

20. **ตอบ** 2.

แนวคิด ในการผลิต x ชิ้น ต้นทุนเท่ากับ $16 + 6x + 0.2x^{\frac{3}{2}}$ บาท

ขายได้เงินทั้งหมดเท่ากับ $24x$ บาท

ให้ $f(x)$ = กำไรในการผลิต x ชิ้น $= 24x - (16 + 6x + 0.2x^{\frac{3}{2}})$

$= 18x - 16 - 0.2x^{\frac{3}{2}}$

จะได้ $f'(x) = 18 - 0.3x^{\frac{1}{2}}$

$f''(x) = -0.3(\frac{1}{2})x^{-\frac{1}{2}} = \frac{-0.15}{\sqrt{x}}$

การหาค่าวิกฤต $f'(x) = 0$

$18 - 0.3x^{\frac{1}{2}} = 0$

$0.3\sqrt{x} = 18$

$\sqrt{x} = 60$

$x = 3600$

เพราะว่า $f''(3600) = \frac{-0.15}{\sqrt{3600}} < 0$ เพราะฉะนั้น $f(3600)$

เป็นค่าสูงสุด นั่นคือ $N = 3600$ ทำให้ได้กำไรสูงสุด

หมายเหตุ การแสดงว่า $f(3600)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ถ้า $x < 3600$ แล้ว $\sqrt{x} < 60$

$0.3\sqrt{x} < 18$

$0 < 18 - 0.3\sqrt{x}$

$0 < f'(x)$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,3600)$

ถ้า $x > 3600$ แล้ว $\sqrt{x} > 60$

$0.3\sqrt{x} > 18$

$0 > 18 - 0.3\sqrt{x}$

$0 > f'(x)$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(3600,\infty)$

สรุป $f(3600)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

21. **ตอบ** 4.

แนวคิด $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ จะได้ $|\bar{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

จาก $a\cdot(\bar{a} - \bar{b}) = 23$

$\bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b} = 23$

$|\bar{a}|^2 - \bar{a}\cdot\bar{b} = 23$

$\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|^2 - 23 = 5^2 - 23 = 2$

เพราะว่า $\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$

$|\bar{b}|\cos\theta = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|} = \dfrac{2}{5} = 0.4$

การตัดตัวเลือก จาก $|\bar{a}|^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = 25$

และ $\bar{a}\cdot(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}\cdot\bar{a} - \bar{a}\cdot\bar{b}$

$$23 = 25 - \bar{a}\cdot\bar{b}$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2$$

เพราะฉะนั้น θ เป็นมุมแหลม , $\cos\theta > 0$ ดังนั้น $|\bar{b}|\cos\theta > 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ๑. และ ๒. ทิ้งได้

22. **ตอบ** 3.

แนวคิด $M_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & n \\ -\frac{1}{n} & n+1 \end{bmatrix}$

$$a_n = \det(M_n) = \frac{1}{n}(n+1) + 1 = 2 + \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (2 + \frac{1}{n}) = 2$$

23. **ตอบ** 4.

แนวคิด **วิธีที่ ๑** โดยการใช้กฎของคราเมอร์

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(4-0) - (4)(-4-0) + (1)(6-6)}{(2)(4-0) - (4)(2-0) + (1)(-3+2)}$$

$$= \frac{4 + 16 + 0}{8 - 8 - 1} = -20$$

วิธีที่ 2

$$2x + 4y + z = 1 \quad \text{.....(1)}$$

$$x + 2y = -2 \quad \text{.....(2)}$$

$$-x - 3y + 2z = 3 \quad \text{.....(3)}$$

$(-2)(1)$; $-4x - 8y - 2z = -2$ .....(4)

$(3)+(4)$; $-5x - 11y = 1$ .....(5)

$2(5)$; $-10x - 22y = 2$ .....(6)

$11(2)$; $11x + 22y = -22$ .....(7)

$(6)+(7)$; $x = -20$

24. **ตอบ** 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เพื่อให้เข้าใจโดยง่ายขออธิบายด้วยการเขียนสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$M_{23}(A)$ คือดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการตัดแถว 2 และหลัก 3 ทิ้งไป

$$M_{23}(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} = 5$

เพราะว่า $2A^t = \begin{bmatrix} 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & 2a_{41} \\ 2a_{12} & 2a_{22} & 2a_{32} & 2a_{42} \\ 2a_{13} & 2a_{23} & 2a_{33} & 2a_{43} \\ 2a_{14} & 2a_{24} & 2a_{34} & 2a_{44} \end{bmatrix}$

และโดยการตัดแถวที่ 3 และหลักที่ 2 ของเมตริกซ์ $2A^t$ ทิ้ง

เพราะฉะนั้น $M_{32}(2A^t) = \begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{31} & 2a_{41} \\ 2a_{12} & 2a_{32} & 2a_{42} \\ 2a_{14} & 2a_{34} & 2a_{44} \end{vmatrix}$

$= 2^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{32} & a_{42} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} = 8 \left| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix}^t \right|$

$= 8(5) = 40$

วิธีที่ 2 โดยการใช้เหตุผล เมื่อ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$

เพราะว่าเมตริกซ์ที่ได้จาก A โดยการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ทิ้ง

เท่ากับเมตริกซ์ที่ได้จาก A^t โดยการตัดแถวที่ j และหลักที่ i ทิ้ง

เพราะฉะนั้น $M_{ij}(A) = M_{ji}(A^t)$

เพราะว่า $M_{ij}(kA)$ = ดีเทอร์มินันท์ของเมตริกซ์ที่ได้จากการตัดแถว ที่ i และหลักที่ j ของเมตริกซ์ kA ทิ้งไป

เพราะฉะนั้น $M_{ij}(kA) = k^{n-1} M_{ij}(A)$ โดยการใช้เหตุผลข้างต้น

$M_{32}(2A^t) = 2^{4-1} M_{32}(A^t) = 8M_{23}(A) = 8(5) = 40$

การตัดตัวเลือก เราสามารถเลือกเมตริกซ์ที่สอดคล้องกับโจทย์เพื่อช่วย

ในการตัดตัวเลือกดังนี้ เพราะว่า $M_{23}(A) = 5$

เพราะฉะนั้นเราเลือก $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ก็จะได้ว่า $M_{23}(A) = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$ ตามโจทย์กำหนด

เพราะว่า $A^t = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$2A^t = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $M_{32}(2A^t) = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 40$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

25. **ตอบ** 3.

แนวคิด การจัดลำดับพิจารณาเป็นขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 จัดลำดับกลุ่มนักเรียนทั้งสามกลุ่มในแนววงกลมทำได้ $(3-1)!$ วิธี

ขั้นที่ 2 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 4 จัดลำดับได้ $3!$ วิธี

ขั้นที่ 3 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 5 จัดลำดับได้ $3!$ วิธี

ขั้นที่ 4 ภายในกลุ่มมัธยมศึกษาปีที่ 6 จัดลำดับได้ $3!$ วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด $= (3-1)!\,3!\,3!\,3! = 432$

26. **ตอบ 4.**

แนวคิด ให้ $K = 3^{20}-5\cdot3^{16}\cdot2^3+5\cdot3^{12}\cdot2^7-5\cdot3^8\cdot2^{10}+5\cdot3^4\cdot2^{12}-2^{15}$

เพราะว่า K มีพจน์อยู่ 6 พจน์ เพราะฉะนั้นเราควรพิจารณาผลบวกนี้ในรูปของ

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

โดยการเปรียบเทียบกับผลบวกของโจทย์

เราเลือกให้ $a^5 = 3^{20} = (3^4)^5$; $a = 3^4$

และ $b^5 = -2^{15} = (-2^3)^5$; $b = -2^8$

จาก a และ b จะได้ว่า

$3^{20} - 5\cdot3^{16}\cdot2^3 + 5\cdot3^{12}\cdot2^7 - 5\cdot3^8\cdot2^{10} + 5\cdot3^4\cdot2^{12} - 2^{15}$

$= (3^4)^5 - 5(3^4)^4(2^3) + 10(3^4)^3(2^3)^2 - 10(3^4)^2(2^3)^3$

$+ 5(3^4)(2^3)^4 - (2^3)^5 = (3^4 - 2^3)^5$

เพราะฉะนั้น $K = (3^4 - 2^3)^5$

สรุป รากที่ 5 ตัวหนึ่งของ K คือ $3^4 - 2^3 = 81 - 8 = 73$

27. **ตอบ** 2.

แนวคิด **ข้อมูลชุด A** ; 1,2,2,3,3,3,4,4,5

มัธยฐาน = 3 $\quad \bar{X}_A = \frac{27}{9} = 3$

ข้อมูลชุด B ; 1,1,1,2,2,2,3,4,5,5,5,5

มัธยฐาน = 2 $\quad \bar{X}_B = \frac{36}{12} = 3$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 2.

28. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่า ค่ามาตรฐานของคะแนน $x = 60$ มีค่าเท่ากับ $z = 0$ เพราะฉะนั้นจากสูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $0 = \frac{60 - \bar{x}}{s}$

นั่นคือ $\bar{x} = 60$

เพราะว่า ค่ามาตรฐานของคะแนน $x = 85$ มีค่าเท่ากับ $z = 1$

เพราะฉะนั้น $\quad z = \frac{x - \bar{x}}{s}$

$$1 = \frac{85 - 60}{s}$$

$$s = 25$$

สรุปสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

29. **ตอบ** 3.

แนวคิด จากข้อมูลเราให้ s เป็นตัวแปรตาม t เป็นตัวแปรอิสระ ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลเป็นแบบเส้นตรง $\hat{s} = mt + c$ ซึ่งมีสมการปกติเป็น

t	s	t^2	st
1	2	1	2
2	8	4	16
3	18	9	54
4	32	16	128
$\Sigma t = 10$	$\Sigma s = 60$	$\Sigma t^2 = 30$	$\Sigma st = 200$

$$m \Sigma t + nc = \Sigma s$$

$$m \Sigma t^2 + c \Sigma t = \Sigma st$$

เพราะฉะนั้น $10m + 4c = 60$ .....(1)

$30m + 10c = 200$ .....(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $m = 10$, $c = -10$

เพราะฉะนั้น $\hat{s} = 10t - 10$

เมื่อ $t = 1.5$ จะได้ $\hat{s} = 10(1.5) - 10 = 5$

30. **ตอบ** 4.

แนวคิด เมื่อเปลี่ยนหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล จะได้ข้อมูลดังนี้

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	พ.ศ. 2530	พ.ศ. 2536
สบู่ (โหล)	132	156
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

จากข้อมูลในตารางที่ได้ใหม่

ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน)

$$= \left[\frac{156 + 210 + 80 + 50}{132 + 190 + 75 + 45}\right] \times 100 = \left(\frac{496}{442}\right) \times 100 = 112.22$$

หมายเหตุ แนวทางในการเฉลยข้างต้นเป็นการคำนวณตามตัวเลขที่เปลี่ยนไป โดยไม่สนใจว่าหน่วยของสินค้าทั้ง 4 ชนิด สอดคล้องสัมพันธ์กันหรือไม่

ซึ่งในความเป็นจริงนั้น สินค้าที่มีลักษณะการใช้และการขายคล้ายกันนั้น การกำหนดราคาต่อหน่วยควรจะเหมือนกันและสอดคล้องกัน เช่น 1 ก้อน, 1 หลอด, 1 ขวด, 1 ถัง, 1 ถุง

เนื่องจาก ราคาต่อหน่วยของสบู่ให้คิดเป็นโหล

ดังนั้นราคาต่อหน่วยของยาย้อมผม, แชมพู, ยาสีฟัน เราก็ควรจะคิดราคาต่อหน่วยเป็นโหล ซึ่งการคิดแบบนี้จะมีผลทำให้คำตอบเป็น 109.97 % เหมือนเดิม

อย่างไรก็ตาม จากโจทย์บังคับให้เราเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล

ดังนั้นคำตอบตามตัวเลขที่คำนวณข้างต้นจึงมีค่าเท่ากับ 112.22 %

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. **ตอบ** 4.

แนวคิด ให้ q แทนประพจน์ "สมชายไปว่ายน้ำ"
r แทนประพจน์ "สมหญิงไปดูภาพยนตร์"
s แทนประพจน์ "สมทรงดูโทรทัศน์"
t แทนประพจน์ "สมพรนอนพักผ่อน"

เหตุ 1. ถ้าสมชายไปว่ายน้ำแล้วสมหญิงไปดูภาพยนตร์ คือ $q \to r$

2. สมทรงไม่ดูโทรทัศน์ คือ $\sim s$

3. ถ้าสมชายไม่ไปว่ายน้ำแล้วสมพรไม่นอนพักผ่อน คือ $\sim q \to \sim t$

4. สมพรนอนพักผ่อนหรือสมทรงดูโทรทัศน์ คือ $t \vee s$

พิจารณาประพจน์ของแต่ละตัวเลือก

1. สมพรไม่นอนพักผ่อน คือ $\sim t$
2. สมชายไม่ไปว่ายน้ำ คือ $\sim q$
3. สมชายไปว่ายน้ำและสมหญิงไม่ไปดูภาพยนตร์ คือ $q \wedge \sim r$
4. สมพรนอนพักผ่อนและสมหญิงไปดูภาพยนตร์ คือ $t \wedge r$

จากเหตุที่กำหนดให้ $q \to r$, $\sim s$, $\sim q \to \sim t$ และ $t \vee s$ เป็นจริง

เพราะว่า $\sim s$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น s เป็นเท็จ

เพราะว่า $t \vee s$ เป็นจริง และ s เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น t เป็นจริง

หมายเหตุ เมื่อคิดเลขถึงตรงนี้ เราสามารถตัดตัวเลือก 1.ทิ้งได้ ด้วยเหตุผลว่า t เป็นจริง ดังนั้น $\sim t$ ต้องเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (\sim t)$

ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาต่อไป t เป็นจริง ดังนั้น $\sim t$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $\sim q \to \sim t$ เป็นจริง และ $\sim t$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $\sim q$ เป็นเท็จ

หมายเหตุ ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีกแล้ว เพราะว่า

$[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (\sim q)$

ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาต่อไป $\sim q$ เป็นเท็จ ดังนั้น q เป็นจริง

เพราะว่า $q \to r$ เป็นจริง และ q เป็นจริง เพราะฉะนั้น r เป็นจริง

สรุป $t \wedge r$ เป็นจริง และ $q \wedge \sim r$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น

$[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (q \wedge \sim r)$ ไม่สมเหตุสมผล

$[(q \to r) \wedge (\sim s) \wedge (\sim q \to \sim t) \wedge (t \vee s)] \to (t \wedge r)$ สมเหตุสมผล

สรุป P คือข้อความในตัวเลือก 4. จึงจะทำให้การอ้างเหตุผลข้างต้นนี้สมเหตุสมผล

32. **ตอบ** 2.

แนวคิด พิจารณาอสมการ $x^4+3x^2-10 = 0$

$$(x^2+5)(x^2-2) = 0$$

$$x^2 = -5, 2$$

เพราะฉะนั้น $x = \sqrt{5}i , -\sqrt{5}i , \sqrt{2} , -\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $\{x \in C \mid x^4+3x^2-10 = 0\} = \{\sqrt{5}i , -\sqrt{5}i , \sqrt{2} , -\sqrt{2}\}$

พิจารณาตัวเลือก 1 U = เซตของจำนวนอตรรกยะ ; $\sqrt{2} \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U [x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

พิจารณาตัวเลือก 2 $U = \{x \in R \mid |x| > 2\} = (-\infty,-2) \cup (2,\infty)$

เพราะว่า $\sqrt{5}i , -\sqrt{5}i , \sqrt{2} , -\sqrt{2} \notin U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U [x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นเท็จ

เพื่อประโยชน์ต่อผู้อ่านขอพิจารณาตัวเลือกที่เหลือดังนี้

ตัวเลือก 3 $U = \{z \in C \mid 1 \leq |z| < 2\}$

เพราะว่า $1 \leq |\sqrt{2}| < 2$ นั่นคือ $\sqrt{2} \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U [x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

ตัวเลือก 4 $U = \{z \in C \mid 2 \leq |z| < 3\}$

เพราะว่า $2 \leq |\sqrt{5}i| < 3$ นั่นคือ $\sqrt{5}i \in U$

เพราะฉะนั้น $\exists x \in U [x^4+3x^2-10 = 0]$ เป็นจริง

33. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาโดเมนของ $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ จาก $4-x^2 \geq 0$

$$x^2-4 \leq 0$$

$$(x+2)(x-2) \leq 0$$

$$-2 \leq x \leq 2$$ เพราะฉะนั้น $D_g = [-2,2]$

เพราะว่า $D_f = (-\infty,\infty)$ และ $D_g \cap D_f = [-2,2]$

เพราะฉะนั้นเราพิจารณาค่า x ที่ $f(x) \leq g(x)$ เมื่อ $-2 \leq x \leq 2$ เท่านั้น

กรณีที่ 1 $-2 \leq x \leq -1$

จะได้ $-4 \leq 2x \leq -2$

$$-2 \leq 2x+2 \leq 0$$

เพราะฉะนั้น $2x+2 < \sqrt{4-x^2}$ แน่นอน

กรณีที่ 2 $-1 < x \leq 2$

$$-2 < 2x \leq 4$$

$$0 < 2x+2 \leq 2$$

พิจารณา $2x+2 \leq \sqrt{4-x^2}$

$$4x^2+8x+4 \leq 4-x^2$$

$$5x^2+8x \leq 0$$

$$x(5x+8) \leq 0$$

$$-\frac{8}{5} \leq x \leq 0$$

จากกรณีที่ 2 จะได้ $x \in (-1,2] \cap [-\frac{8}{5},0]$ นั่นคือ $x \in (-1,0]$

จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้ว่า

$$\{x \mid f(x) \leq g(x)\} = [-2,-1] \cup (-1,0] = [-2,0]$$

เพราะฉะนั้น $a = -2$ และ $b = 0$ ทำให้ $a+b = -2$

34. ตอบ 1.

แนวคิด การหา f^{-1} ; สมมติ $y = x^3+1 \longrightarrow x^3 = y-1$

$\longrightarrow x = (y-1)^{\frac{1}{3}}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}}$

เพราะว่า $(f^{-1} \circ (f \circ g))(x) = f^{-1}((f \circ g)(x))$

$((f^{-1} \circ f) \circ g)(x) = f^{-1}(x^3+3x^2+3x+2)$

$g(x) = (x^3+3x^2+3x+2-1)^{\frac{1}{3}} = \left[(x+1)^3\right]^{\frac{1}{3}} = x+1$

เพราะฉะนั้น $(g \circ f^{-1})(-7) = g(f^{-1}(-7)) = g((-7-1)^{\frac{1}{3}})$

$= g(-2) = -2+1 = -1$

วิธีลัด $(f \circ g)(x) = x^3+3x^2+3x+2 = x^3+3x^2+3x+1+1$

$f(g(x)) = (x+1)^3 + 1$

เพราะว่า $f(x) = x^3+1$

ดังนั้น $f((x+1)) = (x+1)^3+1 = f(g(x))$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะฉะนั้น $g(x) = x+1$

เพราะว่า $f(-2) = -7$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-7) = -2$

สรุป $(g \circ f^{-1})(-7) = g(f^{-1}(-7)) = g(-2) = -1$

35. **ตอบ** 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่าวิธีจริง

และเพื่อให้ง่ายขึ้นเราใช้เงื่อนไขเท่ากับในการเลือกสมาชิกของ r_1 และ r_2

พิจารณา $y = \sqrt{x-3}$ ค่า (x,y) ที่เป็นไปได้คือ

$(x,y) = (3,0), (4,1), (7,2), (12,3), \ldots$

เพราะฉะนั้น $(3,0),(4,1),(7,2) \in r_1$

พิจารณา $x + \sqrt{y^2-9} = 0$ และ $y = 3$ ค่าของ (x,y) ที่เป็นไปได้คือ $(x,y) = (0,3)$ เพราะฉะนั้น $(0,3) \in r_2$

การตัดตัวเลือก 1 เพราะว่า $(x,y) = (3,0) \in r_1$ และ $y = 0 \neq 3$ ดังนั้น $(3,0) \in r_2$ เพราะฉะนั้น $r_1 \notin r_2$

การตัดตัวเลือก 2 เพราะว่า $(x,y) = (0,3) \in r_2$ และ $3 \neq \sqrt{0-3}$ ดังนั้น $(0,3) \notin r_1$ เพราะฉะนั้น $r_2 \notin r_1$

การตัดตัวเลือก 3 เลือก $(4,1)$ จาก r_1

ต่อไปดูว่า $(4,1) \in r_2^{-1}$ ได้หรือไม่

สมมติ $(4,1) \in r_2^{-1}$ ดังนั้น $(1,4) \in r_2$

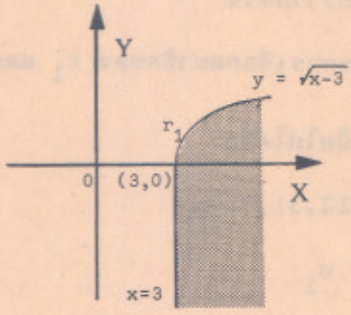
เพราะว่า $(x,y) \in r_2$ ได้นั้น $x \leqslant 0$ เพราะฉะนั้น $(1,4) \notin r_2$

นั่นคือ $(4,1) \notin r_2^{-1}$ สรุป $r_1 \notin r_2^{-1}$

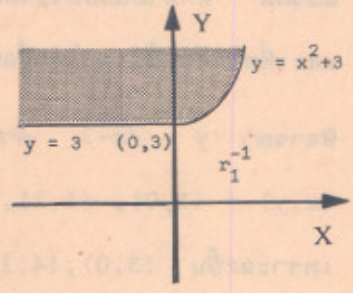
ต่อไปเหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวเลือกเป็นคำตอบได้เลย

ต่อไปลองเปรียบเทียบกับวิธีจริง ซึ่งการหาคำตอบโดยวิธีจริงนั้นการเขียนกราฟแสดงบริเวณ r_1, r_2, r_1^{-1} และ r_2^{-1} เป็นวิธีที่เหมาะสมวิธีหนึ่ง

กราฟแสดงบริเวณของ r_1



กราฟแสดงบริเวณของ r_1^{-1}



พิจารณา $x + \sqrt{y^2-9} = 0$

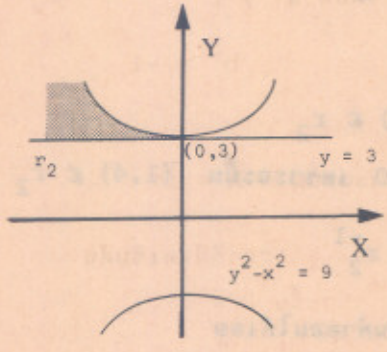
$$x = -\sqrt{y^2-9}$$

$$x^2 = y^2-9$$

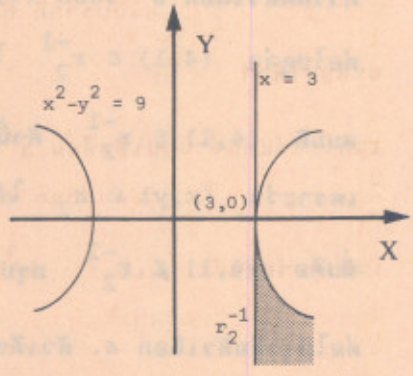
$$y^2-x^2 = 9$$

เพราะฉะนั้นพิจารณากราฟแสดงบริเวณของ r_2 จากไฮเพอร์โบลา $y^2-x^2 = 9$ ดังนี้

กราฟแสดงบริเวณของ r_2



กราฟแสดงบริเวณของ r_2^{-1}



จากกราฟทั้ง 4 รูป จะได้ว่า $r_1 \not\subset r_2$, $r_2 \not\subset r_1$, $r_1 \not\subset r_2^{-1}$

แต่ $r_2 \subset r_1^{-1}$

36. ตอบ 1.

แนวคิด การหารากที่ 6 ของ 1

$$z^6 = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$

$$z = \cos\frac{2k\pi}{6} + i\sin\frac{2k\pi}{6} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$

$$= \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \quad ; \quad k = 0,1,2,\ldots,5$$

สำหรับค่า $k = 0,1,2,\ldots,5$

$$z = \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}$$

$$z^3 = \left[\cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right]^3 = \cos\frac{3k\pi}{3} + i\sin\frac{3k\pi}{3}$$

$$= \cos k\pi + i\sin k\pi = \cos k\pi$$

เพราะฉะนั้น $\{z^3 \mid z$ เป็นรากที่ 6 ของ $1\}$

$$= \{\cos k\pi \mid k = 0,1,2,\ldots,5\} = \{1,-1\}$$

ดังนั้นค่าของ a,b ที่เป็นรากที่ 6 ของ 1 โดยที่ $a^3 \neq b^3$

จะต้องได้ว่า $a^3, b^3 \in \{1,-1\}$ ให้ $a^3 = 1$, $b^3 = -1$

เวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน $a^3 = 1$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0,0) และจุดปลายที่จุด (1,0) เพราะฉะนั้น $\overline{A} = \overline{i}$

เวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน $b^3 = -1$ หมายถึงเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด (0,0) และจุดปลายที่จุด (-1,0) เพราะฉะนั้น $\overline{B} = -\overline{i}$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \dfrac{\overline{A}\cdot\overline{B}}{|\overline{A}|\cdot|\overline{B}|} = \dfrac{(\overline{i})\cdot(-\overline{i})}{|\overline{i}|\cdot|-\overline{i}|} = -1$

วิธีลัด การหาค่า a^3 และ b^3 สามารถทำได้ดังนี้

ให้ a,b เป็นรากที่ 6 ของ 1

ดังนั้น $a^6 = 1$ และ $b^6 = 1$

$(a^3)^2 = a^6 = 1$ และ $(b^3)^2 = b^6 = 1$

$a^3 = \pm 1$ และ $b^3 = \pm 1$

เพราะว่า $a^3 \neq b^3$ เพราะฉะนั้นให้ $a^3 = 1$, $b^3 = -1$

37. **ตอบ** 4.

แนวคิด $U = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0 และ $-100 \leq x \leq 100\}$

$A = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(x,21) = 3\}$

$= \{x \in U \mid 3|x$ และ $7 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid 3|x\} - \{x \in U \mid 3|x$ และ $7|x\}$

$= \{x \in U \mid 3|x\} - \{x \in U \mid 21|x\}$

ให้ $B = \{x \in U \mid 3|x\}$

$= \{3(-33), 3(-32), 3(-31), \ldots, 3(32), 3(33)\}$

$C = \{x \in U \mid 21|x\}$

$= \{21(-4), 21(-3), \ldots, 21(4)\}$

$n(B) = 66$ $n(C) = 8$

เพราะว่า $A = B - C$

เพราะฉะนั้น $n(A) = n(B - C)$

$= n(B) - n(C) = 66 - 8 = 58$

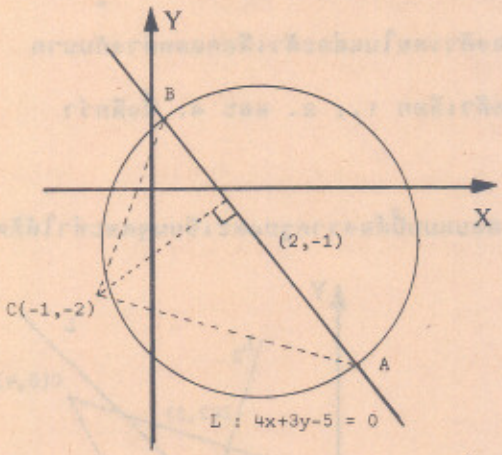
38. ตอบ 3.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$$

เป็นสมการวงกลมรัศมี 3 และจุดศูนย์กลางที่ (2,-1)



เพราะว่า L ผ่านจุด (2,-1) และมีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง L คือ $y+1 = (-\frac{4}{3})(x-2)$

$$3y+3 = -4x+8$$

$$4x+3y-5 = 0$$

เส้นตรง L ผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม (2,-1) และตัดวงกลมที่จุด A,B

เพราะฉะนั้นความยาว AB = ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม = 6

ความสูงของสามเหลี่ยม ABC = ระยะทางจากจุด C มายังเส้นตรง L

$$= \frac{|4(-1) + 3(-2) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

สรุปพื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot$ สูง $= \frac{1}{2}(6)(3) = 9$

การตัดตัวเลือก 1. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง (2,-1) และรัศมี 3

2. ลากเส้นตรง L : $4x+3y-5 = 0$

3. วัดความยาว AB ได้ 6

4. วัดระยะทางจาก C(-1,-2) มายัง L ได้ 3

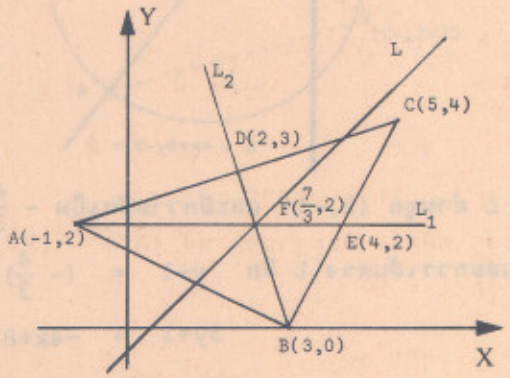
เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}(6)(3) = 9$

เพราะว่าค่าของตัวเลขในแต่ละตัวเลือกแตกต่างกันมาก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งดีกว่า

39. **ตอบ** 1.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ต้องวาดรูปและเขียนจุดจะทำให้คิดง่ายขึ้น



จุดกึ่งกลางของด้าน AC คือ $(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+4}{2}) = (2,3)$

จุดกึ่งกลางของด้าน BC คือ $(\frac{3+5}{2}, \frac{0+4}{2}) = (4,2)$

L_1 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A(-1,2) และ E(4,2)

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง L_1 คือ $y = 2$

L_2 เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด B(3,0) และ D(2,3) คือ

$$\frac{y-0}{x-3} = \frac{3-0}{2-3}$$

$$3x+y-9 = 0$$

การหาจุดตัด L_1 และ L_2 แทนค่า $y = 2$ ลงในสมการ L_2

$$3x+2-9 = 0$$

$$x = \frac{7}{3}$$

เพราะฉะนั้นมัธยฐานตัดกันที่จุดที่ L_1 ตัดกับ L_2 คือ $F(\frac{7}{3}, 2)$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, \frac{7}{3})$ และมีความชันเท่ากับ 1 คือ

$$y-2 = (1)(x-\frac{7}{3})$$

$$3y-6 = 3x-7$$

$$3x-3y-1 = 0$$

การตัดตัวเลือก 1. 1. เขียนสามเหลี่ยม ABC

2. หาพิกัด E ได้เป็น (4,2) และลาก AE
3. ให้ F เป็นจุดตัดของมัธยฐาน
4. เพราะว่าจุดตัดของมัธยฐานจะแบ่ง $|AF| : |FE| = 2 : 1$ และ $|AE| = 5$

   เพราะฉะนั้นพิกัด F คือ $(-1+2(\frac{5}{3}), 2) = (\frac{7}{3}, 2)$
5. เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด F มีความชัน 1

   เพราะฉะนั้นลากเส้นตรงผ่านจุด F และทำมุม 45° กับแกน X
6. จากรูปที่ได้พบว่าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด (0.3,0) และตัดแกน Y ที่จุด (0,-0.3)

พิจารณาจุดตัดแกน X และแกน Y ของตัวเลือก

1. $(0, -\frac{1}{3})$, $(\frac{1}{3}, 0)$ 2. $(0, -\frac{1}{3})$, $(-\frac{1}{3}, 0)$

3. $(0, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 0)$ 4. $(0, \frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, 0)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

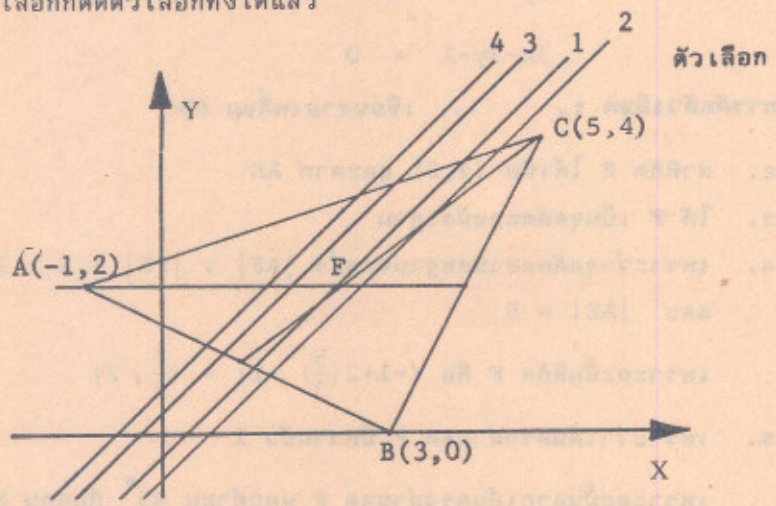
การตัดตัวเลือก 2 จากการที่เราทราบว่า $F(\frac{7}{3}, 2)$ ต้องอยู่บนเส้นตรง เพราะฉะนั้นเราใช้การแทนค่า $x = \frac{7}{3}$, $y = 2$ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) - 1 = 0$ 2. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) + 1 \neq 0$

3. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) - 2 \neq 0$ 4. $3(\frac{7}{3}) - 3(2) + 2 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้วาดรูปทั้งโจทย์และเส้นตรงในตัวเลือกก็ตัดตัวเลือกทิ้งได้แล้ว



40. **ตอบ** 3.

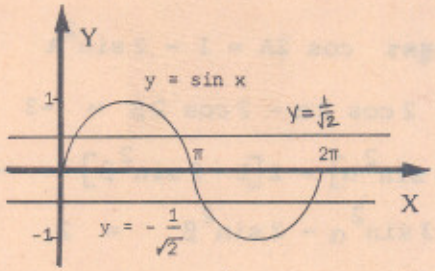
แนวคิด พิจารณาอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$

$(2\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 2) \geq 0$

เพราะว่า $\sin^2 x + 2 \neq 0$ **เพราะฉะนั้น** $2\sin^2 x - 1 \geq 0$

$\sin^2 x \geq \frac{1}{2} \longrightarrow \sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

พิจารณาจากกราฟ $y = \sin x$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$



จุดตัดของ $y = \sin x$ และ $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $x = \frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ก็ต่อเมื่อ $x \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

จุดตัดของ $y = \sin x$ และ $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ $x = \frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ก็ต่อเมื่อ $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$ คือ

$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

ซึ่งเป็นสับเซตของ $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$

การตัดตัวเลือก เลือกค่า x ที่แทนค่าได้ง่ายๆ เช่น

$x = \frac{3\pi}{2}$ ทำให้ $2\sin^4 \frac{3\pi}{2} + 3\sin^2 \frac{3\pi}{2} - 2 = 2+3-2 = 3 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3\pi}{2}$ ได้ แต่ $\frac{3\pi}{2}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบไม่เป็นสับเซตของตัวเลือก 1. แน่นอน เราจึง

ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้ แทนค่า $x = \frac{5\pi}{4}$ หรือ $\frac{7\pi}{4}$ เพื่อจะได้จำแนกตัวเลือกได้

เพราะว่า $2\sin^4 \frac{7\pi}{4} + 3\sin^2 \frac{7\pi}{4} - 2 = \frac{2}{4} + \frac{3}{2} - 2 = 0 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{7\pi}{4}$ ได้ แต่ $\frac{7\pi}{4}$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

41. ตอบ 4.

แนวคิด จากสูตร $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$

เพราะฉะนั้น $2\cos 2\alpha - 2\cos 2\beta = -3$

$$3[1 - 2\sin^2\alpha] - 2[1 - 2\sin^2\beta] = -3$$

$$3\sin^2\alpha - 2\sin^2\beta = 2 \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

จากโจทย์ $\sin\alpha - 2\sin\beta = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

เพราะฉะนั้น แทนค่า $\sin\alpha = 2\sin\beta$ ใน (1)

$$3[2\sin\beta]^2 - 2\sin^2\beta = 2$$

$$\sin^2\beta = \frac{1}{5}$$

เพราะว่า $\beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

และ $\sin\alpha = 2\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

นอกจากนั้น $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ และ $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

สรุป $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 1$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ และ $\sin(\alpha+\beta) = 0$ ได้

ก็ต่อเมื่อ ($\alpha = 0$ และ $\beta = 0$) หรือ ($\alpha = \frac{\pi}{2}$ และ $\beta = \frac{\pi}{2}$)

แต่ $3\cos 0 - 2\cos 0 = 3-2 = 1 \neq -3$

และ $3\cos 2(\frac{\pi}{2}) - 2\cos 2(\frac{\pi}{2}) = -3+2 = -1 \neq -3$

เพราะฉะนั้น $\sin(\alpha+\beta) = 0$ ไม่ได้เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

42. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาเซต A $\log(x-2) + \log(x+2) - \log 5 = 0$

$$\log (x-2)(x+2) = \log 5$$
$$(x-2)(x+2) = 5$$
$$x^2 = 9$$
$$x = 3, -3$$

เพราะว่า $x = -3$ ไม่ได้ ($\log(-3-2)$ หาค่าไม่ได้)

เพราะฉะนั้น $A = \{3\}$

พิจารณาเซต B $(\log_3 4)(\log_4 5)(\log_5 x) = 1$

$$\frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log x}{\log 5} = 1$$
$$\log x = \log 3$$
$$x = 3$$

เพราะฉะนั้น $B = \{3\}$ สรุป $A = B$ ถูกต้อง

43. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $h(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)}$

$$g(x) = \log_5 (x-2)$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5 (x-2)$

$$= h(x) + g(x)$$

ดังนั้น $D_f = D_h \cap D_g$

พิจารณาโดเมนของ h $h(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)}$

$$0 \leqslant \arcsin(\log_3 x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leqslant \log_3 x \leqslant 1$$

$1 \leqslant x \leqslant 3$ **เพราะฉะนั้น** $D_h = [1,3]$

พิจารณาโดเมนของ g $g(x) = \log_5(x-2)$

$x-2 > 0$

$x > 2$ **เพราะฉะนั้น** $D_g = (2,\infty)$

สรุป $D_f = D_h \cap D_g = [1,3] \cap (2,\infty) = (2,3]$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 < 2$

เพราะฉะนั้น $(2, \frac{\pi}{2}) = \phi$ และ $(2, \frac{\pi}{2}] = \phi$

ลองแทนค่า x ที่หา f(x) ได้ง่าย เช่น x = 3

เพราะว่า $f(3) = \sqrt{\arcsin(\log_3 3)} - \log_5(3-2)$

$= \sqrt{\arcsin 1} - 0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **เพราะฉะนั้น** $3 \in D_f$

เพราะว่า 3 ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือก 1., 3. และ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้ง

44. **ตอบ** 2.

แนวคิด

$\log_a(ax) + 2\log_a(a^2x) + 3\log_a(a^3x) + \ldots + 10\log_a(a^{10}x)$

$$= \log_a a + \log_a x + 2\log_a a^2 + 2\log_a x + \ldots + 10\log_a a^{10} + 10\log_a x$$

$$= \left[\log_a a + 4\log_a a + 9\log_a a + \ldots + 100\log_a a\right] + \left[1 + 2 + 3 + \ldots + 10\right]\log_a x$$

$$= \left[1 + 4 + 9 + \ldots + 100\right] + 55\log_a x = 385 + 55\log_a x$$

เพราะฉะนั้น $385 + 55\log_a x = 110$

$$55\log_a x = -275$$

$$\log_a x = -5$$

$$x = a^{-5}$$

การตัดตัวเลือก โจทย์ข้อนี้ถ้าพิจารณาในลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ดังนั้นการแทนค่า a บางค่าจะทำให้คิดเลขได้ง่ายกว่าการทำแบบแรก

ตัวอย่างเช่น $a = 10$ จะทำให้คิดเลขง่าย

$$\log(10x) + 2\log(10^2x) + 3\log(10^3x) + \ldots + 10\log(10^{10}x) = 110$$

ลองจัดรูปอีกแบบหนึ่งเพื่อให้แตกต่างจากแบบแรก

$$\log(10x) + \log(10^4x^2) + \log(10^9x^3) + \ldots + \log(10^{100}x^{10}) = 110$$

$$\log\left(10^{1+4+9+\ldots+100}\, x^{1+2+3+\ldots+10}\right) = 110$$

$$\log(10^{385}x^{55}) = 110$$

$$10^{385}x^{55} = 10^{110}$$

$$x^{55} = 10^{-275} = (10^{-5})^{55}$$

$$x = 10^{-5}$$

ตรงกับตัวเลือก 2. เมื่อ $a = 10$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

45. **ตอบ** 1.

แนวคิด $F_n(x) = \int \frac{1}{x^{2n}}\,dx = \int x^{-2n}\,dx = \frac{x^{-2n+1}}{-2n+1} + K$

$$F_1(0) = \frac{0^{-2+1}}{-2+1} + K \quad \text{หาค่าไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้น $a_1 = \int_0^2 \frac{1}{x^{2(1)}}\,dx$ **หาค่าไม่ได้**

ในทำนองเดียวกัน $a_2, a_3, a_4, \ldots$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $(1-2n)a_n$ หาค่าไม่ได้ทุกค่า $n = 1,2,3,\ldots$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} (1-2n)a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

46. **ตอบ** 4.

แนวคิด $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{-(1-x)}{1-\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{1-\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} -(\sqrt{x}+1) = -2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-(1-x)}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x \to 1^-} -\sqrt{1-x} = 0$$

ผลสรุปแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้ 1. ผิด 2. ผิด

3. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0-2 = -2 \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

4. $\lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^+} f(x) = 0-2 = -2$ ถูกต้อง

47. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = x^3 + bx^2 + cx$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6x + 2b$

เพราะว่า $f''(-1) = 6$ เพราะฉะนั้น $6(-1) + 2b = 6$,$b = 6$

จาก $f'(x) = 3x^2 + 2bx + c = 3x^2 + 12x + c$

เพราะว่า $x = -2$ เป็นค่าวิกฤต เพราะฉะนั้น $f'(-2) = 0$

$$3(-2)^2 + 12(-2) + c = 0$$

$$c = 12$$

สรุป $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

และ $f''(x) = 6x + 12$

เพราะว่า $f'(x) = 3(x^2+4x+4) = 3(x+2)^2$

เพราะฉะนั้น $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty,\infty)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(-\infty,\infty)$

48. **ตอบ** 3.

แนวคิด การหาสูตร $f^{-1}(x)$ จากโจทย์ $f(x) = \sqrt{x}$ ให้ $y = \sqrt{x}$

$x = y^2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = x^2$

และ $g(x) = \dfrac{f^{-1}(x) + 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$

เพราะว่า $x^{\frac{3}{2}} > 0$ และ $x^{-\frac{1}{2}} > 0$ เมื่อ $x \in [1,4]$

เพราะฉะนั้น $g(x) > 0$ ทุกค่า $x \in [1,4]$

และพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และ

แกน X มีค่าเท่ากับ $\int_1^4 g(x)\,dx$

ให้ $G(x) = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + 2x^{\frac{1}{2}} + K$

เพราะฉะนั้น $\int_1^4 g(x)\,dx = G(4) - G(1)$

$$G(4) = \frac{2}{5}(4)^{\frac{5}{2}} + 2(4)^{\frac{1}{2}} = \frac{84}{5}$$

$$G(1) = \frac{2}{5}(1)^{\frac{5}{2}} + 2(1)^{\frac{1}{2}} = \frac{12}{5}$$

เพราะฉะนั้น $\int_1^4 g(x)\,dx = \frac{84}{5} - \frac{12}{5} = \frac{72}{5}$

49. ตอบ 1.

แนวคิด $X = (B + C)A$

$$= \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X^{-1} = \frac{1}{\det(X)} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-2+1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

การตัดตัวเลือก เมื่อได้ X แล้วเราสามารถใช้เหตุผลตัดตัวเลือกได้ โดยการเอาเมตริกซ์ในตัวเลือกมาคูณกับ X ว่าได้ I หรือไม่ เช่น

ตัวเลือก 1. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้าเป็นแบบนี้ถือว่าโชคดีมากๆ ที่ตัวเลือกที่ต้องการอยู่ตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้น $X^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ส่วนตัวเลือกที่เหลือตัดทิ้งไป

50. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

เพราะฉะนั้น $AA^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (A\,\text{adj}(A))$

$$I = \frac{1}{\det(A)}(A \cdot \text{adj}(A))$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I$$

$$A \cdot \text{adj}(A) - BA = \det(A) \cdot I - BA$$

เพราะว่า $A \cdot \text{adj}(A) - BA = I$

เพราะฉะนั้น $I = \det(A) \cdot I - BA$

$$BA = \det(A) \cdot I - I$$

$$BA = (\det(A) - 1) \cdot I$$

$$\det(BA) = (\det(A) - 1)^4 \cdot \det(I)$$

$$\det(B)\ \det(A) = (\det(A) - 1)^4$$

$$0 = (\det(A) - 1)^4$$

$$\det(A) = 1$$

หมายเหตุ มิติของ A และ B เป็น n×n ก็ได้

51. **ตอบ** 3.

แนวคิด ให้ x_1 = จำนวนสินค้าชนิดที่ 1

x_2 = จำนวนสินค้าชนิดที่ 2

รายได้ $P = 300x_1 + 400x_2$

วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 มีการนำมาใช้เท่ากับ $2x_1 + 3x_2$

เพราะว่าวัตถุดิบแหล่งที่ 1 มี 18 เพราะฉะนั้น $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

วัตถุดิบจากแหล่งที่ 2 มีการนำมาใช้เท่ากับ $x_1 + 2x_2$

เพราะว่าวัตถุดิบแหล่งที่ 2 มี 10 เพราะฉะนั้น $x_1 + 2x_2 \leq 10$

สรุปปัญหากำหนดการเชิงเส้นคือ

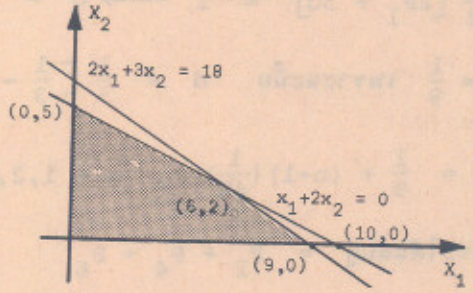
การหาค่าสูงสุดของ $P = 300x_1 + 400x_2$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ $2x_1 + 3x_2 \leq 18$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0$ และ $x_2 \geq 0$

กราฟแสดงบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ



จุดมุมของบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ (0,0), (9,0), (0,5) และ (6,2)

จุดมุม (x_1,x_2)	$P = 300x_1 + 400x_2$
(0,0)	0
(9,0)	2700
(0,5)	2000
(6,2)	2600

เพราะฉะนั้น $x_1 = 9$, $x_2 = 0$ ทำให้รายได้ P มีค่ามากที่สุด

เท่ากับ 2700 บาท เพราะว่า $x_1 = 9$ และ $x_2 = 0$

เพราะฉะนั้น วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 ถูกใช้หมด และวัตถุดิบจากแหล่งที่ 2

เหลือ 10 หน่วย สรุปตัวเลือก 3. เป็นจริง

52. **ตอบ** 2.

แนวคิด ให้ P_n = ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม n , n = 1,2,...,6

ให้ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต $P_1, P_2, \ldots, P_6$

เพราะว่าผลบวกของความน่าจะเป็น $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = 1$

และ $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = \frac{6}{2}\left[2P_1 + (6-1)d\right]$

เพราะฉะนั้น $\frac{6}{2}\left[2P_1 + 5d\right] = 1 \longrightarrow d = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3} - 2P_1\right]$

เพราะว่า $P_1 = \frac{1}{9}$ เพราะฉะนั้น $d = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right] = \frac{1}{45}$

ดังนั้น $P_n = \frac{1}{9} + (n-1)\left(\frac{1}{45}\right)$, $n = 1,2,\ldots,n$

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มคู่ $= P_2 + P_4 + P_6$

$= \left[\frac{1}{9} + \frac{1}{45}\right] + \left[\frac{1}{9} + \frac{3}{45}\right] + \left[\frac{1}{9} + \frac{5}{45}\right] = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

53. **ตอบ** 4.

แนวคิด เหตุการณ์ที่ผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คนเลือกร้องเพลงเดียวกัน คือเหตุการณ์ที่ตรงข้ามกับทุกคนร้องเพลงต่างกัน

ให้ E = เหตุการณ์ที่ทุกคนร้องเพลงต่างกัน

เพราะฉะนั้น E' = เหตุการณ์ที่มีอย่างน้อย 2 คนร้องเพลงเดียวกัน

S = เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เพราะว่ามีนักร้อง 3 คน แต่ละคนเลือกร้องเพลงได้ 5 เพลง

เพราะฉะนั้น $n(S) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

การนับสมาชิกของ E **ขั้นที่ 1** นักร้องคนที่ 1 เลือกร้องเพลงได้ 5 เพล

ขั้นที่ 2 นักร้องคนที่ 2 เลือกร้องเพลงได้ 4 เพล

ขั้นที่ 3 นักร้องคนที่ 3 เลือกร้องเพลงได้ 3 เพลง

เพราะฉะนั้น $n(E) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

สรุป $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{125}$

$$P(E') = 1 - P(E) = 1 - \frac{60}{125} = \frac{65}{125} = \frac{13}{25}$$

54. **ตอบ** คำตอบขึ้นอยู่กับการแปลข้อความภาษาไทย

แนวคิด กำหนดเหตุการณ์ต่างๆ ดังนี้

E = เหตุการณ์ที่จะไปเที่ยวประเทศอังกฤษ

E' = เหตุการณ์ที่จะไม่ไปเที่ยวประเทศอังกฤษ

G = เหตุการณ์ที่จะไปเที่ยวประเทศเยอรมัน

G' = เหตุการณ์ที่จะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมัน

จากข้อกำหนดของโจทย์

ความน่าจะเป็นที่เขาจะไปเที่ยวประเทศอังกฤษเท่ากับ 0.5

เพราะฉะนั้น $P(E) = 0.5$, $P(E') = 0.5$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะไม่ไปเที่ยวประเทศเยอรมันเท่ากับ 0.8

เพราะฉะนั้น $P(G') = 0.8$ และ $P(G) = 0.2$

สำหรับคำว่า "ไปท่องเที่ยวทั้งสองประเทศ"

ผู้เขียนขอให้ความหมายนี้ตรงกับเหตุการณ์ที่สมชายไปเที่ยวทั้งประเทศอังกฤษและประเทศเยอรมัน นั่นคือเหตุการณ์ $E \cap G$

เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) = 0.6$

เพราะว่า $E \cap G \subset E$ เพราะฉะนั้น $P(E \cap G) \leq P(E)$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งว่า $0.6 \not\leq 0.5$

หมายเหตุ สำหรับปัญหาที่กำหนดให้ $P(E) = 0.5$ $P(G') = 0.8$

และ $P(E \cup G) = 0.6$ ค่าของ $P(E' \cap G')$ มีวิธีหาค่าดังนี้

$$P(E' \cap G') = P((E \cup G)') = 1 - P(E \cup G) = 0.4$$

55. **ตอบ** 3.

แนวคิด จำนวนเด็กทั้งหมด $N = 3+a+6+4 = 13+a$

อายุ (ปี)	จำนวนเด็ก	ความถี่สะสม
1 – 3	3	3
4 – 6	a	3 + a
7 – 9	6	9 + a
10 – 12	4	13 + a

เพราะว่ามัธยฐานเท่ากับ 7

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M}\right] I$$

ดังนั้น
$$7 = 6.5 + \left[\frac{\frac{13+a}{2} - (3+a)}{6}\right] (3)$$

$$= 6.5 + \left[\frac{13 + a - 6 - 2a}{12}\right] (3)$$

$$= 6.5 + \left[\frac{7 - a}{4}\right]$$

$$28 = 26 + 7 - a$$

$$a = 5$$

การคิดตัวเลือก ข้อสอบนี้จัดอยู่ในประเภทที่เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อดูว่า a เท่าใดจึงทำให้มัธยฐานเท่ากับ 7

ตัวเลือก 1 $a = 3$, $N = 16$, $\frac{N}{2} = 8$

X	f	F
1 - 3	3	3
4 - 6	3	6
7 - 9	6	12 ←
10 - 12	4	16

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M} \right] I = 6.5 + \left[\frac{8 - 6}{6} \right] \quad (3)$$

$$= 6.5 + 1 = 7.5 \neq 7$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2 $a = 4$, $N = 17$, $\frac{N}{2} = 8.5$

X	f	F
1 - 3	3	3
4 - 6	4	7
7 - 9	6	13 ←
10 - 12	4	17

$$\text{มัธยฐาน} = L + \left[\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M} \right] I = 6.5 + \left[\frac{8.5 - 7}{6} \right] \quad (3)$$

$$= 6.5 + 0.75 = 7.25 \neq 7$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวเลือก 3 $a = 5$, มัธยฐาน $= 7$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

56. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น $\frac{5+a+b+1}{4} = 4$

$a+b = 10$ .....(1)

เพราะว่าความแปรปรวนเท่ากับ 5

เพราะฉะนั้น $\frac{(5-\bar{x})^2 + (a-\bar{x})^2 + (b-\bar{x})^2 + (1-\bar{x})^2}{4} = 5$

$(5-4)^2 + (a-4)^2 + (b-4)^2 + (1-4)^2 = 20$

$(a-4)^2 + (b-4)^2 = 10$ .....(2)

แทนค่า $b = 10-a$ ใน (2) $(a-4)^2 + (10-a-4)^2 = 10$

$a^2-10a+21 = 0$

$(a-3)(a-7) = 0$

$a = 3, 7$

จาก (1) ; $a = 3$ จะได้ $b = 7$

$a = 7$ จะได้ $b = 3$

เพราะว่า $1 \leq a < b$ เพราะฉะนั้น $a = 3$ และ $b = 7$

สรุป $b-a = 7-3 = 4$

การตัดตัวเลือก

เมื่อเราทราบว่า $a+b = 10$ ลองคำนวณค่า a,b จาก b-a ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $b-a = 2$

จาก $a+b = 10$

ดังนั้น $b = 6 \quad , a = 4$

ความแปรปรวนของข้อมูล 5,4,6,1

คือ $\frac{(5-4)^2 + (4-4)^2 + (4-6)^2 + (1-4)^2}{4} \neq 5$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. $b-a = 4$

จาก $a+b = 10$

ดังนั้น $b = 7 \quad , a = 3$

ความแปรปรวนของข้อมูล 5,3,7,1

คือ $\frac{(5-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2 + (1-4)^2}{4} = 5$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

ส่วนตัวเลือก 3. และ 4. ตัดทิ้งได้

ตอนที่ 3 ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. **ตอบ** 12

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกของ F มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก {1,2,3} ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ **วิธี**

สมมติสมาชิกที่เลือกได้คือ x,y

ต่อไปพิจารณาวิธีการส่งค่าจาก {x,y} ไปยัง {a,b}

ขั้นที่ 2 การส่งค่าของ x ไปยัง {a,b} ทำได้ 2 **วิธี**

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของ y ไปยัง {a,b} ทำได้ 2 **วิธี**

เพราะฉะนั้นโดยกฎการนับจำนวนวิธีจะได้ว่า $n(F) = (3)(2)(2) = 12$

2. **ตอบ** 270

แนวคิด เพราะว่า $15015 = 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น.$(x,y) = 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$

เพราะว่า $x \leq$ ค.ร.น.(x,y) และ $y \leq$ ค.ร.น.(x,y)

เพราะฉะนั้น $x \leq 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$ และ $y \leq 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$

เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม.$(x,y) = 1$

เพราะว่า [ค.ร.น.(x,y)][ห.ร.ม.(x,y)] $= xy$

เพราะฉะนั้น $[3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13][1] = xy$

นั่นคือ $xy = 3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$

เพราะว่า $80 < x < 200$ และ $x = pq$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะ ซึ่ง $p \neq q$

ดังนั้นกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้ของค่า x คือ $x = 7\cdot13$, $11\cdot13$

เมื่อ $x = 7\cdot13$ จะได้ $y = 3\cdot5\cdot11 = 165$

เมื่อ $x = 11\cdot13$ จะได้ $y = 3\cdot5\cdot7 = 105$

สรุป ผลบวกของค่าของ y ทั้งหมดเท่ากับ $165+105 = 270$

3. **ตอบ** 3

แนวคิด จาก $(a+b+c)(a-b-c) = -3bc$

$$a^2-ab-ac+ab-b^2-bc+ac-bc-c^2 = -3bc$$

$$a^2-b^2-c^2-2bc = -3bc$$

$$a^2-b^2-c^2 = -bc \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เพราะว่า $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos\hat{A}$

เพราะฉะนั้น $a^2-b^2-c^2 = -2bc\cos\hat{A}$

จาก (1) ; $-bc = -2bc\cos\hat{A}$

เพราะฉะนั้น $\cos\hat{A} = \frac{1}{2}$

$\hat{A} = 60^\circ$

เพราะว่า $4a^2 = 6b^2$ เพราะฉะนั้น $a = \frac{\sqrt{6}}{2}b$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$

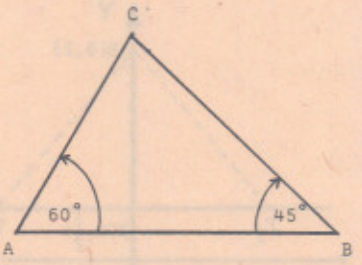
$\frac{\sin 60^\circ}{(\frac{\sqrt{6}}{2}b)} = \frac{\sin\hat{B}}{b}$

$\sin\hat{B} = \frac{2}{\sqrt{6}}\sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\hat{B} = 45^\circ$ หรือ 135°

ถ้า $\hat{B} = 135^\circ$ แล้ว $\hat{A}+\hat{B} = 195^\circ > 180^\circ$ จึงเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $B = 45^\circ$ เท่านั้น



เพราะว่า $3\hat{A}-2\hat{B} = 3(60)-2(45) = 90$

เพราะฉะนั้น $1+2\sin^2(3\hat{A}-2\hat{B}) = 1+2\sin^2 90^\circ = 3$

4. ตอบ 2.25

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$

$$kx^2 + 4(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 8 + 1$$

$$kx^2 + 4(y - \frac{1}{2})^2 = 9$$

$$\frac{x^2}{(\frac{3}{\sqrt{k}})^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2} = 1$$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงรีคือ $(0, \frac{1}{2})$

การหาพิกัดจุดตัดแกน Y ของวงรี ทำได้โดยแทนค่า $x = 0$ ลงในสมการ $kx^2 + 4y^2 - 4y = 8$ จะได้

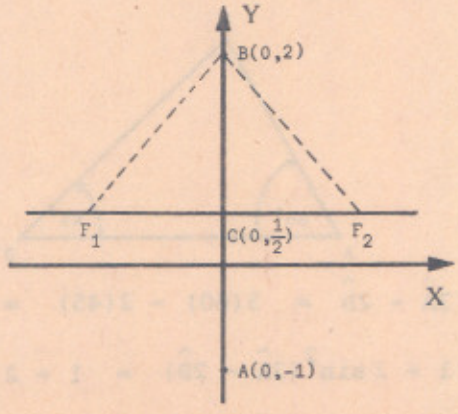
$$4y^2 - 4y = 8$$

$$y^2 - y - 2 = 0$$

$$(y-2)(y+1) = 0$$

เพราะฉะนั้นจุดตัดแกน Y คือ (0,2) และ (0,-1)

เพราะว่า B อยู่เหนือแกน X เพราะฉะนั้นพิกัด B คือ (0,2)



เพราะว่า $B(0,2)$ เป็นจุดบนวงรี และ $|BC| = \frac{3}{2}$

เพราะว่า F_1, B, F_2 ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

เพราะฉะนั้นแกนเอกขนานแกน X $\quad a = \frac{3}{\sqrt{k}}$ และ $b = \frac{3}{2}$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$|F_1F_2| = 2c = 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม $F_1BF_2 = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |F_1F_2|$

$$\frac{3\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{2}) \cdot 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$\sqrt{7} = 2\sqrt{\frac{9}{k} - \frac{9}{4}}$$

$$7 = 4(\frac{9}{k} - \frac{9}{4})$$

$$7 = \frac{36}{k} - 9$$

$$k = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2.25$$

5. **ตอบ** 3

แนวคิด เพราะว่า α เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 + 4\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $\alpha^3 = 9 + 4\sqrt{5}$

เพราะว่า β เป็นรากที่สามรากหนึ่งของ $9 - 4\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $\beta^3 = 9 - 4\sqrt{5}$

การหาค่าของ $\alpha\beta$

$$\alpha^3\beta^3 = (9 + 4\sqrt{5})(9 - 4\sqrt{5})$$

$$(\alpha\beta)^3 = 81 - 80 = 1$$

เพราะว่า $\alpha\beta$ **เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้น** $\alpha\beta = 1$

การหาค่า $\alpha+\beta$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} = 18$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$18 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 3\alpha\beta)$$

$$18 = (\alpha+\beta)((\alpha+\beta)^2 - 3(1))$$

แทนค่า $x = \alpha+\beta$ **จะได้**

$$18 = x(x^2-3)$$

$$x^3 - 3x - 18 = 0$$

$$(x-3)(x^2+3x+6) = 0$$

จะได้ $x-3 = 0$ **หรือ** $x^2+3x+6 = 0$

เพราะว่า $\alpha+\beta$ **เป็นจำนวนจริง**

เพราะฉะนั้น x **เป็นจำนวนจริง และ**

$$x^2 + 3x + 6 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{15}{4}$$

$$= (x + \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} \neq 0$$

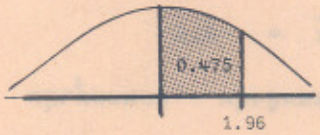
เพราะฉะนั้น $x-3 = 0$ **นั่นคือ** $x = 3$

สรุป $\alpha+\beta = 3$

6. **ตอบ** 24

แนวคิด ให้ x เป็นคะแนนสูงสุดที่ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5

จากภาพโค้งของคะแนนมาตรฐาน z



คะแนนมาตรฐาน $z = 1.96$ ทำให้พื้นที่ใต้โค้งปกติจาก $-\infty$ ถึง 1.96 มีค่าเท่ากับ 0.975

เพราะฉะนั้น เปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.5 ของคะแนนมาตรฐาน $z = 1.96$

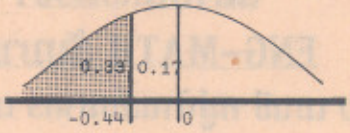
จาก $$z = \frac{x - \bar{x}}{10}$$

$$1.96 = \frac{x - \bar{x}}{10}$$

เพราะฉะนั้น $x - \bar{x} = 19.6$ .....(1)

ให้ y เป็นคะแนนต่ำสุดที่ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33

จากภาพโค้งของคะแนนมาตรฐาน z



คะแนนมาตรฐาน $z = -0.44$ ทำให้พื้นที่ใต้โค้งปกติจาก $-\infty$ ถึง -0.44 มีค่าเท่ากับ 0.33

เพราะฉะนั้นเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 ของคะแนนมาตรฐาน $z = -0.44$

จาก $$z = \frac{y - \bar{x}}{10}$$

$$-0.44 = \frac{y - \bar{x}}{10}$$

เพราะฉะนั้น $y - \bar{x} = -4.4$

สรุป พิสัย = คะแนนสูงสุด – คะแนนต่ำสุด

$= x - y$

$= (x - \bar{x}) - (y - \bar{x})$

$= 19.6 - (-4.4)$

$= 24$

สนใจเทคนิคการหาคำตอบอย่างรวดเร็ว
สอนโดยผู้เขียน สมัครเรียนได้ที่....

สถาบันกวดวิชา

ENG-MATH สัมมากร

159/10 เมนซี หมู่บ้านสัมมากร ถ.สุขาภิบาล 3
เขตบึงกุ่ม กรุงเทพมหานคร 10240 โทร. 373-9640

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2537

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1. ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $(p \to r) \wedge (q \to r)$

   1. $(p \wedge q) \vee \sim r$
   2. $(p \wedge q) \to r$
   3. $\sim(p \vee q) \vee r$
   4. $\sim(p \vee q) \to r$

2. กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง และ p แทนประพจน์ "สำหรับจำนวนจริงบวก x ใดๆ ผลบวกของ x กับ $\frac{1}{x}$ มีค่ามากกว่า 1

   พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. p สมมูลกับ $\forall x[x \leq 0 \vee (x + \frac{1}{x} > 1)]$

   ข. p มีค่าความจริงเป็นจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก
   2. ก. ถูก ข. ผิด
   3. ก. ผิด ข. ถูก
   4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. <u>เหตุ</u> 1. นายสมหมายเป็นคนขยันหรือนายสมหมายสอบได้ที่หนึ่งของห้อง

   2. นายสมหมายเป็นคนไม่ขยัน

   <u>ผล</u> นายสมหมายสอบได้ที่หนึ่งของห้อง

ข. เหตุ 1. ถ้าสมศรีไปเที่ยวชายทะเลแล้วสมศรีไม่สบาย

2. สมศรีไม่สบาย

ผล สมศรีไปเที่ยวชายทะเล

การอ้างเหตุผลใน ก. และ ข. ข้างต้น สมเหตุสมผลหรือไม่

1. ก. สมเหตุสมผล ข. สมเหตุสมผล
2. ก. สมเหตุสมผล ข. ไม่สมเหตุสมผล
3. ก. ไม่สมเหตุสมผล ข. สมเหตุสมผล
4. ก. ไม่สมเหตุสมผล ข. ไม่สมเหตุสมผล

4. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

และ $A = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2+y^2 \leq 16\}$

$B = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2 \leq 4y\}$

$C = \{(x,y) \in R \times R \mid -4 \leq x \leq 4,\ y = 4\}$

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap (B \cap C) = \{(0,4)\}$
2. $A-B \neq \phi$
3. $(B-A) \cap C = C$
4. $C-B = \phi$

5. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $A = \{x \in I \mid |x^2-2| < 8\}$

และ $B = \{x \in R \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

แล้วเซตของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

1. $\{(-3,1),(-2,2),(-1,3),(1,4),(2,5)\}$
2. $\{(-3,0),(-2,1),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$
3. $\{(-3,1),(0,2),(1,1),(2,3),(3,4)\}$
4. $\{(-3,1),(-2,4),(1,5),(2,2),(3,1)\}$

6. ให้ $r_1 = \{(x,y) \mid x^2+y-2 \leq 0\}$

$r_2 = \{(x,y) \mid \ln|y-x^2| \geq 0\}$

เรนจ์ของ $(r_1 \quad r_2)$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[1,2]$ 2. $(-\infty,0]$

3. $(-\infty,-1] \cup [\frac{1}{2},1]$ 4. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1,2]$

7. ถ้า $f(x) = x-1$ และ $(g \circ f^{-1})(x) = 4x^2-1$

แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) = 0$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-4,-1]$ 2. $[-1,0]$

3. $[0,4]$ 4. $[4,6]$

8. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x < y$ ห.ร.ม.ของ x,y เท่ากับ 9 ค.ร.น.ของ x,y เท่ากับ 28215 และจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวน

ค่าของ $y-x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 36 2. 45 3. 9 4. 18

9. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m,n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x+3$ หาร x^3+mx^2+nx+p ลงตัว และ $x-1$ หาร x^3+mx^2+nx+p เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $m = 4, n = -4$ 2. $m = 2, n = -2$

3. $m = -4, n = 4$ 4. $m = -2, n = 2$

10. ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต

$\{-\frac{(1+2+\ldots+n)}{n^2} \mid n$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ ใน $\mathbf{R}$ เท่ากับข้อใด

ต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0

11. ให้ α β และ γ เป็นรากทั้งสามของสมการ $\sqrt{2}\,z^3 = 1+i$ ถ้า α และ β เป็นรากที่อยู่ในควอแดรนท์ที่ 1 และ 2 ตามลำดับ แล้ว $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. $(1+3\sqrt{3})+i$
3. $4+\sqrt{3}\,i$ 4. $1+3\sqrt{3}$

12. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่ทำมุม $45°$ กับแกน X และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2-4x+3y^2-2 = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$ 2. $4\sqrt{2}$ 3. 2 4. 4

13. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+4x+y^2-8y+11 = 0$ แล้วสมการของเส้นตรง OP และสมการของวงกลมที่มี OP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = 4x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$
2. $y = -4x$ และ $x^2+2x+y^2-2y = 0$
3. $y = 2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 10$
4. $y = -2x$ และ $x^2+2x+y^2-4y = 0$

14. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$ และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E มีจุดยอดกับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโท

ของ E ข้อใดต่อไปนี้คือสมการของไฮเพอร์โบลา

1. $x^2-5y^2-2x-20y+14 = 0$
2. $x^2-5y^2+2x+20y-14 = 0$
3. $x^2-5y^2+2x+20y-18 = 0$
4. $5x^2-y^2-2x+20y+18 = 0$

15. ถ้า $A = \{(x,y) \mid 0 < x \leq \pi,\ 0 < y \leq \pi,\ \cos(x+y) \geq 0,\ \sin(x+y) \leq 0\}$

แล้ว A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq 2\pi - x,\ x \leq \pi\}$
2. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi,\ x \leq \pi\}$
3. $\{(x,y) \mid 0 < y \leq 2\pi - x,\ x > 0\}$
4. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi,\ \frac{3\pi}{4} \leq y \leq \pi\}$

16. กำหนดให้ $\sin 3\theta + \sin\theta = 1-4\sin^3\theta$

แล้ว $\sec 2\theta + \cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{8}$ 2. $\frac{9}{8}$ 3. $\frac{25}{28}$ 4. $\frac{39}{28}$

17. กำหนดให้ $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq \pi$

ถ้า $\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$

แล้ว $\tan(2x+y)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-1/\sqrt{3}$ 2. $-\sqrt{3}$
3. $1/\sqrt{3}$ 4. $\sqrt{3}$

18. ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2\arcsin x$

แล้วค่าของ $(f \circ g)(\frac{1}{3})$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{9}$
2. $\frac{2}{9}(1+\sqrt{8})$
3. $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$
4. $\frac{2}{27}(7+2\sqrt{10})$

19. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ

$$(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$$

และ $$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < y < x$
2. $0 < x < y$
3. $y < 0 < x$
4. $0 < x = y$

20. ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ

$$[\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots] < 1$$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < x < \sqrt{3}$
2. $x > \sqrt{3}$
3. $0 < x < 3\sqrt{3}$
4. $x > 3\sqrt{3}$

21. กำหนดให้ $y = \sqrt{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}$ เมื่อ $x \geq 0$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2 \frac{(y + \sqrt{y^2-4})}{2}$
2. $\log_2 \frac{(y + \sqrt{y^2+4})}{2}$
3. $\log \frac{(y + \sqrt{y^2-4})}{2}$
4. $\log \frac{(y + \sqrt{y^2+4})}{2}$

22. เซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x} \leq 1$$

คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,1)$
2. $[10!,\infty)$
3. $(0,1) \cup [10!,\infty)$
4. $(0,1) \cup (1,\infty)$

23. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$

ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง แล้วจะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$
2. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = -1$
3. $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$
4. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

24. ให้ $f(x) = 3x-10$

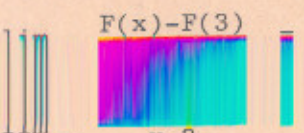
และ $h(x) = (f \circ g)(x) = ax^2+bx+c$

ถ้า $h(0) = 1$ และ h มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ คือ 5 แล้วค่าของ $g(1)$ คือข้อใด

1. 2
2. 3
3. 5
4. 6

25. ให้ $f(x) = 2-|x^3-3|$, $g(x) = x^3$ และ $F(x) = f(g^{-1}(x))$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^+} F(x)$

ข. 

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ทั้ง ก. และ ข.ถูก
2. ก.ถูก ข.ผิด
3. ก.ผิด ข.ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข.ผิด

26. ให้ f มีกราฟเป็นรูปพาราโบลาที่มีจุดยอดที่จุด (0,1) และเส้นตรง $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = -1$ ถึง $x = 1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{8}{3}$
3. 2
4. 4

27. ถ้าความชันของเส้นโค้งที่จุด (x,y) ใดๆ เป็น $2-2x$ และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ จากจุด $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับ 9 แล้วเส้นโค้งผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. (3,0)
2. (1,0)
3. (0,-3)
4. (0,-1)

28. ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(3,-1) และ B(-1,3) แล้วเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-4\bar{i} + 4\bar{j}$
2. $4\bar{i} - 4\bar{j}$
3. $-4\sqrt{2}\,\bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j}$
4. $4\sqrt{2}\,\bar{i} - 4\sqrt{2}\,\bar{j}$

29. กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$

ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$

แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\pi}{5}$ 3. $\frac{4\pi}{5}$ 4. $\frac{6\pi}{5}$

30. ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เมื่อ a_{ij} เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 แล้วข้อความต่อไปนี้ ข้อใดผิด

1. $\det(AA^t) = \det(A^2)$
2. $\det(kA)^2 = k^{2n}\det(A^2)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
3. $\det(A^2+A) = [\det(A)+1]\det(A)$
4. $[\det(A)]I = A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A$

31. ให้ A,B เป็นเมตริกซ์จัตุรัสมิติ 3×3 และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3 ถ้า $AB = BA = I$ และ $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

แล้ว เมตริกซ์ผูกพันของ B (adj B) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}A$ 2. $-3A$
3. $\frac{1}{3}A^t$ 4. $-3A^t$

32. ให้ A เป็นเมตริกซ์ และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3

ถ้า $B = \begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix}0 & 2 & -3\\ 3 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}$

สอดคล้องกับสมการ $AB - AC - \frac{1}{2} I = 0$

แล้ว A^{-1} คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

33. กำหนดให้ $z = 3x_1 - 5x_2$ โดยที่ $x_1 - 2x_2 \leq 4$

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0$

แล้วจุด (x_1, x_2) ที่ให้ค่าสูงสุดของ z คือจุดซึ่งอยู่บนเส้นตรงที่มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$
2. $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1$
3. $x = 3$
4. $y = 4$

34. โรงงานแกะสลักไม้แห่งหนึ่งมีคนงาน 15 คน เป็นหญิง 6 คน ชาย 9 คน ผู้จัดการรับงานมา 3 ชนิด โดยงานชนิดที่หนึ่งใช้คนงานหญิง 3 คน งานชนิดที่สองใช้คนงานชาย 5 คน ส่วนงานชนิดที่สามใช้คนงานชายหรือหญิงก็ได้จำนวน 3 คน จำนวนวิธีที่ผู้จัดการจะเลือกคนงานให้แกะสลักไม้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 37,800
2. 68,250
3. 75,600
4. 88,200

35. สัมประสิทธิ์ของ x^{54} ในอนุกรม $1+(1+x^2)+(1+x^2)^2+\ldots+(1+x^2)^{50}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\binom{50}{27}$ 2. $\binom{50}{28}$ 3. $\binom{51}{27}$ 4. $\binom{51}{28}$

36. มีเลข 8 จำนวน เป็นเลขบวก 6 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 3 จำนวน จำนวนคี่ 3 จำนวน และมีเลขลบ 2 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 1 จำนวน จำนวนคี่ 1 จำนวน ถ้าสุ่มเลขจำนวนดังกล่าวมา 4 จำนวน แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขทั้งสี่จำนวนมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{70}$ 2. $\frac{10}{70}$ 3. $\frac{14}{70}$ 4. $\frac{28}{70}$

37. จากข้อมูลที่กำหนดให้

ชุด A	5	10	15	20	25
ชุด B	15	30	45	60	50

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ข้อมูลชุด B มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมากกว่าข้อมูลชุด A

ข. ข้อมูลชุด B มีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันน้อยกว่าข้อมูลชุด A

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก.ถูก และ ข.ถูก 2. ก.ถูก และ ข.ผิด
3. ก.ผิด และ ข.ถูก 4. ก.ผิด และ ข.ผิด

38. กำหนดให้ค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

ค่าจ้าง (บาท)	จำนวนคนงาน
81 - 85	1

86 – 90	3
91 – 95	x
96 – 100	5
101 – 105	8
106 – 110	y
111 – 115	10
116 – 120	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้ว จำนวนคนงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 คน 2. 22 คน 3. 28 คน 4. 42 คน

39. ข้อมูล 7 จำนวนมีค่าแตกต่างกันดังนี้

9, 6, 15, a, 2, 4, 12 โดยที่ $2 < a < 12$

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 2 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ แล้วค่า a ที่เป็นไปได้เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{62}{3}$
2. มี 2 ค่า โดยที่ผลรวมของค่าทั้งสองเท่ากับ $\frac{25}{2}$
3. มี 1 ค่า และมีค่าไม่เท่ากับค่ามัธยฐาน
4. มี 1 ค่า และมีค่าเท่ากับค่ามัธยฐาน

40. น้ำหนักและส่วนสูงของนักเรียนห้องหนึ่ง ต่างมีการแจกแจงปกติ โดยที่น้ำหนักเฉลี่ยเป็น 40 กก. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 2 กก. ส่วนสูงเฉลี่ยเป็น 150 ซม. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 4 ซม.

ถ้ามีนักเรียน a เปอร์เซนต์ที่สูงไม่ต่ำกว่า 145 ซม. และไม่เกิน 155 ซม. คือกลุ่มนักเรียนที่มีน้ำหนักไม่ต่ำกว่า 36 กก. และไม่เกิน b กก. แล้ว a และ b มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. a = 62.30 และ b < 40
2. a = 78.88 และ b < 40
3. a = 62.30 และ b < 42
4. a = 78.88 และ b < 42

Z	0.88	0.89	1.24	1.25	1.95	2.00
A	0.3106	0.3133	0.3925	0.3944	0.4744	0.4773

41. ให้สมการค่าจ้างรายวันของคนงานก่อสร้างเป็น

$$y = 6.5(x - 2529) + 60$$

เมื่อ x เป็น พ.ศ. y เป็นค่าจ้าง มีหน่วยเป็นบาท ถ้าใน พ.ศ. 2536 ดัชนีราคาผู้บริโภคเท่ากับ 110 % เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2535 แล้วค่าจ้างรายวันแท้จริงในปี พ.ศ. 2536 เมื่อเทียบกับค่าจ้างรายวันในปี พ.ศ. 2535 เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เพิ่มขึ้น 2.80 บาท
2. เพิ่มขึ้น 6.50 บาท
3. ลดลง 3.10 บาท
4. ลดลง 9.90 บาท

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. จำนวนเต็มตั้งแต่ 0 ถึง 100 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 มีทั้งหมดกี่จำนวน

2. กำหนด $f(x) = x^4+bx^3+cx^2+dx+e$

และ $f(2+\sqrt{3}i) = 0$, $f(1) = 0$, $f(2) = 9$

แล้ว $f'(0)$ มีค่าเท่าไร

3. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ P_n เป็นพาราโบลา $y = \frac{1}{n}x^2$ ถ้า k เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ P_k มีจุดร่วมกับเส้นตรง $x-y = 4$ เพียงจุดเดียว แล้ว k มีค่าเท่าไร

4. กำหนดให้รถขนส่งสินค้าชนิดหนึ่งมีการเผาไหม้ของน้ำมันเป็น $\frac{1}{400}(\frac{1600}{x} + x)$ ลิตร/กิโลเมตร เมื่อ x เป็นความเร็ว มีหน่วยเป็นกิโลเมตร/ชั่วโมง ถ้าต้องการขับรถเป็นระยะทาง 600 กิโลเมตร โดยจ่ายค่าน้ำมันน้อยที่สุด ขณะที่น้ำมันราคาลิตรละ 10 บาท แล้วจะต้องจ่ายค่าน้ำมันเท่าไร

5. การเขียนเครื่องหมาย O หรือ X ลงในตารางขนาด 2×3 โดยให้มีเครื่องหมายเต็มทุกช่อง และต้องมีเครื่องหมายอย่างน้อยอย่างละ 1 เครื่องหมาย แล้วจำนวนวิธีเขียนเท่ากับเท่าไร

6. จากการสอบถามครอบครัว n ครอบครัว ที่มีรายได้ต่อเดือนตั้งแต่ 5000 บาท ถึง 20000 บาท เกี่ยวกับรายจ่ายต่อเดือนปรากฏผลดังนี้

รายได้ (หน่วยเป็นพันบาท) : x	x_1 x_2 ... x_n
รายจ่าย (หน่วยเป็นพันบาท) : y	y_1 y_2 ... y_n

และ $\bar{x} = 12$, $\bar{y} = 5$ โดยที่สมการเส้นตรงซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่าย (y) และรายได้ (x) ตัดแกน Y ที่จุด (0,-3) ถ้าครอบครัวหนึ่งมีรายได้ 15000 บาท แล้วจะมีรายจ่ายโดยประมาณเท่ากับเท่าไร

เฉลย คณิตศาสตร์ กข. 2537

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1 ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** ตีตารางแสดงค่าความจริง

วิธีที่ 2 โดยใช้สูตร

$$(p \to r) \wedge (q \to r) = (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r) = (\sim p \wedge \sim q) \vee r$$
$$= \sim(p \vee q) \vee r$$

วิธีลัด p เป็น T q เป็น F และ r เป็น F

จะได้ $(p \to r) \wedge (q \to r)$ เป็น F

1. $(p \wedge q) \vee \sim r$ เป็น T
2. $(p \wedge q) \to r$ เป็น T
3. $\sim(p \vee q) \vee r$ เป็น F
4. $\sim(p \vee q) \to r$ เป็น T

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ วิธีตัดตัวเลือกนี้คิดเหมือนกับการตีตารางแสดงค่าความจริง แต่เมื่อพบว่าตัวเลือกใดผิด เราก็ไม่ต้องคิดประพจน์ในตัวเลือกนั้นอีก

2 ตอบ 1.

แนวคิด ประพจน์ p คือ $\forall x \in R^{+}[x + \frac{1}{x} > 1]$

เพราะว่า $(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

$$x^2 - x + 1 > 0$$

$$x^2+1 > x$$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $x > 0$ จะได้ $x + \frac{1}{x} > 1$

p มีค่าความจริงเป็นจริง

นอกจากนั้นเรายังได้ว่า $\forall x \in R[x \leq 0 \vee (x+\frac{1}{x} > 1)]$

มีค่าความจริงเป็นจริงสมมูลกับ p สรุป ก. และ ข. ถูกต้อง

3 ตอบ 2.

แนวคิด ก. p แทน สมหมายเป็นคนขยัน

q แทน สมหมายสอบได้ที่หนึ่ง

ดังนั้น เหตุ 1. $p \vee q$

2. $\sim p$

ผล q

เนื่องจาก $((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$ เป็นสัจจนิรันดร์

เพราะฉะนั้น ก. สมเหตุสมผล

ข. p แทน สมศรีไปเที่ยวชายทะเล

q แทน สมศรีไม่สบาย

ดังนั้น เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. q

ผล p

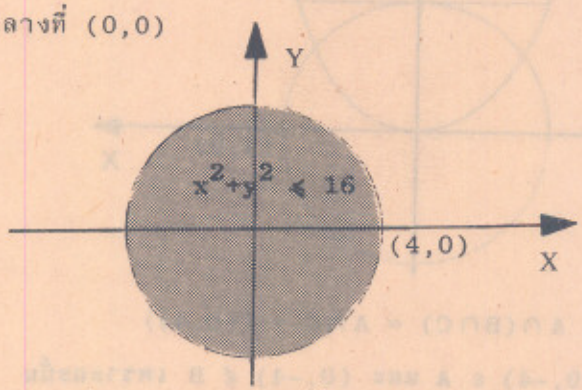
พิจารณาประพจน์ $((p \rightarrow q) \wedge q) \rightarrow p$ มีกรณีที่เป็นเท็จคือ

มี p เป็นเท็จ และ q เป็นจริง

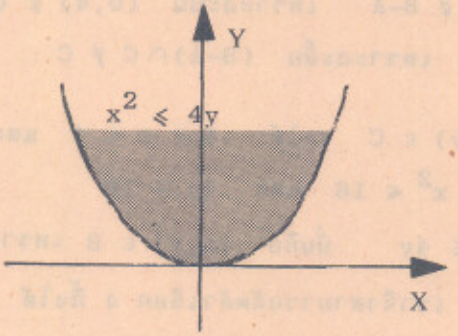
ดังนั้น ข. ไม่สมเหตุสมผล

4 ตอบ 3.

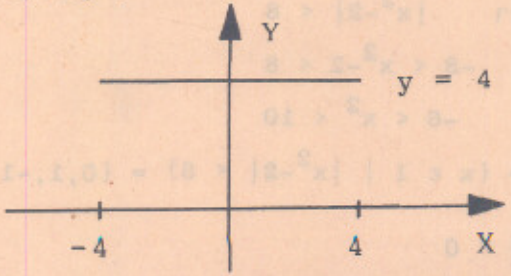
แนวคิด กราฟแสดงจุด (x,y) ในเซต A คือจุดภายในวงกลมรัศมี 4 จุดศูนย์กลางที่ (0,0)



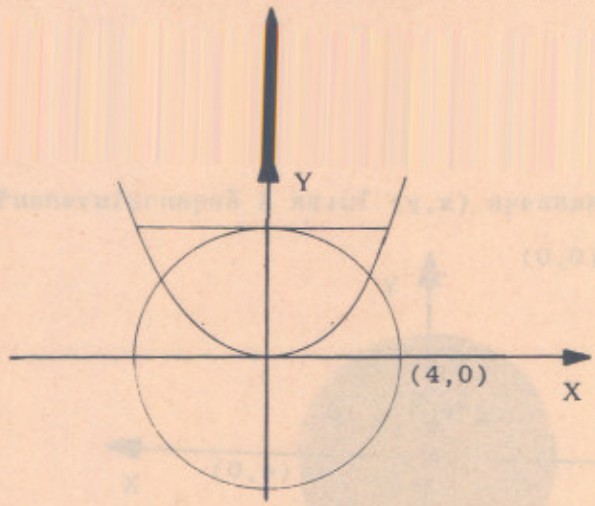
กราฟแสดงจุด (x,y) ในเซต B



กราฟแสดงบริเวณของเซต C คือเซตของจุดบนเส้นตรง $y = 4$ และ $-4 \leq x \leq 4$



เมื่อนำกราฟของ A, B และ C มาเขียนพร้อมกันจะได้



เพราะฉะนั้น $A \cap (B \cap C) = A \cap C = \{(0,4)\}$

เพราะว่า $(0,-4) \in A$ และ $(0,-4) \notin B$ เพราะฉะนั้น $A-B \neq \phi$

เพราะว่า $(0,4) \notin B-A$ เพราะฉะนั้น $(0,4) \notin (B-A) \cap C$

แต่ $(0,4) \in C$ เพราะฉะนั้น $(B-A) \cap C \neq C$

วิธีตัด เมื่อ $(x,y) \in C$ จะได้ $-4 \leq x \leq 4$ และ $y = 4$

$0 \leq x^2 \leq 16$ และ $4y = 16$

เพราะฉะนั้น $x^2 \leq 4y$ นั่นคือ $(x,y) \in B$ เพราะฉะนั้น $C \subset B$

ดังนั้น $C-B = \phi$ เราจึงสามารถตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

5 ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $|x^2-2| < 8$

$-8 < x^2-2 < 8$

$-6 < x^2 < 10$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in I \mid |x^2-2| < 8\} = \{0,1,-1,2,-2,3,-3$

เพราะว่า $1 + \frac{1}{x} > 0$

$\frac{x+1}{x} > 0$

$x < -1$ หรือ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $B = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

ดังนั้น $A \cap B = \{1,2,-2,3,-3\}$

เพราะฉะนั้น $\{(-3,1),(-2,4),(1,5),(2,2),(3,1)\}$

เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

วิธีลัด เมื่อเราทราบว่า $A \cap B = \{1,2,-2,3,-3\}$ และโดเมนแต่ละตัวเลือกคือ

$D_1 = \{-3,-2,-1,1,2\} \neq A \cap B$

$D_2 = \{-3,-2,1,2,3\} = A \cap B$

$D_3 = \{-3,0,1,2,3\} \neq A \cap B$

$D_4 = \{-3,-2,1,2,3\} = A \cap B$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ผิดแน่นอน

เพราะว่า $0 \notin B$ ดังนั้น $(-3,0) \notin A \cap B \times B$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

จากการที่เราทราบว่า $B = (-\infty,-1) \cup (0,\infty)$

โดยการพิจารณาเรนจ์ของแต่ละตัวเลือก

$R_1 = \{1,2,3,4,5\} \subset B$

$R_2 = \{0,1,-1,-2,-3\} \not\subset B$

$R_3 = \{1,2,3,4\} \subset B$

$R_4 = \{1,4,5,2\} \subset B$

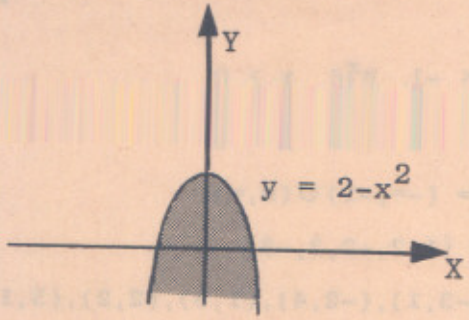
ดังนั้นตัวเลือก 2. ผิด

6 ตอบ 4.

แนวคิด $r_1 = \{(x,y) \mid x^2+y-2 \leq 0\}$

$= \{(x,y) \mid y \leq 2-x^2\}$

มีกราฟเป็น



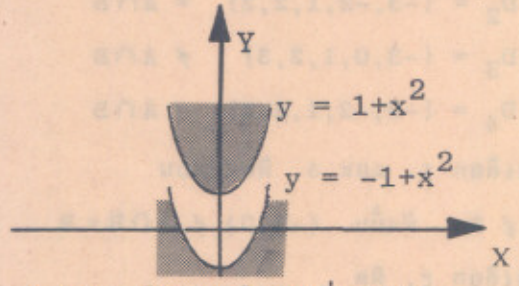
$r_2 = \{(x,y) \mid \ln|y-x^2| \geqslant 0\}$

$= \{(x,y) \mid |y-x^2| \geqslant 1\}$

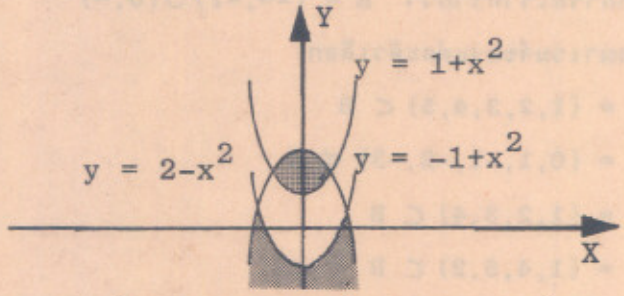
$= \{(x,y) \mid y-x^2 \leqslant -1 \text{ หรือ } y-x^2 \geqslant 1\}$

$= \{(x,y) \mid y \leqslant -1+x^2 \text{ หรือ } y \geqslant 1+x^2\}$

มีกราฟเป็น



เพราะฉะนั้น $r_1 \cap r_2$ มีกราฟเป็นส่วนที่แรเงา



เมื่อ $y = 2-x^2$ และ $y = -1+x^2$ จะได้ $2-x^2 = -1+x^2$

$x^2 = \frac{3}{2}$

$x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ ดังนั้น $y = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ $(r_1 \cap r_2)$ คือ $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1,2]$

7 ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = x-1$

$f^{-1}(x) = x+1$

จะได้ $(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x+1) = 4x^2-1$

ดังนั้น $g(x) = g((x-1)+1) = 4(x-1)^2-1$

เพราะว่า $4(x-1)^2-1 = 0$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x-1 = \pm \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid g(x) = 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\} \subset [0,4]$

วิธีลัด ขณะที่เรารู้ว่า $g(x+1) = 4x^2-1$

เมื่อพิจารณา $4x^2-1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm \frac{1}{2}$

ดังนั้น $g(\frac{3}{2}) = g(\frac{1}{2} + 1) = 0$

$g(\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2} + 1) = 0$

สรุป $\{x \mid g(x) = 0\} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$

8 ตอบ 4.

แนวคิด ห.ร.ม.$(x,y) = 9$

ค.ร.น.$(x,y) = 28215 = 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$

เพราะฉะนั้น $xy = [\text{ห.ร.ม.}(x,y)] \times [\text{ค.ร.น.}(x,y)]$

$= (9)(28215) = 253935$

เพราะว่า $253935 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 19 = 3^5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$

และมีจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวน

เพราะฉะนั้น $x = 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 495$ และ $y = 3^3 \cdot 19 = 513$

ดังนั้น $y-x = 18$

วิธีลัด จากการที่เราทราบว่า $xy = 253935$

เราสามารถนำตัวเลขในตัวเลือกมาพิจารณาเพื่อตัดตัวเลือกได้เช่น

$y-x = 18$ จะได้

$$\frac{253935}{x} - x = 18$$

$$x^2+18x-253935 = 0$$

$$x = \frac{-18 \pm \sqrt{324+4(253935)}}{2} = \frac{-18 \pm \sqrt{1016064}}{2}$$

$$= \frac{-18 \pm 1008}{2} = -513, 495$$

เพราะว่า x เป็นจำนวนเต็มบวก

ดังนั้น $x = 495$ และ $y = 495+18 = 513$

ส่วนตัวเลือกอื่นเช่น 36

$$\frac{253935}{x} - x = 36$$

$$x^2+36x-253935 = 0$$

$$x = \frac{-36 \pm \sqrt{1296+4(253935)}}{2} = \frac{-36 \pm \sqrt{1017036}}{2}$$

$$= \frac{-36 \pm 1008.482}{2}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ในทำนองเดียวกัน $y-x = 9$ และ $y-x = 45$ ไม่ได้

9 ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $f(x) = x^3+mx^2+nx+p$

ถ้า $x+3$ หาร $f(x)$ ลงตัว จะได้ว่า $f(-3) = 0$ และ 3 หาร p ลงตัว

เพราะว่า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก เพราะฉะนั้น $p = 3$ และจะได้

$$-27+9m-3n+3 = 0$$

$$9m-3n = 24 \quad \text{_____(1)}$$

เพราะว่า $x-1$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ 4

เพราะฉะนั้น $f(1) = 4$ ดังนั้น $1+m+n+3 = 4$

$$m+n = 0 \quad \text{_____(2)}$$

เพราะฉะนั้น $m = 2$ และ $n = -2$

วิธีคิด 1 จากสมการ (1) เมื่อทราบว่า $9m-3n = 24$ แล้วเราเอาค่า m,n จากตัวเลือกมาแทนก็จะได้ว่า ตัวเลือก 1. 3. และ 4 ผิด

วิธีคิด 2 นอกจากนี้เมื่อเราทราบว่า $p = 3$ และ $f(-3) = 0$ และ $f(1) = 4$

พิจารณาตัวเลือก 1. $m = 4$, $n = -4$ จะได้

$$f(x) = x^3+4x^2-4x+3 \text{ และ } f(-3) \neq 0$$

พิจารณาตัวเลือก 3. $m = -4$, $n = 4$ จะได้

$$f(x) = x^3-4x^2+4x+3 \text{ และ } f(-3) \neq 0$$

พิจารณาตัวเลือก 4. $m = -2$, $n = 2$ จะได้

$$f(x) = x^3-2x^2+2x+3 \text{ และ } f(-1) \neq 0$$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. 3. และ 4. ทิ้งได้เหมือนกัน

10 ตอบ 2.

แนวคิด
$$\frac{-(1+2+3+\ldots+n)}{n^2} = \frac{-n(n+1)}{2n^2}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leqslant -\frac{1}{2} \quad \text{ทุกค่า } n \in I^+$$

ให้ k เป็นค่าขอบเขตบน ดังนั้นทุกค่า $n \in I^+$

$$\frac{-(1+2+\ldots+n)}{n^2} \leq k$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \leq k$$

และ $\lim_{n \to \infty} (-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}) \leq k$

นั่นคือ $-\frac{1}{2} \leq k$ เพราะฉะนั้น ค่าขอบเขตบนน้อยสุดคือ $-\frac{1}{2}$

วิธีลัด ให้ $S = \{\frac{-(1+2+3+\ldots+n)}{n^2} \mid n \in I^+\}$

โดยการแทนค่า $n = 1,2,3,\ldots$ จะได้

$S = \{-1, -\frac{3}{4}, \frac{-6}{9}, \frac{-10}{16}, \ldots\}$

$= \{-1, \frac{-3}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-5}{8}, \ldots\}$ ดังนั้น -1 ไม่เป็นขอบเขตบน

เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

11 ตอบ 3.

แนวคิด $\sqrt{2}\, z^3 = 1 + i$

$$z^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + 2k\pi), \quad k=0,1,2$$

$$z = \cos(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}), \quad k=0,1,2$$

$k = 0$; $\alpha = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$

$k = 1$; $\beta = \cos\frac{9\pi}{12} + i\sin\frac{9\pi}{12}$

$k = 2$; $\gamma = \cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}$

เพราะฉะนั้น $4\alpha^4 = 4(\cos\frac{4\pi}{12} + i\sin\frac{4\pi}{12})$

$= 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 4(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 2+2\sqrt{3}\,i$

$\beta^4 = \cos\frac{36\pi}{12} + i\sin\frac{36\pi}{12} = \cos 3\pi + i\sin 3\pi = -1$

$2\gamma^4 = 2(\cos\frac{68\pi}{12} + i\sin\frac{68\pi}{12})$

$= 2(\cos(6\pi-\frac{4\pi}{12}) + i\sin(6\pi-\frac{4\pi}{12})$

$= 2(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1-\sqrt{3}\,i$

สรุป $4\alpha^4 - \beta^4 + 2\gamma^4 = (2+2\sqrt{3}\,i) + 1 + 1-\sqrt{3}\,i = 4+\sqrt{3}\,i$

12 ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูป $x^2-4x+3y^2-2 = 0$

$(x-2)^2 + 3y^2 = 6$

$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,0)$ และแกนเอกขนานกับแกน X

จะได้ $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$ ดังนั้น $c = \sqrt{6-2} = 2$

เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,0)$ และ $(4,0)$

เส้นที่ทำมุม $45°$ กับแกน X มีความชันเท่ากับ $\tan 45° = 1$

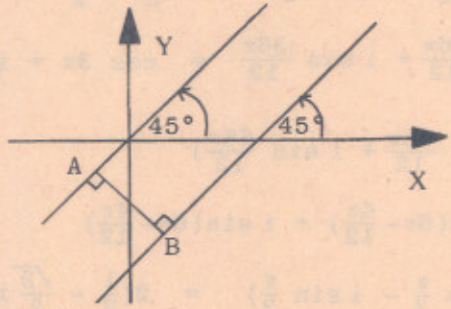
เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $y = x$ และ $y = x-4$

$x-y = 0$ และ $x-y-4 = 0$

ซึ่งมีระยะห่างเท่ากับ $\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

วิธีลัด เมื่อทราบจุดโฟกัสของวงรี (0,0) และ (4,0)

แล้วเขียนเส้นตรงจริงๆ และวัดระยะตั้งฉากก็จะได้คำตอบเหมือนกัน



ความยาว AB = 2.9

จากค่าในตัวเลือก $2\sqrt{2} = 2.82$, $4\sqrt{2} = 5.66$, 2 และ 4

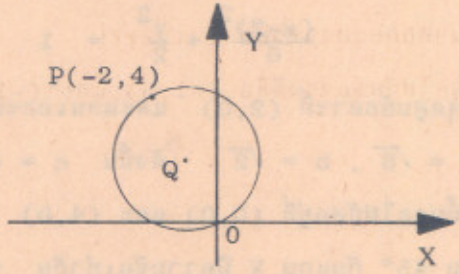
เลือกคำตอบเป็น $2\sqrt{2}$ ดีกว่า

13 ตอบ 4.

แนวคิด จัดรูป $x^2+4x+y^2-8y+11 = 0$

$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$

ดังนั้นพิกัด P(-2,4)



จุดกึ่งกลาง OP คือ Q(-1,2)

สมการเส้นตรง OP คือ $\frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = -2$ หรือ $y = -2x$

ความยาว OQ เท่ากับ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x+1)^2+(y-2)^2 = 5$

$x^2+2x+y^2-4y = 0$

วิธีลัด 1 เมื่อเราได้พิกัด P(-2,4) จะรู้ทันทีว่า ความชันเส้นตรง OP ต้องเป็นลบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3 ทิ้ง ต่อไปเอาจุด (-2,4) แทนค่าในสมการวงกลม เราก็จะตัดตัวเลือก 2. ทิ้งไปได้

วิธีลัด 2 เพราะว่าความชัน OP เท่ากับ -2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้เลย

14 ตอบ 2.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$

$$6(x^2+2x+1) + 5(y^2-4y+4) = 4+6+20$$

$$6(x+1)^2 + 5(y-2)^2 = 30$$

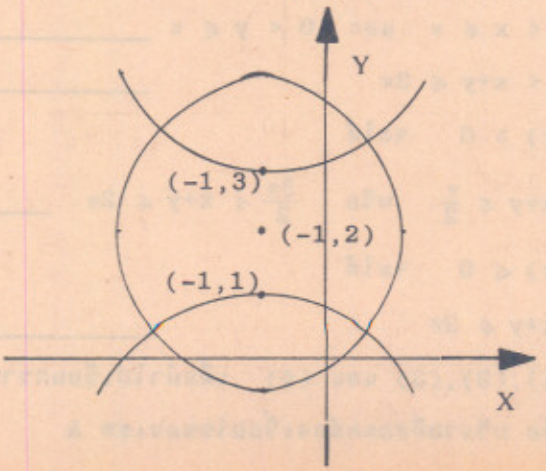
$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

วงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (-1,2) แกนเอกขนานแกน Y

$a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{5}$ ดังนั้น $c = 1$

เพราะฉะนั้นจุดยอดของวงรีคือ $(-1,2+\sqrt{6})$ และ $(-1,2-\sqrt{6})$

จุดโฟกัสของวงรีคือ (-1,3) และ (-1,1)



เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลา H จะมีจุดศูนย์กลางที่ (-1,2)

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y มีจุดยอดที่ (-1,3) และ (-1,1)

มีค่า $b = \sqrt{5}$ และ $a = 1$ ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$

$$5(y^2-4y+4) - (x^2+2x+1) = 5$$

$$5y^2-20y+20-x^2-2x-1 = 5$$

$$x^2-5y^2+2x+20y-14 = 0$$

วิธีลัด จากการที่โจทย์บอกว่า (-1,3),(-1,1) เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา ทำให้เราสามารถใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

(1) แทนค่า $x = -1$, $y = 1$ $\quad 1-5+2-20+14 \neq 0$

(3) แทนค่า $x = -1$, $y = 3$ $\quad 1-45-2+60-18 \neq 0$

(4) แทนค่า $x = -1$, $y = 1$ $\quad 5-1-2+20+8 \neq 0$

เพราะฉะนั้น 1. 3. และ 4 ผิดตัดทิ้งได้

15 ตอบ 2.

แนวคิด $0 < x \leq \pi$ และ $0 < y \leq \pi$ _____(1)

จะได้ $0 < x+y \leq 2\pi$ _____(2)

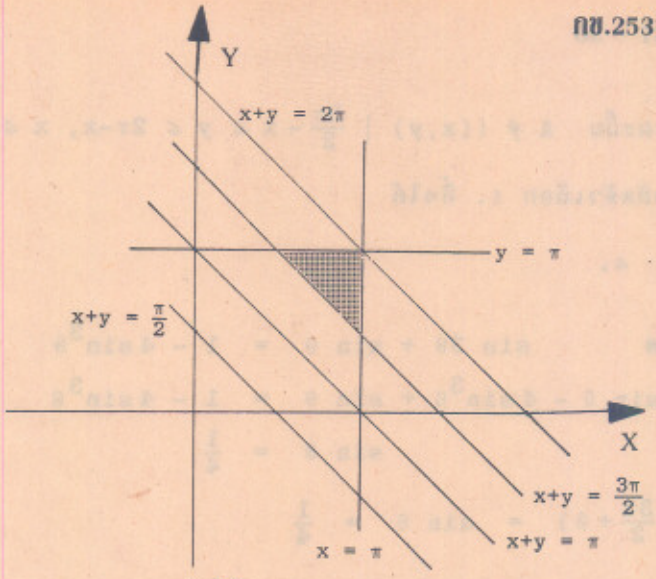
จาก $\cos(x+y) \geq 0$ จะได้

$0 \leq x+y \leq \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2} \leq x+y \leq 2\pi$ _____(3)

จาก $\sin(x+y) \leq 0$ จะได้

$\pi \leq x+y \leq 2\pi$ _____(4)

จากอสมการ (1),(2),(3) และ (4) เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้บริเวณที่แรเงาคือ บริเวณที่สอดคล้องเงื่อนไขของเซต A



สรุป $A = \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} \leq x+y$ และ $y \leq \pi$ และ $x \leq \pi\}$

$= \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi$ และ $x \leq \pi\}$

วิธีลัด ตัวเลือก 3. ตัดทิ้งได้เลย เพราะว่ามีเงื่อนไข $x > 0$

แสดงว่า $x = \frac{3\pi}{2}$ ได้ ดังนั้น

$A \neq \{(x,y) \mid 0 < y \leq 2\pi - x,\ x > 0\}$

ต่อไปเลือกมุมที่แทนค่าได้ง่ายเช่น $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\cos(x+y) = \cos \pi = -1 \leq 0$

และ $\sin(x+y) = \sin \pi = 0 \leq 0$

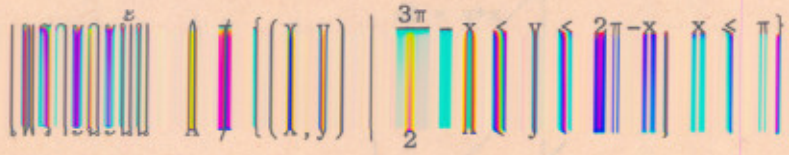
แต่ $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ไม่อยู่ในเซตของตัวเลือกข้อ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ต่อไปพิจารณา $x = \frac{\pi}{2}$ และ $y = \frac{3\pi}{2}$ กับตัวเลือก 1.

เพราะว่า $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \in \{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq 2\pi - x,\ x \leq \pi\}$

และ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \notin A$



เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

16 ตอบ 4.

แนวคิด $\sin 3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$

$$\sin\theta - 4\sin^3\theta + \sin\theta = 1 - 4\sin^3\theta$$

$$\sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\theta = \frac{1}{4}$$

$$\sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} = \frac{1}{1 - 2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{2}{16}} = \frac{16}{14} = \frac{8}{7}$$

เพราะฉะนั้น $\sec 2\theta + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \frac{8}{7} + \frac{1}{4} = \frac{39}{28}$

17 ตอบ 2.

แนวคิด
$$\begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \sin(x+y) \\ \sin x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin x\cos x + \cos x\sin x & \sin x\sin(x+y) \\ \cos x & \sin(x+y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow x = \frac{\pi}{6}$

เพราะว่า $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $0 < y \leqslant \pi$ ดังนั้น $0 \leqslant x+y \leqslant 2\pi$

ดังนั้น $\sin(x+y) = 1 \rightarrow x+y = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = \frac{\pi}{3}$

สรุป $\tan(2x+y) = \tan(\frac{2\pi}{6} + \frac{\pi}{3}) = \tan\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

18 ตอบ 4.

แนวคิด $g(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + 2\arcsin(\frac{1}{3})$

เพราะว่า $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

เพราะฉะนั้น $2\arcsin(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}) = \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$

$$g(\tfrac{1}{3}) = \arcsin(\tfrac{2}{3}) + \arcsin(\tfrac{4\sqrt{2}}{9})$$

$$(f \circ g)(\tfrac{1}{3}) = f(g(\tfrac{1}{3})) = \sin(\arcsin(\tfrac{2}{3}) + \arcsin(\tfrac{4\sqrt{2}}{9}))$$

$$= \sin(\arcsin(\tfrac{2}{3}))\cos(\arcsin(\tfrac{4\sqrt{2}}{9})) + \sin(\arcsin(\tfrac{4\sqrt{2}}{9}))\cos(\arcsin(\tfrac{2}{3}))$$

$$= \frac{2}{3}\cos(\arccos\sqrt{1-\frac{32}{81}}) + \frac{4\sqrt{2}}{9}\cos(\arccos\sqrt{1-\frac{4}{9}})$$

$$= (\tfrac{2}{3})(\tfrac{7}{9}) + (\tfrac{4\sqrt{2}}{9})(\tfrac{\sqrt{5}}{3}) = \frac{14+4\sqrt{10}}{27} = \frac{2}{27}(7+2\sqrt{10})$$

19 ตอบ 2.

แนวคิด $(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$

$$\frac{2\log 0.5}{\log 3} \cdot \frac{\log x}{\log 0.5} = \log_3 4$$

$$\log_3 x^2 = \log_3 4$$

$$x^2 = 4$$

เพราะว่า $x = -2$ ไม่ได้ ดังนั้น $x = 2$

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$

$$(y-1)(0.477) = (2y-3)(0.301)$$

$$0.477y - 0.477 = 0.602y - 0.903$$

$$0.125y = 0.426$$

$$y = 3.408$$

เพราะฉะนั้น $0 < x < y$

วิธีลัด เมื่อเรารู้ว่า $x = 2$ และ $3^{2-1} = 3 \neq 2 = 2^{4-3}$

ดังนั้น $y \neq 2$ แน่จึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ในกรณีที่เราจำค่า log 2 และ log 3 ไม่ได้ อาจพิจารณาค่า y ดังนี้

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$

$$y\log 3 - \log 3 = 2y\log 2 - 3\log 2$$

$$= y\log 4 - \log 8$$

$$y(\log 3 - \log 4) = \log 3 - \log 8$$

$$y\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{8}\right)$$

เพราะว่า $\log \frac{3}{4} < 0$ และ $\log \frac{3}{8} < 0$

เพราะฉะนั้น $y > 0$ ดังนั้นตัวเลือก 3. ผิด

เหลืออีก 2 ตัวเลือกต้องเดา

20 ตอบ 3.

แนวคิด จาก $\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots$

$$= \frac{\log x}{\log 3} - \frac{\log x}{2\log 3} + \frac{\log x}{4\log 3} - \frac{\log x}{8\log 3} + \ldots$$

$$= \frac{\log x}{\log 3}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\log x}{\log 3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\log_3 x$$

พิจารณาอสมการ $\frac{2}{3}\log_3 x < 1 = \log_3 3$

$$\log_3 x < \frac{3}{2}\log_3 3$$

$$\log_3 x < \log_3 3^{(3/2)}$$

$$x < 3^{(3/2)} = 3\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{3}\log_3 x < 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < x < 3\sqrt{3}$

วิธีลัด โดยการแทนค่าแบบง่ายๆ ด้วย $x = 1$ จะได้

$$\log_3 1 - \log_2 1 + \ldots = 0$$

ดังนั้น $x = 1$ ได้ เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้ ต่อไปลองแทนค่า $x = 3$ จะได้

$$\log_3 3 - \log_{3^2} 3 + \log_{3^4} 3 - \log_{3^8} 3 + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ได้เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

21 ตอบ 1.

แนวคิด $2^{2x} + 2^{-2x} + 2 = \frac{(2^{2x})^2 + 1 + 2(2^{2x})}{2^{2x}}$

$$= \frac{(2^{2x}+1)^2}{2^{2x}} = \left[\frac{2^{2x}+1}{2^2}\right]^2$$

เพราะฉะนั้น $y = \dfrac{2^{2x}+1}{2^x}$

$$2^x y = 2^{2x}+1$$

$$(2^x)^2 - y\,2^x + 1 = 0$$

$$2^x = \frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}$$

$$x = \log_2\left(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2}\right)$$

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้มีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่าที่ง่ายและเหมาะสมเราก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้เช่น

$x = 0$ จะได้ $y = \sqrt{1+1+2} = 2$ เอา $y = 2$ แทนค่าตัวเลือก

(1) $\log_2\left(\frac{2+0}{2}\right) = \log_2 1 = 0$ ใช้ได้

(2) $\log_2\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) \neq 0$ ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งเลย

(3) $\log\left(\frac{2+0}{2}\right) = \log 1 = 0$ ยังตัดทิ้งไม่ได้

(4) $\log\left(\frac{2+\sqrt{8}}{2}\right) \neq 0$ ตัดทิ้งได้เลย

ตัวเลือกหายไป 2 ตัวแล้วจะเดา 1. หรือ 3. ก็ได้

ลองแทนค่าต่อเช่น $x = 1$

จะได้ $y = \sqrt{4 + \frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{16+1+8}{4}} = \frac{5}{2}$

แทนค่าในตัวเลือก 1. และ 3.

(1) $\log_2\left(\dfrac{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-4}}{2}\right) = \log_2\left(\dfrac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = 1$

(3) $\log_2 \left(\frac{\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{25}{4} + 4}}{2} \right) \neq 1$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

22 ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x}$

$= \log_x 2 + \log_x 3 + \ldots + \log_x 9 + \log_x 10 = \log_x 10!$

เพราะว่า $\log_x 10! \leq 1$

$\frac{\log 10!}{\log x} \leq 1$

เมื่อ $0 < x < 1$ จะได้ $\log x < 0$ ดังนั้น $\frac{\log 10!}{\log x} \leq 1$

เมื่อ $x > 1$ จะได้ $\log x > 0$

$\log 10! \leq \log x$

$10! \leq x$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(0,1) \cup [10!, \infty)$

วิธีคิด 1 เมื่อเราทราบว่า

$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x} = \log_x 10! \leq 1$

จะพบว่า $x = 10!$ ได้ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

และ $x = 0.1$ ได้เพราะว่า $\frac{\log 10!}{\log 0.1} = -\log 10! \leq 1$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

วิธีลัด 2 โดยการเลือกค่า x ที่เหมาะสมคือ คิดเลขง่าย และจำแนก-

ตัวเลือกได้เช่น $x = 10$ จะได้

$$\log_{10} 10 = 1 \quad \text{และ} \quad \log_n 10 > 0 \quad , n = 2,3,\ldots,9$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\log_2 10} + \frac{1}{\log_3 10} + \ldots + \frac{1}{\log_{10} 10} > 1$

นั่นคือเซตคำตอบต้องไม่มี 10 เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

23 ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$

$$= \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = x-2 \quad \text{เมื่อ } x \neq \pm 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x-2 = -1$$

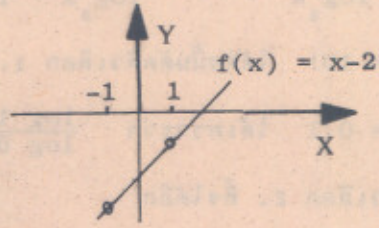
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} x-2 = -3$$

เพื่อให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$

ต้องกำหนดให้ $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = -1$

และ $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = -3$

วิธีลัด จากกราฟของ $f(x) = x-2$ เมื่อ $x \neq \pm 1$ มีกราฟเป็น



เพื่อให้ $f(x)$ ต่อเนื่องต้องกำหนด $f(1) = -1$ และ $f(-1) = -3$

24 ตอบ 1.

แนวคิด $1 = h(0) = (f \circ g)(0) = c$

เพราะฉะนั้น $h(x) = ax^2+bx+1$

เพราะว่า $h(-2) = 5$ เพราะฉะนั้น

$4a-2b+1 = 5$

$2a-b = 2$ _____(1)

เพราะว่า $h'(x) = 2ax + b$ และ $h'(-2) = 0$

เพราะฉะนั้น $-4a+b = 0$ _____(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = -1$ และ $b = -4$

เพราะฉะนั้น $h(x) = (f \circ g)(x) = -x^2-4x+1$

$(f \circ g)(1) = -1-4+1 = -4$

เพราะว่า $f(x) = 3x-10$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x+10}{3}$

สรุป $g(1) = f^{-1}((f \circ g)(1)) = f^{-1}(-4)$

$= \frac{-4+10}{3} = 2$

25 ตอบ 2.

แนวคิด $g(x) = x^3$ จะได้ $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$F(x) = f(g^{-1}(x)) = f(x^{\frac{1}{3}}) = 2-|x-3|$

$\lim_{x \to 3^+} F(x) = \lim_{x \to 3^+} 2-|x-3| = 2$

$\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^-} 2-|x-3| = 2$

เพราะฉะนั้นข้อความ ก. ถูกต้อง

เพราะว่า $\dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \dfrac{(2-|x-3|)-2}{x-3} = \dfrac{-|x-3|}{x-3}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x-3}{x-3} = 1$

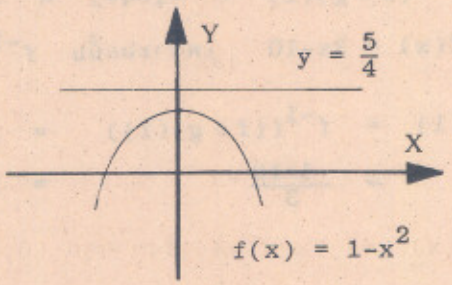
$\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิด

26 ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $(0,1)$ เป็นจุดยอด และ $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์

ดังนั้น $c = \frac{-1}{4}$ และโฟกัส $(0, \frac{3}{4})$



สมการพาราโบลาคือ $x^2 = 4(-\frac{1}{4})(y-1) = 1-y$

หรือ $f(x) = y = 1-x^2$ และ $f(x) \geq 0$ บนช่วง $[-1,1]$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $= \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx$

$= (x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$

$= (1 - \frac{1}{3}) - (-1 + \frac{1}{3}) = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

27 ตอบ 1. และ 3.

แนวคิด ความชัน $\frac{dy}{dx} = 2-2x$

ดังนั้น $f(x) = y = \int (2-2x)dx = 2x-x^2+k$

เพราะว่าพื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ คือ

$$\int_0^3 |2x-x^2+k|\,dx = 9$$

$$\left| x^2 - \frac{x^3}{3} + kx \right| \Big|_0^3 = 9$$

$$|9 - 9 + 3k| = 9$$

$$|3k| = 9$$

$$k = \pm 3$$

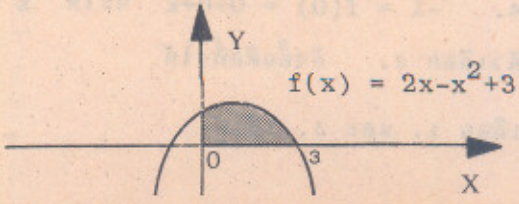
ดังนั้น $f(x) = 2x-x^2+3$ ซึ่งผ่านจุด $(3,0)$

และ $f(x) = 2x-x^2-3$ ซึ่งผ่านจุด $(0,-3)$

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้สามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก นั้นคือ $f(x) = 2x-x^2+k$ และพิจารณาค่า k จากแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $0 = f(3) = 6-9+k$ จะได้ $k = 3$

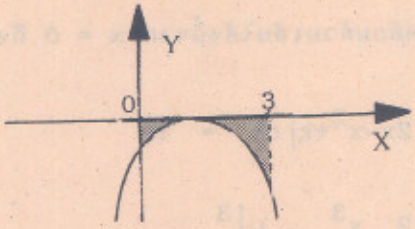
$f(x) = 2x-x^2+3 \geq 0$ บนช่วง $[0,3]$



$\int_0^3 f(x)dx$ [illegible] 0 [illegible]

ตัวเลือก 2. $0 = f(x) = 2-1+k$ จะได้ $k = -1$

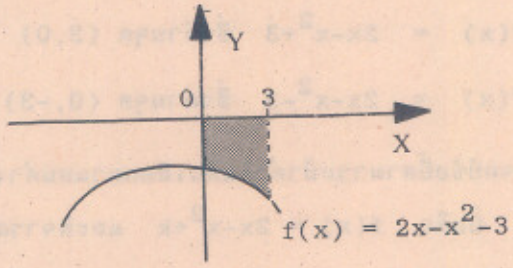
$f(x) = 2x-x^2-1 = -(x-1)^2 \leq 0$ บนช่วง $[0,3]$



$\left|\int_0^3 f(x)dx\right| = 3 \neq 9$ ตามโจทย์ ดังนั้นตัวเลือก 2. ตัดทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $-3 = f(0) = 0-0+k$ จะได้ $k = -3$

$f(x) = 2x-x^2-3 \leq 0$ บนช่วง $[0,3]$



$\left|\int_0^3 f(x)dx\right| = 9$ ซึ่งสอดคล้องกับโจทย์เหมือนกัน

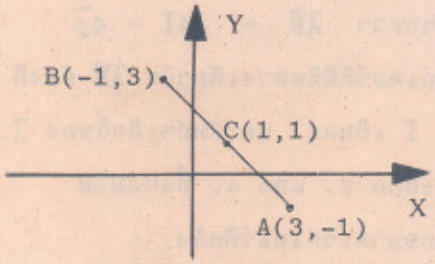
ตัวเลือก 4. $-1 = f(0) = 0+0+k$ จะได้ $k = -1$

เหมือนกับตัวเลือก 2. ดังนั้นตัดทิ้งได้

สรุป ตัวเลือก 1. และ 3. ใช้ได้

28 ตอบ 3.

แนวคิด



จุดกึ่งกลาง A และจุด B คือ $(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-1}{2}) = (1,1)$

$$\overrightarrow{AB} = (-1-3)\bar{i} + (3+1)\bar{j} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-3)\bar{i} + (1+1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overrightarrow{CB} = (-1-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = (-2)(-2) + (2)(2) = 8$$

เวกเตอร์ที่ต้องการคือ $\frac{8\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{8}{\sqrt{16+16}}(-4\bar{i} + 4\bar{j})$

$$= \frac{32}{\sqrt{32}}(-\bar{i} + \bar{j}) = -4\sqrt{2}\,\bar{i} + 4\sqrt{2}\,\bar{j}$$

วิธีตัด 1 เมื่อรู้ว่า $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = 8$

ดังนั้นเวกเตอร์ที่ต้องการต้องมีขนาดเท่ากับ 8

แต่ $|-4\bar{i} + 4\bar{j}| = \sqrt{32} = |4\bar{i} - 4\bar{j}| \neq 8$

เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

เพราะว่าเวกเตอร์ที่ต้องการมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ต้องเป็นเลขบวกเหมือนของ $\overrightarrow{AB}$

เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีลัด 2 เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ ต้องมี
สัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ เป็นลบ และสัมประสิทธิ์ของ $\bar{j}$ เป็นบวก
ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งก่อนได้
แล้วจึงตรวจสอบขนาดเวกเตอร์ทีหลัง

29 ตอบ 3.

แนวคิด
$$|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} + \bar{w}|$$
$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{v} + \bar{w}|^2$$
$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2$$

เพราะว่า $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ ดังนั้น $-\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$

เพราะว่า $\frac{\pi}{5}$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\ |\bar{v}|} = \frac{-\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{w}|\ |\bar{v}|}$

$\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{|\bar{v}|\ |\bar{w}|}$

เพราะฉะนั้นมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ คือ $\frac{4\pi}{5}$

วิธีลัด มุมระหว่างเวกเตอร์ต้องอยู่ในช่วง $[0,\pi]$
ดังนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้เลย
ในขั้นตอนการคิดที่ทำมาเมื่อ $-\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$ แสดงว่า
มุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ไม่เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 2.ทิ้งได้อีก
เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\bar{v}\cdot\bar{w} \neq 0$
เพราะฉะนั้น $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ไม่ขนานกันแน่นอน เราจึงตัดตัวเลือก 1.
ทิ้งได้อีก

30 ตอบ 3.

แนวคิด (1) $\det(AA^t) = \det A \cdot \det A^t$

$= \det A \cdot \det A = \det(A^2)$

(2) $\det(kA)^2 = \det(kA) \cdot \det(kA)$

$= k^n \det A \cdot k^n \det A = k^{2n} \det(A^2)$

(4) เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$

เพราะฉะนั้น $A \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\left(A \cdot \text{adj}(A)\right)$

$(\det(A))I = A(\text{adj}(A))$

ในทำนองเดียวกัน $(\det(A))I = (\text{adj}(A))A$

หมายเหตุ ในกรณีที่ $\det(A) = 0$,

$(\det(A))I = A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A$ ด้วย

(3) ผิดเช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = 1$

แต่ $\det(A^2+A) = \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 6$

และ $(\det A + 1)\det A = 2$

31 ตอบ 1.

แนวคิด $\det(A) = 3$

เพราะว่า $AB = BA = I$ เพราะฉะนั้น $B = A^{-1}$

เพราะว่า $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{adj}(B)$

เพราะฉะนั้น $\text{adj}(B) = \det(B) \cdot B^{-1}$

$= \frac{1}{\det(A)} \cdot (A^{-1})^{-1} = \frac{1}{3} A$

ข้อนี้ความจริงก็ง่ายดี แต่ B และ adj (B) พิมพ์ติดกันมากไป เลยมีความหมายเป็น B(adj B) ซึ่งบางคนอาจตีความเป็นการหา B คูณกับ adj (B) ซึ่งมีแนวทางในการหาดังนี้

จาก $\text{adj}(B) = \frac{1}{3} A$

$B \text{ adj}(B) = \frac{1}{3} BA = \frac{1}{3} I$

เพราะฉะนั้น $B \text{ adj}(B) = \frac{1}{3} I = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$\det(B \text{ adj}(B)) = (\frac{1}{3})^3$

และ $(B \text{ adj}(B))^{-1} = 3I$

เพราะว่า $[B \text{ adj}(B)]^{-1}$

$= \frac{1}{\det(B \text{ adj}(B))} \cdot \text{adj}(B \text{ adj}(B))$

$3I = \frac{1}{(\frac{1}{3})^3} \text{ adj}(B \text{ adj}(B))$

$\text{adj}(B \text{ adj}(B)) = \frac{1}{9} I$

ถือว่าโชคดีไปที่ไม่มีตัวเลือก $\frac{1}{9} I$ ให้มา

วิธีคิด สำหรับการหา adj (B)

เพราะว่า $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \text{adj}(B)$

$\det(B) \cdot B^{-1} = \text{adj}(B)$

$\frac{1}{3} \cdot A = \text{adj}(B)$

เพราะฉะนั้น $\det(\text{adj}(B)) = (\frac{1}{3})^3 \det(A) = \frac{1}{9}$

จากตัวเลือก 2. และ 4. $\det(-3A) = (-3)^3 \det A$

$= -81 = \det(3A^t)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

32 ตอบ 2.

แนวคิด $AB - AC - \frac{1}{2} I = 0$

$A(B - C) = \frac{1}{2} I$

$2A(B - C) = I$

$A(2(B - C)) = I$

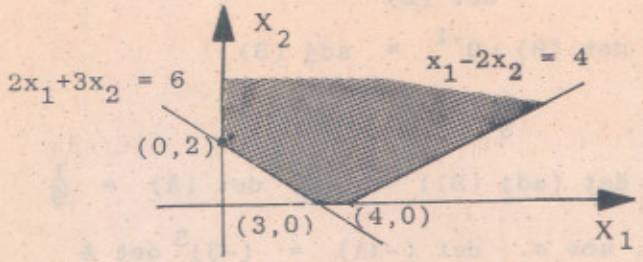
เพราะฉะนั้น $A^{-1} = 2(B - C)$

$$= 2\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

33 ตอบ ไม่มีคำตอบ

แนวคิด เขียนกราฟแสดงบริเวณดังนี้



โดยการแก้สมการจะได้จุดมุมคือ (0,2),(3,0) และ (4,0)

(x_1,x_2)	$z = 3x_1-5x_2$
(0,2)	-10
(3,0)	9
(4,0)	12

เพราะว่าบนเส้นตรง $x_1-2x_2 = 4$ จะได้ $x_2 = \frac{x_1-4}{2}$

เพราะฉะนั้น $z = 3x_1-5x_2 = 3x_1 - 5\left(\frac{x_1-4}{2}\right)$

$= \frac{x_1}{2} + 10$

นั่นคือเมื่อ x_1 มากขึ้นตามเส้นตรง $x_1-2x_2 = 4$

จะได้ว่า z มีค่ามากขึ้นเรื่อยๆ เพราะฉะนั้น z ไม่มีค่าสูงสุด

หมายเหตุ 1. โจทย์ข้อนี้สับสนเพราะว่าโจทย์กล่าวในพจน์ x_1 และ x_2 แต่ตัวเลือกกล่าวในพจน์ของ x และ y

2. ถึงแม้ $\frac{x}{4} - \frac{y}{2} = 1 \longrightarrow x-2y = 4$

สอดคล้องตามสมการ $x_1-2x_2 = 4$ แต่ก็ถือว่า z ไม่มีค่าสูงสุด

34 ตอบ 4.

แนวคิด **ขั้นตอนที่ 1** เลือกหญิง 3 คนเพื่อทำงานชนิดที่ 1 มี $\binom{6}{3}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกชาย 5 คนเพื่อทำงานชนิดที่ 2 มี $\binom{9}{5}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกคน 3 คน ชายหรือหญิงก็ได้จาก 7 คนที่เหลือ

ทำได้ $\binom{7}{3}$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมด = $\binom{6}{3}\binom{9}{5}\binom{7}{3} = (20)(126)(35) = 88200$

35 ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาเป็นลำดับเรขาคณิต $a = 1$ และ $r = 1+x^2$

$$1 + (1+x^2) + (1+x^2)^2 + \ldots + (1+x^2)^{50} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{(1)(1-(1+x^2)^{51})}{1-(1+x^2)} = \frac{1-(1+x^2)^{51}}{-x^2}$$

เพราะว่าพจน์ที่มี x^{56} ของ $(1+x^2)^{51}$ คือ $\binom{51}{28}(x^2)^{28} = \binom{51}{28}x^{56}$

เพราะฉะนั้นพจน์ที่มี x^{54} ของ $\frac{1-(1+x^2)^{51}}{-x^2}$ คือ $\binom{51}{28}x^{54}$

36 ตอบ 1.

แนวคิด จำนวนวิธีทั้งหมดในการหยิบเลข 4 ตัวจาก 8 ตัว คือ

$$\binom{8}{4} = 70$$

การที่เลข 4 ตัวจะคูณกันแล้วมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่คือ ต้อง

เป็นเลขคี่ทั้ง 4 ตัวที่มีเท่านั้น ซึ่งทำได้แค่วิธีเดียว

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ต้องการเท่ากับ $\frac{1}{70}$

37 ตอบ 1.

แนวคิด จากข้อมูลชุด A $\bar{x}_A = \frac{\Sigma x_A}{5} = \frac{75}{5} = 15$

$$\Sigma (x - \bar{x}_A)^2 = \Sigma (x - 15)^2$$

$$= (-10)^2+(-5)^2+0+5^2+10^2 = 250$$

เพราะฉะนั้น $s_A = \sqrt{\frac{250}{5}} = \sqrt{50} = 7.07$

และสัมประสิทธิ์การแปรผันของชุด A $= \frac{s_A}{\bar{x}_A} = \frac{7.07}{15} = 0.47$

จากข้อมูลชุด B $\bar{x}_B = \frac{\Sigma x_B}{5} = \frac{200}{5} = 40$

$$\Sigma (x - \bar{x}_B)^2 = \Sigma (x - 40)^2$$

$$= (-25)^2+(-10)^2+5^2+20^2+10^2 = 1250$$

เพราะฉะนั้น $s_B = \sqrt{\frac{1250}{5}} = \sqrt{250} = 15.81$

และสัมประสิทธิ์การแปรผันของชุด B $= \frac{s_B}{\bar{x}_B} = \frac{15.81}{40} = 0.395$

สรุป ก.ถูก และ ข.ถูก

38 ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนคนงาน N = 1+3+x+5+8+y+10+4 = 31+x+y

P_{25} ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{N}{4}$

เพราะว่า P_{25} = 100.5 ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 96 - 100

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{N}{4} = \frac{31+x+y}{4}$

$36+4x = 31+x+y$

$3x-y = -5$ _____(1)

Q_3 ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{3N}{4}$

เพราะว่า Q_3 = 110.5 ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 106 - 110

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5+8+y = \frac{3N}{4} = \frac{3}{4}(31+x+y)$

$4(17+x+y) = 3(31+x+y)$

$68+4x+4y = 93+3x+3y$

$x+y = 25$ _____(2)

จากสมการ (1) และ (2) ได้ x = 5 และ y = 20

เพราะฉะนั้นคนงานที่ได้ค่าจ้างต่ำกว่า 105.5 บาท มี 1+3+x+5+8 = 22 ค

วิธีลัด 1 เมื่อ N = จำนวนคนทั้งหมด

เพราะว่า P_{25} = 100.5 เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{N}{4}$

เพราะว่า Q_3 = 110.5 เพราะฉะนั้น $\frac{N}{4} = 10+4$

ดังนั้น $9+x = 14$

$x = 5$

จะได้คนที่มีรายได้ต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับ 22 คน เหมือนกัน

วิธีลัด 2 พิจารณาตัวเลือก 1.

ถ้า $8+5+x+3+1 = 16$ แล้ว $x = -1$ ดังนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้ง

พิจารณาตัวเลือก 2. ถ้า $8+5+x+3+1 = 28$ แล้ว $x = 11$

จะขัดแย้งกับ $1+3+11+5 = 20 = \frac{N}{4} \neq 14$

ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 4. ผิดด้วย

39 ตอบ 4.

แนวคิด เรียงตัวเลขจากน้อยไปมากได้ 2, 4, 6, 9, 12, 15 เพราะว่า $2 < a < 12$ เพราะฉะนั้นการเรียงลำดับข้อมูลทั้งหมดอาจเป็น 4 กรณี

(1) 2, a, 4, 6, 9, 12, 15

(2) 2, 4, a, 6, 9, 12, 15

(3) 2, 4, 6, a, 9, 12, 15

(4) 2, 4, 6, 9, a, 12, 15

ค่าเฉลี่ยของข้อมูลเท่ากับ $\frac{2+4+6+9+12+15+a}{7} = \frac{48+a}{7}$

กรณี	Q_1	Q_3	$\frac{(Q_3-Q_1)}{2}$	มัธยฐาน
1	a	12	$\frac{(12-a)}{2}$	6
2	4	12	4	6
3	4	12	4	a
4	4	12	4	9

พิจารณากรณีที่ 1 $\bar{x} = 2\,\frac{Q_3-Q_1}{2}$

$$\frac{48+a}{7} = 2\left(\frac{12-a}{2}\right)$$

$$48+a = 84-7a$$

$$a = 4.5$$

ซึ่งขัดแย้งกับ $2 < a < 4$ ดังนั้นกรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

พิจารณากรณีที่ 2, 3 และ 4 $\bar{x} = 2\,\frac{Q_3-Q_1}{2}$

$$\frac{48+a}{7} = 2(4)$$

$$48+a = 56$$

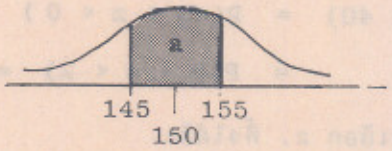
$$a = 8$$

เพราะฉะนั้นกรณีที่เป็นไปได้คือ กรณีที่ 3 2, 4, 6, 8, 9, 12, 15

และมัธยฐาน = a = 8

40 ตอบ 4.

แนวคิด



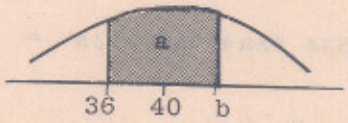
เมื่อ $x = 145$ จะได้ $z = \frac{145-150}{4} = -1.25$

$x = 155$ จะได้ $z = \frac{155-150}{4} = 1.25$

เพราะว่า $P(145 < x < 155) = P(-1.25 < z < 1.25)$

$= 2\,P(0 < z < 1.25) = 2\,(0.3944) = 0.7888$

เพราะฉะนั้น $a = 0.788\,(100) = 78.88\ \%$



เมื่อ $x = 36$ จะได้ $z = \frac{36-40}{2} = -2$

$x = 40$ จะได้ $z = 0$

เพราะว่า $P(36 < x < 40) = P(-2 < z < 0)$

$= P(0 < z < 2) = 0.4773$

$= 0.3115 = P(0 < z < 0.89)$

เมื่อ $z = 0.89$ จะได้ $\frac{x-40}{2} = 0.89$

$x = 41.78$ เพราะฉะนั้น $b < 42$

วิธีลัด เมื่อเราทราบค่า $a = 0.7888$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง ต่อไปพิจารณาค่า $x = 40$

$P(36 < x < 40) = P(-2 < z < 0)$

$= P(0 < z < 2) = 0.4773 \neq 0.7888$

จึงทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

41 ตอบ 3.

แนวคิด รายได้ในปี 2536 จะได้

$y = 6.5(2536 - 2529) + 60 = 105.5$

รายได้ในปี 2535 $y = 6.5(2535 - 2529) + 60 = 99$

เพราะฉะนั้นรายได้แท้จริงของปี 2536 คือ $\frac{105.5}{1.10} = 95.9$

ดังนั้นรายได้ในปี 2536 ลดลงจากปี 2535 $= 99 - 95.91 = 3.10$

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 - 6 ข้อละ 3 คะแนน

1 ตอบ 48

แนวคิด ให้ $X = \{0,1,2,\ldots,100\}$ เพราะว่า $15 = 3 \times 5$ เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 15 คือจำนวนที่ 3 หรือ 5 หารลงตัว

ให้ $A = \{x \in X \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{0,3,6,9,\ldots,99\}$

$B = \{x \in X \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{0,5,10,15,\ldots,100\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{0,15,30,\ldots,90\}$

$n(A) = 34 \ , n(B) = 21 \ , n(A \cap B) = 7$

เพราะฉะนั้น $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$= 34 + 21 - 7 = 48$

2 ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณากรณี b,c,d,e เป็นจำนวนจริง

เมื่อ $f(1) = 0$ จะได้ $1+b+c+d+e = 0$

$b+c+d+e = -1$ _____(1)

เมื่อ $f(2) = 9$ จะได้ $16+8b+4c+2d+e = 9$

$8b+4c+2d+e = -7$ _____(2)

เมื่อ $f(2+\sqrt{3}i) = 0$ จะได้

$(2+\sqrt{3}i)^4 + (2+\sqrt{3}i)^3 b + (2+\sqrt{3}i)^2 c + (2+\sqrt{3}i)d + e = 0$

เพราะว่า $(2+\sqrt{3}i)^2 = 4+2\sqrt{3}i - 3 = 1+2\sqrt{3}i$

$(2+\sqrt{3}i)^3 = (1+2\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i) = -4+5\sqrt{3}i$

$(2+\sqrt{3}i)^4 = (1+2\sqrt{3}i)^2 = 1+4\sqrt{3}i-12 = -11+4\sqrt{3}i$

เพราะฉะนั้น

$-11+4\sqrt{3}i + (-4+5\sqrt{3}i)b + (1+2\sqrt{3}i)c + (2+\sqrt{3}i)d + e = 0$

จะได้สมการส่วนจำนวนจริงและส่วนจินตภาพเป็น

$-11-4b+c+2d+e = 0$

$-4b+c+2d+e = 11$ _____(3)

และ $4\sqrt{3}\,i + 5\sqrt{3}\,i\,b + 2\sqrt{3}\,i\,c + \sqrt{3}\,i\,d = 0$

$4+5b+2c+d = 0$

$5b+2c+d = -4$ _____(4)

จากระบบสมการ (1),(2),(3) และ (4) จะได้

$b = -4$, $c = 6$, $d = 4$ และ $e = -7$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^4-4x^3+6x^2+4x-7$

$f'(x) = 4x^3-12x^2+12x+4$ ดังนั้น $f'(x) = 4$

วิธีลัด เพราะว่า $f'(x) = 4x^3+3bx^2+2cx+d$

ดังนั้น $f'(0) = d$

เพราะฉะนั้นในการหาคำตอบของระบบสมการเราหาเฉพาะค่า $d = 4$ ก็พอ

วิธีที่ 2 ในกรณีที่ b,c,d และ e เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$x = 1,\ 2+\sqrt{3}\,i$ เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$

ดังนั้น $x = 2-\sqrt{3}\,i$ เป็นรากด้วย และสมมติ $k \in R$ และ

$f(x) = (x-1)(x-(2+\sqrt{3}\,i))(x-(2-\sqrt{3}\,i))(x+k)$

$= (x-1)(x^2-4x+7)(x+k)$

จาก $f(x) = (x-1)(x^2-4x+7)(x+k)$

$9 = f(2) = (2-1)(4-8+7)(2+k) = 3(k+2)$

$k = 1$ จาก $f(x) = (x-1)(x^2-4x+7)(x+1) = x^4-4x^3+6x^2+4x-7$

$f'(x) = 4x^3-12x^2+12x+4$ ดังนั้น $f'(0) = 4$

3 ตอบ 16

แนวคิด แทน $y = \frac{1}{k}x^2$ ใน $x-y = 4$ จะได้

$x - \frac{1}{k}x^2 = 4$

$$\frac{1}{k}x^2 - x + 4 = 0 \quad \text{.....(1)}$$

เพราะว่าสมการ $ax^2+bx+c = 0$ มีรากตัวเดียวก็ต่อเมื่อ $b^2-4ac = 0$

จาก (1) $a = \frac{1}{k}$, $b = -1$ และ $c = 4$

$b^2-4ac = (-1)^2 - 4(\frac{1}{k})(4) = 0$ จะได้ $k = 16$

4 ตอบ 1200

แนวคิด x = ความเร็วหน่วยเป็นกิโลเมตร/ชั่วโมง

$f(x)$ = ค่าใช้จ่ายเมื่อความเร็วเป็น x

$$f(x) = 600(\frac{1}{400}(\frac{1600}{x} + x))(10) = \frac{24000}{x} + \frac{30}{2}x$$

$$f'(x) = \frac{-2400}{x^2} + \frac{30}{2} \quad \text{และ} \quad f''(x) = \frac{4800}{x^3}$$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{-2400}{x^2} + \frac{30}{2} = 0$

$$\frac{30}{2} = \frac{2400}{x^2} \leftrightarrow x^2 = 160 \leftrightarrow x = 40$$

เพราะว่า $f''(40) > 0$ เพราะฉะนั้น $f(40)$ เป็นค่าต่ำสุด

$$f(40) = \frac{24000}{40} + \frac{30(40)}{2} = 600+600 = 1200$$

5 ตอบ 62

แนวคิด การจัด O และ X ลงในช่องเหมือนกับการจัดลำดับของ 6 สิ่ง แบบมีการซ้ำ เช่น O 2 ตัว และ X 4 ตัว ทำได้

$\frac{6!}{2!4!} = 15$ วิธี

สรุปเป็นตารางดังนี้

		จำนวนวิธี
5	1	$\frac{6!}{5!1!} = 6$
4	2	$\frac{6!}{4!2!} = 15$
3	3	$\frac{6!}{3!3!} = 20$
2	4	$\frac{6!}{2!4!} = 15$
1	5	$\frac{6!}{1!5!} = 6$
		รวม 62

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ 62

6 ตอบ 7000 บาท

แนวคิด จาก $y = mx+c$ และเส้นตรงผ่าน $(0,-3)$

จะได้ $-3 = 0+c$ ดังนั้น $c = -3$

เพราะว่า $c = \bar{y}-m\bar{x}$ เพราะฉะนั้น $-3 = 5-12m$

$$m = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

ดังนั้น $y = \frac{2}{3}x - 3$

เมื่อรายได้เท่ากับ 15000 บาท จะได้ $x = 15$

ดังนั้น $y = \frac{2}{3}(15) - 3 = 7$

เพราะฉะนั้นรายจ่ายเท่ากับ 7000 บาท