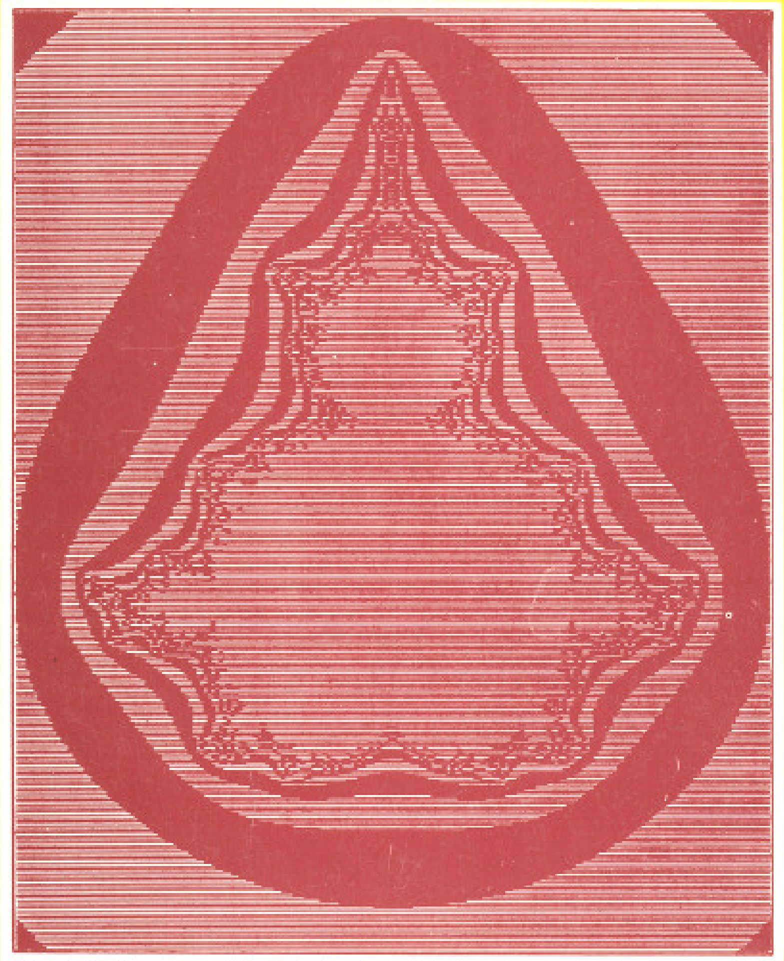
คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 14

วิธีจริง vs. วิธีตัดตัวเลือก

เฉลยข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ โครงการแข่งขันวัฏจักร คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 1 – ครั้งที่ 5



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 9746352776

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 14

เฉลยข้อสอบ

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์
ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย

วิชา คณิตศาสตร์

ครั้งที่ 1.	25 พฤศจิกายน	2535
ครั้งที่ 2.	13 พฤศจิกายน	2536
ครั้งที่ 3.	26 พฤศจิกายน	2537
ครั้งที่ 4.	2 ธันวาคม	2538
ครั้งที่ 5.	25 มกราคม	2540

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 14) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา
เฉลยข้อสอบแข่งขันโครงการวัฏจักรคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์
ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย วิชาคณิตศาสตร์
ครั้งที่ 1 - 5

ISBN 9746352776

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2000 เล่ม พ.ศ. 2540

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร 2183980-2 2187000 โทรสาร 2554441

พิมพ์ที่โรงพิมพ์ พิทักษ์การพิมพ์
โทร 4112765

คำนำ

ข้อสอบ วิชาคณิตศาสตร์ ของโครงการแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ได้มีส่วนช่วยให้เกิดการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลายเป็นอย่างมากอีกทั้งเป็นการเตรียมความพร้อมของนักเรียนระดับ ม.ปลายเพื่อการสอบไล่ในห้องเรียนและการสอบ ENTRANCE ทั้งข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. และ กข.

ในหนังสือเล่มนี้ได้รวบรวมข้อสอบ วัฏจักร/คณิตศาสตร์ ตั้งแต่ครั้งแรกจนถึงครั้งล่าสุดคือครั้งที่ 5 ที่สอบไปเมื่อ 26 มกราคม 2540 แนวทางในการเฉลยข้อสอบทุกข้อจะใช้ทั้งวิธีจริง วิธีลัด และใช้เทคนิคของการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมกับข้อสอบข้อนั้นๆ

เพื่อให้เกิดประโยชน์สูงสุดสำหรับนักเรียน จึงขอแนะนำว่าถึงแม้นักเรียนจะทำข้อสอบตามวิธีจริงของหลักสูตรระดับ ม.ปลายได้ ก็ควรจะดูเฉลยภายในเล่มด้วย เพราะว่าอาจจะมีวิธีจริงหลายวิธี นอกจากนั้นก็จะได้เห็นว่าวิธีลัดและเทคนิคการตัดตัวเลือกทำให้ได้คะแนนเร็วกว่าจริงหรือไม่

พบกันใหม่ใน คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

	หน้า
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 1	1-1
เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 1	1-13
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2	2-1
เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2	2-13
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3	3-1
เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3	3-13
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 4	4-1
เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 4	4-19
ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 5	5-1
เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 5	5-17

วัฏจักร

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์
ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 1
(Wattachak Math & Sciences Championship 1992)

คณิตศาสตร์

วันที่ 25 พฤศจิกายน 2535 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ข้อแนะนำ

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน (100 คะแนน)

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบตัวเลือก 35 ข้อๆละ 2 คะแนน รวม 70 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบเติมคำตอบ 6 ข้อๆละ 4 คะแนน รวม 24 คะแนน

ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแสดงวิธีทำ 1 ข้อ 6 คะแนน

ตอนที่ 1 จงเลือกตัวเลือกที่ถูกต้องในแต่ละข้อเพียงข้อเดียว

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ U ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. ถ้า $A-B=B$ แล้ว $A\cap B=\phi$
   2. ถ้า $A-B=A$ แล้ว $A\cap B\neq\phi$
   3. ถ้า $A\subset B\cup C$ แล้ว $B'\cup C'\subset A'$
   4. ถ้า $A\subset B\cap C$ แล้ว $A'\subset B'\cup C'$

2. กำหนดให้ $A_i = [1, i)$ และ $U = R^+$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$

ข. $(A_3 \cap A_4) \not\subset (A_1 \cup A_2)'$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว　　ข. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ　　ง. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

3. กำหนดให้

$$r = \{(x,y) \in R \times R \mid (y^2-4y-xy+4x)(x^2-4x+3) = 0 \text{ และ } x \leq 3\}$$

อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟของความสัมพันธ์ r มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

1. 2　　2. 4

3. 6　　4. 8

4. กำหนดให้ $x, y \in R^+$

ค่าน้อยที่สุดของ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1　　2. 4

3. 6　　4. 8

5. กำหนดให้ A เป็นเซตของประพจน์　$f : A \to \{0, 1\}$ ที่กำหนดโดย

$$f(p) = \begin{cases} 0 & \text{ก็ต่อเมื่อ } p \text{ เป็นเท็จ} \\ 1 & \text{ก็ต่อเมื่อ } p \text{ เป็นจริง} \end{cases}$$

ให้ * เป็นตัวเชื่อมของประพจน์ที่กำหนดโดย

$$f(p * q) = \begin{cases} 1 & \text{ก็ต่อเมื่อ } f(p) \leq f(q) \\ f(q) & \text{ก็ต่อเมื่อ } f(p) > f(q) \end{cases}$$

$p * q$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใด

1. $p \wedge q$
2. $p \vee q$
3. $p \rightarrow q$
4. $p \leftrightarrow q$

6. **บทนิยาม** สำหรับ $A \neq \phi$ และ $r \subset A \times A$

r เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดบน A ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [((x, y) \in r \wedge (y, z) \in r) \rightarrow (x, z) \in r]$$

กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$ เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดบน A

ข. $r_2 = \{(1, 3)\}$ เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดบน A

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

7. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่เป็นสับเซตของ $R \times R$

ถ้า $g^{-1}(x) = x-2$ และ $f(g(x+2)) = x^2+1$ แล้ว

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(3) = 10$
2. $(g \circ f)(2) = 6$
3. $f(4) = g(4)$
4. ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ 1

8. **บทนิยาม** สำหรับ A และ B ที่ไม่ใช่เซตว่าง

$A \approx B$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$

$A \not\approx B$ หมายถึง $\sim(A \approx B)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A \approx B$ และ $B \approx C$ แล้ว $A \approx C$

ข. ถ้า $A \not\approx B$ และ $B \not\approx C$ แล้ว $A \not\approx C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว 2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ 4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

9. ให้ $f : Q^+ \xrightarrow{1-1} Q^+$ และมีคุณสมบัติดังนี้

$f(x \cdot f(y)) = \dfrac{f(x)}{y}$ ทุก $x, y \in Q^+$

$f(f(1))$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1
3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

10. วงกลมที่ผ่านจุด (0, 3) และผ่านจุดตัดกันของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ กับวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ใด

1. (1, 1) 2. (2, 2)
3. (1, −1) 4. (2, −2)

11. วงรี $9x^2 + 4y^2 - 36x + 16y + 16 = 0$ มี A เป็นความยาวเส้นรอบรูป มี B เป็นพื้นที่ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $4\pi < A < 20$

ข. $4\pi < B < 24$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว 2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ 4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

12. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^4 - 1 - y^2 + 2y = 0\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กราฟของความสัมพันธ์ r เป็นไฮเพอร์โบลา

ข. กราฟของความสัมพันธ์ r เป็นพาราโบลา 2 รูป

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

13. เซตคำตอบของสมการ $\log(3-2^x) = (1-x)\log 2$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

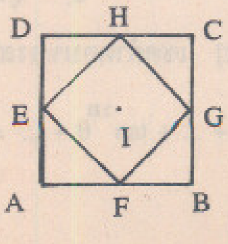
1. $[-1, 2]$
2. $[-2, \frac{1}{2}]$
3. $[\frac{1}{2}, 2]$
4. $[-1, \frac{1}{2}]$

14. พิจารณาสมการต่อไปนี้ $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+3}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้องเกี่ยวกับรากของสมการข้างต้น

1. มี 2 ราก และ เครื่องหมายต่างกัน
2. มี 2 ราก และ เครื่องหมายเหมือนกัน
3. มี 1 ราก และ เครื่องหมายเป็นบวก
4. มี 1 ราก และ เครื่องหมายเป็นลบ

15. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส



E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, AB, BC และ CD ตามลำดับ

I เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0}$
2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH}$
3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$
4. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$

16. กำหนดให้ $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{w}| = 3$ $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$ 2. $2\sqrt{5}$
3. 5 4. 20

17. กำหนด $z^2 = 2 - 4i$ ค่าของ $|z + z^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 2. $\sqrt{5}$
3. $\frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{125}}{2}$ 4. $\sqrt{2}\ \sqrt[4]{125}$

18. กำหนดให้ $z_1^2 z_2 = 1 + i$ และ $z_1 z_2^2 = 1 - i$
ค่าของ $|z_1 - z_2|$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. $\sqrt{2}$
3 $\sqrt[3]{2}$ 4. $\sqrt[3]{4}$

19. กำหนดให้ $\theta \in [-\pi, \pi]$ เซตคำตอบของสมการ

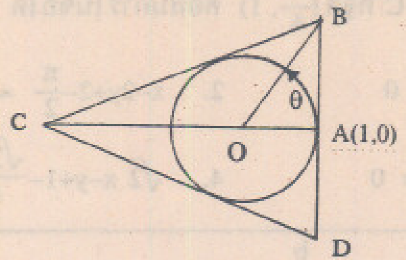
$$1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + ... + \tan^{2n}\theta + ... = \frac{3}{2}$$

ตรงกับเซตในข้อใด

1. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ 2. $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

3. $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$ 4. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

20. จากรูป



BD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง BD สัมผัสวงกลมที่จุด A(1, 0) OB ทำมุม θ เรเดียน กับ OA โดยที่ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ BC และ DC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งพบส่วนต่อของ AO ที่ C พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. $2\cos\theta\cot\theta$ 2. $-\tan^2\theta\tan 2\theta$

3. $-\tan^2\theta\cot 2\theta$ 4. $2\sin\theta\tan\theta$

21. ค่าของ $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(2n+1)$ 2. $-n(2n+1)$

3. $n(2n-1)$ 4. $-n(2n-1)$

22. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 + \sqrt{9+x} - 3}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1

3. $\frac{1}{6}$ 4. ไม่มีค่า

23. กำหนด $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ และ $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

เส้นโค้ง C มีสมการเป็น $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$

เส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ คือสมการในข้อใด

1. $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$
2. $x - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$
3 $2x - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0$
4. $\sqrt{2}\,x - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0$

24. ถ้า $G'(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$

$\int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx$ เท่ากับเท่าใด

1. 6
2. 8
3. 10
4. 12

25. ตัวเลข 0 ห้าตัว และตัวเลข 1 สามตัว ใช้ในการแทนความหมายของตัวเลขในระบบเลขฐาน 2 ได้ทั้งหมดกี่ค่าที่แตกต่างกัน

1. 2
2. 16
3. 56
4. 256

26. การแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมดซึ่งแต่ละทีมพบกันหนึ่งครั้ง โดยมีทีมชาติสวีเดน อังกฤษ เดนมาร์ก และฝรั่งเศส เข้าแข่งขันกัน ในการแข่งขันแต่ละนัด ทีมชนะได้ 2 คะแนน ทีมที่เสมอได้ 1 คะแนน และทีมแพ้ได้ 0 คะแนน

จำนวนวิธีที่ทีมใดทีมหนึ่งได้ 6 คะแนน เท่ากับเท่าใด

1. 4 2. 27

3. 108 4. 729

27. ให้ $S = \{ k \in I^{+} \mid k = 2^{n}, n = 1, 2, 3, ..., 1000\}$

$E = \{ k \in S \mid$ หลักหน่วยของ k เท่ากับ 2$\}$

P(E) เท่ากับเท่าใด

1. 0.25 2. 0.50

3. 0.60 4. 0.75

28. มีฉลาก 10 ใบ เขียนเลข 1, 2, 3, ..., 10 ในฉลาก ใบละหนึ่งหมายเลข สุ่มหยิบฉลากขึ้นมา 3 ใบพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของตัวเลขที่ได้มีค่าเท่ากับ 15 เป็นเท่าใด

1. $\frac{21}{120}$ 2. $\frac{14}{120}$

3. $\frac{10}{120}$ 4. $\frac{7}{120}$

29. เซตใดต่อไปนี้มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุด

1. $M = \{A \mid A$ เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 และ $\det(A) = \det(A^{-1})\}$

2. $N = \{B \mid B$ เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 และ $B = B^{-1}$ และ $\det(B) = 1\}$

3. $L = \{C \mid C$ เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 และ $\det(CC^{t}) = 0\}$

4. $K = \{D \mid D$ เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 และ $-D = D^{t}$ และ $\det(D) = 0\}$

30. กำหนด $S = \{1, 2, 3\}$

$$M = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S\right\}$$

$$D = \{A \in M \mid \det(A) \neq 0\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต D เท่ากับเท่าใด

1. 15   2. 36

3. 48   4. 66

31. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางของข้อมูลที่หาได้จากข้อมูลทุกชนิด

ข. ในการคำนวณความแปรปรวน หรือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดหนึ่งโดยวิธีทอนค่าข้อมูล อาจทำให้ค่าที่คำนวณได้คลาดเคลื่อนไปจากค่าที่หาได้โดยวิธีทางตรงบ้างเล็กน้อย

ค. ถ้าการทดลองและการวัดผลการทดลองทำอย่างถูกต้อง ข้อมูลสถิติที่รวบรวมได้จากการทดลอง จะมีความเชื่อถือได้มากที่สุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก., ข. และ ค ถูกทุกข้อ   2. ก., ข. และ ค. ถูกเพียง 2 ข้อ

3. ก., ข. และ ค. ถูกเพียง 1 ข้อ   4. ก., ข. และ ค. ผิดทุกข้อ

32. ข้อมูลชุดหนึ่งเป็นจำนวนนับ 50 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4.3 ผลบวกของกำลังสองของข้อมูลแต่ละจำนวนเท่ากับ 1345 ถ้าค่ามาตรฐานของข้อมูลจำนวนหนึ่งเป็น 3.0 ข้อมูลจำนวนนั้นมีค่าเท่าใด

1. 10   2. 11

3. 12   4. 13

33. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย x_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

ถ้า $\sum_{i=1}^{6} (x_i - 10)^2 = 67$ $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 607$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

1. 8.0   2. 8.5

3. 9.0   4. 9.5

34. ตารางต่อไปนี้เป็นคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 60 คน

คะแนน	จำนวนนักเรียน
30 – 39	1
40 – 49	2
50 – 59	6
60 – 69	10
70 – 79	20
80 – 89	15
90 – 99	6

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. 87.5 เป็นคะแนนต่ำสุดของกลุ่มนักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุด ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้คิดเป็น 15 % ของนักเรียนทั้งหมด

ข. 64.5 เป็นคะแนนสูงสุดของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุด ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้คิดเป็นร้อย 20 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

35. ข้อมูล 2 ชุด ประกอบด้วยข้อมูล N_1 และ N_2 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากัน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด N_1 เป็น S ซึ่งเป็นครึ่งหนึ่งของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด N_2 และ $S \neq 0$ ถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลทั้งสองชุดนี้รวมกันเป็น $\sqrt{2}\,S$ แล้ว $N_1 : N_2$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 : 2
2. 2 : 1
3. 1 : 3
4. หาไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

ตอนที่ 2 จงเขียนคำตอบที่ถูกต้อง

1. กำหนดให้ a , b และ c เป็นด้านสามด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC

   ถ้า $a \le \frac{b+c}{2}$ ค่ามากที่สุดของ $\hat{A}$ เท่ากับกี่องศา

2. $\cot(\text{arccot}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \text{arccot}(\sqrt{3}+\sqrt{2}))$ เท่ากับเท่าใด

3. จำนวนสองจำนวนรวมกันได้ 50 ผลบวกของกำลังสองของจำนวนหนึ่งกับสิบเท่าของอีกจำนวนหนึ่ง มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด

4. กำหนด $A = R - \{1\}$ $*$ เป็นการดำเนินการบน A ที่กำหนดโดย

   $a * b = a + b - ab$ ทุก $a, b \in A$

   อินเวอร์สของ 2 สำหรับ $*$ บน A เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4\}$

   $X = \{f : S \to S \mid$ ถ้า $a > b$ แล้ว $f(a) \ge f(b)$ และ $D_f = S\}$

   จำนวนสมาชิกของ X เท่ากับเท่าใด

6. จากตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนวิชาภาษาไทย คำนวณได้มัธยฐานเป็น 63 ซึ่งอยู่ในอันตรภาคชั้น 60 – 69 และพบว่า มีผู้สอบได้คะแนนต่ำกว่า 60 อยู่ 9 คน มีผู้ที่สอบได้คะแนนสูงกว่า 69 อยู่ 6 คน ในการสอบวิชาภาษาไทยครั้งนี้มีผู้เข้าสอบกี่คน

ตอนที่ 3 จงแสดงวิธีทำ

1. | บทนิยาม ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$ ทุก $x_1, x_2 \in D_f$ |
   |---|

   ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และมีฟังก์ชัน gof

   จงพิสูจน์ว่า gof เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 1

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 1.

แนวคิด

1. ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ ให้ $A - B = B$

สมมติ $A \cap B \neq \phi$ เพราะฉะนั้นต้องมี $x \in A \cap B$

นั่นคือ $x \in A$ และ $x \in B$ ดังนั้น $x \notin A - B$

เพราะว่า $A - B = B$ ดังนั้น $x \notin B$

เกิดข้อขัดแย้งว่า $x \notin B$ และ $x \in B$

นั่นคือที่เราสมมติไว้ว่า $A \cap B \neq \phi$ ไม่จริง

สรุป ถ้า $A - B = B$ แล้ว $A \cap B = \phi$ เป็นจริง

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \{1\}$

$B = \{2\}$

$A - B = A$ แต่ $A \cap B = \phi$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น เลือก $U = \{1, 2, 3\}$

$A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$ และ $C = \{3\}$

$A' = \{2, 3\}$, $B' = \{3\}$ และ $C' = \{1, 2\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3\}$

$B' \cup C' = \{1, 2, 3\}$

นั่นคือ $A \subset B \cup C$ แต่ $B' \cup C' \not\subset A'$

4. ผิด ตัวอย่างเช่น เลือก $U = \{1, 2, 3\}$

$A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$

$A' = \{2, 3\}$, $B' = \{3\}$, $C' = \phi$

$B \cap C = \{1, 2\}$

$B' \cup C' = \{3\}$

นั่นคือ $A \subset B \cap C$ แต่ $A' \not\subset B' \cup C'$

2. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาเซต A_1, A_2, A_3 และ A_4 ก่อนดังนี้

$$A_1 = [1, 1) = \{x \in R \mid 1 \le x < 1\} = \phi$$

$$A_2 = [1, 2)$$

$$A_3 = [1, 3)$$

$$A_4 = [1, 4)$$

พิจารณาข้อความ ก.

เพราะว่า $A_1 = \phi$ เพราะฉะนั้น $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \phi$

สรุปข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

$A_3 \cup A_4 = [1, 3) \cup [1, 4) = [1, 4)$

$A_1 \cup A_2 = \phi \cup [1, 2) = [1, 2)$

$(A_1 \cup A_2)' = (0, 1) \cup [2, \infty)$

เพราะว่า $[1, 4) \not\subset ((0, 1) \cup [2, \infty))$

เพราะฉะนั้น $A_3 \cup A_4 \not\subset (A_1 \cup A_2)'$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

3. **ตอบ 2.**

แนวคิด $(y^2 - 4y - xy + 4x)(x^2 - 4x + 3) = 0$

$[y(y-4) - x(y-4)](x-1)(x-3) = 0$

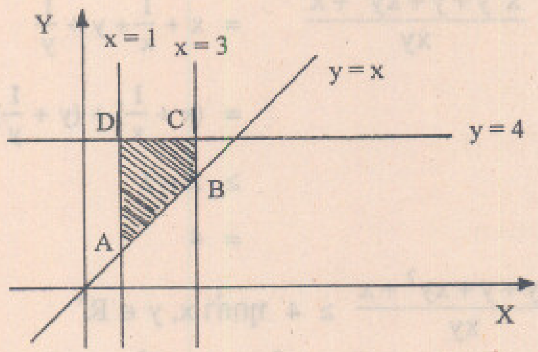
$(y-x)(y-4)(x-1)(x-3) = 0$

$r = \{(x,y) \in R\times R \mid (y^2 - 4y - xy + 4x)(x^2 - 4x + 3) = 0$ และ $x \le 3\}$

$= \{(x,y) \in R\times R \mid (y-x)(y-4)(x-1)(x-3) = 0$ และ $x \le 3\}$

$= \{(x,y) \in R\times R \mid y=x$ หรือ $y=4$ หรือ $x=1$ หรือ $x=3$ และ $x \le 3\}$

กราฟของความสัมพันธ์ r คือ



จากรูปพิกัดของ A,B,C และ D คือ A(1, 1), B(3, 3), C(3, 4), D(1, 4)

ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $|AD| = 3$, $|BC| = 1$, $|CD| = 2$

พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู ABCD $= \frac{1}{2} \times$ สูง $\times$ ผลบวกของด้านคู่ขนาน

$= \frac{1}{2} \times |CD| \times (|AD| + |BC|)$

$= \frac{1}{2} \times (2) \times (3+1)$

$= 4$

4. ตอบ 2.

แนวคิด การแสดงว่าทุกจำนวนจริง $a > 0$ จะได้ว่า $a + \frac{1}{a} \geq 2$

เพราะว่า $(a-1)^2 \geq 0$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0$$

$$a^2 + 1 \geq 2a$$

เพราะฉะนั้น $a + \frac{1}{a} \geq 2$

จากโจทย์ $x, y \in R^+$

$$\begin{aligned} \frac{x^2y+y+xy^2+x}{xy} &= x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} \\ &= (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) \\ &\geq 2 + 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

สรุป $\frac{x^2y+y+xy^2+x}{xy} \geq 4$ ทุกค่า $x, y \in R^+$

เพราะฉะนั้นค่าน้อยที่สุดของ $\frac{x^2y+y+xy^2+x}{xy}$ คือ 4

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 1$, $y = 1$ จะได้

$$\frac{x^2y+y+xy^2+x}{xy} = \frac{(1)(1)+1+(1)(1)+1}{(1)(1)} = 4$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และตัวเลือก 4. ทิ้งได้

5. ตอบ 3.

แนวคิด ตารางค่าฟังก์ชัน f ของประพจน์ p และ q เป็นดังนี้

p	q	f(p)	f(q)	f(p*q)	p*q
T	T	1	1	1	T
T	F	1	0	0	F
F	T	0	1	1	T
F	F	0	0	1	T

ตารางค่าความจริง $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

สรุป $p * q$ สมมูลกับ $p \rightarrow q$

6. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{1, 2, 3, 4\}$

พิจารณาข้อความ ก. $r_1 = \{(x, y) \in A \times A \mid x \leq y\}$

ให้ $x, y, z \in A$ $(x, y) \in r_1$ และ $(y, z) \in r_1$

ดังนั้น $x \leq y$ และ $y \leq z$ เพราะฉะนั้น $x \leq z$ นั่นคือ $(x,z) \in r_1$

สรุป $\forall x \forall y \forall z[((x,y) \in r_1 \wedge (y,z) \in r_1) \rightarrow (x,z) \in r_1]$

เพราะฉะนั้น r_1 เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดบน A

พิจารณาข้อความ ข. $r_2 = \{(1, 3)\}$

โดยการใช้เหตุผลทางตรรกศาสตร์พบว่า เงื่อนไขที่ r จะเป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอด สามารถเขียนได้ในรูปแบบ $(p \wedge q) \rightarrow s$

โดยที่ p แทนข้อความ $(x, y) \in r$

q แทนข้อความ $(y, z) \in r$

และ s แทนข้อความ $(x, z) \in r$

ให้ p แทนประพจน์ $(1, 3) \in r_2$

เพราะว่าใน r_2 ไม่มีสมาชิกอื่นอีกนอกจาก (1, 3)

เพราะฉะนั้นประพจน์ q และ s จึงมีค่าความจริงเป็นเท็จ

นั่นคือ $(p \wedge q) \rightarrow s$ มีค่าความจริงเป็นจริง

สรุป $r_2 = \{(1, 3)\}$ เป็นความสัมพันธ์ถ่ายทอดบน A

7. **ตอบ 4.**

แนวคิด การหาสูตรของ g(x)

ให้ $y = g^{-1}(x)$

$$y = x - 2$$
$$x = y + 2$$

เพราะฉะนั้น $g(x) = x + 2$

การหาสูตรของ f(x)

เพราะว่า $f(g(x + 2)) = x^2 + 1$

$$f((x + 2) + 2) = x^2 + 1$$
$$f(x + 4) = x^2 + 1$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = f((x-4)+4)$

$= (x-4)^2 + 1$

1. ผิด เพราะว่า $f(3) = (3-4)^2 + 1 = 2 \neq 10$

2. ผิด เพราะว่า $(g \circ f)(2) = g(f(2))$

$= g((2-4)^2 + 1)$

$= g(5)$

$= 7$

$\neq 6$

3. ผิด เพราะว่า $f(4) = 1$ และ $g(4) = 6$

เพราะฉะนั้น $f(4) \neq g(4)$

4. ถูกต้อง เพราะว่า $f(x) = (x-4)^2 + 1 \geq 1 \quad \forall x \in R$

เพราะฉะนั้น ค่าต่ำสุดของ $f(x)$ คือ 1

8. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. สมมติ $A \approx B$ และ $B \approx C$

ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง

$g : B \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึง

การแสดงว่า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง C

สมมติ $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ จะได้ $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

เพราะว่า g เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะฉะนั้น $f(x_1) = f(x_2)$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 เพราะฉะนั้น $x_1 = x_2$

สรุป $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1-1

ให้ $z \in C$ เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก B ไปยัง C

เพราะฉะนั้นต้องมี $y \in B$ ที่ทำให้ $g(y) = z$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไปยัง B

เพราะฉะนั้นต้องมี $x \in A$ ที่ทำให้ $f(x) = y$

เพราะฉะนั้น $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$

สรุป $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงจาก A ไปยัง C

เพราะฉะนั้น $A \approx C$

สรุป ถ้า $A \approx B$ และ $B \approx C$ แล้ว $A \approx C$

เพราะฉะนั้นข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

เลือก $A = \{1\}$

$B = \{1, 2\}$

$C = \{3\}$

เพราะว่า $n(A) = 1$ และ $n(B) = 2$ และ $n(C) = 1$

เพราะฉะนั้นไม่มีฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง B

และไม่มีฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึงจาก B ไปยัง C

ดังนั้น $A \not\approx B$ และ $B \not\approx C$

แต่ $f(1) = 3$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง C

นั่นคือ $A \approx C$

สรุป ข้อความ ข. ผิด

9. **ตอบ 2.**

แนวคิด จาก $f(x \cdot f(y)) = \dfrac{f(x)}{y}$

จะได้ $f(1 \cdot f(1)) = \dfrac{f(1)}{1}$

$$f(f(1)) = f(1)$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$

สรุป $f(f(1)) = f(1) = 1$

10. ตอบ 4.

แนวคิด การหาจุดตัดของสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 = 25 \quad ....(1)$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0 \quad ....(2)$$

แทนค่า (1) ใน (2) ; $25 - 2x + 2y - 23 = 0$

$$1 - x + y = 0$$
$$y = x - 1$$

แทนค่าใน (1) ; $x^2 + (x-1)^2 = 25$

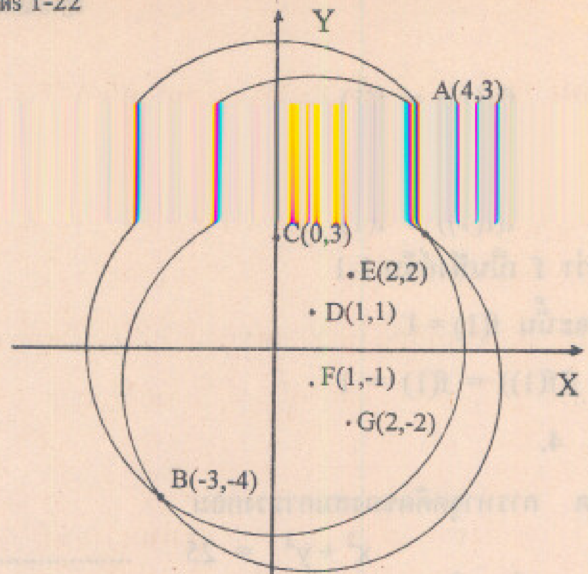
$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 25$$
$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$
$$x^2 - x - 12 = 0$$
$$(x-4)(x+3) = 0$$
$$x = 4, -3$$
$$y = 3, -4$$

จุดตัดของวงกลมคือ A(4,3) และ B(−3, −4)

เขียนภาพประกอบเพื่อช่วยในการคำนวณ

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$$
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 25$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (1, −1) รัศมี 5



การตัดตัวเลือก เขียนจุดในตัวเลือก D(1,1), E(2,2), F(1,–1),G(2,–2)

โดยการวัดระยะทางจากจุด D, E, F, G ไปยังจุด A, B, C

$|AD| \neq |BD|$ เพราะฉะนั้น D เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

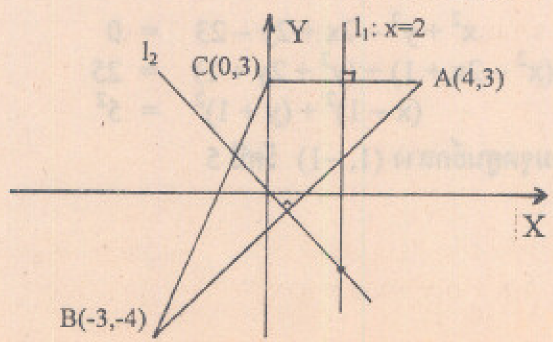
$|AE| \neq |BE|$ เพราะฉะนั้น E เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

$|AF| \neq |FC|$ เพราะฉะนั้น F เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านสำหรับข้อสอบแบบเติมคำตอบ จะแสดงให้เห็นวิธีหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C ดังนี้

จากเหตุผลทางเรขาคณิตกล่าวว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A,B, C อยู่ที่จุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB, AC และ BC



การหาสมการเส้นตรง ℓ_1 ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AC

จุดกึ่งกลางของ AC คือ $(\frac{0+4}{2}, \frac{3+3}{2}) = (2, 0)$

เพราะว่า AC ขนานกับแกน X เพราะฉะนั้น ℓ_1 มีสมการเป็น $x = 2$

การหาสมการเส้นตรง ℓ_2 ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{3-(-4)}{4-(-3)} = \frac{7}{7} = 1$

เพราะว่า ℓ_2 ตั้งฉากกับ AB เพราะฉะนั้นความชัน ℓ_2 เท่ากับ -1

จุดกึ่งกลาง AB คือ $(\frac{4-3}{2}, \frac{3-4}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

สมการเส้นตรง ℓ_2 คือ $y-(\frac{1}{2}) = (-1)(x-\frac{1}{2})$

$$2y+1 = -2x+1$$
$$y = -x$$

การหาจุดตัด ℓ_1 และ ℓ_2

$\ell_1 : x = 2$

$\ell_2 : y = -x$

สรุปจุดตัดคือ $(2, -2)$

หมายเหตุ ใช้การวาดรูปเพื่อหาจุดตัดของ ℓ_1 และ ℓ_2 โดยไม่ต้องคำนวณหาสมการเส้นตรง ก็จะได้พิกัดของจุดตัด ℓ_1, ℓ_2 คือ $(2, -2)$ เหมือนกัน

วิธีลัด จากเหตุผลทางเรขาคณิตสมการวงกลม

$$x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1 = 0$$

และ

$$x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2 = 0$$

ตัดกันที่จุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เมื่อ (x_0, y_0) เป็นจุดใดๆจะได้ว่า วงกลมที่ผ่านจุด (x_0, y_0), (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ต้องมีรูปแบบเป็น

$$(x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1)+K(x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2) = 0$$

เมื่อ K หาได้จากการแทนค่า x ด้วย x_0 และแทนค่า y ด้วย y_0

จากโจทย์ $\qquad x^2+y^2-25 = 0$

$$x^2+y^2-2x+2y-23 = 0$$

ผ่านจุด $(x_0, y_0) = (0, 3)$

จากสมการ $(x^2+y^2-2x+2y-23)+K(x^2+y^2-25) = 0$

แทนค่า $x = 0, y = 3$ จะได้

$$(0+9-0+6-23)+K(0+9-25) = 0$$

$$-8-16K = 0$$

$$K = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมที่ต้องการคือ

$$x^2+y^2-2x+2y-23+(-\frac{1}{2})(x^2+y^2-25) = 0$$

$$x^2+y^2-4x+4y-21 = 0$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2 = 29$$

สรุปจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการคือ $(2, -2)$ และรัศมี $\sqrt{29}$

11. ตอบ **3.**

แนวคิด จัดรูปวงรี $9x^2+4y^2-36x+16y+16 = 0$

$$9x^2-36x+4y^2+16y = -16$$

$$9(x^2-4x+4)+4(y^2+4y+4) = -16+36+16$$

$$9(x-2)^2+4(y+2)^2 = 36$$

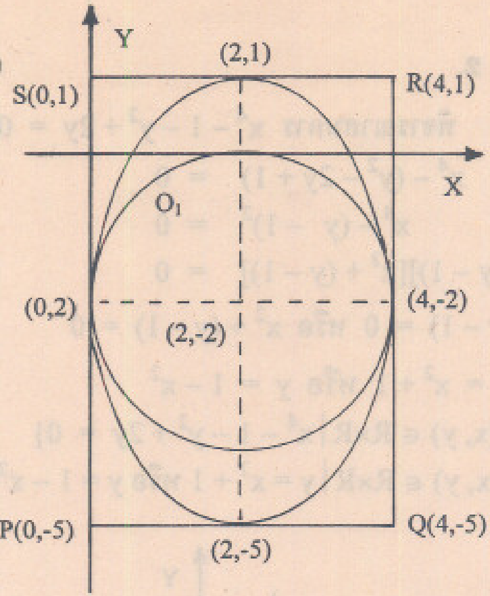
$$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

เป็นรูปวงรีมีจุดศูนย์กลาง $(2, -2)$, แกนเอกขนานแกน Y, $a = 3$, $b = 2$

$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

จุดยอด $(2, 1), (2, -5)$, จุดโฟกัส $(2, -2 \pm \sqrt{5})$

กราฟของรูปวงรีคือ



พิจารณาข้อความ ก.

จากรูปพิกัดของ P, Q, R, S คือ P(0, −5), Q(4, −5), R(4, 1), S(0, 1)

ความยาวเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยม PQRS เท่ากับ

$$2(|PQ|+|RQ|) = 2(4+6) = 20$$

วงกลม O_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (2, −2) และรัศมี 2

เส้นรอบวงกลม O_1 ยาวเท่ากับ $2\pi r = 4\pi$

จากรูปจะได้ว่า $4\pi < A < 20$

เพราะฉะนั้นข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

พื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS เท่ากับ $|PQ| \times |RQ| = 4 \times 6 = 24$

พื้นที่วงกลม เท่ากับ $\pi r^2 = \pi 2^2 = 4\pi$

จากรูปจะได้ $4\pi < B < 24$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ถูกต้อง

12. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาสมการ $x^4 - 1 - y^2 + 2y = 0$

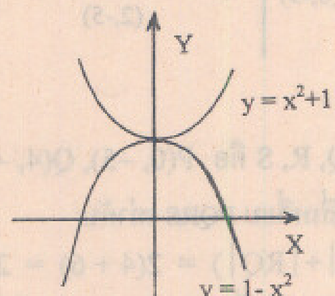
$$
\begin{aligned}
x^4 - (y^2 - 2y + 1) &= 0 \\
x^4 - (y - 1)^2 &= 0 \\
[x^2 - (y-1)][x^2 + (y-1)] &= 0
\end{aligned}
$$

$x^2 - (y-1) = 0$ หรือ $x^2 + (y-1) = 0$

$y = x^2 + 1$ หรือ $y = 1 - x^2$

$r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^4 - 1 - y^2 + 2y = 0\}$

$\quad = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1$ หรือ $y = 1 - x^2\}$



สรุป กราฟของความสัมพันธ์ r ไม่เป็นไฮเพอร์โบลา

กราฟของความสัมพันธ์ r เป็นพาราโบลา 2 รูป

ข้อความ ก. ผิด และข้อความ ข. ถูก

13. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาสมการ

$$\log(3 - 2^x) = (1 - x)\log 2 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\log(3 - 2^x) = \log 2^{(1-x)}$$

$$
\begin{aligned}
3 - 2^x &= 2^{(1-x)} \\
&= 2 \cdot 2^{-x} \\
3 \cdot 2^x - 2^{2x} &= 2 \\
(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 &= 0 \\
(2^x - 2)(2^x - 1) &= 0 \\
2^x &= 2, 1 \\
x &= 1, 0
\end{aligned}
$$

ตรวจสอบคำตอบ

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ (1) ;

$$\log(3 - 2^1) = \log 1 = 0 = (1-1)\log 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ ได้

แทนค่า $x = 0$ ในสมการ (1) ;

$$\log(3 - 2^0) = \log 2 = (1-0)\log 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้

จากตัวเลือกพบว่า $\{0, 1\} \subset [-1, 2]$

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า $x = 1$ พบว่า

$$\log(3 - 2^1) = 0 = (1-1)\log 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 0$ ทำให้ $\log(3 - 2^0) = \log 2 = (1-0)\log 2$

แสดงว่า $x = 0$ เป็นคำตอบได้ แต่ $0 \notin [\frac{1}{2}, 2]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

14. ตอบ 3.

แนวคิด $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} = \sqrt{2x+3}$ ....(1)

$$(x+1)+2\sqrt{x+1}\sqrt{4-x}+(4-x) = 2x+3$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x+1)(4-x)} &= x-1 \\
(x+1)(4-x) &= (x-1)^2 \\
4x-x^2+4-x &= x^2-2x+1 \\
2x^2-5x-3 &= 0 \\
(2x+1)(x-3) &= 0 \\
x &= -\frac{1}{2}, 3
\end{aligned}$$

ตรวจสอบคำตอบ แทนค่า $x=-\frac{1}{2}$ ในสมการ (1)

$$\sqrt{-\frac{1}{2}+1}+\sqrt{4-(-\frac{1}{2})} = \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}}$$

$$\sqrt{2(-\frac{1}{2})+3} = \sqrt{2} \neq \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}}$$

เพราะฉะนั้น $x=-\frac{1}{2}$ ไม่เป็นคำตอบของสมการ (1)

แทนค่า $x=3$ ในสมการ (1)

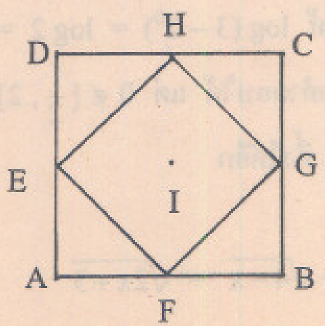
$$\sqrt{3+1}+\sqrt{4-3} = \sqrt{4}+1 = 3$$
$$\sqrt{2(3)+3} = \sqrt{9} = 3$$

เพราะฉะนั้น $x=3$ เป็นคำตอบของสมการ (1)

ตัวเลือก 3. จึงเป็นคำกล่าวที่ถูกต้อง

15. ตอบ 2.

แนวคิด



1. ถูกต้อง

เพราะว่า $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{0}$

และ $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{0}$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}
&= (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FE}) + \overrightarrow{FA} \\
&= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{FA} \\
&= \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FA} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

2. ผิด เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} &= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} \\
&= \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH} \\
&= \overrightarrow{DH}
\end{aligned}
$$

แต่ $\overrightarrow{DH} \neq \overrightarrow{GH}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} \neq \overrightarrow{GH}$

3. ถูกต้อง เพราะว่า $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DG}$

และ

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} && (\because 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB}) \\
&= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DC} && (\because \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GB}) \\
&= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} \\
&= \overrightarrow{DG}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$

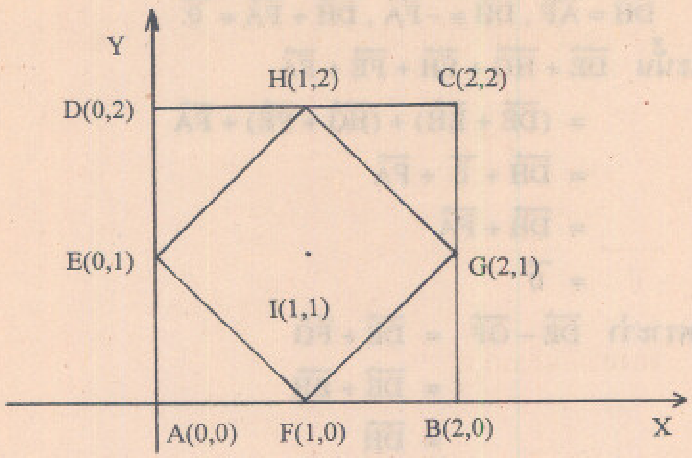
4. ถูกต้อง เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC}
&= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HC} && (\because \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}) \\
&= \overrightarrow{AC} \\
&= 2\overrightarrow{AI}
\end{aligned}
$$

การตัดตัวเลือก ข้อสอบในลักษณะนี้วิธีที่ดีคือ เขียนรูปในพิกัดมุมฉาก โดยให้จุดทุกจุดในรูปมีพิกัดและคิดค่าเวกเตอร์ต่างๆ ในพจน์ของเวกเตอร์

ในพิกัดมุมฉาก

ให้ A(0, 0) และ C(2, 2) จะได้จุดอื่นๆ มีพิกัดดังรูป



$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \vec{0}$$

$$\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

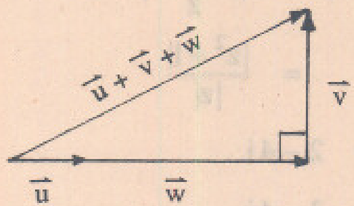
$$\overrightarrow{GH} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} \neq \overrightarrow{GH}$

ดังนั้นเราได้ตัวเลือก 2. เป็นคำตอบโดยไม่ต้องคิดที่ตัวเลือก 3. และ 4.

16. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 เพราะว่า $\vec{w}$ และ $\vec{u}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\vec{w} \perp \vec{v}$ เพราะฉะนั้นเราสามารถเขียนภาพของเวกเตอร์ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ ได้ดังนี้



โดยทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2 = |\vec{u}+\vec{w}|^2 + |\vec{v}|^2$$

$$= (1+3)^2 + (2)^2$$

$$= 20$$

$$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

สรุป $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = 2\sqrt{5}$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $\vec{w} \perp \vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

เพราะฉะนั้น $\vec{w}\cdot\vec{v} = 0$, $\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = |\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos 0°$

$$= (3)(1) = 3$$

$$|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|^2 = (\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})\cdot(\vec{u}+\vec{v}+\vec{w})$$

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{w} + \vec{w}\cdot\vec{u} + \vec{w}\cdot\vec{v} + \vec{w}\cdot\vec{w}$$

$$= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{w} + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + 2\vec{u}\cdot\vec{w}$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 2(3) + 2(0) + 2(0)$$

$$= 20$$

สรุป $|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

17. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $z+z^{-1} = z+\frac{1}{z} = \frac{z^2+1}{z}$

เพราะฉะนั้น $|z+z^{-1}| = \left|\frac{z^2+1}{z}\right|$

$$= \frac{|z^2+1|}{|z|}$$

เพราะว่า $z^2 = 2-4i$

$$z^2+1 = 3-4i$$

$$|z^2+1| = |3-4i|$$

$$= \sqrt{9+16}$$

$$= 5$$

$$|z^2| = \sqrt{2^2+4^2}$$

$$= \sqrt{20}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

$$|z| = \sqrt{2\sqrt{5}}$$

เพราะฉะนั้น $|z+z^{-1}| = \frac{|z^2+1|}{|z|}$

$$= \frac{5}{\sqrt{2\sqrt{5}}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{5}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5^{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{125}}{2}$$

18. ตอบ 4.

แนวคิด $z_1^2 z_2 = 1 + i$ ....(1)

$z_1 z_2^2 = 1 - i$ ....(2)

$$(z_1^2 z_2)(z_1 z_2^2) = (1+i)(1-i)$$

$$z_1^3 z_2^3 = 1 - i^2$$

$$= 2$$

$$|z_1 z_2| = \sqrt[3]{2}$$

(1) – (2) ; $z_1^2 z_2 - z_1 z_2^2 = (1+i) - (1-i)$

$$z_1 z_2(z_1 - z_2) = 2i$$

$$|z_1 z_2(z_1 - z_2)| = |2i|$$

$$|z_1 z_2| \cdot |z_1 - z_2| = 2$$

$$|z_1 - z_2| = \frac{2}{|z_1 z_2|}$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$$

$$= 2^{\frac{2}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{4}$$

19. ตอบ 2.

แนวคิด $1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + \ldots + \tan^{2n}\theta + \ldots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต $a = 1$, $r = \tan^2\theta$

เพราะฉะนั้น $1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + \ldots + \tan^{2n}\theta + \ldots = \frac{a}{1-r}$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1-\tan^2\theta}$$

$$3 - 3\tan^2\theta = 2$$

$$-3\tan^2\theta = -1$$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

สรุปเซตคำตอบคือ $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}\}$

การตัดตัวเลือก เลือกค่าตัวเลขแทนค่าแล้วคำนวณได้ง่ายเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$

$1 + \tan^2\frac{\pi}{4} + \tan^4\frac{\pi}{4} + ... + \tan^{2n}\frac{\pi}{4} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$

เป็นอนุกรมที่ไดเวอร์จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$; $1 + \tan^2\frac{\pi}{3} = 1 + (\sqrt{3})^2 = 4 > \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $1 + \tan^2\frac{\pi}{3} + \tan^4\frac{\pi}{3} + ... + \tan^{2n}\frac{\pi}{3} + ... \neq \frac{3}{2}$

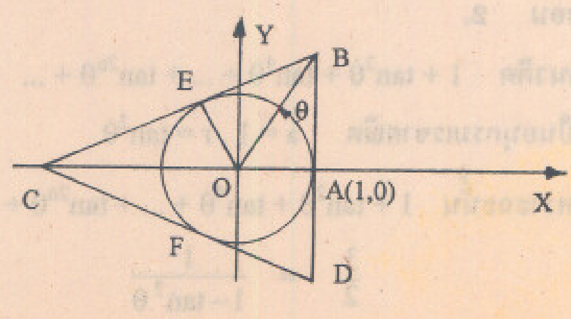
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $\theta = -\frac{\pi}{3}$; $1 + \tan^2(-\frac{\pi}{3}) = 1 + (-\sqrt{3})^2 = 4 > \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

20. **ตอบ 2.**

แนวคิด



จากโจทย์ $|OA| = 1$

จาก ΔOAB

$$\tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$$

การแสดงว่า Δ ABC และ Δ ACD เท่ากันทุกประการ

AC เป็นด้านร่วม

OA ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ดังนั้น $C\hat{A}B = C\hat{A}D = 90^\circ$

CE และ CF เป็นเส้นสัมผัส

เพราะฉะนั้น $E\hat{C}O = O\hat{C}F$

โดย (ม.ด.ม.) จะได้ Δ ABC และ Δ ACD เท่ากันทุกประการ

เพราะฉะนั้น ความยาว $|BD| = |AB| + |AD| = \tan\theta + \tan\theta$

$$|BD| = 2\tan\theta$$

เพราะว่า BE และ AB เป็นเส้นสัมผัส

เพราะฉะนั้น OB แบ่งครึ่งมุม EBA

ดังนั้น $E\hat{B}O = O\hat{B}A$

เพราะว่า $O\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - B\hat{O}A$

$$= \frac{\pi}{2} - \theta$$

เพราะฉะนั้น $E\hat{B}A = 2B\hat{O}A = 2(\frac{\pi}{2} - \theta)$

$$E\hat{B}A = \pi - 2\theta$$

ใน Δ ABC

$$\tan A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AC|}{|AB|}$$

$$\tan(\pi - 2\theta) = \frac{|AC|}{\tan\theta}$$

$$-\tan 2\theta = \frac{|AC|}{\tan\theta}$$

$$|AC| = -\tan\theta\tan 2\theta$$

พื้นที่ $\Delta BCD = \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$= \frac{1}{2} \times |BD| \times |AC|$$

$$= \frac{1}{2}(2\tan\theta) \times (-\tan\theta\tan 2\theta)$$

$$= -\tan^2\theta\tan 2\theta$$

ตรงกับตัวเลือก 2.

การตัดตัวเลือก เลือกให้ ΔBCD เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ล้อมรอบวงกลม

ดังนั้น $O\hat{B}A = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน และ $\theta = \frac{\pi}{3}$

จะได้ $\tan B\hat{O}A = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$

ดังนั้น $|AB| = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$|BD| = 2|AB| = 2\sqrt{3}$$

ใน ΔABC ; $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AC|}{|AB|}$

$$\tan 60^\circ = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$$

$$|AC| = 3$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\Delta BCD = \frac{1}{2} \times |BD| \times |AC|$

$$= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3}) \times 3$$

$$= 3\sqrt{3}$$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ ในตัวเลือก

1. $2\cos\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} = 2\times(\frac{1}{2})\times(\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 3\sqrt{3}$

2. $-\tan^2\theta\tan 2\theta = -\tan^2\frac{\pi}{3}\tan\frac{2\pi}{3}$

$$= -(\sqrt{3})^2(-\sqrt{3})$$
$$= 3\sqrt{3}$$

3. $-\tan^2\theta\cot 2\theta = -\tan^2\frac{\pi}{3}\cot\frac{2\pi}{3}$

$$= -(\sqrt{3})^2(-\frac{1}{\sqrt{3}})$$
$$= \sqrt{3} \neq 3\sqrt{3}$$

4. $2\sin\theta\tan\theta = 2\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$$= 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3})$$
$$= 3 \neq 3\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

21. ตอบ 1.

แนวคิด $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2$

$$= (-1^2 - 3^2 - 5^2 - \ldots - (2n-1)^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2)$$

$$= -(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2) + \sum_{i=1}^{n}(2i)^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 + 4\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$= -\sum_{i=1}^{n}(4i^2 - 4i + 1) + 4\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$= -4\sum_{i=1}^{n}i^2 + 4\sum_{i=1}^{n}i - n + 4\sum_{i=1}^{n}i^2$$

$$= 4\sum_{i=1}^{n} i - n$$

$$= 4(\frac{n}{2})(n+1) - n$$

$$= 2n(n+1) - n$$

$$= 2n^2 + 2n - n$$

$$= 2n^2 + n$$

$$= n(2n+1)$$

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร

ใช้การแทนค่า n บางค่าดีกว่าเช่นแทนค่า $n = 1$

โจทย์ $-1^2 + 2^2 = 3$

ตัวเลือก 1. $1(2+1) = 3$

ตัวเลือก 2. $-1(2+1) = -3$

ตัวเลือก 3. $1(2-1) = 1$

ตัวเลือก 4. $-1(2-1) = -1$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

22. ตอบ 3.

แนวคิด โดยการจัดรูปทางพีชคณิต

$$\frac{x^2 + \sqrt{9+x} - 3}{x} = x + \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x}$$

$$= x + (\frac{\sqrt{9+x} - 3}{x})(\frac{\sqrt{9+x} + 3}{\sqrt{9+x} + 3})$$

$$= x + \frac{(9+x) - 9}{x(\sqrt{9+x} + 3)}$$

$$= x + \frac{1}{\sqrt{9+x}+3} \quad \text{เมื่อ } x \neq 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+\sqrt{9+x}-3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x + \frac{1}{\sqrt{9+x}+3}$

$$= 0 + \frac{1}{\sqrt{9+0}+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

23. ตอบ 1.

แนวคิด $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^2 x + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{d\sin^2 x}{dx} + \frac{d\frac{1}{2}}{dx}$$

$$= 2\sin x\frac{d\sin x}{dx} + 0$$

$$= 2\sin x\cos x$$

$$= \sin 2x$$

ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \sin 2(\frac{\pi}{4}) = 1$

สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ มีความชันเท่ากับ 1 จะมีสมการเป็น

$$y - 1 = (1)(x - \frac{\pi}{4})$$

$$x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าเส้นสัมผัสผ่านจุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$

เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$ จะต้องได้ $y = 1$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ ในทุกตัวเลือกเพื่อหาค่า y

ตัวเลือก 1. $\frac{\pi}{4} - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow y = 1$

ตัวเลือก 2. $\frac{\pi}{4} - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow y \neq 1$

ตัวเลือก 3. $2 - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow y \neq 1$

ตัวเลือก 4. $\sqrt{2} - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0 \rightarrow y \neq 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

24. **ตอบ 3.**

แนวคิด $\int (3x^2 + 2x)\,dx = x^3 + x^2 + K$

ให้ $G(x) = \int (3x^2 + 2x)\,dx$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2 + 2x)\,dx &= G(2) - G(1) \\ &= [2^3 + 2^2 + K] - [1^3 + 1^2 + K] \\ &= (12 + K) - (2 + K) \\ &= 10\end{aligned}$$

25. **ตอบ 3.**

แนวคิด ตัวเลข 0 ห้าตัว และตัวเลข 1 สามตัว เมื่อนำมาแทนตัวเลขในระบบฐานสองจะเป็นจำนวนเลข 8 หลัก เช่น 1000011, 11000001, 11100000, ...

การนับจำนวนค่าทั้งหมดที่แตกต่างกันจึงเท่ากับการจัดลำดับของ 8 สิ่งที่มีการซ้ำกันเป็นสองกลุ่มคือ เลข 0 ซ้ำ 5 ครั้ง และเลข 1 ซ้ำ 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีเท่ากับ $\frac{8!}{5!\,3!} = 56$ วิธี

ข้อสังเกต ปัญหาของโจทย์ข้อนี้ ถ้าตีความในลักษณะของเลขฐาน 2 ตั้งแต่ 1 หลัก ถึง 8 หลัก จะนับจำนวนวิธีได้ดังนี้

ค่าตัวเลข	เลขฐานสอง
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
⋮	⋮
224	11100000

สรุปตัวเลข 0 ห้าตัว และตัวเลข 1 สามตัว สามารถแทนจำนวนเลขได้ทั้งหมด 225 ค่า

26. ตอบ 3.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีพิจารณาจากเหตุผลต่างๆ ดังนี้

1. จำนวนนัดที่มีการแข่งขัน

   เนื่องจากมีการแข่งขัน 4 ทีมแบบพบกันหมด

   ดังนั้นจำนวนนัดการแข่งขัน $= \binom{4}{2} = 6$ นัด

2. ทีมที่จะได้ 6 คะแนน ต้องชนะทั้งสามนัดที่ลงแข่งขัน

ซึ่งนับเป็นจำนวนวิธีได้ 1 วิธีเท่านั้น

3. เนื่องจากผลการแข่งแต่ละนัดมี 3 แบบคือ ชนะ, แพ้, เสมอ

   ดังนั้นผลการแข่งขันสามนัดที่เหลือจึงมีผลได้ $3\times3\times3 = 27$ วิธี

4. เนื่องจากมีทีมเข้าแข่งขัน 4 ทีม

   ดังนั้นทีมที่จะได้ 6 คะแนน จึงมีทางเลือกได้ 4 วิธี

สรุปจำนวนวิธี

= (วิธีเลือกทีม)×(วิธีของผลการแข่งขันของสามทีมอื่นๆ)

= 4×27

= 108

หมายเหตุ การนำโจทย์ข้อนี้ไปใช้ต่อควรจะใช้ข้อมูลให้ทันสมัย เช่น ชนะได้ 3 คะแนน แพ้ได้ 0 คะแนน และเสมอได้ทีมละ 1 คะแนน

27. **ตอบ** 1.

แนวคิด $S = \{k \in I^+ \mid k = 2^n, n = 1,2,3,\ldots,1000\}$

$E = \{k \in S \mid$ หลักหน่วยของ k เท่ากับ $2\}$

$n(S) = 1000$

การนับจำนวนสมาชิกใน E

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

จะเห็นได้ว่า หลักหน่วยของ k มีค่าเป็น 2 เมื่อ

$k = 2, 2^5, 2^9, 2^{13}, \ldots$

พิจารณาลำดับเลขคณิต 1, 5, 9, 13, ...

มี $a = 1$, $d = 4$

พจน์ทั่วไปคือ $a_n = a + (n-1)d = 1 + (n-1)4$

ดังนั้นต้องหาค่า n ที่ใหญ่ที่สุดที่ $a_n \leq 1000$

$$1 + (n-1)4 \leq 1000$$

$$(n-1)4 \leq 999$$

$$n - 1 \leq \frac{999}{4} = 249.75$$

$$n \leq 250.75$$

เพราะฉะนั้น เลือก $n = 250$ และจะได้ $a_n = 1 + (250-1)4 = 997$

สรุป $E = \{2, 2^5, 2^9, 2^{13}, ..., 2^{997}\}$

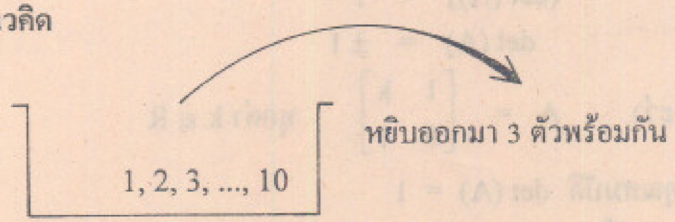
$= \{2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, ..., 2^{a_{250}}\}$

$n(E) = 250$

เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{250}{1000} = 0.25$

28. ตอบ 3.

แนวคิด



S = เซตของกลุ่มตัวเลขที่ได้จากการหยิบเลข 3 ตัวออกจาก 10 ตัว

$= \{\{a, b, c\} \mid a, b, c \in \{1, 2, 3, ..., 10\}\}$

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7!\,3!} = 120$$

$E = \{\{a, b, c\} \in S \mid a + b + c = 15\}$

โดยการแจงกรณีจะได้สมาชิกของ E คือ

$\{9, 5, 1\}$, $\{9, 4, 2\}$

$\{8, 6, 1\}$, $\{8, 5, 2\}$, $\{8, 4, 3\}$

$\{7, 6, 2\}$, $\{7, 5, 3\}$

$\{6, 5, 4\}$

$\{10, 4, 1\}$, $\{10, 3, 2\}$

เพราะฉะนั้น $n(E) = 10$

สรุปความน่าจะเป็นที่ผลรวมของตัวเลขที่ได้มีค่ารวมกันเท่ากับ 15

มีค่าเท่ากับ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{10}{120} = \dfrac{1}{12}$

29. **ตอบ 4.**

แนวคิด พิจารณาตัวเลือก 1.

จากเงื่อนไข $\det(A) = \det(A^{-1})$

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$(\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

เพราะว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ทุกค่า $k \in R$

จะมีคุณสมบัติ $\det(A) = 1$

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ M เป็นอนันต์

พิจารณาตัวเลือก 2.

จากเงื่อนไข $B = B^{-1}$ และ $\det(B) = 1$

สมมติ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

จะได้ $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

เพราะว่า $B = B^{-1}$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ดังนั้น $a = d$

$b = -b$

$c = -c$

เพราะฉะนั้น $b = 0$ และ $c = 0$

เพราะว่า $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$

และ $\det(B) = ad = 1$

เพราะฉะนั้น $d = \frac{1}{a}$

สรุป $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$, $a \neq 0$

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ N เป็นอนันต์

พิจารณาตัวเลือก 3.

จากเงื่อนไข $\det(CC^t) = 0$

$\det(C)\det(C^t) = 0$

$(\det(C))^2 = 0$

$\det(C) = 0$

เลือก $C = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $x \in R$

จะได้ $\det(C) = 0$

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ L เป็นอนันต์

พิจารณาตัวเลือก 4.

จากเงื่อนไข $-D = D^t$ และ $\det(D) = 0$

สมมติ $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $ad - bc = 0$

และ $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} -a &= a \\ -b &= c \\ -c &= b \\ -d &= d \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a = 0$ และ $d = 0$ และ $b = -c$

จาก
$$\begin{aligned} ad - bc &= 0 \\ 0 - bc &= 0 \\ bc &= 0 \\ (-c)c &= 0 \\ c^2 &= 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

สรุป $D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ได้แบบเดียวเท่านั้น

เพราะฉะนั้น $n(K) = 1$

30. ตอบ 4.

แนวคิด วิธีที่ 1 $S = \{1, 2, 3\}$

$$M = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S\}$$

$$D = \{A \in M \mid \det(A) \neq 0\}$$

การนับสมาชิกของ M

เพราะว่า จำนวนค่าของ a, b, c, d แต่ละตัวเลือกได้ 3 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(M) = 3\times3\times3\times3 = 81$

$D' = \{A \in M \mid \det(A) = 0\}$

การนับจำนวนสมาชิก D'

การที่ $\det(A) = 0$ เป็นได้ดังนี้

1. สมาชิกทุกตัวของ A เท่ากัน

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

2. สมาชิกของ A มีแถวหรือหลักเป็นสัดส่วนกัน

(2.1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(2.2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(2.3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $n(D') = 3 + 12 = 15$

สรุป
$$\begin{aligned} n(D) &= n(M) - n(D') \\ &= 81 - 15 \\ &= 66 \end{aligned}$$

วิธีที่ 2 การนับสมาชิกของ D โดยตรง

การที่ $\det(A) \neq 0$ จำแนกเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

กรณี 1. สมาชิกซ้ำกัน 3 ตัว เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลข 2 ชนิดจาก 3 ชนิด $\binom{3}{2}$

ขั้นตอนที่ 2 เลือกว่าจะใช้เลขใด 1 ตัว หรือ 3 ตัว ทำได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดลำดับของ 4 สิ่ง ซ้ำ 3 ทำได้ $\frac{4!}{3!\ 1!}$

สรุปจำนวนวิธี $= \binom{3}{2} \times 2 \times \frac{4!}{3!\ 1!} = 24$ วิธี

กรณี 2. สมาชิกซ้ำกันเป็นคู่ๆ จำนวน 2 คู่ เช่น

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

และ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

สรุปกรณีที่ 2 มีจำนวน 6 วิธี

กรณี 3. ใช้ตัวเลข 1, 2 และ 3 ซ้ำเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขที่จะให้ซ้ำ $\binom{3}{1} = 3$

ขั้นตอนที่ 2 จัดลำดับของ 4 สิ่ง ซ้ำกัน 2 ทำได้ $\frac{4!}{2!\ 1!\ 1!} = 12$

สรุปจำนวนวิธี $= 3 \times 12 = 36$ วิธี

จากทั้ง 3 กรณี จะได้ว่า

$$n(D) = 24 + 6 + 36 = 66$$

31. ตอบ 3.

แนวคิด

ข้อความ ก. ผิด ตัวอย่างเช่น ข้อมูลนักเรียนในโรงเรียนจำแนกเป็น

นักเรียนชาย 1200 คน

นักเรียนหญิง 1300 คน

ข้อมูลในลักษณะนี้จะหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่ได้

ข้อความ ข. ผิด เพราะว่า การทอนค่าข้อมูลคือ การบวกหรือลบข้อมูลด้วยค่าคงตัว k และจากคุณสมบัติของค่าความแปรปรวนจะได้ค่าความแปรปรวนของ X เท่ากับค่าความแปรปรวนของ $X \pm k$ เสมอ นอกจากนั้นการทอนค่าข้อมูลโดยใช้สูตร kX ก็จะได้ว่าค่าความแปรปรวนของ kX เท่ากับ k^2 คูณค่าความแปรปรวนของ X เสมอ

ข้อความ ค. ถูกต้อง เพราะว่ามีการเน้นว่าทำการทดลองทำอย่างถูกต้อง ดังนั้นจึงมีความเชื่อถือได้มากที่สุด

32. ตอบ 4.

แนวคิด $n = 50$

$\bar{x} = 4.3$

$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1345$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$= \frac{1345}{50} - (4.3)^2$$

$$= 26.9 - 18.49$$

$$= 8.41$$

$$s = 2.9$$

จาก $z = 3$ และ $z = \dfrac{x - \bar{x}}{s}$

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{x - 4.3}{2.9} \\ x &= 4.3 + 3(2.9) \\ x &= 13 \end{aligned}$$

33. ตอบ 4.

แนวคิด $\quad 67 = \sum_{i=1}^{6} (x_i^2 - 10)^2$

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i^2 - 20x_i + 100) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - 20\sum_{i=1}^{6} x_i + 100(6)$$

$$67 = 607 - 20\sum_{i=1}^{6} x_i + 600$$

$$20\sum_{i=1}^{6} x_i = 1140$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 57$$

$$\text{ค่าเฉลี่ยเลขคณิต} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6} = \frac{57}{6} = 9.5$$

34. ตอบ 4.

แนวคิด จากโจทย์

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
30 – 39	1	1
40 – 49	2	3
50 – 59	6	9
60 – 69	10	19
70 – 79	20	39
$P_{85} \longrightarrow$ 80 – 89	15	54
90 – 99	6	60

พิจารณาข้อความ ก.

ความหมายของคำว่า "คะแนนต่ำสุดของกลุ่มนักเรียนที่ได้คะแนนสูงสุด ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้คิดเป็น 15 % ของนักเรียนทั้งหมด"

ตรงกับคำว่า เปอร์เซ็นไทล์ที่ 85

น้อย ⟶ มาก

85 % ↑ 15%

P_{85}

การหาเปอร์เซ็นไทล์ที่ 85

$N = 60$

P_{85} ตรงกับข้อมูลตำแหน่งที่ $N \times \frac{85}{100} = 60 \times \frac{85}{100} = 51$

เพราะฉะนั้น P_{85} อยู่ในอันตรภาคชั้น 80 – 89

จากสูตร $$P_r = L + \left[\frac{\frac{Nr}{100} - \Sigma f_L}{f_r}\right] I$$

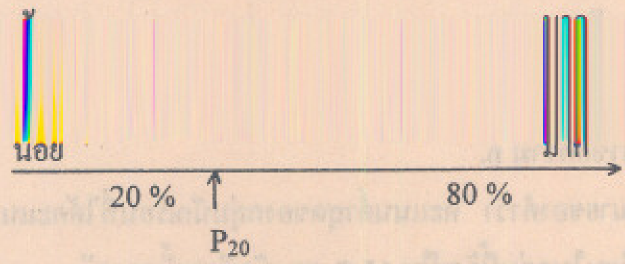
$$\begin{aligned}
P_{85} &= 79.5 + \left[\frac{\frac{60\times 85}{100} - 39}{15}\right] 10 \\
&= 79.5 + \left[\frac{51-39}{15}\right] 10 \\
&= 79.5 + 8 \\
&= 87.5
\end{aligned}$$

สรุปข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

คำว่า "คะแนนสูงสุดของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุด ซึ่งนักเรียนในกลุ่มนี้คิดเป็นร้อยละ 20 ของนักเรียนทั้งหมด"

ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 20 = P_{20}



การหาเปอร์เซ็นไทล์ที่ 20

P_{20} ตรงกับข้อมูลตำแหน่งที่ $N \times \frac{20}{100} = 12$

ซึ่งอยู่ในอันตรภาคชั้น 60 – 69

$$P_{20} = L + [\frac{\frac{Nr}{100} - \Sigma f_L}{f_r}] I$$

$$= 59.5 + [\frac{12-9}{10}] 10$$

$$= 59.5 + 3$$

$$= 62.5$$

สรุปข้อความ ข. ผิด

35. **ตอบ 2.**

แนวคิด จากโจทย์จะได้ว่า

	ข้อมูลชุดที่ 1	ข้อมูลชุดที่ 2
จำนวนข้อมูล	N_1	N_2
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	$\overline{X}$	$\overline{X}$
ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	S	2S

เพราะว่าข้อมูลทั้งสองชุดมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากัน

เพราะฉะนั้น $S^2_{รวม} = \frac{N_1 S_1^2 + N_2 S_2^2}{N_1 + N_2}$

$$= \frac{N_1 S^2 + N_2 (2S)^2}{N_1 + N_2}$$

เพราะว่า $S_{รวม} = \sqrt{2}S$

เพราะฉะนั้น $S^2_{รวม} = 2S^2$

ดังนั้น $$2S^2 = \frac{N_1S^2 + N_2 4S^2}{N_1 + N_2}$$

เพราะว่า $S \neq 0$

เพราะฉะนั้น $$2 = \frac{N_1 + 4N_2}{N_1 + N_2}$$

$$2N_1 + 2N_2 = N_1 + 4N_2$$

$$N_1 = 2N_2$$

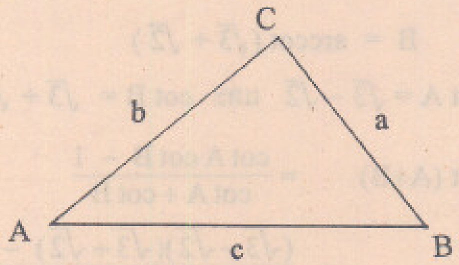
$$\frac{N_1}{N_2} = 2$$

สรุป $N_1 : N_2 = 2 : 1$

ตอนที่ 2.

1. **ตอบ 60 องศา**

แนวคิด



จากกฎของโคไซน์ $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

จากเงื่อนไข $a \leq \frac{b+c}{2}$ เราสามารถพิจารณาค่าของ $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ได้ดังนี้

จาก $2a \leq b+c$

$4a^2 \leq b^2+2bc+c^2$ ....(1)

เพราะว่า $0 \leq (b-c)^2$

เพราะฉะนั้น $0 \leq b^2-2bc+c^2$

$0 \leq 3b^2-6bc+3c^2$ ....(2)

(1) + (2) ; $4a^2 \leq 4b^2-4bc+4c^2$

$a^2 \leq b^2-bc+c^2$

$bc \leq b^2+c^2-a^2$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{1}{2} \leq \cos\hat{A}$$

เพราะว่า $0 < \hat{A} < 180^\circ$ เพราะฉะนั้น $0 < \hat{A} \leqslant 60^\circ$

สรุป ค่ามากที่สุดของ $\hat{A}$ เท่ากับ 60°

2. **ตอบ 0**

แนวคิด ให้ $A = \text{arccot}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$B = \text{arccot}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

จะได้ $\cot A = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ และ $\cot B = \sqrt{3}+\sqrt{2}$

ดังนั้น
$$\cot(A+B) = \frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A+\cot B}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2}) - 1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$= \frac{3-2-1}{2\sqrt{3}} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\cot(\text{arccot}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \text{arccot}(\sqrt{3}+\sqrt{2})) = 0$

3. ตอบ 475

แนวคิด ให้ x, y เป็นจำนวนสองจำนวน

เพราะฉะนั้น $x + y = 50$

และ $x^2 + 10y$ เป็นค่าที่เราต้องการหาค่าน้อยสุด

เพราะว่า $y = 50 - x$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} x^2 + 10y &= x^2 + 10(50 - x) \\ &= x^2 - 10x + 500 \\ &= x^2 - 10x + 25 + 475 \\ &= (x - 5)^2 + 475 \end{aligned}$$

เพราะว่าค่าน้อยที่สุดของ $(x - 5)^2 + 475$ คือ 475

เพราะฉะนั้นค่าน้อยที่สุดของ $x^2 + 10y$ มีค่าเท่ากับ 475

หมายเหตุ ถ้าคิดจากสูตร $y^2 + 10x$ จะได้

$$\begin{aligned} y^2 + 10x &= y^2 + 10(50 - y) \\ &= y^2 - 10y + 500 \\ &= (y - 5)^2 + 475 \end{aligned}$$

ได้ค่าน้อยสุดเท่ากับ 475 เหมือนกัน

4. ตอบ 2

แนวคิด จากข้อกำหนดของ $*$ เราต้องหาเอกลักษณ์สำหรับ $*$ บน $R-\{1\}$

ให้ e เป็นเอกลักษณ์ของ $*$ บน $R - \{1\}$

ดังนั้น $a * e = a$ ....(1)

จากการกำหนดค่าของ $*$ จะได้

$a * e = a + e - ae$ ....(2)

เพราะฉะนั้น $a = a + e - ae$

$$\begin{aligned} e - ae &= 0 \\ e(1 - a) &= 0 \end{aligned}$$

เพราะว่า $a \in R - \{1\}$ ดังนั้น $1 - a \neq 0$

เพราะฉะนั้น $e = 0$

สรุปเอกลักษณ์ของ $*$ บน $R - \{1\}$ คือ 0

การหาอินเวอร์สของ 2 สำหรับ $*$ บน $R - \{1\}$

สมมติ x เป็นอินเวอร์สของ 2

เพราะฉะนั้น $\quad 2 * x = e = 0$

และ $\quad 2 * x = 2 + x - 2x$

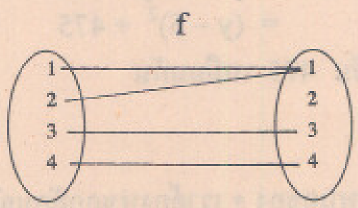
ดังนั้น $\quad 0 = 2 + x - 2x$

$\quad x = 2$

สรุปอินเวอร์สของ 2 ของตัวดำเนินการ $*$ คือ 2

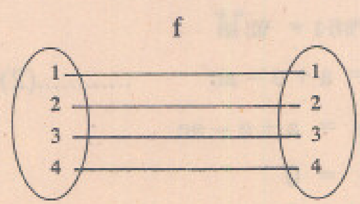
5. ตอบ **35**

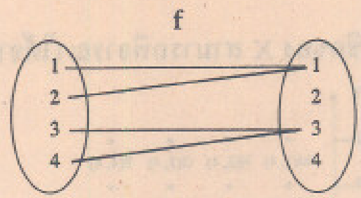
แนวคิด $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ตัวอย่างของฟังก์ชัน $f : S \to S$ เช่น



$X = \{f : S \to S \mid$ ถ้า $a > b$ แล้ว $f(a) \geq f(b)$ และ $D_f = S\}$

ตัวอย่างฟังก์ชัน $f \in X$ เช่น





โดยการแจงกรณีจะได้ฟังก์ชันที่เป็นสมาชิกของ X คือ

$f_{1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$
$f_{2} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\}$
$f_{3} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 3)\}$
$f_{4} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 4)\}$
$f_{5} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 2)\}$
$f_{6} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$
$f_{7} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 4)\}$
$f_{8} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{9} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{10} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{11} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$
$f_{12} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$
$f_{13} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\}$
$f_{14} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{15} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{16} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{17} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{18} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{19} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{20} = \{(1, 1), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{21} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$
$f_{22} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 3)\}$
$f_{23} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\}$
$f_{24} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{25} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{26} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{27} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{28} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{29} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$

$f_{30} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

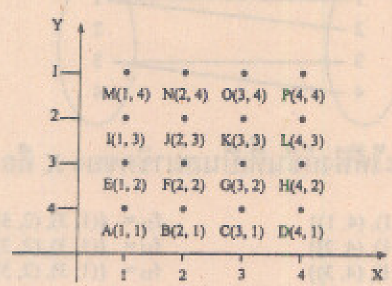
$f_{31} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
$f_{32} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
$f_{33} = \{(1, 3), (2, 3), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{34} = \{(1, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

$f_{35} = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$

สรุป $n(X) = 35$

วิธีที่ 2 การนับสมาชิกของ X สามารถพิจารณาได้จากจุดของกราฟ ต่อไปนี้



$f = \{A, B, C, D\} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\} \in X$

$f = \{A, B, C, H\} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 2)\} \in X$

การนับจำนวนสมาชิกของ X เป็นเลือกจุด 4 จุดที่รวมกันเป็นฟังก์ชัน f และเป็นสมาชิกของ X ตัวอย่างเช่น

ตัวที่ 1 เลือก A $\qquad A \in f$

ตัวที่ 2 เลือก B $\qquad A, B \in f$

ตัวที่ 3 เลือก C $\qquad A, B, C \in f$

ตัวที่ 4 จะเลือกได้ 4 วิธี คือ D, H, L หรือ P

ตัวที่ 1	ตัวที่ 2	ตัวที่ 3	ตัวที่ 4 เลือกได้
A	B	C	4
		G	3
		K	2
		O	1
A	F	G	3
		K	2
		O	1
A	J	K	2
		O	1
A	N	O	1
E	F	o	3
		K	2
		O	1
	J	K	2
		O	1
	N	O	1
I	J	K	2
		O	1
	N	O	1
M	N	O	1
		รวม	35

สรุป $n(X) = 35$

6. **ตอบ 25**

แนวคิด จากเงื่อนไขของโจทย์เขียนตารางแจกแจงความถี่ได้ดังนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
≤ 60	9	9
$60-69$	x	$9+x$
≥ 69	6	$15+x$
	$x+15$	

จำนวนคนเข้าสอบ $= x+15$ คน

จากสูตรมัธยฐาน $= L+\left[\dfrac{\frac{N}{2}-\Sigma f_L}{f_m}\right]$

$\Sigma f_L = 9$

$f_m = x$

$I = 69.5-59.5 = 10$

$N = x+15$

$L = 59.5$

$$63 = 59.5+\left[\frac{\frac{x+15}{2}-9}{x}\right]10$$

$$3.5 = \left[\frac{x+15-18}{2x}\right]10$$

$7x = 10x-30$

$3x = 30$

$x = 10$

สรุปมีผู้เข้าสอบ $N = 15+10 = 25$ คน

ตอนที่ 3

ข้อพิสูจน์ ให้ $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$ และ

$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$

ดังนั้น $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $f(x_1) = f(x_2)$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $x_1 = x_2$

สรุป ทุกค่า $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$

ถ้า $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

วัฏจักร

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์ ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 2

(Wattachak Math & Science Championship 1993)

คณิตศาสตร์

วันที่ 13 พฤศจิกายน พ.ศ. 2536 เวลา 08.00-11.00 น.

คำแนะนำ

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน(100 คะแนน)

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบตัวเลือก มีทั้งหมด 30 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 60 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ มีทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 30 คะแนน

ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ มี 1 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน

ตอนที่ 1

1. <u>บทนิยาม</u> เซต A เป็นเซตถ่ายทอด ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x\, [x \in A \rightarrow x \subset A]$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

ข. สำหรับเซต A ใดๆ P(A) เป็นเซตถ่ายทอด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว　　2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

3. ก.และ ข.ถูกทั้งสองข้อ　　4. ก.และ ข.ผิดทั้งสองข้อ

2. กำหนดให้ $A' \cap B = (A \cap B')'$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \neq B'$ 2. $A' \neq B$
3. $A \cup B' \subset B'$ 4. $A \not\subset A \cap B'$

3. ให้ $U = \{1,2,3,\ldots,100\}$ และ

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,100) = 1\}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าใด

1. 5050   2. 3000
3. 2000   4. 1050

4. ให้ a,b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ และ

$x = \frac{a-b}{a+b}$, $y = \frac{b-c}{b+c}$ และ $z = \frac{c-a}{c+a}$ เป็นจำนวนจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x+y+z \geqslant 0$ 2. $x+y+z < 0$
3. $xyz < 0$
4. $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

5. เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$ เป็นสับเซต

ของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1,1)$ 2. $(1,2)$
3. $(\frac{3}{2},4)$ 4. $(2,\infty)$

6. กำหนดให้ $U = \{f \mid f : \{1,2,3,4\} \xrightarrow{1-1} \{1,2,3,4\}\}$

$E \subset U$ มีคุณสมบัติดังนี้

$f \in E$ ก็ต่อเมื่อ (1) $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$ และ

(2) ถ้า $f(3) \neq 4$ แล้ว $[f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)]$

จำนวนสมาชิกของเซต E เท่ากับเท่าใด

1. 8   2. 10

3. 12   4. 16

7. กำหนดให้

$U = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset \{1,2,3,4\} \times \{a,b\}\}$

$A = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f = \{a,b\}\}$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

1. 12   2. 14

3. 16   4. 48

8. ให้ A เป็นเซตของประพจน์ที่มีค่าความจริง 3 ค่า คือ 0,1,2

$f : A \rightarrow \{0,1,2\}$ เป็นฟังก์ชันค่าความจริง

ให้ * เป็นตัวเชื่อมของประพจน์ที่กำหนดโดย

$$f(p*q) = \begin{cases} 2 & , \ f(p) \leq f(q) \\ f(q) & , \ f(p) > f(q) \end{cases}$$

Δ เป็นตัวเชื่อมที่กำหนดโดย

$$f(\Delta p) = \begin{cases} 2 & , \ f(p) = 0 \\ 0 & , \ f(p) \neq 0 \end{cases}$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f((p*p)*(q*q)) = 2$ ทุก $p,q \in A$

ข. $f((\Delta p)*q) = 1$ ถ้า $f(p) = f(q) = 1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว   2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

3. ก.และ ข.ถูกทั้งสองข้อ   4. ก.และ ข.ผิดทั้งสองข้อ

9. กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$

ให้ $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

ผลบวกของสมาชิกของเซต X มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. −107　　2. −106
3. −105　　4. −104

10. ให้ $a = 0.9$, $b = a^a$ และ $c = a^b$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a < b < c$　　2. $b < a < c$
3. $a < c < b$　　4. $b < c < a$

11. ให้ ℓ แทนเส้นตรงที่มีสมการ $y = 2x$ พิกัดของจุด P_0 คือ (0,2) ถ้า P_1 เป็นโพรเจกชันของ P_0 บน ℓ , P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y และ P_3 เป็นโพรเจกชันของ P_2 บน ℓ พิกัดของ P_3 คือคู่อันดับใด

1. (0.5,1)　　2. (0.64,1.28)
3. (0.8,1.6)　　4. (0.84,1.68)

12. ให้ $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$ เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ (0,0) และมีเส้นตรง $x+y+2\sqrt{2} = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์

ค่าของ $x_1+y_1+x_2+y_2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{2}$　　2. $-2\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{2}$　　4. $-4\sqrt{2}$

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

ข. เมื่อ $x \in [0,2\pi)$ สมการ $\sin x + \cos x = 2$ จะมีเพียงคำตอบเดียวเท่านั้น

ค. ทุกจำนวนจริง x,y $\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan x + \tan y$ เมื่อ $\cos(x+y) \neq 0$

ง. ทุกจำนวนจริง θ $\tan(\frac{\pi}{4} + \theta) = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ เมื่อ $\tan\theta \neq 1$

ข้อความ ก - ง ถูกทั้งหมดกี่ข้อ

1. 1 ข้อ　　　　2. 2 ข้อ
3. 3 ข้อ　　　　4. 4 ข้อ

14. กำหนด Δ ABC มี $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$

ค่าของ $\frac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$　　　　2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $3\sqrt{3}$　　　　4. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

15.

บทนิยาม ให้ $f : R \rightarrow R$ และ $A \subset R$ $f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$

กำหนดให้ $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $x \in [-4,5]$

$X = f([-4,5])$

$Y = f([-4,0))$

$Z = f((0,5])$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $Y = X - Z$　　　　2. $Y \cap Z = \phi$
3. $Z = X - Y$　　　　4. $X = Z \cup Y$

16. กำหนด $U = [-8,12]$

$A = \{x \in U \mid \sin|x| = 1\}$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้<u>ผิด</u>

1. $A \cap C \neq C \cap B$ 2. $A - B \subset C - B$

3. $C - B \subset C - A$ 4. $A - B = A - C$

17. ตารางขนาด 2×2 มีช่องว่าง 4 ช่อง ดังรูป

แต่ละช่องจะเขียนเลขโดด 0,1,2,..., หรือ 9 หนึ่งตัว ความน่าจะเป็นที่ช่องที่มีด้านร่วมกัน (ช่องที่ติดกันตามแนวตั้งหรือแนวนอน) มีค่าตัวเลขต่างกัน อยู่ในช่วงใด

1. $(0.20, 0.35]$ 2. $(0.35, 0.50]$

3. $(0.50, 0.65]$ 4. $(0.65, 0.80]$

18. กำหนด z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่

$$z + 4\bar{w} = 8 + 3i$$

$$3\bar{z} + 2w = 2 - 8i$$

ค่าของ $|z|^2 + |\bar{w}|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 0.65 2. 7.45

3. 12.25 4. 14.25

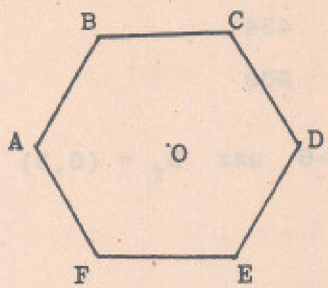
19. ให้ V เป็นเซตของเวกเตอร์ กำหนดโดย

$V = \{m\bar{i} + n\bar{j} \mid m,n \in I,\ 0 < m \leq 9$ และ $0 < n \leq 9\}$

เซตใดต่อไปนี้มีจำนวนสมาชิกน้อยที่สุด

1. $A = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ x \neq y\}$
2. $B = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ |\bar{v}| \geq 6\}$
3. $C = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v}$ ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}\}$
4. $D = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v}$ ไม่ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}\}$

20. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และมี O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยม ดังรูป



กำหนดความยาว AO เท่ากับ 2 เซนติเมตร

เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดมากกว่า 4 เซนติเมตร

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}$
2. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}$
3. $\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}$
4. $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$

21. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8}$ มีค่าเป็นเท่าไร

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{8}$
3. $\frac{1}{12}$
4. ไม่มีลิมิต

22. กำหนด ฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 1000x + 1200y$

อสมการข้อจำกัด
$$\begin{aligned} 5x + 6y &\leq 160 \\ x + y &\leq 30 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

ถ้า (x_o, y_o) ทำให้ P มีค่ามากที่สุด

$x_o - y_o$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 10

3. 20 4. 30

23. จากอสมการข้อจำกัดในข้อ 22

อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยอสมการข้อจำกัดนี้มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

(ตอบเฉพาะจำนวนเต็ม)

1. 416 2. 434

3. 450 4. 900

24. กำหนดให้ $f(x) = x^3-6x^2+11x-6$ และ $D_f = (0,3)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f มีค่าสูงสุด และมีค่าต่ำสุด

2. f มีค่าสูงสุด แต่ไม่มีค่าต่ำสุด

3. f มีค่าต่ำสุด แต่ไม่มีค่าสูงสุด

4. f ไม่มีค่าสูงสุด และไม่มีค่าต่ำสุด

25. กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ และ $f^{(n)}(x)$ คือ

อนุพันธ์อันดับที่ n ของ f

ค่าของ $f^{(10)}(-1)$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. -1

3. 10! 4. -10!

26. กำหนดให้ $\frac{d}{dx}f(x) = a$ และ $\frac{d}{dx}g(x) = b$ เมื่อ a,b

เป็นค่าคงตัว และ $b \neq 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{a}{b}$

2. $\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = ab$

3. $\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x)$

เมื่อ $f \circ g$ และ $g \circ f$ มีความหมาย

4. พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = a$ คือ a^2

27. $2^{2536} + 3^{2536}$ หารด้วย 5 เหลือเศษเป็นเท่าใด

1. 0 2. 1

3. 2 4. 3

28. จำนวนเฉพาะชุดหนึ่งคูณกันได้ 96577 พิสัยของจำนวนเฉพาะชุดนี้เท่ากับเท่าใด

1. 8 2. 10

3. 12 4. 16

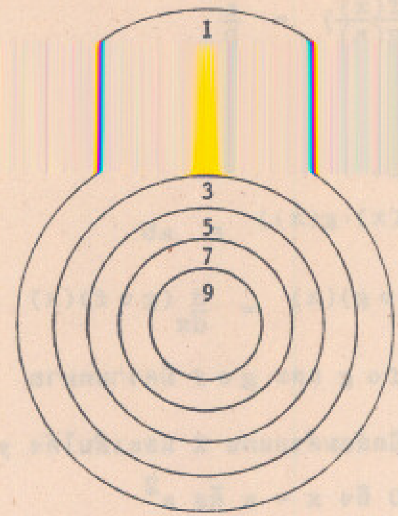
29. $\frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{2}{3}) + (\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}) + \ldots + (\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \ldots + \frac{99}{100})$ เท่ากับเท่าใด

1. 10100 2. 5050

3. 2525 4. 2475

30. เป้ารูปวงกลมแสดงดังรูป แบ่งออกเป็น 5 อาณาบริเวณ ดังรูป แต่ละอาณาบริเวณมีแต้มเป็น 1,3,5,7 และ 9

เด็กคนหนึ่งปาลูกดอกเข้าเป้าทั้ง 10 ครั้ง ไม่มีครั้งใดปาคาบเส้น แต้มในข้อใดเป็นแต้มรวมที่มีโอกาสที่เด็กชายคนนี้ทำได้



1. 47 2. 68

3. 87 4. 98

ตอนที่ 2

1. จำนวนเต็ม 10 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 7.7 ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เป็น 9.41 ถ้าตัดจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งออกจากข้อมูลชุดนี้ ข้อมูลที่เหลือจะมีความแปรปรวนเป็น $10\frac{4}{9}$ อยากทราบว่า ข้อมูลที่ถูกตัดออกมีค่าเป็นเท่าใด

2. กำหนด $A = \{x \mid x \in [0,2\pi]$ และ $\sin 2x \cos x = 1\}$
จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด

3. กำหนด $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in U,\ a < b \text{ หรือ } c < d \right\}$$

จำนวนสมาชิกของ M เท่ากับเท่าใด

4. เลขหลักหน่วยของ $3^{2537} - 2536$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. ให้ $f(x) = (1+2x+3x^2+...+101x^{100})(1+x+x^2+...+x^{50})$

ถ้าเขียน $f(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ... + C_{150}x^{150}$

แล้ว $C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_{150}$ เท่ากับเท่าใด

6. จากโจทย์ในข้อ 5. C_{100} มีค่าเป็นเท่าใด

7. ให้ $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n}$

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด

8. โยนก้อนหินลงในสระน้ำ จะทำให้น้ำเป็นละลอกแผ่เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดก้อนหินตก รัศมีวงกลมวงนอกเพิ่มขึ้นด้วยความเร็ว 50 เซนติเมตรต่อวินาที จงหาว่า ขณะที่พื้นที่วงกลมนอกเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 2.5π ตารางเมตรต่อวินาที นั้น เป็นเวลาหลังจากที่ก้อนหินตกถึงผิวน้ำกี่วินาที

9. $3\int_0^1 (x^2+2x+1)\, d(x+1)$ เท่ากับเท่าใด

10. สมมติว่า ในปี พ.ศ.2538 มีอัตราเงินเฟ้อ 4.5 % และปี พ.ศ.2539 มีอัตราเงินเฟ้อ 6.5 % ถ้าขายสินค้าชนิดหนึ่งราคา 100 บาท ในปี พ.ศ.2537 สินค้านั้นจะต้องขายราคาเท่าใดใน พ.ศ.2539 จึงจะมีราคาเทียบเท่า 100 บาท ใน พ.ศ.2537 (ตอบเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

ตอนที่ 3 จงแสดงวิธีทำ

1. | |
|---|
| **บทนิยาม** สำหรับเซต A และเซต B ใดๆ |
| $A \approx B$ ก็ต่อเมื่อ มีฟังก์ชัน f ซึ่ง $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ |

ให้ $A = [0,1]$ และ $B = [0,4]$ จงพิสูจน์ว่า $A \approx B$

(ข้อแนะ : (1) จะต้องหา f ที่เป็นฟังก์ชัน ในที่นี้ให้เขียน f ในรูปสมการ $f(x) = \ldots$ แล้วแสดงการเป็นฟังก์ชัน กล่าวคือ ให้ $x_1 = x_2$ แล้วแสดงว่า $f(x_1) = f(x_2)$

(2) จะต้องแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 นั่นคือ ให้ $f(x_1) = f(x_2)$ แล้วแสดงว่า $x_1 = x_2$

(3) แสดง $D_f = A$ และ $R_f = B$

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2

ตอนที่ 1

1. ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถูก เพราะว่าเมื่อ $A = \phi$ จะได้ว่า

$x \in \phi$ เป็นเท็จ ดังนั้นข้อความ

$x \in \phi \rightarrow x \subset \phi$ จึงมีค่าความจริงเป็นจริง

สรุป $\forall x\,[x \in \phi \rightarrow x \subset \phi]$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

ข. ผิด เช่น $A = \{1\}$ จะได้ $P(A) = \{\phi, A\}$

เพราะว่า $\{1\} \in P(A)$ แต่ $\{1\} \not\subset P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A)$ ไม่เป็นเซตถ่ายทอด

2. ตอบ 3.

แนวคิด จาก $A' \cap B = (A \cap B')'$

จะได้ $A' \cap B = A' \cup B$

เพราะฉะนั้น $A' = B$ ผลที่ตามมาคือ

1. $A \neq B'$ เป็นข้อความที่ผิด
2. $A' \neq B$ เป็นข้อความที่ผิด
3. $A \cup B' = B'$

   ดังนั้น $A \cup B' \subset B'$ ถูกต้อง
4. $A \cap B' = A$

   ดังนั้น $A \not\subset A \cap B'$ เป็นข้อความที่ผิด

วิธีลัด ลักษณะของโจทย์ข้อนี้เราสามารถใช้การแทนค่าเซต A

และ B ที่เหมาะสมแล้วทำการตัดตัวเลือกได้ เช่น $U = \{1,2\}$

เลือก $A = \{1\}$ และ $B = \{2\}$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไข

ของโจทย์นั่นคือ $A' \cap B = \{2\}$ และ $(A \cap B')' = \{2\}$

แต่ตัวเลือก

1. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$
2. ผิด เพราะว่า $A' = \{2\}$ และ $B = \{2\}$
3. ถูก เพราะว่า $A \cup B' = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$
4. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $A \cap B' = \{1\}$

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

$$
\begin{aligned}
a \in X &\rightarrow a \in X \cup Y \\
&\rightarrow a \in X \cap Y \\
&\rightarrow a \in Y
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $X \subset Y$ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $Y \subset X$

สรุป ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

3. **ตอบ** 3.

แนวคิด $U = \{1,2,3,...,100\}$

$$\sum_{x \in U} x = 1 + 2 + 3 + ... + 100$$

$$= \frac{100}{2}(1+100) = 5050$$

$$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,100) = 1\}$$

$$X' = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,100) \neq 1\}$$

เพราะว่า $100 = 2^2 \cdot 5^2$

เพราะฉะนั้น $x \in U$ และ ห.ร.ม.$(x,100) \neq 1$ คือตัวเลข x ที่ 2 หารลงตัว หรือ 5 หารลงตัว

ให้ $A = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{2,4,6,\ldots,100\}$

จะได้
$$\sum_{x \in A} x = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = \frac{50}{2}(2+100) = 2550$$

ให้
$$B = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{5,10,15,\ldots,100\}$$

จะได้
$$\sum_{x \in B} x = 5 + 10 + 15 + \ldots + 100 = \frac{20}{2}(5+100) = 1050$$

$$A \cap B = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{10,20,30,\ldots,100\}$$

$$\sum_{x \in A \cap B} x = 10 + 20 + 30 + \ldots + 100 = \frac{10}{2}(10+100) = 550$$

เพราะว่า $X' = A \cup B$ และ

$$\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x - \sum_{x \in A \cap B} x$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{x \in X'} x = 2550 + 1050 - 550 = 3050$$

$$\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in U} x - \sum_{x \in X'} x = 5050 - 3050 = 2000$$

วิธีลัด เนื่องจากจำนวนสมาชิกของ U มีไม่มากและจำนวน x ที่ ห.ร.ม.$(x,100) = 1$ คือตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 100 ซึ่งเราสามารถแจงนับได้ดังนี้

สมาชิกที่ใช้ได้	ผลบวก
1,3,7,9	20
11,13,17,19	60
21,23,27,29	100
31,33,37,39	140
41,43,47,49	180
51,53,57,59	220
61,63,67,69	260
71,73,77,79	300
81,83,87,89	340
91,93,97,99	380
	รวม 2000

4. ตอบ 4.

แนวคิด $1-x = 1 - (\frac{a-b}{a+b}) = \frac{2b}{a+b}$

$$1-y = 1 - (\frac{b-c}{b+c}) = \frac{2c}{b+c}$$

$$1-z = 1 - (\frac{c-a}{c+a}) = \frac{2a}{c+a}$$

$$(1-x)(1-y)(1-z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$1+x = 1 + (\frac{a-b}{a+b}) = \frac{2a}{a+b}$$

$$1+y = 1 + (\frac{b-c}{b+c}) = \frac{2b}{b+c}$$

$$1+z = 1 + (\frac{c-a}{c+a}) = \frac{2c}{c+a}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

สรุป $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

วิธีลัด จากวิธีทำข้างบนนี้ว่าจะได้คำตอบคงต้องเสียเวลากับการคิดตัวเลือก 1. 2. และ 3. พอสมควร

เรามาลองใช้วิธีแทนค่าตัดตัวเลือกกันดีกว่า

เมื่อ $a = 1$ $b = 1$ และ $c = 1$

จะได้ $x = 0$ $y = 0$ และ $z = 0$

พิจารณาแต่ละตัวเลือก

1. $x+y+z = 0 \geq 0$ ใช้ได้
2. $x+y+z = 0 < 0$ ผิดแน่นอน
3. $xyz = 0 < 0$ ผิดอีกเหมือนกัน
4. $(1-0)(1-0)(1-0) = (1+0)(1+0)(1+0)$ ใช้ได้

สรุปตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $a = 1$ $b = 2$ และ $c = 3$

จะได้ $x = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{1}{5}$ และ $z = \frac{2}{4}$

เพราะว่า $x+y+z = -\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{2}{4} = -\frac{2}{60}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิดอีก

สรุปเหลือตัวเลือกเดียวคือ 4. เลือกเป็นคำตอบเลย

5. ตอบ 2.

แนวคิด

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

$$1-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x+1$$

$$-\sqrt{x^4-x^2} = x^2-2x$$

$$x^4-x^2 = x^4-4x^3+4x^2$$

$$-4x^3+5x^2 = 0$$

$$x^2(-4x+5) = 0$$

ดังนั้น $x^2 = 0$ หรือ $-4x+5 = 0$

จากโจทย์จะพบว่า $x = 0$ ไม่ได้

ดังนั้น $$-4x+5 = 0$$

$$x = \frac{5}{4}$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $\{\frac{5}{4}\}$ เป็นสับเซตของตัวเลือก 2.

6. **ตอบ** 1.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิก $f \in E$

กรณี 1 $f(3) = 4$

ขั้นที่ 1 การส่งค่า 1 ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่า 2 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่า 4 ทำได้ 1 วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

กรณี 2 $f(3) \neq 4$

ขั้นที่ 1 เพราะว่า $f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)$

เพราะฉะนั้นการส่งค่าของ 3 ทำได้วิธีเดียวคือ $f(3) = 1$

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$

เพราะฉะนั้น $f(4)$ ต้องเท่ากับ 4 ซึ่งทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าระหว่าง $\{1,2\}$ กับ $\{1,2\}$ ทำได้ $2! = 2$ วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ $(1)(1)(2) = 2$ วิธี

สรุป $n(E) = 6+2 = 8$

วิธีลัด เนื่องจากเงื่อนไขสมาชิกของเซต E มี <u>และ</u> 3 เงื่อนไข ดังนั้นการคิดบางเงื่อนไขก็จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เช่น

ให้ $F = \{f \in U \mid f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4\}$

การนับจำนวนสมาชิก F พิจารณาดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลข 2 ตัวจาก $\{1,2,3\}$ เพื่อจับคู่กับ

$\{1,2\}$ ซึ่งทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่าง $\{1,2\}$ กับตัวเลขที่เลือกได้

ในขั้นตอนที่ 1 ทำได้ $2!$ วิธี

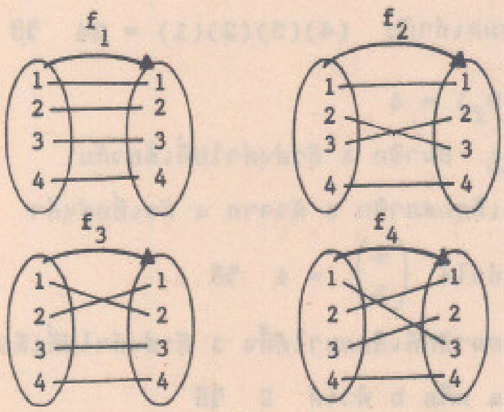
ขั้นที่ 3 การส่งค่าของ $\{3,4\}$ กับส่วนที่เหลือทำได้ $2!$ วิธี

เพราะฉะนั้น $n(F) = (3)(2!)(2!) = 12$

เพราะว่า $E \subset F$ เพราะฉะนั้น $n(E) \leqslant 12$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้

เมื่อเราคิดเฉพาะสมาชิกใน F ที่ไม่อยู่ใน E คือ



เพราะฉะนั้น $n(E) \leqslant 12-4 = 8$

ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. 3. และ 4. ทิ้งได้เลย

7. ตอบ 4.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกของ A จำแนกเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1 $n(D_f) = 2$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก $\{1,2,3,4\}$ ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่างสมาชิก 2 ตัวที่เลือกได้กับ {a,b}

ทำได้ $2! = 2$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6)(2) = 12$ วิธี

กรณีที่ 2 $n(D_f) = 3$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก {1,2,3,4} ทำได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 3 ตัวที่เลือกได้เพื่อส่งค่าไปที่เดียวกัน

ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของสมาชิกในขั้นที่ 2 ไปยัง {a,b} ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 ตัวเลขที่เหลือ 1 ตัว ส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(3)(2)(1) = 24$ วิธี

กรณีที่ 3 $n(D_f) = 4$

<u>กรณีที่ 3.1</u> สมาชิก 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก 4 ตัวเพื่อส่งค่า

ทำได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิกที่เลือกมาได้ทั้ง 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกันคือ

a หรือ b ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกส่วนที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(2)(1) = 8$

<u>กรณีที่ 3.2</u> สมาชิก 2 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 แบ่งสมาชิก 4 ตัว ออกเป็น 2 กลุ่มๆละ 2 ทำได้

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 3 \text{ วิธี}$$

ขั้นที่ 2 สมาชิกกลุ่มแรกเลือกส่งค่าไปที่ a หรือ b ได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกสองตัวที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

สรุป จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับ $12+24+8+6 = 48$

วิธีลัด จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เราจะได้จำนวนสมาชิก

$n(A) \geqslant 12+24 = 36$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

8. **ตอบ** 1.

แนวคิด ก. ถูก

เพราะว่า ทุกประพจน์ p,q $f(p*p) = 2 = f(q*q)$

เพราะฉะนั้น $f((p*p)*(q*q)) = 2$

ข. ผิด

เพราะว่า $f(p) = 1 \neq 0$ ดังนั้น $f(\Delta p) = 0$

เพราะว่า $f(q) = 1 > f(\Delta p)$

เพราะฉะนั้น $f((\Delta p)*q) = 2$

9. **ตอบ** 4.

แนวคิด $5^{-10} < 3^n < 5$

$\log 5^{-10} < \log 3^n < \log 5$

$-10 \log 5 < n \log 3 < \log 5$

$-10(1 - \log 2) < (0.4771)n < 1 - \log 2$

$-10(1 - 0.3010) < (0.4771)n < 1 - 0.3010$

$-6.99 < (0.4771)n < 0.699$

$-14.65 < n < 1.465$

เพราะฉะนั้น $X = \{n \in I \mid 5^{-10} < 3^n < 5\}$

$= \{-14,-13,-12,\dots,-1,0,1\}$

ผลบวกสมาชิกของ X เท่ากับ

$(-14) + (-13) + \dots + (-1) + (0) + (1)$

$= (-14) + (-13) + \dots + (-2)$

$= -(2 + 3 + 4 + \dots + 14)$

$= -104$

10. **ตอบ** 3.

แนวคิด เปรียบเทียบ $(0.9)^1$ กับ $(0.9)^{0.9}$ ดังนี้

เนื่องจาก $f(x) = (0.9)^x$ เป็นฟังก์ชันลด และ $1 > 0.9$

เพราะฉะนั้น $f(1) < f(0.9)$

นั่นคือ $(0.9)^1 < (0.9)^{0.9}$

สรุป $a < b$

ขณะนี้หากเราจะใช้วิธีตัดตัวเลือกก็สามารถตัดข้อ 2. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลด และ $a < b$

เพราะฉะนั้น $f(a) > f(b)$ นั่นคือ $a^a > a^b$

$b > c$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 3.

วิธีลัด เพราะว่า $f(1) < f(b)$

เพราะฉะนั้น $a = f(1) < a^b = f(b) = c$

จากโจทย์ข้อ 9. ให้ค่า $\log 3 = 0.4771$ เราสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ดังนี้

$$\log a = \log 0.9 = \log 9 - 1 = 2\log 3 - 1$$
$$= 2(0.4771) - 1$$
$$= -0.0458$$

$$\log b = \log a^{a} = a\log a = (0.9)(-0.0458) = -0.04122$$

เพราะว่า $-0.04122 > -0.0458$

$$\log b > \log a$$

เพราะฉะนั้น $b > a$

ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก 1. ๒. และ 4. ทิ้งได้

11. ตอบ ๒.

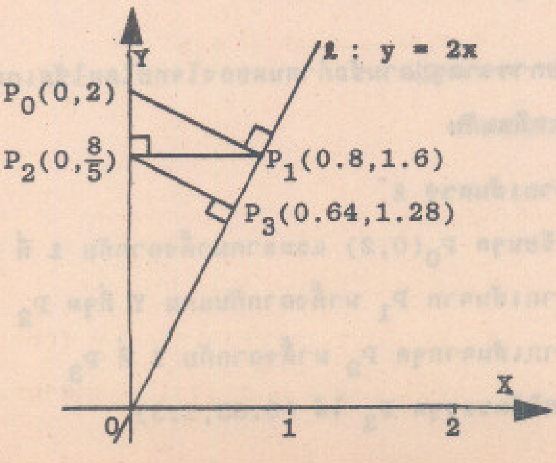
แนวคิด ℓ มีสมการเป็น $y = 2x$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ 2

เพราะว่า P_0P_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง ℓ

เพราะฉะนั้น ความชัน P_0P_1 เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

สมการเส้นตรง P_0P_1 คือ $y-2 = (-\frac{1}{2})(x-0)$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$



แทนค่า $y = 2x$ จะได้ $2x = -\frac{x}{2} + 2$

$x = 0.8$

เพราะฉะนั้น $y = 1.6$

พิกัด $P_1(0.8,1.6)$

P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y

ดังนั้นพิกัด P_2 คือ $(0,1.6)$

เพราะว่า $P_2P_3 \perp \ell$ ดังนั้นความชันของเส้น P_2P_3 เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

และมีสมการเส้นตรง P_2P_3 เป็น

$$(y-1.6) = (-\frac{1}{2})(x-0)$$

$$y-1.6 = -\frac{x}{2}$$

แทนค่า $y = 2x$ เพื่อหาจุดตัด P_3 จะได้

$$2x-1.6 = -\frac{x}{2}$$

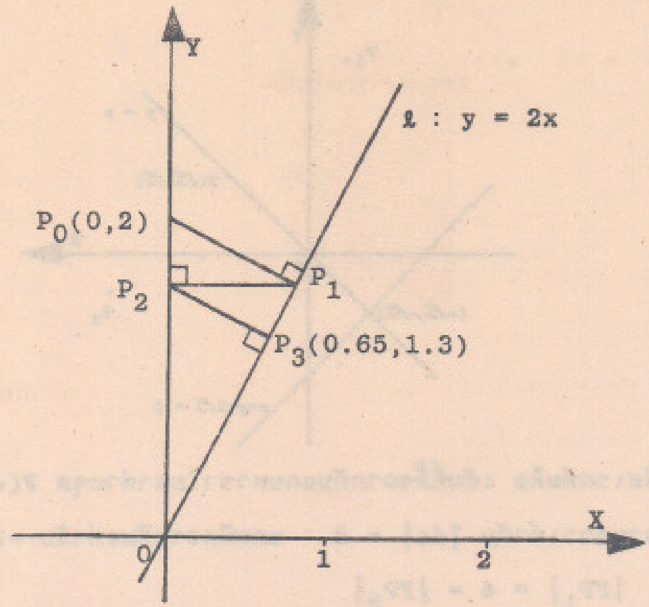
จะได้ $x = 0.64$

$y = 1.28$

สรุปพิกัดของ P_3 คือ $(0.64,1.28)$

วิธีลัด โดยการวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์โดยใช้สเกล 1 นิ้ว จะได้คำตอบเหมือนกัน

1. ลากเส้นตรง ℓ
2. เขียนจุด $P_0(0,2)$ และลากมาตั้งฉากกับ ℓ ที่ P_1
3. ลากเส้นจาก P_1 มาตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด P_2
4. ลากเส้นจากจุด P_2 มาตั้งฉากกับ ℓ ที่ P_3
5. วัดพิกัดของจุด P_3 ได้ $(0.65,1.3)$



เลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 2. ดีกว่า

หมายเหตุ หากใช้ไหวพริบนิดหน่อย เราวัดพิกัด P_3 ด้วยค่า

$x = 0.65$ หรือ ค่า $y = 1.3$ เพียงค่าเดียวก็พอ

12. **ตอบ** 3.

แนวคิด ระยะทางจากจุด (0,0) ไปยังเส้นตรง $x+y+2\sqrt{2} = 0$

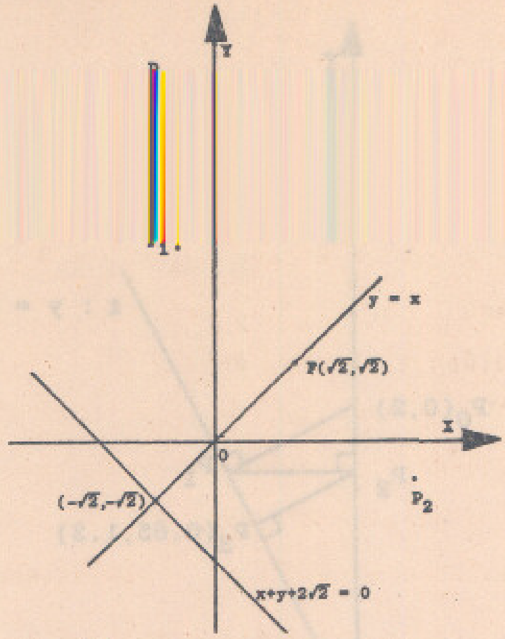
มีค่าเท่ากับ $\dfrac{|0+0+2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$

เพราะฉะนั้นค่า $c = 2$

เพราะว่าแกนพาราโบลาตัดกับเส้นไดเรกตริกซ์ที่จุดซึ่งเป็นจุดตัดของ

เส้นตรง $y = x$ และ $x+y+2\sqrt{2} = 0$ ซึ่งคือจุด $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$

ด้วยลักษณะของการสมมาตรจะได้ว่า จุดโฟกัสของพาราโบลาคือ $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$



เส้นเรคตัสเรกตัมคือ เส้นที่ตั้งฉากกับแกนพาราโบลาผ่านจุด $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$

และมีความยาวเท่ากับ $|4c| = 8$ และมีความชันเท่ากับ -1

นั่นคือ $|FP_1| = 4 = |FP_2|$

และความชัน FP_1 = ความชัน $FP_2 = -1$

ให้ $P(x,y)$ เป็นจุดที่ทำให้ $|PF| = 4$ และความชัน $PF = -1$

จะได้สมการ (1) และ (2) ดังนี้

$$(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 16 \qquad \text{(1)}$$

$$\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = -1 \qquad \text{(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $2(x-\sqrt{2})^2 = 16$

$$x = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

เมื่อ $x = -\sqrt{2}$ จะได้ $y = 3\sqrt{2}$

เมื่อ $x = 3\sqrt{2}$ จะได้ $y = -\sqrt{2}$

ให้ $P_1(x_1,y_1) = P_1(-\sqrt{2},3\sqrt{2})$, $P_2(x_2,y_2) = P_2(3\sqrt{2},-\sqrt{2})$

สรุป $x_1+y_1+x_2+y_2 = 4\sqrt{2}$

วิธีลัด(1) จากภาพพิกัด $P_1(x_1,y_1)$ และ $P_2(x_2,y_2)$

โดยสังเกตค่าตัวเลขโดยประมาณ จะได้ว่า

$x_1 + y_1 > 0$ และ $x_2 + y_2 > 0$

เพราะฉะนั้น $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 > 0$

ดังนั้นตัวเลือก 2. และ 4. ตัดทิ้งได้

วิธีลัด(2) จากภาพประกอบที่วาดเมื่อรู้ว่า $F(\sqrt{2},\sqrt{2})$

เป็นจุดโฟกัสแล้วเราลากเส้นตั้งฉากกับแกนพาราโบลาที่จุด F

และยาว 4 หน่วยไปที่จุด P_1 และ P_2

ต่อไปเราวัดระยะทางด้วยไม้บรรทัดจะได้พิกัดโดยประมาณของ P_1

และ P_2 เป็น $P_1(-1.4,4,2)$ และ $P_2(4.2,-1.4)$

ดังนั้น $x_1+y_1+x_2+y_2 = 5.4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $2\sqrt{2} = 2.8$ และ $4\sqrt{2} = 5.6$

เพราะฉะนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

13. ตอบ 2

แนวคิด ก. ถูก แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

จาก $2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

ดังนั้น $\frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8}$

$$= \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{8}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$

ข. ผิด แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่า $(\sin x + \cos x)^2 = 4$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 4$$

$$2\sin x\cos x = 3$$

$$\sin 2x = 3 \quad \text{ซึ่งเป็นไปไม่ได้}$$

เพราะฉะนั้น ไม่มี $x \in [0,2\pi)$ ที่ $\sin x + \cos x = 2$

ค. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{6}$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \tan(x+y) = \tan(\tfrac{\pi}{6} + \tfrac{\pi}{6}) = \tan(\tfrac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$$

$$\tan x + \tan y = \tan\frac{\pi}{6} + \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

ง. ถูก เพราะว่า

$$\tan(\tfrac{\pi}{4} + \theta) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\theta}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\theta} = \frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$$

14. **ตอบ** 1.

แนวคิด จาก $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$

เพราะฉะนั้น $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C} &= \sin 40^\circ + \sin 80^\circ + \sin 60^\circ \\
&= 2\sin 60^\circ\cos 20^\circ + \sin 60^\circ \\
&= \sin 60^\circ(2\cos 20^\circ + 1)
\end{aligned}$$

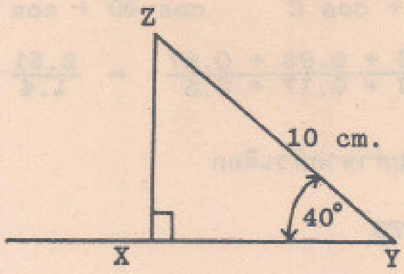
$$\begin{aligned}
\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} &= \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 60^\circ \\
&= 2\cos 60^\circ\cos 20^\circ + \cos 60^\circ \\
&= \cos 60^\circ(2\cos 20^\circ + 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}} &= \frac{\sin 60^\circ(2\cos 20^\circ + 1)}{\cos 60^\circ(2\cos 20^\circ + 1)} \\
&= \tan 60^\circ = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

วิธีลัด เขียนสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ โดยมี

$\hat{X} = 90^\circ$, YZ ยาว 10 cm.

และ $\hat{Y} = 40^\circ$



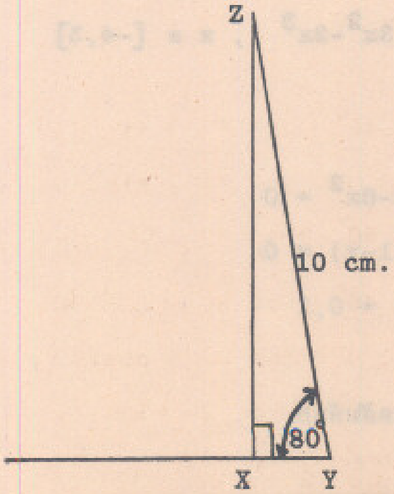
โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 6.6 cm. และ XY ยาว 7.3 cm.

$\sin 40^\circ = \sin \hat{Y} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{6.6}{10} = 0.66$

$\cos 40^\circ = \cos \hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{7.3}{10} = 0.73$

เขียนสามเหลี่ยม XYZ โดยมี $\hat{X} = 90^\circ$, YZ ยาว 10 cm.

และ $\hat{Y} = 80^\circ$



โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 9.8

XY ยาว 1.7

$$\sin 80^\circ = \sin \hat{Y} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{9.8}{10} = 0.98$$

$$\cos 80^\circ = \cos \hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{1.7}{10} = 0.17$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}} = \frac{\sin 40^\circ+\sin 80^\circ+\sin 60^\circ}{\cos 40^\circ+\cos 80^\circ+\cos 60^\circ}$$

$$= \frac{0.66+0.98+0.87}{0.73+0.17+0.5} = \frac{2.51}{1.4} = 1.79$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจากตัวเลือก

1. $\sqrt{3} = 1.73$

2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.365$

3. $3\sqrt{3} = 5.19$

4. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2.732}{2.83} = 0.965$

สรุปเลือกข้อ 1. ดีกว่า

15. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณากราฟของ $f(x) = 3x^2-2x^3$, $x \in [-4,5]$

$f'(x) = 6x-6x^2$

$f''(x) = 6-12x$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $6x-6x^2 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x(1-x) = 0$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0,1$

เพราะว่า $f''(0) = 6 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

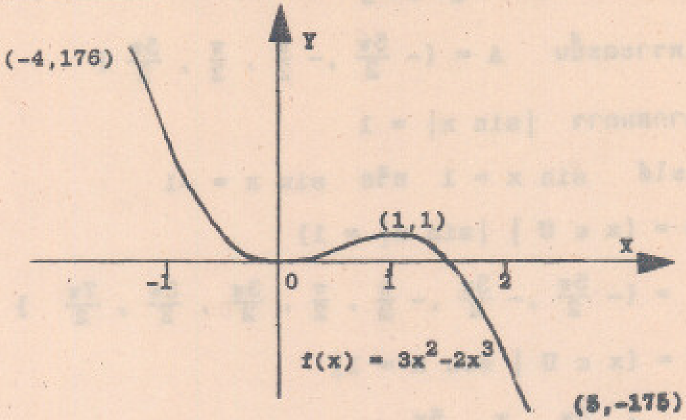
เพราะว่า $f''(1) = -6 < 0$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f''(x) = x(1-x)$

เพราะฉะนั้นเราพิจารณาฟังก์ชัน f ได้ดังนี้

	$-4 \leqslant x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x \leqslant 5$
f' f	− ลด	0	+ เพิ่ม	0	− ลด



จากกราฟจะได้

$$X = f([-4,5]) = [f(5), f(-4)] = [-175,176]$$

$$Y = f([-4,0)) = (f(0), f(-4)] = (0,176]$$

เพราะว่า $f(1)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(0,5]$

เพราะฉะนั้น $Z = f((0,5]) = [f(5), f(1)] = [-175,1]$

สรุป 1. ผิด เพราะว่า $X-Z = (1,176] \neq Y$

2. ผิด เพราะว่า $Y \cap Z = (0,1]$

3. ผิด เพราะว่า $X-Y = [-175,0] \neq Z$

4. ถูก เพราะว่า $Z \cup Y = [-175,176] = X$

16. **ตอบ** 4.

แนวคิด พิจารณาสมการ $\sin|x| = 1$

จะได้ $|x| = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \pm\frac{13\pi}{2}$

เพราะว่า $U = [-8,12]$

เพราะฉะนั้น $A = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

จากสมการ $|\sin x| = 1$

จะได้ $\sin x = 1$ หรือ $\sin x = -1$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

$= \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$

$= \{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

เพราะฉะนั้นเราสามารถพิจารณาแต่ละตัวเลือกได้ดังนี้

1. $A \cap C = \{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

   $C \cap B = C$

   นั่นคือ $A \cap C \neq C \cap B$

2. $A - B = \phi$

   $C - B = \phi$

   $A - B \subset C - B$ ถูกต้อง

3. $C - A = \{-\frac{3\pi}{2}\}$

   $C - B = \phi$

$C - B \subset C - A$ ถูกต้อง

4. $A - B = \phi$

$A - C = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}$

$A - B \neq A - C$

สรุปตัวเลือก 4. ผิด

วิธีลัด เพราะว่า ถ้า $\sin x = 1$ แล้ว $|\sin x| = 1$

เพราะฉะนั้น $C \subset B$ นั่นคือ $B \cap C = C$ และ $C - B = \phi$

ดังนั้นตัวเลือก 3. ถูกต้องเสมอ เราจึงตัดตัวเลือกนี้ทิ้งก่อน

เพราะว่า ถ้า $\sin |x| = 1$

จะได้ $\sin (x) = 1$ หรือ $\sin (-x) = 1$

$\sin x = 1$ หรือ $-\sin x = 1$

นั่นคือ $|\sin x| = 1$

เพราะฉะนั้น $A \subset B$ แน่นอน

ดังนั้น $A \cap B = A$ และ $A - B = \phi$

ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้องจึงตัดทิ้งได้อีก

ที่เหลือเราต้องเดาจากตัวเลือก 1. หรือ 4.

17. **ตอบ** 4.

แนวคิด จำนวนวิธีในการเขียนตัวเลขลงในช่อง 4 ช่อง

ทำได้ $10^4 = 10000$ วิธี

เหตุการณ์ที่ช่องที่มีด้านร่วมกันมีค่าตัวเลขต่างกันพิจารณาดังนี้

ช่องที่ 1	ช่องที่ 2
ช่องที่ 3	ช่องที่ 4

กรณีที่ 1

ตัวเลขทั้ง 4 ช่องต่างกัน เช่น $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 6&5\\\hline\end{array}$

ขั้นตอนที่ 1 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 1 ทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 2 ทำได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 3 ทำได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขลงช่องที่ 4 ทำได้ 7 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(9)(8)(7) = 5040$

กรณีที่ 2 ตัวเลขในแนวทแยงเหมือนกันแนวเดียวเท่านั้น เช่น $\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\\hline 1&4\\\hline\end{array}$

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขเพื่อลงในแนวทแยงทำได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกแนวทแยงได้ 2 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกตัวเลขลงช่องที่เหลือช่องแรกทำได้ 9 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกตัวเลขลงช่องสุดท้ายทำได้ 8 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(2)(9)(8) = 1440$

กรณีที่ 3 ตัวเลขในแนวทแยงเหมือนกัน 2 คู่ เช่น $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\\hline 1&2\\\hline\end{array}$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3&1\\\hline\end{array}$

ขั้นตอนที่ 1 แนวทแยงมุมแรกเลือกตัวเลขได้ 10 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 แนวทแยงมุมที่เหลือเลือกตัวเลขได้ 9 วิธี

สรุปจำนวนวิธีเท่ากับ $(10)(9) = 90$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่ด้านติดกันมีตัวเลขต่างกันเท่ากับ

$$5040 + 1440 + 90 = 6570$$

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่ช่องที่มีด้านร่วมกันมีค่าตัวเลขต่างกันเท่ากับ

$$\frac{6570}{10000} = 0.6570$$

18. **ตอบ** 3.

แนวคิด $z + 4\bar{w} = 8 + 3i$

$$\overline{z + 4\bar{w}} = \overline{8 + 3i}$$

$$\bar{z} + 4w = 8 - 3i \quad \text{......(1)}$$

$$3\bar{z} + 2w = 2 - 8i \quad \text{......(2)}$$

(1) − 2(2) ; $-5\bar{z} = 4 + 13i$

$$|-5\bar{z}|^2 = 16 + 169$$

$$|\bar{z}|^2 = \frac{185}{25}$$

3(1) − (2) ; $10w = 22 - i$

$$|10w|^2 = 484 + 1$$

$$100|w|^2 = 485$$

$$|w|^2 = \frac{485}{100}$$

เพราะฉะนั้น $|z|^2 + |\bar{w}|^2 = |\bar{z}|^2 + |w|^2$

$$= \frac{185}{25} + \frac{485}{100}$$

$$= 12.25$$

19. **ตอบ** 3.

แนวคิด การนับจำนวนสมาชิกใน V

ขั้นที่ 1 m มีทางเลือก 9 วิธี

ขั้นที่ 2 n มีทางเลือก 9 วิธี

เพราะฉะนั้น $m\bar{i} + n\bar{j}$ มีทางเลือก (9)(9) = 81 วิธี

นั่นคือ n(V) = 81

1. การนับจำนวนสมาชิกใน A

ขั้นที่ 1 x มีทางเลือก 9 วิธี

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $y \neq x$ เพราะฉะนั้น y มีทางเลือก 8 วิธี

จำนวนสมาชิกใน A เท่ากับ $(9)(8) = 72$ ตัว

2. การนับจำนวนสมาชิกใน B

$B' = \{\bar{v} \in V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}\ ,\ |\bar{v}| < 6\}$

เพราะว่า $|\bar{v}| < 6$

$|x\bar{i} + y\bar{j}| < 6$

$x^2 + y^2 < 36$

เพราะฉะนั้น จำนวน (x,y) ที่ $x^2+y^2 < 36$ สามารถพิจารณาได้ดังนี้

x	y	จำนวน (x,y)
1	1,2,3,4,5	5
2	1,2,3,4,5	5
3	1,2,3,4,5	5
4	1,2,3,4	4
5	1,2,3	3
		22

เพราะฉะนั้น $n(B') = 22$

ดังนั้น $n(B) = n(V) - n(B') = 81-22 = 59$

3. การนับจำนวนสมาชิกของ C

เพราะว่า $\bar{v} \parallel \bar{i} + \bar{j}$ ก็ต่อเมื่อ $x\bar{i} + y\bar{j} \parallel \bar{i} + \bar{j}$

ก็ต่อเมื่อ $\frac{x}{y} = 1$

ก็ต่อเมื่อ $x = y$

เพราะฉะนั้น $C = \{\bar{v} \varepsilon V \mid \bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$ และ $x = y\}$

ดังนั้น $n(C) = 9$

4. เพราะว่า $D = C'$

เพราะฉะนั้น $n(D) = n(C') = n(V) - n(C)$

$= 81 - 9 = 72$

20. **ตอบ** 1.

แนวคิด $|\overrightarrow{FD}|^2 = |\overrightarrow{FE}|^2 + |\overrightarrow{ED}|^2 - 2|\overrightarrow{FE}|\cdot|\overrightarrow{ED}|\cdot\cos 120^\circ$

$= 4 + 4 + 4 = 12$

เพราะว่า $\overline{OA} = \overline{OD}$ เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD}| = 4$

เพราะว่า $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{FD}|^2 - 2\cdot|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{FD}|\cdot\cos 150^\circ$

$= 16 + 12 - 2(4)(\sqrt{12})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 52$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| > 4$

เพื่อเป็นการศึกษาเพิ่มเติมพิจารณาตัวเลือกที่เหลือดังนี้

2. เพราะว่า ABO เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AO}| = 2$

ในทำนองเดียวกัน $|\overrightarrow{ED}| = 2$

เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = 2|\overrightarrow{AB}| = 4$

3. $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}|^2 = |\overrightarrow{FO}|^2 + |\overrightarrow{DO}|^2 - 2|\overrightarrow{FO}|\cdot|\overrightarrow{DO}|\cdot\cos 60^\circ$

$= 4 + 4 - 2(2)(2)(\frac{1}{2})$

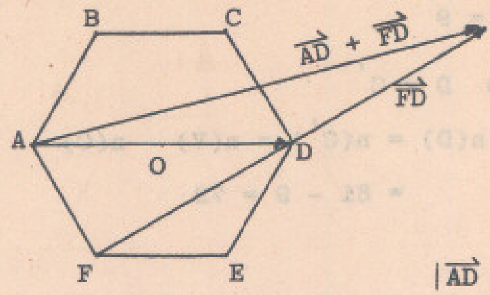
$= 4$

$|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}|^2 = 2$

4. ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3. $|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = 2\sqrt{3}$

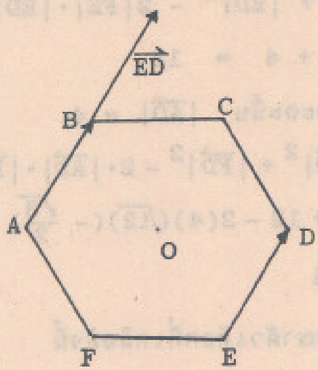
วิธีลัด 1. โดยการเขียนภาพประกอบและวัดขนาดของเวกเตอร์จะได้

1.



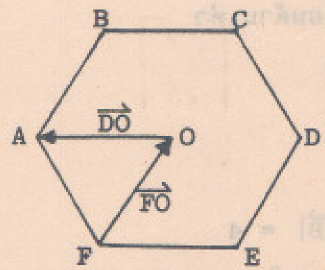
$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| = 7.2$

2.



$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = 4$

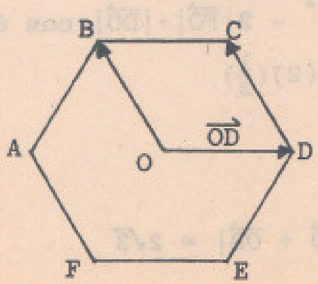
3.



$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{FA}$

ดังนั้น $|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}| = 2$

4.

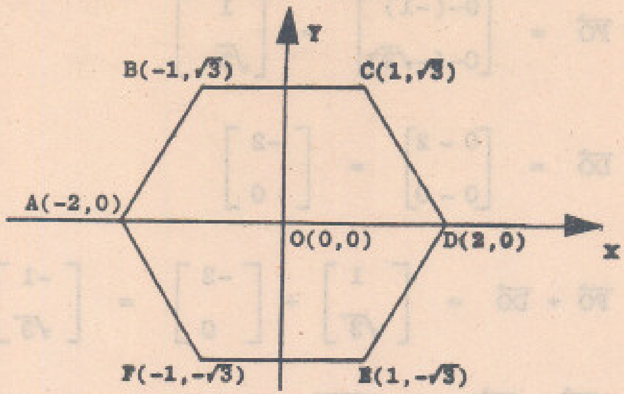


$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}$

$= 2$

วิธีลัด 2 โดยการวางตำแหน่ง O ทับจุด (0,0) และ D ทับจุด (2,0) บนระนาบ XY จะได้พิกัดของจุดอื่นๆ ดังนี้



1. $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2-(-2) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{FD} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 0+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| = \sqrt{49+3} = \sqrt{52} = 7.21$

2. $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1-(-2) \\ \sqrt{3}-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{ED} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ED}| = \sqrt{4+12} = 4$$

3. $$\overrightarrow{FO} = \begin{bmatrix} 0-(-1) \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{DO} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$|\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{DO}| = \sqrt{1+3} = 2$$

4. $$\overrightarrow{OD} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$|\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}| = \sqrt{1+3} = 2$$

สรุปตัวเลือก 1. มีขนาดยาวกว่า 4 เซนติเมตร

21. **ตอบ** 3.

แนวคิด $$\lim_{x \to 8} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{(x^{\frac{1}{3}} - 2)(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4)}$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}} + 4} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}} + 2(8^{\frac{1}{3}}) + 4}$$

$$= \frac{1}{4+4+4}$$

$$= \frac{1}{12}$$

วิธีลัด โดยใช้กฎของโลปิตัล

$$\lim_{x \to 8} \frac{x^{\frac{1}{3}} - 2}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{(x^{\frac{1}{3}} - 2)'}{(x - 8)'}$$

$$= \lim_{x \to 8} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{12}$$

หมายเหตุ กฎโลปิตัล

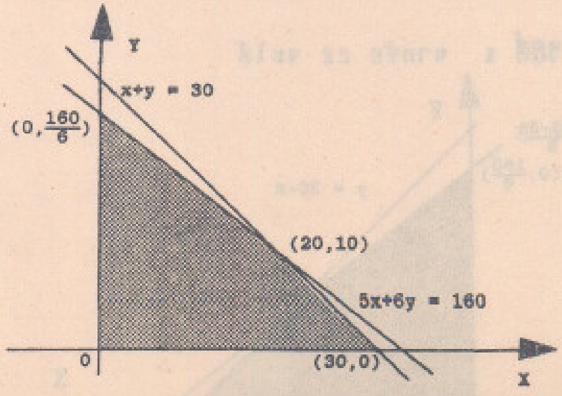
ถ้า $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$

และ $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2. **ตอบ** 2.

แนวคิด อาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้จากอสมการข้อจำกัดคือ



มีจุดมุมเป็น (0,0), (30,0), (20,10) และ $(0,\frac{160}{6})$

จุดมุม	P = 1000x + 1200y
(0,0)	0
(30,0)	30000
(20,10)	32000
$(0,\frac{160}{6})$	32000

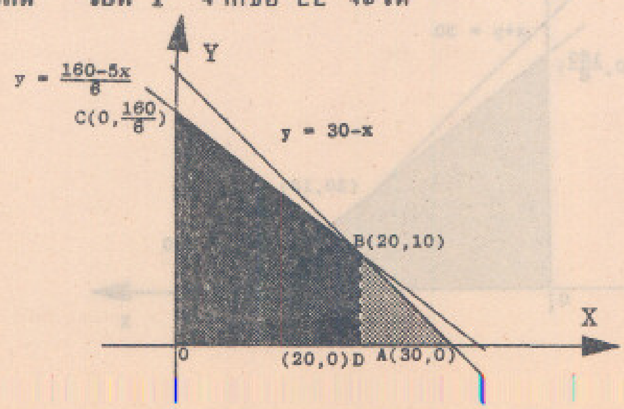
เพราะฉะนั้น P มีค่ามากสุดเมื่อ $(x_o,y_o) = (20,10), (0,\frac{160}{6})$

เพราะฉะนั้น $x_o - y_o = 10 , -\frac{160}{6}$

วิธีลัด เพราะว่าจุดมุมที่อาจให้ค่าสูงสุดมี 4 จุดเท่านั้น และข้อสอบเป็นแบบตัวเลือก ดังนั้นเราจะเห็นว่า (x,y) จากจุดมุมนั้น $x - y = 0 , 30 , 10 , -\frac{160}{6}$ ดังนั้นเปรียบเทียบค่า P ที่จุด (30,0) และ (20,10) ก็พอ ซึ่งจะได้ P = 32000 เมื่อจุดมุมเป็น (20,10)

23. **ตอบ** 1.

แนวคิด **วิธีที่ 1** จากข้อ 22 จะได้



พ.ท. □ ODBC $= \int_0^{20} \left(\frac{160-5x}{6}\right) dx$

$= \left(\frac{160}{6}x - \frac{5x^2}{12}\right)\Big|_0^{20}$

$= \frac{160(20)}{6} - \frac{5(400)}{12}$

$= 533.333 - 166.667 = 366.667$

พ.ท. Δ DBA $= \int_{20}^{30} (30-x)\, dx = \left(30x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{20}^{30}$

$= (900-450) - (600-200) = 50$

พ.ท. □ OABC $= 366.667 + 50 = 416.667$

วิธีที่ ๒ พ.ท. □ OABC = พ.ท. □ ODBC + พ.ท. Δ DAB

พ.ท. □ ODBC $= \frac{1}{2} \times$ ผลบวกด้านคู่ขนาน $\times$ สูง

$= \frac{1}{2} \times (OC + DB) \times OD$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{160}{6} + 10\right) \times 20$

$= 266.667 + 100$

$= 366.667$

พ.ท. Δ DAB $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$= \frac{1}{2} \times AD \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 = 50$

สรุปพื้นที่สี่เหลี่ยม OABC $= 366.667 + 50 = 416.667$

24. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = x^3-6x^2+11x-6$

$f'(x) = 3x^2-12x+11 = 3(x^2-4x+4)-1 = 3(x-2)^2-1$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $3(x-2)^2-1 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $(x-2)^2 = \frac{1}{3}$

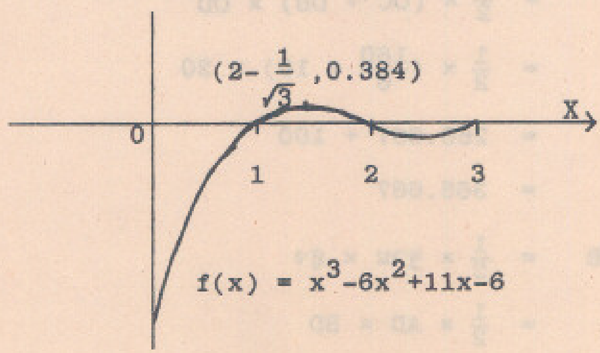
ก็ต่อเมื่อ $x-2 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

ก็ต่อเมื่อ $x = 2+\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$

การเปลี่ยนแปลงเครื่องหมายของ f' เป็นดังนี้

	$0 < x < 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 2+\frac{1}{\sqrt{3}}$	$2+\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 3$
f'	+	−	+

กราฟของ f บนช่วง (0,3) คือ



เพราะฉะนั้น f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

และ f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เมื่อ $x = 2-\frac{1}{\sqrt{3}}$

25. ตอบ 4.

แนวคิด

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(-2)}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-1)(-2)(-3)(-4)}{x^5}$$

$$\vdots$$

$$f^{(10)}(x) = \frac{(-1)(-2)\ldots(-9)(-10)}{x^{11}}$$

$$= \frac{(-1)^{10}(10!)}{x^{11}}$$

$$= \frac{10!}{x^{11}}$$

$$f^{(10)}(-1) = \frac{10!}{(-1)^{11}}$$

$$= -(10!)$$

26. ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\cdot f'(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{a\,g(x) - b\,f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\neq \frac{a}{b}$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 4x+3$ และ $g(x) = 5x+1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{4(5x+1) - 5(4x+3)}{(5x+1)^2} \neq \frac{4}{5}$$

๒. ผิด เพราะว่า

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot f(x)$$

$$= a\,g(x) + b\,f(x)$$

$$\neq ab$$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x+3$ และ $g(x) = 4x+1$

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = 2(x+1) + 4(2x+3) \neq 8$$

๓. ถูกต้อง เพราะว่า

$\frac{d}{dx} f(x) = a$ จะได้ $f(x) = ax + k$

$\frac{d}{dx} g(x) = b$ จะได้ $g(x) = bx + c$

เมื่อ $f \circ g$ และ $g \circ f$ มีความหมายจะได้

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(bx + c)$$

$$= a(bx + c) + k = abx + ac + k$$

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = ab$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(ax + k)$$

$$= g(ax + k) + c = abx + bk + c$$

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = ab$$

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(g \circ f)(x)$

4. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = 4x+10$

จะได้ $a = \frac{d}{dx} f(x) = 4$

แต่พื้นที่ปิดล้อมด้วยแกน X และเส้นโค้ง $y = f(x)$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 4$

เท่ากับ $\int_0^4 (4x+10)\,dx = (2x^2+10x\Big|_0^4 = 72 \neq 16$

7. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $2^4 = 16$

เพราะฉะนั้น $2^{4k} = (16)^k$ จะมีเลขในหลักหน่วยเป็น 6 เสมอ

ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะว่า $2536 = 4(634)$

เพราะฉะนั้น $2^{2536} = 2^{4(634)}$ มีตัวเลขในหลักหน่วยเป็น 6

เพราะว่า $3^4 = 81$

เพราะฉะนั้น $2^{4k} = (81)^k$ จะมีเลขในหลักหน่วยเป็น 1 เสมอ

ทุกค่า $k \in I^+$

เพราะฉะนั้น $3^{2536} = 3^{4(634)}$ มีเลขในหลักหน่วยเป็น 1

ดังนั้น $2^{2536} + 3^{2536}$ มีเลขในหลักหน่วยเป็น 7

เมื่อ $2^{2536} + 3^{2536}$ ถูกหารด้วย 5 จึงเหลือเศษ 2

8. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $96577 = 13 \times 17 \times 19 \times 23$

เพราะฉะนั้นข้อมูลคือ 13,17,19,23

ดังนั้น พิสัย $= 23-13 = 10$

29. **ตอบ** 4.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+1}+\frac{3}{n+1}+\ldots+\frac{n}{n+1}$

$$= \frac{1}{n+1}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{2}(n+1) = \frac{n}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{100}+\frac{2}{100}+\ldots+\frac{99}{100}\right)$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}+\ldots+\frac{99}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(1+2+3+\ldots+99) = \frac{1}{2}\left(\frac{99}{2}(1+99)\right)$$

$$= 2475$$

30. **ตอบ** 2.

แนวคิด เพราะว่าการได้แต้มของแต่ละลูกเป็นเลขคี่

และปาลูกดอกทั้งหมด 10 ครั้ง

ดังนั้น ผลบวกของแต้มเป็นเลขคี่จำนวน 10 ตัวรวมกันต้องเป็นเลขคู่

เนื่องจากแต้มสูงสุดที่เป็นไปได้คือ 9(10) = 90 แต้ม

เพราะฉะนั้นแต้มที่เป็นไปได้ในทั้ง 4 ตัวเลือกคือ 68

<u>ตอนที่ 2</u>

1. **ตอบ** 8

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_9, x_{10}$ เป็นข้อมูล

เพราะว่า $\overline{X} = 7.7$ เพราะฉะนั้น

$$x_1+x_2+\ldots+x_9+x_{10} = 10\overline{X} = 77 \quad \_\_\_\_\_(1)$$

เพราะว่า $S^2 = 9.41$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \overline{X}^2 = 9.41$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 10(9.41 + \overline{X}^2)$$

$$= 10(9.41 + 59.29)$$

$$= 687 \qquad \underline{\qquad\qquad}(2)$$

ให้ x_{10} เป็นข้อมูลที่ตัดออก

เพราะว่าข้อมูลที่เหลือมีความแปรปรวน $\frac{94}{9}$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i^2}{9} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9}\right)^2 = \frac{94}{9} \quad \underline{\qquad\qquad}(3)$

จาก (1) ; $\sum_{i=1}^{9} x_i = 77 - x_{10}$

จาก (2) ; $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 687 - x_{10}^2$

แทนค่าใน (3) จะได้

$$\frac{687 - x_{10}^2}{9} - \left(\frac{77 - x_{10}}{9}\right)^2 = \frac{94}{9}$$

$$9(687 - x_{10}^2) - (77 - x_{10})^2 = 9(94)$$

$$1683 - 9x_{10}^2 - 5929 + 154x_{10} - x_{10}^2 = 846$$

$$10x_{10}^2 - 154x_{10} + 592 = 0$$

$$x_{10} = \frac{154 \pm \sqrt{(154)^2 - 4(10)(592)}}{20}$$

$$= \frac{154 \pm 6}{20} = 8 \text{ หรือ } 7.4$$

เพราะว่า x_{10} เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $x_{10} = 8$

2. ตอบ 0

แนวคิด

$$\sin 2x \cos x = 1$$

$$2 \sin 2x \cos x = 2$$

$$\sin(2x+x) + \sin(2x-x) = 2$$

$$\sin 3x + \sin x = 2$$

เพราะว่า $-1 \leqslant \sin 3x \leqslant 1$ และ $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น $\sin 3x + \sin x = 2$ ก็ต่อเมื่อ

$\sin 3x = 1$ และ $\sin x = 1$

เพราะว่า $\sin 3x = 1 = \sin x$ พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้นไม่มี $x \in [0,2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin 2x \cos x = 1$

สรุป $n(A) = 0$

3. ตอบ 4536

แนวคิด $A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in U \text{ และ } a < b \right\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ A

ขั้นที่ 1 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น a,b

ทำได้ $\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 2 การวางลำดับของ a,b ที่เลือกมาได้ในขั้นที่ 1

ทำได้ 1 วิธีเท่านั้น

ขั้นที่ 3 c เลือกจาก U ทำได้ 9 วิธี

ขั้นที่ 4 d เลือกจาก U ทำได้ 9 วิธี

สรุป $n(A) = (36)(1)(9)(9) = 2916$

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in U \text{ และ } c < d \right\}$$

ในทำนองเดียวกันกับการนับ $n(A)$ จะได้ $n(B) = 2916$

$$A \cap B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \; a,b,c,d \in U,\ a < b \text{ และ } c < d \right\}$$

ขั้นที่ 1 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น a,b ทำได้

$\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลข 2 ตัวที่ได้มาจัดลำดับ $a < b$ ได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกตัวเลข 2 ตัวจาก U เพื่อเป็น c,d ทำได้

$\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 4 เลขที่เลือกมาได้จัดลำดับ $c < d$ ได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = (36)(1)(36)(1) = 1296$

สรุป
$$\begin{aligned} n(M) &= n(A \cup B) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 2916 + 2916 - 1296 \\ &= 4536 \end{aligned}$$

4. ตอบ 7

แนวคิด
$$\begin{aligned} 3^{2537} &= 3^{2536+1} = 3\cdot 3^{2536} \\ &= 3\cdot 3^{4(634)} = 3\cdot (81)^{634} \end{aligned}$$

เพราะว่าหลักหน่วยของ 81^{634} คือ 1

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $3(81)^{634}$ คือ 3

สรุป หลักหน่วยของ $3(81)^{634} - 2536$ คือ 7

5. ตอบ 262701

แนวคิด $C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_{150}$

$= f(1)$

$= (1+2+3+\ldots+101)(\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{51 \text{ พจน์}})$

$= \left[\frac{101}{2}(1+101)\right](51)$

$= 262701$

6. ตอบ 3876

แนวคิด C_{100} คือสัมประสิทธิ์ x^{100} ที่เกิดจาก

$(101x^{100})(1) = 101x^{100}$

$(100x^{99})(x) = 100x^{100}$

$(99x^{98})(x^2) = 99x^{100}$

$\vdots$

$(52x^{51})(x^{49}) = 52x^{100}$

$(51x^{50})(x^{50}) = 51x^{100}$

ดังนั้น $C_{100} = 51+52+\ldots+99+100+101$

$= \frac{51}{2}(51+101)$

$= 3876$

7. ตอบ 2

แนวคิด เพราะว่า $\frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{1}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$

เพราะฉะนั้น $S_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$

$$= 1 + \frac{2}{2(2+1)} + \frac{2}{3(3+1)} + \dots + \frac{2}{n(n+1)}$$

$$= 1 + 2\left[\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$= 1 + 2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right]$$

$$= 1 + 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{n+1}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \lim\limits_{n \to \infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2$

8. ตอบ 5 วินาที

แนวคิด A = พื้นที่วงกลมวงนอก

r = รัศมีวงกลมวงนอก

$$A = \pi r^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_(1)}$$

ให้ t เป็นเวลาที่ต้องการหน่วยเป็นวินาที

$\frac{dr}{dt} = 50$ เซนติเมตร/วินาที

$= 0.5$ เมตร/วินาที

$\frac{dA}{dt} = 2.5\pi$ ตารางเมตร/วินาที

$$r = (0.5)t$$

เพราะฉะนั้นจาก (1) จะได้

$$2.5\pi = 2\pi(0.5t)(0.5)$$

$$t = 5$$

9. **ตอบ** 7

แนวคิด $3\int_0^1 (x^2+2x+1)\ d(x+1)$

$$= 3\int_0^1 (x+1)^2\ d(x+1)$$

$$= 3\,\frac{(x+1)^3}{3}\Bigg|_{x=0}^{x=1} \qquad = 2^3 - 1^3 \qquad = 7$$

10. **ตอบ** 111.2925 บาท

แนวคิด ราคาสินค้าปี พ.ศ.2537 เท่ากับ 100

อัตราเงินเฟ้อปี พ.ศ.2538 เท่ากับ 4.5 %

เพราะฉะนั้นต้องขายราคาสินค้าในปี 2538 เท่ากับ

$$= 100\times1.045 \qquad = 104.5 \text{ บาท}$$

เพราะว่าอัตราเงินเฟ้อของปี พ.ศ.2539 เท่ากับ 6.5 %

เพราะฉะนั้นสินค้าราคา 104.5 บาท ต้องขายในราคาเท่ากับ

$$= (104.5)\times1.065 \qquad = 111.2925 \text{ บาท}$$

ตอนที่ 3

1. ข้อพิสูจน์ (1) ให้ $f(x) = 4x$

เพราะว่า $x_1 = x_2$

$4x_1 = 4x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 4x$ เป็นฟังก์ชัน

(2) เพราะว่า $f(x_1) = f(x_2)$

$4x_1 = 4x_2$

$x_1 = x_2$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1

(3) เพราะว่า $0 \leqslant x \leqslant 1$

$0 \leqslant 4x \leqslant 4$

$0 \leqslant f(x) \leqslant 4$

เพราะฉะนั้น ถ้า $D_f = [0,1]$ จะได้ $R_f \subset [0,4]$

ให้ $x \in [0,4]$

$0 \leqslant x \leqslant 4$

$0 \leqslant \frac{x}{4} \leqslant 1$

และ $f(\frac{x}{4}) = 4(\frac{x}{4}) = x$

เพราะฉะนั้น $R_f = [0,4]$

สรุป $f : [0,1] \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} [0,4]$

นั่นคือ $[0,1] \approx [0,4]$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 15
เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

ตัวอย่างข้อสอบเสริมทักษะการตัดตัวเลือก
จากข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิก 22 มิถุนายน 2539

1. เศษเหลือจากการหาร $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ ด้วย x^2-1 เป็นเท่าใด

(1) $6x$ (2) $9x$

(3) $3x+1$ (4) $7x+1$

2. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ เมื่อ $2<x<3$ มีค่าเท่าใด

(1) $3\sqrt{3}$ (2) $4\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{2}$ (4) $3\sqrt{2}$

5. กำหนดให้ $x+y = 3-\cos 4\theta$ และ $x-y = 4\sin 2\theta$

จะได้ $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด

(1) $1+\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$

(3) 2 (4) 1

12. กำหนดให้ $\dfrac{\log x^2}{a^2-b^2}=\dfrac{\log y^2}{b^2-c^2}=\dfrac{\log z^2}{c^2-a^2}$ จะได้ $\sqrt{xyz}$ มีค่าเท่าใด

(1) 4 (2) 2

(3) 1 (4) 0

วัฏจักร

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์

ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 3

(*Wattachak Math & Science Championship 1994*)

คณิตศาสตร์

วันที่ 26 พฤศจิกายน พ.ศ. 2537 เวลา 08.00-11.00น.

คำแนะนำ

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน(100 คะแนน)

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบตัวเลือก มีทั้งหมด 30 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 60 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ มีทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 30 คะแนน

ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ มี 1 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1. กำหนด $P = \{p \in I^+ \mid p$ เป็นจำนวนเฉพาะ$\}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A = \{pq \mid p \in P \wedge q \in P \wedge pq \in P\} \neq \phi$
   2. $B = \{p+q \mid p \in P \wedge q \in P \wedge p+q \in P\} = \phi$
   3. มี $p \in P$ ที่ทำให้ $C = \{pq \mid q \in P\} \subset E$

      เมื่อ E เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่
   4. ไม่มีจำนวนเฉพาะสองจำนวนที่แตกต่างกันที่หาร 4000

      ได้ลงตัว

๒. บทนิยาม เซต A เป็นเซตสามัญ ก็ต่อเมื่อ $A \notin A$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $B = \{x \mid x \subset B\}$ ไม่เป็นเซตสามัญ

ข. ถ้า A เป็นเซตจำกัดและเป็นเซตสามัญแล้ว

$P(A)$ เป็นเซตสามัญ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว ๒. ข. ถูกเพียงข้อเดียว

๓. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ 4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

๓. กำหนดให้ $U = \{1,2,3,...,200\}$

และ $A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,200) = 2\}$

ผลบวกของสมาชิกของ $U-A$ เท่ากับเท่าใด

1. 5000

๒. 10100

๓. 16100

4. 20100

4. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|x| \neq \pi$ และ

$|y| \neq \pi$ และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{x+y+\pi}$

ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $|x| = |y|$ ๒. ถ้า $x < 3$ แล้ว $y < -3$

๓. $x+y = 0$ 4. ถ้า $x = 2^{10}$ แล้ว $y < \frac{1}{2^{10}}$

5. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid x^2-3|x|+2 \geq 0\}$

และ $B = (-2,1]$

$A \cap B'$ คือเซตใดต่อไปนี้

1. $\{-2\} \cup [2,\infty)$
2. $(-\infty,-3) \cup (1,\infty)$
3. $(-\infty,-1] \cup (1,\infty)$
4. $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

6. **บทนิยาม** สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ M_n เรียกว่า จำนวนเมอร์เซ็นน์ ก็ต่อเมื่อ $M_n = 2^n-1$

ให้ $A = \{M_n \mid n$ เป็นจำนวนเต็ม และ $1 \leq n \leq 8\}$

A มีสมาชิกที่เป็นจำนวนเฉพาะกี่จำนวน

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6

7. กำหนดให้ $A = \{f \mid f : \{a,b,c,d\} \rightarrow \{1,2,3\}\}$

สุ่มเลือกสมาชิกของเซต A มาหนึ่งตัว ความน่าจะเป็นที่ได้ฟังก์ชันทั่วถึง {1,2,3} เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{36}{81}$
2. $\frac{18}{81}$
3. $\frac{36}{64}$
4. $\frac{18}{64}$

8. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid x^2y+x^2+2x-y = 0\}$

$R_r - D_r$ คือเซตใด

1. ϕ
2. $\{-1\}$
3. $\{1\}$
4. $\{-1,1\}$

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset R \times R$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $(f \circ f)(x) = x$ แล้ว

$f(x) = \frac{1}{x}$ หรือ $f(x) = x$ ทุก $x \neq 0$

ข. ถ้า $f(\sqrt{x-1}) = \sqrt{x} - 1$ แล้ว

$(\sqrt{x^2+1} - 1) f(x) = x^2$ ทุก $x > 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

10. ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \wedge \forall x [Q(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\forall x [P(x) \vee Q(x)] \longleftrightarrow \forall x [P(x)] \vee \forall x [Q(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
3. $\sim \exists x [P(x)] \rightarrow \sim \forall x [P(x)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $\exists x \forall y [P(x,y)] \rightarrow \forall y \exists x [P(x,y)]$
   มีค่าความจริงเป็นจริง

11. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. เหตุ 1. $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$

2. $\sim r \rightarrow (s \vee t)$

3. $\sim s \wedge \sim t$

ผล $\therefore p \rightarrow q$

ข. เหตุ 1. ถ้าสมศรีขับรถมากว่า 5 ปีแล้ว สมศรีมีใบขับขี่รถยนต์ตลอดชีพ

2. สมศรีไม่มีใบขับขี่รถยนต์ตลอดชีพ

ผล ∴ สมศรีขับรถไม่ถึง 5 ปี

การอ้างเหตุผลใดบ้างที่สมเหตุสมผล

1. ก. เท่านั้น
2. ข. เท่านั้น
3. ทั้ง ก. และ ข.
4. ไม่ใช่ทั้ง ก. และ ข.

12. กำหนด $A_i = [\frac{1}{i}, \frac{2i}{i+1}]$ เมื่อ i เป็นจำนวนเต็มบวก

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ขอบเขตล่างของ A_i ทุก $i \in I^+$ คือ 1
2. ทุก $i \in I^+$ A_i ไม่มีขอบเขตล่าง
3. ทุก $i \in I^+$ A_i ไม่มีขอบเขตบน
4. 3 เป็นขอบเขตบนของ A_i ทุก $i \in I^+$

13. $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

1. 1
2. -1
3. 0
4. $\sqrt[3]{4}$

14. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} ax^2+b & \text{เมื่อ } x \geq 2 \\ ax & \text{เมื่อ } x < 2 \end{cases}$

$a + \frac{b}{2}$ มีค่าเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ f(x) ต่อเนื่องที่ 2

1. 1
2. -1
3. 0
4. 2

15. สำหรับ $f(x) \in R - \{0\}$

$$\frac{d}{dx} \ln|f(x)| = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

ให้ $y = ((x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10})$

ค่าของ $\frac{dy}{dx}$ เมื่อ $x = 0$ เท่ากับเท่าใด

1. 60 2. 13

3. −7 4. 0

16. ให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$

$$A = \frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\ldots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2\ldots a_n}$$

ค่าต่ำสุดของ A เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2^n

3. $(2.5)^n$ 4. 3^n

17. กำหนด $A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + 10(10!)$

ถ้าเขียน A ในรูปจำนวนเต็มบวกแล้ว A ประกอบด้วยเลข 9 กี่ตัว

1. 1 ตัว 2. 2 ตัว

3. 3 ตัว 4. 4 ตัว

18. กำหนด $A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$ $B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}}$ $C = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A < B < C$ 2. $B < A$ และ C ไม่มีความหมาย

3. $C < B < A$ 4. $A < B$ และ C ไม่มีความหมาย

19. พื้นที่วงกลมที่ผ่านจุด A(1,1) B(4,2) และ C(3,5) เท่ากับเท่าใด

1. 5π 2. 4π

3. 3π 4. 2π

20. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\bar{i} + \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\bar{j}$

2. $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)\bar{i} + \cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)\bar{j}$

3. $\sin\frac{\pi}{4}\bar{i} - \cos\frac{\pi}{4}\bar{j}$

4. $\sin(-\theta)\bar{i} + \cos(-\theta)\bar{j}$

21. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R^+ ไป R^+ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$f(\tan\theta) = \sec^2\theta$$
$$g(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta$$

$(g \circ f)(\sqrt{2})$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{2}$ 2. $2\sqrt{2}$

3. $3\sqrt{2}$ 4. $6\sqrt{2}$

22. พิจารณาฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 5x+6y$

ภายใต้อสมการข้อจำกัด

$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x-2y-6 \geq 0$$
และ $$x-y+5 \leq 0$$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. P มีค่าสูงสุด

ข. P มีค่าต่ำสุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข. ถูกเพียงข้อเดียว
3. ก. และ ข. ถูกทั้งสองข้อ
4. ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อ

23. ผลบวกของกำลังของตัวแปร x ในการกระจาย $(x^4-16)^{21}$ เท่ากับเท่าใด

1. 924
2. 1848
3. 2772
4. 2940

24. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \operatorname{adj}(A^t)$

ผลบวกของสมาชิกใน B เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. -2
3. 4
4. -4

25. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ถ้า $\operatorname{adj}(AB) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว a+b+c+d เท่ากับเท่าไร

1. -18
2. 18
3. -22
4. 22

26. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข

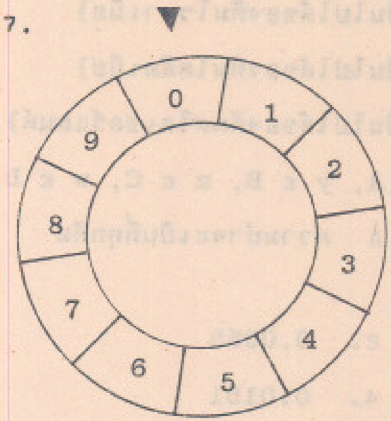
$$f(x) + 4g(x) = 4x^2 - 3$$

$$x f'(x) - g'(x) = 3x + 1$$

ค่าของ $f''(0) + g''(0)$ เท่ากับเท่าใด

1. 4 2. 5

3. -4 4. -5

27. 

ในการเปิดตู้เซฟด้วยการหมุนรหัสตัวเลขที่ประกอบด้วยตัวเลข 6 ตัว ที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยมีจำนวนเลขคู่เท่ากับจำนวนเลขคี่ รหัสที่ถูกต้องนั้นต้องขึ้นอยู่กับทิศทางการหมุนว่า จากตัวเลขหนึ่งไปยังอีกตัวเลขหนึ่งหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือหมุนตามเข็มนาฬิกา

จงหาจำนวนวิธีในการสร้างรหัสตู้เซฟนี้

1. 23,040 2. 32,000

3. 72,000 4. 2,304,000

28. กำหนดให้ $S = \dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{\log 4}{9} + \dfrac{\log 8}{27} + \dots$

โดยที่ ลำดับของเศษเป็นลำดับเลขคณิต

และ ลำดับของส่วนเป็นลำดับเรขาคณิต

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $0 < S < 0.5$ 2. $0.5 < S < 0.75$

3. $0.75 < S < 1.25$ 4. $1.25 < S$

๒๙. การแข่งขันฟุตบอลโลกที่ประเทศสหรัฐอเมริกา รอบแรก สาย A

ประกอบด้วยทีม สหรัฐอเมริกา โรมาเนีย โคลัมเบีย และสวิต-เซอร์แลนด์ ภายในสาย A แข่งแบบพบกันหมด ซึ่งต้องแข่งขันทั้งหมด ๖ นัด โดยมีกติกาการให้คะแนนดังนี้ ทีมชนะได้ ๓ คะแนน ทีมแพ้ได้ ๐ คะแนน หากคู่ใดเสมอกันจะได้ทีมละ ๑ คะแนน

ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมสหรัฐอเมริกา$\}$

$B = \{y \mid y$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมโรมาเนีย$\}$

$C = \{z \mid z$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมโคลัมเบีย$\}$

$D = \{w \mid w$ เป็นคะแนนที่เป็นไปได้ของทีมสวิตเซอร์แลนด์$\}$

$S = \{(x,y,z,w) \mid x \in A,\ y \in B,\ z \in C,\ w \in D\}$

เมื่อสิ้นสุดการแข่งขันรอบแรกสาย A ความน่าจะเป็นที่ทุกทีมได้คะแนนเท่ากันเป็นเท่าใด

๑. 0.0014 ๒. 0.0055

๓. 0.0096 ๔. 0.0151

๓๐. กำหนดให้ $A = \{2,4,8,\ldots\}$ $B = \{1,3,5,\ldots\}$

$S = \{(x,y) \in A \times B \mid xy$ หาร $10!$ ลงตัว$\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

๑. 56 ๒. 120

๓. 210 ๔. 240

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

๑. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x+2}$ เท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $f(x) = |4-x^2|$, $x \epsilon [-6,5]$

ถ้า A และ B เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของ f แล้ว

A+B เท่ากับเท่าใด

3. ถ้า a เป็นรากของสมการ $x^5 = 1$ และ $a \neq 1$ แล้ว

$a^4 + a^3 + a^2 + a$ เท่ากับเท่าใด

4. สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = 1-i$. จงหาค่า d ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ z^d เป็นจำนวนเต็ม และ $32|z^d$

5. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$B = \{f \mid f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} A\}$$

$$C = \{f \epsilon B \mid f(k) \neq k , k = 1,2,3\}$$

จำนวนสมาชิกของ C เท่ากับเท่าใด

6. ถ้า $\dfrac{4x^3 + x^2 - x - 1}{x^4 - x^2} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{Cx}{x^2-1}$ แล้ว

A + B + C เท่ากับเท่าใด

7. พื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \cos x$ และแกน X

เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ เท่ากับเท่าใด

(ข้อแนะ $\int \cos x \, dx = \sin x + c$)

8. ในการสอบแข่งขันวัฏจักร วิชาคณิตศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ ของศักดิ์เทพ และสุมาลย์ มีคะแนนดังนี้

วิชา	คะแนนสอบของศักดิ์เทพ	คะแนนสอบของสุมาลย์	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
คณิตศาสตร์	70	79	40	3
เคมี	70	70	45	4
ฟิสิกส์	70	61	50	5

ถ้า A เป็นค่ามาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของศักดิ์เทพ

และ B เป็นค่ามาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของสุมาลย์

แล้ว B − A เท่ากับเท่าใด (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

9. ข้อมูลชุดหนึ่ง คือ 2,4,6,8,10

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับเท่าใด

(ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

10. ดัชนีราคาผู้บริโภคของคนกรุงเทพมหานครในปี พ.ศ. 2536 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2529 เท่ากับ 133.6 ถ้านายลำไย มีอาชีพขายน้ำลำไย มีรายได้เฉลี่ยในปี พ.ศ. 2536 เดือนละ 12,000 บาท ถ้าในปี พ.ศ. 2529 ทองราคาบาทละ 4491.02 บาท รายได้ของนายลำไย 1 เดือนในปี พ.ศ. 2536 จะซื้อทองในปี พ.ศ. 2529 ได้กี่บาท (ตอบทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

ตอนที่ 3 แสดงข้อพิสูจน์ 10 คะแนน

กำหนดให้ a_1, a_2, a_3 เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ a_1 เป็นจำนวนเต็ม และผลต่างร่วมเท่ากับ 2

จงพิสูจน์ว่า $3 \mid a_1 \cdot a_2 \cdot a_3$

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 2 คะแนน

1. ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด

เพราะว่า ถ้า $p \in P$ และ $q \in P$ แล้ว pq ไม่เป็นจำนวนเฉพาะแน่นอน

เพราะฉะนั้น $A = \phi$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $2 \in P$, $3 \in P$ และ $2+3 = 5 \in P$

เพราะฉะนั้น $5 \in B$ นั่นคือ $B \neq \phi$

3. ถูกต้อง เลือก $p = 2$, $2 \in P$ และ $C = \{2q \mid q \in P\}$

จะเป็นสับเซตของ E

4. ผิด เพราะว่ามี 2 และ 5 ที่ $2|4000$ และ $5|4000$

2. ตอบ 3.

แนวคิด ก. ถูกต้อง

เพราะว่า $B \subset B$ เพราะฉะนั้น $B \in B$

ดังนั้น B ไม่เป็นเซตสามัญ

ข. ถูกต้อง

เพราะว่า P(A) เป็นเซตจำกัด และ $P(A) \notin P(A)$ แน่นอน

เพราะฉะนั้น P(A) เป็นเซตสามัญ

หมายเหตุ สมมติ P(A) ไม่เป็นเซตสามัญ

เพราะฉะนั้น $P(A) \in P(A)$ จะได้ $P(A) \subset A$

เพราะว่า $A \in P(A)$ และ $P(A) \subset A$ เพราะฉะนั้น $A \in A$

จึงขัดแย้งกับ A เป็นเซตสามัญ

สรุป P(A) ต้องเป็นเซตสามัญเท่านั้น

3. ตอบ 3.

แนวคิด $\sum\limits_{x \in U} x = 1 + 2 + 3 + \ldots + 200$

$$= \frac{200}{2}(1 + 200)$$

$$= 20100$$

$$A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x,200) = 2\}$$

$$= \{2(1), 2(3), 2(5), 2(7), \ldots, 2(99)\}$$

$$- \{2(5), 2(15), 2(25), \ldots, 2(95)\}$$

$$\sum_{x \in A} x = 2(1) + 2(3) + \ldots + 2(99)$$

$$- (2(5) + 2(15) + \ldots + 2(95))$$

$$= 2(1+3+\ldots+99) - 10(1+3+5+\ldots+19)$$

$$= 2\left(\frac{50}{2}(1+99)\right) - 10\left(\frac{10}{2}(1+19)\right)$$

$$= 5000 - 1000$$

$$= 4000$$

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{x \in U-A} x = \sum\limits_{x \in U} x - \sum\limits_{x \in A} x$

$$= 20100 - 4000$$

$$= 16100$$

4. ตอบ 2.

แนวคิด $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{x+y+\pi}$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+\pi} - \frac{1}{\pi}$$

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{\pi-x-y-\pi}{\pi(x+y+\pi)}$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{x+y}{\pi(x+y+\pi)} = 0$$

$$(x+y)\left[\frac{1}{xy} + \frac{1}{\pi(x+y+\pi)}\right] = 0$$

กรณี 1 $x+y = 0$ จะได้ $y = -x$

หรือ $|y| = |x|$

กรณี 2 $\frac{1}{xy} + \frac{1}{\pi(x+y+\pi)} = 0$

$$\frac{1}{xy} = -\frac{1}{\pi(x+y+\pi)}$$

$$xy = -\pi(x+y+\pi)$$

$$xy + \pi x + \pi y + \pi^2 = 0$$

$$x(y+\pi) + \pi(y+\pi) = 0$$

$$(x+\pi)(y+\pi) = 0$$

$x = -\pi$ หรือ $y = -\pi$

เพราะว่าโจทย์กำหนดว่า $|x| \neq \pi$ และ $|y| \neq \pi$

เพราะฉะนั้นกรณี 2 เป็นไปไม่ได้

สรุป $x+y = 0$ เท่านั้น

เพราะฉะนั้น $|x| = |y|$ ถูกต้อง

เพราะว่า $x = -y$ เพราะฉะนั้น ถ้า $x < 3$

จะได้ $-y < 3$ นั่นคือ $y > -3$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ไม่ถูกต้อง

วิธีลัด ทดลองแทนค่า $x = 1$

แล้วหาค่า y ที่เป็นไปได้

$$1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{1+y+\pi}$$

$$\frac{\pi y + \pi + y}{\pi y} = \frac{1}{1+y+\pi}$$

$$(\pi y + \pi + y)(1 + y + \pi) = \pi y$$

$$\pi y + \pi y^2 + \pi^2 y + \pi + \pi y + \pi^2 + y + y^2 + \pi y = \pi y$$

$$(\pi + 1)y^2 + (\pi + \pi^2 + \pi + 1)y + \pi + \pi^2 = 0$$

$$(\pi + 1)y^2 + (\pi + 1)^2 y + \pi(\pi + 1) = 0$$

$\pi + 1$ หารตลอด

$$y^2 + (\pi + 1)y + \pi = 0$$

$$(y + \pi)(y + 1) = 0$$

$$y = -1$$

เพราะว่า $x = 1 < 3$ แต่ $y = -1 \not< -3$

สรุปตัวเลือก ๒. ผิด

5. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาอสมการ $x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$

เมื่อ $x \leq 0$ $\quad x^2 - 3|x| + 2 \geq 0$

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0$$

$$(x+2)(x+1) \geq 0$$

$$-\infty < x \leq -2 \text{ หรือ } -1 \leq x < \infty$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x \leqslant 0$ จะได้ $x \in (-\infty,-2] \cup [-1,0]$

เมื่อ $x > 0$ $\quad x^2 - 3|x| + 2 \geqslant 0$

$$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$$

$$(x-2)(x-1) \geqslant 0$$

$$-\infty < x \leqslant 1 \text{ หรือ } 2 \leqslant x < \infty$$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $x > 0$ จะได้ $x \in (0,1] \cup [2,\infty)$

สรุป $A = ((-\infty,-2] \cup [-1,0]) \cup ((0,1] \cup [2,\infty))$

$= (-\infty,-2] \cup [-1,1] \cup [2,\infty)$

เพราะว่า $B' = (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

เพราะฉะนั้น $A \cap B' = (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$

วิธีลัด จาก $B' = (-\infty,-2] \cup (1,\infty)$

เพราะฉะนั้น $-1 \notin A \cap B'$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $(-2)^2 - 3|-2| + 2 = 0 \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $-2 \in A$ นั่นคือ $-2 \in A \cap B'$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $(-3)^2 - 3|-3| + 2 = 2 \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $-3 \in A$ และ $-3 \in A \cap B'$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

6. ตอบ 2.

แนวคิด $M_1 = 1$ $M_5 = 31$

$M_2 = 3$ $M_6 = 63$

$M_3 = 7$ $M_7 = 127$

$M_4 = 15$ $M_8 = 255$

$A = \{M_n \mid 1 \leqslant n \leqslant 8\}$

$= \{1,3,7,15,31,63,127,255\}$

จำนวนเฉพาะที่อยู่ใน A คือ 3,7,31,127

7. ตอบ 1.

แนวคิด $A = \{f \mid f : \{a,b,c,d\} \longrightarrow \{1,2,3\}\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ A

ขั้นที่ 1 f(a) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 f(b) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 f(c) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 4 f(d) เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่จะส่งค่าของ f ทำได้ $(3)(3)(3)(3) = 3^4$ วิธี

นั่นคือ $n(A) = 81$

$B = \{f \mid f \in A$ และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง$\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ B

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 4 ตัวใน $\{a,b,c,d\}$

ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิก 2 ตัวที่เลือกได้ถูกส่งค่าไปที่เดียวกัน ทำได้ 3 วิธี

ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกสมาชิก 2 ตัวที่เหลือในขั้นตอนที่ 1 กับสมาชิก 2 ตัวที่เหลือใน $\{1,2,3\}$ จับคู่กัน ทำได้ 2 วิธี

สรุป $n(B) = (6)\cdot(3)\cdot(2) = 36$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชันทั่วถึง $= \dfrac{n(B)}{n(A)} = \dfrac{36}{81} = \dfrac{4}{9}$

8. ตอบ 4.

แนวคิด การหา D_r เราพิจารณาค่า x ที่เป็นไปได้

โดยหา y ในพจน์ของ x จากสมการ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$$y - x^2y = 2x + x^2$$

$$y(1 - x^2) = 2x + x^2$$

$$y = \frac{2x + x^2}{1 - x^2}$$

เพราะฉะนั้น $D_r = R - \{1,-1\}$

การหา R_r เราพิจารณาค่า y ที่เป็นไปได้

โดยหา x ในพจน์ของ y จากสมการ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$$(y+1)x^2 + 2x - y = 0$$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{4 - 4(y+1)(-y)}}{2(y+1)}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{1 + y(y+1)}}{2(y+1)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + y(y+1)}}{y+1}$$

พิจารณา $1 + y(y+1) = y^2 + y + 1$

$$= y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

$$= (y + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $y \neq -1$ แล้ว $x = \frac{1 + \sqrt{y(y+1)}}{y+1}$ หาค่าได้

ที่ต้องให้ความสำคัญคือ $y = -1$ ได้หรือไม่โดยดูจากสมการเดิม

$$x^2y + x^2 + 2x - y = 0$$

เราลองทำโดยแทนค่า $y = -1$ จะได้

$$-x^2 + x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

แสดงว่า $(\frac{-1}{2}, -1) \in r$

นั่นคือ $R_r = R$

เพราะฉะนั้น $R_r - D_r = R - [R - \{-1,1\}]$

$$= \{-1,1\}$$

9. ตอบ 4.

แนวคิด ก. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = -\frac{1}{x}$

จะได้ $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

$$= f(-\frac{1}{x})$$

$$= x$$

นั่นคือ $(f \circ f)(x) = x$ โดยที่ $f(x) \neq \frac{1}{x}$ และ $f(x) \neq x$ ก็ได้

ข. ผิด ตัวอย่างเช่น เลือก $x = 4$

$$(\sqrt{4^2+1} - 1)\,f(4) = (\sqrt{17} - 1)(\sqrt{4} - 1)$$
$$= (\sqrt{17} - 1)(2 - 1)$$
$$= \sqrt{17} - 1$$
$$\neq 4^2$$

นั่นคือ $(\sqrt{x^2+1} - 1)\,f(x) \neq x^2$ เมื่อ $x = 4$

10. ตอบ 2.

แนวคิด

1. เป็นจริง สมมติ $\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[P(x)]$ เป็นจริง และ $\forall x\,[Q(x)]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x\,[P(x)] \wedge \forall x\,[Q(x)]$ เป็นจริง

สมมติ $\forall x\,[P(x)] \wedge \forall x\,[Q(x)]$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

สรุป $\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)] \longleftrightarrow \forall x\,[P(x)] \wedge \forall x\,[Q(x)]$ เป็นจริง

2. ผิด ให้ U เป็นเซตจำนวนเต็ม

$P(x)$ แทนข้อความ x เป็นเลขคู่

$Q(x)$ แทนข้อความ x เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$ เป็นจริง

$\forall x\,[P(x)]$ เป็นเท็จ

$\forall x\,[Q(x)]$ เป็นเท็จ

นั่นคือ $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)] \longleftrightarrow \forall x\,[P(x)] \vee \forall x\,[Q(x)]$ เป็นเท็จ

3. <u>เป็นจริง</u>

$\sim\exists x[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x[\sim P(x)]$

$\sim\forall x[P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x[\sim P(x)]$

เพราะฉะนั้น $\forall x[\sim P(x)] \longrightarrow \exists x[\sim P(x)]$ เป็นจริง

นั่นคือ $\sim\exists x[P(x)] \longrightarrow \sim\forall x[P(x)]$ เป็นจริง

4. <u>เป็นจริง</u>

สมมติ $\exists x \forall y[P(x,y)] \longrightarrow \forall y \exists x[P(x,y)]$ เป็นเท็จ

นั่นคือมีกรณีของ x และ y ที่ทำให้ $\forall y \exists x[P(x,y)]$ เป็นเท็จ

และ $\exists x \forall y[P(x,y)]$ เป็นจริง ....(1)

เพราะว่า $\sim(\forall y \exists x[P(x,y)])$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\exists y \forall x[\sim P(x,y)]$ เป็นจริง ....(2)

เพราะว่าข้อความ (1) และ (2) ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้นจากที่สมมติไว้ไม่จริง

นั่นคือ $\exists x \forall y[P(x,y)] \longrightarrow \forall y \exists x[P(x,y)]$ เป็นจริง

11. ตอบ 1.

แนวคิด ก. สมเหตุสมผล

เพราะว่า $\big[[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [\sim r \rightarrow (s \vee t)] \wedge [\sim s \wedge \sim t]\big]$

$\rightarrow [p \rightarrow q]$ เป็นสัจจนิรันดร์

หมายเหตุ การแสดงข้อความข้างต้นเป็นสัจจนิรันดร์ทำได้โดย

1. ตีตารางค่าความจริง 2^5 กรณี

2. แสดงข้อพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\left[[p \rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [\sim r \rightarrow (s \vee t)] \wedge [\sim s \wedge \sim t]\right]$

$\rightarrow [p \rightarrow q]$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ

$p \rightarrow (q \wedge \sim r)$, $\sim r \rightarrow (s \vee t)$ และ $\sim s \wedge \sim t$ เป็นจริง

$\sim s \wedge \sim t$ เป็นจริง จะได้ $\sim s$ และ $\sim t$ เป็นจริง

นั่นคือ s และ t เป็นเท็จ

ดังนั้น $s \vee t$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $\sim r \rightarrow (s \vee t)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\sim r$ เป็นเท็จ ดังนั้น r ต้องเป็นจริง

ผลที่ตามมาคือ $q \wedge \sim r$ เป็นเท็จ

เพราะว่า $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ

สรุป $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ เป็นเท็จ ซึ่งจะขัดแย้งกับ $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ เป็นจริง

ข. ไม่สมเหตุสมผล

ให้ p แทนข้อความ สมศรีขับรถมากว่า 5 ปี

q แทนข้อความ สมศรีมีใบขับขี่ตลอดชีพ

เพราะฉะนั้น เหตุ (1) คือ $p \rightarrow q$

(2) คือ $\sim q$

ผล คือ $\sim p$

เพราะว่า $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจจนิรันดร์

ต่อไปเราต้องพิจารณาคำกล่าว "สมศรีขับรถไม่ถึง 5 ปี" นั่นไม่ตรงกับ

ความหมายของ $\sim p$

เพราะว่า $\sim p$ นั้นหมายถึง สมศรีขับรถมานานน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 ปี

เพราะฉะนั้น การอ้างเหตุผลในข้อนี้ถือว่าไม่สมเหตุสมผล

12. ตอบ 4.

แนวคิด

1. <u>ผิด</u> ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ 1 ไม่เป็นขอบเขตล่างของ A_2

2. <u>ผิด</u> ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ มีขอบเขตล่าง เช่น 0, $\frac{1}{2}$

3. <u>ผิด</u> ตัวอย่างเช่น $A_2 = [\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$ มี 2 เป็นขอบเขตบน

4. <u>ถูกต้อง</u>

เพราะว่า $2i \leqslant 2i+2$

$2i \leqslant 2(i+1)$

$\frac{2i}{i+1} \leqslant 2$ ทุกค่า $i \in I^+$

เพราะฉะนั้น $\frac{2i}{i+1} < 3$ ทุกค่า $i \in I^+$

นั่นคือ 3 เป็นขอบเขตบนของ A_i ทุกค่า $i \in I^+$

13. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ และ $b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

จากสูตร
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$
$$= (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) + 3(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}})(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})(a+b)$$

$$= 4+3\sqrt[3]{4-5}\,(a+b)$$

$$= 4+3(-1)(a+b)$$

ให้ $x = a+b$

$$x^3 = 4-3x$$

$$x^3+3x-4 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+4) = 0$$

เพราะว่า $x^2+x+4 = (x+\frac{1}{2})^2+\frac{15}{4} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $x-1 = 0$ เท่านั้น

นั่นคือ $x = 1$

$$a+b = 1$$

14. ตอบ 3.

แนวคิด a และ b ที่ทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ คือ a, b ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2^+} ax^2+b = \lim_{x\to 2^-} ax$$

$$4a+b = 2a$$

$$2a+b = 0$$

$$a+\frac{b}{2} = 0$$

13. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 ให้ $|y| = |(x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10}|$

$$\ln|y| = \ln|(x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10}|$$

$$= 2\ln(x^2+1) + 3\ln|x+1| + 10\ln|x-1|$$

$$\frac{d}{dx}\ln|y| = \frac{d}{dx}(2\ln(x^2+1) + 3\ln|x+1| + 10\ln|x-1|)$$

$$= 2\frac{d}{dx}\ln(x^2+1) + 3\frac{d}{dx}\ln|x+1| + 10\frac{d}{dx}\ln|x-1$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{(x^2+1)}\frac{d}{dx}(x^2+1) + \frac{3}{(x+1)}\frac{d}{dx}(x+1) + \frac{10}{x-1}\frac{d}{dx}(x-1)$$

$$= \frac{2}{(x^2+1)}(2x) + \frac{3}{(x+1)}(1) + \frac{10}{(x-1)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{4x}{x^2+1} + \frac{3}{x+1} + \frac{10}{x-1}\right)$$

เมื่อ $x = 0$ จะได้ $y = (1)^2(1)^3(-1)^{10} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = (1)\left(\frac{0}{0+1} + \frac{3}{0+1} + \frac{10}{0-1}\right) = 3 - 10 = -7$$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $(pqr)' = p'qr + p(qr)' = p'qr + p(q'r + pqr')$

$= p'qr + pq'r + pqr'$

และ $f(x) = (x^2+1)^2(x+1)^3(x-1)^{10}$

ดังนั้น $f'(x) = 2(x^2+1)(2x)(x+1)^3(x-1)^{10} + (x^2+1)^2(3)(x+1)^2(x-1)^{10}$
$+ (x^2+1)^2(x+1)^3(10)(x-1)^9$

สรุป $f'(0) = 0 + (1)(3)(1)(1) + (1)(1)(10)(-1) = 3 - 10 = -7$

16. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาค่า $\frac{x^2+x+1}{x}$ เมื่อ $x > 0$

เพราะว่า
$$(x-1)^2 \geqslant 0$$
$$x^2-2x+1 \geqslant 0$$
$$x - 2 + \frac{1}{x} \geqslant 0$$
$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

เพราะฉะนั้น $1 + x + \frac{1}{x} \geqslant 3$

สรุป $\frac{x^2+x+1}{x} \geqslant 3$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ จะได้

$$\frac{(a_1^2+a_1+1)}{a_1} \cdot \frac{(a_2^2+a_2+1)}{a_2} \cdots \frac{(a_n^2+a_n+1)}{a_n} \geqslant 3^n$$

นั่นคือ
$$\frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)\ldots(a_n^2+a_n+1)}{a_1 a_2 \ldots a_n} \geqslant 3^n$$

วิธีลัด โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นลอง $n = 1$ จะได้

$$A = \frac{a_1^2 + a_1 + 1}{a_1}$$
$$= a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$$

เพราะฉะนั้น $A > 1$ แน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก ๑. ทิ้งไปก่อน

พิจารณา A ในรูปแบบ $x + 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$

ให้ $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-1}{x^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ หรือ -1

แต่ $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ เท่านั้น

เพราะว่า ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $f'(x) < 0$

ถ้า $1 < x < \infty$ แล้ว $f'(x) > 0$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

นั่นคือ $x + 1 + \frac{1}{x}$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 3 เมื่อ $n = 1$

เพราะฉะนั้นตอบตัวเลือก 4. ได้เลย

จากโจทย์ข้อนี้เราอาจทำแบบไม่ต้องใช้แคลคูลัสก็ได้ เช่น เมื่อ $n = 1$

เราดูว่า $x + 1 + \frac{1}{x} = 2^1$ ได้หรือไม่

โดยใช้เหตุผลดังนี้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2$

$$x + \frac{1}{x} = 1$$

$$x^2 + 1 = x$$

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

นั่นคือไม่มี x ที่ทำให้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2$

เพราะฉะนั้น 2 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ $A = a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$ แน่นอน

ต่อไปลอง
$$x + 1 + \frac{1}{x} = 2.5$$
$$x + \frac{1}{x} = 1.5$$
$$x^2 - 1.5x + 1 = 0$$
$$x = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 4}}{2}$$

นั่นคือไม่มี x ที่ทำให้ $x + 1 + \frac{1}{x} = 2.5$

เพราะฉะนั้น 2.5 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ $A = a_1 + 1 + \frac{1}{a_1}$

เหลือตัวเลือก 4. ตัวเดียวอีกแล้ว

17. ตอบ 4.

แนวคิด

$$\begin{aligned} A &= 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + 10(10!) \\ &= 1 + 2(2) + 3(6) + 4(24) + 5(120) + 6(720) \\ &\quad + 7(5040) + 8(40320) + 9(362880) + 10(3628800) \\ &= 1 + 4 + 18 + 96 + 600 + 4320 + 35280 \\ &\quad + 322560 + 3265920 + 36288000 \\ &= 39916799 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นในจำนวนเต็ม A มีเลข 9 อยู่ 4 ตัว

หมายเหตุ โดยการจัดรูป

$$A = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + 10(10!)$$

$$= [2(1!) - 1(1!)] + [3(2!) - 2!] + [5(4!) - 4!]$$

$$+ \ldots + [11(10!) - 10!]$$

$$= [2! - 1!] + [3! - 2!] + [5! - 4!] + \ldots + [11! - 10!]$$

$$= 11! - 1!$$

$$= 39916800 - 1$$

$$= 39916799$$

18. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1

$$A = \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$$

$$\log A = \log \left(\frac{1}{\sqrt[8]{8!}}\right)$$

$$= \log 1 - \log (\sqrt[8]{8!})$$

$$= -\frac{1}{8} \log (8!)$$

$$= -\frac{1}{8} (\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 8)$$

$$B = \frac{1}{\sqrt[9]{9!}}$$

$$\log B = \log \left(\frac{1}{\sqrt[9]{9!}}\right)$$

$$= \log 1 - \log \sqrt[9]{9!}$$

$$= -\frac{1}{9} \log (9!)$$

$$= -\frac{1}{9} (\log 1 + \log 2 + \ldots + \log 9)$$

เพราะว่า $\log 1 = 0$, $\log 2 = 0.3$, $\log 3 = 0.47$,

$\log 4 = 0.6$, $\log 5 = 0.7$, $\log 6 = 0.77$,

$\log 7 = 0.84$, $\log 8 = 0.9$, $\log 9 = 0.94$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}\log A &= -\frac{1}{8}(0+0.3+0.47+0.6+0.7+0.77+0.84+0.9)\\ &= -\frac{1}{8}(4.58)\\ &= -0.5725\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log B &= -\frac{1}{9}(0+0.3+0.47+...+0.84+0.9+0.94)\\ &= -\frac{1}{9}(5.52)\\ &= -0.61\end{aligned}$$

ดังนั้น $\log B < \log A$

นั่นคือ $B < A$

จาก $\log A = -0.5725$ จะได้ $0 < A < 1$

จาก $\log B = -0.61$ จะได้ $0 < B < 1$

และ $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

เพราะฉะนั้น $C < B < A$

หมายเหตุ จากเครื่องคำนวณ $A = \dfrac{1}{\sqrt[8]{8!}} = 0.26565$

$B = \dfrac{1}{\sqrt[9]{9!}} = 0.24547$

วิธีที่ 2 การแสดงว่า $\dfrac{1}{\sqrt[9]{9!}} < \dfrac{1}{\sqrt[8]{8!}}$ อาจทำได้ดังนี้

สำหรับ $n \in I^+$ จะได้ว่า

$$1 < n+1$$

$$2 < n+1$$

$$\vdots$$

$$n < n+1$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n < (n+1)^n$$

$$n! < (n+1)^n$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $(n!)^n$ จะได้

$$(n!)^n n! < (n!)^n (n+1)^n$$

$$(n!)^{n+1} < ((n+1)!)^n$$

$$\left[(n!)^{n+1}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left[((n+1)!)^n\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}$$

เมื่อ $n = 8$ จะได้

$$(8!)^{\frac{1}{8}} < (9!)^{\frac{1}{9}}$$

นั่นคือ $$\frac{1}{\sqrt[9]{9!}} < \frac{1}{\sqrt[8]{8!}}$$

สรุป $B < A$

การแสดงว่า $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ ต้องใช้เหตุผลดังนี้

พิจารณาลำดับ $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

จะได้ว่า $\frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} < \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} < 1$ ทุกค่า $n \in I^+$

นั่นคือ $a_{n+1} < a_n < 1$

เพราะว่า a_n เป็นลำดับที่มีค่าน้อยลงเรื่อย และ $a_n \geqslant 0$ ทุกค่า n

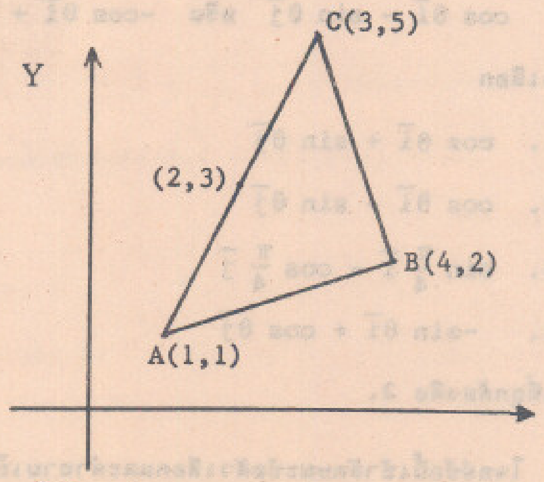
เพราะฉะนั้น $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

นั่นคือ $C = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

สรุป $C < B < A$

19. ตอบ 1.

แนวคิด เขียนกราฟแสดงพิกัดของจุด A, B และ C



ความชัน AB = $\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$

ความชัน BC = $\frac{5-2}{3-4} = \frac{3}{-1}$

เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C = 90^{\circ}$

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $\hat{B} = 90^{\circ}$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C ต้องอยู่ที่จุด

กึ่งกลางของจุด A และ C ซึ่งพิกัดของจุดนั้นคือ $(\frac{3+1}{2}, \frac{5+1}{2}) = (2,3)$

เพราะฉะนั้นรัศมีของวงกลมเท่ากับ $\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

พื้นที่วงกลมที่ต้องการมีค่าเท่ากับ $(\sqrt{5})^2\pi = 5\pi$

20. **ตอบ** 2.

แนวคิด เวกเตอร์ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยอยู่แล้ว

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกับ $\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$ คือ

$$\cos\theta\bar{i} - \sin\theta\bar{j} \quad \text{หรือ} \quad -\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$$

ดูค่าที่ตัวเลือก

1. $\cos\theta\bar{i} + \sin\theta\bar{j}$
2. $\cos\theta\bar{i} - \sin\theta\bar{j}$
3. $\sin\frac{\pi}{4}\bar{i} - \cos\frac{\pi}{4}\bar{j}$
4. $-\sin\theta\bar{i} + \cos\theta\bar{j}$

ตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 2.

วิธีลัด โจทย์ข้อนี้เข้าลักษณะข้อตัวเลือกและคำถามเป็นสูตรในพจน์ของ θ ดังนั้นเลือกค่า θ ที่คิดเลขง่ายๆ ก็จะตัดตัวเลือกได้

เลือก $\theta = \frac{\pi}{2}$ แทนค่าในโจทย์และตัวเลือก

โจทย์ $\sin\frac{\pi}{2}\bar{i} + \cos\frac{\pi}{2}\bar{j} = \bar{i}$

ตัวเลือก 1. $\bar{j}$ ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

2. $-\bar{j}$ ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

4. $-\bar{i}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\bar{i}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

ต่อไปลอง $\theta = \frac{\pi}{4}$ แทนค่าที่โจทย์และตัวเลือกเฉพาะข้อ 1. และ 2.

โจทย์ $\sin\frac{\pi}{4}\bar{i} + \cos\frac{\pi}{4}\bar{j} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

ตัวเลือก 1. $\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\bar{i} + \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})\bar{j}$

$= \sin\frac{\pi}{4}\bar{i} + \cos\frac{\pi}{4}\bar{j}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ ซึ่งไม่ตั้งฉากกับ $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$

แน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้เลย

21. ตอบ 4.

แนวคิด หาสูตร f และ g ในพจน์ของ f(x) และ g(x) ก่อน

เพราะว่า $f(\tan\theta) = \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 1+x^2$

เพราะว่า $g(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta$

$= \sec\theta\sqrt{\sec^2\theta - 1}$

เพราะฉะนั้น $g(x) = x\sqrt{x^2-1}$

สรุป $(g \circ f)(\sqrt{2}) = g(f(\sqrt{2}))$

$= g(1+2)$

$= g(3)$

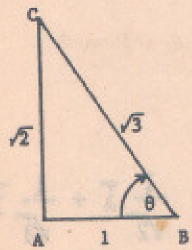
$= 3\sqrt{9-1}$

$= 6\sqrt{2}$

วิธีที่ ๒ ใช้อัตราส่วนของด้านสามเหลี่ยมมุมฉากช่วยในการหาค่า

การหาค่า $f(\sqrt{2}) = f(\tan\theta)$; $\tan\theta = \sqrt{2}$

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ



จะได้ $\tan\theta = \sqrt{2}$ และ $\sec\theta = \sqrt{3}$

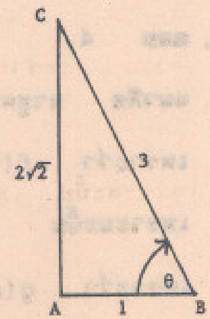
เพราะฉะนั้น $f(\sqrt{2}) = f(\tan\theta)$

$= \sec^2\theta$

$= 3$

การหาค่า $g(3) = g(\sec\theta)$; $\sec\theta = 3$

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังภาพ



เพราะว่า $\tan\theta = 2\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $g(3) = g(\sec\theta)$

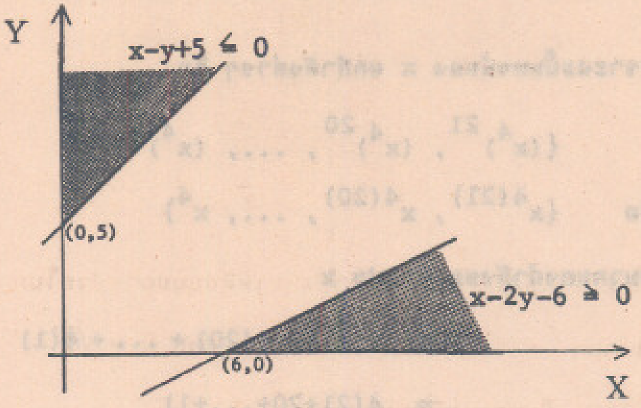
$= \sec\theta\tan\theta$

$= (3)(2\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

สรุป $(g \circ f)(\sqrt{2}) = g(f(\sqrt{2})) = g(3) = 6\sqrt{2}$

22. ตอบ 4.

แนวคิด เขียนรูปเพื่อหาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้



เพราะว่า $A = \{(x,y) \mid x-2y-6 \geq 0 \text{ และ } x-y+5 \leq 0\} = \phi$

เพราะฉะนั้นไม่มีผลเฉลยที่เป็นไปได้

สรุป P ไม่มีค่าสูงสุด และ P ไม่มีค่าต่ำสุด

23. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $(a+b)^{21} = \sum_{r=0}^{21} \binom{21}{r} a^{21-r} b^{r}$

เพราะฉะนั้น $(x^4-16)^{21} = \binom{21}{0}(x^4)^{21} + \binom{21}{1}(x^4)^{20}(-16)$

$$+ \binom{21}{2}(x^4)^{19}(-16)^2 + \dots$$

$$+\binom{21}{20}(x^4)^1(-16)^{20}+\binom{21}{21}(x^4)^0(-16)^{21}$$

เพราะฉะนั้นพจน์ของ x ยกกำลังต่างๆ คือ

$$\{(x^4)^{21}, (x^4)^{20}, \ldots, (x^4)^1\}$$

หรือ $\{x^{4(21)}, x^{4(20)}, \ldots, x^4\}$

ผลบวกของกำลังของตัวแปร x

$$\begin{aligned}
&= 4(21)+4(20)+\ldots+4(1)\\
&= 4(21+20+\ldots+1)\\
&= 4\left(\frac{21}{2}\right)(21+1)\\
&= 924
\end{aligned}$$

24. ตอบ 3.

แนวคิด **วิธีที่ 1** เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{adj}(A)$

เพราะฉะนั้น $(A^T)^{-1} = \frac{1}{|A^T|}\cdot \text{adj}(A^T)$

$$\begin{aligned}
\text{adj}(A^T) &= |A^T|(A^T)^{-1}\\
&= |A|(A^{-1})^T\\
&= |A|\left(\frac{1}{|A|}\,\text{adj}(A)\right)^T\\
&= (\text{adj}(A))^T
\end{aligned}$$

เพราะว่าผลบวกของสมาชิกใน adj (A) และ $(\text{adj}(A))^T$ เท่ากัน

เพราะฉะนั้นหาเมตริกซ์ adj (A) ก็จะได้ผลบวกของสมาชิกใน B

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$B = \text{adj}(A^T)$$

$$= (\text{adj}(A))^T$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

ผลบวกสมาชิกใน B = $-7+5+8+23-20-12-4+10+1$

$= 4$

วิธีที่ 2 $\quad A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}(A^T) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

จะได้ $\quad B = \begin{bmatrix} -7 & 23 & -4 \\ 5 & -20 & 10 \\ 8 & -12 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 23 & -20 & -12 \\ -4 & 10 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นผลบวกสมาชิกใน B เท่ากับ 4

25. ตอบ 1.

แนวคิด $\quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 2 & -15 \end{bmatrix}$

$$\text{adj}(AB) = \begin{bmatrix} -15 & -2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -15 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$a+b+c+d = -15+2-2-3$$

$$= -18$$

26. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) + 4g(x) = 4x^2 - 3$

$f'(x) + 4g'(x) = 8x$ ....(1)

$f''(x) + 4g''(x) = 8$ ....(2)

$xf'(x) - g'(x) = 3x+1$ ....(3)

$xf''(x) + f'(x) - g''(x) = 3$ ....(4)

จาก (1) ; $f'(0) + 4g'(0) = 0$

จาก (3) ; $-g'(0) = 1$

เพราะฉะนั้น $f'(0) = 4$

จาก (2) ; $f''(0) + 4g''(0) = 8$

จาก (4) ; $f'(0) - g''(0) = 3$

$g''(0) = f'(0) - 3 = 1$

$f''(0) = 8 - 4g''(0) = 4$

เพราะฉะนั้น $f''(0) + g''(0) = 5$

27. ตอบ 4.

แนวคิด <u>ขั้นที่ 1</u> เลือกเลขคู่ 3 ตัวจาก 5 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> เลือกเลขคี่ 3 ตัวจาก 5 ตัว ทำได้ $\binom{5}{3}$ วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> เลข 6 ตัวที่เลือกได้นำมาจัดลำดับได้ 6! วิธี

<u>ขั้นที่ 4</u> จากเลขตัวแรกไปยังตัวถัดไปมีวิธีการหมุนได้ 2 แบบ

เพราะฉะนั้นทำให้เกิดวิธีต่างกัน 2^5 วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} 6!\,2^5$

$= (10)(10)(720)(32)$

$= 2304000$

28. ตอบ 1.

แนวคิด $S = \dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{\log 4}{9} + \dfrac{\log 8}{27} + \ldots$

$= \dfrac{\log 2}{3} + \dfrac{2\log 2}{3^2} + \dfrac{3\log 2}{3^3} + \ldots$

$= \log 2 \left[\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \ldots\right]$

ให้ $A = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{3}{3^3} + \dfrac{4}{3^4} + \ldots$ ....(1)

$3A = 1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{3^2} + \dfrac{4}{3^3} + \ldots$ ....(2)

(2)−(1) ; $2A = 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots$

$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$

$A = \dfrac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $S = \log 2\,(\frac{3}{4}) = (0.3)(\frac{3}{4}) = 0.225$

29. ตอบ 3.

แนวคิด การนับผลการแข่งขันทั้งหมดที่เป็นไปได้ ต้องพิจารณาดังนี้ เพราะว่าการแข่งขันมีทั้งหมด 6 นัด และแต่ละนัดมีผล 3 แบบ เพราะฉะนั้นจำนวนผลการแข่งขันที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 3^6 วิธี

เหตุการณ์ที่ทุกทีมมีคะแนนเท่ากันมี 2 กรณีเท่านั้นคือ

$(x,y,z,w) = (3,3,3,3)$

หรือ $(x,y,z,w) = (4,4,4,4)$

กรณี 1 $(x,y,z,w) = (3,3,3,3)$

ผลการแข่งขันในลักษณะนี้เกิดได้ 1 วิธีเท่านั้น ซึ่งเหตุการณ์นั้นคือ ผลการแข่งขันเสมอกันทั้งหมด 6 นัด

กรณี 2 $(x,y,z,w) = (4,4,4,4)$

เกิดเมื่อทุกทีมมีผลเป็น ชนะ 1 ครั้ง , แพ้ 1 ครั้ง และเสมอ 1 ครั้ง การนับจำนวนวิธีพิจารณาดังนี้

เนื่องจากการแข่งขันเป็นแบบพบกันหมดทั้ง 4 ทีม

ดังนั้นการเริ่มต้นนับผลการแข่งขันจะนับจากทีมใดก่อนก็ได้ใน 4 ทีม ในที่นี้ขอเริ่มต้นที่ทีมสหรัฐ

<u>ขั้นที่ 1</u> ทีมสหรัฐมีวิธีชนะทีมใดในหนึ่งทีมที่เหลือทำได้ 3 วิธี

<u>ขั้นที่ 2</u> ทีมสหรัฐมีวิธีที่จะ แพ้ กับทีมที่เหลือได้ 2 วิธี

<u>ขั้นที่ 3</u> ทีมที่เหลือต้องเสมอกับสหรัฐทำได้ 1 วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมดในกรณีที่ 2 เท่ากับ $(3)(2)(1) = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ทุกทีมได้คะแนนเท่ากันมีค่าเป็น

$$\frac{(1)+(6)}{3^6} = 0.0096$$

30. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $10! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$

$= 2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot3^2\cdot2\cdot5$

$= 2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$

สำหรับเลขจำนวนคู่ $x \in A$ เราจะได้ว่า

[$x|2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ ก็ต่อเมื่อ $x|2^8$]

สำหรับเลขจำนวนคี่ $y \in B$ เราจะได้ว่า

[$y|2^8\cdot3^4\cdot5^2\cdot7$ ก็ต่อเมื่อ $y|3^4\cdot5^2\cdot7$]

พิจารณาจำนวนวิธีของ $x \in A$ ที่ $x|2^8$ คือ

$$x = 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^8$$

มีทั้งหมด 8 วิธี

การนับจำนวนของ y B ที่ $y|3^4 5^2 7$

<u>ขั้นที่ 1</u> จำนวนพจน์ของ 3 ใน y มี 5 วิธี

คือ $3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4$

<u>ขั้นที่ 2</u> จำนวนพจน์ของ 5 ใน y มี 3 วิธี คือ $5^0, 5^1, 5^2$

<u>ขั้นที่ 3</u> จำนวนพจน์ของ 7 ใน y มี 2 วิธี คือ $7^0, 7^1$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีของ $y|3^4 5^2 7$ คือ $(5)(3)(2) = 30$

สรุป $n(S) = (8)(30) = 240$

<u>ตอนที่ 2</u> ข้อ 1 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

1. ตอบ -1

แนวคิด

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}{\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1+\frac{4}{x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{-x}$$

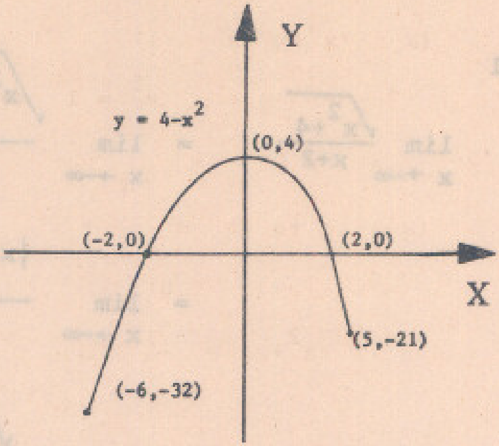
$$= \lim_{x \to -\infty} -1 = -1$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{|x|} = 0$$

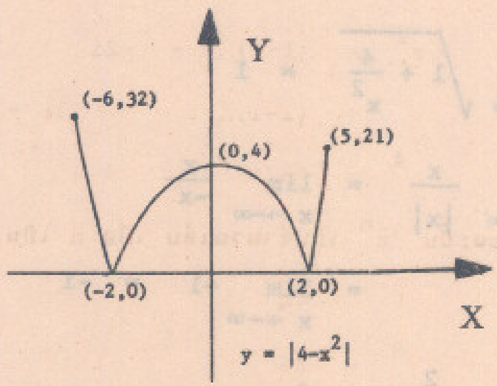
สรุป $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+2} = \frac{1}{-1+0} = -1$$

2. ตอบ 32

แนวคิด   เพราะว่ากราฟของ $y = 4-x^2$ บนช่วง $[-6,5]$ คือ



เพราะฉะนั้นกราฟของ $f(x) = |4-x^2|$, $x \in [-6,5]$ คือ



ค่าสูงสุดของ f คือ $B = 32$

ค่าต่ำสุดของ f คือ $A = 0$

เพราะฉะนั้น $A+B = 32$

3. ตอบ -1

แนวคิด $x^5-1 = 0$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = 0$$

เพราะว่า a เป็นรากของสมการ $x^5 = 1$ และ $a \neq 1$

เพราะฉะนั้น $a-1 \neq 0$ และ

$$(a-1)(a^4+a^3+a^2+a+1) = 0$$

ดังนั้น $a^4+a^3+a^2+a+1 = 0$

$$a^4+a^3+a^2+a = -1$$

4. ตอบ 12

แนวคิด $z = 1-i$

$$z^2 = (1-i)^2 = -2i$$

$$z^3 = (1-i)(-2i) = 2i-2$$

$$z^4 = (-2i)^2 = -4$$

เพราะฉะนั้น z^n เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ n เป็น k เท่าของ 4

$$z^4 = -4$$

$$z^8 = 16$$

$$z^{12} = -64$$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด $d = 12$

5. ตอบ 64

แนวคิด ให้ $S_1 = \{f \in B \mid f(1) = 1\}$

$S_2 = \{f \in B \mid f(2) = 2\}$

$S_3 = \{f \in B \mid f(3) = 3\}$

การนับสมาชิกใน S_1

เพราะว่า $f(1) = 1$

เพราะฉะนั้นการส่งค่าของ f จาก $\{2,3,4,5\}$ ไป $\{2,3,4,5\}$

ที่เป็นการจับคู่กันแบบ 1 ต่อ 1 ทำได้ $4! = 24$

เพราะฉะนั้น $n(S_1) = 24$

ในทำนองเดียวกัน $n(S_2) = 24$

$n(S_3) = 24$

จาก $C = \{f \in B \mid f(k) \neq k\ ,\ k = 1,2,3\}$

$= \{f \in B \mid f(1) \neq 1$ และ $f(2) \neq 2$ และ $f(3) \neq 3\}$

$= \{f \in B \mid f(1) \neq 1\} \cap \{f \in B \mid f(2) \neq 2\} \cap \{f \in B \mid f(3) \neq 3\}$

$= S_1' \cap S_2' \cap S_3'$

$= (S_1 \cup S_2 \cup S_3)'$

เพราะว่า $C = (S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

เพราะฉะนั้น $n(C) = n(B) - n(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

เพราะว่าจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{1,2,3,4,5\}$ ไป $\{1,2,3,4,5\}$

มีเท่ากับ $5!$

เพราะฉะนั้น $n(B) = 5! = 120$

$$n(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = N(S_1) + n(S_2) + n(S_3)$$
$$- n(S_1 \cap S_2) - n(S_2 \cap S_3)$$
$$- n(S_1 \cap S_3) + n(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$$

$S_1 \cap S_2 = \{f \in B \mid f(1) = 1$ และ $f(2) = 2\}$

$n(S_1 \cap S_2)$ = จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{3,4,5\}$ ไป $\{3,4,5\}$

$= 3!$

$= 6$

ในทำนองเดียวกัน

$n(S_1 \cap S_3) = n(S_2 \cap S_3) = 6$

$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{f \in B \mid f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3\}$

$n(S_1 \cap S_2 \cap S_3)$ = จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\{4,5\}$ ไป $\{4,5\}$

$= 2!$

$= 2$

เพราะฉะนั้น $n(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = 24+24+24-6-6-6+2 = 56$

สรุป $n(C) = n(B) - n(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

$= 120-56$

$= 64$

6. ตอบ 5

แนวคิด $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx}{x^2-1} = \frac{Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3}{x^2(x^2-1)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{4x^3+x^2-x-1}{x^4-x^2} = \frac{Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3}{x^4-x^2}$

ซึ่งจะได้ว่า $4x^3+x^2-x-1 = Ax(x^2-1) + B(x^2-1) + Cx^3$

$$= (A+C)x^3 + Bx^2 - Ax - B$$

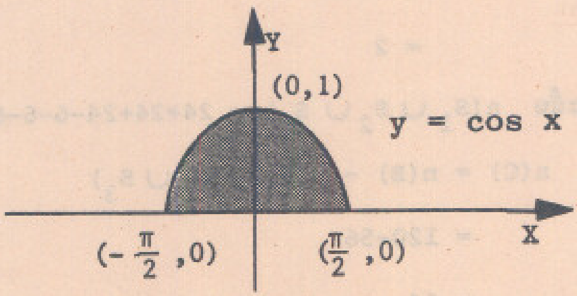
โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ x^3 ; $A+C = 4$

x^2 ; $B = 1$

สรุป $A+B+C = 5$

7. ตอบ 2

แนวคิด เขียนกราฟดูบริเวณ



เพราะฉะนั้น พื้นที่ $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

$$= \sin x \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 1-(-1)$$

$$= 2$$

8. **ตอบ** 0.40

แนวคิด

การหาคะแนนมาตรฐานของศักดิ์เทพ

คณิตศาสตร์ $z = \frac{70-40}{3} = 10$

เคมี $z = \frac{70-45}{4} = 6.25$

ฟิสิกส์ $z = \frac{70-50}{5} = 4$

เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของศักดิ์เทพเท่ากับ

$$A = \frac{10+6.25+4}{3} = 6.75$$

การหาคะแนนมาตรฐานของสุมาลย์

คณิตศาสตร์ $z = \frac{79-40}{3} = 13$

เคมี $z = \frac{70-45}{4} = 6.25$

ฟิสิกส์ $z = \frac{61-50}{5} = 2.2$

เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานเฉลี่ยทั้ง 3 วิชาของสุมาลย์เท่ากับ

$$B = \frac{13+6.25+2.2}{3} = 7.15$$

สรุป $B-A = 7.15-6.75 = 0.4$

9. **ตอบ** 0.47

แนวคิด $\bar{x} = \frac{2+4+6+8+10}{5} = 6$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2}{5}$$

$$= \frac{(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+4+0+4+16}{5} = 8$$

$$s = 2\sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{6}$

$$= \frac{1.414}{3}$$

$$= 0.47$$

10. **ตอบ** 2

แนวคิด รายได้ของนายลำไยในปี 2536 เดือนละ 12000 บาท

อัตราเงินเฟ้อของปี 2536 เทียบกับปี 2526 เท่ากับ 133.6

เพราะฉะนั้นจำนวนเงิน 12000 ในปี 2536

มีค่าเท่ากับเงินในปี 2529 คือ $\frac{12000 \times 100}{133.6} = 8982.04$

เพราะฉะนั้นเงิน 8982.04 บาท ในปี 2529

จะซื้อทองราคาบาทละ 4491.02 ในปี 2529 ได้

เท่ากับน้ำหนักทอง $\frac{8982.04}{4491.02} = 2$ บาท

ตอนที่ 3 แสดงข้อพิสูจน์ 10 คะแนน

ให้ $a_1 = a$

$a_2 = a+2$

และ $a_3 = a+4$

ต่อไปเป็นการแสดงว่า $3 | a(a+2)(a+4)$

จำแนกตามกรณีของค่า a ดังนี้

$a = \ldots,-5,-2,1,4,7,10,\ldots = 3n+1 \quad , n \in I$

$a = \ldots,-4,-1,2,5,8,11,\ldots = 3n+2 \quad , n \in I$

$a = \ldots,-3,0,3,6,9,12,\ldots = 3n \quad , n \in I$

กรณีที่ 1 $a = 3n$, $n \in I$

จะได้ $3 | (3n(3n+1)(3n+2))$

กรณีที่ 2 $a = 3n+1$, $n \in I$

$$a(a+2)(a+4) = (3n+1)(3n+1+2)(3n+1+4)$$

เพราะว่า $3 | (3n+3)$

เพราะฉะนั้น $3 | a(a+2)(a+4)$

กรณีที่ 3 $a = 3n+2$, $n \in I$

$$a(a+2)(a+4) = (3n+2)(3n+2+2)(3n+4+2)$$

$$= (3n+2)(3n+4)(3n+6)$$

เพราะว่า $3 | (3n+6)$ เพราะฉะนั้น $3 | a(a+2)(a+4)$

สรุป $3 | a(a+2)(a+4)$ ทุกค่า $a \in I$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7
คู่มือตัดตัวเลือก ม. ปลาย (ภาค 1)

เทคนิคการตัดตัวเลือกประกอบด้วย

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
2. ให้เหตุผลเกี่ยวกับควอดรันท์
3. เซตคำตอบเป็นข้อใด
4. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด
5. โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
6. ประพจน์จริงเท็จก็ตัดตัวเลือกได้
7. เขียนรูปดูก็ตัดตัวเลือกได้
8. นำค่าที่โจทย์กำหนดแทนค่าในตัวเลือก
9. ความชันก็ตัดตัวเลือกได้
10. คว่ำหงาย-เปิดซ้ายขวา
11. ทดเลขเท่าที่จำเป็นแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก
12. นำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าของโจทย์
13. ใช้ยกตัวอย่างเพื่อการสรุปผล
14. โจทย์เสริมทักษะในการตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 13
คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

โจทย์เสริมทักษะการตัดตัวเลือก หาอ่านเทคนิคการตัดตัวเลือกได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 13

1. รากที่สองของโพลิโนเมียล $(x^2-1)(2x^2+x-3)(2x^2-5x+3)$ เท่ากับเท่าใด
   1. x^2-1 2. $(x-1)(x+1)(2x-3)$ 3. $(x^2-1)(2x+3)$
   4. $(x^2-1)(2x-3)(2x+3)$ 5. $(x^2-1)(2x^2-3)$
2. ถ้า $f(x) = x^2-4x+3$ แล้ว $f(x+1)$ เท่ากับเท่าใด
   1. x^2-2x+6 2. x^2-2x-6 3. x^2-2x-1
   4. x^2+2x 5. x^2-2x
3. ค่าของ $\dfrac{2\cdot 2^{2n+3}-24\cdot 2^{2(n-1)}}{5\cdot (2^n)^2}$ เท่ากับเท่าใด
   1. 0 2. 1 3. 2
   4. 4 5. 10
4. จำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 5 ถึง 1002 ที่หารด้วย 7 เหลือเศษ 3 มีทั้งหมดกี่ตัว
   1. 141 2. 142 3. 143
   4. 144 5. 145

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 13
คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

เทคนิคการตัดตัวเลือกประกอบด้วย

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
2. นำค่าตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์
3. ยกตัวอย่างให้สอดคล้องกับโจทย์และตัวเลือก
4. ปัญหาเกี่ยวกับเปอร์เซนต์
5. อัตราส่วนเท่ากับเท่าใด
6. ปัญหาเกี่ยวกับอสมการ
7. ปัญหาเกี่ยวกับรากของสมการ
8. เรขาคณิต
9. การประมาณค่าตัวเลข
10. การใช้เหตุผล เพียงพอหรือไม่พอเพียง
11. ข้อสอบคณิตศาสตร์เสริมทักษะการตัดตัวเลือก
12. ข้อสอบเสริมประสบการณ์การใช้เหตุผล

วัฏจักร

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ และวิทยาศาสตร์
ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 4
(Wattachak Math & Science Championship 1995)

คณิตศาสตร์

วันที่ 2 ธันวาคม 2538 เวลา 08.00-11.00 น.

คำแนะนำ

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน (100 คะแนน)

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบตัวเลือก มีทั้งหมด 30 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 60 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ มีทั้งหมด 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 30 คะแนน

ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ มี 1 ข้อ ข้อละ 10 คะแนน

ตอนที่ 1

1. **บทนิยาม** เซต A เป็นเซตถ่ายทอดก็ต่อเมื่อ $\forall a[a \in A \rightarrow a \subset A]$
ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

   1. เพาเวอร์เซตของ $\{\phi\}$ เป็นเซตถ่ายทอด
   2. B เป็นเซตถ่ายทอด ก็ต่อเมื่อ $\forall b[b \not\subset B \rightarrow b \notin B]$
   3. ทุกเซตที่มีสมาชิก 1 ตัว ไม่เป็นเซตถ่ายทอด
   4. ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

2. กำหนดให้ $A \subset B \subset C \subset R$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ C เป็นเซตจำกัด

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $C - B$ น้อยกว่าหรือเท่ากับ ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $C - A$

ข. ขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต $B - A$ มากกว่าหรือเท่ากับ ขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต $C - A$

ค. ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต A น้อยกว่าหรือเท่ากับ ขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต C

ตัวเลือกที่เป็นข้อสรุปที่ถูกต้องคือ

1. ข้อความ ก. ข. และ ค. ถูกต้องทุกข้อ
2. ข้อความ ก. ข. และ ค. ถูกต้องเพียง 2 ข้อความเท่านั้น
3. ข้อความ ก. ข. และ ค. ถูกต้องเพียง 1 ข้อความเท่านั้น
4. ข้อความ ก. ข. และ ค. ผิดทุกข้อความ

3. กำหนดให้ θ_1, θ_2 และ θ_3 เป็นสมาชิกของช่วงเปิด $(0, 2\pi)$ และ $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ไม่มีค่าใดเท่ากัน

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มี θ_1, θ_2 และ θ_3 ที่ทำให้

$$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3$$

ข. มี θ_1, θ_2 และ θ_3 ที่ทำให้

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \cos\theta_3$$

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อความเดียว
2. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อความเดียว
3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องทั้งสองข้อความ
4. ข้อความ ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อความ

4. กำหนดให้ $A = \sin\theta\cos\theta$ เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ และ $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A\beta < A\sin\beta < A\tan\beta$
2. $A\sin\beta < A\beta < A\tan\beta$
3. $-A\sin\beta < -A\beta < A\tan\beta$
4. $-A\tan\beta < -A\sin\beta < -A\beta$

5. กำหนดให้ θ_1, θ_2 และ θ_3 เป็นสมาชิกของช่วงเปิด $(0, \frac{\pi}{2})$

$$A = \{x \in R \mid x = \sin\theta_1 + \cos\theta_2 + \tan\theta_3 + \operatorname{cosec}\theta_1 + \sec\theta_2 + \cot\theta_3\}$$

ขอบเขตล่างใหญ่ที่สุดของเซต A เท่ากับเท่าใด

1. 6
2. 4
3. 1
4. A ไม่มีขอบเขตล่างใหญ่ที่สุด

6. กำหนดให้พาราโบลามีสมการเป็น $y^2 = 8x$
F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา , O เป็นจุดยอดของพาราโบลา
ลากเส้นตรงผ่านจุด F และตั้งฉากกับแกนพาราโบลาไปตัดกับพาราโบลาที่จุด A และ B

วงรีที่มี A และ B เป็นจุดยอดและผ่านจุด O จะผ่านจุดในตัวเลือกใด

1. $(1, \frac{\sqrt{14}}{2})$　　　　2. $(3, -\frac{\sqrt{14}}{3})$

3. $(1, -\frac{\sqrt{15}}{3})$　　　　4. $(3, \frac{\sqrt{48}}{2})$

7. วงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ผ่านจุด $(1,-1)$ และ ผ่านจุดตัดกันของวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ และ วงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

ค่าของ $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด

1. -2　　　　2. -1

3. 1　　　　4. 2

8. กำหนด $A(0,0)$, $B(0,12)$ และ C เป็นจุดที่ทำให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

O_1 เป็นวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC

O_2 เป็นวงกลมที่อยู่ในวงกลมที่ล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC และสัมผัสกับวงกลม O_1, ด้าน BC และด้าน AC

พื้นที่ของวงกลม O_2 เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{64\pi}{3}$ ตารางหน่วย

2. $\frac{56\pi}{3}$ ตารางหน่วย

3. $\frac{67\pi}{3}$ ตารางหน่วย

4. $\frac{59\pi}{3}$ ตารางหน่วย

9. กำหนดให้เส้นตรง L_1 มีสมการเป็น $3x + 4y - 10 = 0$

และเส้นตรง L_2 มีสมการเป็น $5x - 12y + 2 = 0$

$A(a,b)$ เป็นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

O เป็นวงกลมรัศมี 4 และมีจุดศูนย์กลางที่จุด A

เส้นตรง L_1 และ L_2 จะแบ่งวงกลม O ออกเป็น 4 ส่วน

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งในวงกลม O ที่เกิดจากการแบ่งส่วนของเส้นตรง L_1 และ L_2 ที่มีพื้นที่มากที่สุดมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $8\arccos(\frac{33}{65})$　　2. $8\arcsin(\frac{56}{65})$

3. $4\pi + 8\arccos(\frac{33}{65})$　　4. $4\pi + 8\arcsin(\frac{33}{65})$

10. $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 ในพจน์ของ x

x^2+2x+4 หาร $P(x)$ ลงตัว และ $P(0) = P'(0) = 4$

กำหนดให้ k เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^4 ในพหุนาม $P(x)$

จงหาค่า k ที่ทำให้ $P(x) = 0$ มีรากเพียงตัวเดียวเท่านั้น

1. $\frac{1}{2}$　　2. $\frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{8}$　　4. $\frac{1}{16}$

11. กำหนดให้ $f : (0,\infty) \longrightarrow R$ มีคุณสมบัติ (1) $f(1) = 1$

และ (2) $f(x+1) = x f(x)$ ทุกค่า $x \in (0,\infty)$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(n) = (n-1)!$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ข. $f(2n) = n!f(n)$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

ค. $f(x^2+2x+2) = (x+1)^2 f((x+1)^2)$ ทุกค่า $x \in (0,\infty)$

ผลสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก. ข. และ ค. ถูกต้องทุกข้อความ

2. ข้อความ ก. ข. และ ค. มีถูกต้อง 2 ข้อความเท่านั้น

3. ข้อความ ก. ข. และ ค. มีถูกต้อง 1 ข้อความเท่านั้น

4. ข้อความ ก. ข. และ ค. ผิดทุกข้อความ

12. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเชิงซ้อน

นั่นคือ $f : C \rightarrow R$ กำหนดโดย $f(z) = \dfrac{|z|}{1 + |z|}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $|z| \leqslant |w|$ แล้ว $f(z) \leqslant f(w)$

ข. ถ้าโดเมนของ f คือ $\{z \mid |z| \leqslant 4\}$

แล้วเรนจ์ของ f คือ $[0,1]$

ค. ถ้า $z^2 = w^2$ แล้ว $f(z) = f(w)$

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก. ข. ค. ถูกต้องทุกข้อความ

2. ข้อความ ก. ข. ค. มีถูกต้องเพียง 2 ข้อความเท่านั้น

3. ข้อความ ก. ข. ค. มีถูกต้องเพียง 1 ข้อความเท่านั้น

4. ข้อความ ก. ข. ค. ผิดทุกข้อความ

13. $U = \{1,2,3,4,5,...,100\}$

$A(x,y)$ เป็นอนุกรมอนันต์ โดยที่

$A(x,y) = 1 + \frac{x}{y} + (\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y})^3 + \ldots$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

$V = \{(x,y) \in U \times U \mid A(x,y)$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า$\}$

จำนวนสมาชิกของ V เท่ากับเท่าใด

1. 4950 2. 5000

3. 5050 4. 5100

14. กำหนดให้

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n \right)$$

ค่าของ $P_4(1)$ เท่ากับเท่าใด

1. 240 2. 10

3. 1 4. 0.625

15. $X = \{0,1,2,3,\ldots,9\}$

$U = \{(a,b,c,d,e) \mid a,b,c,d,e \in X\}$

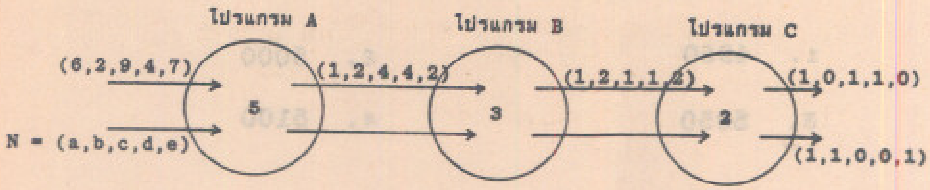
โปรแกรมคอมพิวเตอร์จะทำการแปลงตัวเลขแต่ละตัวของสมาชิกของ U ดังนี้

โปรแกรม A ทำการแปลงตัวเลขแต่ละตำแหน่งของ (a,b,c,d,e) โดยแปลงเป็นเศษเหลือที่ได้จากการหารตัวเลขแต่ละตำแหน่งด้วย 5

โปรแกรม B นำตัวเลขที่ได้จากโปรแกรม A คือ (x,y,z,u,v) โดยแปลงเป็นเศษเหลือที่ได้จากการหารตัวเลขแต่ละตำแหน่งด้วย 3

โปรแกรม C นำตัวเลขที่ได้จากโปรแกรม B คือ (p,q,r,s,t) โดยแปลงเป็นเศษเหลือที่ได้จากการหารตัวเลขแต่ละตำแหน่งด้วย 2

ตัวอย่างเช่น



จำนวนสมาชิก N = (a,b,c,d,e) ใน U ที่ทำให้เมื่อแปลงตัวเลข N ด้วยโปรแกรม A,B,C ตามลำดับ แล้วได้ (1,1,0,0,1) มีทั้งหมดกี่ตัว

1. 1024　　　　2. 2304

3. 3072　　　　4. 4096

16. กำหนดให้ A,B เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$2A + 3B = 4C$$
$$3A + 4B = 2C$$

ถ้า $\det(C) = 4$ แล้ว $\det(A^{-1}B)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0.16　　　　2. 0.32

3. 0.256　　　　4. 0.64

17. บทนิยาม $\prod_{k=m}^{n} f(k) = f(m)\cdot f(m+1)\ldots f(n-1)\cdot f(n)$

เมื่อ m,n เป็นจำนวนเต็มบวก $m \leqslant n$

กำหนดให้ $f(k) = 1 - \frac{1}{k^2}$

$a_1 = 1$ และ $a_n = \prod_{k=2}^{n} f(k)$ เมื่อ $n \geq 2$

$\lim_{n \to \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 1
3. $\frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{4}$

18. จากปัญหากำหนดการเชิงเส้น

การหาค่าสูงสุดของ $P = 8x + 10y$

ภายใต้เงื่อนไขบังคับ

$$2x + y \leq 50$$
$$x + 2y \leq 70$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

จงพิจารณาว่าเงื่อนไขบังคับในตัวเลือกใดที่เมื่อเพิ่มเข้าไปในปัญหากำหนดการเชิงเส้นนี้แล้วมีผลทำให้ P มีค่าเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากที่สุด

1. $7x + 5y \leq 175$
2. $2x + 3y \geq 30$
3. $x + y \leq 20$
4. $y \leq 25$

19. $A = \{x \in R \mid x^3 - 1 \geq 0\}$

$B = \{x \in R \mid x^4 - 1 \geq 0\}$

a เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $A \cap B$

b เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cup B$

ค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

1. ไม่มีค่า ๒. 0

๓. 1 4. 2

๒0. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

เมตริกซ์ B, C และ D ได้จาก A ตามลำดับขั้นตอนดังนี้

A
↓ คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ ๑ ของ A ด้วย 2
B
↓ แถวที่ ๒ ของ B ถูกลบทิ้งด้วยแถวที่ ๑ ของ B
C
↓ สลับแถวที่ ๒ และแถวที่ ๓ ของเมตริกซ์ C
D

ค่าของ $\det(ABC^{-1}D^{-1})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -1 ๒. $-\frac{1}{2}$

๓. 1 4. $\frac{1}{2}$

21. ข้อมูล A ประกอบด้วยค่าตัวเลขที่ต่างกันทุกตัวคือ

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$

ข้อมูล B ประกอบด้วยค่าตัวเลขที่ต่างกันทุกตัวคือ

$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{40}$

ข้อมูล C ได้มาจากการนำข้อมูล A และข้อมูล B มารวมกัน

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. พิสัยของข้อมูล C มากกว่า พิสัยของข้อมูล A

ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล C มากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล B

ค. มัธยฐานของข้อมูล C น้อยกว่ามัธยฐานของข้อมูล A

ข้อสรุปที่ถูกต้องคือตัวเลือกใด

1. ข้อความ ก., ข. และ ค. ถูกต้องทุกข้อความ
2. ข้อความ ก., ข. และ ค. มีถูกต้อง 1 ข้อความเท่านั้น
3. ข้อความ ก., ข. และ ค. มีถูกต้อง 2 ข้อความเท่านั้น
4. ข้อความ ก., ข. และ ค. ผิดทุกข้อความ

22. ข้อมูล A ประกอบด้วย 4,7,4,1,6,2,3,1,4,2

ข้อมูล B ประกอบด้วย 20,25,30,31,42,64,72,72

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูล A มีค่ามากกว่าสัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูล B

ข. ข้อมูล A มีการแปรผันมากกว่าข้อมูล B

ข้อสรุปที่ถูกต้องคือ

1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อความเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อความเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ ก. และข้อความ ข. ถูกต้องทั้งสองข้อความ
4. ข้อความ ก. และข้อความ ข. ผิดทั้งสองข้อความ

23. กำหนดให้ $\frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$ และ $\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$

$f(\theta) = \sin\theta$ และ $g(\theta) = \cos\theta$

ค่าของ $(f^{(24)}(\theta))(g^{(23)}(\theta))$ เท่ากับเท่าใด

เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{6}$ และ $f^{(24)}(\theta)$ คืออนุพันธ์อันดับที่ 24 ของ f

และ $g^{(23)}(\theta)$ คืออนุพันธ์อันดับที่ 23 ของ g

1. $-\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2}$

24. พื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = (x-1)^3$ และ $y = x-1$

เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{2}$
4. 1

25. ถ้าทราบว่า $f(y)$ และ $g(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ของ y และ x ตามลำดับ และ $f(y) = g(x)$ จะได้ $\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dx}g(x)$

ให้ $P(x_o,y_o)$ เป็นจุดที่ได้จากการลากเส้นตรงจากโฟกัสจุดหนึ่งของวงรี $16x^2-32x+16 = 400-25y^2$ ให้ตั้งฉากกับแกนเอกและไปพบวงรีที่ $P(x_o,y_o)$ โดยที่ $x_o > 0$ และ $y_o < 0$ ความชันของวงรีที่ $P(x_o,y_o)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{5}$ 2. $-\frac{3}{5}$
3. $\frac{4}{5}$ 4. $-\frac{4}{5}$

26. กำหนด $F(x) = \int(\int 4x^3\,dx)\,dx$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $F(x) = x^4 + C$ 2. $F''(x) = 4x^3 + C$
3. $xF(x) = \frac{x^5}{5} + Cx$ 4. $xF'''(x) = 12x^3$

27. เรือ A และเรือ B วิ่งออกจากท่าเดียวกันในเวลา 12:00 น. พร้อมกัน เรือ A วิ่งไปทางทิศตะวันออกด้วยอัตราเร็ว 40 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เรือ B วิ่งไปทางทิศเหนือด้วยอัตราเร็ว 30 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เมื่อเวลา 14:00 น. เรือทั้งสองลำวิ่งออกจากกันด้วยอัตราเร็วเท่าใด และอยู่ห่างกันกี่กิโลเมตร

1. 50 กม./ชม. , 100 กม.

2. 100 กม./ชม. , 100 กม.

3. 100 กม./ชม. , 50 กม.

4. 50 กม./ชม. , 50 กม.

28. กำหนด $A = \int_0^3 (x-1)^4 \, d(x-1)$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $A = \int_0^3 (x-1)^4 \, dx$

2. $A = \int_0^3 x^4 \, dx$

3. $A = \int_{-1}^2 x^4 \, dx$

4. $A = \int_0^2 (x-1)^4 \, d(x-1) + \int_2^3 (x-1)^4 \, dx$

29. ถ้า $\vec{A} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ เวกเตอร์ $\vec{B} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ และ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

2. $2\cos\theta\,\vec{i} + \sec^2\frac{\pi}{4}\sin\theta\,\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์สองหน่วยในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $3\vec{i} - 4\vec{j}$

3. $\sin\theta < \tan\theta < \cos\theta$

4. $|\vec{A} + \vec{B}| = 6$

30. กำหนดให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ α, β และ γ เป็นสเกลาร์

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $\alpha\vec{A} \cdot \beta\vec{B} = 0$ และ $\beta\vec{B} \cdot \gamma\vec{C} = 0$ แล้ว $\alpha\vec{A} \cdot \gamma\vec{C} = 0$

ข. ถ้า $\alpha\vec{A} \cdot \beta\vec{B} \neq 0$ และ $\beta\vec{B} \cdot \gamma\vec{C} \neq 0$ แล้ว $\alpha\vec{A} \cdot \gamma\vec{C} \neq 0$

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อความ ก. ถูกต้องเพียงข้อความเดียว
2. ข้อความ ข. ถูกต้องเพียงข้อความเดียว
3. ข้อความ ก. และ ข. ถูกต้องทั้งสองข้อความ
4. ข้อความ ก. และ ข. ผิดทั้งสองข้อความ

ตอนที่ 2 จงเขียนเฉพาะคำตอบที่ถูกต้อง

1. ค่าของ n ที่ทำให้ $\dfrac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3} = \dfrac{241}{288}$ เท่ากับเท่าใด

2. $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ เท่ากับเท่าใด

3. จำนวนเต็ม a มีค่าเป็นเท่าใดจึงจะทำให้ $x^{13}+x+90$ หารด้วย x^2-x+a ลงตัว

4. ถ้า a เป็นเศษส่วนอย่างต่ำของ $\dfrac{116,690,151}{427,863,887}$ แล้ว 22a เท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่

$$x + y + z = xyz$$

และ $$xy + yz + zx = 11$$

ถ้า a เป็นสมาชิกที่มีค่ามากที่สุดของเซต $\{x, y, z\}$

แล้ว a เท่ากับเท่าใด

6. ในบริษัทขายคอมพิวเตอร์แบ่งการทำงานของพนักงานออกเป็น 3 แผนก คือ

1. แผนกขาย มีพนักงาน 5 คน
2. แผนกบริการ มีพนักงาน 6 คน
3. แผนกบัญชี มีพนักงาน 4 คน

สุ่มเลือกพนักงาน 5 คนจากพนักงานทั้งหมด

ความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานครบทุกแผนกเท่ากับเท่าใด

7. $U = \{1,2,3,\ldots,200\}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(2i+1)$$

$$X = \{S_n \mid n \in U\}$$

ในการสุ่มเลือกสมาชิกหนึ่งตัวจากเซต X ความน่าจะเป็นที่จะได้สมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มคู่มีค่าเท่ากับเท่าใด

8. $X = \{0,1,2,3,...,9\}$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 0 & x+2 & 0 & x+3 \\ 0 & 0 & 0 & x+3 & 0 \end{bmatrix}$$

$Y = \{x \in X \mid \det(A(x)) = 0\}$

จำนวนสมาชิกของ Y เท่ากับเท่าใด

9. ลำดับจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, a_3, \ldots$ กำหนดโดย

$a_1 = 4$

และสำหรับ $n \geqslant 2$

$$a_n = \begin{cases} k & , k \text{ เป็นเศษเหลือจากการหาร } a_{n-1} \text{ ด้วย 3 เมื่อ n เป็นจำนวนคู่} \\ (5)^{a_{n-1}} & , \text{ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ผลบวกของ $\sum_{n=1}^{100} a_n$ เท่ากับเท่าใด

10. ข้อมูลอายุการใช้งานของรถยนต์และค่าซ่อมบำรุง

อายุการใช้งาน (ปี)	ค่าซ่อมบำรุง (บาท)
4	2500
7	3500
3	1500
4	2000
2	1000

อายุการใช้งานของรถยนต์ (X) และค่าซ่อมบำรุง (Y) มีความสัมพันธ์กันเป็นสมการเส้นตรง $\hat{y} = mx + c$ จากสมการที่หาได้จากข้อมูลข้างต้น ค่าซ่อมบำรุงของรถยนต์ที่มีอายุการใช้งานมานาน 10 ปี จะเสียค่าซ่อมบำรุงกี่บาท

ตอนที่ 3 แสดงวิธีทำ (10 คะแนน)

ตำบล ก. และ ข. อยู่ทางฝั่งซ้ายของถนนที่ตัดเป็นเส้นตรง และอยู่ห่างจากถนนเป็นระยะทาง 6 และ 10 กิโลเมตร ตามลำดับ ถ้าลากเส้นตั้งฉากจากตำบล ก. และ ข. ไปยังถนน จะพบถนนที่หลักกิโลเมตรที่ 13 และ 21 ตามลำดับ นายอำเภอควรจะกำหนดตำแหน่งที่ทำการไปรษณีย์โทรเลขริมฝั่งถนนด้านซ้าย ณ ตำแหน่งกิโลเมตรที่เท่าใดระหว่างหลักกิโลเมตรที่ 13 และ 21 ซึ่งเมื่อสร้างถนนจากหมู่บ้านทั้งสองมายังที่ทำการไปรษณีย์ แล้วจึงจะทำให้ถนนที่สร้างขึ้นมีระยะทางสั้นที่สุดและในการสร้างถนนจะต้องเสียค่าใช้จ่ายกิโลเมตรละ 200,000 บาท นายอำเภอจะต้องจัดสรรงบประมาณไว้เท่าใดในการสร้างถนนสองสายนี้

เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 4

ตอนที่ 1

1. **ตอบ** 3.

แนวคิด 1. **ถูกต้อง** $P(\{\phi\}) = \{\phi, \{\phi\}\}$

$\phi \in P(\{\phi\})$ และ $\phi \subset P(\{\phi\})$

$\{\phi\} \in P(\{\phi\})$ และ $\{\phi\} \subset P(\{\phi\})$

เพราะฉะนั้น $\forall A\,[A \in P(\{\phi\}) \longrightarrow A \subset P(\{\phi\})]$

สรุป $P(\{\phi\})$ เป็นเซตถ่ายทอด

2. **ถูกต้อง** โดยการใช้เหตุผลว่า ประพจน์ $p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$

เพราะฉะนั้น $b \not\subset B \to b \notin B$ สมมูลกับ $b \in B \to b \subset B$

ดังนั้น $\forall b\,[b \not\subset B \to b \notin B]$

เหมือนกับ $\forall b\,[b \in B \to b \not\subset B]$

สรุป B เป็นเซตถ่ายทอด

3. **ผิด** จากตัวเลือก 1 $P(\{\phi\})$ เป็นเซตถ่ายทอด

ดังนั้นข้อความ 3. จึงผิด

4. **ถูกต้อง** เพราะว่า $a \in \phi$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $a \in \phi \to a \subset \phi$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ผลที่ตามมาคือ $\forall a\,[a \in \phi \to a \subset \phi]$ เป็นจริง

สรุป ϕ เป็นเซตถ่ายทอด

2. ตอบ 2.

แนวคิด จากเหตุผลที่เป็นจริงคือ ถ้า $X \subset Y$ แล้ว

จะได้ว่า ขอบเขตบนน้อยที่สุดของ $X \leqslant$ ขอบเขตบนน้อยที่สุดของ Y

และ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ $X \geqslant$ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ Y

พิจารณาข้อความ ก.

เพราะว่า $A \subset B \subset C$

เพราะฉะนั้น $C-B \subset C-A$

ดังนั้น ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $C-B \leqslant$ ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต

เพราะฉะนั้น ข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข.

เพราะว่า $A \subset B \subset C$

เพราะฉะนั้น $B-A \subset C-A$

ดังนั้น ขอบเขตล่างมากที่สุดของ $B-A \geqslant$ ขอบเขตล่างมากที่สุดของ $C-A$

เพราะฉะนั้น ข้อความ ข. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ค.

เลือก $A = \{1,2\}$

$C = \{0,1,2,3\}$

ขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต A คือ 2

ขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต C คือ 0

เพราะฉะนั้น ข้อความ ค. ผิด

3. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก. เลือก $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1+\theta_2+\theta_3) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\theta_3\right) \\ &= \sin(2\pi+\theta_3) \\ &= \sin\theta_3 \end{aligned}$$

และ $$\begin{aligned} -\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3 &= -\sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2}\sin\theta_3 \\ &= (-1)(1)(-1)\sin\theta_3 \\ &= \sin\theta_3 \end{aligned}$$

ดังนั้นเราเลือก $\theta_3 \in (0,2\pi)$ ได้ทุกค่า

สรุปข้อความ ก. เป็นจริง

พิจารณาข้อความ ข. เลือก $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}+\theta_3\right) = \cos\theta_1 + \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta_3$$

นั่นคือ $$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}+(\theta_1+\theta_3)\right) &= \cos\theta_1 \\ -\sin(\theta_1+\theta_3) &= \cos\theta_1 \end{aligned}$$

เลือก $\theta_3 = \pi$ จะได้

$$\begin{aligned} -\sin(\theta_1+\pi) &= \cos\theta_1 \\ -(-\sin\theta_1) &= \cos\theta_1 \\ \sin\theta_1 &= \cos\theta_1 \end{aligned}$$

เลือก $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้นมี $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_3 = \pi$ ที่ทำให้

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}+\pi\right) = \cos\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

และ $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2}\cos\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

4. ตอบ 2.

แนวคิด $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\sin\theta < 0 \ , \ \cos\theta < 0$

$A = \sin\theta\cos\theta > 0$

$0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

ตัวเลือก 1 ผิด ตัวอย่างเช่น

$$\beta = \frac{\pi}{4} \simeq \frac{3.1415}{4} = 0.785375$$

$$\sin\beta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1.4144} = 0.707106$$

ดังนั้น $\beta \nless \sin\beta$

สรุป $A\beta < A\sin\beta < A\tan\beta$ ไม่ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก ขอให้สังเกตว่า ตัวเลือก 1 และ 4 เหมือนกัน

นั่นคือ $A\beta < A\sin\beta < A\tan\beta$

เหมือนกับ $-A\beta < -A\sin\beta > -A\tan\beta$

นั่นคือ $-A\tan\beta < -A\sin\beta < A\beta$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $A > 0$ ดังนั้นพิจารณาค่า

$\sin\beta < \beta < \tan\beta$, $-\sin\beta < -\beta < \tan\beta$

ว่าข้อความใดถูกต้องก็เป็นการเพียงพอ

การแสดงว่า $-\sin\beta < -\beta$ ไม่จริง

เลือก $\beta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $\beta = \frac{3.14}{4} = 0.785$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1.414} = 0.707$$

$$-0.707 \not< -0.785$$

นั่นคือ $-\sin\frac{\pi}{4} \not< -\frac{\pi}{4}$

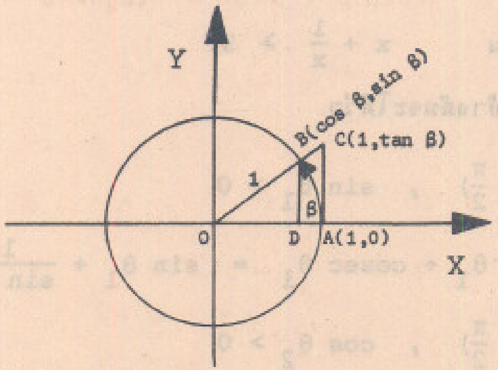
เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า $-\sin\beta < -\beta$ ไม่จริง

นั่นคือ $-\sin\beta < -\beta < \tan\beta$ ไม่ถูกต้อง

สรุป ตัวเลือก 2. ถูกต้อง

ข้อสังเกต การหาความสัมพันธ์ของ $\sin\beta$, β และ $\tan\beta$

โดยใช้วงกลมหนึ่งหน่วยสามารถทำได้ดังนี้



ส่วนโค้ง AB ยาวเท่ากับ β , $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$

ความยาว BD < ความยาวส่วนโค้ง AB

$\sin \beta < \beta$

ความยาวส่วนโค้ง AB < ความยาว AC

$\beta < \tan \beta$

$\sin \beta < \beta < \tan \beta$

เพราะว่า $A > 0$

สรุป $A\sin \beta < A\beta < A\tan \beta$

5. ตอบ 1.

แนวคิด จากเหตุผลว่า $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ ทุกค่า $x > 0$

ซึ่งแสดงข้อพิสูจน์ได้โดยง่ายดังนี้ เพราะว่า $x > 0$

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$$

$$x - 2 + \frac{1}{x} \geqslant 0$$

เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$

จากเหตุผลข้างต้นจะได้ว่า

$\theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin \theta_1 > 0$

$$\sin \theta_1 + \operatorname{cosec} \theta_1 = \sin \theta_1 + \frac{1}{\sin \theta_1} \geqslant 2$$

$\theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\cos \theta_2 > 0$

$$\cos \theta_2 + \sec \theta_2 = \cos \theta_2 + \frac{1}{\cos \theta_2} \geqslant 2$$

$\theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tan\theta_3 > 0$

$$\tan\theta_3 + \cot\theta_3 = \tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} \geqslant 2$$

เพราะฉะนั้น ทุกค่า $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้

$$\sin\theta_1 + \cos\theta_2 + \tan\theta_3 + \operatorname{cosec}\theta_1 + \sec\theta_2 + \cot\theta_3$$

$$\geqslant 2 + 2 + 2 = 6$$

สรุป $A \subset (6,\infty)$

ข้อควรระวัง $6 \not\in A$

ต่อไปจะเป็นการแสดงว่า $A = (6,\infty)$

การแสดงว่า $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\} = (2,\infty)$

ให้ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

เพราะว่า $0 < x < 1$

$0 < x^2 < 1$

$x^2 - 1 < 0$

$\frac{x^2-1}{x^2} < 0$

เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x \in (0,1)$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,1)$

นั่นคือ $f(1) < f(x) < f(0)$ ทุกค่า $x \in (0,1)$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = +\infty$

และ $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

เพราะฉะนั้น $2 < f(x) < \infty$ ทุกค่า $x \in (0,1)$

เพราะว่า $f(x) = x + \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0,1)$

เพราะฉะนั้น $\{f(x) \mid 0 < x < 1\} = (2,\infty)$

สรุป $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\} = (2,\infty)$

การแสดงว่า $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\} = [2,\infty)$

ให้ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$= \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$$

เพราะว่า $f'(x) < 0$ ถ้า $0 < x < 1$

$f'(x) = 0$ ถ้า $x = 1$

$f'(x) > 0$ ถ้า $1 < x < \infty$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + \frac{1}{x} = \infty$$

และ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} x + \frac{1}{x} = \infty$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0,1)$

f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(1,\infty)$

และ $f(1) = 2$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

สรุป $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\} = [2,\infty)$

$$S = \{\sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1} \mid \theta_1 \in (0, \tfrac{\pi}{2})\}$$

$$= \{\sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1} \mid 0 < \sin\theta_1 < 1\}$$

$$= (2,\infty)$$

$$C = \{\cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2} \mid \theta_2 \in (0, \tfrac{\pi}{2})\}$$

$$= \{\cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2} \mid 0 < \cos\theta_2 < 1\}$$

$$= (2,\infty)$$

$$T = \{\tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} \mid \theta_3 \in (0, \tfrac{\pi}{2})\}$$

$$= \{\tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} \mid 0 < \tan\theta_3 < \infty\}$$

$$= [2,\infty)$$

จากเหตุผลว่า ถ้า $2 < x < \infty$

$2 < y < \infty$

$2 \leqslant z < \infty$

แล้ว $6 < x+y+z < \infty$

ดังนั้นจาก $2 < \sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1} < \infty$

$$2 < \cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2} < \infty$$

$$2 \leqslant \tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} < \infty$$

จะได้ว่า

$$6 < \sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1} + \cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2} + \tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} < \infty$$

$$6 < \sin\theta_1 + \cos\theta_2 + \tan\theta_2 + \operatorname{cosec}\theta_1 + \sec\theta_2 + \cot\theta_3 < \infty$$

$$A = \{x \in R \mid x = \sin\theta_1 + \cos\theta_2 + \tan\theta_3 + \operatorname{cosec}\theta_1 + \sec\theta_2 + \cot\theta_3\}$$

$$= (6,\infty)$$

สรุปขอบเขตล่างใหญ่ที่สุดของ A คือ 6

การตัดตัวเลือก เลือก $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \frac{\pi}{4}$

$$\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} + \sec\frac{\pi}{4} + \cot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 2 + 3\sqrt{2}$$

$$\simeq 2 + 3(1.4142)$$

$$= 6.24$$

ดังนั้น 6, 4, 1 สามารถเป็นขอบเขตล่างของเซต A ได้

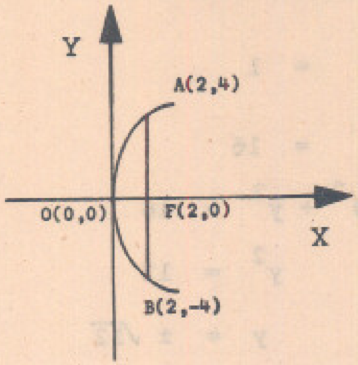
แต่เนื่องจากเราต้องการขอบเขตล่างใหญ่ที่สุด

ดังนั้นตัดค่าตัวเลข 4 และ 1 ทิ้งได้

นั่นคือตัดตัวเลือก ข. และ ค. ทิ้งได้

6. ตอบ 4.

แนวคิด



จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2 = 8x$

$$= 4(2)x$$

เป็นพาราโบลาเปิดทางขวา แกนพาราโบลาทับแกน X, จุดยอด O(0,0)

โฟกัส F(2,0)

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y^2 = 8(2) = 16$

$$y = \pm 4$$

ดังนั้นจุดยอดของวงรีคือ A(2,4) , B(2,-4)

เพราะว่า A,B เป็นจุดยอด ดังนั้น $2a = 8$

$$a = 4$$

เพราะว่าวงรีผ่านจุด O(0,0) ดังนั้น $b = 2$

วงรีที่ต้องการเป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางที่จุด F(2,0) , $a = 4$, $b = 2$

ดังนั้นสมการวงรีคือ

$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-0)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$4(x-2)^2 + y^2 = 16$$

แทนค่า $x = 1$; $4(1-2)^2 + y^2 = 16$

$$y^2 = 12$$

$$y = \pm\sqrt{12}$$

เพราะฉะนั้นวงรีผ่านจุด $(1,\sqrt{12})$, $(1,-\sqrt{12})$

แทนค่า $x = 3$; $4(3-2)^2 + y^2 = 16$

$$y^2 = 12$$

$$y = \pm\sqrt{12}$$

เพราะฉะนั้นวงรีผ่านจุด $(3,\sqrt{12})$, $(3,-\sqrt{12})$

ตัวเลือกที่ถูกต้องคือ ตัวเลือก 4.

7. ตอบ 1.

แนวคิด การหาจุดตัดของวงกลม

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \quad \text{..........(1)}$$

และ $$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0 \quad \text{..........(2)}$$

(1) - (2) ; $4x - 4y = 0$

$$x = y$$

แทนค่าในสมการ (1)

$$x^2 + x^2 + 2x - 2x - 2 = 0$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = 1, -1$$

ดังนั้นจุดตัดคือ (1,1) และ (1,-1)

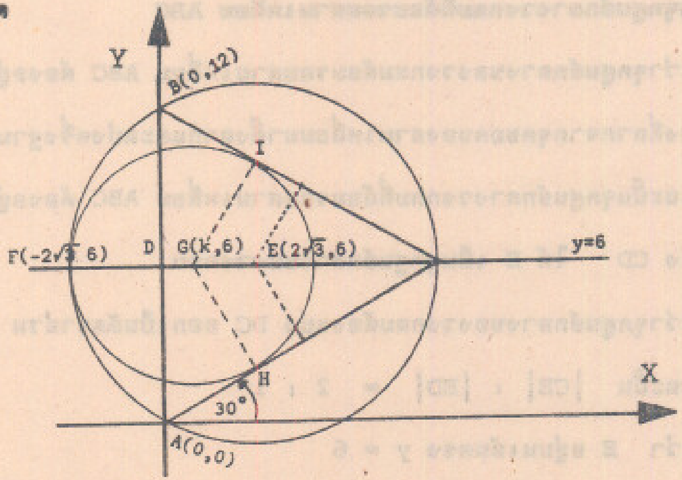
จากโจทย์วงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ ผ่านจุด (1,1)

เพราะฉะนั้น $1 + 1 + a + b + c = 0$

สรุป $a + b + c = -2$

8. ตอบ 1.

แนวคิด



การหาพิกัดของจุด C

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้นจุด C ต้องอยู่บนเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

ซึ่งคือเส้นตรง $y = 6$

ดังนั้นพิกัดของจุด C คือ (x,6)

เนื่องจาก x อาจเป็นได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ แต่โจทย์ถามเกี่ยวกับพื้นที่ของวงกลม ดังนั้นเราเลือกกรณี $x > 0$ ก็ได้

เพราะว่า $\overrightarrow{AC}$ ต้องทำมุม 30° กับแกน X และ $\overrightarrow{AC} = x\bar{i} + 6\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $\tan 30^\circ = \frac{6}{x}$

ดังนั้น $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{x}$

$$x = 6\sqrt{3}$$

สรุปพิกัด C คือ $(6\sqrt{3}, 6)$

การหาจุดศูนย์กลางวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

เพราะว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC ต้องอยู่บนเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมมาตั้งฉากและแบ่งครึ่งฐาน

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC ต้องอยู่บนเส้นตรง CD ให้ E เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

เพราะว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมต้องแบ่ง DC ออกเป็นอัตราส่วน 2 : 1

เพราะฉะนั้น $|CE| : |ED| = 2 : 1$

เพราะว่า E อยู่บนเส้นตรง $y = 6$

เพราะฉะนั้นให้พิกัด E เท่ากับ $(x,6)$

$$|ED| = |(x,6)-(0,6)| = |(x,0)| = x$$

$$|CE| = |(6\sqrt{3}, 6)-(x,6)| = |(6\sqrt{3}-x, 0)| = 6\sqrt{3}-x$$

$$\frac{|CE|}{|ED|} = \frac{2}{1}$$

$$\frac{6\sqrt{3} - x}{x} = \frac{2}{1}$$

$$6\sqrt{3} - x = 2x$$

$$3x = 6\sqrt{3}$$

$$x = 2\sqrt{3}$$

สรุปพิกัด E คือ $(2\sqrt{3}, 6)$

ความยาว AE เท่ากับ $\sqrt{12+36} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

วงกลม O_1 คือวงกลมจุดศูนย์กลาง $(2\sqrt{3}, 6)$ และรัศมี $4\sqrt{3}$

วงกลม O_1 ตัดกับเส้นตรง $y = 6$ ที่จุด $F(-2\sqrt{3}, 6)$

การหาวงกลม O_2

เพราะว่าวงกลม O_2 ต้องสัมผัสกับเส้นตรง BC และ AC

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลม O_2 ต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\hat{C}A$ ซึ่งคือเส้นตรง DC ให้ G เป็นพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลม

ดังนั้น จุด G ต้องอยู่บนเส้นตรง $y = 6$

ให้พิกัด G คือ $(k,6)$ ดังนั้น $0 < k < 6\sqrt{3}$

เพราะว่า G เป็นจุดศูนย์กลาง O_2 ที่สัมผัส AC ที่จุด H และ G สัมผัส BC ที่จุด I และสัมผัสวงกลม O_1 ที่จุด F

เพราะฉะนั้น $|FG| = |GH| = |GI|$

การหาความยาว $|FG|$

$$|FG| = |(-2\sqrt{3}, 6) - (k,6)| = |-2\sqrt{3} - k|$$

การหาความยาว $|GH|$

สมการเส้นตรง AC คือ $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{6-0}{6\sqrt{3}-0}$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x - \sqrt{3}\,y = 0$$

ความยาว $|GH| = \dfrac{|k-\sqrt{3}(6)|}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{|k-6\sqrt{3}|}{2}$

การหาความยาว $|GI|$

สมการเส้นตรง BC คือ $\dfrac{y-12}{x-0} = \dfrac{6-12}{6\sqrt{3}-0}$

$$\frac{y-12}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}\,y - 12\sqrt{3} = -x$$

$$x + \sqrt{3}\,y - 12\sqrt{3} = 0$$

ความยาว $|GI| = \dfrac{|k+\sqrt{3}(6)-12\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{|k-6\sqrt{3}|}{2}$

จากสมการ $|FG| = |GH|$

$$|-2\sqrt{3}-k| = \frac{|k-6\sqrt{3}|}{2}$$

$$|2\sqrt{3}+k| = \frac{|k-6\sqrt{3}|}{2}$$

$$2|2\sqrt{3}+k| = |k-6\sqrt{3}|$$

เพราะว่า $0 < k < 6\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $2(2\sqrt{3}+k) = 6\sqrt{3}-k$

$$4\sqrt{3}+2k = 6\sqrt{3}-k$$

$$3k = 2\sqrt{3}$$

$$k = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

สรุปพิกัดของจุด G คือ $(\frac{2}{\sqrt{3}}, 6)$

$G(\frac{2}{\sqrt{3}}, 6)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม O_2

ความยาว $|FG| = |(-2\sqrt{3}, 6)-(\frac{2}{\sqrt{3}}, 6)|$

$$= |(-2\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}, 0)|$$

$$= |(\frac{-8}{\sqrt{3}}, 0)|$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}$$

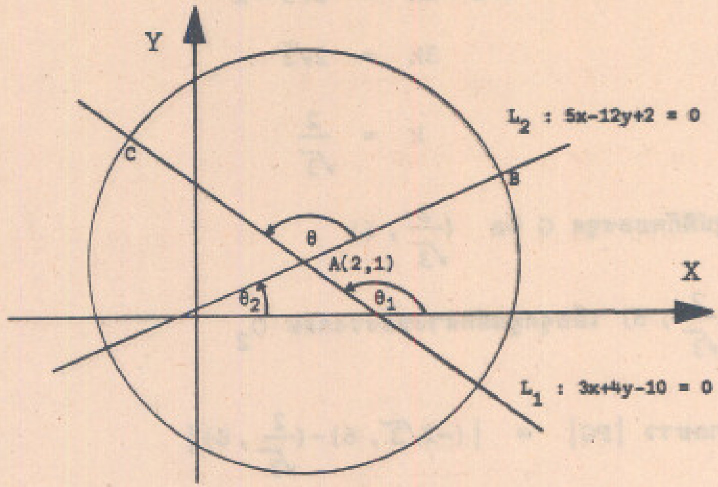
ดังนั้นรัศมี O_2 เท่ากับ $\frac{8}{\sqrt{3}}$

สรุปพื้นที่วงกลม O_2 เท่ากับ $\pi r^2 = \pi(\frac{8}{\sqrt{3}})^2$

$$= \frac{64}{3}\pi$$

9. ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปตามที่โจทย์กำหนด เพื่อช่วยในการคำนวณ



การหาจุดตัด A(a,b)

$$3x + 4y - 10 = 0 \quad \text{........(1)}$$

$$5x - 12y + 2 = 0 \quad \text{........(2)}$$

3(1) ; $$9x + 12y - 30 = 0 \quad \text{........(3)}$$

(2)+(3) ; $$14x - 28 = 0$$

$$x = 2$$

จาก (1) $$4y = 10 - 3x$$

$$= 10 - 6$$

$$= 4$$

$$y = 1$$

สรุป A(2,1) เป็นจุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2

สมการ L_1 : $y = -\frac{3}{4}x - \frac{10}{4}$

สมการ L_2 : $y = \frac{5}{12}x + \frac{2}{12}$

วิธีที่ 1 ให้ θ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 , $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

ความชันเส้นตรง L_1 เท่ากับ $-\frac{3}{4}$ ดังนั้น $\tan\theta_1 = -\frac{3}{4}$

ความชันเส้นตรง L_2 เท่ากับ $\frac{5}{12}$ ดังนั้น $\tan\theta_2 = \frac{5}{12}$

เพราะว่า $\theta = \theta_1 - \theta_2$

$$\begin{aligned}
\tan\theta &= \tan(\theta_1 - \theta_2) \\
&= \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)} \\
&= \frac{(-\frac{3}{4}) - (\frac{5}{12})}{1 + (-\frac{3}{4})(\frac{5}{12})} \\
&= \frac{(-\frac{14}{12})}{(\frac{33}{48})} \\
&= -\frac{56}{33}
\end{aligned}$$

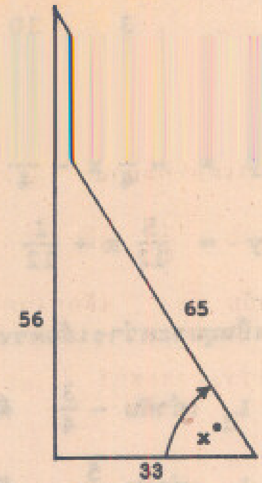
พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉากที่ด้านประกอบมุมฉากเป็น 33 และ 56

จะได้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ $\sqrt{33^2 + 56^2} = \sqrt{1089 + 3136}$

$$= \sqrt{4225}$$

$$= 65$$

พิจารณาจากรูปสามเหลี่ยม



$$\tan x = \frac{56}{33}$$

$$\cos x = \frac{33}{65}$$

$$\sin x = \frac{56}{65}$$

เพราะว่า $\tan\theta = -\frac{56}{33}$ และ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = -\frac{33}{65}$

ดังนั้น $\theta = \arccos(-\frac{33}{65}) = \frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{33}{65})$

พื้นที่วงกลมรัศมี 4 มีค่าเท่ากับ $(4)^2 = 16\pi$

โดยการเทียบบัญญัติไตรยางศ์

มุมที่จุดศูนย์กลาง 2π รองรับพื้นที่ 16π

มุมที่จุดศูนย์กลาง θ รองรับพื้นที่ $\frac{16\pi}{2\pi} \times \theta$

$$= 8\pi$$

$$= 8(\frac{\pi}{2} + \arcsin(\frac{33}{65}))$$

$$= 4\pi + 8\arcsin(\frac{33}{65})$$

สรุปพื้นที่วงกลมส่วนที่มากที่สุดเท่ากับ $4\pi + 8\arcsin(\frac{33}{65})$

วิธีที่ 2 เลือกเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และ L_2

ความชัน L_1 เท่ากับ $-\frac{3}{4}$ เลือกเวกเตอร์ $\bar{u} = (4,-3)$

ความชัน L_2 เท่ากับ $\frac{5}{12}$ เลือกเวกเตอร์ $\bar{v} = (12,5)$

ให้ β เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้

$$\cos\beta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}$$

$$= \frac{(4,-3)\cdot(12,5)}{|(4,-3)|\cdot|(12,5)|}$$

$$= \frac{48-15}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{144+25}}$$

$$= \frac{33}{65}$$

$$\beta = \arccos\left(\frac{33}{65}\right)$$

เพราะว่า β เป็นมุมแหลมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $\theta = \pi - \beta = \pi - \arccos\left(\frac{33}{65}\right)$

ในทำนองเดียวกันโดยการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ จะได้ว่าพื้นที่ของวงกลมส่วนที่ใหญ่เท่ากับ 8θ

$$= 8\left(\pi - \arccos\left(\frac{33}{65}\right)\right)$$

$$= 8\pi - 8\arccos\left(\frac{33}{65}\right)$$

$$= 8\pi - 8\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{33}{65}\right)\right)$$

$$= 8\pi - 4\pi + 8\arcsin\left(\frac{33}{65}\right)$$

$$= 4\pi + 8\arcsin\left(\frac{33}{65}\right)$$

การตัดตัวเลือก โจทย์ถามเกี่ยวกับพื้นที่ ดังนั้นการประมาณค่าพื้นที่

จริงจากรูปกับค่าในตัวเลือกสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

จากรูปเมื่อเราทำการวัดมุม θ ที่ L_1 ทำกับ L_2 ด้วยไม้โปร หรือครึ่งวงกลมจะได้ 120 องศา

พื้นที่วงกลม $= \pi r^2 = \pi 4^2 = 16\pi$

โดยการเทียบบัญญัติไตรยางศ์ จะได้ว่า

พื้นที่ของสามเหลี่ยมฐานโค้ง ABC $= \frac{120}{360} \times 16\pi = 5.3\pi$

พิจารณาค่าจากแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1 $\quad 0 < \arccos\left(\frac{33}{65}\right) < \frac{\pi}{2}$

$$0 < 8\arccos\left(\frac{33}{65}\right) < 4\pi$$

เพราะฉะนั้น $8\arccos\left(\frac{33}{65}\right) \neq 5.3\pi$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

ตัวเลือก 2 $\quad 0 < \arcsin\left(\frac{56}{65}\right) < \frac{\pi}{2}$

$$0 < 8\arcsin\left(\frac{56}{65}\right) < 4\pi$$

เพราะฉะนั้น $8\arcsin\left(\frac{56}{65}\right) \neq 5.3\pi$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

ตัวเลือก 3 $\quad \arccos\left(\frac{33}{65}\right) \simeq \arccos\left(\frac{33}{66}\right)$

$$\arccos\left(\frac{33}{65}\right) \simeq \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$4\pi + 8\arccos\left(\frac{33}{65}\right) \simeq 4\pi + 8\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4\pi + 2.67\pi$$

$= 6.67\pi$ ห่างจาก 5.3π มาก

ตัวเลือก 4 $\arcsin\left(\frac{33}{65}\right) \simeq \arcsin\left(\frac{33}{66}\right)$

$\arcsin\left(\frac{33}{65}\right) \simeq \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$4\pi + 8\arcsin\left(\frac{33}{65}\right) \simeq 4\pi + 8\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\pi + 1.3\pi = 5.3\pi$

สรุปเลือกตัวเลือก 4 ดีกว่า

10. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 มี k เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^4 และ x^2+2x+4 หาร $P(x)$ ลงตัว เพราะฉะนั้นต้องมีพหุนาม $Q(x) = kx^2 + Ax + B$ ที่ทำให้

$P(x) = (x^2+2x+4)\,Q(x)$

$P(x) = (x^2+2x+4)(kx^2+Ax+B)$

เพราะว่า $P(0) = 4$

เพราะฉะนั้น $(0+0+4)(0+0+B) = P(0) = 4$

$4B = 4$

$B = 1$

เพราะว่า $P'(x) = (x^2+2x+4)'(kx^2+Ax+1)$

$+ (x^2+2x+4)(kx^2+Ax+1)'$

$= (2x+2)(kx^2+Ax+1) + (x^2+2x+4)(2kx+A)$

และ $P'(0) = 4$

เพราะฉะนั้น $(0+2)(0+0+1) + (0+0+4)(0+A) = P'(0) = 4$

$(2)(1) + (4)A = 4$

$$4A = 2$$

$$A = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $P(x) = (x^2+2x+4)(kx^2+\frac{1}{2}x+1)$

พิจารณาสมการ $P(x) = 0$

เพราะว่า $x^2+2x+4 = (x^2+2x+1)+3 = (x+1)^2+3 > 0$

เพราะฉะนั้น $kx^2+\frac{1}{2}x+1 = 0$

$$2kx^2+x+2 = 0$$

จากเหตุผลเกี่ยวกับสมการ $Ax^2+Bx+C = 0$

มีรากตัวเดียวก็ต่อเมื่อ $B^2-4AC = 0$

จากสมการ $2kx^2+x+2 = 0$

$$A = 2k$$

$$B = 1$$

$$C = 2$$

$$B^2-4AC = 0$$

$$1-4(2k)(2) = 0$$

$$16k = 1$$

$$k = \frac{1}{16}$$

สรุป $k = \frac{1}{16}$ ทำให้ $P(x)$ มีรากเพียงตัวเดียว

11. ตอบ 2.

แนวคิด

ข้อความ ก. ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $P(n)$ แทนข้อความ "$f(n) = (n-1)!$"

$n = 1$; $f(1) = (1-1)! = 0! = 1$ เป็นจริง

ดังนั้น $P(1)$ จริง

สมมติ $P(k)$ จริง จะได้ $f(k) = (k-1)!$

จากเงื่อนไข (2) $f(k+1) = k f'(k)$

$$= k(k-1)!$$

$$= k!$$

$$= ((k+1)-1)!$$

ดังนั้น $f(n) = (n-1)!$ เป็นจริงทุกค่า n ที่เป็นจำนวนบวก

ข้อความ ข. ผิด ตัวอย่างเช่น

$n = 3$

$f(2(3)) = 5! = 120$

$3!\,f(3) = (3!)(2!) = 12$

ข้อความ ค. ถูกต้อง เพราะว่า $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$

เพราะฉะนั้น $f(x^2+2x+2) = f((x+1)^2+1)$

$$= (x+1)^2 f(x^2+1)$$

ทุกค่า $x \in (0,\infty)$

12. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

พิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $x > 0$

$$g'(x) = \frac{(1+x)(1) - x(1)}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2}$$

เพราะว่า $g'(x) > 0$ ทุกค่า $x > 0$

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0,\infty)$

ผลที่ตามมาคือ $x_1 \leqslant x_2 \longrightarrow g(x_1) \leqslant g(x_2)$

นั่นคือ $|z| \leqslant |w| \longrightarrow g(|z|) \leqslant g(|w|)$

$$\longrightarrow \frac{|z|}{1+|z|} \leqslant \frac{|w|}{1+|w|}$$

$$\longrightarrow f(z) \leqslant f(w)$$

สรุปข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข. เพราะว่า $0 \leqslant |z| \leqslant 4$

และ $g(|z|) = \dfrac{|z|}{1+|z|}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ดังนั้น $g(0) \leqslant g(|z|) \leqslant g(4)$

$$0 = \frac{0}{1+0} \leqslant g(|z|) \leqslant \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$$

เพราะว่า $f(z) = g(|z|)$ เพราะฉะนั้น $f(z) \in [0, \frac{4}{5}]$

นั่นคือ เรนจ์ของ f คือ $[0, \frac{4}{5}]$

สรุปข้อความ ข. ผิด

พิจารณาข้อความ ค. ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$$z^2 = w^2$$

$$|z^2| = |w^2|$$

$$|z|^2 = |w|^2$$

$$|z| = |w|$$

$$\frac{|z|}{1+|z|} = \frac{|w|}{1+|w|}$$

$$f(z) = f(w)$$

13. **ตอบ** 1.

แนวคิด $U = \{1,2,3,...,100\}$

$$A(x,y) = 1 + \frac{x}{y} + (\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y})^3 + ...$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต $a = 1$, $r = \frac{x}{y}$

ดังนั้น $A(x,y)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $|\frac{x}{y}| < 1$

เพราะว่า $x,y \in U$

เพราะฉะนั้น $A(x,y)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\frac{x}{y} < 1$

$V = \{(x,y) \in U \times U \mid A(x,y)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า$\}$

$= \{(x,y) \in U \times U \mid \frac{x}{y} < 1\}$

$= \{(x,y) \in U \times U \mid x < y\}$

$= \{(99,100),(98,99),(98,100),...(1,99),(1,100)\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ V วิธีที่ 1 $(x,y) \in V$

x	y	มีค่า y ได้
99	100	1
98	99 ,100	2
97	98,99,100	3
⋮		⋮
3	4,5,...,100	97
2	3,4,...,100	98
1	2,3,...,100	99

จำนวนสมาชิกของ V เท่ากับ $1+2+3+...+99$

$$= \frac{99}{2}(1+99)$$

$$= 4950$$

วิธีที่ 2 $V = \{(x,y) \in U \times U \mid x < y\}$

จำนวนสมาชิกของ V เท่ากับจำนวนวิธีเลือกตัวเลข 2 ตัวจากเซต U พร้อมกัน แล้วนำตัวเลขมีค่าน้อยให้เป็น x และตัวมีค่ามากเป็น y

ดังนั้น $n(V) = \binom{100}{2}$

$$= \frac{100!}{98!\,2!}$$

$$= 4950$$

14. ตอบ 3.

แนวคิด จากสูตร $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$$(x^2-1)^4 = (x^2)^4 + 4(x^2)^3(-1) + 6(x^2)^2(-1)^2 + 4(x^2)(-1)^3 + (-1)^4$$

$$= x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1$$

$$\frac{d^4}{dx^4}(x^2-4)^4 = \frac{d^4}{dx^4}(x^8 - 4x^6 + 6x^4 - 4x^2 + 1)$$

$$= \frac{d^3}{dx^3}(8x^7 - 24x^5 + 24x^3 - 8x)$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}(56x^6 - 120x^4 + 72x^2 - 8)$$

$$= \frac{d}{dx}(336x^5 - 480x^3 + 144x)$$

$$= 1680x^4 - 1440x^2 + 144x$$

$$P_4(x) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}(1680x^4 - 1440x^2 + 144)$$

$$P_4(1) = \frac{1}{2^4 \cdot 4!}(1680 - 1440 + 144)$$

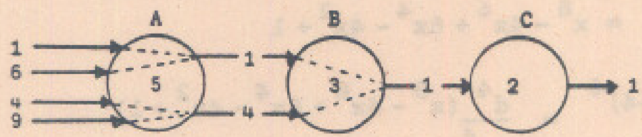
$$= \frac{384}{(16)(24)}$$

$$= 1$$

15. ตอบ 2.

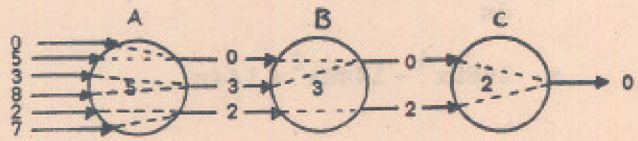
แนวคิด พิจารณาจำนวนวิธีที่จะทำให้ได้เลข 0 หรือ 1 ใน N ที่ออกมาจากโปรแกรม C

พิจารณาเลข 1



ตัวเลขที่เข้าสู่โปรแกรม A ที่ทำให้เลขที่ออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 1 มี 1, 6, 4, 9 นับได้เป็น 4 วิธี

พิจารณาเลข 0



ตัวเลขที่เข้าสู่โปรแกรม A ที่ทำให้เลขที่ออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 0 มี 0, 5, 3, 8, 2, 7 นับได้เป็น 6 วิธี

การนับจำนวนสมาชิกของ U ที่ทำให้ได้ผลเป็น (1,1,0,0,1)

<u>ขั้นตอนที่ 1</u> จำนวนวิธีที่ตัวเลขเข้าสู่โปรแกรม A และได้ผลออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 1 ในตำแหน่งที่ 1 ทำได้ 4 วิธี

<u>ขั้นตอนที่ 2</u> จำนวนวิธีที่ตัวเลขเข้าสู่โปรแกรม A และได้ผลออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 1 ในตำแหน่งที่ 2 ทำได้ 4 วิธี

<u>ขั้นตอนที่ 3</u> จำนวนวิธีที่ตัวเลขเข้าสู่โปรแกรม A และได้ผลออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 0 ในตำแหน่งที่ 3 ทำได้ 6 วิธี

<u>ขั้นตอนที่ 4</u> จำนวนวิธีที่ตัวเลขเข้าสู่โปรแกรม A และได้ผลออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 0 ในตำแหน่งที่ 4 ทำได้ 6 วิธี

<u>ขั้นตอนที่ 5</u> จำนวนวิธีที่ตัวเลขเข้าสู่โปรแกรม A และได้ผลออกจากโปรแกรม C เป็นเลข 1 ในตำแหน่งที่ 5 ทำได้ 4 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่ N = (a,b,c,d,e) เข้าสู่โปรแกรม A แล้วออกจากโปรแกรม C เป็น (1,1,0,0,1) มีค่าเป็น

(4)(4)(6)(6)(4) = 2304 วิธี

16. ตอบ 4.

แนวคิด

	$2A + 3B = 4C$	.........(1)
	$3A + 4B = 2C$	.........(2)
3(1) ;	$6A + 9B = 12C$	.........(3)
2(2) ;	$6A + 8B = 4C$	.........(4)

$(3)-(4)$; $B = 8C$

$$\det(B) = \det(8C)$$

เพราะว่า B มีมิติ 2×2 ดังนั้น C มีมิติ 2×2

และ $\det(B) = \det(8C) = 8^2 \det(C)$

$$= 64(4) = 256$$

$4(1)$; $8A + 12B = 16C$ ....(5)

$3(2)$; $9A + 12B = 6C$ ....(6)

$(6)-(5)$; $A = -10C$

$$\det(A) = \det(-10C) = (-10)^2 \det(C)$$

$$= 100(4) = 400$$

สรุป $\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B)$

$$= \frac{\det(B)}{\det(A)}$$

$$= \frac{256}{400} = 0.64$$

17. ตอบ 3.

แนวคิด $f(k) = 1 - \frac{1}{k^2}$

$$= \frac{k^2-1}{k^2}$$

$$= \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = f(2) = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} = \frac{(1)(3)}{(2)(2)}$$

$$a_3 = f(2)\,f(3) = \frac{(1)(3)}{(2)(2)} \cdot \frac{(2)(4)}{(3)(3)} = \frac{1\cdot3\cdot2\cdot4}{2\cdot2\cdot3\cdot3}$$

$$a_4 = \frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4}$$

$$a_5 = \frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5\cdot5}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot3\cdot5\cdot4\cdot6}{2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot4\cdot4\cdot5\cdot5} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}$$

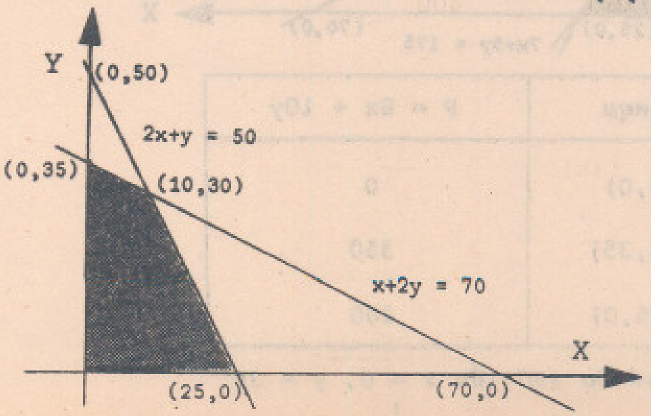
$$= \frac{(1\cdot2\cdot3\cdots(n-1))\cdot(3\cdot4\cdot5\cdots(n+1))}{(2\cdot3\cdot4\cdots n)\cdot(2\cdot3\cdot4\cdots n)}$$

$$= \frac{(n+1)}{2n}$$

สรุป $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)}{2n} = \frac{1}{2}$

18. ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปเพื่อหาอาณาบริเวณผลเฉลยและจุดมุม

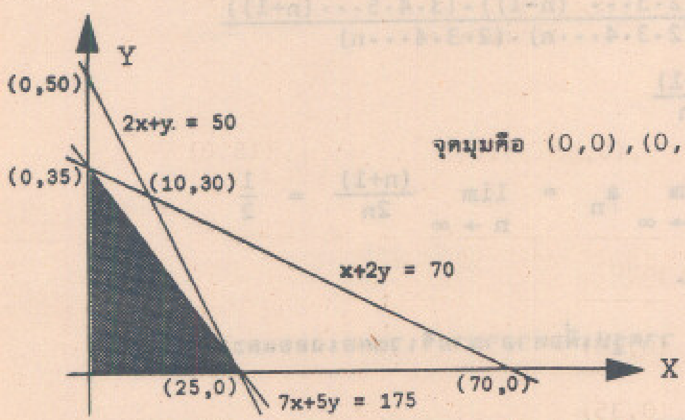


จุดมุมคือ (0,0),(0,35),(10,30) และ (25,0)

จุดมุม	P = 8x + 10y
(0,0)	0
(0,35)	350
(10,30)	380
(25,0)	200

สรุป P = 380 เป็นค่าสูงสุด เมื่อ x = 10, y = 30

ตัวเลือก 1 เพิ่มเงื่อนไข 7x + 5y ≤ 175

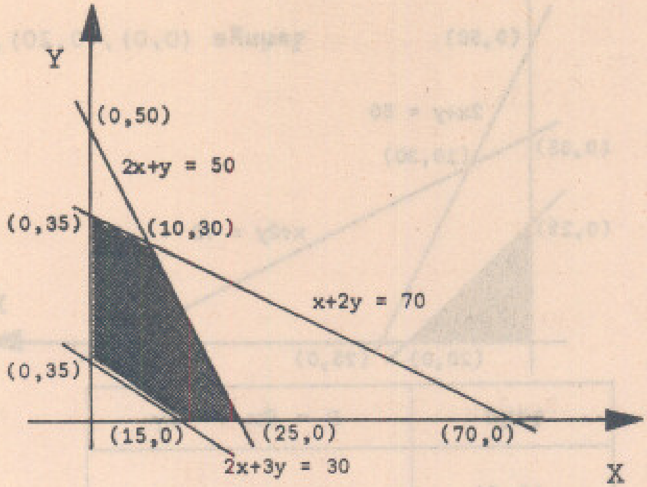


จุดมุมคือ (0,0),(0,35),(25,0)

จุดมุม	P = 8x + 10y
(0,0)	0
(0,35)	350
(25,0)	200

P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 350 เมื่อ x = 0, y = 35

ตัวเลือก 2 เพิ่มเงื่อนไข $2x + 3y \geqslant 30$

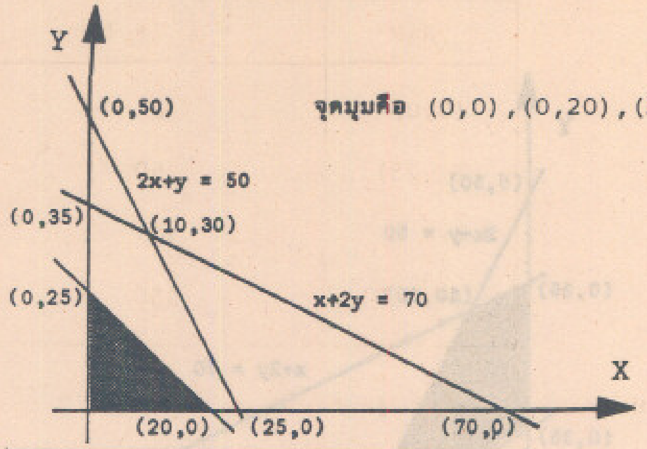


จุดมุมคือ (0,10),(0,35),(10,30),(25,0),(15,0)

จุดมุม	$P = 8x + 10y$
(0,10)	100
(0,35)	350
(10,30)	380
(25,0)	200
(15,0)	120

สรุป $P = 380$ เป็นค่าสูงสุด เมื่อ $x = 10$, $y = 30$

ตัวเลือก 3 เพิ่มเงื่อนไข $x + y \leq 20$

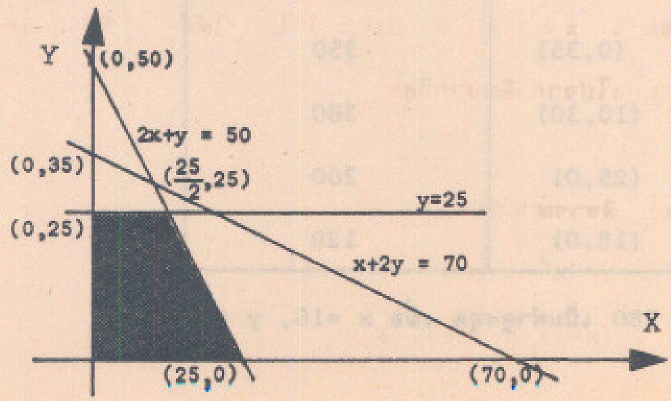


จุดมุมคือ (0,0), (0,20), (20,0)

จุดมุม	$P = 8x + 10y$
(0,0)	0
(0,20)	200
(20,0)	160

สรุป $P = 200$ **เป็นค่าสูงสุด เมื่อ** $x = 0,\ y = 20$

ตัวเลือก 4 เพิ่มเงื่อนไข $y \leq 25$



จุดมุมคือ (0,0), (0,25), $(\frac{25}{2},25)$, (25,0)

จุดมุม	P = 8x + 10y
(0,0)	0
(0,25)	250
(25,0)	200
$(\frac{25}{2}, 0)$	350

สรุป P = 350 เป็นค่าสูงสุด เมื่อ $x = \frac{25}{2}$, y = 25

จากตัวเลือกทั้ง 4 จะได้

ตัวเลือก	ค่า P สูงสุด
1	350
2	380
3	200
4	350

สรุปเงื่อนไข $x + y \leqslant 20$ ที่เพิ่มเข้าไปทำให้ค่า P มีค่าสูงสุด
เปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากที่สุด

19. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาเซต A

$$x^3-1 \geqslant 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1) \geqslant 0$$

เพราะว่า $x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$

$= (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$

เพราะฉะนั้น $x-1 \geqslant 0$

$x \geqslant 1$

สรุป $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3-1 \geqslant 0\}$

$A = [1,\infty)$

พิจารณาเซต B $x^4-1 \geqslant 0$

$(x^2-1)(x^2+1) \geqslant 0$

$(x+1)(x-1)(x^2+1) \geqslant 0$

เพราะว่า $x^2+1 > 0$

เพราะฉะนั้น $(x+1)(x-1) \geqslant 0$

$x \leqslant -1$ หรือ $x \geqslant 1$

สรุป $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4-1 \geqslant 0\}$

$B = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

$A \cap B = [1,\infty) \cap [(-\infty,-1] \cup [1,\infty)] = [1,\infty)$

ดังนั้นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $A \cap B$ คือ 1 , $a = 1$

$A \cup B = [1,\infty) \cup ((-\infty,-1] \cup [1,\infty))$

$= (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

ดังนั้นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cup B$ ไม่มีค่า

สรุป $a+b$ ไม่มีค่า

20. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 1 ของ A ด้วย 2

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ แถวที่ 2 ของ B ถูกลบทิ้งด้วยแถวที่ 1 ของ B

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$ สลับแถวที่ 2 และแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ C

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

หาค่ากำหนดของเมตริกซ์แต่ละตัวจะได้

$\det(A) = 2$ $\quad\quad \det(C) = 4$

$\det(B) = 4$ $\quad\quad \det(D) = -4$

สรุป $\det(ABC^{-1}D^{-1}) = \det(A)\det(B)\det(C^{-1})\det(D^{-1})$

$$= \frac{\det(A)\det(B)}{\det(C)\det(D)} = \frac{(2)(4)}{(4)(-4)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

วิธีที่ 2 โดยใช้คุณสมบัติของค่ากำหนด

A

$\downarrow$ คูณสมาชิกทุกตัวในแถวที่ 1 ของ A ด้วย 2

B

จะได้ $\det(B) = 2\det(A)$

B

$\downarrow$ แถวที่ 2 ของ B ถูกลบทิ้งด้วยแถวที่ 1 ของ B

C

จะได้ $\det(B) = \det(C)$

C

$\downarrow$ สลับแถวที่ 2 และแถวที่ 3 ของเมตริกซ์ C

D

จะได้ $\det(D) = -\det(C)$

$$\det(ABC^{-1}D^{-1}) = \frac{\det(A)\det(B)}{\det(C)\det(D)} = \frac{\det(A)\det(B)}{\det(B)\det(D)}$$

$$= \frac{\det(A)}{\det(D)} = \frac{\det(A)}{-\det(C)}$$

$$= \frac{\det(A)}{-\det(B)} = \frac{\det(A)}{-2\det(A)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

หมายเหตุ แนวทางของโจทย์ข้อนี้จะเห็นได้ว่า สมาชิกของเมตริกซ์ A ไม่ต้องกำหนดก็ได้ เราก็สามารถหาค่า $\det(ABC^{-1}D^{-1})$ ได้ โดยใช้แนวคิดวิธีที่ 2 ซึ่งเป็นการบังคับว่า นักเรียนต้องรู้คุณสมบัติของการแปลงแถวกับค่าดีเทอร์มิแนนท์

21. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อความ ก. ผิด ตัวอย่างเช่น

ข้อมูล A : 1,2,3,4,...,19,20

ข้อมูล B : 1,1.1,1.2,...,3.9,4

จะได้ข้อมูล C เป็น

1,1,1.1,1.2,...,3.9,4,4,5,...,20

พิสัยของข้อมูล A = 20-1 = 19

พิสัยของข้อมูล C = 20-1 = 19

ข้อความ ข. ผิด ตัวอย่างเช่น

ข้อมูล A : -10,-9,-8,...,-1,1,2,...,10

ข้อมูล B : -20,-19,...,-1,1,2,...,19,20

จะได้ข้อมูล C เป็น -20,-19,...,-10,-10,-9,-9,...,

-1,-1,1,1,2,2,...,10,10,...,20

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล C เท่ากับ 0

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล B เท่ากับ 0

พิจารณาข้อความ ค. ผิด ตัวอย่างเช่น

ข้อมูล A : 1,1.1,1.2,...,2.9,3

ข้อมูล B : 1,2,3,4,...,40

จะได้ข้อมูล C เป็น 1,1,1.1,1.2,...,29,3,4,...,40

มัธยฐานของข้อมูล C = $\frac{10+11}{2}$ = 10.5

มัธยฐานของข้อมูล A = $\frac{2.0 + 2.1}{2}$ = 2.05

22. ตอบ 3

แนวคิด สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูล A $= \frac{7-1}{7+1} = \frac{6}{8} = 0.75$

สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูล B $= \frac{72-20}{72+20} = \frac{52}{92} = 0.56$

สรุปข้อความ ก. ถูกต้อง

การหาค่าการแปรผันของข้อมูล A

$\Sigma x = 4+7+4+1+6+2+3+1+4+2 = 34$

$\bar{x} = \frac{34}{10} = 3.4$

$\Sigma x^2 = 4^2+7^2+\ldots+4^2+2^2 = 152$

$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{10} - \bar{x}^2 = \frac{152}{10} - (3.4)^2 = 3.64$

$s = 1.9078$

การแปรผันของข้อมูล A $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.9078}{3.4} = 0.5611$

การหาค่าการแปรผันของข้อมูล B

$\Sigma x = 20+25+\ldots+72+72 = 356$

$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{8} = \frac{356}{8} = 44.5$

$\Sigma x^2 = 20^2+25^2+\ldots+72^2+72^2 = 19114$

$s^2 = \frac{\Sigma x^2}{8} - \bar{x}^2 = \frac{19114}{8} - (44.5)^2 = 409$

$s = 20.223$

การแปรผันของข้อมูล B เท่ากับ $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{20.223}{44.5} = 0.454$

สรุปข้อความ ข. ถูกต้อง

23. ตอบ 3.

แนวคิด $f(\theta) = \sin\theta$

$$f^{(1)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

$$f^{(2)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$f^{(3)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta) = -\cos\theta$$

$$f^{(4)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos\theta) = \sin\theta$$

พิจารณาค่าอนุพันธ์แต่ละอันดับของ $f(\theta)$ จะได้ $f^{(4)}(\theta)$ มีค่าเท่ากับ $f(\theta)$ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$f(\theta) = f^{(4)}(\theta) = f^{(8)}(\theta) = f^{(12)}(\theta) = f^{(16)}(\theta)$$

$$= f^{(20)}(\theta) = f^{(24)}(\theta)$$

สรุป $f^{(24)}(\theta) = f(\theta) = \sin\theta$

$$g(\theta) = \cos\theta$$

$$g^{(1)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$g^{(2)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta) = -\cos\theta$$

$$g^{(3)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos\theta) = \sin\theta$$

$$g^{(4)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta$$

เมื่อพิจารณาค่าอนุพันธ์อันดับสูงขึ้นของ $g(\theta)$ จะได้ว่า

$$g(\theta) = g^{(4)}(\theta) = g^{(8)}(\theta) = g^{(12)}(\theta) = g^{(16)}(\theta)$$
$$= g^{(20)}(\theta)$$

$$g^{(21)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}g(\theta) = \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$$g^{(22)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\sin\theta) = -\cos\theta$$

$$g^{(23)}(\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos\theta) = \sin\theta$$

เพราะว่า $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

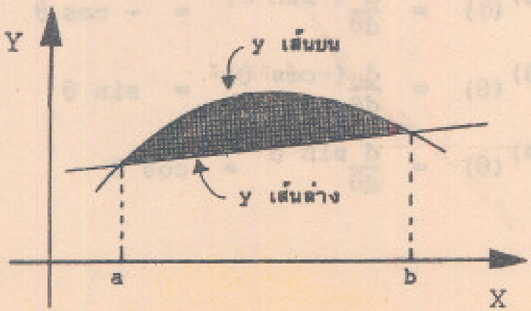
เพราะฉะนั้น $f^{(24)}(\frac{\pi}{6})\, g^{(23)}(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{\pi}{6})\sin(\frac{\pi}{6})$

$$= (\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{4}$$

24. ตอบ 3.

แนวคิด **เสริมความรู้การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง**



A = พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง y เส้นบน กับแกน X บนช่วง [a,b]

$$= \int_a^b (y\ \text{เส้นบน})\, dx$$

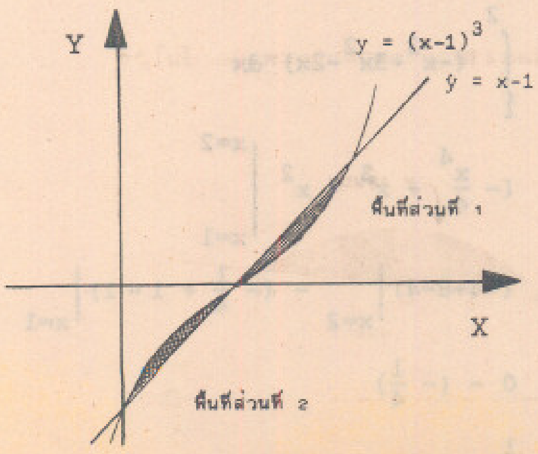
B = พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง y เส้นล่าง กับแกน X บนช่วง [a,b]

$$= \int_a^b (y\ \text{เส้นล่าง})\, dx$$

พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง y เส้นบน กับ y เส้นล่าง เท่ากับ

$$A - B = \int_a^b (y\ \text{เส้นบน})\, dx - \int_a^b (y\ \text{เส้นล่าง})\, dx$$

$$= \int_a^b [(y\ \text{เส้นบน}) - (y\ \text{เส้นล่าง})]\, dx$$



การหาจุดตัดของเส้นตรง $y = x-1$ และ $y = (x-1)^3$

$$(x-1) = (x-1)^3$$

$$(x-1)^3 - (x-1) = 0$$

$$(x-1)[(x-1)^2 - 1] = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x) = 0$$

$$x = 0,1,2$$

ดังนั้นจุดตัดคือ $(0,-1),(1,0),(2,1)$

$$\text{พื้นที่ส่วนที่ 1} = \int_1^2 [y \text{ เส้นบน} - y \text{ เส้นล่าง}]\, dx$$

$$= \int_1^2 [(x-1) - (x-1)^3]\, dx$$

$$= \int_1^2 [(x-1) - (x^3-3x^2+3x-1)]\, dx$$

$$= \int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)\, dx$$

$$= \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right\Bigg|_{x=1}^{x=2}$$

$$= (-4+8-4)\Big|_{x=2} - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right)\Big|_{x=1}$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}$$

พื้นที่ส่วนที่ 2 $= \int_0^1 [y \text{ เส้นบน} - y \text{ เส้นล่าง}]\, dx$

$= \int_0^1 ((x-1)^3 - (x-1))\, dx$

$= \int_0^1 [(x^3-3x^2+3x-1) - (x-1)]\, dx$

$= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x)\, dx$

$= \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right|_{x=0}^{x=1}$

$= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\Big|_{x=1} - (0-0+0)\Big|_{x=0}$

$= \frac{1}{4}$

พื้นที่บริเวณที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = (x-1)^3$ และ $y = x-1$

เท่ากับ พื้นที่ส่วนที่ 1 + พื้นที่ส่วนที่ 2 $= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{2}$

การตัดตัวเลือก

เพราะว่า $y = (x-1)^3$ และ $y = x-1$ เป็นเส้นโค้งที่ต่างกัน

ดังนั้นต้องมีพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งแน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

15. ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี

$$16x^2 - 32x + 16 = 400 - 25y^2$$

$$16(x^2-2x+1) + 25y^2 = 400$$

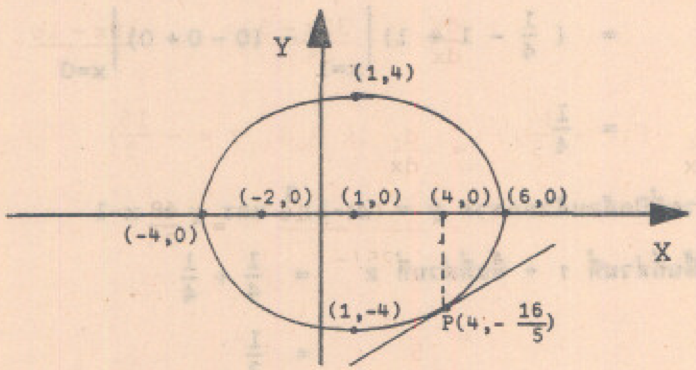
$$\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลาง (1,0) แกนเอกขนานแกน X

$a = 5$, $b = 4$ ดังนั้น $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$

จุดโฟกัส (-2,0) และ (4,0)

จุดยอด (-4,0) และ (6,0)



เพราะว่า $x_o > 0$ และ $y_o < 0$

เพราะฉะนั้น $P(x_o,y_o)$ อยู่ในควอดรันท์ที่ 4

ดังนั้นจุด P มีค่าของ $x_o = 4$

แทนค่า x = 4 ในสมการวงรี

$$16(4)^2 - 32(4) + 16 = 400 - 25y^2$$

$$256 - 128 + 16 = 400 - 25y^2$$

$$25y^2 = 256$$

$$y = \pm \frac{16}{5}$$

เพราะว่า $y_o < 0$ เพราะฉะนั้นพิกัด P คือ $(4,-\frac{16}{5})$

การหาสูตรความชัน $\frac{dy}{dx}$ ของวงรี

$$16x^2 - 32x + 16 = 400 - 25y^2$$

$$\frac{d}{dx}(16x^2 - 32x + 16) = \frac{d}{dx}(400 - 25y^2)$$

$$32x - 32 = -25\frac{dy^2}{dx} = -25(2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{32x - 32}{-50y} = \frac{16x - 16}{-25y}$$

$$\frac{dy}{dx}(P(4,-\frac{16}{5})) = \frac{dy}{dx}(x = 4, y = -\frac{16}{5})$$

$$= \frac{16(4) - 16}{-25(-\frac{16}{5})} = \frac{48}{80}$$

$$= \frac{3}{5}$$

สรุปความชันของวงรีที่จุด $P(4,-\frac{16}{5})$ คือ $\frac{3}{5}$

การตัดตัวเลือก โดยการวาดรูปของวงรีตามที่โจทย์กำหนด จะเห็นว่าส่วนโค้งของวงรีที่จุด $P(x_o,y_o)$ ซึ่ง $x_o = 4$ โดยไม่ต้องคำนวณค่า y_o ก็จะเห็นได้ว่า ความชันเส้นตรงที่สัมผัสวงรีที่จุดนี้ต้องมีความชันเป็นลบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

20. ตอบ 4.

แนวคิด $F(x) = \int \left(\int 4x^3 \, dx \right) dx$

$$= \int (x^4 + C) \, dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + Cx + K$$

เมื่อ C, K เป็นค่าคงตัว

1. ผิด เพราะว่ากำลังสูงสุดของ x ไม่เท่ากัน

2. ผิด เพราะว่า

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + Cx + K$$

$$F'(x) = x^4 + C$$

$$F''(x) = 4x^3 \neq 4x^3 + C \quad \text{เมื่อ } C \neq 0$$

3. ผิด เพราะว่า

$$x\,F(x) = \frac{x^6}{5} + Cx^2 + Kx$$

$$\neq \frac{x^5}{5} + Cx$$

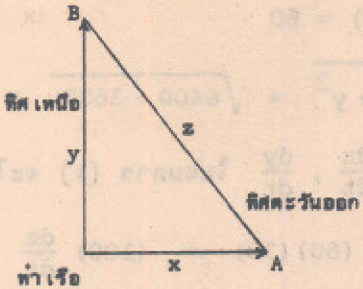
4. ถูกต้อง เพราะว่า

$$F'''(x) = 12x^2$$

และ $x\,F'''(x) = 12x^3$

27. ตอบ 1.

แนวคิด



x = ระยะทางจากท่าเรือไปยังเรือ A

y = ระยะทางจากท่าเรือไปยังเรือ B

z = ระยะห่างระหว่างเรือ A และเรือ B

ความสัมพันธ์ของตัวแปร x,y และ z คือ

$$x^2 + y^2 = z^2$$

ดังนั้น $\frac{d}{dt}(x^2+y^2) = \frac{d\,z^2}{dt}$

$$\frac{d\,x^2}{dt} + \frac{d\,y^2}{dt} = \frac{d\,z^2}{dt}$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 2z\frac{dz}{dt}$$

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = z\frac{dz}{dt} \qquad \text{............(1)}$$

เพราะว่าอัตราเร็วของเรือ A เท่ากับ 40 ดังนั้น $\frac{dx}{dt} = 40$

เพราะว่าอัตราเร็วของเรือ B เท่ากับ 30 ดังนั้น $\frac{dy}{dt} = 30$

เมื่อเวลา 14.00 น. จะได้ว่าเรือเดินทางมานาน 2 ชั่วโมง

ดังนั้น $x = 2(40) = 80$

$y = 2(30) = 60$

และ $z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6400 + 3600} = \sqrt{10000} = 100$

แทนค่า x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ ในสมการ (1) จะได้

$$(80)(40) + (60)(30) = (100)\frac{dz}{dt}$$

$$3200 + 1800 = 100\frac{dz}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = 50$$

สรุป เรือ A และ B ห่างออกจากกันด้วยอัตรา 50 กิโลเมตร/ชั่วโมง

และเรือ A และเรือ B ห่างกัน 100 กิโลเมตร

การตัดตัวเลือก ถึงแม้นักเรียนจะตอบไม่ได้ว่า $\frac{dz}{dt} = 50$

แต่อย่างน้อยคงจะใช้สามเหลี่ยมมุมฉากหาค่า z = 100 ได้

จึงสามารถตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

28. ตอบ 2.

แนวคิด จากโจทย์ $A = \int_0^3 (x-1)^4 \, d(x-1)$

พิจารณาค่าของ $\int (x-1)^4 \, d(x-1)$

แทนค่า $v = x-1$

จะได้ $\quad (x-1)^4 \, d(x-1) = \int v^4 \, dv = \dfrac{v^5}{5} + C$

$$= \frac{(x-1)^5}{5} + C$$

เพราะฉะนั้น $\quad A = \displaystyle\int_0^3 (x-1)^4 \, d(x-1) = \left.\frac{(x-1)^5}{5}\right|_{x=0}^{x=3}$

$$= \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{33}{5}$$

ตัวเลือก 1. ถูกต้อง

$$\int_0^3 (x-1)^4 \, dx = \int_0^3 (x^4-4x^3+6x^2-4x+1) \, dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x \right|_{x=0}^{x=3}$$

$$= \left(\frac{243}{5} - 81 + 54 - 18 + 3 \right) - (0)$$

$$= \frac{243}{5} - 42$$

$$= \frac{33}{5}$$

ตัวเลือก 2. ผิด

$$\int_0^3 x^4 \, dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{x=0}^{x=3} = \frac{3^5}{5} - 0 = \frac{243}{5}$$

ตัวเลือก 3. ถูกต้อง

$$\int_{-1}^2 x^4 \, dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_{x=-1}^{x=2} = \frac{2^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{33}{5}$$

ตัวเลือก 4. ถูกต้อง

$$\int_0^2 (x-1)^4\, d(x-1) = \frac{(x-1)^5}{5}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = \frac{2}{5}$$

$$\int_2^3 (x-1)^4\, dx = \int_2^3 (x^4-4x^3+6x^2-4x+1)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + x\right)\Bigg|_{x=2}^{x=3}$$

$$= \left(\frac{243}{5} - 81 + 54 - 18 + 3\right) - \left(\frac{32}{5} - 16 + 16 - 8 + 2\right)$$

$$= \frac{211}{5} - 36$$

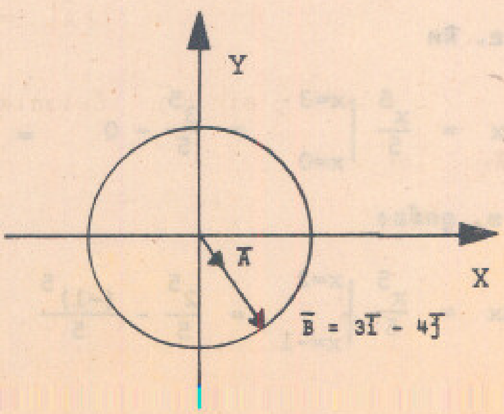
$$= \frac{31}{5}$$

ดังนั้น $\int_0^2 (x-1)^4\, d(x-1) + \int_2^3 (x-1)^4\, dx$

$$= \frac{2}{5} + \frac{31}{5} = \frac{33}{5} = A$$

29. ตอบ 3.

แนวคิด



เพราะว่า $|\vec{B}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{B}$ คือ $\dfrac{\vec{B}}{|\vec{B}|}$

ดังนั้น $\vec{A} = \frac{1}{5}\vec{B}$

$= \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

เพราะว่า $\vec{A} = \cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\sin\theta = -\frac{4}{5}$

ตัวเลือก 1. ถูกต้อง

เพราะว่า $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $\cos\theta = \frac{3}{5} > 0$ และ $\sin\theta = -\frac{4}{5} < 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

ตัวเลือก 2. ถูกต้อง

$$
\begin{aligned}
2\cos\theta\,\bar{i} + \sec^2\frac{\pi}{4}\sin\theta\,\bar{j} &= 2\cos\theta\,\bar{i} + (\sqrt{2})^2\sin\theta\,\bar{j} \\
&= 2\cos\theta\,\bar{i} + 2\sin\theta\,\bar{j} \\
&= 2(\cos\theta\,\bar{i} + \sin\theta\,\bar{j}) \\
&= 2\vec{A}
\end{aligned}
$$

$$\left|2\cos\theta\,\bar{i} + \sec^2\frac{\pi}{4}\sin\theta\,\bar{j}\right| = |2\vec{A}| = 2|\vec{A}| = 2$$

นั่นคือ $2\cos\theta\,\bar{i} + \sec^2\frac{\pi}{4}\sin\theta\,\bar{j}$ เป็นเวกเตอร์สองหน่วย

ในทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $3\bar{i} - 4\bar{j}$

ตัวเลือก 3. ผิด

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(-\frac{4}{5})}{(\frac{3}{5})} = -\frac{4}{3} \neq -\frac{4}{5}$$

เพราะฉะนั้น $\sin\theta \neq \tan\theta$

ตัวเลือก 4. ถูกต้อง เพราะว่า $\vec{A} = \frac{1}{5}\vec{B}$ เพราะฉะนั้น $\vec{B} = 5\vec{A}$

และ $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}+5\vec{A}| = |6\vec{A}| = 6|\vec{A}| = 6$

30. ตอบ 4.

แนวคิด

ข้อความ ก. ผิด ตัวอย่างเช่น

$\vec{A} = \bar{i}$, $\vec{B} = \bar{j}$, $\vec{C} = \bar{i}$

$\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$

$\alpha\vec{A}\cdot\beta\vec{B} = \bar{i}\cdot\bar{j} = 0$

$\beta\vec{B}\cdot\gamma\vec{C} = \bar{j}\cdot\bar{i} = 0$

แต่ $\alpha\vec{A}\cdot\gamma\vec{C} = \bar{i}\cdot\bar{i} = 1 \neq 0$

ข้อความ ข. ผิด ตัวอย่างเช่น

$\vec{A} = \bar{j}$, $\vec{B} = \bar{i}+\bar{j}$, $\vec{C} = \bar{i}$

$\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$

$\alpha\vec{A}\cdot\beta\vec{B} = \bar{j}\cdot(\bar{i}+\bar{j}) = 1 \neq 0$

$\beta\vec{B}\cdot\gamma\vec{C} = (\bar{i}+\bar{j})\cdot\bar{i} = 1 \neq 0$

แต่ $\alpha\vec{A}\cdot\gamma\vec{C} = \bar{j}\cdot\bar{i} = 0$

ตอนที่ 2

1. **ตอบ** $n = 11$

แนวคิด $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (8i^3 - 12i^2 + 6i - 1)$$

$$= 8\sum_{i=1}^{n} i^3 - 12\sum_{i=1}^{n} i^2 + 6\sum_{i=1}^{n} i - n$$

$$= 8\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 - 12\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right) + 6\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - n$$

$$= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n$$

$$= 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 - 4n^3 - 6n^2 - 2n + 3n^2 + 3n - n$$

$$= 2n^4 - n^2$$

$$= n^2(2n^2 - 1)$$

$$2^3 + 4^2 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = \sum_{i=1}^{n} (2i)^3 = 8\sum_{i=1}^{n} i^3$$

$$= 8\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$$

$$= 2n^2(n+1)^2$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2} = \dfrac{n^2(2n^2-1)}{2n^2(n+1)^2}$

$$\frac{241}{288} = \frac{2n^2-1}{2(n+1)^2}$$

$$(241)(2(n^2+2n+1)) = (2n^2-1)(288)$$

$$482n^2+964n+482 = 576n^2-288$$

$$94n^2-964n-770 = 0$$

$$47n^2-482n-385 = 0$$

$$(n-11)(47n+35) = 0$$

$$n = 11 , -\frac{35}{47}$$

เพราะว่า n **เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น** $n = 11$

วิธีที่ 2 จากกฎของอัตราส่วน $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ดังนั้นจาก $\dfrac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3} = \dfrac{241}{288}$

จะได้ $\dfrac{241+288}{288}$

$$= \frac{[1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3] + [2^3+4^3+\ldots+(2n)^3]}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3}$$

$$\frac{529}{288} = \frac{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(2n)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3}$$

เพราะว่า $1^3+2^3+3^3+\ldots+(2n)^3 = \sum_{i=1}^{2n} i^3$

$$= \sum_{i=1}^{2n} i^3 = \left(\frac{2n}{2}(2n+1)\right)^2 = n^2(2n+1)^2$$

และ $2^3 + 4^3 + 6^3 + \ldots + (2n)^3 = \sum_{i=1}^{n} (2i)^3$

$$= 8 \sum_{i=1}^{n} i^3 = 8\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 = 2n^2(n+1)^2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{529}{288} = \frac{n^2(2n+1)^2}{2n^2(n+1)^2}$

$$= \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2}$$

$$= \frac{4n^2+4n+1}{2n^2+4n+2}$$

$$(2n^2+4n+2)529 = (4n^2+4n+1)288$$

$$1058n^2+2116n+1058 = 1152n^2+1152n+288$$

$$94n^2-964n-770 = 0$$

ซึ่งจะได้ค่า $n = 11$ เหมือนวิธีที่ 1

วิธีที่ 3 จากเงื่อนไข $\frac{529}{288} = \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2}$

เราอาจหาค่า n ได้จาก $529 = (2n+1)^2$ และ $288 = 2(n+1)^2$

จาก $288 = 2(n+1)^2$

$$(n+1)^2 = 144$$

$$n+1 = 12$$

$$n = 11$$

และ $(2(11)+1)^2 = (23)^2 = 529$

สรุป $n = 11$ เหมือนกัน

2. ตอบ $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

แนวคิด ให้ $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

$b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

จะได้ $a^3 = 2+\sqrt{5}$ และ $b^3 = 2-\sqrt{5}$

$a^3+b^3 = (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) = 4$

$ab = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$

$= \sqrt[3]{4-5}$

$= -1$

ให้ $x = a+b$

$x^3 = (a+b)^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+b^3+3ab(a+b)$

$= 4+3(-1)(a+b)$

ดังนั้น $x^3 = 4-3x$

$x^3+3x-4 = 0$

$(x-1)(x^2+3) = 0$

เพราะว่า $x^2+3 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x-1 = 0$

$x = 1$

$a+b = 1$

สรุป $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

3. ตอบ $a = 2$

แนวคิด ให้ $f(x) = x^{13}+x+90$

$g(x) = x^2-x+a$

เพราะว่า $g(x)$ หาร $f(x)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $g(0)$ หาร $f(0)$ ลงตัว

และ $g(1)$ หาร $f(1)$ ลงตัว

เพราะว่า $g(0) = a$, $g(1) = a$, $f(0) = 90$, $f(1) = 92$

เพราะฉะนั้น a หาร 90 ลงตัว และ 9 หาร 92 ลงตัว

เพราะว่า ห.ร.ม.(90,92) = 2

เพราะฉะนั้น a ต้องหาร 2 ลงตัว

ดังนั้นค่า a ที่อาจเป็นไปได้คือ $a \in \{-2,-1,1,2\}$

เพราะว่า $g(-1)$ หาร $f(-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $g(-1) = a+2$ ต้องหาร $f(-1) = 88$ ลงตัว

เพราะว่า $((-2)+2) \nmid 88$ และ $(1+2) \nmid 88$

เพราะฉะนั้น $a \neq -2$ และ $a \neq 1$

เพราะว่า $g(-2) = 6+a$

$f(-2) = (-2)^{13}-2+90 = -8104$

และ $g(-2)$ หาร $f(-2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $6+a$ ต้องหาร 8104 ลงตัว

เพราะว่า $(6+2) \mid 8104$ แต่ $(6-1) \nmid 8104$

เพราะฉะนั้น $a = 2$

4. ตอบ $22a = 6$

แนวคิด โดยการลองนำตัวเลข 2,3,4,... ไปหาร 116,690,151

จะได้ $$\frac{116,690,151}{3} = 38,896,717$$

ลองนำเลข 2,3,4,... ไปหาร 427,863,887 จะได้

$$\frac{427,863,887}{11} = 38,896,717$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{116,690,151}{427,863,887} = \frac{(38,896,171)(3)}{(38,896,717)(11)} = \frac{3}{11}$$

$$= a$$

สรุป $22a = 6$

5. ตอบ $a = 3$

แนวคิด เพราะว่า x,y,z เป็นจำนวนเต็มบวก

และ $$x + y + z = xyz$$

$$xy + yz + zx = 11$$

ลอง $x = 1$,

$$1 + y + z = yz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$y + yz + z = 11 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$y + z = 11 - yz$$

แทนค่าใน (1) ;

$$1 + (11 - yz) = yz$$

$$12 = 2yz$$

$$yz = 6$$

ดังนั้นค่า y,z ที่เป็นไปได้คือ

$\{y,z\} = \{1,6\}$

หรือ $\{y,z\} = \{2,3\}$

ความหมายของเซต $\{x,y,z\}$ นั้น หมายถึงค่า x,y,z ทุกค่าต้องไม่เท่ากัน

ดังนั้นเลือก $\{y,z\} = \{2,3\}$

สรุป $\{x,y,z\} = \{1,2,3\}$

a เป็นสมาชิกค่ามากสุดของ $\{1,2,3\}$

ดังนั้น $a = 3$

ลอง $x = 4$

$$4 + y + z = yz \quad \text{..............(3)}$$

$$4y + yz + 4z = 11$$

$$4(y+z) + yz = 11 \quad \text{..............(4)}$$

(3) ; $\qquad y + z = yz - 4$

แทนค่าใน (4) ;

$$4(yz - 4) + yz = 11$$

$$5yz - 16 = 11$$

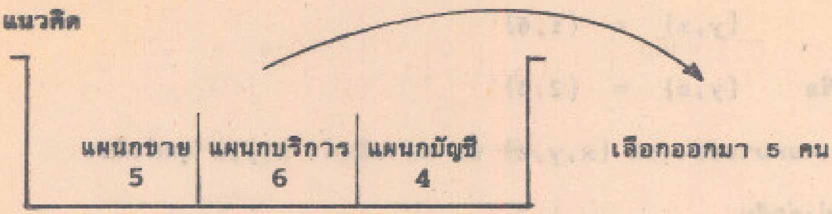
$$yz = \frac{27}{5}$$

แต่ y,z เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $yz = \frac{27}{5}$ ไม่ได้

สรุป $x = 4$ ไม่ได้

6. ตอบ 0.7226

แนวคิด



จำนวนวิธีเลือกคน 5 คนจาก 15 คน ทำได้ $\binom{15}{5} = 3003$

การได้พนักงานครบทุกแผนกพิจารณาแยกเป็นกรณีดังนี้

กรณี 1 แผนกขาย = 2 , แผนกบริการ = 2 , แผนกบัญชี = 1

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{1} = 10 \cdot 15 \cdot 4 = 600$

กรณี ๒ แผนกขาย = 2 , แผนกบริการ = 1 , แผนกบัญชี = 2

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{2}\binom{6}{1}\binom{4}{2} = 10 \cdot 6 \cdot 6 = 360$

กรณี ๓ แผนกขาย = 1 , แผนกบริการ = 2 , แผนกบัญชี = 2

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{1}\binom{6}{2}\binom{4}{2} = 5 \cdot 15 \cdot 6 = 450$

กรณี 4 แผนกขาย = 3 , แผนกบริการ = 1 , แผนกบัญชี = 1

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{3}\binom{6}{1}\binom{4}{1} = 10 \cdot 6 \cdot 4 = 240$

กรณี 5 แผนกขาย = 1 , แผนกบริการ = 3 , แผนกบัญชี = 1

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{1}\binom{6}{3}\binom{4}{1} = 5 \cdot 20 \cdot 4 = 400$

กรณี 6 แผนกขาย = 1 , แผนกบริการ = 1 , แผนกบัญชี = 3

มีวิธีเท่ากับ $\binom{5}{1}\binom{6}{1}\binom{4}{3} = 5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$

สรุปจำนวนวิธีที่ได้พนักงานทุกแผนกเท่ากับ

$600 + 360 + 450 + 240 + 400 + 120 = 2170$

ความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานครบทุกแผนก $= \dfrac{2170}{3003} = 0.7226$

วิธีที่ 2 ใช้การนับแบบเหตุการณ์ตรงกันข้าม

กรณีที่ 1 ได้แผนกเดียวเท่านั้น

1.1 ได้แผนกขายทุกคน ทำได้ $\binom{5}{5} = 1$ วิธี

1.2 ได้แผนกบริการทุกคน ทำได้ $\binom{6}{5} = 6$ วิธี

1.3 ได้แผนกบัญชี 5 คน เป็นไปไม่ได้

รวมกรณีที่ 1 ทำได้ 7 วิธี

กรณีที่ 2 ได้เฉพาะ 2 แผนกเท่านั้น

2.1 ได้แผนกขายและแผนกบริการ

จำนวนวิธีเท่ากับ $\binom{11}{5} = 462$

ในจำนวน 462 วิธีนี้เราต้องลบจำนวนที่ได้แผนกเดียวกัน

ออกอีก 7 วิธี

ดังนั้นกรณี 2.1 จะมีจำนวนวิธีเท่ากับ 462-7 = 455 วิธี

2.2 ได้แผนกขายและแผนกบัญชี

จำนวนวิธีเท่ากับ $\binom{9}{5} = 126$ วิธี

ในจำนวน 126 วิธีนี้เราต้องลบออกด้วยกรณีที่ได้แผนกขาย

ทั้งห้าคนซึ่งมี 1 วิธี

ดังนั้นกรณี 2.2 จะมีจำนวนวิธีเท่ากับ 126-1 = 125 วิธี

2.3 ได้แผนกบริการแผนกบัญชี

จำนวนวิธีเท่ากับ $\binom{10}{5} = 252$ วิธี

ในจำนวน 252 วิธีนี้เราต้องลบออกด้วยจำนวนที่ได้

แผนกบริการทั้งห้าคนซึ่งมี 6 วิธีออกไป

ดังนั้นกรณี 2.3 จะมีจำนวนวิธีเท่ากับ 252-6 = 246

รวมจำนวนวิธีตามกรณี 2 เท่ากับ $455 + 125 + 246 = 826$

จำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกคน 5 คน จาก 15 คน เท่ากับ 3003

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ได้คนครบทุกแผนก $= 3003 - 7 - 826$

$= 2170$

สรุปความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานครบทุกแผนก $= \frac{2170}{3003} = 0.7226$

7. **ตอบ** P(ได้ S_n เป็นจำนวนเต็มคู่) = 1

แนวคิด $S_n = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(2i+1) = \sum_{i=1}^{n} i(2i^2+3i+1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} (2i^3+3i^2+i)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= 2\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 + 3\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right) + \frac{n}{2}(n+1)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(n(n+1)+(2n+1)+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(n^2+n+2n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2+3n+2)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{2}$$

เพราะว่าทุกค่า $n \in U = \{1,2,3,\ldots,200\}$

จะได้ว่า 2 หาร $n(n+1)$ ลงตัว และ 2 หาร $(n+1)(n+2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 2 ต้องหาร $\frac{n(n+1)(n+1)(n+2)}{2}$ ลงตัว

นั่นคือ S_n เป็นจำนวนเต็มคู่ทุกค่า $n \in U$

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้สมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มคู่มีค่าเท่ากับ 1

8. **ตอบ** **จำนวนสมาชิกในเซต Y เท่ากับ 10**

แนวคิด

$$\det(A(x)) = (-1)^{1+2} x \begin{vmatrix} x & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+2 & 0 \\ 0 & x+2 & 0 & x+3 \\ 0 & 0 & x+3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-x)(-1)^{2+3}(x+2) \begin{vmatrix} x & x+1 & 0 \\ 0 & x+2 & x+3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $\det(A(x)) = 0$ **ทุกค่า** $x \in X$

$Y = \{x \in X \mid \det(A(x)) = 0\} = \{0,1,2,\ldots,9\}$

สรุป จำนวนสมาชิกในเซต Y **เท่ากับ** 10

ข้อสังเกต **จากแนวคิดในการหาค่ากำหนดข้างต้นจะได้ว่า**

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}\right) = 0$$

ทุกค่า a,b,c,d,e,f,g **และ** h **ที่เป็นจำนวนจริง**

9. ตอบ $\sum_{i=1}^{100} a_n = 804$

แนวคิด จากเงื่อนไขการกำหนดค่าของ a_n จะได้ว่า

$a_1 = 4$

$a_2 = 1$

$a_3 = 5^1 = 5$

$a_4 = 2$

$a_5 = 5^2 = 25$

$a_6 = 1$

$a_7 = 5^1 = 5$

$a_8 = 2$

$\vdots$

จะเห็นได้ว่าค่าของ a_n เกิดการซ้ำกันดังนี้

$a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 5$, $a_4 = 2$, $a_5 = 25$

$a_6 = 1$, $a_7 = 5$, $a_8 = 2$, $a_9 = 25$

$\vdots$

$a_{4k-2} = 1$, $a_{4k-1} = 5$, $a_{4k} = 2$, $a_{4k+1} = 25$

เมื่อ $k = 1,2,3,...$

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100}$$

$$= a_1 + (a_2 + a_3 + a_4 + a_5)$$

$$+ (a_6 + a_7 + a_8 + a_9)$$

$$\vdots$$

$$+ (a_{94} + a_{95} + a_{96} + a_{97})$$

$$+ a_{98} + a_{99} + a_{100}$$

$$= 4 + \left.\begin{array}{l}(1 + 5 + 2 + 25) \\ + (1 + 5 + 2 + 25) \\ \vdots \\ + (1 + 5 + 2 + 25)\end{array}\right] \longleftarrow 24 \text{ ชุด}$$

$$+ 1 + 5 + 2$$

$$= 4 + 24(33) + 8 \quad = \quad 804$$

10. ตอบ 5100 บาท

แนวคิด เปลี่ยนหน่วยของค่าซ่อมบำรุง เป็นหน่วยร้อยบาท

X	Y	XY	X^2
4	25	100	16
7	35	245	49
3	15	45	9
4	20	80	16
2	10	20	4
20	105	490	94

สมการ $\hat{y} = mx + c$

มีสมการปกติเป็น

$$m \Sigma x + nc = \Sigma y$$

$$m \Sigma x^2 + c \Sigma x = \Sigma xy$$

$$20m + 5c = 105 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$94m + 20c = 490 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$4 \times (1)$; $$80m + 20c = 420 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$(2)-(3)$; $$14m = 70$$

$$m = 5$$

จาก (1) ; $$20(5) + 5c = 105$$

$$5c = 105 - 100$$

$$= 5$$

$$c = 1$$

สรุป $\hat{y} = 5x + 1$

เมื่อ $x = 10$ จะได้ $\hat{y} = 5(10) + 1 = 51$

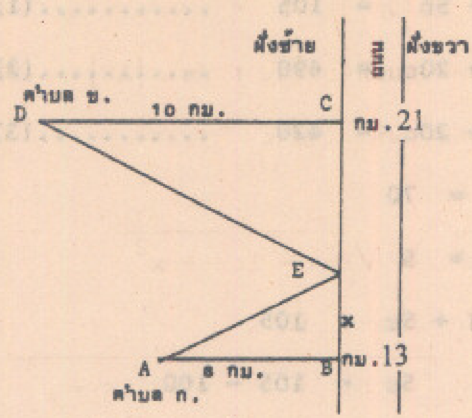
สรุป ค่าซ่อมบำรุง = 51 ร้อยบาท

= 5100 บาท

ตอนที่ 3

ตอบ $1600000\sqrt{5}$ บาท

แนวคิด เขียนรูปประกอบตามข้อกำหนดของโจทย์



ให้พิกัดของจุด A,B,C,D ดังภาพ

ให้ E เป็นตำแหน่งของจุดที่เป็นที่ทำการไปรษณีย์

สมมติ x เป็นความยาว BE

จากข้อกำหนดของโจทย์จะได้ว่า $|AB| = 6$

$|BC| = 8$

$|CD| = 10$

$|BE| = x$ จะได้ว่า $|CE| = 8 - x$

เพราะว่า ABE และ DEC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะฉะนั้น $|DE|^2 = |EC|^2 + |CD|^2 = (8-x)^2 + 10^2$

$|DE| = \sqrt{(8-x)^2 + 10^2} = \sqrt{164 - 16x + x^2}$

และ
$$|AE|^2 = |AB|^2 + |BE|^2$$
$$= 6^2 + x^2$$
$$|AE| = \sqrt{6^2 + x^2} = \sqrt{36 + x^2}$$

ถนนจากตำบล ก. และตำบล ข. ไปที่ทำการไปรษณีย์ต้องคิดเป็นเส้นตรงทั้ง 2 เส้นจึงจะเป็นระยะที่สั้นกว่าแบบอื่น ๆ

เพราะฉะนั้น ความยาวของถนนที่จะสร้างเท่ากับ $|AE| + |DE|$

ให้ f เป็นความยาวของถนนที่ต้องสร้าง

$$f = |AE| + |DE|$$
$$= \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{164 - 16x + x^2}$$

จะเห็นได้ว่า f เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x

ดังนั้นให้ $f(x) = \sqrt{36 + x^2} + \sqrt{164 - 16x + x^2}$

จากเงื่อนไขของค่า x จะได้ว่า $0 \leqslant x \leqslant 8$

สรุป ปัญหาขณะนี้คือการหาค่าต่ำสุดของ $f(x)$ เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant 8$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{36+x^2} + \sqrt{164-16x+x^2}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(36+x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(164-16x+x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}(36+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(36+x^2)$$
$$+ \frac{1}{2}(164-16x+x^2)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(164-16x+x^2)$$
$$= \frac{x}{\sqrt{36+x^2}} + \frac{(-16+2x)}{2\sqrt{164-16x+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{36+x^2}} + \frac{x-8}{\sqrt{164-16x+x^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{164-16x+x^2} + (x-8)\sqrt{36+x^2}}{\sqrt{36+x^2}\,\sqrt{164-16x+x^2}}$$

การหาค่าวิกฤต

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x\sqrt{164-16x+x^2} + (x-8)\sqrt{36+x^2}}{\sqrt{36+x^2}\,\sqrt{164-16x+x^2}} = 0$$

$$x\sqrt{164-16x+x^2} + (x-8)\sqrt{36+x^2} = 0$$

$$x\sqrt{164-16x+x^2} = -(x-8)\sqrt{36+x^2}$$

$$x^2(164-16x+x^2) = (x-8)^2(36+x^2)$$

$$x^4-16x^3+164x^2 = (x^2-16x+64)(36+x^2)$$

$$= 36x^2+x^4-576x-16x^3+2304+64x^2$$

$$= x^4-16x^3+100x^2-576x+2304$$

$$64x^2+576x-2304 = 0$$

$$x^2+9x-36 = 0$$

$$(x-3)(x+12) = 0$$

เพราะว่า $0 \leqslant x \leqslant 8$ เพราะฉะนั้น $x+12 \neq 0$

ดังนั้น $x-3 = 0$

$$x = 3$$

เพราะว่า $0 \leqslant x \leqslant 8$

เพราะฉะนั้น จุดวิกฤตของ f คือ $x = 0, 3$ และ 8

ที่ $x = 0, 3, 8$

$$f(0) = \sqrt{36} + \sqrt{164} = 6 + 2\sqrt{41} \simeq 18.80$$

$$f(3) = \sqrt{36+9} + \sqrt{164-48+9} = \sqrt{45} + \sqrt{125}$$

$$= 3\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 3\sqrt{5} \simeq 17.89$$

$$f(8) = \sqrt{36+64} + \sqrt{164-128+64}$$

$$= \sqrt{100} + \sqrt{100} = 20$$

ขณะนี้จะเห็นได้ว่า $f(3) < f(0) < f(8)$

เพราะว่าจุดวิกฤต $(0,f(0))$, $(3,f(3))$ และ $(8,f(8))$ เป็นจุดที่จะให้ค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของ f บนช่วง $[0,8]$

และ $f(3) < f(0) < f(8)$

เพราะฉะนั้น $f(3)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[0,8]$

เมื่อ $x = 3$

จะได้ว่าต้องสร้างที่ทำการไปรษณีย์ที่กิโลเมตรที่ $13+3 = 16$

ความยาวถนนที่ต้องสร้างเท่ากับ $f(3) = 8\sqrt{5}$

ราคาก่อสร้าง 200,000 บาท/กิโลเมตร

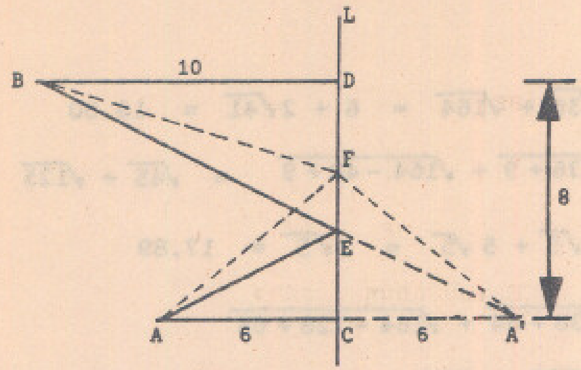
สรุปต้องจัดสรรงบประมาณ $= 200{,}000 \times f(3)$

$$= 200{,}000 \times 3\sqrt{5}$$

$$= 1{,}600{,}000\sqrt{5} \text{ บาท}$$

วิธีที่ 2 การแสดงว่าจุด E ห่างจากจุด C 3 กิโลเมตร สามารถ

ทำได้โดยใช้เหตุผลทางเรขาคณิต



ให้เส้นตรง L เป็นแนวถนน

C เป็นกิโลเมตรที่ 13

D เป็นกิโลเมตรที่ 21

ให้ F เป็นจุดระหว่าง D และ C บนเส้นตรง L

ลาก CA' ตั้งฉากกับเส้นตรง L และ $|CA'| = 6$

ลากเส้นตรง $A'B$ ตัดกับเส้นตรง L ที่จุด E

ต่อไปเราจะแสดงข้อพิสูจน์ว่า $|AE| + |BE|$ เป็นระยะที่สั้นที่สุด

นั่นคือต้องแสดงว่าทุกจุด F บนเส้นตรง L ที่อยู่ระหว่างจุด D และ C

$$|AE| + |BE| \leqslant |AF| + |BF|$$

ให้ F เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L ระหว่างจุด D และ C

เพราะว่า CF เป็นด้านร่วม

$$A\hat{C}F = A'\hat{C}F = 90^\circ$$

$$|AC| = |A'C| = 6$$

เพราะฉะนั้น Δ ACF และ Δ A'CF เหมือนกันทุกประการ

ในทำนองเดียวกัน Δ ACE และ Δ A'CE เหมือนกันทุกประการ

ในสามเหลี่ยม A'BF

$$|A'B| \leqslant |BF| + |FA'|$$

เพราะว่า $|A'B| = |A'E| + |EB|$

เพราะฉะนั้น $|A'E| + |EB| \leqslant |BF| + |FA'|$

เพราะว่า Δ ACE , Δ A'CE เหมือนกันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $|A'E| = |AE|$

ดังนั้น $|AE| + |BE| \leqslant |BF| + |FA'|$

เพราะว่า Δ ACF และ Δ A'CF เหมือนกันทุกประการ

เพราะฉะนั้น $|FA| = |FA'|$

ดังนั้น $|AE| + |BE| \leqslant |BF| + |AF|$

สรุป E เป็นจุดที่ทำให้ $|AE| + |BE|$ สั้นที่สุด

การหาค่าของ $|CE|$

พิจารณา Δ ACE และ Δ BDE

$B\hat{D}E = A\hat{C}E = 90^\circ$ ....(1)

$B\hat{E}D = C\hat{E}A'$ (มุมตรงข้าม)

$A\hat{E}C = C\hat{E}A'$ (Δ AEC $\cong$ Δ A'EC)

ดังนั้น $A\hat{E}C = B\hat{E}D$ ....(2)

$$E\hat{B}D = 90^\circ - B\hat{E}D$$

$$= 90^\circ - A\hat{E}C$$

$$= E\hat{A}C \qquad \text{............(3)}$$

จาก (1),(2) และ (3) จะได้ Δ ACE คล้ายกับ Δ BDE

เพราะฉะนั้น

$$\frac{|BE|}{|AE|} = \frac{|DE|}{|CE|} = \frac{|BD|}{|AC|}$$

$$|AC| = 6$$

$$|BD| = 10$$

$$|DE| = |CD| - |EC| = 8 - |EC|$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{8 - |EC|}{|EC|} = \frac{10}{6}$$

$$48 - 6|EC| = 10|EC|$$

$$48 = 16|EC|$$

$$|EC| = 3$$

สรุปจุด E ห่างจากจุด C 3 กิโลเมตร

วัฏจักร

โครงการแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์

ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 5

(Wattachak Math & Sciences Championship 1996)

25 – 26 มกราคม 2540

คณิตศาสตร์

วันเสาร์ที่ 25 มกราคม 2540 เวลา 08.00-11.00 น.

คำแนะนำ

ข้อสอบมีทั้งหมด 3 ตอน

ตอนที่ 1 เป็นข้อสอบแบบตัวเลือก 30 ข้อๆละ 2 คะแนน รวม 60 คะแนน

ตอนที่ 2 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ 10 ข้อๆละ 3 คะแนน รวม 30 คะแนน

ตอนที่ 3 เป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำ 1 ข้อ 10 คะแนน

รวมทั้งหมด 100 คะแนน

ตอนที่ 1 จงเลือกคำตอบที่ถูกต้อง

1. กำหนดให้ A และ B เป็นสับเซตใดๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ U พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก.) $A \cap B' \subset B \cap A'$

   (ข.) $A \subset B$

   (ค.) $(B - A)' \subset (A - B)'$

   ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. (ก.) และ (ข.) เท่านั้นที่สมมูลกัน
   2. (ก.) และ (ค.) เท่านั้นที่สมมูลกัน
   3. (ข.) และ (ค.) เท่านั้นที่สมมูลกัน
   4. (ก.), (ข.) และ (ค.) ต่างก็สมมูลกัน

(ข้อแนะนำ X สมมูล Y ก็ต่อเมื่อ $X \leftrightarrow Y$ เป็นสัจนิรันดร์)

2. กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\cos x}\}$

   a = ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเรนจ์ของ r

   b = ขอบเขตล่างค่ามากสุดของเรนจ์ของ r

   ค่าของ $a - 2b$ เท่ากับเท่าใด

   1. 0   2. 3

   3. 6   4. 9

3. กำหนดความสัมพันธ์

   $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

   เซตในตัวเลือกใด <u>ไม่เป็นสับเซต</u> ของ $D_r \cap R_r$

   1. $(2, \infty)$ 2. $(-\infty, -1)$

   3. $(0, 2)$ 4. $(-1, 0)$

4. กำหนด $f(x) = 2x - 3$ และ $D_f = [2, 5]$

ถ้า $g^{-1}(f(x)) = 3x + 2$

แล้ว ตัวเลือกใดถูกต้อง

1. $g(x) = 6x - 7$
2. $g(2) = -3$
3. $g^{-1}(3) = 1$
4. $g^{-1}(x) = x + 2$

5. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริงบวก

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ค่าความจริงของ $\forall x \forall y [x^{\log y} = y^{\log x}]$ เป็นจริง

(ข.) ค่าความจริงของ $\forall x \forall y [(\log x)^y = (\log y)^x]$ เป็นจริง

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. (ข.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
3. (ก.) และ (ข.) ถูกต้อง
4. (ก.) และ (ข.) ผิด

6. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ

กำหนด $n = \{n-1, n-2, ..., 1, 0\}$

นั่นคือ $1 = \{0\}$, $2 = \{1, 0\}$, $3 = \{2, 1, 0\}$, ...

สำหรับจำนวนเต็มบวก m, n ใดๆ

กำหนด $<m, n> = \{\{m\}, \{m, n\}\}$

$\cap <m, n> = \{m\} \cap \{m, n\}$

$\cup <m, n> = \{m\} \cup \{m, n\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. $\cap <3, 4> = \{\{1, 2, 0\}\}$
2. $\cup <3, 4> = \{ 3, 4 \}$
3. $\cap <3, 4> = \cap <4, 3>$
4. $\cup <3, 4> = \cup <4, 3>$

7. **บทนิยาม สำหรับ $x \in \mathbb{R}$**

$[x]$ คือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $[x+y] \le [x]+[y]$ ทุก จำนวนจริง x, y

(ข.) $[xy] = [x][y]$ ทุก จำนวนเต็ม x, y

(ค.) $[-x] = -[x]$ ทุก จำนวนตรรกยะ x, y

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ
2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ
4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

8. จำนวนเต็มบวก k ที่มากที่สุดที่ทำให้ 13^k หาร $2539!$ ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 199
2. 201
3. 210
4. 211

9. $X = \{1, 2, 3, ..., 100\}$

$Y = \{ x \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^x + 2^x + 3^x \text{ ลงตัว} \}$

จำนวนสมาชิกของเซต Y เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 2
3. 4
4. 6

10. กำหนดให้ $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

และ $x = 1000a + 100b + 10c + d$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ถ้า 9 หาร x ลงตัวแล้ว 9 หาร a + b + c + d ลงตัว

(ข.) ถ้า 9 หาร x ลงตัวแล้ว 9 หาร ผลคูณของ a,b,c,d ลงตัว

(ค.) ถ้า 9 หาร x ลงตัวแล้ว 9 หาร 1000d+100c+10b+a ลงตัว

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ
2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ
4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

11. เส้นโค้ง P เป็นกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (5, 0) และ (−5, 0) เป็นจุดโฟกัสความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 8 ถ้าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับไฮเพอร์โบลา P ที่จุด (5, k) แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด

1. $(\frac{4}{5}, 0)$
2. $(\frac{6}{5}, 0)$
3. $(\frac{8}{5}, 0)$
4. $(\frac{16}{5}, 0)$

12. เส้นโค้ง P เป็นกราฟของพาราโบลาซึ่งผ่านจุด (−4, 0) , (5, 0) และ (0, −20) L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลาข้างต้น และขนานกับแกน X พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง L และพาราโบลา P มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{3}$
4. $\frac{1}{6}$

13. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $1+\sin\theta+\sin^2\theta+\sin^3\theta+ \dots = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

(ข.) $1-\cos 2\theta+\cos^2 2\theta-\cos^3 2\theta+\ldots=\dfrac{1}{2\cos 4\theta}$ ทุกค่า $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. (ก.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. (ข.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
3. (ก.) และ (ข.) ผิดทั้งสองข้อ
4. (ก.) และ (ข.) ถูกต้องทั้งสองข้อ

14. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $f(x) = \arcsin(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 1]$

(ข.) $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$

(ค.) $h(x) = \arccos(x^2)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, 1)$

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ
2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ
4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

15. กำหนดให้ $f(\log_{16} x) = \sqrt[16]{x}$ ค่าของ $\sum\limits_{x=4}^{15} f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $14(\sqrt{2}+1)$
2. $7(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}-1)$
3. $14(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$
4. $7(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}-1)$

16. จุด $A(-1, 2)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C ซึ่งมีรัศมี 3 หน่วย $P(-4,-4)$ เป็นจุดนอกวงกลม C กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และห่างจาก A เป็นระยะทาง $\frac{3}{\sqrt{2}}$ หน่วย ถ้า (p, q) เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับวงกลม C แล้ว $p + q$ เท่ากับเท่าใดได้บ้าง

1. $\frac{18}{5}$
2. 0
3. $\frac{8}{5}$
4. 2

17. กำหนด $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X, Y และ Z ทางด้านบวกของระบบสามมิติ ตามลำดับ

$$\bar{V}_1 = a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}$$
$$\bar{V}_2 = a_2\bar{i} + b_2\bar{j} + c_2\bar{k}$$

กำหนด $\alpha V_1 = \alpha a_1\bar{i} + \alpha b_1\bar{j} + \alpha c_1\bar{k} \quad ,\alpha \in R$

$$\bar{V}_1 + \bar{V}_2 = (a_1 + a_2)\bar{i} + (b_1 + b_2)\bar{j} + (c_1 + c_2)\bar{k}$$
$$\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2$$
$$\bar{V}_1 \times \bar{V}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ถ้า $\bar{V}_1 = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{V}_2 = \bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$

แล้ว $(\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2)(\bar{V}_1 \times \bar{V}_2)$ คือเวกเตอร์ใด

1. $2\bar{i} + 4\bar{j} + 10\bar{k}$
2. $-2\bar{i} - 4\bar{j} - 10\bar{k}$
3. $2\bar{i} - 4\bar{j} + 10\bar{k}$
4. $-2\bar{i} + 4\bar{j} - 10\bar{k}$

18. สำหรับ $\bar{V} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบสามมิติ ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{V}$ เขียนแทนด้วย $\|\bar{V}\|$ กำหนดโดย

$$\|\bar{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

นอกจากนี้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{V}$ คือ $\dfrac{\bar{V}}{\|\bar{V}\|}$

กำหนด $\vec{V}_1 = 3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{V}_2 = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\dfrac{-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}}{3\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}{3\sqrt{2}}$

3. $\dfrac{-\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{19}}$ 4. $\dfrac{\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{19}}$

19. $A = \{z \in C \mid 1 \le |z| \le 2\}$

ถ้าเขียนกราฟของ A บนระนาบ

แล้วพื้นที่อาณาบริเวณของ A เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. π 2. 2π

3. 3π 4. 4π

20. กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ของจำนวนเชิงซ้อนโดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 4 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}$$

ผลบวกของสมาชิกของเมตริกซ์ A^{-1} เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{9 + 3i}{25}$ 2. $\dfrac{9 - 3i}{25}$

3. $\dfrac{4 - 3i}{25}$ 4. $\dfrac{4 + 3i}{25}$

21. กำหนด $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ผลบวกของสมาชิกทุกตัวของเมตริกซ์ M^{100} เท่ากับเท่าใด

1. 8^{33}
2. $3(8^{33})$
3. 2^{100}
4. $3(2^{100})$

22. การเล่นเกมส์ทายตัวเลขจำนวนเต็ม 4 หลักที่ไม่มีการซ้ำ โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่เป็นเลขศูนย์ ความน่าจะเป็นที่จะทายตัวเลขได้ถูกต้องทั้ง 4 ตัว แต่หลักของตัวเลขผิดไปเพียง 2 หลักเท่านั้น มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{126}$
2. $\frac{1}{252}$
3. $\frac{1}{504}$
4. $\frac{3}{504}$

23. จำนวนเต็ม 9 หลัก ที่ประกอบด้วยเลข 1, 2, 3, ..., 9 ซึ่งไม่มีตัวเลขในหลักใดซ้ำกันและหลักที่เป็นจำนวนเฉพาะไม่อยู่ติดกัน มีทั้งหมดกี่ตัว

1. 14400
2. 28800
3. 43200
4. 86400

24. กำหนด $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

ข้อความใดต่อไปนี้ <u>ไม่</u> ถูกต้อง

1. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$
2. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 0$
3. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin 3\theta}{\theta} = 3$
4. $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta} = 0$

25. จากอนุกรมเรขาคณิต จะได้ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$

นอกจากนี้ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$

ค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ เท่ากับพจน์ใดต่อไปนี้

1. $\frac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$
2. $\frac{n}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$
3. $\frac{x}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$
4. $\frac{n}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$

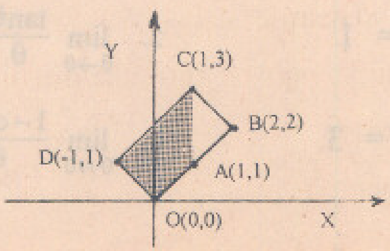
26. กำหนดให้

$\frac{d}{d\theta} \sin\theta = \cos\theta$ และ $\frac{d}{d\theta} \cos\theta = -\sin\theta$ ทุก $\theta \in R$

กำหนด $f(\theta) = \frac{d^2}{d\theta^2} (\sin(\cos\theta))$ ค่าของ $f(\pi)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sin(1)$
2. $-\sin(1)$
3. $\cos(1)$
4. $-\cos(1)$

27.



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม OACD เท่ากับเท่าใด

1. $\int_{-1}^{1} (x+2-|x|)\,dx$ 2. $\int_{-1}^{1} (|x|+x+2)\,dx$

3. $\int_{-1}^{1} (|x|-x+2)\,dx$ 4. $\int_{-1}^{1} (|x|-2)\,dx$

28. ข้อมูลอายุ (หน่วยเป็นปี) ของกลุ่มนักเรียน 4 กลุ่ม ต่อไปนี้

<u>กลุ่มที่ 1</u> 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18,19, 19, 20

<u>กลุ่มที่ 2</u> 16, 16, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 19, 21

<u>กลุ่มที่ 3</u> 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 20

<u>กลุ่มที่ 4</u> 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19,19, 19

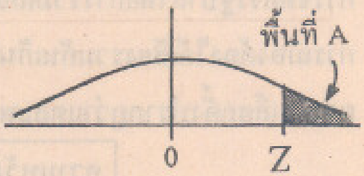
อายุของกลุ่มนักเรียนกลุ่มใดมีความแปรปรวนมากที่สุด

1. กลุ่มที่ 1 2. กลุ่มที่ 2

3. กลุ่มที่ 3 4. กลุ่มที่ 4

29. กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ

พื้นที่ A	Z
0.1	1.282
0.05	1.645
0.01	2.326



ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีผู้เข้าสอบทั้งหมด 573 คน คะแนนเต็มของข้อสอบเท่ากับ 40 คะแนน คะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 28 คะแนน ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 9 กลุ่มผู้เข้าสอบที่มีคะแนนไม่ต่ำกว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 90 จะได้รับรางวัล

ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. มีผู้ได้รับรางวัลทั้งหมด 10 คน
2. คนที่ได้คะแนนสอบมากกว่า 32 คะแนน ต้องได้รับรางวัล
3. ผู้เข้าสอบที่ได้คะแนนสูงสุดสอบได้คะแนนเท่ากับ 36 คะแนน
4. คะแนนต่ำสุดของกลุ่มผู้ที่ได้รับรางวัลเท่ากับ 33 คะแนน

30. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ค่าเฉลี่ยของข้อมูลต้องมีค่ามากกว่าศูนย์

(ข.) เปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 ต้องเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

(ค.) คะแนนมาตรฐานมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับ 1

ตัวเลือกที่สรุปได้ถูกต้องคือ

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ
2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ
4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

ตอนที่ 2 จงเติมคำตอบที่ถูกต้องในกระดาษคำตอบ

1. การจัดตั้งรัฐบาลโดยการรวมเสียงสนับสนุนของ ส.ส. จากแต่ละพรรคการเมืองต้องได้เสียงรวมกันเกินกึ่งหนึ่งของ ส.ส. ทั้งหมด ผลการเลือกตั้งปรากฏว่าแต่ละพรรคการเมืองได้ ส.ส. ดังนี้

ความหวังใหม่	125
ประชาธิปัตย์	123
ชาติพัฒนา	52
ชาติไทย	38
กิจสังคม	20
ประชากรไทย	18

เอกภาพ	8
เสรีธรรม	5
มวลชน	2
พลังธรรม	1
ไท	1

การรวมเสียงของพรรคการเมืองเพื่อจัดตั้งรัฐบาลโดยมีเงื่อนไขว่า จำนวนพรรคการเมืองต้องไม่เกิน 4 พรรค ทำได้กี่วิธี

2. ในกระทรวงกีฬาประกอบด้วยหน่วยงานระดับกรมอยู่ทั้งหมด 9 กรม มีผู้บริหารระดับรัฐมนตรีเข้ามาบริหารงาน 3 คนคือรัฐมนตรีว่าการกระทรวงกีฬา 1 คนและรัฐมนตรีช่วยว่าการกระทรวงกีฬา 2 คน จำนวนวิธีที่จะจัดหน่วยงานระดับกรมให้รัฐมนตรีรับผิดชอบมีทั้งหมดกี่วิธีภายใต้เงื่อนไขว่ารัฐมนตรีทุกคนต้องมีงานรับผิดชอบอย่างน้อยหนึ่งกรม และ รัฐมนตรีว่าการต้องมีกรมในความรับผิดชอบมากกว่ารัฐมนตรีช่วยว่าการแต่ละคน

3. กำหนด $\log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477, \log 7 = 0.845$ ค่าของ $\log(\sqrt[5]{10!})$ เท่ากับเท่าใด (ตอบทศนิยม 3 ตำแหน่ง)

4. ทักษิณมีที่ดินแปลงหนึ่งมีลักษณะเป็นรูปห้าเหลี่ยม เมื่อเขียนแผนที่ในระบบพิกัดฉากมีหน่วยเป็นวาจุดยอดของแปลงที่ดินเป็นดังนี้ (20,10), (30,40) , (40,60) , (50,50) และ (60,20) ทักษิณต้องการสร้างศาลพระภูมิที่จุด (x,y) ในที่ดินที่มีอยู่นี้ซึ่งผู้รับเหมาคิดค่าใช้จ่ายเท่ากับ $P(x, y)$ โดยที่ $P(x, y) = 500x - 300y$ บาท เมื่อสร้างศาลพระภูมิแล้วทักษิณต้องการปูหญ้าบนที่ดินทั้งหมดผู้รับเหมาคิดค่าปูหญ้า

ตารางวาละ 80 บาท

ทักษิณเสียค่าก่อสร้างศาลพระภูมิและค่าปูหญ้าน้อยที่สุดเท่าใด

5. กำหนดให้

$$P(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \sin\theta_1+\cos\theta_2+\tan\theta_3+\operatorname{cosec}\theta_1+\sec\theta_2+\cot\theta_3$$

$$A = \{\ P(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \tfrac{\pi}{2})\}$$

ค่าขอบเขตล่างใหญ่ที่สุดของ A เท่ากับเท่าใด

6. สมรักษ์และวิชัยเล่นเกมส์ทายตัวเลขจำนวนเต็มสี่หลักที่ไม่มีการซ้ำกัน โดยที่สมรักษ์เป็นผู้กำหนดตัวเลข วิชัยเป็นผู้ทายตัวเลข เมื่อวิชัยทายตัวเลขแต่ละครั้งแล้วสมรักษ์ต้องบอกว่าตัวเลขที่วิชัยทายนั้นมีจำนวนตัวเลขที่ถูกต้องกี่ตัว และจำนวนตัวเลขที่ตรงกับหลักของตัวเลขที่สมรักษ์กำหนดไว้กี่ตัว จากข้อมูลของผลการทายตัวเลขของวิชัยเป็นดังนี้

ครั้งที่	ตัวเลขที่วิชัยทาย	คำเฉลยของสมรักษ์	
		จำนวนตัวเลขที่ถูก	จำนวนหลักที่ตรง
1	1234	1	1
2	5678	1	1
3	9012	3	0
4	0926	2	1
5	1950	3	3
6	????		

จากข้อมูลในตารางข้างบนนี้ ตัวเลขที่สมรักษ์กำหนดไว้คือตัวเลขใด

7. กำหนดให้ $p(x) = x^6+4x^5+6x^4+8x^3+9x^2+4x+4$

ถ้า $q(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D$ และ $q^2(x) = p(x)$

แล้ว $A^2+B^2+C^2+D^2$ เท่ากับเท่าใด

8. กำหนด $f(\log_{16} x) = \sqrt[16]{x}$ และ $g(\sqrt[12]{x}) = \log x$

ค่าของ $(f \circ g)(10)$ เท่ากับเท่าใด

9. กำหนด $\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = -10$

และ $A = \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g-4a & h-4b & i-4c \\ d & e & f \end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(A)$ เท่ากับเท่าใด

10. กำหนด $F(x, 1) = x + 1$

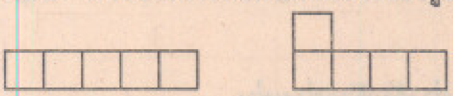
$F(1, x) = 2x$

$F(x+1, y+1) = F(F(x, y+1), y)$

ค่าของ $F(2, 2)$ เท่ากับเท่าใด

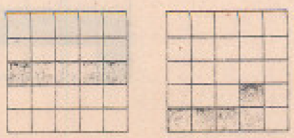
ตอนที่ 3 จงแสดงวิธีทำในกระดาษคำตอบ

รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสห้ารูปแต่ละรูปมีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เมื่อนำด้านข้างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งห้ารูปนั้นมาต่อกันทั้งหมดจะได้รูปแบบต่างๆกันหลายรูปแบบ ตัวอย่างการต่อกันด้านข้างของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งห้ารูปเช่น



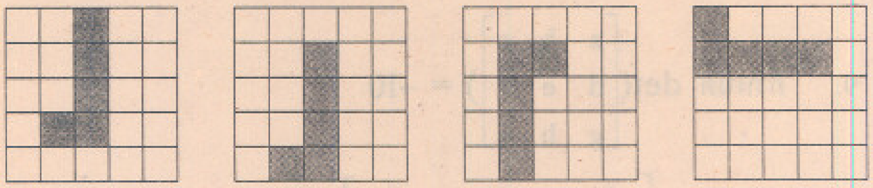
ข้อตกลงในการหาคำตอบ

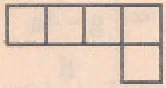
1. ให้แสดงการต่อรูปด้วยการแรเงาในตารางขนาด 5X5 ตัวอย่างเช่น



2. รูปสองรูปที่พลิกกลับ หมุนหรือเลื่อน แล้วได้รูปเดียวกันถือว่าเป็น

รูปแบบเดียวกันเช่น

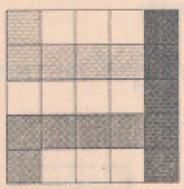


ถือว่ารูปแบบเดียวกันกับการต่อแบบ 

จงตอบคำถามทั้งหมด 5 ข้อต่อไปนี้

1. มีรูปแบบการต่อรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งห้ารูปที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่รูปแบบ
2. จงเขียนรูปแบบที่แตกต่างกันทั้งหมด
3. ในบรรดารูปแบบที่แตกต่างกันทั้งหมดจากข้อ 2. มีกี่รูปแบบที่พับตามรอยต่อแล้วได้เป็นกล่องที่ไม่มีฝา
4. จงใส่สัญลักษณ์ * กำกับที่รูปของคำตอบในข้อ 2. ที่สามารถพับตามรอยต่อแล้วได้เป็นกล่องที่ไม่มีฝา
5. จงนำรูปแบบที่มีในข้อ 2. ทั้งหมดที่ไม่สามารถพับตามรอยต่อให้เป็นกล่องได้มาต่อกันให้ได้รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยให้เขียนรูปแสดงรอยต่อกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าอย่างชัดเจน

ให้แสดงการต่อกันด้วยวิธีการแรเงาที่ต่างกันตัวอย่างเช่น



เฉลยข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 5

ตอนที่ 1

1. **ตอบ 4.**

แนวคิด $A \cap B' = A - B$

$B \cap A' = B - A$

$(B - A)' = (B \cap A')' = B' \cup A$

$(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

เพราะว่า $X \subset Y$ ก็ต่อเมื่อ $Y' \subset X'$

เพราะฉะนั้น $A \cap B' \subset B \cap A' \leftrightarrow (B \cap A')' \subset (A \cap B')'$

$\leftrightarrow (B - A)' \subset (A - B)'$

$\leftrightarrow A - B \subset B - A$

$\leftrightarrow (B - A)' \subset (A - B)'$

สรุปข้อความ ก. และ ค. สมมูลกัน ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.ทิ้งได้

การพิสูจน์ว่าข้อความ ก. และ ข. สมมูลกัน

กำหนด $A \cap B' \subset B \cap A'$ ให้ $x \in A$

สมมติ $x \notin B$

ดังนั้น $x \in B'$ และ $x \in A \cap B'$ แต่ $A \cap B' \subset B \cap A'$

เพราะฉะนั้น $x \in B \cap A'$ ซึ่งจะได้ว่า $x \in B$ และขัดแย้งกับ $x \notin B$

สรุปเป็นไปไม่ได้ที่ $x \notin B$ ดังนั้น x ต้องเป็นสมาชิกของ B

เพราะฉะนั้น $A \subset B$

กำหนด $A \subset B$ จะได้ $A - B = \phi$

$A \cap B' = \phi \subset B \cap A'$

สรุป $A \cap B' \subset B \cap A' \leftrightarrow A \subset B$

ดังนั้นข้อความ ก. และ ข. สมมูลกัน

เพราะว่า ก. และ ค. สมมูลกัน , ก. และ ข. สมมูลกัน

ดังนั้น ข. และ ค. สมมูลกัน เพราะฉะนั้น ก., ข. และ ค. สมมูลกัน

2. ตอบ 4.

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \dfrac{2\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\cos x}\}$

$$y = \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\cos x} = \frac{2\cos^2 x + (1 - \sin^2 x)}{\cos x}$$

$$= \frac{2\cos^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = 3\cos x$$

เพราะว่า $-1 \le \cos x \le 1$

$-3 \le 3\cos x \le 3$

$-3 \le y \le 3$

เพราะฉะนั้น เรนจ์ของ r เป็นสับเซตของ $[-3, 3]$

หมายเหตุ ขณะนี้ถ้านักเรียนสรุปว่า $R_r = [-3, 3]$ อาจจะผิดก็ได้

เพราะว่าเหตุผลของเราไม่เพียงพอ

ดังนั้นควรแสดงว่า $[-3, 3] \subset R_r$ เพื่อจะได้สรุปว่า $R_r = [-3, 3]$

ให้ $y \in [-3, 3]$ จะได้ $-1 \le \frac{y}{3} \le 1$ ดังนั้นมี x ที่ทำให้ $\cos x = \frac{y}{3}$

นั่นคือ $y = 3\cos x$

$$= \frac{2\cos^2 x - \sin^2 x + 1}{\cos x}$$

เพราะฉะนั้น $y \in R_r$ สรุป $R_r = [-3, 3]$

a เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ R_r , $a = 3$

b เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ R_r , $b = -3$

สรุป $a - 2b = (3) - 2(-3) = 9$

3. **ตอบ 4.**

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

จากสมการ
$$\begin{aligned} x(x-2)y - 1 &= 0 \\ x(x-2)y &= 1 \\ y &= \frac{1}{x(x-2)} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนจริงได้ทุกค่ายกเว้น 0 และ 2

ดังนั้น $D_r = R - \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

การหาเรนจ์ของ r ต้องหาค่า y ที่เป็นไปได้

จากสมการ
$$\begin{aligned} x(x-2)y - 1 &= 0 \\ yx^2 - 2yx - 1 &= 0 \quad \text{..................(1)} \end{aligned}$$

เพราะว่าสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง

$x = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ก็ต่อเมื่อ $B^2 - 4AC \geq 0$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้

$$x = \frac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(y)(-1)}}{2(y)}$$

ดังนั้น $(-2y)^2 - 4(y)(-1) \geq 0$ และ $y \neq 0$

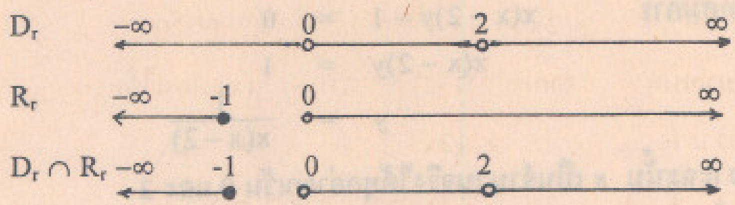
$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y &\geq 0 \\ y(y+1) &\geq 0 \end{aligned}$$

$-1 \geq y$ หรือ $y > 0$

สรุป $R_r = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

การหา $D_r \cap R_r$

$$D_r \cap R_r = (R - \{0, 2\}) \cap ((-\infty, -1) \cup (0, \infty))$$



$D_r \cap R_r = (-\infty, 0] \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

สรุปตัวเลือก 4. $(-1, 0)$ ไม่เป็นสับเซตของ $D_r \cap R_r$

หมายเหตุ การหาตัวเลือกที่ถูกต้องอย่างรวดเร็ว นักเรียนไม่จำเป็นต้องหา $D_r \cap R_r$ เพียงแต่ใช้เหตุผลว่า

$(-1, 0) \not\subset (-\infty, -1] \cup (0, \infty) = R_r$

เพราะฉะนั้น $(-1, 0) \not\subset D_r \cap R_r$ แน่นอน

4. **ตอบ 2.**

แนวคิด
$$f(x) = 2x - 3$$
$$g^{-1}(f(x)) = 3x + 2$$
$$g^{-1}(2x - 3) = 3x + 2 \qquad \text{.....................(1)}$$

แทน x ด้วย K ; $g^{-1}(2K - 3) = 3K + 2$

แทน K ด้วย $\frac{L}{2}$; $g^{-1}(2(\frac{L}{2}) - 3) = 3(\frac{L}{2}) + 2$

$$g^{-1}(L - 3) = \frac{3}{2}L + 2$$

แทน L ด้วย x + 3 ; $g^{-1}(x + 3 - 3) = \frac{3}{2}(x + 3) + 2$

$$g^{-1}(x) = \frac{3x}{2} + \frac{13}{2}$$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ผิด

เพราะว่า $g^{-1}(3) = \frac{3}{2}(3) + \frac{13}{2} \neq 1$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

เพราะว่า $g^{-1}(-3) = \frac{3}{2}(-3) + \frac{13}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{13}{2} = 2$

เพราะฉะนั้น $g(2) = -3$ ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

หมายเหตุ จากสมการ (1) สามารถหา g(x) ก่อนได้ดังนี้

เพราะว่า $g^{-1}(2x - 3) = 3x + 2$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} g(3x + 2) &= 2x - 3 \\ g(3(\tfrac{x}{3}) + 2) &= 2(\tfrac{x}{3}) - 3 \\ g(x + 2) &= \tfrac{2}{3}x - 3 \\ g((x - 2) + 2) &= \tfrac{2}{3}(x - 2) - 3 \\ g(x) &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{3} - 3 \\ g(x) &= \tfrac{2}{3}x - \tfrac{13}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $g(2) = \frac{2}{3}(2) - \frac{13}{2} = -3$

นั่นคือตัวเลือก 2. ถูกต้อง

5. **ตอบ 1.**

แนวคิด **พิจารณาข้อความ ก. ถูกต้อง**

ทุกจำนวนจริงบวก x, y $(\log x)(\log y) = (\log y)(\log x)$

$$\begin{aligned} \log (y^{\log x}) &= \log (x^{\log y}) \\ y^{\log x} &= x^{\log y} \end{aligned}$$

สรุป $\forall x \forall y\, [x^{\log y} = y^{\log x}]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ ข. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = 10$ และ $y = 100$

$$(\log x)^y = (\log 10)^{100} = 1^{100} = 1$$
$$(\log y)^x = (\log 100)^{10} = 2^{10} \neq 1$$

สรุป $\forall x \forall y [(\log x)^y = (\log y)^x]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

6. **ตอบ 3.**

แนวคิด ตัวเลือก 1. ถูกต้อง

$$\begin{aligned} \cap\langle 3, 4\rangle &= \{3\} \cap \{3, 4\} \\ &= \{3\} \\ &= \{\{2, 1, 0\}\} \\ &= \{\{1, 2, 0\}\} \end{aligned}$$

ตัวเลือก 2. ถูกต้อง

$$\cup\langle 3, 4\rangle = \{3\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\}$$

ตัวเลือก 3. ผิด

$$\cap\langle 3, 4\rangle = \{3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$$
$$\cap\langle 4, 3\rangle = \{4\} \cap \{4, 3\} = \{4\}$$

ดังนั้น $\cap\langle 3, 4\rangle \neq \cap\langle 4, 3\rangle$

ตัวเลือก 4. ถูกต้อง

$$\cup\langle 3, 4\rangle = \{3\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\}$$
$$\cup\langle 4, 3\rangle = \{4\} \cup \{4, 3\} = \{4, 3\} = \{3, 4\}$$

ดังนั้น $\cup\langle 3, 4\rangle = \cup\langle 4, 3\rangle$

7. **ตอบ 1.**

แนวคิด ข้อความ ก. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = 1.5$, $y = 1.5$ จะได้

$$[x] + [y] = [1.5] + [1.5] = 1 + 1 = 2$$
$$[x + y] = [1.5 + 1.5] = [3] = 3 \not\leq [x] + [y]$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ข้อความ ข. ถูกต้อง

เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น xy เป็นจำนวนเต็ม

$[x] = x$, $[y] = y$, $[xy] = xy$

สรุป $[xy] = [x][y]$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ข้อความ ค. ผิด ตัวอย่างเช่น x = 1.5 เป็นจำนวนตรรกยะ

$[-x] = [-1.5] = -2$ แต่ $-[x] = -[1.5] = -1$

เพราะฉะนั้น $[-x] \neq -[x]$

8. ตอบ 4.

แนวคิด $2539! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots 2539$

$= (13 \cdot 26 \cdot 39 \cdot 52 \cdot 65 \cdot 78 \ldots 2509 \cdot 2522 \cdot 2535) \cdot$
$(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15 \ldots 25 \cdot 27 \ldots \ldots 2534 \cdot 2536 \cdot 2537 \cdot 2538 \cdot 2539)$

ให้ $A = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15 \ldots 25 \cdot 27 \ldots 2534 \cdot 2536 \ldots 2539$

เพราะฉะนั้น 13 หาร A ไม่ลงตัว

$$
\begin{aligned}
2539! &= (13 \cdot 26 \cdot 39 \ldots 2535)A \\
&= (13)(1)(13)(2)(13)(3)\ldots(13)(195)A \\
&= 13^{195}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 195A \\
&= 13^{195}\, 195!A \\
195! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 195 \\
&= (13 \cdot 26 \cdot 39 \cdot 52 \cdot 65 \cdot 78 \ldots 195)(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15 \ldots 194)
\end{aligned}
$$

ให้ $B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15 \ldots 194$ เพราะฉะนั้น 13 หาร B ไม่ลงตัว

$$
\begin{aligned}
195! &= (13 \cdot 26 \cdot 39 \ldots 195)B \\
&= (13)(1)(13)(2)(13)(3)\ldots(13)(15)B \\
&= 13^{15}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 15\, B \\
&= 13^{15}\, 15!B \\
&= 13^{16}\, 1 \cdot 2\ 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15\, B
\end{aligned}
$$

สรุป
$$
\begin{aligned}
2539! &= 13^{195} A \cdot 13^{16}\, 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15\, B \\
&= 13^{211}\, A\, B\, (1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15)
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $A \cdot B\,(1 \cdot 2\,3 \ldots 12 \cdot 14 \cdot 15)$ ไม่มี 13 เป็นตัวประกอบ

เพราะฉะนั้น $k = 211$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ 13^k หาร 2539! ลงตัว

9. ตอบ 1.

แนวคิด $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$Y = \{n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n + 3^n \text{ ลงตัว}\}$

พิจารณาหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$ ตามกรณีต่างๆ ของ n ดังนี้

กรณี 1 4 หาร n เหลือเศษ 0 , $n = 4k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$1^n = 1$

$2^n = 2^{4k} = (16)^k = \ldots 6$

$3^n = 3^{4k} = (81)^k = \ldots 1$

$1^n + 2^n + 3^n = 1 + (\ldots 6) + (\ldots 1) = \ldots 8$ หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

กรณี 2 4 หาร n เหลือเศษ 1 , $n = 4k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$1^n = 1$

$2^n = 2^{4k+1} = 2(2^{4k}) = 2(16)^k = 2(\ldots 6) = \ldots 2$

$3^n = 3^{4k+1} = 3(3^{4k}) = 3(16)^k = 3(\ldots 1) = \ldots 3$

$1^n + 2^n + 3^n = 1 + (\ldots 2) + (\ldots 3) = \ldots 6$ หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

กรณี 3 4 หาร n เหลือเศษ 2 , $n = 4k + 2$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$1^n = 1$

$2^n = 2^{4k+2} = 2^2(2^{4k}) = 4(\ldots 6) = \ldots 4$

$3^n = 3^{4k+2} = 3^2(3^{4k}) = 9(\ldots 1) = \ldots 9$

$1^n + 2^n + 3^n = 1 + (\ldots 4) + (\ldots 9) = \ldots 4$ หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

กรณี 4 4 หาร n เหลือเศษ 3 , $n = 4k + 3$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$1^n = 1$

$2^n = 2^{4k+3} = 2^3(2^{4k}) = 8(\ldots 6) = \ldots 8$

$3^n = 3^{4k+3} = 3^3(3^{4k}) = 27(...1) = ...7$

$1^n + 2^n + 3^n = 1 + (...8) + (...7) = ...6$ หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

สรุป $Y = \{n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n + 3^n \text{ ลงตัว}\} = \phi$

เพราะฉะนั้น $n(Y) = 0$

10. **ตอบ 2.**

แนวคิด พิจารณาข้อความ (ก.) ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ 9 หาร $x = 1000a + 100b + 10c + d$ ลงตัว

$$\begin{aligned} x &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\ &= 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d) \\ &= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

$a + b + c + d = x - 9(111a + 11b + c)$

เพราะว่า 9 หาร x ลงตัว ดังนั้น 9 หาร $x - 9(111a + 11b + c)$ ลงตัว

สรุป 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (ข.) ผิด ตัวอย่างเช่น

9 หาร 2781 ลงตัว แต่ $(2)(7)(8)(1) = 112$ หารด้วย 9 ไม่ลงตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (ค.) ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$x = 1000a + 100b + 10c + d$

เมื่อ 9 หาร x ลงตัว จะได้ว่า 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว

เพราะว่า 9 หาร $999d + 99c + 9b$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 9 หาร $(999d + 99c + 9b) + (a + b + c + d)$ ลงตัว

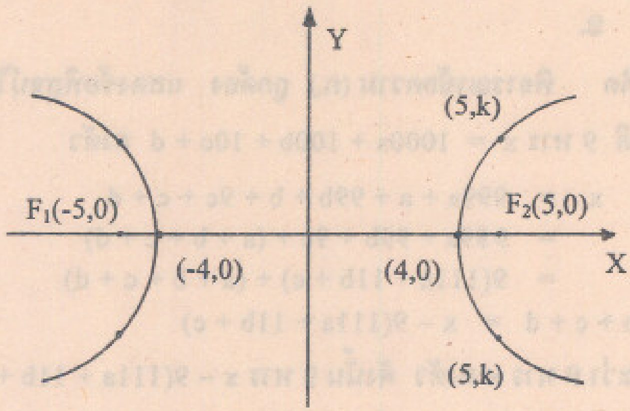
นั่นคือ 9 หาร $1000d + 100c + 10b + a$ ลงตัว

11. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $F_1(-5, 0)$ และ $F_2(5, 0)$ เป็นจุดโฟกัส

ดังนั้น (0, 0) เป็นจุดศูนย์กลางแกนตามขวางทับแกน X และมี

(−4, 0) , (4, 0) เป็นจุดยอด



ไฮเพอร์โบลามี $a = 4$, $c = 5$

ดังนั้น $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-16} = 3$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

จากสมการไฮเพอร์โบลาจะได้ $9x^2 - 16y^2 = 144$

$$\frac{d}{dx}(9x^2 - 16y^2) = \frac{d}{dx}144$$

$$\frac{d}{dx}9x^2 - \frac{d}{dx}16y^2 = 0$$

$$18x - 32y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{32y} = \frac{9x}{16y}$$

เพราะว่า (5, k) เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{25}{16} - \frac{k^2}{9} = 1$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$k^2 = \frac{81}{16}$$

$$k = \pm\frac{9}{4}$$

ที่จุด $(5, \frac{9}{4})$ ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{dy}{dx}(x = 5, y = \frac{9}{4})$

$$= \frac{9(5)}{16(\frac{9}{4})} = \frac{5}{4}$$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}(x - 5)$

$$4y - 9 = 5x - 25$$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $-9 = 5x - 25$

$$5x = 16$$

$$x = \frac{16}{5}$$

สรุป จุดตัดแกน X คือ $(\frac{16}{5}, 0)$

หมายเหตุ เมื่อทำได้แค่นี้นักเรียนควรจะเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ แล้วทำข้ออื่นก่อนดีกว่า

ที่จุด $(5, -\frac{9}{4})$ ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{dy}{dx}(x = 5, y = -\frac{9}{4}) = -\frac{5}{4}$

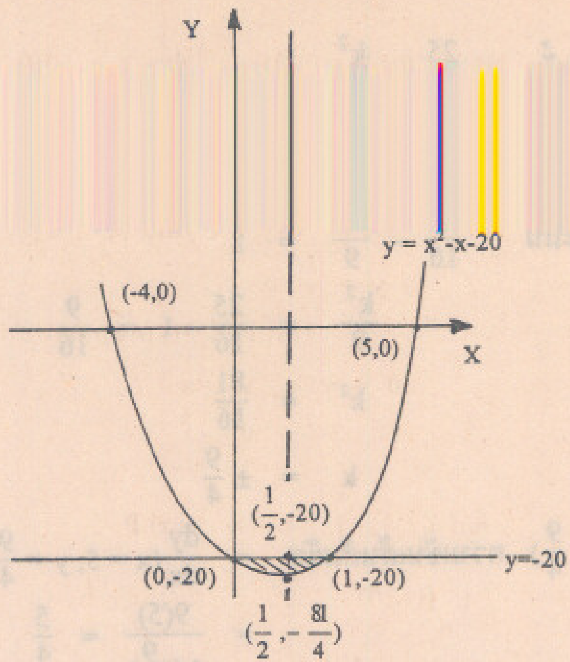
สมการเส้นสัมผัสคือ $y + \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}(x - 5)$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $x = \frac{16}{5}$

สรุป จุดตัดแกน X เป็น $(\frac{16}{5}, 0)$ เหมือนกัน

12. ตอบ 4.

แนวคิด



เพราะว่าพาราโบลา P ผ่านจุด $(-4, 0)$, $(5, 0)$ และ $(0, -20)$ ดังนั้น P เป็นพาราโบลาหงาย และมีรากของสมการเป็น $x = -4$ และ $x = 5$

เพราะฉะนั้น สมการพาราโบลา P ต้องอยู่ในรูปแบบ

$$y = k(x+4)(x-5)$$

เพราะว่า P ผ่านจุด $(0, -20)$ ดังนั้น

$$-20 = k(0+4)(0-5)$$
$$k = 1$$

สรุปสมการพาราโบลา P คือ $y = (1)(x+4)(x-5) = x^2 - x - 20$

จัดรูปสมการเพื่อหาจุดโฟกัส

$$x^2 - x - 20 = y$$
$$x^2 - x + \frac{1}{4} = y + 20 + \frac{1}{4}$$
$$(x - \frac{1}{2})^2 = y + \frac{81}{4}$$
$$= 4(\frac{1}{4})(y + \frac{81}{4})$$

จุดยอดพาราโบลาคือ $(\frac{1}{2}, -\frac{81}{4})$ และ $c = \frac{1}{4}$

ดังนั้นจุดโฟกัสของพาราโบลาคือ $(\frac{1}{2}, -\frac{81}{4} + \frac{1}{4}) = (\frac{1}{2}, -20)$

เส้นตรง L ขนานกับแกน X และผ่านโฟกัส $(\frac{1}{2}, -20)$ มีสมการเป็น

$$y = -20$$

จุดตัดของเส้นตรง L และพาราโบลา P หาได้จากการแก้สมการ

$$-20 = y = x^2 - x - 20$$
$$x(x-1) = 0$$
$$x = 0, 1$$

พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง L และพาราโบลา P

$$= \int_{x=0}^{x=1} [(-20) - (x^2 - x - 20)]\, dx = \int_0^1 (x - x^2)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

13. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (ก.) ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r} \quad \text{เมื่อ } |r| < 1$$

จาก $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ $0 < \sin\theta < 1$

ดังนั้น $$1 + \sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta + \ldots = \frac{1}{1-\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{1-\sin\theta} \cdot \frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

สรุปข้อความ (ก.) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (ข.) ผิด ตัวอย่างเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$

จะได้ $\cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

เพราะฉะนั้น $1-\cos 2\theta+\cos^2 2\theta-\cos^3 2\theta+ \dots = 1$

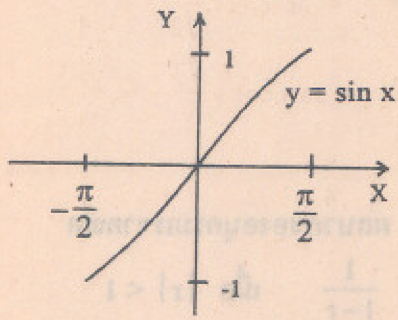
แต่ $\frac{1}{2\cos 4\theta} = \frac{1}{2\cos 4(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$

สรุปข้อความ (ข.) ผิด

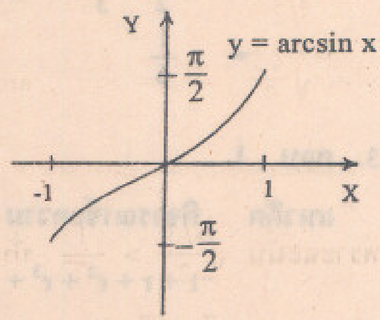
14. **ตอบ 1.**

แนวคิด **พิจารณาข้อความ (ก.) ถูกต้อง**

กราฟของ $y = \sin x$



กราฟของ $y = \arcsin x$



$f(x) = \arcsin(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0, 1]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (ข.) ผิด ตัวอย่างเช่น

$g(1) = \arcsin(\frac{1}{1}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$g(2) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $2 > 1$ แต่ $g(2) \not> g(1)$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$

ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

หมายเหตุ $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, \infty)$

แสดงข้อพิสูจน์ ให้ $x_1, x_2 \in [1, \infty)$ และ $x_1 > x_2 \geq 1$

จะได้ $0 < \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2} \leq 1$ เพราะว่า arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $g(x_1) = \arcsin(\frac{1}{x_1}) < \arcsin(\frac{1}{x_2}) = g(x_2)$

สรุป ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $g(x_1) < g(x_2)$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลด

พิจารณาข้อความ (ค.) ผิด ตัวอย่างเช่น

$x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $x_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos(x_1^2) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

$x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $x_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(x_2^2) = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$

เพราะว่า $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}})^4 = \frac{1}{2}$ และ $(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})^4 = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = (\frac{1}{\sqrt[4]{2}})^4$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ นั่นคือ $x_2 > x_1$

แต่ $h(x_2) = \frac{\pi}{6} \not> \frac{\pi}{4} = h(x_1)$

สรุป h ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (0, 1)

หมายเหตุ การแสดงว่า h(x) เป็นฟังก์ชันลด

ให้ $x_1, x_2 \in (0, 1)$ และ $x_1 < x_2$

$$0 < x_1 < x_2 < 1$$

$$0 < x_1^2 < x_2^2 < 1$$

เพราะว่า arccos x เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $\quad \arccos(x_1^2) > \arccos(x_2^2)$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

นั่นคือ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $h(x_1) > h(x_2)$

สรุป $h(x) = \arccos(x^2)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(0, 1)$

15. **ตอบ 3.**

แนวคิด จากโจทย์ $\quad f(\log_{16} x) = \sqrt[16]{x}$

แทนค่า x ด้วย A จะได้ $\quad f(\log_{16} A) = \sqrt[16]{A}$

แทนค่า A ด้วย 16^x จะได้ $\quad f(\log_{16} 16^x) = \sqrt[16]{16^x}$

$$f(x) = f(x \log_{16} 16) = 16^{\frac{x}{16}} = (2^4)^{\frac{x}{16}} = 2^{\frac{x}{4}}$$

$$\sum_{x=4}^{15} f(x) = 2^{\frac{4}{4}} + 2^{\frac{5}{4}} + 2^{\frac{6}{4}} + \ldots + 2^{\frac{15}{4}} \qquad (n = 12, a = 2, r = 2^{\frac{1}{4}})$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{2(1-(2^{\frac{1}{4}})^{12})}{1-2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2(1-2^3)}{1-2^{\frac{1}{4}}}$$

$$= \frac{2(-7)(1+2^{\frac{1}{4}})}{(1-2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{4}})}$$

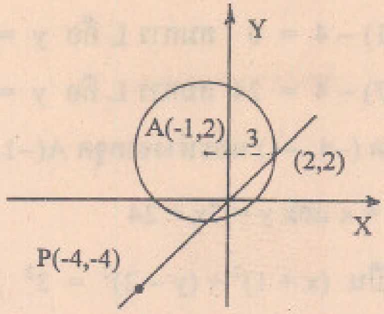
$$= \frac{(-14)(1+2^{\frac{1}{4}})}{1-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{14(1+2^{\frac{1}{4}})}{(\sqrt{2}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$$

$$= 14(\sqrt[4]{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)$$

16. **ตอบ 3.**

แนวคิด



สมมติเส้นตรง L มีสมการเป็น $y = mx + c$ หรือ $mx - y + c = 0$

เพราะว่าระยะห่างจาก A(−1, 2) มายังเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{m(-1)-(2)+c}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด (−4,−4) เพราะฉะนั้น $m(-4)-(-4) + c = 0$

$$c = 4m - 4$$

ดังนั้น
$$\left|\frac{-m-2+4m-4}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{3m-6}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{m-2}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{m^2-4m+4}{m^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$2(m^2 - 4m + 4) = m^2 + 1$$

$$2m^2 - 8m + 8 = m^2 + 1$$

$$m^2 - 8m + 7 = 0$$

$$(m - 7)(m - 1) = 0$$

$$m = 1, 7$$

$m = 1$; $c = 4(1) - 4 = 0$ สมการ L คือ $y = x$

$m = 7$; $c = 4(7) - 4 = 24$ สมการ L คือ $y = 7x + 24$

สรุปเส้นตรงที่ผ่านจุด (−4, −4) และห่างจากจุด A(−1, 2) เป็นระยะทาง

$\frac{3}{\sqrt{2}}$ มี 2 เส้นคือ $y = x$ และ $y = 7x + 24$

วงกลม C มีสมการเป็น $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ แทนค่า $y = x$

จะได้

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 + (x-2)^2 &= 3^2 \\
x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 &= 9 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x &= 2, -1
\end{aligned}$$

จุดตัดของเส้นตรง L : $y = x$ และวงกลมคือ (2, 2) และ (−1, −1)

แทนค่า $y = 7x + 24$ ในสมการวงกลม

$$\begin{aligned}
(x+1)^2 + (7x + 24 - 2)^2 &= 3^2 \\
(x+1)^2 + (7x+22)^2 &= 9 \\
x^2 + 2x + 1 + 49x^2 + 308x + 484 &= 9 \\
25x^2 + 155x + 238 &= 0 \\
x &= \frac{-155 \pm \sqrt{155^2 - 4(25)(238)}}{2(25)} \\
&= \frac{-155 \pm 15}{50} \\
&= -\frac{17}{5}, -\frac{14}{5} \\
y &= 7(-\frac{17}{5}) + 24, 7(-\frac{14}{5}) + 24 \\
&= \frac{1}{5}, \frac{22}{5}
\end{aligned}$$

จุดตัดของวงกลมกับเส้นตรง $y = 7x + 24$ คือ $(-\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$ และ

$(-\frac{14}{5}, \frac{22}{5})$

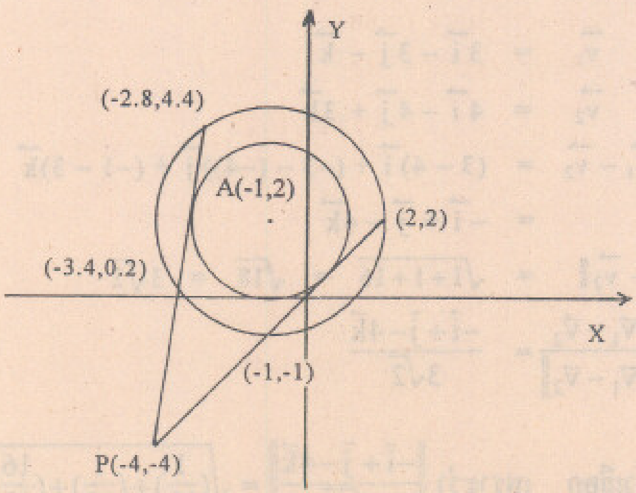
สรุป (p, q) ที่เป็นไปได้คือ $(2,2), (-1,-1), (-\frac{17}{5}, \frac{1}{5}), (-\frac{14}{5}, \frac{22}{5})$

$$p + q = 4, -2, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5}$$

การตัดตัวเลือก ขั้นตอนของการวาดรูปเพื่อตัดตัวเลือกทำดังนี้

1. เขียนวงกลม C และจุด $P(-4,-4)$
2. ประมาณค่า $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = (1.5)(1.414) = 2.12 \simeq 2.1$
3. เขียนวงกลมรัศมี 2.1 จุดศูนย์กลางที่ A
4. ลากเส้น L จากจุด P มาสัมผัสวงกลมวงเล็ก จะได้ว่า L ตัดวงกลม C ทั้งหมด 4 แห่ง วัดพิกัดทุกจุดด้วยไม้บรรทัดได้พิกัดของจุดตัดเป็น (p, q)

$$(p, q) = (-1, -1), (2, 2), (-3.4, 0.2), (-2.8, 4.4)$$
$$p + q = -2, 4, -3.2, 1.6$$



สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

17. ตอบ 1.

แนวคิด $\vec{v}_1 = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

$\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3)(1) + (1)(-3) + (-1)(1) = -1$$

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\,(1-3) - \vec{j}\,(3+1) + \vec{k}\,(-9-1)$$

$$= -2\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k}$$

สรุป $(\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = (-1)(-2\vec{i} - 4\vec{j} - 10\vec{k})$

$$= 2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$$

18. ตอบ 2.

แนวคิด $\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$

$\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = (3-4)\vec{i} + (-3-(-4))\vec{j} + (-1-3)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

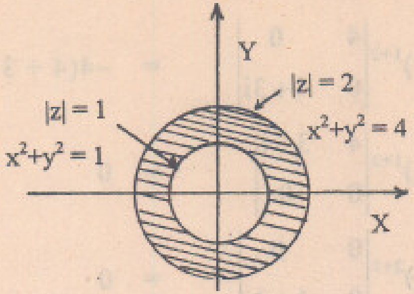
$$\frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 - \vec{v}_2\|} = \frac{-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}}{3\sqrt{2}}$$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\left\|\dfrac{-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{19}}\right\| = \sqrt{(\frac{1}{19})+(\frac{1}{19})+(\frac{16}{19})} \neq 1$

และ $\left\|\dfrac{-\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}}{\sqrt{19}}\right\| \neq 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

19. ตอบ 3.

แนวคิด



$$z = x + yi$$
$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$1 \le |z| \le 2$$
$$1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2$$
$$1 \le x^2+y^2 \le 4$$
$$A = \{z \in C \mid 1 \le |z| \le 2\}$$
$$= \{(x, y) \in R\times R \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

พื้นที่ A $= \pi(2^2) - \pi(1^2)$

$= 4\pi - \pi$

$= 3\pi$

20. ตอบ 2.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 3+i & 0 & 0 \\ 4 & 3-i & 0 \\ 0 & 0 & 4+3i \end{bmatrix}$

det (A) $= (3+i)(3-i)(4+3i)$

$= (9+1)(4+3i)$

$= 10(4+3i)$

Cof(A) $= [C_{ij}]_{3\times3}$ เป็นเมตริกซ์โคแฟกเตอร์ของ A

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3-i & 0 \\ 0 & 4+3i \end{vmatrix} = (3-i)(4+3i)$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 0 & 4+3i\end{vmatrix} = -4(4+3i)$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 3-i\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 4+3i\end{vmatrix} = 0$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3+i & 0\\ 0 & 4+3i\end{vmatrix} = (3+i)(4+3i)$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3-i & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3-i & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3+i & 0\\ 4 & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3+i & 0\\ 4 & 3-i\end{vmatrix} = (3+i)(3-i) = 10$$

$$\text{Cof}(A) = \begin{bmatrix}(3-i)(4+3i) & -4(4+3i) & 0\\ 0 & (3+i)(4+3i) & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}A^{-1} &= \frac{1}{\det(A)}\,\text{adj}(A)\\ &= \frac{1}{\det(A)}\,\text{cof}(A)^T\\ &= \frac{1}{10(4+3i)}\begin{bmatrix}(3-i)(4+3i) & 0 & 0\\ -4(4+3i) & (3+i)(4+3i) & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3-i}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{4}{10} & \frac{3+i}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4+3i} \end{bmatrix}$$

ผลบวกของสมาชิกใน A^{-1} $= \frac{3-i}{10} - \frac{4}{10} + \frac{3+i}{10} + \frac{1}{4+3i}$

$$= \frac{2}{10} + \frac{4-3i}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{2}{10} + \frac{4-3i}{25}$$

$$= \frac{10}{50} + \frac{8-6i}{50} = \frac{18-6i}{50} = \frac{9-3i}{25}$$

21. ตอบ 4.

แนวคิด $M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$M^2 = (2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix})(2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 2^2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = (2^2\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix})(2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 2^3\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = 2^3 I$$

$$M^{99} = (M^3)^{33} = (2^3 I)^{33} = 2^{99} I^{33} = 2^{99} I$$

$$M^{100} = M^{99}M = (2^{99}I)(2\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 2^{100}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ผลบวกของสมาชิกใน $M^{100} = 2^{100}(1+1+1) = 3(2^{100})$

22. **ตอบ 3.**

แนวคิด การที่จะทายถูกตัวเลข 4 และตรงเพียง 2 หลัก พิจารณาดังนี้

$$\boxed{\text{เริ่มต้น}} \xrightarrow[\text{ถูกต้อง 4 ตัว}]{\text{หยิบได้ตัวเลข}} A \xrightarrow{\text{ทายตัวเลขถูกต้อง 2 หลัก}} B$$

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่จะหยิบตัวเลขถูกต้องเพียง 4 ตัว (ยังไม่คิดการเรียงลำดับ)

$$P(A) = \frac{\binom{4}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{9!}{4!\,5!}\right)} = \frac{4!}{6\cdot7\cdot8\cdot9} = \frac{1}{126}$$

B เป็นเหตุการณ์ต่อเนื่องจาก A เมื่อได้เลข 4 ตัวที่ถูกต้อง แล้วจะทายได้ถูกต้อง 2 หลักเท่านั้น จะทำได้กี่วิธีดังนี้

สมมติตัวเลขที่เลือกได้คือ $\{x, y, z, w\}$ ซึ่งจัดลำดับได้ทั้งหมด $4! = 24$ วิธี การนับจำนวนวิธีที่ถูกต้อง 2 หลัก และอีก 2 ตัวผิดหลักคือ

1. เลือกตัวเลขที่ตรงกับหลัก 2 ตัว ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี
2. ตัวเลขอีกสองตัวที่เหลือต้องไม่ตรงกับหลักทำได้ 1 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่เรียงเลข 4 ตัวให้ถูกหลักเพียง 2 หลัก ทำได้ 6 วิธี

เพราะฉะนั้น $P(B) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

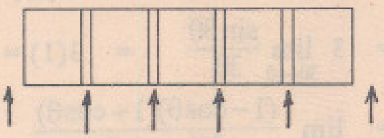
สรุปความน่าจะเป็นที่จะทายตัวเลขได้ถูกต้อง 4 ตัว แต่ถูกหลักเพียง 2 หลักเท่านั้นมีค่าเท่ากับ = P(ถูกต้อง 4 ตัว และ ถูกต้อง 2 หลัก)

$$= P(A\cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \left(\frac{1}{126}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{504}$$

23. ตอบ 3.

แนวคิด $1, 2, 3, \ldots, 9$ มีจำนวนเฉพาะคือ $2, 3, 5, 7$



การนับจำนวนวิธีพิจารณาตามขั้นตอนดังนี้

1. นำตัวเลข $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ ไปจัดลำดับทั้งหมดทำได้ $5!$ วิธี

2. มีตำแหน่งว่างที่จะวางตัวเลขหรือปล่อยให้ว่างได้ 6 แห่ง แต่มีตัวเลขจำนวนเฉพาะเหลือ 4 ตัว ดังนั้นจำนวนวิธีจะเท่ากับจัดลำดับของ 6 สิ่งที่มีการซ้ำ 2 (ซ้ำในที่นี้คือการปล่อยให้ว่าง)

ทำได้ $\dfrac{6!}{2!} = \dfrac{720}{2} = 360$ วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= (5!)(360) = 43200$

24. ตอบ 2.

แนวคิด
$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)}$$
$$= \frac{1}{\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta\cos\theta}$$
$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta} = (1)\left(\frac{1}{1}\right) = 1$$

สรุปตัวเลือก 2. ไม่ถูกต้อง

ตัวเลือก 3. และ 4. ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0} 3\frac{\sin 3\theta}{3\theta} = 3\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{3\theta}$$

$$= 3\lim_{3\theta\to 0}\frac{\sin 3\theta}{3\theta} = 3(1) = 3$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = (1)(\frac{0}{1+1}) = 0$$

25. ตอบ 1.

แนวคิด $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ เมื่อ $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{d}{dx}(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 0$

แต่ $\frac{n}{(1-x)^2} = n \neq 0$ และ $\frac{n}{1-x} = n \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เหตุผลอีกลักษณะที่ใช้ได้คือ ผลบวก $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ต้องไม่มีพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ได้เหมือนกัน

26. ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{d}{d\theta}\sin(\cos\theta) = \frac{d}{d\cos\theta}\sin(\cos\theta) \cdot \frac{d}{d\theta}\cos\theta$

$= \cos(\cos\theta)(-\sin\theta)$

$= -\cos(\cos\theta)\sin\theta$

$\frac{d^2}{d^2\theta}\sin(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}(-\cos(\cos\theta)\sin\theta)$

$= -[\sin\theta\frac{d}{d\theta}\cos(\cos\theta) + \cos(\cos\theta)\frac{d}{d\theta}\sin\theta]$

$= -[\sin\theta\frac{d}{d\cos\theta}\cos(\cos\theta) \cdot \frac{d}{d\theta}\cos\theta + \cos(\cos\theta)\cos\theta]$

$= -[\sin\theta(-\sin(\cos\theta))(-\sin\theta) + \cos(\cos\theta)\cos\theta]$

สรุป $f(\theta) = -[\sin\theta\sin(\cos\theta)\sin\theta + \cos(\cos\theta)\cos\theta]$

และ $f(\pi) = -[\sin\pi\sin(\cos\pi)\sin\pi + \cos(\cos\pi)\cos\pi]$

$= -[0 + \cos(-1)(-1)]$

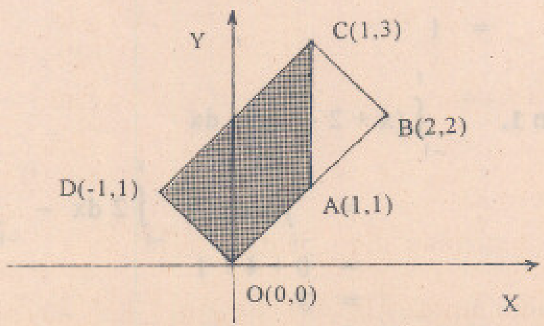
$= \cos(-1)$

$= \cos(1)$

27. ตอบ 1.

แนวคิด ความชัน DC $= \frac{3-1}{1+1} = 1$, ความชัน OA $= \frac{1-0}{1-1} = 1$

ดังนั้น DC//OA ความชัน OD $= \frac{-1-0}{1-0} = -1$ ดังนั้น OD $\perp$ OA



สรุป OACD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู และ OD เป็นความสูง

$$\text{พื้นที่} \square OACD = \frac{1}{2} \times \text{สูง} \times \text{ผลบวกของด้านคู่ขนาน}$$

$$= \frac{1}{2} \times OD \times (OA + DC)$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{1^2+1^2} \times (\sqrt{1^2+1^2} + \sqrt{2^2+2^2})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\sqrt{2} + \sqrt{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(3\sqrt{2}) = 3$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณควรใช้เหตุผลดังนี้

1. $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2. เมื่อ $a < c < b$ จะได้ $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

สังเกตจากตัวเลือกมีฟังก์ชันที่สำคัญคือ $|x|$, x , 2

$$\int_{-1}^{1} 2\,dx = (2x\,|_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = (\frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} |x|\,dx + \int_{0}^{1} |x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x\,dx$$

$$= (-\frac{x^2}{2}\,|_{-1}^{0} + (\frac{x^2}{2}\,|_{0}^{1} = -(0-(\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2} - 0)$$

$$= 1$$

ตัวเลือก 1. $\int_{-1}^{1} (x + 2 - |x|)\,dx$

$$= \int_{-1}^{1} x\,dx + \int_{-1}^{1} 2\,dx - \int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

$$= 0 + 4 + 1$$

$$= 3$$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

หมายเหตุ ตัวเลือก 2. $\int_{-1}^{1}(|x| + x + 2)\,dx = 5$

ตัวเลือก 3. $\int_{-1}^{1}(|x| - x + 2)\,dx = 5$

ตัวเลือก 4. $\int_{-1}^{1}(|x| - 2)\,dx = 1 - 4 = -3$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $-1 \le x \le 1$ เพราะฉะนั้น $|x| \le 1$

ดังนั้น $|x| - 2 < 0$ ทำให้ $\int_{-1}^{1}(|x| - 2)\,dx \le 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\int_{-1}^{1}(|x| + x + 2)\,dx = \int_{-1}^{1}(|x| - x + 2)\,dx$$

ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้ (มิฉะนั้นโจทย์จะผิด)

28. ตอบ 2.

แนวคิด วิธีที่ 1 คิดเลขจริงๆ ตามข้อมูลที่ให้มาโดยใช้สูตร

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}\right)^2$$

ตัวเลือก	$\sum x$	$\bar{x}$	$\sum x^2$	$\frac{\sum x^2}{10}$	$s^2 = \frac{\sum x^2}{10} - \bar{x}^2$
1	176	17.6	3116	311.6	1.84
2	176	17.6	3124	312.4	2.64
3	167	16.7	2813	281.3	2.41
4	175	17.5	3077	307.7	1.45

วิธีที่ 2 ทำการทอนค่าข้อมูลแล้วจึงคิดค่าของ S^2

กลุ่มที่ 1 ลบด้วย 16 จะได้ 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4

กลุ่มที่ 2 ลบด้วย 16 จะได้ 0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 5

กลุ่มที่ 3 ลบด้วย 15 จะได้ 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5

กลุ่มที่ 4 ลบด้วย 16 จะได้ 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3

ต่อไปคำนวณค่า S^2 จากสูตร $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10}\right)^2$

ตัวเลือก	$\sum x$	$\bar{x}$	$\bar{x}^2$	$\sum x^2$	$\frac{\sum x^2}{10}$	s^2
1	16	1.6	2.56	44	4.4	1.84
2	16	1.6	2.56	52	5.2	2.64
3	17	1.7	2.89	53	5.3	2.41
4	15	1.5	2.25	37	3.7	1.45

วิธีที่ 3 ใช้การเปรียบเทียบส่วนที่เหมือนและแตกต่าง

กลุ่มที่ 1 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4

กลุ่มที่ 4 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3

เพราะว่า $\bar{x}$ ของส่วนที่เหมือนกันมีค่าเท่ากับ 1.33 และ 4 ต่างจาก 1.33 มากกว่า 3 เพราะฉะนั้นคะแนนกลุ่มที่ 1 มีการกระจายมากกว่ากลุ่มที่ 4

กลุ่มที่ 2 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 0

กลุ่มที่ 3 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 5, 1

เพราะว่า $\bar{x}$ ของส่วนที่เหมือนกันมีค่าเท่ากับ 2 และ 0 ต่างจาก 2 มากกว่า 1 เพราะฉะนั้นคะแนนกลุ่มที่ 2 มีการกระจายมากกว่ากลุ่มที่ 3

กลุ่มที่ 1 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 4

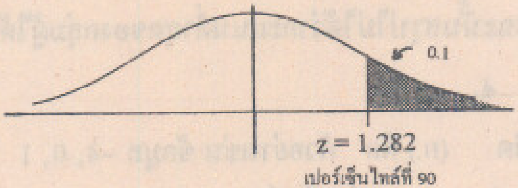
กลุ่มที่ 2 0, 0, 0, 1, 2, 2, 3, 3, 0, 5

เพราะว่า $\bar{x}$ ของส่วนที่เหมือนกันมีค่าเท่ากับ 1.375 และ 0, 5 แตกต่างจาก 1.375 มากกว่า 1,4

เพราะฉะนั้นกลุ่มที่ 2 มีการกระจายมากกว่ากลุ่มที่ 1

29. ตอบ 2.

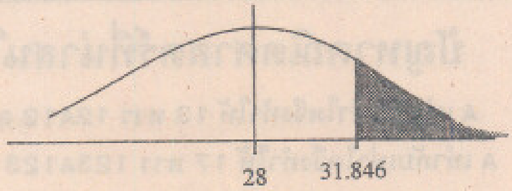
แนวคิด



เปอร์เซ็นไทล์ที่ 90 ของคะแนนมาตรฐาน z มีค่าเท่ากับ 1.282

ข้อมูลคะแนนสอบ $\bar{x} = 28$ และ $s^2 = 9$ ดังนั้น $s = 3$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
z &= \frac{x-\bar{x}}{s} \\
1.282 &= \frac{x-28}{3} \\
x &= 28 + 3(1.282) \\
x &= 31.846
\end{aligned}
$$



เพราะว่าผู้ได้รับรางวัลต้องมีตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ไม่ต่ำกว่า 90

เพราะฉะนั้นมีผู้รับรางวัล 10%ของทั้งหมด = (0.1)(573) = 57.3 คน

ดังนั้นตัวเลือก 1. ผิด

เพราะว่าคะแนนเปอร์เซ็นไทล์ที่ 90 ตรงกับ 31.846 คะแนน

เพราะฉะนั้นผู้ที่ได้คะแนนมากกว่า 32 ต้องได้รับรางวัล

ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

เพราะว่าเราไม่ทราบคะแนนทั้งหมด

เพราะฉะนั้นสรุปไม่ได้ว่าคนที่ได้คะแนนสูงสุดสอบได้ 36 คะแนน

เพราะว่าคะแนน 31.846 ก็ได้รับรางวัลแล้ว

เพราะฉะนั้นสรุปไม่ได้ว่าคะแนนต่ำสุดของกลุ่มผู้ได้รับรางวัล = 33

30. **ตอบ 4.**

แนวคิด (ก.) ผิด ตัวอย่างเช่น ข้อมูล −4, 0, 1

มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\dfrac{-4+0+1}{3} = -1$

(ข.) ผิด ตัวอย่างเช่น ข้อมูล −4, 0, 1

มี $\bar{x} = -1$ แต่เปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 คือ 0

(ค.) ผิด เพราะว่าคะแนนมาตรฐาน z มี

ค่าเฉลี่ย = 0 และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 1

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์การแปรผัน = $\dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{1}{0} \neq 1$

ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ

A เท่ากับเท่าใดจึงทำให้ 13 หาร 12A12 ลงตัว

A เท่ากับเท่าใดจึงทำให้ 17 หาร 123A123 ลงตัว

A เท่ากับเท่าใดจึงทำให้ 13 หาร 12AA12 ลงตัว

A,B เท่ากับเท่าใดจึงทำให้ 7 และ 11 หาร 12AB12 ลงตัว

ติดตามอ่านแนวคิดของการแก้ปัญหาจากง่ายไปยากได้ใน

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 15 เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

ตอนที่ 2

1. **ตอบ 80**

แนวคิด จำนวน ส.ส. ทั้งหมด เท่ากับ 393 คน ดังนั้นต้องรวมเสียงกันได้มากกว่าหรือเท่ากับ 197 เสียง เนื่องจากมีพรรคการเมืองต่างกัน 11 พรรค ดังนั้นให้คิดว่าจำนวน ส.ส. แต่ละพรรคเป็นตัวเลขในฉลาก 11 ใบ ในกล่องมีฉลาก 11 ใบ เขียนหมายเลข 125, 123, ..., 2, 1, 1

$\boxed{\begin{array}{l}125,123,52,38,\\20,18,8,5,2,1,1\end{array}} \longrightarrow$

หยิบฉลากไม่เกิน 4 ใบแล้วแต้มรวมกันมากกว่าหรือเท่ากับ 197

1. เลือกออกมา 1 ใบ ให้ได้ผลบวก ≥ 197 ทำได้ 0 วิธี
2. เลือกออกมา 2 ใบ ให้ได้ผลบวก ≥ 197 ทำได้ 1 วิธี

   คือ $125 + 123 = 248$
3. เลือกออกมา 3 ใบ ให้ได้ผลบวก ≥ 197 ทำได้ 12 วิธี คือ

   $125+123 = 248$ แล้วบวกกับ x ที่เลือกมาจากฉลาก 9 ใบที่เหลือ

   $125+52 = 177$ แล้วบวกกับ x ที่เลือกจาก 38,20 ทำได้ 2 วิธี

   $123+52 = 175$ แล้วบวกกับ x ที่เลือกจาก 38 ทำได้ 1 วิธี
4. เลือกออกมา 4 ใบ ให้ได้ผลบวก ≥ 197 ทำได้ 67 วิธี

   $125 + 123 = 248$ แล้วบวกกับ x, y ที่เลือกจาก 52, 38, ..., 2, 1, 1 ซึ่งทำได้ $\binom{9}{2} = 36$ วิธี

   $125 + 52 + 38 = 215$ แล้วบวกกับ x

   ที่เลือกจากฉลาก 20, 18, 8, 5, 2, 1, 1 ทำได้ 7 วิธี

กรณีที่มี 4 พรรคการเมืองจำแนกเป็นตารางจะทำให้คำนวณได้ง่ายขึ้น

เหตุการณ์	การเลือกค่าเพิ่มเติม	จำนวนวิธี
125 + 123 + x + y = 248 + x + y	x, y เลือกจาก 52, 38, 20, 18, 8, 5, 2, 1, 1	$\binom{9}{2} = 36$
125 + 52 + 38 + x = 215 + x	x = 20, 18, 8, 5, 2, 1,1	7
125 + 52 + 20 + x = 197 + x	x = 18, 8, 5, 2, 1, 1	6
125 + 52 + 18 + x = 195 + x	x = 8, 5, 2	3
125 + 38 + 20 + x = 183 + x	x = 18	1
123 + 52 + 38 + x = 213 + x	x = 20, 18, 8, 5, 2, 1,1	7
123 + 52 + 20 + x = 195 + x	x = 18, 8, 5, 2	4
123 + 52 + 18 + x = 193 + x	x = 8, 5	2
123 + 38+ 20 + x = 181 + x	x = 18	1
	รวม	67

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด = 0 + 1 + 12 + 67 = 80 วิธี

2. ตอบ 4860

แนวคิด x เป็นจำนวนกรม ที่รัฐมนตรีว่าการรับผิดชอบ

y เป็นจำนวนกรม ที่รัฐมนตรีช่วยว่าการคนที่ 1 รับผิดชอบ

z เป็นจำนวนกรม ที่รัฐมนตรีช่วยว่าการคนที่ 2 รับผิดชอบ

ดังนั้น $x + y + z = 9$

ภายใต้เงื่อนไขว่ารัฐมนตรีทุกคนต้องมีงานรับผิดชอบอย่างน้อยหนึ่งกรม และรัฐมนตรีว่าการต้องมีกรมรับผิดชอบมากกว่ารัฐมนตรีช่วยแต่ละคน จะได้ว่า กรณีต่างๆ ของ (x, y, z) คือ (7, 1, 1), (6, 1, 2), (6, 2, 1), (5, 1, 3), (5, 2, 2), (5, 3, 1), (4, 2, 3), (4, 3, 2)

ตัวอย่างการนับกรณี $(x, y, z) = (7, 1, 1)$

ขั้นที่ 1 เลือกกรม 7 กรมจาก 9 กรม ให้รัฐมนตรีดูแลทำได้

$\binom{9}{2} = 36$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกกรม 1 กรมจาก 2 กรม ให้รัฐมนตรีช่วยคนที่ 1 ดูแล ทำได้ $\binom{2}{1}$ วิธี

ขั้นที่ 3 กรมที่เหลือให้รัฐมนตรีช่วยคนที่ 2 ดูแลทำได้ $\binom{1}{1}$ วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{9}{7}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 36 \times 2 \times 1 = 72$ วิธี

กรณีอื่นๆ ขอให้ดูจากตารางต่อไปนี้

(x, y, z)	จำนวนวิธี	
(7, 1, 1)	$\binom{9}{7}\binom{2}{1}\binom{1}{1}$	72
(6, 1, 2)	$\binom{9}{6}\binom{3}{1}\binom{2}{2}$	252
(6, 2, 1)	$\binom{9}{6}\binom{3}{2}\binom{1}{1}$	252
(5, 1, 3)	$\binom{9}{5}\binom{4}{1}\binom{3}{3}$	504
(5, 2, 2)	$\binom{9}{5}\binom{4}{2}\binom{2}{2}$	756
(5, 3, 1)	$\binom{9}{5}\binom{4}{3}\binom{1}{1}$	504
(4, 2, 3)	$\binom{9}{4}\binom{5}{2}\binom{3}{3}$	1260
(4, 3, 2)	$\binom{9}{4}\binom{5}{3}\binom{2}{2}$	1260
	รวม	4860

3. ตอบ 1.312

แนวคิด $\log 1 = 0, \log 2 = 0.301, \log 3 = 0.477, \log 7 = 0.845$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 0.602$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.301 = 0.699$$

$$\log 6 = \log (2)(3) = \log 2 + \log 3 = 0.778$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 0.903$$

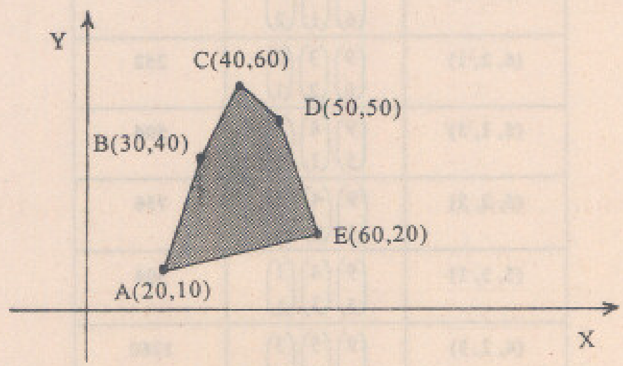
$$\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2(0.477) = 0.954$$

$$\log 10 = 1$$

$$\begin{aligned}\log(\sqrt[5]{10!}) = \frac{1}{5}\log(10!) &= \frac{1}{5}(\log 1+\log 2+\log 3+\ldots+\log 10)\\ &= \frac{1}{5}(0+0.301+0.477+\ldots+0.954+1)\\ &= \frac{1}{5}(6.559)\\ &= 1.3118\end{aligned}$$

4. ตอบ 86000 บาท

แนวคิด



L_1 ผ่านจุด A, B มีสมการเป็น $\dfrac{y-10}{x-20} = \dfrac{40-10}{30-20} = 3$

$$y - 10 = 3x - 60$$

$$3x - y = 50$$

บริเวณแรเงาสอดคล้องเงื่อนไข $3x - y \geq 50$

L_2 ผ่านจุด B, C มีสมการเป็น $\frac{y-40}{x-30} = \frac{60-40}{40-30} = 2$

$2x - y = 20$

บริเวณแรเงาสอดคล้องเงื่อนไข $2x - y \geq 20$

L_3 ผ่านจุด C, D มีสมการเป็น $\frac{y-60}{x-40} = \frac{50-60}{50-40} = -1$

$x + y = 100$

บริเวณแรเงาสอดคล้องเงื่อนไข $x + y \leq 100$

L_4 ผ่านจุด D, E มีสมการเป็น $\frac{y-50}{x-50} = \frac{20-50}{60-50} = -3$

บริเวณแรเงาสอดคล้องเงื่อนไข $3x + y \leq 200$

L_5 ผ่านจุด A, E มีสมการเป็น $\frac{y-10}{x-20} = \frac{20-10}{60-20} = \frac{1}{4}$

$x - 4y = -20$

บริเวณแรเงาสอดคล้องเงื่อนไข $x - 4y \leq -20$

ปัญหาขณะนี้เป็นการหาค่าต่ำสุดของ $P(x, y) = 500x - 300y$

ที่สอดคล้องเงื่อนไข $3x - y \geq 50$

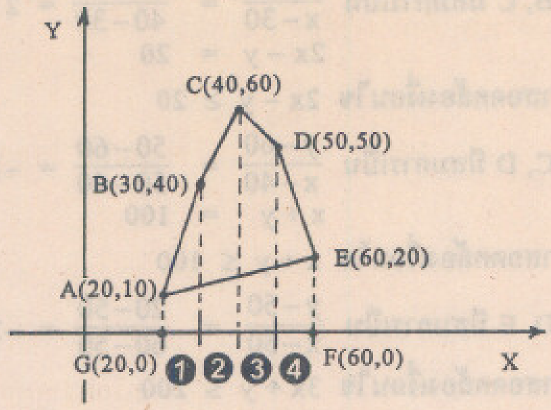
$$\begin{aligned} 2x - y &\geq 20 \\ x + y &\leq 100 \\ 3x + y &\leq 200 \\ x - 4y &\leq -20 \end{aligned}$$

จุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลยคือ (20, 10), (30, 40), (40, 60), (50,50) และ (60, 20)

(x, y)	P(x, y) = 500x − 300y
(20, 10)	7000
(30, 40)	3000
(40, 60)	2000
(50, 50)	10000
(60, 20)	24000

สรุป P(40, 60) = 2000 เป็นค่าต่ำสุด

การหาพื้นที่ ABCDE



พ.ท. แท่งที่ ❶ = $\frac{1}{2}(10+40)(10) = 250$

พ.ท. แท่งที่ ❷ = $\frac{1}{2}(40+60)(10) = 500$

พ.ท. แท่งที่ ❸ = $\frac{1}{2}(60+50)(10) = 550$

พ.ท. แท่งที่ ❹ = $\frac{1}{2}(50+20)(10) = 350$

พื้นที่ GABCDEF = ❶ + ❷ + ❸ + ❹

= $250 + 500 + 550 + 350$

= 1650

พื้นที่ □AEFG = $\frac{1}{2}(AG + EF)(GF)$

= $\frac{1}{2}(10 + 20)(40)$

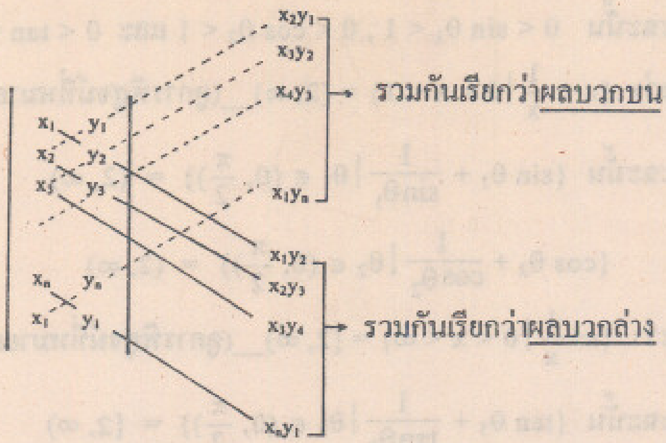
= 600

สรุป พื้นที่ ABCDE = $1650 - 600$ = 1050

ดังนั้นค่าปลูกหญ้า = $(1050)(80)$ = 84000

สรุป ค่าใช้จ่ายต่ำสุด = $84000 + 2000$ = 86000

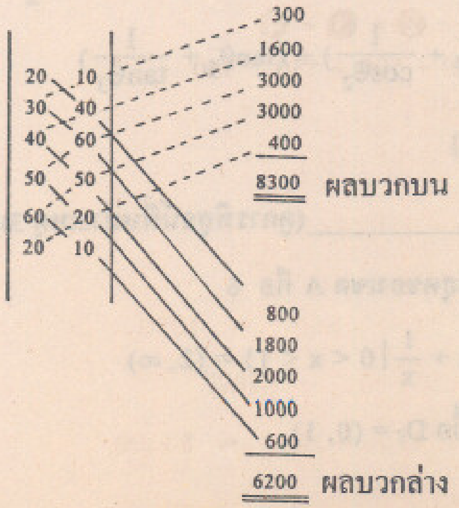
หมายเหตุ การหาพื้นที่รูป n เหลี่ยมที่รู้จุดยอด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ สามารถคำนวณได้จากสูตร



$$\text{พื้นที่รูป n เหลี่ยม} = \frac{1}{2}|\text{ลบ}|$$

$$= \frac{1}{2}|\text{ล่าง} - \text{บน}|$$

$$= \frac{1}{2}|\text{ผลบวกล่าง} - \text{ผลบวกบน}|$$



พื้นที่ ABCDE

$$= \left|\frac{1}{2}(6200 - 8300)\right|$$

$$= 1050$$

5. **ตอบ 6**

แนวคิด เพราะว่า $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})$

เพราะฉะนั้น $0 < \sin\theta_1 < 1$, $0 < \cos\theta_2 < 1$ และ $0 < \tan\theta_3 < \infty$

เพราะว่า $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\} = (2, \infty)$ __(ดูการพิสูจน์ที่หมายเหตุ 1)

เพราะฉะนั้น $\{\sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1} \mid \theta_1 \in (0, \frac{\pi}{2})\} = (2, \infty)$

และ $\{\cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2} \mid \theta_2 \in (0, \frac{\pi}{2})\} = (2, \infty)$

เพราะว่า $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\} = [2, \infty)$ __(ดูการพิสูจน์ที่หมายเหตุ 2)

เพราะฉะนั้น $\{\tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3} \mid \theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})\} = [2, \infty)$

สรุป $A = \{P(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mid \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

$= \{\sin\theta_1+\cos\theta_2+\tan\theta_3+\operatorname{cosec}\theta_1+\sec\theta_2+\cot\theta_3 \mid \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in (0,\frac{\pi}{2})\}$

$= \{\sin\theta_1+\operatorname{cosec}\theta_1+\cos\theta_2+\sec\theta_2+\tan\theta_3+\cot\theta_3 \mid \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in (0,\frac{\pi}{2})\}$

$= \{(\sin\theta_1 + \frac{1}{\sin\theta_1}) + (\cos\theta_2 + \frac{1}{\cos\theta_2}) + (\tan\theta_3 + \frac{1}{\tan\theta_3})$

$\mid \theta_1,\theta_2,\theta_3 \in (0, \frac{\pi}{2})\}$

$= (6, \infty)$ ________________(ดูการพิสูจน์ที่หมายเหตุ 3)

เพราะฉะนั้นขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A คือ 6

หมายเหตุ 1. การแสดงว่า $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\} = (2, \infty)$

ให้ $f(x) = x + \frac{1}{x}$ เมื่อ $D_f = (0, 1)$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

เพราะว่า $0 < x < 1$, $x^2 - 1 < 0$ ทำให้ $f'(x) < 0$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้น $f(1) < f(x) < f(0)$

$$2 < x + \frac{1}{x} < \infty$$

สรุป $R_f \subset (2, \infty)$

ให้ $y \in (2, \infty)$ การหาค่า x ที่ทำให้ $f(x) = y$ พิจารณาจากสมการ

$$x + \frac{1}{x} = y$$

$$x^2 + 1 = xy$$

$$x^2 - yx + 1 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{y \pm \sqrt{y^2-4}}{2}$$

เพราะว่า $y > 2$ ดังนั้นเลือก $x = \dfrac{y - \sqrt{y^2-4}}{2}$ ทำให้ $x \in (0, 1)$

[หมายเหตุ 4. เป็นการแสดงว่า $x \in (0, 1)$] และ $f(x) = y$

นั่นคือ $y \in R_f$ สรุป $R_f = (2, \infty)$

หมายเหตุ 2. การแสดงว่า $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\} = [2, \infty)$

ให้ $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $D_f = (0, \infty)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$0 < x < 1 \rightarrow g'(x) < 0$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (0,1)

$1 < x < \infty \rightarrow g'(x) > 0$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(1,\infty)$

สรุป g(1) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ดังนั้น $g(1) \leq g(x)$ ทุกค่า $x \in (0, \infty)$

$2 \leq x + \frac{1}{x}$ ทุกค่า $x \in (0, \infty)$

เพราะว่า $\lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty$ เพราะฉะนั้น $R_g \subset [2, \infty)$

ในทำนองเดียวกันเมื่อ $y \in [2, \infty)$ จะมี $x = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} \in (0, \infty)$

ที่ทำให้ $g(x) = y$ สรุป $R_g = [2, \infty)$

หมายเหตุ 3. การแสดงว่า ถ้า $X = (2, \infty)$, $Y = (2, \infty)$, $Z = [2, \infty)$

แล้ว $A = \{x+y+z \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\} = (6, \infty)$

ให้ $a \in A$ ดังนั้นต้องมี $x \in X, y \in Y, z \in Z$ ที่ทำให้ $a = x+y+z$

เพราะว่า $2 < x < \infty$, $2 < y < \infty$, $2 < z < \infty$

เพราะฉะนั้น $6<x+y+z<\infty$ นั่นคือ $6<a<\infty, a\in(6,\infty)$ สรุป $A \subset (6,\infty)$

ให้ $k \in (6, \infty)$ เพราะว่า $k = (k-2)+2$ ดังนั้นเลือกให้ $x = \frac{k-2}{2}$

และ $y = \frac{k-2}{2}$ และ $z = 2$ เพราะว่า

$$k > 6$$
$$k-2 > 4$$
$$\frac{k-2}{2} > 2$$

เพราะฉะนั้น $x > 2$, $y > 2$ นั่นคือ $x \in X$ และ $y \in Y$

ดังนั้น $k = x + y + z$ และ $k \in A$ เพราะฉะนั้น $(6, \infty) \subset A$

สรุป $A = (6, \infty)$

หมายเหตุ 4. การแสดงว่า ถ้า $y > 2$ แล้ว $0 < \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} < 1$

$$y > 2$$
$$-4y < -8$$
$$-4y + 4 < -4$$

$$y^2 - 4y + 4 < y^2 - 4$$
$$0 < (y-2)^2 < y^2 - 4$$
$$\sqrt{(y-2)^2} < \sqrt{y^2-4}$$
$$|y-2| < \sqrt{y^2-4}$$
$$0 < y-2 < \sqrt{y^2-4} \quad (\text{เพราะว่า } y > 2)$$
$$y - \sqrt{y^2-4} < 2$$
$$\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} < 1$$

เพราะว่า $0 < y^2 - 4 < y^2$

$$0 < \sqrt{y^2-4} < y$$

เพราะฉะนั้น $y - \sqrt{y^2-4} > 0$

สรุป $0 < \dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} < 1$

6. **ตอบ 1970**

แนวคิด เพราะว่า 9012 และ 1950 ถูกต้อง 3 ตัว

เพราะฉะนั้นตัวเลข 3 ตัวที่ถูกต้องคือ 9, 0, 1

เพราะว่า 5678 ถูก 1 ตัว 1 หลัก เพราะฉะนั้นหลักสิบต้องมีค่าเป็น 7

เพราะว่า 1950 ถูก 3 ตัว 3 หลัก เพราะฉะนั้นตัวเลขที่ถูกต้องคือ 1970

7. **ตอบ 10**

แนวคิด
$$P(x) = x^6 + 4x^5 + 6x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x + 4$$
$$q(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} q^2(x) &= (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)^2 \\ &= A^2x^6 + 2ABx^5 + \ldots + 2CDx + D^2 \\ &= P(x) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$A^2x^6+2ABx^5+...+2CDx+D^2 = x^6+4x^5+6x^4+8x^3+9x^2+4x+4$

โดยการเทียบ ส.ป.ส. จะได้ $A^2=1$, $D^2 = 4$, $2AB = 4$, $2CD = 4$

$A^2B^2=(AB)^2=4$ และ $C^2D^2=(CD)^2=4$ ดังนั้น $C^2=1$ และ $B^2 = 4$

สรุป $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1 + 4 + 1 + 4 = 10$

หมายเหตุ เมื่อ $x = 10$ จะได้

$$
\begin{aligned}
P(10) &= 10^6 + 4(10^5) + 6(10^4) + 8(10^3) + 9(10^2) + 4(10) + 4 \\
&= 1000000 + 400000 + 60000 + 8000 + 900 + 40 + 4 \\
&= 1468944
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q^2(x) &= p(x) \\
q^2(10) &= p(10) = 1468944 \\
q(10) &= \sqrt{1468944} = 1212
\end{aligned}
$$

$A(10^3) + B(10^2) + C(10) + D = 1212$

A, B, C, D ที่เป็นไปได้คือ $A = 1, B = 2, C = 1, D = 2$

ตรวจสอบ $(x^3 + 2x^2 + x + 2)^2 = P(x)$ ใช้ได้

สรุป $A = 1, B = 2, C = 1, D = 2$

เพราะฉะนั้น $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1 + 4 + 1 + 4 = 10$

8. ตอบ 8

แนวคิด จาก $f(\log_{16} x) = \sqrt[16]{x}$

แทนค่า x ด้วย 16^x จะได้ $f(\log_{16} 16^x) = \sqrt[16]{16^x}$

$$f(x \log_{16} 16) = 16^{\frac{x}{16}}$$

สรุป $f(x) = 16^{\frac{x}{16}}$

จาก $g(\sqrt[12]{x}) = \log x$

แทนค่า x ด้วย x^{12} จะได้ $g(\sqrt[12]{x^{12}}) = \log x^{12}$

สรุป $g(x) = 12 \log x$

$g(10) = 12 \log 10 = 12$

$(f \circ g)(10) = f(g(10)) = f(12)$

$= 16^{\frac{12}{16}} = 16^{\frac{3}{4}}$

$= (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3$

$= 8$

9. **ตอบ 30**

แนวคิด $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ g-4a & h-4b & k-4c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ g-4a & h-4b & k-4c \\ d & e & f \end{vmatrix}$

<u>**แถวที่ 2 ถูกบวกด้วย 4 เท่าของแถวที่ 1**</u>

$= 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & k \\ d & e & f \end{vmatrix}$ <u>**สลับแถวที่ 2 กับแถวที่ 3**</u> $= 3(-1)\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$

$= 3(-1)(-10)$

$= 30$

10. **ตอบ 5**

แนวคิด $F(1, 2) = 2(2) = 4$

$F(2, 2) = F(1+1, 1+1)$

$= F(F(1, 1+1), 1)$

$= F(F(1, 2), 1)$

$= F(4, 1)$

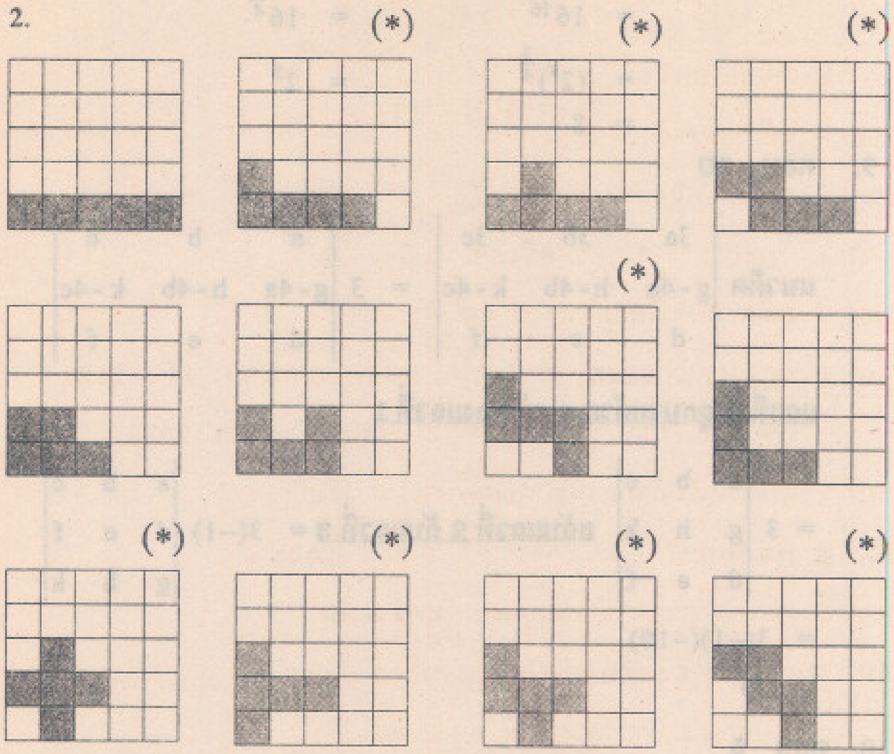
$= 4+1$

$= 5$

ตอนที่ 3

1. **ตอบ** มีรูปแบบแตกต่างกันทั้งหมด 12 รูปแบบ

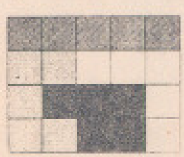
2\.



3. **ตอบ** ได้เป็นกล่องที่ไม่มีฝามีจำนวน 8 รูปแบบ

4. สัญลักษณ์ * กำกับที่ มุมบนด้านขวาสุดของรูป ในคำตอบข้อ 2.

5\.



วิธีจริง vs. วิธีตัดตัวเลือก

เฉลยข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ โครงการแข่งขันวัฏจักร คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ชิงแชมป์แห่งประเทศไทย ครั้งที่ 1 – ครั้งที่ 5

สนใจเทคนิคการตัดตัวเลือกหาอ่านได้ในคณิตศาสตร์ปรนัยทุกเล่ม

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่ใช้ได้ทุกครั้งในการสอบคือ โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ตัวอย่างเช่น ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. 2539 ข้อ 13

กำหนดให้ $f(x) = \log(1+x)$ สำหรับ $x \in R$

ค่าของ $f(1)+f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{3})+....+f(\frac{1}{n})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(n+1)$ 2. $f(n)$ 3. $f(\frac{1}{n})$ 4. $f(\frac{1}{n+1})$

การตัดตัวเลือก แทนค่า n=1 จะได้ค่าของโจทย์ = $f(1)$

แทนค่า n=1 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $f(2)$ 2. $f(1)$ 3. $f(1)$ 4. $f(\frac{1}{2})$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า n=2 จะได้โจทย์ $f(1)+f(\frac{1}{2}) = \log2+\log(\frac{3}{2}) = \log2+\log3-\log2 = \log3$

ตัวเลือก 2. $f(n) = f(2) = \log3$

ตัวเลือก 3. $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2}) = \log(\frac{3}{2}) \neq \log3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

จัดจำหน่ายโดย
ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร 2183980-2 2187000
โทรสาร 2554441

เฉลยข้อสอบวัฏจักรคณิตฯ
ISBN 974-635-277-6
9 789746 352772
C112
7010 110.00 บาท