คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 15

เสริมความรู้
มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974–8944–2–2

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 15) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา
เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ และเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์
โอลิมปิกรอบคัดเลือก 22 มิถุนายน 2539

ISBN 974-89944-2-2

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2000 เล่ม พ.ศ. 2540

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980,2187000 โทรสาร 2554441

ศูนย์หนังสือจุฬาฯ ที่ศาลาพระเกี้ยว เปิดบริการ จันทร์ – ศุกร์ ๘.๓๐ – ๑๘.๓๐ น.
เสาร์ ๐๙.๐๐ – ๑๔.๐๐ น.
ศูนย์หนังสือจุฬาฯ ที่สยามสแควร์ เปิดบริการทุกวัน เวลา ๐๙.๐๐ – ๑๙.๓๐ น.

พิมพ์ที่โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์ โทร. 4112765

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 15 ฉบับเสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ เป็นหนังสือที่เขียนขึ้นเพื่อเสริมความรู้ให้กับนักเรียนและผู้สนใจคณิตศาสตร์ทุกท่าน โดยผมได้นำแนวคิดของปัญหาจากที่พบในข้อสอบต่างๆซึ่งผู้ออกข้อสอบมักจะนำคำถามระดับที่เหมาะสมกับผู้สอบและเวลาที่ใช้ในการคิด เมื่อเรานำคำถามนั้นมาปรับปรุงโดยเปลี่ยนแปลงคำถามจากง่ายไปหายากและหาแนวทางของการหาคำตอบในรูปแบบทั่วๆไปก็จะได้ความรู้ที่เป็นประโยชน์อย่างมาก

ตัวอย่างคำถามเช่น 10! ลงท้ายตัวเลขศูนย์กี่ตัว เมื่อตอบคำถามนี้ได้ เราก็จะเพิ่มระดับความยากขึ้นไป 100! , 1000! , ลงท้ายตัวเลขศูนย์กี่ตัว หรือการหาค่า k มากสุดที่ทำให้ 2^k หาร 10! ลงตัว เมื่อตอบคำถามนี้ได้เราก็จะเพิ่มระดับความยากขึ้นทั้ง 3^k , 6^k ,12^k ,.. หรือเปลี่ยน 10! เป็น 100! , 200! ,...แนวคิดของการลดระดับความยากของปัญหาแล้วค่อยๆเพิ่มความยากเหล่านี้จะทำให้นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาอื่นๆได้

สำหรับตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. และ กข. 2540 ในหนังสือเล่มนี้ได้เฉลยโดยใช้แนวคิดในลักษณะของการทดเลขเพื่อให้ได้คะแนนเร็วที่สุด <u>และขอเน้นอย่างจริงจังว่าในการสอบทุกครั้งต้องเลือกทำข้อง่ายก่อน และ ในช่วงเวลาหนึ่งชั่วโมงแรกของการสอบจะเป็นช่วงที่นักเรียนทำคะแนนได้ดีที่สุด</u> ลองดูจากที่นำมาลงในหนังสือเล่มนี้ก็จะเห็นได้ว่าภายในครึ่งชั่วโมงเราก็ได้คะแนนเกิน 20 คะแนน

เฉลยคณิตศาสตร์ ก. และ กข. 2540 อย่างละเอียดทั้งวิธีจริง วิธีลัด และการตัดตัวเลือก(ยังมีอีกมาก) ติดตามอ่านในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 16 ต่อไป

สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

22 คะแนนภายใน 22 นาทีจาก คณิตศาสตร์ กข. 2540
วันเสาร์ที่ 5 เมษายน 2540

บทความนี้เป็นการเน้นให้เห็นความรวดเร็วของการตัดตัวเลือกตามวิธีที่ได้เขียนไว้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย ทุกเล่มที่ผ่านมา โดยนำข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ที่สอบเมื่อวันเสาร์ที่ 5 เมษายน 2540 ที่สามารถหาคำตอบได้อย่างรวดเร็ว ด้วยวิธีตัดตัวเลือก สำหรับข้อสอบฉบับสมบูรณ์ที่มีเฉลยด้วยวิธีจริงเปรียบเทียบกับวิธีตัดตัวเลือกอย่างละเอียดติดตามอ่านได้ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

ข้อสอบต่อไปนี้เป็นข้อสอบบางข้อของ คณิตศาสตร์ กข.2540 เท่านั้น

3. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|\frac{1}{2}-\frac{x}{2}| \leq 1$

$(A-B)'$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$
2. $(-\infty,-2)\cup[-1,\infty)$
3. $(-\infty,-2]\cup(-1,\infty)$
4. $(-\infty,-2]\cup[-1,\infty)$

ตอบ 4.

การตัดตัวเลือก $(A-B)' = (A\cap B')' = A'\cup B$

$A = \{x\in R \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\}$

$A' = \{x\in R \mid \frac{3-x}{x+2} < 0\}\cup\{-2\}$

$B = \{x\in R \mid |\frac{1}{2}-\frac{x}{2}| \leq 1\}$

$-2 \in A' \rightarrow -2 \in A'\cup B$

$\rightarrow -2 \in (A-B)'$

$\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

$-1 \in B$ $\rightarrow -1 \in A \cup B$

$\rightarrow -1 \in (A-B)'$

$\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

ความคิดเห็นของผู้เขียน ทุกวันนี้นอกจากสิ้นค้าจะมีราคาแพงแล้ว คะแนนสอบข้อนี้ยิ่งมีราคาแพงกว่าอีก เพราะว่าเมื่อก่อนนี้ถามกันแค่ A , B ยังได้ตั้ง 2 คะแนน แต่ปีนี้ถามขนาด $(A-B)'$ คืออะไรได้แค่ 1 คะแนนเท่านั้น

4. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 500 และหารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 167 2. 200 3. 233 4. 266

ตอบ 3.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้ขอแนะนำการนับจำนวนสมาชิกอย่างรวดเร็ว

3 หารลงตัว :	3,6,9,...,498	
3 หารตลอด :	1,2,3,...,166	3 หารลงตัวมี 166 ตัว
5 หารลงตัว :	5,10,15,...,500	
5 หารตลอด :	1,2,3,...,100	5 หารลงตัวมี 100 ตัว
15 หารลงตัว :	15,30,45,...,495	
15 หารตลอด :	1,2,3,...,33	5 หารลงตัวมี 33 ตัว

A = {x | 3 หาร x ลงตัว }

B = {x | 5 หาร x ลงตัว }

$A \cap B$ = { x | 3 และ 5 หาร x ลงตัว } = { x | 15 หาร x ลงตัว }

$A \cup B = \{ x \mid 3$ หรือ 5 หาร x ลงตัว $\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 166 + 100 - 33 = 233$

5. ถ้า p และ q เป็นประพจน์ แล้ว ประพจน์ $p \to \sim(q \to p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ 2. $\sim p \vee (p \vee q)$
3. $p \to (\sim q \vee q)$ 4. $p \to (\sim q \wedge q)$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า T หรือ F ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $\underline{p = T} \to \underline{q \to p = T} \to \underline{\sim(q \to p) = F} \to \underline{p \to \sim(q \to p) = F}$

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q) = F$

ตัวเลือก 2. $\sim p \vee (p \vee q) = T$

ตัวเลือก 3. $p \to (\sim q \vee q) = T$ เมื่อ $q = T$

ตัวเลือก 4. $p \to (\sim q \wedge q) = T$ เมื่อ $q = F$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

6. ถ้า $f = \{(x,y) \mid y = \log(x+2) + \log(x-3) - \log(4-x)\}$
แล้วโดเมนของ f คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(3, 4)$ 2. $(2, 3)$ 3. $(2, 4)$ 4. $(0, 2) \cup (3, 4)$

ตอบ 1.

แนวคิด คำถามข้อนี้ตรงกับหลักการเซตคำตอบเท่ากับตัวเลือกใด ดูจากพจน์ $\log(x-3) \to x = 1.9$ ไม่ได้ และ $x = 2.1$ ไม่ได้ $\to$ ตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

8. นาย ก เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ต่อจากนั้นจึงเดินทางไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่า นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

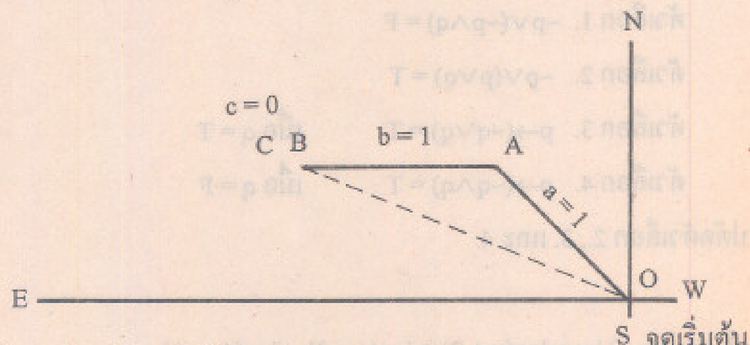
1. $(a^2+b^2+c^2)^{1/2}$ 2. $(a^2+b^2+c^2+\sqrt{2}\,ab+\sqrt{2}\,ac)^{1/2}$

3. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac)^{1/2}$ 4. $a+(b^2+c^2)^{1/2}$

ตอบ 2.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a,b,c แทนค่า $a=1, b=1, c=0$

ขั้นตอนการวาดรูป ให้ O เป็นจุดเริ่มต้น ลาก OA ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ และ OA = a = 1 นิ้ว ลาก AB ไปทางทิศตะวันตกและ AB = b = 1 นิ้ว ให้ c = 0 หมายความว่า B และ C เป็นจุดเดียวกัน วัดความยาว OB ด้วยไม้บรรทัดได้ 1.8



ตัวเลือก 1. $(a^2+b^2+c^2)^{1/2} = \sqrt{2} = 1.414 \neq 1.8$

ตัวเลือก 2. $(a^2+b^2+c^2+\sqrt{2}\,ab+\sqrt{2}\,ac)^{1/2} = (1+1+0+\sqrt{2}+0)^{1/2} = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{3.414}$

ตัวเลือก 3. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac)^{1/2} = \sqrt{3} = 1.732 \neq 1.8$

ตัวเลือก 4. $a+(b^2+c^2)^{1/2} = 2 \neq 1.8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4.

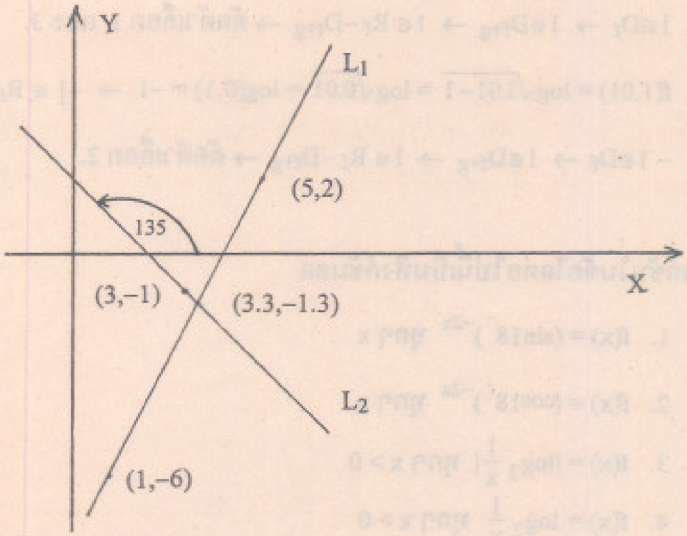
<u>หมายเหตุ</u> ตรวจสอบกับ $(1.8)^2 = 3.24$ ก็จะเห็นว่าเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

10. ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (5,2) และ (1,–6) เส้นตรง L_2 ผ่านจุด (3,–1) และมีความชัน –1 ถ้า (a,b) เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง แล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –2   2. –1   3. 1   4. 2

ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทาง



ลาก L_1 ผ่านจุด (5,2) และ (1,–6)

L_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน – 1 คือเส้นตรงที่ทำมุม 135 องศากับแกน X และผ่านจุด (3,–1) วัดพิกัดของจุดตัด L_1 กับ L_2 ได้เป็น (3.3,–1.3)

สรุปเลือก $a + b = 3.3 - 1.3 = 2$ ดีกว่า

หมายเหตุ วิธีนี้ก็ได้ สมการ L_2 คือ $y - (-1) = (-1)(x - 3)$ หรือ $x + y = 2$

เพราะว่า (a , b) อยู่บน L_2 เพราะฉะนั้น $a + b = 2$

12. ให้ $f(x) = \log\sqrt{x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{\log x}$ $R_f - D_{f+g}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 1)$ 2. $[0, 1]$
3. $(-\infty, 1)$ 4. $(-\infty, 1]$

ตอบ 4.

แนวคิด แทนค่าบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 101, x = 1.01$

$f(101) = \log\sqrt{101-1} = \log 10 = 1 \rightarrow 1 \in R_f$

$1 \notin D_f \rightarrow 1 \notin D_{f+g} \rightarrow 1 \in R_f - D_{f+g} \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 3.

$f(1.01) = \log\sqrt{1.01-1} = \log\sqrt{0.01} = \log(0.1) = -1 \rightarrow -1 \in R_f$

$-1 \notin D_f \rightarrow 1 \notin D_{f+g} \rightarrow 1 \in R_f - D_{f+g} \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

13. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x
2. $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x
3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ทุกๆ $x > 0$
4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $0 < \cos 18 < 1$ และ $0 < \sin 18 < 1$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ ในตัวเลือก 1. และ 2. เหมือนกันซึ่งเป็นคำตอบไม่ได้ มิเช่นนั้นโจทย์จะผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

พิจารณาสูตรตัวเลือก 3.$f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ จะได้ $f(1) = 0$ และ $f(2) = 1$

เพราะฉะนั้น $1 < 2$ แต่ $f(1) \ngtr f(2)$ เพราะฉะนั้น $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันลด

16. ให้ $\bar{u} = -\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j}$ แล้วเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในข้อใดต่อไปนี้มีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$

1. $\frac{-2}{5}(4\bar{i}+3\bar{j})$
2. $\frac{-2}{5}(4\bar{i}-3\bar{j})$
3. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}+\bar{j})$
4. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}-\bar{j})$

ตอบ 1.

แนวคิด ใช้เหตุผลนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์

ใช้เหตุผลแค่ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 2$ ต่อไปลองนำเวกเตอร์ในตัวเลือกมา dot กับ v

ตัวเลือก 1. $(\bar{i}-3\bar{j})\cdot(\frac{-2}{5}(4\bar{i}+3\bar{j})) = 2$

ตัวเลือก 2. $(\bar{i}-3\bar{j})\cdot(\frac{-2}{5}(4\bar{i}-3\bar{j})) \neq 2$

ตัวเลือก 3. $(\bar{i}-3\bar{j})\cdot(\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}+\bar{j})) \neq 2$

ตัวเลือก 4. $(\bar{i}-3\bar{j})\cdot(\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}-\bar{j})) \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

18. รากที่ 6 ของ -64 ที่ไม่เป็นจำนวนจริง เป็นจริงตามข้อใด

1. มี 4 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$
2. มี 4 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$ และ $-1 \pm \sqrt{3}i$
3. มี 6 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$, $-1 \pm \sqrt{3}i$ และ $\pm 2i$
4. มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$, $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

ตอบ 4.

แนวคิด ใช้หลักการนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ ถึงแม้ว่าเราจะหารากไม่เป็น แต่ยกกำลังเป็น หรือคูณจำนวนเชิงซ้อนเป็นก็ได้คำตอบเหมือนกัน

$(2i)^6 = -64 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

ลองใช้เหตุผลแบบนี้บางก็ได้เพราะว่าถ้า x เป็นราก แล้ว – x เป็นรากด้วย เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $(1+\sqrt{3}i)^6 = 64$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

22. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & ,x \neq 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ทั้งคู่
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อนี้ขอใช้เหตุผลว่า หากเราทำอะไรได้บ้างในการทำโจทย์ก็ให้ใช้ผลนั้น ช่วยในการตัดตัวเลือกเท่าที่จะทำได้เช่น

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\,\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ได้ของมาแค่นี้ก็สามารถตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\,\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2}$$

$$= \frac{1}{4} \qquad \rightarrow \text{ ตัดตัวเลือก 4.}$$

27. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A' \cap B') = 0.2$ $P(A \cap B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.3 3. 0.8 4. 0.9

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือกได้เพียงบางส่วนก็ยังดี เพราะว่าจะมีประโยชน์ที่เห็นชัดสองประการคือ การเดาตัวเลือกจะมีตัวเลือกที่ต้องเดาน้อยลง หากคิดเลขมาตรงกับตัวเลือกที่เราตัดทิ้งไปแล้วจะได้รู้ตัวว่าเราได้คิดอะไรผิดบางอย่างแล้ว

$$A \cap B \subset A \rightarrow P(A \cap B) \le P(A)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) \le 0.5$$

$\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3. และ 4.

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

$$P((A \cup B)') = P(A' \cap B') = 0.2 \rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

30. ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
2. มัธยฐานมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
3. ฐานนิยมมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
4. มัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ฐานนิยม

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

เพราะฉะนั้น มัธยฐาน = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = ฐานนิยม

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

32. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

ข. $\{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\} = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

1. ก และ ข ถูกทั้งคู่ 2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก 4. ก และ ข ผิดทั้งคู่

ตอบ 4.

แนวคิด $A = \{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\}$

$B = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

$x = -\frac{1}{3} \to \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}}} = 2 \to -\frac{1}{3} \in A$

แต่ $-\frac{1}{3} \notin B$ ดังนั้น $A \neq B$ เพราะฉะนั้น ข้อความ ก ผิด

$A = \{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\}$

$B = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

$1 \in B$ และ $1 \notin A \rightarrow A \neq B$ เพราะฉะนั้นข้อความ ข ผิด

36. ให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

กำหนดให้ $f = \{(x,y) \mid x + 2y = 12$ และ $x,y \in I^+\}$

แล้ว fof เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(8,5), (4,4)\}$
2. $\{(5,8), (4,4)\}$
3. $\{(2,2), (4,4)\}$
4. $\{(6,3), (4,4)\}$

ตอบ 1.

แนวคิด $x + 2y = 12 \rightarrow y = \frac{12-x}{2} \rightarrow f(x) = \frac{12-x}{2}$

$f(8) = 2$

$f(2) = 5$

$fof(8) = f(f(8)) = f(2) = 5 \rightarrow (8,5) \in fof$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

37. กำหนดให้ $x \in [0,4\pi]$

เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\}$
2. $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\}$
3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\}$
4. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\}$

ตอบ 3.

แนวคิด เซตคำตอบคือตัวเลือกใด ใช้การแทนค่าได้เสมอ

เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆ เช่น $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{\pi}{2}) \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$x = \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{5\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{5\pi}{2}) \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

42. ให้ R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ

$A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 0\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $A \subset B$
2. $B \subset A$
3. $A \cap B = \varnothing$
4. $A \cup B = R^+$

ตอบ 1.

แนวคิด เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆเช่น $x = 1,2,4$ ช่วยในการตัดตัวเลือก

$x = 2 \rightarrow 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 16 - 8 - 8 = 0 \rightarrow 2 \notin A$

แต่ $2 \in B$ เพราะฉะนั้น $B \not\subset A$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2.

$x = 4 \rightarrow 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 256 - 32 - 8 > 0 \rightarrow 2 \in A$

$x = 4 \rightarrow \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 0 \rightarrow 2 \in B \rightarrow A \cap B \neq \varnothing \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

$x = 1 \rightarrow 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 4 - 4 - 8 = -8 \rightarrow 1 \notin A$

และ $1 \notin B$ เพราะฉะนั้น $1 \notin A \cup B$ และ $A \cup B \neq R^+$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4.

ยังมีข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. 2540 อีกหลายข้อที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีตัดตัวเลือก ติดตามอ่านได้ในคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มต่อไป

≥→≥⊂~π∆∉ ī j̄ ∞θ∩∪∈∉⊄≤∧ ∨

ข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2539 วิชา คณิตศาสตร์ (การสอบแข่งขันรอบที่ 1)

สอบวันที่ 22 มิถุนายน พ.ศ. 2539 เวลา 9.00-12.00

ตอนที่ 1 ชนิดเลือกคำตอบมี 20 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. เศษเหลือจากการหาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ ด้วย $x^2 - 1$ เป็นเท่าใด

(1) $6x$ (2) $9x$

(3) $3x + 1$ (4) $7x + 1$

2. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ เมื่อ $2 < x < 3$ มีค่าเท่าใด

(1) $3\sqrt{3}$ (2) $4\sqrt{3}$

(3) $2\sqrt{2}$ (4) $3\sqrt{2}$

3. จำนวนเต็มบวก 5 จำนวนเรียงติดต่อกัน ซึ่งมีผลคูณเท่ากับ 6375600 ผลบวกของจำนวนที่น้อยที่สุดกับจำนวนที่มากที่สุดใน 5 จำนวนนั้น เป็นเท่าใด

(1) 43 (2) 44

(3) 45 (4) 46

4. จำนวนเต็มบวก p หาร 3083, 3295 และ 3666 เหลือเศษเท่ากัน คือ r ผลคูณของ p และ r มีค่าเท่าใด

(1) 435 (2) 477

(3) 496 (4) 512

5. กำหนดให้ $x + y = 3 - \cos 4\theta$ และ $x - y = 4\sin 2\theta$

จะได้ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด

(1) $1+\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{2}$

(3) 2 (4) 1

6. วงกลม A มีพื้นที่มากกว่าวงกลม B วงกลมทั้งสองนี้มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y แต่เหนือแกน X และสัมผัสกับพาราโบลา $x^2 = 4cy$ $(c > 0)$ และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลานี้ด้วย อัตราส่วนระหว่างพื้นที่ของวงกลม A กับพื้นที่ของวงกลม B เป็นเท่าใด

(1) 24 (2) 32

(3) 48 (4) 64

7. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ D เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC E และ F เป็นจุดแบ่งด้าน AC เป็นสามส่วนเท่าๆ กัน $\overline{AD}$ ตัดกับ $\overline{BE}$ และ $\overline{BF}$ ที่ G และ H ตามลำดับ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่รูปสามเหลี่ยม BHG กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นเท่าใด

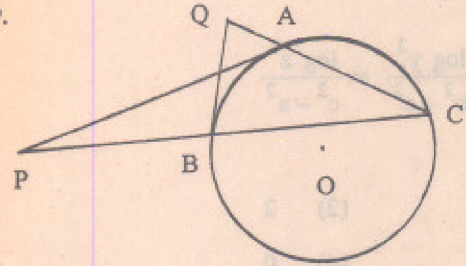
(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{2}{9}$

(3) $\frac{3}{16}$ (4) $\frac{3}{20}$

8. วงกลม A มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 14$ และตัดกับวงกลม B ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด P และ Q โดยที่จุด P มีพิกัดเป็น $(3,-4)$ และ $\overline{PQ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม B รัศมีของวงกลม A เป็นเท่าใด

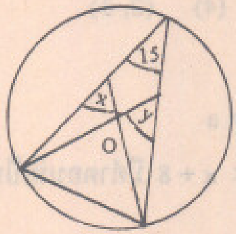
(1) $5\sqrt{5}$ (2) $4\sqrt{5}$

(3) $3\sqrt{5}$ (4) $2\sqrt{5}$

9. 

จากรูป $\overline{PA}$ และ $\overline{QB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ ถ้า $QB = \frac{1}{3} PA$ แล้ว $\frac{QA \cdot QC}{PB \cdot PC}$ มีค่าเท่าใด

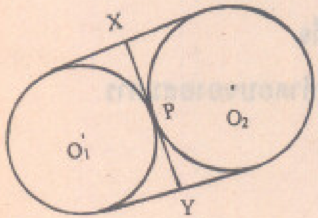
(1) $\frac{1}{9}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

10. 

จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม $\sin(x^\circ+y^\circ)+\cos(x^\circ+y^\circ)-\tan(x^\circ+y^\circ)$ มีค่าเท่าใด

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ (2) $\frac{-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

(3) $\frac{3\sqrt{2}-5-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ (4) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$

11. 

จากรูปวงกลม O_1 และ O_2 มีรัศมียาว r_1 และ r_2 ตามลำดับ โดยที่ $r_1 > r_2$ XY มีค่าเท่าใด

(1) $\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ (2) $\frac{4\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

(3) $2\sqrt{r_1r_2}$ (4) $r_1+r_2-\sqrt{r_1r_2}$

12. กำหนดให้ $\frac{\log x^2}{a^2-b^2} = \frac{\log y^2}{b^2-c^2} = \frac{\log z^2}{c^2-a^2}$

จะได้ $\sqrt{xyz}$ มีค่าเท่าใด

(1) 4 (2) 2

(3) 1 (4) 0

13. คำตอบของสมการ $2(2^x + 4^x) = 3^x - 6^x + 9^x$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

(1) $(-1, 0)$ (2) $(0, 1)$

(3) $(1, 2)$ (4) $(2, 3)$

14. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจำนวนเต็ม a ที่ทำให้ $2^{\ln a} > a$

ข. อสมการ $\log_2(4^x + 1255) < x + 8$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มอยู่ 4 จำนวน

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. และข้อ ข. เป็นจริง

(2) ข้อ ก. เป็นจริง แต่ข้อ ข. เป็นเท็จ

(3) ข้อ ก. เป็นเท็จ แต่ข้อ ข. เป็นจริง

(4) ข้อ ก. และข้อ ข. เป็นเท็จ

15. กำหนดให้ช่วง (a, b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ

$3(2^{\log x}) > 2 + x^{\log 4}$

a + b มีค่าเท่าใด

(1) 8 (2) 11

(3) 13 (4) 16

16. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน $f(3x-5) = 18x^2 - 57x + 48$

จะได้ $fof(-1) - f^2(1)$ มีค่าเท่าใด

(1) 3 (2) 5 (3) −2 (4) −1

17. กำหนดให้ $A(x) = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2539x$

ผลบวกของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0, \pi]$ ซึ่งทำให้ $A(x) = 0$ เป็นเท่าใด

(1) 1269.5π (2) 1270.5π (3) 2539π (4) 2540π

18. วงกลม 2 วง มีรัศมีเท่ากัน และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O_1 และ O_2 ตามลำดับ วงกลมทั้งสองนี้ตัดกันที่จุด A และ B โดยที่ $A\hat{O}_1B = \theta$ ถ้าพื้นที่ร่วมกันของวงกลมทั้งสองเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่วงกลม O_1 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $\theta = \pi + \sin\theta$ (2) $\theta = \frac{\pi}{2} + \sin\theta$

(3) $\theta = \pi + \cos\theta$ (4) $\theta = \frac{\pi}{2} + \cos\theta$

19. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ 4×4 และไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน แล้ว $(\text{adj}A)(\text{adj}B) = \text{adj}(BA)$

ข. ถ้า A เป็นเมตริกซ์มิติ 4×4 แล้วจะมีเมตริกซ์ B และ C ซึ่ง $A = B + C$ โดยที่ $B^t = B$ และ $C^t = -C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

(1) ข้อ ก. และข้อ ข. เป็นจริง

(2) ข้อ ก. เป็นจริง แต่ข้อ ข. เป็นเท็จ

(3) ข้อ ก. เป็นเท็จ แต่ข้อ ข. เป็นจริง

(4) ข้อ ก. และข้อ ข. เป็นเท็จ

20. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ \sin\theta & \cos 3\theta & 1 \\ -\cos\theta & \sin 3\theta & 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $\theta \in [0, 2\pi]$

ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\det A = 4$ เป็นเท่าใด

(1) $\frac{3\pi}{2}$ (2) $\frac{5\pi}{2}$

(3) 3π (4) $\frac{7\pi}{2}$

ตอนที่ 2 ชนิดเติมเฉพาะคำตอบ มี 15 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

1. กำหนดให้ $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$
   โดยที่ $f(x) - f(x-1) = 2x$ และ $f(1) = 3$
   ค่าของ $f(x)$ เท่ากับเท่าใด
2. ถ้าผลคูณของรากสองรากจากทั้งหมด 4 รากของสมการ
   $x^4 - 17x^3 + kx^2 + 32x - 384 = 0$ เป็น -16 แล้ว k มีค่าเท่าใด
3. กำหนดให้ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $(x+1)^{\log x} < x\}$
   ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A มีค่าเท่าใด
4. ถ้ามี $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ที่ทำให้ $\tan A$ และ $\tan B$ เป็นรากของสมการ
   $x^2 + px + q = 0$ แล้ว $\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B)$
   มีค่าเท่าใดในพจน์ของ p, q
5. ถ้า a เป็นจำนวนเต็มซึ่งทำให้ $(x-a)(x-10)+1$ แยกตัวประกอบได้
   ในรูป $(x+b)(x+c)$ โดยที่ b และ c เป็นจำนวนเต็ม แล้ว a คือจำนวนใด

6. กำหนดให้ A เป็นจำนวนนับซึ่งประกอบด้วยเลข 7 จำนวน 1001 ตัว เศษเหลือจากการหาร A ด้วย 1001 เป็นเท่าใด

7. กำหนดให้ A = 523xxx เป็นจำนวนนับ 6 หลัก ซึ่งหารด้วย 7, 8 และ 9 ลงตัว A ที่น้อยที่สุดที่สอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นคือจำนวนใด

8. $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2}$ มีค่าเท่าใด

(ตอบเป็นทศนิยม 3 ตำแหน่งที่มีค่าผิดพลาดน้อยกว่า 0.006)

9. จำนวนนับ n ทั้งหมดซึ่งน้อยกว่า 50 ที่ทำให้ $(n-1)!$ หารด้วย n ไม่ลงตัว มีกี่จำนวน

10. รูปสามเหลี่ยม ABC มีความยาวด้านตรงข้ามมุม A , B และ C เป็น a, b และ c ตามลำดับ โดยที่ $b < c$ D เป็นจุดอยู่บนด้าน BC ที่ทำให้ AD = AC ถ้า BD = x หน่วย แล้วค่าของ $(x + a)^2 + (x + a)^2 \tan^2 B$ ในพจน์ของ a, b, c เป็นเท่าใด

11. $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} A} + \frac{2}{\log_{\frac{2}{3}} A} + \frac{3}{\log_{\frac{3}{4}} A} + \frac{4}{\log_2 A}$ มีค่าเท่าใด

12. เซตคำตอบของสมการ $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \ldots + |x-11| = 55$ คือเซตใด

13. เส้นตรง $x - 2y - 5 = 0$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ ที่จุด A และ B ถ้า O เป็นจุดกำเนิด แล้ว $A\hat{O}B$ มีขนาดเท่าใด

14. ถ้า $\sin(x + y) = 2\sin(x - y)$ และ $2x + y = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan^2 x$ มีค่าเท่าใด

15. กำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ มิติ 4×4 และไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน $\det(\operatorname{adj}A) - \det(A^3)$ มีค่าเท่าใด

เฉลยข้อสอบแข่งขัน คณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

วิชา คณิตศาสตร์ ประจำปี พ.ศ. 2539

ตอนที่ 1.

1. **ตอบ 1.**

แนวคิด เพราะว่าตัวหารคือ $x^2 - 1$ เป็นพหุนามดีกรี 2

เพราะฉะนั้นเศษเหลือต้องเป็นพหุนามดีกรี 1

สมมติเศษเหลือคือ $ax + b$ ดังนั้น ต้องมีพหุนาม $q(x)$ ที่ทำให้

$$\frac{x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}}{x^2-1} = q(x) + \frac{ax+b}{x^2-1}$$

$$\frac{x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}}{x^2-1} - \frac{ax+b}{x^2-1} = q(x)$$

$$(x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}) - (ax + b) = (x^2 - 1)\,q(x)$$

จากทฤษฎีบทของการหารลงตัว

$x - a$ หารพหุนาม $p(x)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $p(a) = 0$

ให้ $p(x) = (x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}) - (ax + b)$

ดังนั้น $p(x) = (x^2 - 1)q(x) = (x + 1)(x - 1)q(x)$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $p(x)$ ลงตัว และ $x + 1$ หาร $p(x)$ ลงตัว

ดังนั้น $p(1) = 0$ และ $p(-1) = 0$

$p(1) = 0\,;\quad (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (a + b) = 0$

$a + b = 6$

$p(-1) = 0\,;\quad (-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1) - (-a + b) = 0$

$-a + b = -6$

เพราะฉะนั้น $a = 6$ และ $b = 0$ สรุปเศษเหลือคือ $6x$

การตัดตัวเลือกแบบที่ 1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

แทนค่า $x = 0$ ก็ตัดตัวเลือกได้แล้ว เมื่อ $x = 0$ จะได้

$$x^2 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = 0$$

เพราะว่า -1 หาร 0 เหลือเศษ 0

แต่ตัวเลือก 3. และ 4. เมื่อแทนค่า $x = 0$ แล้วได้ 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

ดังนั้นแทนค่า $x = 10$ ก็จำแนกตัวเลือกได้แล้ว เมื่อ $x = 10$ จะได้

$x^2 - 1 = 100 - 1 = 99$

$$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243} = x(1+x^2+x^8+x^{26}+x^{80}+x^{242})$$

$$= 10(1+10^2+10^8+10^{26}+10^{80}+10^{242})$$

$$= 10(1+100+100^4+100^{13}+100^{40}+100^{121})$$

$$= 10(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})$$

เพราะว่า 99 หาร $(99+1)^k$ เหลือเศษ 1 ทุกค่า k

เพราะฉะนั้น 99 หาร $(99 + 1)$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99 + 1)^4$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99 + 1)^{13}$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99 + 1)^{40}$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99+1)^{121}$ เหลือเศษ 1

ดังนั้น 99 หาร $(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})$

เหลือเศษ $(1+1+1+1+1+1) = 6$ เพราะฉะนั้น

99 หาร $10(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})$

เหลือเศษ $10(6) = 60$

แทนค่า $x = 10$ ในทุกตัวเลือกจะได้ตัวเลือก 1. เท่านั้นที่มีค่าเป็น 60

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

2. **ตอบ 3.**

แนวคิดเนื่องจากโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า $x = \frac{5}{2}$ จะได้คำตอบเร็วกว่า

$$2x-4 = 2(\tfrac{5}{2})-4 = 1$$

$$2\sqrt{2x-4} = 2\sqrt{1} = 2$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{\tfrac{5}{2}+2} = \sqrt{\tfrac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{\tfrac{5}{2}-2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} &= \sqrt{x+2\sqrt{2(x-2)}}\\ &= \sqrt{(x-2)+2\sqrt{(x-2)2}+2}\\ &= \sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})^2}\end{aligned}$$

$$= \left|\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right|$$

$$= \sqrt{x-2}+\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{x-2\sqrt{2(x-2)}}$$

$$= \sqrt{(x-2)-2\sqrt{(x-2)2}+2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|$$

เพราะว่า $2 < x < 3$

$0 < x-2 < 1$

$\sqrt{x-2} < 1$

$\sqrt{x-2}-\sqrt{2} < 1-\sqrt{2} < 0$

เพราะฉะนั้น $\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right| = -(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})$

สรุป $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$

$$= (\sqrt{x-2}+\sqrt{2})-(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

3. **ตอบ 4.**

แนวคิด สมมติ n, n+1, n+2, n+3, n+4 เป็นจำนวนเต็มบวกที่คูณกันได้เท่ากับ 6375600 เพราะฉะนั้น $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 6375600$

ทำการแยกตัวประกอบของ $6375600 = 100\times63756$

$$= (2\times2\times5\times5)\times2\times2\times3\times3\times7\times11\times23$$

$$= 2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times7\times11\times23$$

$$= (3\times7)\times(2\times11)\times(23)\times(2\times2\times2\times3)\times(5\times5)$$

$$= 21\times22\times23\times24\times25$$

เพราะฉะนั้น $n = 21$ และ $n+4 = 25$

สรุป ผลบวกของจำนวนมากที่สุดกับจำนวนน้อยที่สุด $= 25+21 = 46$

หมายเหตุ ในการสอบจริง การเลือกจับคู่ตัวเลขในผลคูณ

$$2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times7\times11\times23$$

ให้ออกมาเป็น $(3\times7)\times(2\times11)\times(23)\times(2\times2\times2\times3)\times(5\times5)$

เป็นเรื่องที่เสียเวลา ลองใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่า

การตัดตัวเลือก $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 6375600$

พิจารณาค่าของ $n + (n+4) = 2n + 4$ จากตัวเลือกทั้งสี่ตัวดังนี้

เพราะว่า $2n+4$ เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น $2n+4 \neq 43$ และ $2n+4 \neq 45$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

พิจารณาตัวเลือก 2. สมมติ

$$\begin{aligned} n + (n + 4) &= 44 \\ 2n &= 40 \\ n &= 20 \end{aligned}$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 20\times21\times22\times23\times24$$

ต่อไปใช้เหตุผลว่า $20\times21\times22\times23\times24$ ลงท้ายด้วย 0 ตัวเดียวก็ได้

หรือจะคูณจริงก็ได้ $20\times21\times22\times23\times24 = 5100480 \neq 6375600$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เหลือตัวเลือก 4. ข้อเดียวเอามาเป็นคำตอบได้เลย

4. **ตอบ 2.**

แนวคิด p หาร 3083, 3295 และ 3666 เหลือเศษเท่ากับ r เหมือนกัน

ให้ x, y, z เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$$3083 = xp + r \quad \text{.................................(1)}$$

$3295 = yp + r$ ....(2)

$3666 = zp + r$ ....(3)

(2) – (1) ; $212 = (y-x)p$

$(y-x)p = 210 = 2\times2\times53$

(3) – (2) ; $371 = (z-y)p$

$(z-y)p = 371 = 7\times53$

เพราะว่า p ต้องหาร 210 และ 371 ลงตัว เพราะฉะนั้น $p = 53$ เท่านั้น

เพราะว่า 3083 หารด้วย 53 เหลือเศษ 9 เพราะฉะนั้น $r = 9$

สรุป $pr = (53)(9) = 477$

การตัดตัวเลือก พิจารณาความเป็นไปได้ของตัวเลือก 1.

$pr = 435 = 3\times5\times9$

เพราะว่า r ต้องน้อยกว่า p ดังนั้นกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้คือ

$(p = 15, r = 9)$, $(p = 27, r = 5)$, $(p = 45, r = 3)$, $(p = 435, r = 1)$

เพราะว่า 15 หาร 3083 เหลือเศษ 8 ดังนั้น $p = 15$ ไม่ได้

เพราะว่า 27 หาร 3083 เหลือเศษ 5 และ 27 หาร 3295 เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้น $p = 27$ ไม่ได้

เพราะว่า 45 หาร 3083 เหลือเศษ 23 เพราะฉะนั้น $p = 45$ ไม่ได้

เพราะว่า 435 หาร 3083 เหลือเศษ 38 เพราะฉะนั้น $p = 435$ ไม่ได้

สรุป $pr = 435$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

พิจารณาความเป็นไปได้ของตัวเลือก 2. $pr = 477 = 53\times9$

$p = 53$ หาร 3083 เหลือเศษ 9 $p = 53$ หาร 3295 เหลือเศษ 9

$p = 53$ หาร 3666 เหลือเศษ 9

สรุป $pr = 477$ ใช้ได้ เลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

5. ตอบ 3.

แนวคิด กำหนด $x+y = 3-\cos 4\theta$ และ $x-y = 4\sin 2\theta$ แล้วถามว่า $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ เท่ากับเท่าใด คำถามแบบนี้จัดว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ θ ดังนั้นแทนค่า θ บางค่า แล้วหาค่า x, y ก็ต้องได้คำตอบ แทนค่า $\theta = 0$ จะได้

$$x + y = 3 - \cos 4\theta = 3 - \cos 0 = 3 - 1$$

$$x + y = 2 \quad \text{..............................(1)}$$

$$x - y = 4\sin 2\theta = 4\sin 0 = 0$$

$$x - y = 0 \quad \text{..............................(2)}$$

(1)+(2) ; $2x = 2$

$$x = 1$$

$$y = 1$$

เพราะฉะนั้น $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง $x + y = 3 - \cos 4\theta$ ....(1)

$x - y = 4\sin 2\theta$ ....(2)

(1)+(2) ; $2x = 3 - \cos 4\theta + 4\sin 4\theta$

$$= 3 - (1 - 2\sin^2 2\theta) + 4\sin 2\theta$$

$$= 2 + 2\sin^2 2\theta + 4\sin 2\theta$$

$$x = \sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta + 1 = (\sin 2\theta + 1)^2$$

$$x^{\frac{1}{2}} = ((\sin 2\theta + 1)^2)^{\frac{1}{2}} = |\sin 2\theta + 1| = \sin 2\theta + 1$$

จาก (2) ; $y = x - 4\sin 2\theta$

$$= \sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta + 1 - 4\sin 2\theta$$

$$= \sin^2 2\theta - 2\sin 2\theta + 1$$

$$= (\sin 2\theta - 1)^2$$

$$y^{\frac{1}{2}} = (\sin 2\theta + 1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |\sin 2\theta - 1|$$

$$= -(\sin 2\theta - 1)$$

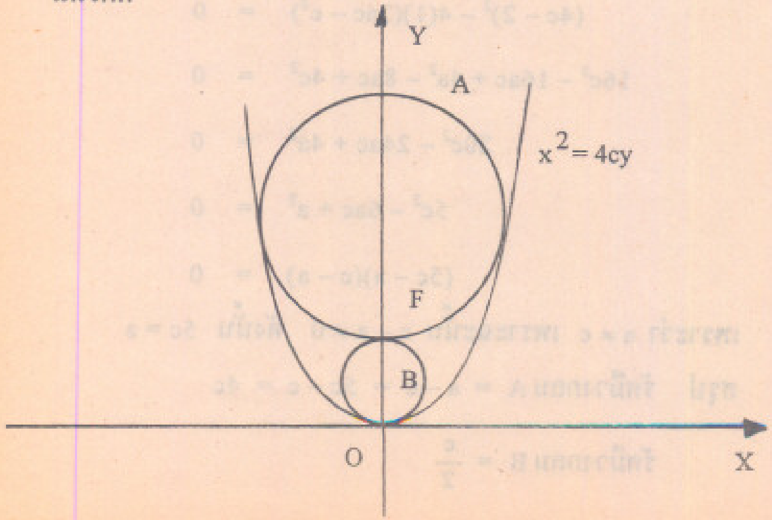
$$= -\sin 2\theta + 1$$

สรุป $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \sin 2\theta + 1 + (-\sin 2\theta + 1) = 2$

สรุปทุกกรณีของมุม θ, $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 2$

6. **ตอบ 4.**

แนวคิด



จุดโฟกัสของพาราโบลาคือ $F(0, c)$

วงกลม A มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, a)$, $a \neq c$

วงกลม B มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, b)$, $a > b$

เพราะว่าวงกลม B ผ่านจุด F และจุด O

เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลม B $= \frac{c}{2}$ ดังนั้น $b = \frac{c}{2}$

รัศมีวงกลม A $= a - c$ สมการวงกลม A คือ

$$(x-0)^2 + (y-a)^2 = (a-c)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay + a^2 = a^2 - 2ac + c^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ay = -2ac + c^2$$

แทนค่า $x^2 = 4cy$ จะได้ $4cy + y^2 - 2ay = -2ac + c^2$

$$y^2 + (4c - 2a)y + 2ac - c^2 = 0$$

สมการนี้มีราก y เพียงค่าเดียวเมื่อ

$$(4c-2)^2 - 4(1)(2ac - c^2) = 0$$

$$16c^2 - 16ac + 4a^2 - 8ac + 4c^2 = 0$$

$$20c^2 - 24ac + 4a^2 = 0$$

$$5c^2 - 6ac + a^2 = 0$$

$$(5c - a)(c - a) = 0$$

เพราะว่า $a \neq c$ เพราะฉะนั้น $c - a \neq 0$ ดังนั้น $5c = a$

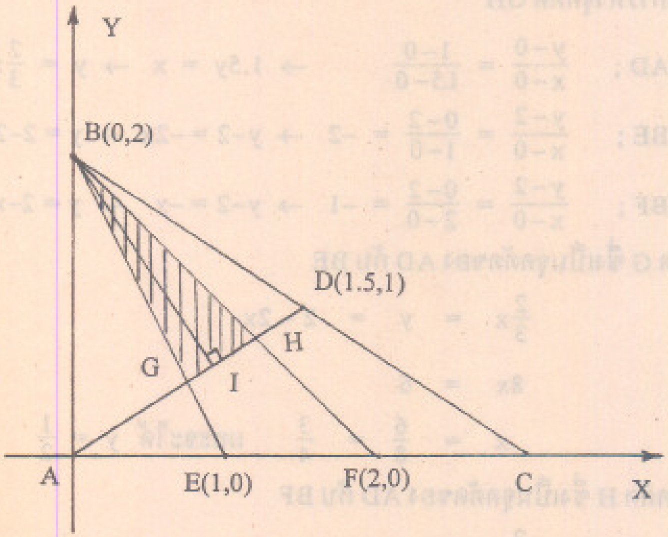
สรุป รัศมีวงกลม A $= a - c = 5c - c = 4c$

รัศมีวงกลม B $= \frac{c}{2}$

$$\frac{\text{area of circle A}}{\text{area of circle B}} = \frac{\pi(4c)^2}{\pi(\frac{c}{2})^2} = \frac{\pi 16c^2}{(\frac{\pi c^2}{4})} = 64$$

7. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของสามเหลี่ยมใดๆ และอัตราส่วน



ใช้สเกล 1 นิ้วต่อหน่วย

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากโดยมีพิกัด A(0, 0) , C(3, 0) , B(0, 2)

พื้นที่ Δ ABC $= \frac{1}{2}(AC)(AB) = \frac{1}{2}(3)(2) = 3$

E, F แบ่ง AC เป็น 3 ส่วน ดังนั้น E, F มีพิกัดเป็น E(1, 0) , F(2, 0)

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

วัดความยาว GH ได้ 0.55 วัดความสูง BI ได้ 1.7

พื้นที่ Δ BGH $= \frac{1}{2}(GH)(BI) = \frac{1}{2}(0.55)(1.7) = 0.4675$

อัตราส่วน $\dfrac{\text{area of }\Delta BGH}{\text{area of }\Delta ABC} = \dfrac{0.4675}{3} = 0.1558 \cong 0.16$

เพราะว่า $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{2}{9} = 0.222$, $\frac{3}{16} = 0.1875$, $\frac{3}{20} = 0.15$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง แบบที่ 1 ใช้เหตุผลทางเรขาคณิตหา พ.ท. ΔBGH จริงๆ ก็ได้

ใช้แก้สมการหาจุดตัด GH

เส้นตรง AD ; $\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{1.5-0} \rightarrow 1.5y = x \rightarrow y = \frac{2}{3}x$

เส้นตรง BE ; $\frac{y-2}{x-0} = \frac{0-2}{1-0} = -2 \rightarrow y-2 = -2x \rightarrow y = 2-2x$

เส้นตรง BF ; $\frac{y-2}{x-0} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \rightarrow y-2 = -x \rightarrow y = 2-x$

การหาจุด G ซึ่งเป็นจุดตัดของ AD กับ BE

$$\frac{2}{3}x = y = 2-2x$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \quad \text{และจะได้ } y = \frac{1}{2}$$

การหาจุดตัด H ซึ่งเป็นจุดตัดของ AD กับ BF

$$\frac{2}{3}x = y = 2-x$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5} \quad \text{และจะได้ } y = \frac{4}{5}$$

สรุป $G(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$, $H(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$

ความยาว GH $= \sqrt{(\frac{3}{4}-\frac{6}{5})^2+(\frac{1}{2}-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{(\frac{15-24}{20})^2+(\frac{5-8}{10})^2}$

$= \sqrt{(\frac{9}{20})^2+(\frac{3}{10})^2} = \sqrt{(\frac{9}{20})^2+(\frac{6}{10})^2} = \sqrt{\frac{81+36}{400}} = \sqrt{\frac{117}{400}} = \frac{3\sqrt{13}}{20}$

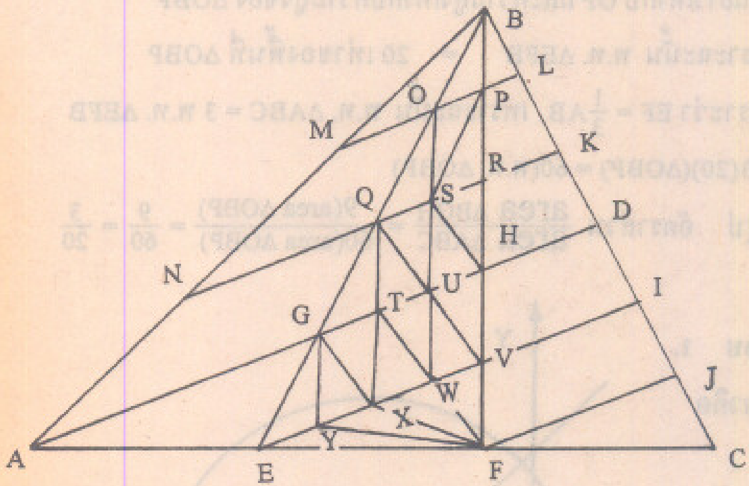
ระยะทางจาก B(0, 2) มายังเส้น AD : $2x - 3y = 0$ มีค่าเท่ากับ

$$BI = \frac{|2(0)-3(2)|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

$$\text{พ.ท. } \Delta BGH = \frac{1}{2}\left(\frac{6}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{3\sqrt{13}}{20}\right) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

$$\text{อัตราส่วน } \frac{\text{area } \Delta BGH}{\text{area } \Delta ABC} = \frac{\left(\frac{9}{20}\right)}{3} = \frac{3}{20}$$

วิธีจริง แบบที่ 2



ลากเส้นเพิ่มเติมดังนี้

1. ลากเส้น EI // AD และ FJ // AD
2. แบ่ง BD ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันที่ K, L
3. ลาก KN, LM ขนานกับ AD

OP ขนานกับ QR ขนานกับ GH และ BO = OQ = QG

ให้ S เป็นจุดกึ่งกลาง QR , T, U แบ่ง GH ออกเป็น 3 ส่วนเท่ากัน ,

W, X, Y แบ่ง EV ออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน

เพราะฉะนั้น $OP = \frac{1}{2}QR$ และ $OP = \frac{1}{3}GH$

พิจารณาภายในรูป ΔBGH จะได้ว่า พ.ท. ΔBGH ประกอบด้วยพื้นที่สามเหลี่ยมชิ้นเล็กๆ จำนวน 9 รูป ซึ่งมีฐานเท่ากันและเท่ากับ OP โดยมีส่วนสูงเท่ากับระยะห่างระหว่างด้านคู่ขนาน OP กับ OR

นั่นคือ พ.ท. ΔBGH = 9 เท่าของพื้นที่ ΔOBP

ภายในรูป ΔEFB ประกอบด้วยสามเหลี่ยมชิ้นเล็กๆ จำนวน 20 ชิ้น ที่มีฐานยาวเท่ากับ OP และความสูงเท่ากับความสูงของ ΔOBP

เพราะฉะนั้น พ.ท. ΔEFB = 20 เท่าของพื้นที่ ΔOBP

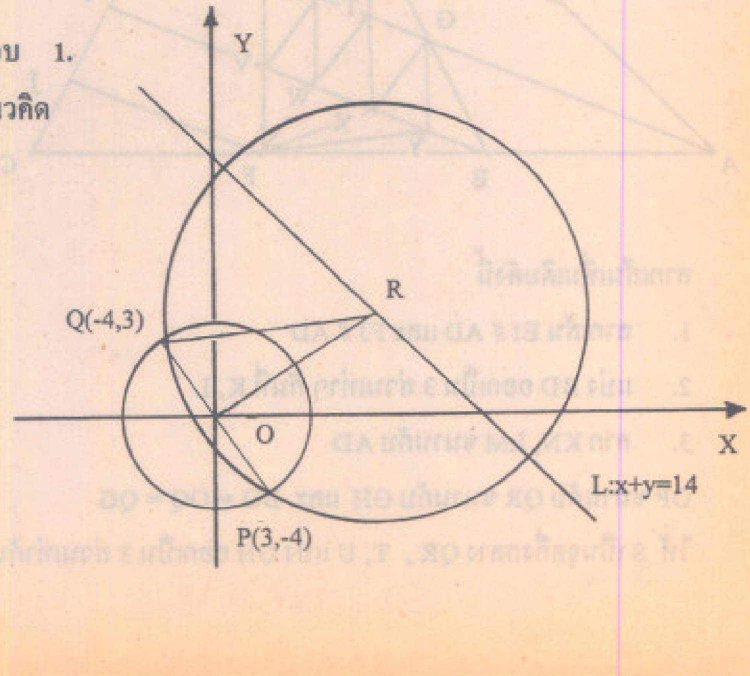
เพราะว่า $EF = \frac{1}{3}AB$ เพราะฉะนั้น พ.ท. ΔABC = 3 พ.ท. ΔEFB

= 3(20)(ΔOBP) = 60(พ.ท. ΔOBP)

สรุป อัตราส่วน $\dfrac{\text{area } \Delta BGH}{\text{area } \Delta ABC} = \dfrac{9(\text{area } \Delta OBP)}{60(\text{area } \Delta OBP)} = \dfrac{9}{60} = \dfrac{3}{20}$

8. ตอบ 1.

แนวคิด



การหาคำตอบโดยวิธีวาดรูป

1. เขียนวงกลม B ซึ่งเป็นวงกลมรัศมี 5 และจุดศูนย์กลาง (0, 0)
2. เขียนเส้นตรง L : $x + y = 14$
3. เขียนจุด P(3, −4) แล้วลากเส้นผ่านศูนย์กลาง PQ
4. ลากเส้นตั้งฉากกับ PQ ที่จุด O ตัดเส้นตรง L ที่จุด R

เพราะว่า PQ เป็นคอร์ดของวงกลม A เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงกลม A ต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ PQ OQ ตัดกับเส้นตรง L ที่จุด R

เพราะฉะนั้น R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A

ดังนั้น RQ เป็นความยาวของรัศมีวงกลม A

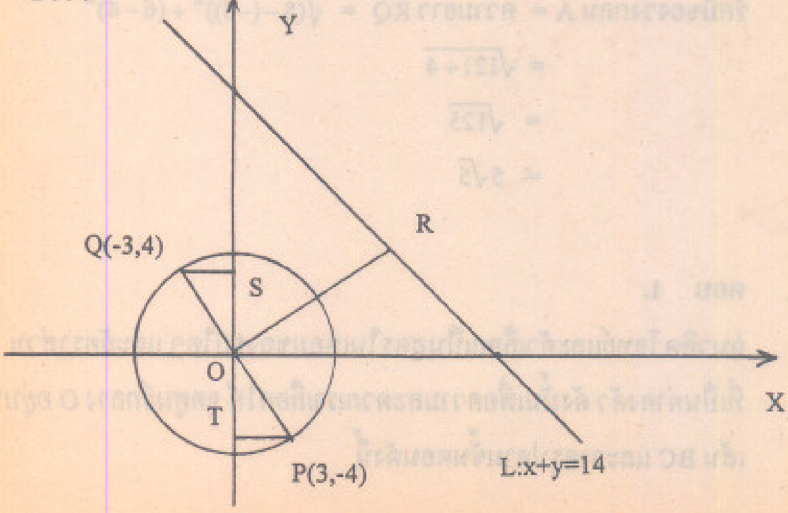
วัดความยาว RQ ได้ 11.2 cm

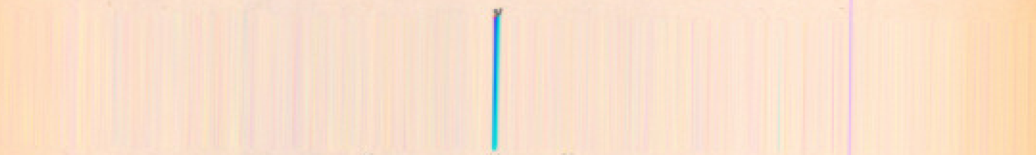
เพราะว่า $\sqrt{5} = 2.24$ เพราะฉะนั้น

$5\sqrt{5} = 11.2$, $4\sqrt{5} = 8.96$, $3\sqrt{5} = 6.7$, $2\sqrt{5} = 4.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. รัศมี $= 5\sqrt{5}$ ดีกว่า

วิธีจริง





ลาก SQ ขนานกับ PT และตั้งฉากกับแกน Y

OQ = OP = 5 , $\hat{SQO} = \hat{TPO}$

จะได้ว่า ΔOQS , ΔOPT เหมือนกันทุกประการ

ดังนั้น QS = PT และ OS = OT

สรุปพิกัด Q คือ (−3, 4)

ความชัน PQ = $\frac{4-(-4)}{-3-3} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

OR ตั้งฉากกับ QP จะได้ความชัน OR = $\frac{3}{4}$

OR ผ่านจุด (0, 0) ดังนั้นสมการเส้นตรง OR คือ $y = \frac{3}{4}x$

แทนค่า $y = \frac{3}{4}x$ ในสมการเส้นตรง L : $x + y = 14$

$$x + \frac{3}{4}x = 14$$

$$x = 8$$

ดังนั้น $y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(8) = 6$

สรุป R มีพิกัดเป็น (8, 6)

รัศมีของวงกลม A = ความยาว RQ = $\sqrt{(8-(-3))^2+(6-4)^2}$

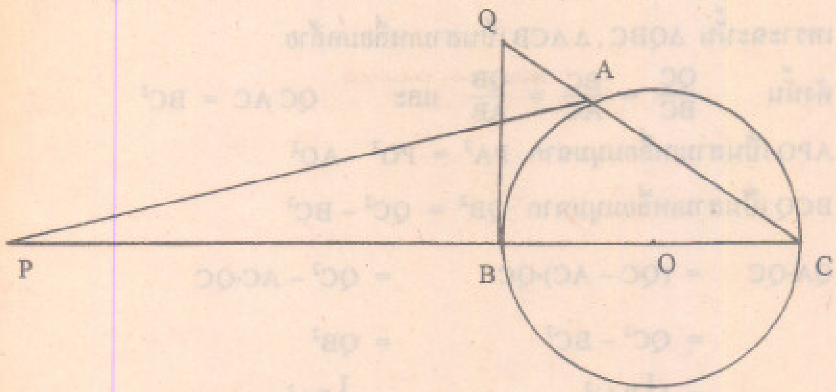
$$= \sqrt{121+4}$$

$$= \sqrt{125}$$

$$= 5\sqrt{5}$$

9. **ตอบ 1.**

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของรูปใดๆ และอัตราส่วนที่เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราเลือกให้ จุดศูนย์กลาง O อยู่บนเส้น BC และวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้



1. เขียนวงกลมรัศมี 2 cm
2. ลากเส้นตรง BOC , ให้ P อยู่บนแนวเส้นตรง BOC
3. ลากเส้น PA สัมผัสวงกลมที่จุด A และ |PA| = 9 cm
4. ลากเส้น BQ ยาว 3 cm.

จะได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์

วัดความยาว $QA = 1.6$ $QC = 5.3$

$PB = 7.3$ $PC = 11.8$

$$\frac{QA \cdot QC}{PB \cdot PC} = \frac{(1.6)(5.3)}{(7.3)(11.8)} = 0.0984 \cong 0.1$$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

ข้อพิสูจน์ เนื่องจากโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นเราเลือกกรณีที่ง่ายๆ มาพิสูจน์ โดยให้ BC ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

เพราะว่า QB เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น $Q\hat{B}C = 90^{o}$

เพราะว่า BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เพราะฉะนั้น $B\hat{A}C = 90^{o}$

พิจารณา ΔQBC และ ΔACB $\quad Q\hat{B}C = 90^\circ = B\hat{A}C$, $Q\hat{C}B$ มุมร่วม

เพราะฉะนั้น ΔQBC , ΔACB เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น $\quad \frac{QC}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{QB}{AB}$ และ $\quad QC\,AC = BC^2$

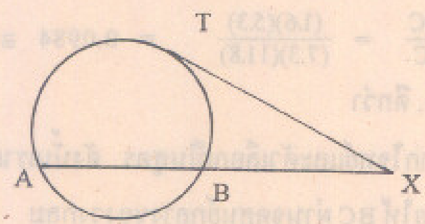
APO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $PA^2 = PO^2 - AO^2$

BCQ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $QB^2 = QC^2 - BC^2$

$$\begin{aligned}
QA{\cdot}QC &= (QC - AC){\cdot}QC && = QC^2 - AC{\cdot}QC \\
&= QC^2 - BC^2 && = QB^2 \\
&= (\tfrac{1}{3}PA)^2 && = \tfrac{1}{9}PA^2 \\
&= \tfrac{1}{9}(PO^2 - AO^2) && = \tfrac{1}{9}(PO^2 - OC^2) \\
&= \tfrac{1}{9}(PO + OC)(PO - OC) && = \tfrac{1}{9}PC{\cdot}(PO - BO) \\
&= \tfrac{1}{9}(PC{\cdot}PB)
\end{aligned}$$

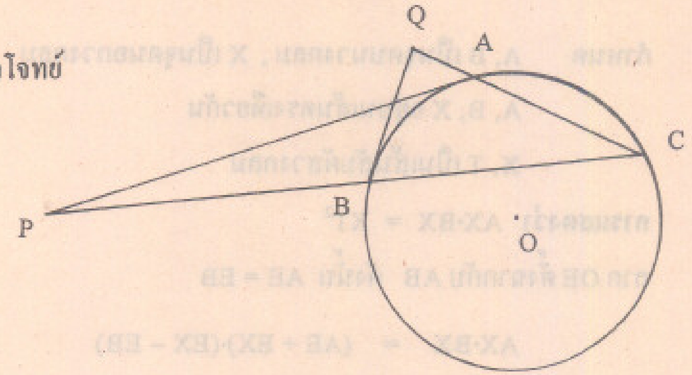
สรุป $\quad \frac{QA \cdot QC}{PC \cdot PB} = \frac{1}{9}$

การพิสูจน์สำหรับกรณีทั่วไป ต้องใช้ผลของทฤษฎีบทที่ 58 ของยูคลิด ซึ่งกล่าวไว้ว่า



X เป็นจุดนอกวงกลม , XT เป็นเส้นสัมผัสวงกลม A, B เป็นจุดบนวงกลม และ A, B, X อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะได้ว่า $\quad AX{\cdot}BX = TX^2$

ดังนั้นจากโจทย์



จะได้ว่า $QA\,QC = QB^2$

และ $PB\,PC = PA^2$

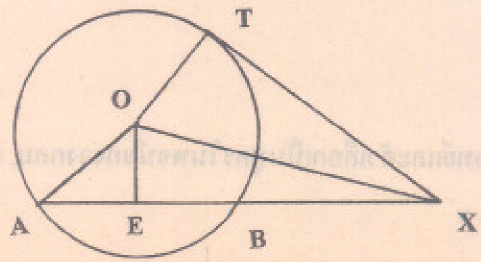
แต่ $QB = \frac{1}{3}PA$

ดังนั้น $QB^2 = \frac{1}{9}PA^2$

$$\frac{QB^2}{PA^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{QA \cdot QC}{PB \cdot PC} = \frac{1}{9}$$

การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 58 ของยูคลิด



กำหนด A, B เป็นจุดบนวงกลม , X เป็นจุดนอกวงกลม

A, B, X อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

X, T เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

การแสดงว่า $AX \cdot BX = XT^2$

ลาก OE ตั้งฉากกับ AB ดังนั้น AE = EB

$$\begin{aligned} AX \cdot BX &= (AE + EX) \cdot (EX - EB) \\ &= (AE + EX) \cdot (EX - AE) \\ &= (EX + AE) \cdot (EX - AE) \\ &= EX^2 - AE^2 \\ &= EX^2 + OE^2 - OE^2 - AE^2 \end{aligned}$$

สามเหลี่ยม AOE เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $AE^2 + OE^2 = AO^2$

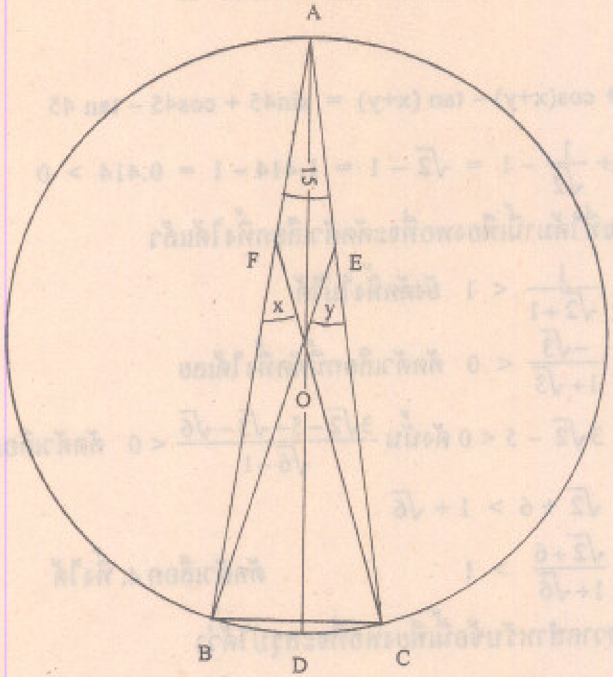
สามเหลี่ยม OEX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $EX^2 + OE^2 = OX^2$

$$\begin{aligned} AX \cdot BX &= (EX^2 + OE^2) - (AE^2 + OE^2) \\ &= OX^2 - AO^2 \\ &= OX^2 - OT^2 \qquad (\because AO = OT) \\ &= TX^2 \qquad (\because \text{OTX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \end{aligned}$$

สรุป $AX \cdot BX = TX^2$

10. ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของวงกลม, สามเหลี่ยม และมุม x, y



การเขียนรูปเลียนแบบโจทย์ทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนวงกลมรัศมี 5 cm. จุดศูนย์กลาง O

2. ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AD

3. ลากเส้น AB ที่ทำให้ $B\hat{A}D = 7.5$ องศา

   ลากเส้น AC ที่ทำให้ $C\hat{A}D = 7.5$ องศา

   ดังนั้น $A\hat{B}C = 15^\circ$ สอดคล้องกับโจทย์

4. ลากเส้น OB ตัดกับ AC ที่จุด E , ลากเส้น OC ตัดกับ AB ที่จุด F

ขณะนี้เราได้สิ่งที่สอดคล้องกับโจทย์ โดยมี $x = B\hat{F}C$ และ $y = B\hat{E}C$

โดยการวัดมุมด้วยไม้บรรทัดจะได้ $B\hat{F}C = 22^\circ$ และ $B\hat{E}C = 22^\circ$

เพราะฉะนั้น $x + y = 22 + 22 = 44 \cong 45$ องศา

$\sin(x+y) + \cos(x+y) - \tan(x+y) = \sin 45 + \cos 45 - \tan 45$

$= \quad \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 1.414 - 1 = 0.414 > 0$

ค่าประมาณที่ได้มานี้เพียงพอที่จะตัดตัวเลือกทิ้งได้แล้ว

ตัวเลือก 1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$ ยังตัดทิ้งไม่ได้

ตัวเลือก 2. $\dfrac{-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 0$ ตัดตัวเลือกนี้ตัดทิ้งได้เลย

ตัวเลือก 3. $3\sqrt{2} - 5 < 0$ ดังนั้น $\dfrac{3\sqrt{2}-5-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} < 0$ ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งได้

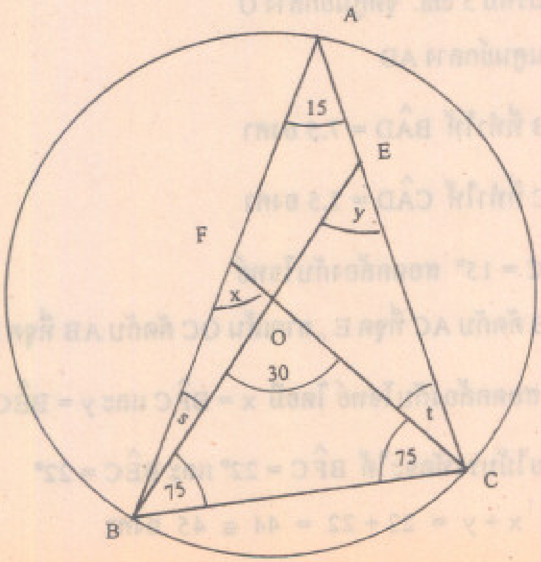
ตัวเลือก 4. $\sqrt{2} + 6 > 1 + \sqrt{6}$

$\dfrac{\sqrt{2}+6}{1+\sqrt{6}} > 1$ ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

จากรูปที่เราวาดสำหรับข้อนี้เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า

$\sin(x^\circ+y^\circ) + \cos(x^\circ+y^\circ) - \tan(x^\circ+y^\circ) = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ แน่นอน

วิธีจริง



เพราะว่า $B\hat{O}C$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C = 2(15) = 30$

เพราะว่า $OB = OC$

เพราะฉะนั้น ΔOBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ดังนั้น $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 75^\circ$

$F\hat{O}B = 180^\circ - B\hat{O}C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ และ $E\hat{O}C = 150^\circ$

ΔOBC ; $x + s = 180 - 150 = 30$;

ΔOBC ; $y + t = 180 - 150 = 30$

$x + s + y + t = 60$ ....(1)

ΔABC ; $15 + s + 75 + 75 + t = 180$

$s + t = 15$ ....(2)

(1) – (2) ; $x + y = 60 - 15 = 45$

$$\sin(x+y) + \cos(x+y) - \tan(x+y) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1$$

$$= \sqrt{2} - 1 \qquad = (\sqrt{2} - 1)\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}$$

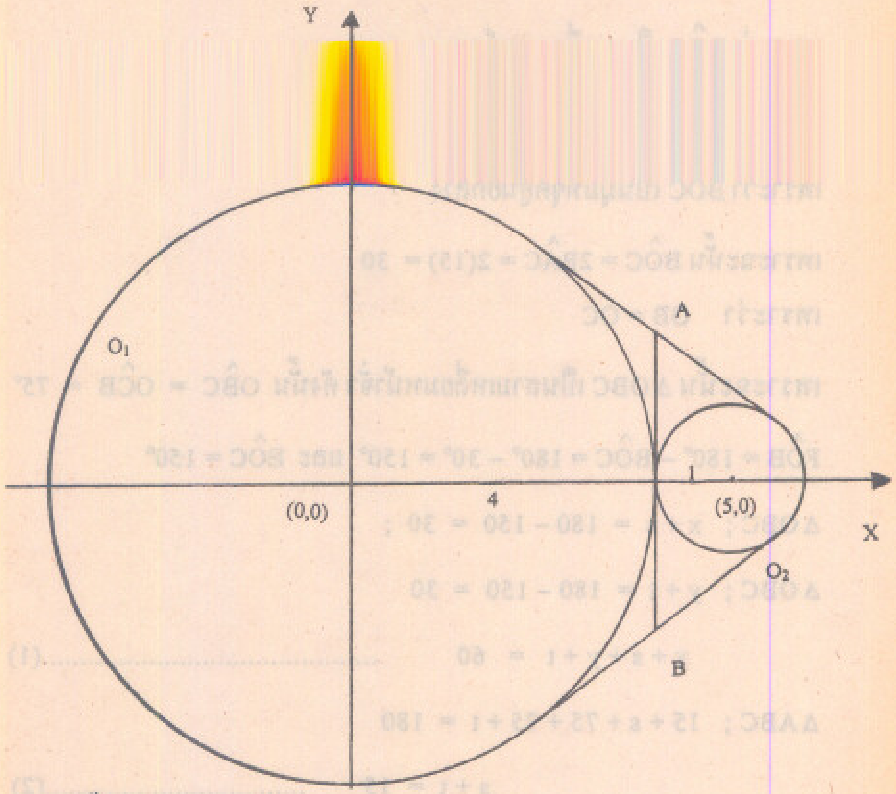
$$= \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} \qquad = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

11. **ตอบ 3.**

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ r_1, r_2

ดังนั้นแทนค่า $r_1 = 4$, $r_2 = 1$ และวาดรูปประกอบก็ตัวตัวเลือกได้แล้ว



ขั้นตอนการวาดรูป

1. เขียนวงกลมรัศมี $r_1 = 4$ จุดศูนย์กลาง (0, 0)
2. เขียนวงกลมรัศมี $r_2 = 1$ จุดศูนย์กลาง (5, 0)
3. ลากเส้นสัมผัสและลากเส้น AB ตั้งฉากกับแกน X
4. วัดความยาว AB ได้ AB = 4

- แทนค่า $r_1 = 4$, $r_2 = 1$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = \dfrac{(2)(4)(1)}{4+1} = \dfrac{8}{5}$

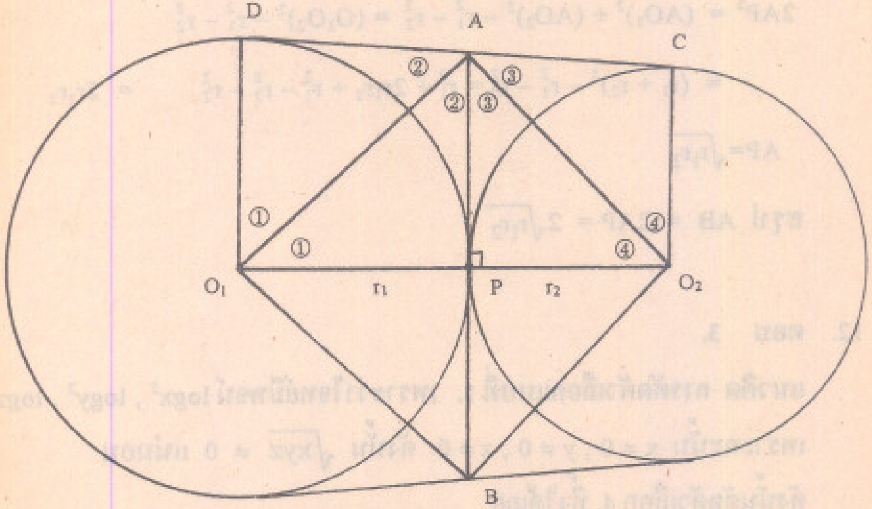
ตัวเลือก 2. $\dfrac{4\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2} = \dfrac{4\sqrt{(4)(1)}}{4+1} = \dfrac{8}{5}$

ตัวเลือก 3. $2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{(4)(1)} = 4$

ตัวเลือก 4. $r_1 + r_2 - \sqrt{r_1r_2} = 4+1-2\sqrt{(4)(1)} = 3$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบดีกว่า

วิธีจริง



P เป็นจุดสัมผัส APB เป็นจุดสัมผัส ดังนั้น $O_1\hat{P}A = 90^\circ$, $O_2\hat{P}A = 90^\circ$

O_1DA และ O_1PA เป็นสามเหลี่ยมคล้าย , $O_1\hat{A}D = O_1\hat{A}P$ = ②

O_2PA และ O_2CA เป็นสามเหลี่ยมคล้าย , $O_2\hat{A}C = O_2\hat{A}P$ = ③

$O_1\hat{A}D + O_1\hat{A}P + O_2\hat{A}C + O_2\hat{A}P = 180$

② + ② + ③ + ③ = 180

เพราะฉะนั้น ② + ③ = 90 สรุป O_1AO_2 เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้น $(O_1A)^2 + (O_2A)^2 = (O_1O_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$

AB เป็นเส้นสัมผัส , O_1P, O_2P เป็นรัศมีวงกลม

เพราะฉะนั้น $O_1\hat{P}A = 90^\circ$, $O_2\hat{P}A = 90^\circ$

ΔO_1PA ; $AP^2 = (AO_1)^2 - (PO_1)^2 = (AO_1)^2 - r_1^2$

ΔO_2PA ; $AP^2 = (AO_2)^2 - (PO_2)^2 = (AO_1)^2 - r_2^2$

$2AP^2 = (AO_1)^2 + (AO_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = (O_1O_2)^2 - r_1^2 - r_2^2$

$= (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_1^2 - r_2^2 - r_2^2 \quad = 2r_1r_2$

$AP = \sqrt{r_1r_2}$

สรุป $AB = 2AP = 2\sqrt{r_1r_2}$

12. ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือกแบบที่ 1. เพราะว่าโจทย์มีพจน์ $\log x^2$, $\log y^2$, $\log z^2$

เพราะฉะนั้น $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ ดังนั้น $\sqrt{xyz} \neq 0$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้เลย

ต่อไปลองใช้เหตุผลแบบง่ายๆ จะเห็นว่า $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$

ทำให้ $\log x^2 = 0$, $\log y^2 = 0$, $\log z^2 = 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\log x^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{\log y^2}{b^2 - c^2} = \dfrac{\log z^2}{c^2 - a^2} = 0$ แน่นอน

ดังนั้น $\sqrt{xyz} = 1$ ใช้ได้แน่นอน จึงเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a, b, c

ดังนั้นแทนค่า a, b, c บางค่าก็สามารถหาคำตอบได้ ตัวอย่างเช่น

แทนค่า $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$

เพราะว่า $\dfrac{\log x^2}{a^2 - b^2} = \dfrac{\log y^2}{b^2 - c^2} = \dfrac{\log z^2}{c^2 - a^2}$

$\dfrac{2\log x}{1-4} = \dfrac{2\log y}{4-9} = \dfrac{2\log z}{9-1}$

$\dfrac{\log x}{-3} = \dfrac{\log y}{-5} = \dfrac{\log z}{8}$

เพราะฉะนั้น $\log y = \frac{5}{3}\log x$ และ $\log z = -\frac{8}{3}\log x$

เพราะฉะนั้น $\log\sqrt{xyz} = \frac{1}{2}\log(xyz)$

$= \frac{1}{2}(\log x + \log y + \log z) = \frac{1}{2}(\log x + \frac{5}{3}\log x - \frac{8}{3}\log x)$

$= (\frac{5}{3})(\log x)(1 + \frac{5}{3} - \frac{8}{3}) = 0 = \log 1$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{xyz} = 1$

วิธีจริง ต้องใช้การจัดรูปทางพีชคณิตแน่นอน

เพราะว่า $\frac{\log x^2}{a^2 - b^2} = \frac{\log y^2}{b^2 - c^2} = \frac{\log z^2}{c^2 - a^2}$

$\frac{2\log x}{a^2 - b^2} = \frac{2\log y}{b^2 - c^2} = \frac{2\log z}{c^2 - a^2}$

เพราะฉะนั้น $\log y = (\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2})\log x$ และ $\log z = (\frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2})\log x$

เพราะว่า $\log(xyz) = \log x + \log y + \log z$

$= \log x + (\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2})\log x + (\frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2})\log x$

$= (\log x)(1 + \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} + \frac{c^2 - a^2}{a^2 - b^2}) = (\log x)[\frac{a^2 - b^2 + b^2 - a^2 + c^2 - a^2}{a^2 - b^2}]$

$= (\log x)(0) = 0 = \log 1$

เพราะฉะนั้น $xyz = 1$ และ $\sqrt{xyz} = 1$

13. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ $A = 2^x$, $B = 3^x$

$2(2^x + 4^x) = 3^x - 6^x + 9^x$

$2(2^x + (2^x)^2) = 3^x - 2^x 3^x + (3^x)^2$

$$2(A + A^2) = B - AB + B^2$$

$$2A + 2A^2 - B + AB - B^2 = 0$$

$$(2A - B)+(2A^2 + AB - B^2) = 0$$

$$(2A - B)+(2A - B)(A + B) = 0$$

$$(2A - B)(1 + A + B) = 0$$

เพราะว่า $1+A+B = 1+2^x+3^x \neq 0$ เพราะฉะนั้น $2A-B = 0$

ดังนั้น $2A - B = 0$

$$2A = B$$

$$2(2^x) = 3^x$$

$$\log(2(2^x)) = \log 3^x$$

$$\log 2 + \log 2^x = \log 3^x$$

$$\log 2 + x\log 2 = x\log 3$$

$$x(\log 3 - \log 2) = \log 2$$

$$x(\log\frac{3}{2}) = \log 2$$

$$x\log(1.5) = \log 2$$

$$x = \frac{\log 2}{\log (1.5)} = \log_{1.5} 2$$

เพราะว่า $1.5 < 2 < 2.25$

$$1.5 < 2 < (1.5)^2$$

$$\log_{1.5} 1.5 < \log_{1.5} 2 < \log_{1.5} (1.5)^2$$

$$1 < \log_{1.5} 2 < 2$$

เพราะฉะนั้น $1 < x < 2$

14. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อความ ก. เป็นเท็จ แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ a เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $a \geq 1$ และ $\ln a > 0$

เพราะว่า $e = 2.718 > 2$ เพราะฉะนั้น $1 = \ln e > \ln 2$

$$\ln 2 < 1$$

$$(\ln a)(\ln 2) < \ln a$$

$$\ln 2^{(\ln a)} < \ln a$$

เพราะว่า ln เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $2^{\ln a} < a$

สรุป ทุกจำนวนเต็มบวก $a \geq 1$, $2^{\ln a} < a$

หมายเหตุ การแสดงว่า $y^{\ln x} = x^{\ln y}$

$$\ln x \ln y = \ln y \ln x$$

$$\ln y^{\ln x} = \ln x^{\ln y}$$

$$y^{\ln x} = x^{\ln y}$$

ข้อความ ข. เป็นเท็จ แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $\log_2 (4^x + 1255) < x + 8$

เพราะฉะนั้น $0 < \log_2 (4^x + 1255) < x + 8 = \log_2(2^{(x+8)})$

เพราะว่า $\log_2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $4^x + 1255 < 2^{x+8}$

$$4^x + 1255 < 2^x\ 2^8$$

$$(2^x)^2 + 1255 < 256\ 2^x$$

$$(2^x)^2 - 256\ 2^x + 1255 < 0$$

$$(2^x - 251)(2^x - 5) < 0$$

$$5 < 2^x < 251$$

สรุป $0 < \log_2(4^x + 1255) < x + 8$ ก็ต่อเมื่อ $5 < 2^x < 251$

เพราะว่า $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$

เพราะฉะนั้น $x = 3,4,5,6,7$ เท่านั้น

สรุป $\{ x \mid \log_2(4^x+1255) < x+8 \} = \{ 3,4,5,6,7\}$

15. ตอบ 2.

แนวคิด $3(2^{\log x}) > 2 + x^{\log 4} = 2 + 4^{\log 4}$

$$3(2^{\log x}) > 2 + (2^{\log 4})^2$$

ให้ $A = 2^{\log x}$ จะได้ $3A > 2 + A^2$

$$A^2 - 3A + 2 < 0$$

$$(A-2)(A-1) < 0$$

$$1 < A < 2$$

ดังนั้น $1 < 2^{\log x} < 2$

$$2^0 < 2^{\log x} < 2^1$$

$$0 < \log x < 1$$

$$\log 1 < \log x < \log 10$$

$$1 < x < 10$$

สรุป $(a, b) = \{x \in R \mid 3(2^{\log x}) > 2 + x^{\log 4}\} = (1, 10)$

เพราะฉะนั้น $a = 1$, $b = 10$ และ $a + b = 11$

16. ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่ 1 $f(3x-5) = 18x^2 - 57x + 48$

เพราะว่า $1 = 3(2) - 5$ เพราะฉะนั้น

$f(1) = f(3(2)-5) = 18(2)^2 - 57(2) + 48 = 72 - 114 + 48 = 6$

$f^2(1) = (f(1))^2 = 6^2 = 36$

เพราะว่า $-1 = 3(\frac{4}{3}) - 5$ เพราะฉะนั้น

$f(-1) = f(3(\frac{4}{3})-5) = 18(\frac{4}{3})^2 - 57(\frac{4}{3}) + 48 = 32 - 76 + 48 = 4$

เพราะว่า $4 = 3(3) - 5$ เพราะฉะนั้น

$f(4) = f(3(3)-5) = 18(3)^2 - 57(3) + 48 = 162 - 171 + 48 = 39$

ดังนั้น $(f \circ f)(-1) = f(f(-1)) = f(4) = 39$

สรุป $(f \circ f)(-1) - f^2(1) = 39 - 36 = 3$

วิธีที่ 2 $f(3x-5) = 18x^2 - 57x + 48$

เพราะว่า $x = 3(\frac{x}{3} + \frac{5}{3}) - 5)$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= f(3(\tfrac{x}{3} + \tfrac{5}{3}) - 5) = 18(\tfrac{x}{3} + \tfrac{5}{3})^2 - 57(\tfrac{x}{3} + \tfrac{5}{3}) + 48 \\ &= \tfrac{18}{9}(x+5)^2 - \tfrac{57}{3}(x+5) + 48 \\ &= 2(x^2 + 10x + 25) - 19(x+5) + 48 \\ &= 2x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

$f(1) = 2 + 1 + 3 = 6$

$f^2(1) = 6^2 = 36$

$f(4) \;=\; 32+4+3 \;=\; 39$

$(f{\circ}f)(-1) \;=\; f(f(-1)) \;=\; f(4) \;=\; 39$

ดังนั้น $\quad (f{\circ}f)(-1) - f^2(1) \;=\; 39 - 36 \;=\; 3$

17. **ตอบ 1.**

แนวคิด

สูตรตรีโกณมิติที่ต้องใช้คือ $2\sin A\cos B \;=\; \sin(A+B) + \sin(A-B)$

จาก $A(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots + \cos 2537x + \cos 2539x$

จะได้ $2\sin x\, A(x) \;=\; 2\sin x(\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \ldots$

$+ \cos 2537x + \cos 2539x)$

$= \quad 2\sin x \cos x + 2\sin x \cos 3x + 2\sin x \cos 5x + \ldots$

$+ 2\sin x \cos 2537x + 2\sin x \cos 2539x$

$= \quad \sin 2x + (\sin 4x + \sin(-2x)) + (\sin 6x + \sin(-4x))$

$+ \ldots + (\sin 2538x + \sin(-2536x)) + \sin(2540x) + \sin(-2538x)$

$= \quad \sin 2x + \sin 4x - \sin 2x + \sin 6x - \sin 4x + \ldots$

$+ \sin 2538x - \sin 2536x + \sin 2540x - \sin 2538x$

$= \quad \sin 2540x$

การหารากของสมการ $A(x) \;=\; 0$

$2\sin x\, A(x) \;=\; 0$

$$\sin 2540x = 0$$

$$2540x = n\pi$$

เพราะว่า $x \in (0, \pi)$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{n\pi}{2540}$ $n = 1,2,3,\ldots,2539$

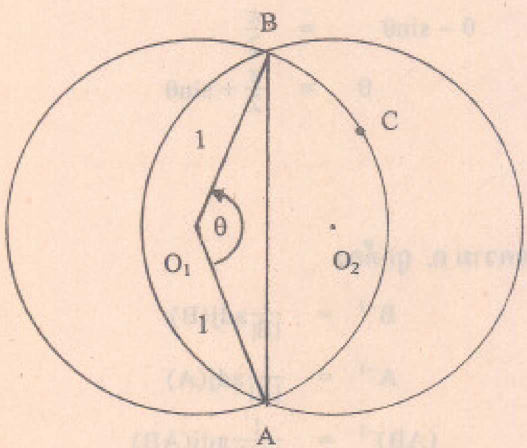
ผลบวกของ x ที่ทำให้ $A(x) = 0$ เท่ากับ $\sum_{n=1}^{2539} \frac{n\pi}{2540}$

$$\sum_{n=1}^{2539} \frac{n\pi}{2540} = \frac{\pi}{2540}\left(\sum_{n=1}^{2539} n\right) = \frac{\pi}{2540}\left(\frac{2539}{2}(2539+1)\right) = 1269.5\pi$$

18. ตอบ 2.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้เข้าลักษณะและตัวเลือกเป็นสูตร

คำว่ารัศมีเท่ากันเราสามารถเลือกให้ค่าของรัศมีมีค่าเท่ากับ 1 ได้เลย



$O_1B = O_1A = 1$

พื้นที่ $\Delta ABO_1 = \frac{1}{2}(O_1B)(O_1A)\sin(AO_1B) = \frac{1}{2}(1)(1)\sin\theta$

วงกลม O_1 มีพื้นที่ $= \pi r^2 = \pi(1)^2 = \pi$

โดยการเทียบบัญญัติไตรยางค์

มุมรอบจุด O_1 2π เรเดียนได้ค่าพื้นที่ $= \pi$

มุมรอบจุด O_1 1 เรเดียนได้ค่าพื้นที่ $= \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$

มุมรอบจุด O_1 θ เรเดียนได้ค่าพื้นที่ $= \frac{\theta}{2}$

พื้นที่บริเวณ O_1ACB มีค่าเท่ากับ $\frac{\theta}{2}$

พื้นที่บริเวณ ABC $=$ พื้นที่บริเวณ O_1ACB – พื้นที่ ΔO_1AB

$= \frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{2}$

พื้นที่ส่วนที่วงกลมตัดกัน $=$ 2 พื้นที่บริเวณ ABC

$= 2(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin\theta}{2})$

$= \theta - \sin\theta$

พื้นที่ส่วนที่วงกลมตัดกัน $= \frac{1}{2}$ พื้นที่บริเวณ O_1

$$\theta - \sin\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \sin\theta$$

19. **ตอบ 1.**

แนวคิดข้อความ ก. ถูกต้อง

จากสูตร $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{adj}(B)$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB)$$

เพราะว่า $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{|AB|}\text{adj}(AB) = \frac{1}{|B|}\text{adj}(B)\frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$

$$\frac{1}{|AB|}\operatorname{adj}(AB) = \frac{1}{|A|\cdot|B|}\operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$$

$$\frac{1}{|AB|}\operatorname{adj}(AB) = \frac{1}{|AB|}\operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$$

สรุป $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(B)\operatorname{adj}(A)$

ข้อความ ข. ถูกต้อง

จากสูตรเบื้องต้นในเรื่องของเมตริกซ์ในระดับปริญญาตรี

เมื่อ $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ และ $C = \frac{1}{2}(A - A^t)$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} B + C &= \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^t + A - A^t) \\ &= A \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} B^t &= (\tfrac{1}{2}(A + A^t))^t \\ &= \frac{1}{2}(A + A^t)^t \\ &= \frac{1}{2}(A^t + (A^t)^t) \\ &= \frac{1}{2}(A^t + A) \\ &= \frac{1}{2}(A + A^t) \\ &= B \end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned} C^t &= (\tfrac{1}{2}(A - A^t))^t \\ &= \frac{1}{2}(A - A^t)^t \\ &= \frac{1}{2}(A^t - (A^t)^t) \\ &= \frac{1}{2}(A^t - A) \\ &= -\frac{1}{2}(A - A^t) \\ &= -C \end{aligned}$$

สรุป มี $B^t = B$, $C^t = -C$ ที่ทำให้ $A = B + C$

20. ตอบ คำตอบที่ถูกต้องไม่มีในตัวเลือก

แนวคิด $\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ \sin\theta & \cos 3\theta & 1 \\ -\cos\theta & \sin 3\theta & 1 \end{vmatrix}$

$$4 = (1)(\cos 3\theta - \sin 3\theta) - (-3)(\sin\theta + \cos\theta) + 0$$

$$4 = \cos 3\theta - \sin 3\theta + 3\sin\theta + 3\cos\theta$$

$$4 = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta - (3\sin\theta - 4\sin^3\theta) + 3\sin\theta + 3\cos\theta$$

$$4 = 4\cos^3\theta + 4\sin^3\theta$$

$$1 = \cos^3\theta + \sin^3\theta$$

เพราะว่าระบบสมการ $x^2 + y^2 = 1$

และ $x^3 + y^3 = 1$

มีคำตอบ (x, y) เพียงสองคำตอบเท่านั้นคือ $(1, 0)$ และ $(0, 1)$

เพราะฉะนั้นระบบสมการ $\sin\theta^2 + \cos\theta^2 = 1$

และ $\sin\theta^3 + \cos\theta^3 = 1$

มีคำตอบ $(\sin\theta, \cos\theta)$ เพียงสองคำตอบเท่านั้นคือ $(1, 0)$ และ $(0, 1)$

เพราะว่า $\theta \in [0, 2\pi)$ เพราะฉะนั้น

$\sin\theta = 1$ และ $\cos\theta = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\sin\theta = 0$ และ $\cos\theta = 1$ ก็ต่อเมื่อ $\theta = 0$

สรุป $\{\theta \in [0, 2\pi) \mid \det A = 4\} = \{0, \frac{\pi}{2}\}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\det A = 0$ คือ $\frac{\pi}{2}$

หมายเหตุ $\{\theta \mid \det A = 0\} = \{0, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$ มีผลบวกเท่ากับ $\frac{5\pi}{2}$

ตอนที่ 2

1. **ตอบ** $f(x) = x^2 + x + 1$

แนวคิด เพราะว่า $f(x) - f(x-1) = 2x$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ ไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว

สมมติ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 1 , $f(x) = a_1x + a_0$

เพราะว่า $f(x) - f(x-1) = (a_1x + a_0) - (a_1(x-1) + a_0)$

$$2x = a_1$$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $f(x)$ ไม่เป็นพหุนามดีกรี 1

สมมติ $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2 , $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\begin{aligned} 2x &= f(x) - f(x-1) \\ &= (a_2x^2 + a_1x + a_0) - (a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0) \\ &= a_2[x^2 - (x-1)^2] + a_1[x - (x-1)] + a_0 - a_0 \\ &= a_2[x^2 - x^2 + 2x - 1) + a_1[x - x + 1] \\ 2x &= 2a_2x - a_2 + a_1 \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $2a_2 = 2$

$$-a_2 + a_1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $a_2 = 1$, $a_1 = 1$

เพราะว่า $f(1) = 3$ เพราะฉะนั้น $a_2 + a_1 + a_0 = 3$ ดังนั้น $a_0 = 1$

สรุป $f(x) = x^2 + x + 1$

2. ตอบ $k = 74$

แนวคิด สมมติ a, b, c, d เป็นรากของสมการ

$$x^4 - 17x^3 + kx^2 + 32x - 384 = 0$$

เพราะฉะนั้น $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

$$= x^4 - 17x^3 + kx^2 + 32x - 384 = 0$$

เพราะว่า $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$

$$= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2$$

$$- (abc+abd+acd+bcd)x + abcd$$

และโดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 17 \\ ab+ac+ad+bc+bd+cd &= k \\ abc+abd+acd+bcd &= -32 \\ abcd &= -384 \end{aligned} \qquad (*)$$

ให้ c, d เป็นรากสองตัวจากสี่ตัวที่ทำให้ $cd = -16$

เพราะฉะนั้นระบบสมการ (*) จะกลายเป็น

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 17 \\ ab+ac+ad+bc+bd+16 &= k \\ abc+abd+a(-16)+b(-16) &= -32 \\ ab(-16) &= -384 \\ ab &= 24 \end{aligned} \qquad (**)$$

แทนค่า $ab = 24$ ในระบบสมการ (**) จะได้

$$a+b+c+d = 17 \qquad \text{...........(1)}$$

$$24+ac+ad+bc+bd-16 = k \quad \text{...........(2)}$$

$$(24)c+(24)d+a(-16)+b(-16) = -32$$

$$24(c+d)-16(a+b) = -32$$

$$3(c+d)-2(a+b) = -4 \quad \text{...........(3)}$$

2(1) ; $$2(c+d)+2(a+b) = 34 \quad \text{...........(4)}$$

(3)+(4) $$5(c+d) = 30$$

$$c+d = 6$$

(1) ; $$(a+b)+6 = 17$$

$$a+b = 11$$

เพราะฉะนั้น $$(a+b)(c+d) = 66$$

$$ac+ad+bc+bd = 66$$

แทนค่าในสมการ (2) ; $$24+66-16 = k$$

สรุป $k = 74$

3. **ตอบ 35**

แนวคิด เพราะว่าโจทย์มีการใช้พจน์ $\log x$ เพราะฉะนั้น $x > 0$

เพราะว่า x เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $x \geq 1$ ดังนั้น $\log x \geq 0$

พิจารณาสมการ $(x+1)^{\log x} < x$

$$\log(x+1)^{\log x} < \log x$$

$$\log x \log(x+1) < \log x$$

$$\log x \log(x+1) - \log x < 0$$

$$(\log(x+1)-1)\log x < 0$$

เมื่อ $x > 1$ จะได้ $\log x > 0$ เพราะฉะนั้น $\log(x+1) - 1 < 0$ และ

$$\log(x+1) < 1$$

$$\log(x+1) < \log(10)$$

$$x+1 < 10$$

$$x < 9$$

เพราะว่า $(1+1)^{\log 1} = 2^0 = 1 \nless 1$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ ไม่ได้

สรุป $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มและ $(x+1)^{\log x} < x\}$

$= \{x \mid 1 < x < 9\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

ผลบวกของสมาชิกใน A ทุกตัวมีค่าเท่ากับ 35

4. ตอบ q

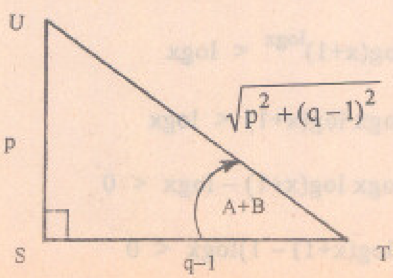
แนวคิด เพราะว่า $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = 0$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $\tan A, \tan B$ เป็นรากของสมการ $x^2 + px + q = 0$

จะได้ว่า $\tan A + \tan B = -p$ และ $\tan A \tan B = q$

ดังนั้น $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{-p}{1-q} = \dfrac{p}{q-1}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมที่มีด้านต่างๆ ดังนี้



จากรูปสามเหลี่ยม STU จะได้ $\sin(A+B) = \frac{p}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}$

$\sin^2(A+B) = \frac{p^2}{p^2+(q-1)^2}$ $\cos(A+B) = \frac{q-1}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}$

$$q\cos^2(A+B) = \frac{q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$$

$$p\sin(A+B)\cos(A+B) = p\left(\frac{p}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}\right)\left(\frac{q-1}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}\right)$$

$$= \frac{p^2(q-1)}{p^2+(q-1)^2}$$

เพราะฉะนั้น $\sin^2(A+B) + p\sin(A+B)\cos(A+B) + q\cos^2(A+B)$

$$= \frac{p^2}{p^2+(q-1)^2} + \frac{p^2(q-1)}{p^2+(q-1)^2} + \frac{q(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$$

$$= \frac{p^2+p^2q-p^2+q^3-2q^2+q}{p^2+(q-1)^2}$$

$$= \frac{q(p^2+q^2-2q+1)}{p^2+(q-1)^2}$$

$$= \frac{q(p^2+(q-1)^2}{p^2+(q-1)^2}$$

$$= q$$

5. **ตอบ** $a = -8$ หรือ $a = -12$

แนวคิด a, b, c เป็นจำนวนเต็ม และ

$$(x-a)(x+10)+1 = (x+b)(x+c)$$

$$x^2+10x-ax-10a+1 = x^2+(b+c)x+bc$$

$$(10-a)x-10a+1 \quad = \quad (b+c)x+bc$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์จะได้ $10-a=b+c$ และ $-10a+1=bc$

$$a = 10-b-c \text{ และ } a = \frac{1-bc}{10}$$

เพราะฉะนั้น $\quad 10-b-c = \frac{1-bc}{10}$

$$100-10b-10c = 1-bc$$

$$bc-10b-10c+100 = 1$$

$$b(c-10)-10(c-10) = 1$$

$$(b-10)(c-10) = 1$$

เพราะว่า b, c เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น b–10, c–10 เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $b-10 = 1 = c-10$ หรือ $b-10 = -1 = c-10$

สรุป $b=c=11$ หรือ $b=c=9$

ถ้า $b=c=11$ จะได้ $a=-12$

ถ้า $b=c=9$ จะได้ $a=-8$

หมายเหตุ $a=8$; $(x+8)(x+1)+1 = x^2-18x+81 = (x+9)(x+9)$

$a=-12$; $(x+12)(x+10)+1 = x^2+22x+121 = (x+11)(x+11)$

6. **ตอบ** 700

แนวคิด ความรู้สำคัญที่ใช้ในข้อนี้คือ m หาร x เหลือเศษ r และ m หาร x เหลือเศษ s จะได้ว่า

$$m \text{ หาร } x+y \text{ เหลือเศษ } \begin{cases} r+s\ , & \text{ถ้า } r+s<m \\ \text{เศษของ } r+s \text{ ที่หารด้วย } m\ , & \text{ถ้า } r+s \geq m \end{cases}$$

และ

$$m \text{ หาร } kx \text{ เหลือเศษ } \begin{cases} kr \ , \text{ ถ้า } kr < m \\ \text{เศษของ } rk \text{ ที่หารด้วย } m \ , \text{ ถ้า } kr \geq m \end{cases}$$

$$(m-1)^k = \binom{k}{0}m^k + \binom{k}{1}m^{k-1}(-1) + \binom{k}{2}m^{k-2}(-1)^2 + \ldots$$

$$+\binom{k}{k-1}m(-1)^{k-1} + (-1)^k$$

$$= m\left[\binom{k}{0}m^{k-1} + \binom{k}{1}m^{k-2}(-1)^2 + \ldots + \binom{k}{k-1}(-1)^{k-1}\right] + (-1)^k$$

ดังนั้น m หาร $(m-1)^k$ เหลือเศษ $(-1)^k$

$$10^3 + 10^6 + 10^9 + \ldots + 10^{3k} = 1000 + 1000^2 + 1000^3 + \ldots + 1000^k$$

$$= [1001-1]+[1001-1]^2 + [1001-1]^3 + \ldots + [1001-1]^k$$

เพราะว่า

$$(1001-1)^m = \binom{m}{0}(1001)^m - \binom{m}{1}(1001)^{m-1} + \binom{m}{2}(1001)^m - \ldots + (-1)^m$$

เพราะฉะนั้น $(1001-1)^m$ หารด้วย 1001 เหลือเศษ $= (-1)^m$

หมายเหตุ ความหมายของเศษเหลือมีค่าเป็น -1 ก็คือเศษเหลือเป็น 1000 แต่เพื่อความสะดวกในการคำนวณจึงเลือก -1 เป็นเศษเหลือสำหรับปัญหาขณะนี้

เพราะฉะนั้น 1001 หาร $(1001-1)^1 + (1001-1)^2 + \ldots + (1001-1)^k$

จะเหลือเศษเท่ากับ

$$(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\dots\pm(-1)^k=\begin{cases}-1\ , & k \text{ เลขคี่}\\ 0\ , & k \text{ เลขคู่}\end{cases}$$

$$1001 \text{ หาร } 10^3+10^6+\dots+10^{3k} \text{ เหลือเศษ } =\begin{cases}-1\ , & k \text{ เลขคี่}\\ 0\ , & k \text{ เลขคู่}\end{cases}$$

นั่นคือ 1001 หาร $10^3+10^6+\dots+10^{3k}$ ลงตัวเมื่อ k เป็นเลขคู่

$$10^3+10^4+10^5+10^6+\dots+10^{999}+10^{100}$$
$$= [10^3+10^6+..+10^{999}]+[10^4+10^7+\dots+10^{1000}]$$
$$+[10^5+10^8+\dots+100^{998}]$$
$$= [10^3+10^6+..+10^{999}]+10[10^3+10^6+\dots+10^{999}]$$
$$+10^2[10^3+10^6+\dots+100^{996}]$$

เพราะว่า $10^3+10^6+..+10^{999} = 10^3+10^6+..+10^{3(333)}$

1001 หาร $10^3+10^6+..+10^{999}$ เหลือเศษ -1

1001 หาร $10(10^3+10^6+..+10^{999})$ เหลือเศษ -10

1001 หาร $10^3+10^6+..+10^{999} = 10^3+10^6+..+10^{3(332)}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 1001 หาร $10^3+10^4+10^5+10^6+\dots+10^{999}+10^{1000}$

เหลือเศษ $= (-1)+(-10)+(0) = -11$

เพราะว่า $1+10+10^2 = 111$ หารด้วย 1001 เหลือเศษ 111

ดังนั้น 1001 หาร $(1+10+10^2)+(10^3+10^4+10^5+\dots+10^{1000})$

จะเหลือเศษเท่ากับ $111+(-11) = 100$

$A = 777\cdots7$ จำนวน 1001 ตัว

$= 7 + 70 + 700 + \ldots + 7\underbrace{000\ldots0}_{1000\text{ ตัว}}$

$= 7(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{1000})$

1001 หาร $7(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{1000})$ จะเหลือเศษเท่ากับ $7(100) = 700$

7. ตอบ 523152

แนวคิด 523000, 523001, 523002, ...

ตัวเลขตัวแรกที่หารด้วย 7 ลงตัวคือ 523005

ตัวเลขตัวแรกที่หารด้วย 8 ลงตัวคือ 523000

ตัวเลขตัวแรกที่หารด้วย 9 ลงตัวคือ 523008

การหาตัวเลข 523xxx ที่ทำให้ 7, 8, 9 หารลงตัว

พิจารณาจากการหาค่า x, y, z ที่ทำให้

$$(523005 + 7x) = 523000 + 8y = 523008 + 9z$$

$$(523005 + 7x) - (523000 + 8y) = 0$$

$$5 + 7x - 8y = 0$$

$$x = \frac{8y-5}{7} \quad \text{\_\_\_\_(1)}$$

$$(523008 + 9z) - (523000 + 8y) = 0$$

$$8 + 9z - 8y = 0$$

$$9z - 8y = -8$$

$$z = \frac{8y-8}{9} \quad \text{\_\_\_\_(2)}$$

จากสมการ (1) และ (2) เราต้องเลือกจำนวนเต็ม y ที่ทำให้ x และ z เป็นจำนวนเต็มด้วย

$$x = \frac{8y-5}{7} = \frac{7y+y-5-2+2}{7}$$

$$= \frac{(7y-7)+(y+2)}{7}$$

$$= (y-1)+\frac{y+2}{7}$$

$$z = \frac{8y-8}{9} = \frac{7y-y-8-1+1}{7}$$

$$= \frac{(9y-9)+y+1}{9}$$

$$= (y-1)+\frac{(1-y)}{9}$$

พิจารณาค่า y ที่ทำให้ $\frac{y+2}{7}$ และ $\frac{1-y}{9}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาตัวเลขที่หารด้วย 7 เหลือเศษ 5 ; 5, 12, 19

ตัวเลขที่หารด้วย 9 เหลือเศษ 1 ; 10, 19

y = 19 เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ทำให้ x, z เป็นจำนวนเต็ม

$$x = (y-1)+\frac{y+2}{7} = (19-1)+\frac{19+2}{7} = 18+3 = 21$$

$$z = (y-1)+\frac{(1-y)}{9} = (19-1)+\frac{1-19}{9} = 18-2 = 16$$

เพราะฉะนั้น $523005 + 7(21) = 523005 + 147 = 523152$

$523000 + 8(19) = 523000 + 152 = 523152$

$523008 + 9(16) = 523008 + 144 = 523152$

สรุป A = 523152

ซึ่งจะได้ว่า $\frac{523152}{7} = 74736$, $\frac{523152}{8} = 65394$, $\frac{523152}{9} = 58128$

หมายเหตุ ใช้เหตุผลเกี่ยวกับการหารลงตัวการหาคำตอบจะทำได้เร็วขึ้น

$7 \mid 523xxx \leftrightarrow 7 \mid (523000 + xxx)$

$\leftrightarrow 7 \mid [(74714)(7) + 2 + xxx]$

$\leftrightarrow 7 \mid (2 + xxx)$

xxx + 2 หารด้วย 7 ลงตัวคือ xxx = 5, 12, 19, ... ________(1)

$8 \mid 523xxx \leftrightarrow 8 \mid (523000 + xxx)$

$\leftrightarrow 8 \mid ((65375)(8) + xxx)$

$\leftrightarrow 8 \mid xxx$

xxx ที่หารด้วย 8 ลงตัวคือ xxx = 0, 8, 16, ... ________(2)

$9 \mid 523xxx \leftrightarrow 9 \mid (523000 + xxx)$

$\leftrightarrow 9 \mid ((58111)(9) + 1 + xxx)$

$\leftrightarrow 9 \mid (1 + xxx)$

xxx + 1 หารด้วย 9 ลงตัวคือ xxx = 8, 17, 26, ... ________(3)

ตัวเลขที่สอดคล้องเงื่อนไข (2) และ (3) คือ

xxx = 8, 8+72, 8+2(72), 8+3(72), ...

= 8, 80, 152, ...

ตัวเลขที่สอดคล้องเงื่อนไข (1), (2) และ (3) คือ

xxx = 152

หมายเหตุ ถ้าคิดว่า 523xxx คือ 523000,523111,523222,...,523999 จะหาคำตอบไม่ได้

8. **ตอบ** 0.1045

แนวคิด $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} = \sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n^2}$

เพราะว่า $0 < n-1 < n < n+1$ เมื่อ $n = 10, 11, \ldots, 1000$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$

และ $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}$

ดังนั้น $\sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n(n-1)}$

เพราะว่า $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{10(11)} + \frac{1}{11(12)} + \ldots + \frac{1}{1000(1001)}$

$= [\frac{1}{10} - + \frac{1}{11}] + [\frac{1}{11} - \frac{1}{12}] + \ldots + \frac{1}{1000(1001)}]$

$= \frac{1}{10} - \frac{1}{1001}$

$= \frac{1001-10}{10(1001)}$

$= \frac{991}{10010} = 0.099$

เพราะว่า $\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{10(9)} + \frac{1}{11(10)} + \ldots + \frac{1}{1000(999)}$

$= [\frac{1}{9} - \frac{1}{10}] + [\frac{1}{10} - \frac{1}{11}] + \ldots + [\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}]$

$= \frac{1}{9} - \frac{1}{1000}$

$= \frac{1000-9}{9(1000)}$

$= \frac{991}{9000} = 0.110$

สรุป $0.099 < \sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n^2} < 0.110$

เพราะว่าค่าผลต่างของ $|0.110 - 0.099| = 0.011$ ซึ่งเมื่อหารด้วย 2

แล้วจะเท่ากับ $0.0055 < 0.006$

เพราะฉะนั้นหากเราประมาณค่าของ $\sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n^2}$ ด้วย $\frac{0.110+0.099}{2} = 0.1045$

สรุป $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} = 0.1045$ ต่างจากค่าจริง ไม่เกิน 0.006

หมายเหตุ ค่าจริงของ $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{12^2} + \ldots + \frac{1}{1000^2} = .1041668$

9. ตอบ 15

แนวคิด ถ้านักเรียนจำได้ว่า n หาร $(n-1)!$ ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ คำตอบก็จะหาง่ายขึ้นดังนี้

เพราะว่าจำนวนนับ 1,2,3,...,49 ที่เป็นจำนวนเฉพาะคือ 2,3,5,7,11,13, 17,19,23,29,31,37 ,41,43,47 มีจำนวน 15 ตัว

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงข้อพิสูจน์ว่า

n หาร $(n-1)!$ ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ

โดยเราจะพิสูจน์ข้อความนี้แทน

n หาร $(n-1)!$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

สมมติ $(n-1)!$ หารด้วย n ลงตัว

เพราะว่า $(n-1)! = 1.2.3...(n-1)$ และ n หาร $1,2,3,...(n-1)$ ลงตัว

และตัวเลข $1,2,3,....,(n-1)$ ทุกตัวน้อยกว่า n

เพราะฉะนั้นต้องมี p ซึ่ง $2 \le p < n$ เป็นตัวประกอบใน n และ $(n-1)!$

เพราะว่า $2 \le p < n$ และ p หาร n ลงตัว

เพราะฉะนั้น n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

สรุป ถ้า n หาร $(n-1)!$ ลงตัว แล้ว n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

การแสดงว่า ถ้า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $(n-1)!$ หารด้วย n ลงตัว

จะใช้เหตุผลว่า ประพจน์ $A \to B$ สมมูลกับ $\sim B \to \sim A$

ดังนั้นจะพิสูจน์ว่า ถ้า n หาร $(n-1)!$ ไม่ลงตัวแล้ว n เป็นจำนวนเฉพาะ

สมมติ n หาร $(n-1)!$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น n ไม่มีตัวประกอบร่วมกับ $1.2.3.4...(n-1)$

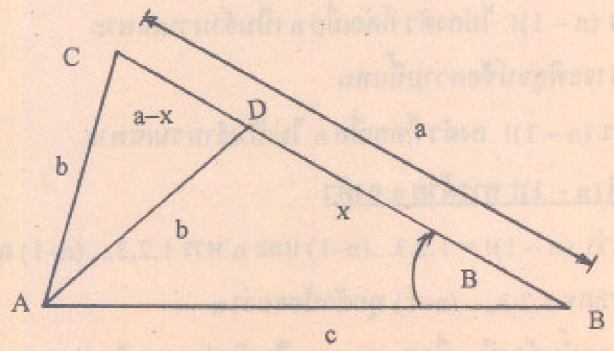
นั่นคือไม่มีตัวเลข $p \in \{2,3,4,...,n-1\}$ ที่ทำให้ p หาร n ลงตัว

เพราะฉะนั้น n เป็นจำนวนเฉพาะ

สรุป ถ้า n หาร $(n-1)!$ ไม่ลงตัว ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเฉพาะ

10. ตอบ $(x+a)^2 + (x+a)^2 \tan^2 B = 4c^2$

แนวคิด



ΔABD ; $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2(AB)(BD)\cos A\hat{B}D$

$b^2 = c^2 + x^2 - 2cx\cos B$ ....(1)

ΔABC; $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2(AB)(BC)\cos A\hat{B}C$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos B$ ....(2)

(1)–(2) ; $0 = x^2 - a^2 - 2cx\cos B + 2ac\cos B$

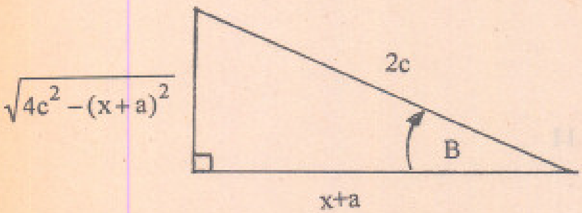
$0 = x^2 - a^2 - 2c(x-a)\cos B$

$0 = (x-a)(x+a) - 2c(x-a)\cos B$

$x-a \neq 0$; $0 = x+a - 2c\cos B$

$\cos B = \frac{x+a}{2c}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉากต่อไปนี้



จะได้ $\tan B = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{\sqrt{4c^2-(x+a)^2}}{x+a}$

$\tan^2 B = \frac{4c^2-(x+a)^2}{(x+a)^2}$

$(x+a)^2\tan^2 B = 4c^2 - (x+a)^2$

$(x+a)^2 + (x+a)^2\tan^2 B = 4c^2$

11. **ตอบ** 0

แนวคิด $$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} A}+\frac{2}{\log_{\frac{2}{3}} A}+\frac{3}{\log_{\frac{3}{4}} A}+\frac{4}{\log_2 A}$$

$$=\frac{1}{\left[\frac{\log A}{\log\frac{1}{3}}\right]}+\frac{1}{\left[\frac{\log A}{\log\frac{2}{3}}\right]}+\frac{1}{\left[\frac{\log A}{\log\frac{3}{4}}\right]}+\frac{1}{\left[\frac{\log A}{\log 2}\right]}$$

$$=\frac{\log\frac{1}{3}}{\log A}+\frac{2\log\frac{2}{3}}{\log A}+\frac{3\log\frac{3}{4}}{\log A}+\frac{4\log 2}{\log A}$$

$$=\frac{1}{\log A}\left[\log\frac{1}{3}+\log(\frac{2}{3})^2+\log(\frac{3}{4})^3+\log(2)^4\right]$$

$$=\frac{1}{\log A}\left[\log((\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^2(\frac{3}{4})^3(2)^4)\right]$$

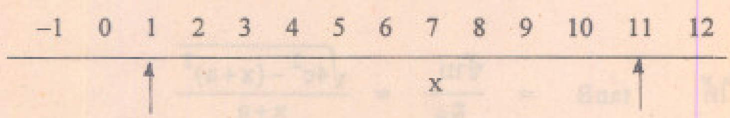
$$=\frac{1}{\log A}\left[\log(\frac{2^6\cdot 3^3}{3^3\cdot 4^3})\right]$$

$$=\frac{\log 1}{\log A}$$

$$= 0$$

12. **ตอบ** $x = 1$, $x = 11$

แนวคิด



เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่าค่าของ

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11|$$

เป็นผลบวกของระยะทางจากจุด x ไปยัง 1,2,3,...,11

ดังนั้น $|1-1|+|1-2|+|3-3|+...+|1-11| = 0+1+2+...+10 = 55$

และ $|11-1|+|11-2|+|11-3|+...+|11-11|$

$= 10+9+8+...+3+2+1+0 = 55$

เพราะฉะนั้น $x = 1$, $x = 11$ เป็นคำตอบ

เหตุผลที่สามารถยืนยันได้ว่ามี $x = 1$ และ $x = 11$ เท่านั้นที่เป็นคำตอบ

พิจารณาได้จาก

ถ้า $x < 1$ จะทำให้ระยะทางจาก x มายังทุกจุด 1,2,3,...,11 มากขึ้น

ทำให้ $|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11| > 55$

ถ้า $x > 11$ จะทำให้ระยะทางจาก x มายังทุกจุด 1,2,3,...,11 มากขึ้น

ทำให้ $|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11| > 55$

แต่ถ้า $1 < x < 11$ จะทำให้ระยะทางโดยรวมจาก x ไปยัง 1,2,3,...,11

ลดน้อยลงทำให้ $|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11| < 55$

เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$x < 1$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= -(x-1) \\
|x-2| &= -(x-2) \\
&\vdots \\
|x-11| &= -(x-11)
\end{aligned}
$$

$|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11|$

$= -(x-1)-(x-2)-...-(x-11) = -11x+(1+2+3+...+11) = -11x+66$

แต่ $x < 1$, $-11x > -11$ ดังนั้น $-11x+66 > 55$

นั่นคือ ถ้า $x < 1$ แล้ว $|x-1|+|x-2|+|x-3|+...+|x-11| > 55$

$x > 11$ จะได้

$$
\begin{aligned}
|x-1| &= x-1 \\
|x-2| &= x-2
\end{aligned}
$$

$$\vdots$$

$$|x-11| \;=\; x-11$$

$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-11|$

$= (x-1)+(x-2)+\ldots+(x-11) = 11x-(1+2+3+\ldots+11) = 11x+66$

เพราะว่า $x > 11$, $11x > 121$ ดังนั้น $11x-66 > 55$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x > 11$ แล้ว $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\ldots+|x-11| > 55$

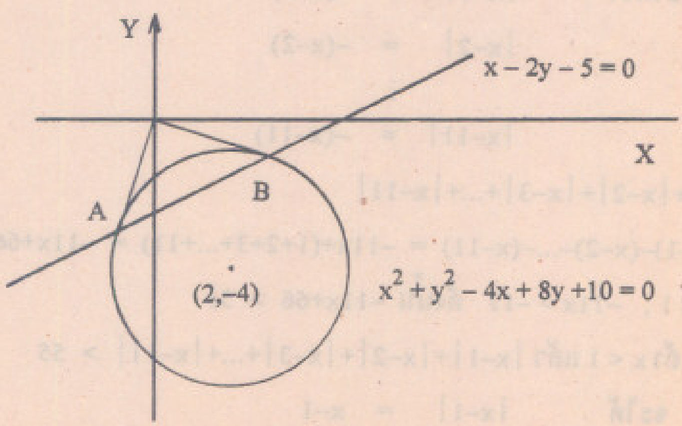
13. **ตอบ** $A\hat{O}B = 90^\circ$

แนวคิด $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 8y + 16) = -10 + 4 + 16$$

$$(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$$

วงกลมจุดศูนย์กลาง $(2,-4)$ รัศมี $\sqrt{10}$



จากรูปที่วาดได้ มุม $A\hat{O}B$ มีค่าประมาณ 90° แต่เนื่องจากเป็นข้อสอบแบบเติม คำตอบจะได้ค่าจริงต้องคำนวณต่อดังนี้

แทนค่า $x = 2y + 5$ ในสมการวงกลม

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 &= 0\\
(2y+5)^2 + y^2 - 4(2y+5) + 8y + 10 &= 0\\
4y^2 + 20y + 25 + y^2 - 8y - 20 + 8y + 10 &= 0\\
5y^2 + 20y + 15 &= 0\\
y^2 + 4y + 3 &= 0\\
(y+3)(y+1) &= 0\\
y &= -1, -3
\end{aligned}$$

เพราะว่า $x = 2y+5$ เพราะฉะนั้น $x = 3, -1$

ดังนั้น $A(-1,-3)$ และ $B(3,-1)$ เป็นจุดตัด

ความชัน OA $= \frac{-3}{-1} = 3$, ความชัน OB $= \frac{-1}{3}$

(ความชัน OA)(ความชัน OB) $= (3)(-\frac{1}{3}) = -1$

สรุป $A\hat{O}B = 90^\circ$

14. ตอบ $\tan^2 x = \frac{3}{5}$

แนวคิด $\sin(x+y) = 2\sin(x-y)$

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y + \sin y \cos x &= 2(\sin x \cos y - \sin y \cos x)\\
&= 2\sin x \cos y - 2\sin y \cos x
\end{aligned}$$

$$-\sin x\cos y + 3\sin y\cos x = 0$$

$$3\sin y\cos x = \sin x\cos y$$

$$3\frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$3\tan y = \tan x$$

$$\tan y = \frac{1}{3}\tan x \quad ....(1)$$

เพราะว่า $2x+y = \frac{\pi}{2}$,

$$2x = \frac{\pi}{2} - y$$

$$\tan 2x = \tan(\frac{\pi}{2} - y) = \cot y$$

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{1}{\tan y}$$

จาก (1) ; $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{1}{(\frac{1}{3}\tan x)} = \frac{3}{\tan x}$

$$2\tan^2 x = 3(1-\tan^2 x) = 3 - 3\tan^2 x$$

$$5\tan^2 x = 3$$

$$\tan^2 x = \frac{3}{5}$$

15. **ตอบ** $\det(\operatorname{adj}(A)) - \det(A^3) = 0$

แนวคิด เพราะว่าโจทย์กำหนดเป็นเมตริกซ์ A ใดๆ

เพราะฉะนั้นคำถามมีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ A

แทนค่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ก็จะได้คำตอบเหมือนกรณีทั่วไป

จะได้ว่า $\det(A) = 1$

เพราะว่า $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $\det(A^3) = 1$

เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \mathrm{adj}(A) = \frac{1}{1}\ \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)$

เพราะฉะนั้น $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{1} = 1$

สรุป $\det(\mathrm{adj}(A)) - \det(A^3) = 1 - 1 = 0$

วิธีจริง เพราะว่า A ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

เพราะฉะนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \mathrm{adj}(A) &= (\det(A))A^{-1} \\ \det(\mathrm{adj}(A)) &= \det(\det(A)\ A^{-1}) \\ &= (\det(A))^4 \det(A^{-1}) \quad (\because A^{-1} \text{ มิติ } 4\times4) \\ &= \frac{(\det(A))^4}{\det(A)} \\ &= (\det(A))^3 \\ &= \det(A^3) \end{aligned}$$

สรุป $\det(\mathrm{adj}(A)) - \det(A^3) = 0$

หมายเหตุ ในกรณีทั่วไปจะได้ว่า

ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ และ $|A| \neq 0$ แล้ว $\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $|A| \neq 0$ เพราะฉะนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{adj}(A)$

ดังนั้น $\mathrm{adj}(A) = (\det(A))A^{-1}$ และ $\det(\mathrm{adj}(A)) = \det(\det(A)\, A^{-1})$

$$= (\det(A))^n \det(A^{-1}) \quad (\because A^{-1} \text{ มิติ } n \times n)$$

$$= \frac{(\det(A))^n}{\det(A)} = (\det(A))^{n-1}$$

สรุป $\det(\mathrm{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$

สูตรที่สำคัญเกี่ยวกับ adj(A) และ adj(B) เมื่อ $|A| \neq 0$ และ $|B| \neq 0$

1. $|A| \cdot A^{-1} = \mathrm{adj}(A)$
2. $\mathrm{adj}(AB) = \mathrm{adj}(B)\mathrm{adj}(A)$
3. $A \cdot \mathrm{adj}(A) = |A| \cdot I_n$
4. $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A) \cdot A$
5. $\mathrm{adj}(A^t) = (\mathrm{adj}(A))^t$
6. $\mathrm{adj}(-A) = (-1)^{n+1}\mathrm{adj}(A)$
7. $\mathrm{adj}(kA) = k^{n-1}\mathrm{adj}(A)$

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩

23 คะแนนภายใน 23 นาทีจาก คณิตศาสตร์ ก. 2540
วันพฤหัสบดีที่ 10 เมษายน 2540

บทความนี้นักเรียนจะได้เห็นวิธีการ ได้คะแนน 23 คะแนนโดยใช้เวลาไม่มาก เพื่อเป็นการเป็นการเน้นให้เห็นความรวดเร็วและถูกต้องของการตัดตัวเลือกตามวิธีที่ได้เขียนไว้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย ทุกเล่มที่ผ่านมา โดยนำข้อสอบคณิตศาสตร์ ก.ที่สอบเมื่อวันพฤหัสบดีที่ 10 เมษายน 2540 ที่สามารถหาคำตอบได้อย่างรวดเร็วด้วยวิธีตัดตัวเลือก สำหรับข้อสอบฉบับสมบูรณ์ที่มีเฉลยด้วยวิธีจริงเปรียบเทียบกับวิธีตัดตัวเลือกอย่างละเอียดติดตามอ่านได้ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

3. เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \le 2 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-2, 1]$ 2. $[-1, 2]$ 3. $[-2, 1)$ 4. $[-1, 2)$

3. ตอบ 1.

การตัดตัวเลือก **เซตคำตอบคือข้อใด** **ตรงกับหลักการตัดตัวเลือกพอดี**

$x = -2$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

$x = 1$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

5. ประพจน์ข้อใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow q$

1. $\sim p \vee q$ 2. $p \vee \sim q$ 3. $\sim p \wedge q$ 4. $p \wedge \sim q$

5. ตอบ 1.

แนวคิด ข้อนี้วัดความจำ จำสูตรได้ดีที่สุด $p \rightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ $\sim p \vee q$ และที่สำคัญคือสูตรนี้ออกสอบENTANCE ทุกปี

7. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป R×R

1. $\{(x, y, z) \mid x = y + z\}$ 2. $\{(x, (y, z)) \mid x = y + z\}$
3. $\{((x, y), z) \mid x = y + z\}$ 4. $\{((x, y), (y, z)) \mid x = y + z\}$

7. ตอบ 2.

แนวคิด สมาชิกของ R×(R×R) ต้องมีรูปแบบเป็น $(x, (y, z))$

สรุปตัวเลือก 2. ถูกต้อง

9. ถ้า $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ แล้ว $f(x+4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2x+11}{x+2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2}$ 3. $\frac{2x+3}{x+2}$ 4. $\frac{2x+11}{x-2}$

9. ตอบ 1.

การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $x = 0$ ค่าของโจทย์ $f(x+4) = f(4) = \frac{11}{2}$ ค่าแต่ละตัวเลือก

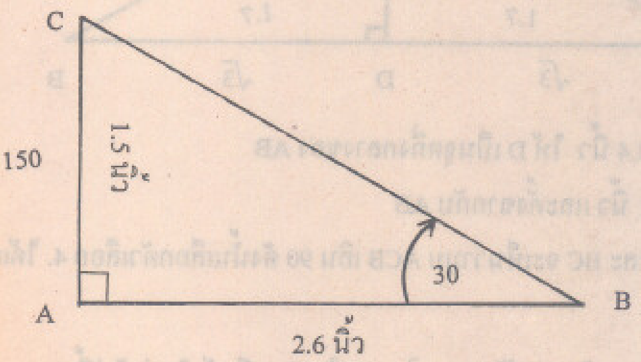
1. $\frac{2x+11}{x+2} = \frac{11}{2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{11}{2}$
3. $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2} \neq \frac{11}{2}$ 4. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{3}{-2} \neq \frac{11}{2}$

11. เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบ แล้วตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{150}{\sqrt{2}}$ 3. $150\sqrt{3}$ 4. $150\sqrt{2}$

11. ตอบ 3.

แนวคิด เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยให้ AC = 150 (ใช้ 1 นิ้ว ต่อ 100 เมตร) CAB = 90 องศา AC แทนตึกสูง 150 เมตร และ ABC = 30^o



เพราะฉะนั้น AB คือเงาของตึก

จากรูป AB ยาวกว่า AC เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปวัดความยาว AB ได้ 2.6 นิ้ว = 260 เมตร

3. $150\sqrt{3} = 150(1.7) = 255$ 4. $150\sqrt{2} = 150(1.4) = 210$

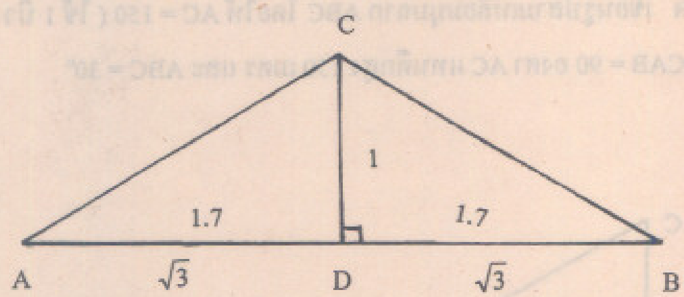
สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

12. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30^o 2. 60^o 3. 90^o 4. 120^o

12. ตอบ 4.

แนวคิด $2\sqrt{3} = 2(1.7) = 3.4$



ลาก AB ยาว 3.4 นิ้ว ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ลาก CD ยาว 1 นิ้ว และตั้งฉากกับ AB

ลากเส้น AC และ BC จะเห็นว่ามุม ACB เกิน 90 ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

13. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 = 144$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,-5)$ และ $(0,5)$
2. $(0,-\sqrt{7})$ และ $(0,\sqrt{7})$
3. $(-5,0)$ และ $(5,0)$
4. $(-\sqrt{7},0)$ และ $(\sqrt{7},0)$

13. ตอบ 1.

แนวคิด
$$9y^2 - 16x^2 = 144$$
$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

เป็นไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวาง ทับแกน Y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มี $a = 4$, $b = 3$ และ $c > a = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

14. ถ้า A และ B เป็นจุดที่วงกลม $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ ตัดกับแกน Y แล้ว ข้อใดต่อไปนี้คือระยะทางจาก A ไป B

1. $2\sqrt{3}$ 2. $4\sqrt{3}$ 3. 6 4. 8

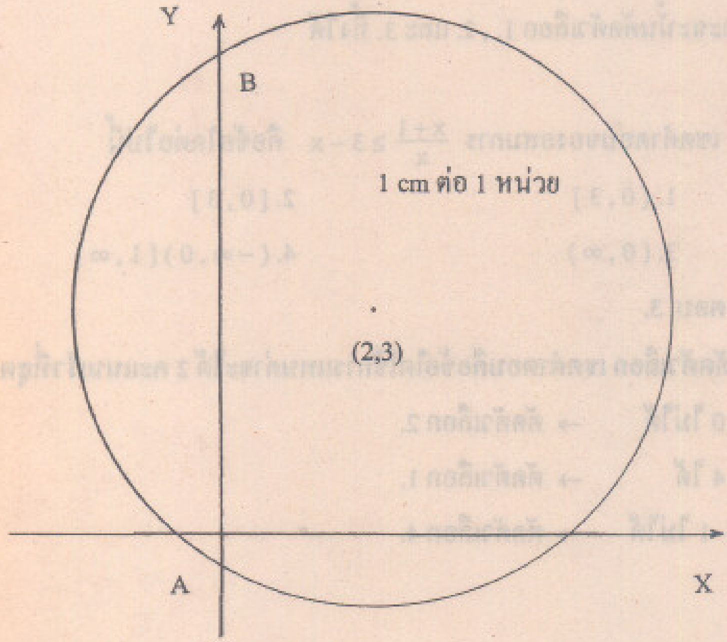
14. ตอบ 2.

แนวคิด ใช้การวาดรูปแล้ววัดระยะทาง

เพราะว่าวงกลม $x^2+y^2+Px+Qy+R=0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{P}{2},-\frac{Q}{2})$

และ รัศมี $\sqrt{(\frac{P}{2})^2+(\frac{Q}{2})^2-R}$ เพราะฉะนั้นวงกลม $x^2+y^2-4x-6y-3=0$

มีจุดศูนย์กลาง (2,3) และ รัศมี $\sqrt{4+9+3}=4$



วัดระยะทาง AB จากรูปได้ 7 cm

1. $2\sqrt{3}=2(1.73)=3.46$

2. $4\sqrt{3}=4(1.73)=6.92$ สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

15. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\log_a(2a)^b$

1. $2b$ 2. 2^b 3. $\log_a 2 + b$ 4. $b\log_a 2 + b$

15. ตอบ 4.

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a และ b

แทนค่า $a = 10$ และ $b = 2$ ค่าของโจทย์ $\log_a(2a)^b = \log(20^2) = \log 400$

1. $2b = 4 \neq \log 400$

2. $2^b = 4 \neq \log 400$

3. $\log_a 2 + b = \log 2 + 2 = \log 2 + 2\log 10 = \log 2 + \log 100 = \log 200 \neq \log 400$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

33. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 3]$ 2. $[0, 3]$

3. $(0, \infty)$ 4. $(-\infty, 0)[1, \infty)$

33. ตอบ 3.

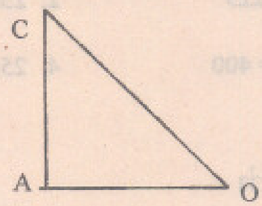
การตัดตัวเลือก เซตคำตอบคือข้อใดใช้การแทนค่าจะได้ 2 คะแนนเร็วที่สุด

$x = 0$ ไม่ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

$x = 4$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$x = -1$ ไม่ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 4.

42. กำหนดให้ AOC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป โดยที่มุม AOC = 60° และด้าน AC ยาว 8 หน่วย ถ้า B เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AC โดยที่เส้น BO แบ่งครึ่งมุม AOC แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของเส้นตรง BC

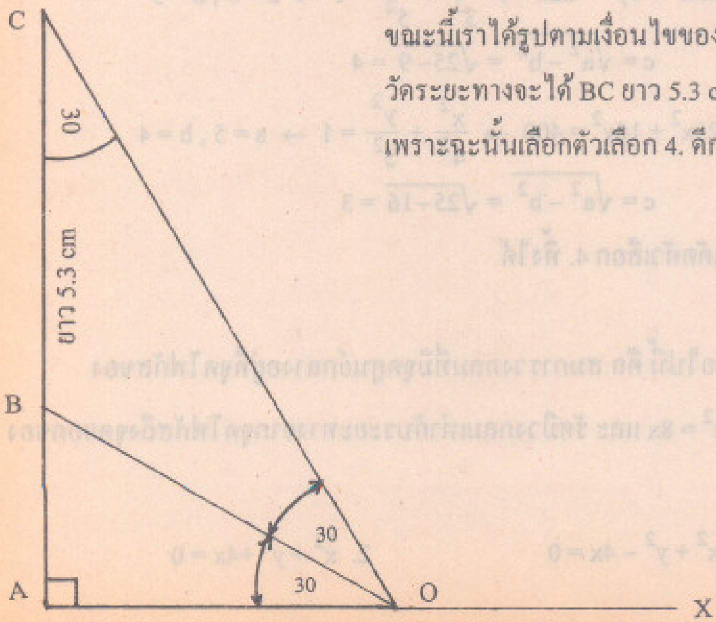


1. 2   2. 4   3. $\frac{8}{3}$ 4. $\frac{16}{3}$

42. ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปจริงตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ลากเส้น AX และ AC ยาว 8 cm. ตั้งฉากกับ AX
2. ลาก CO เพื่อให้ ACO = 30 องศา เพราะฉะนั้น AOC = 60 องศา



ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

วัดระยะทางจะได้ BC ยาว 5.3 cm

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

43. สมการวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0, –5) และ (0, 5) และจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย คือข้อใดต่อไปนี้

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$
2. $25x^2 + 9y^2 = 225$
3. $16x^2 + 25y^2 = 400$
4. $25x^2 + 16y^2 = 400$

43. ตอบ 2.

แนวคิด ดูจากตัวเลือกพบว่า

ตัวเลือก 1. แกนเอกทับแกน X ตัวเลือก 2. แกนเอกทับแกน Y

ตัวเลือก 3. แกนเอกทับแกน X ตัวเลือก 4. แกนเอกทับแกน Y

เพราะว่าวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0, –5) และ (0, 5)

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่าจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย เพราะฉะนั้น $2c = 8$ และ $c = 4$

ตัวเลือก 2. $25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \rightarrow a = 5 , b = 3$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

ตัวเลือก 4. $25x^2 + 16y^2 = 400 \rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \rightarrow a = 5 , b = 4$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

44. ข้อใดต่อไปนี้ คือ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และ รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา

1. $x^2 + y^2 - 4x = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ 4. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

44. ตอบ 1.

แนวคิด สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$

$$y^2 = 8x = 4(2)x$$

เป็นพาราโบลา แกนพาราโบลาทับแกน X จุดยอด (0,0) จุดโฟกัส (2,0)

เพราะฉะนั้นวงกลมที่โจทย์ต้องการต้องมีจุดศูนย์กลางที่ (2,0)

สูตรที่ใช้ได้ในการสอบ ENTRANCE ทุกครั้ง $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางแต่ละตัวเลือกคือ

1. (2,0) 2. (–2,0) 3. (0,2) 4. (0,–2)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

45. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $2^x - 2^{x-1} = 16$ แล้ว $x^2 + x + 1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 25 3. 28 4. 31

45. ตอบ 4.

แนวคิด $2^x - 2^{x-1} = 16 = 32 - 16 = 2^5 - 2^4 \rightarrow x = 5 \rightarrow x^2 + x + 1 = 31$

46. กำหนดให้ $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a^x < a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$ 2. $a^x < a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

3. $a^x > a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$ 4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

46. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ,x ,y ดังนั้นแทนค่า a,x,y บางค่าก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้

แทนค่า $a = \frac{1}{2}$, $x = 2$ และ $y = 4$ จะได้ว่า $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$

$a^x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4 = a^y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อนได้

$\log_a x = \log_{(\frac{1}{2})}(2) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2})^{-1} = -\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) = -1$

$\log_a y = \log_{(\frac{1}{2})}(4) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2})^{-2} = -2\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) = -2 < -1 = \log_a x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

48. มีไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร ต้องการกั้นรั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุดจะได้พื้นที่เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 80,000 ตารางเมตร
2. 160,000 ตารางเมตร
3. 360,000 ตารางเมตร
4. 480,000 ตารางเมตร

48. ตอบ 2.

แนวคิด ขอแนะนำสูตรสำเร็จรูปสำหรับคำถามแบบนี้ เส้นรอบรูปยาวเท่ากัน

สี่เหลี่ยม	**ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ**	**สี่เหลี่ยมจัตุรัส**
สามเหลี่ยม	**ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ**	**สามเหลี่ยมด้านเท่า**
n เหลี่ยม	**ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ**	**n เหลี่ยมด้านเท่า**

ไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร รั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุดต้องเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว $\frac{1600}{4} = 400$

เพราะฉะนั้นพื้นที่มากที่สุด= (400)(400) = 160,000

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว

ปัญหาเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของจำนวนเต็ม การหารลงตัว จำนวนเต็มยกกำลัง เราสามารถเรียนรู้การแก้ปัญหาจากง่ายไปหายากได้เช่น

2^4 หาร 6! ลงตัวหรือไม่ <u>ตอบ</u> ลงตัว

2^5 หาร 6! ลงตัวหรือไม่ <u>ตอบ</u> ไม่ลงตัว

จะเห็นได้ว่า $k = 4$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 6! ลงตัว ต่อไปเราจะศึกษาแนวทางสำหรับ n! เมื่อ n มีค่ามากๆ เช่น 10! , 100! , 1000! , 1998! โดยทำการศึกษาแนวคิดในการแก้ปัญหาจากง่ายไปยากดังนี้

ตัวอย่าง 1. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 100 ลงตัว ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด แยกตัวประกอบ $100 = 4 \cdot 25 = 2^2 \cdot 5^2$ เพราะฉะนั้น $k = 2$

ตัวอย่าง 2. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 1000^{10} ลงตัว ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 10 2. 20 3. 30 4. 40

ตอบ 3.

แนวคิด แยกตัวประกอบ $1000 = 100 \cdot 10 = 4 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3$

$$1000^{10} = (2^3 \cdot 5^3)^{10} = 2^{30} \cdot 5^{30}$$

เพราะฉะนั้น $k = 30$

ตัวอย่าง 3. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 10! ลงตัว

ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10

ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5$$

$$= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$$

เพราะฉะนั้น $k = 8$

วิธีที่ 2 แนวคิดในวิธีที่ 1 จะทำได้ยากและช้ามากเมื่อ n! มีค่ามากขึ้นดังนั้นเราควรใช้วิธีนี้

$$10! = (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)$$

$$= 2^5(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)$$

$$= 2^5(5!)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$= (2 \cdot 4)(1 \cdot 3 \cdot 5)$$

$$= 2^2(1 \cdot 2)(1 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3(1 \cdot 3 \cdot 5)$$

เพราะฉะนั้น $10! = 2^8(1 \cdot 3 \cdot 5)(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9)$

ตัวอย่าง 4. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 40! ลงตัว

ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 32 2. 35 3. 38 4. 41

ตอบ 3.

แนวคิด

$$40! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot38\cdot40)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$= 2^{20}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot18\cdot20)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$= 2^{20}(20!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$20! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot18\cdot20)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19)$$
$$= 2^{10}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot9\cdot10)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19)$$
$$= 2^{10}(10!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19)$$
$$10! = (2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)$$
$$= 2^{5}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)$$
$$= 2^{5}(5!)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)$$
$$5! = (2\cdot4)(1\cdot3\cdot5)$$
$$= 2^{2}(1\cdot2)(1\cdot3\cdot5)$$
$$= 2^{3}(1\cdot3\cdot5)$$

เพราะฉะนั้น

$$40! = 2^{20}(20!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$= 2^{20}(2^{10}(10!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$= 2^{20}(2^{10}(2^{5}(5!)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$
$$= 2^{20}(2^{10}(2^{5}(2^{3}(1\cdot3\cdot5))(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot37\cdot39)$$

$= 2^{38}(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots37\cdot39)$

เพราะว่า $(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot17\cdot19)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots37\cdot39)$ ไม่มี 2 เป็นตัวประกอบ

เพราะฉะนั้น $k = 38$

ตัวอย่าง 5. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 100! ลงตัว ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 95 2. 97 3. 99 4. 102

ตอบ 2.

แนวคิด

$$100! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot98\cdot100)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot87\cdot99)$$
$$= 2^{50}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot50)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$$
$$= 2^{50}(50!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$$
$$50! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots50)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots49)$$
$$= 2^{25}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49)$$
$$= 2^{25}(25!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49)$$
$$25! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot24)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25)$$
$$= 2^{12}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot12)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25)$$
$$= 2^{12}(12!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25)$$
$$12! = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot12)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)$$
$$= 2^{6}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot6)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)$$
$$= 2^{6}(6!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)$$

$$6! = (2\cdot4\cdot6)(1\cdot3\cdot5)$$
$$= 2^3(1\cdot2\cdot3)(1\cdot3\cdot5)$$
$$= 2^3(3!)(1\cdot3\cdot5)$$
$$3! = 2^1(1)(3)$$

เพราะฉะนั้น $100! = 2^{50}(50!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50}(2^{25}(25!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50}(2^{25}(2^{12}(12!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50}(2^{25}(2^{12}(2^6(6!)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50}(2^{25}(2^{12}(2^6(2^3(3!)(1\cdot3\cdot5))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50+25+12+6+3}(3!)(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot49)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50+25+12+6+3}(2^1(1)(3))(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots49)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{50+25+12+6+3+1}(1)(3)(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots11)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots49)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

$= 2^{97}(1)(3)(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots11)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots49)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$

เพราะว่า $(1)(3)(1\cdot3\cdot5)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot11)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots25)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots49)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots99)$ ไม่มี 2 เป็นตัวประกอบ เพราะฉะนั้น $k = 97$

การจัดรูปทางพีชคณิตของ n!

ในกรณีที่ n! มีค่ามากขึ้นเราจะทำการจัดรูปของ n! ให้สะดวกแก่การคำนวนมากขึ้นดังนี้

กรณี n เป็นเลขคู่ $n! = (2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot n)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1))$

$$= 2^{(\frac{n}{2})}(\frac{n}{2})!(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(n-1))$$

กรณี n เป็นเลขคี่ $n! = (2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot\ldots\cdot(n-1))(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot n)$

$$= 2^{(\frac{n-1}{2})}(\frac{n-1}{2})!(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot n)$$

เพราะฉะนั้น $(2n)! = 2^n\cdot n!\cdot(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))$

$$(2n+1)! = 2^n\cdot n!\cdot(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1))$$

เพื่อความสะดวกในการเขียนผลคูณ $1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$ เรากำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

$P(1) = 1$

$P(3) = 1\cdot3$

$P(5) = 1\cdot3\cdot5$

$\vdots$

$P(2n-1) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n-1)$

$P(2n+1) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)$

จากบทนิยามของ $P(2n-1)$ และ $P(2n+1)$ จะไม่มี 2 เป็นประกอบ และ

$(2n)! = 2^n\cdot n!\cdot P(2n-1)$

$(2n+1)! = 2^n\cdot n!\cdot P(2n+1)$

ตัวอย่างเช่น $10! = (2\cdot5)! = 2^5\cdot5!\cdot P(9)$

$5! = (2\cdot2+1)! = 2^2\cdot2!\cdot P(5)$

$2! = 2\cdot1 = 2^1\cdot1!\cdot P(1)$

เพราะฉะนั้น $10! = 2^5 \cdot 5! \cdot P(9)$

$= 2^5 2^2 \cdot 2! \cdot P(5) \cdot P(9)$

$= 2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 1! \cdot P(1) \cdot P(5) \cdot P(9)$

$= 2^{5+2+1} \cdot P(1) \cdot P(5) \cdot P(9)$

$= 2^8 \cdot P(1) \cdot P(5) \cdot P(9)$

ตัวอย่างกรณี $40! = (2 \cdot 20)! = 2^{20} \cdot 20! \cdot P(39)$

$20! = (2 \cdot 10)! = 2^{10} \cdot 10! \cdot P(19)$

$10! = (2 \cdot 5)! = 2^5 \cdot 5! \cdot P(9)$

$5! = (2 \cdot 2+1)! = 2^2 \cdot 2! \cdot P(5)$

$2! = (2 \cdot 1)! = 2^1 \cdot 1! \cdot P(1)$

เพราะฉะนั้น $40! = 2^{20} \cdot 20! \cdot P(39)$

$= 2^{20} \cdot 2^{10} \cdot 10! \cdot P(19) \cdot P(39)$

$= 2^{20} \cdot 2^{10} \cdot 2^5 \cdot 5! \cdot P(9) \cdot P(19) \cdot P(39)$

$= 2^{20} \cdot 2^{10} \cdot 2^5 \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot P(5) \cdot P(9) \cdot P(19) \cdot P(39)$

$= 2^{20} \cdot 2^{10} \cdot 2^5 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 1! \cdot P(1) \cdot P(5) \cdot P(9) \cdot P(19) \cdot P(39)$

$= 2^{20+10+5+2+1} \cdot P(1) \cdot P(5) \cdot P(9) \cdot P(19) \cdot P(39)$

ตัวอย่าง 6. จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 2002! ลงตัว

ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

1. 1990 2. 1995 3. 1996 4. 1998

ตอบ 2.

แนวคิด $2002! = (2\cdot1001)! = 2^{1001}\cdot1001!\cdot P(2001)$

$1001! = (2\cdot500+1)! = 2^{500}\cdot500!\cdot P(1001)$

$500! = (2\cdot250)! = 2^{250}\cdot250!\cdot P(499)$

$250! = (2\cdot125)! = 2^{125}\cdot125!\cdot P(249)$

$125! = (2\cdot62+1)! = 2^{62}\cdot62!\cdot P(125)$

$62! = (2\cdot31)! = 2^{31}\cdot31!\cdot P(61)$

$31! = (2\cdot15+1)! = 2^{15}\cdot15!\cdot P(31)$

$15! = (2\cdot7+1)! = 2^{7}\cdot7!\cdot P(15)$

$7! = (2\cdot3+1)! = 2^{3}\cdot3!\cdot P(7)$

$3! = (2\cdot1+1)! = 2^{1}\cdot1!\cdot P(3)$

เพราะฉะนั้น $2002! = 2^{1001}\cdot1001!\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot2^{500}\cdot500!\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot2^{500}\cdot2^{250}\cdot250!\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot2^{500}\cdot2^{250}\cdot2^{125}\cdot125!\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot2^{500}\cdot2^{250}\cdot2^{125}\cdot2^{62}\cdot62!\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot 2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 31!\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot 2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 2^{15}\cdot 15!\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)$
$\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot 2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 2^{15}\cdot 2^{7}\cdot 7!\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot$
$P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot 2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 2^{15}\cdot 2^{7}\cdot 2^{3}\cdot 3!\cdot P(7)\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot$
$P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001}\cdot 2^{500}\cdot 2^{250}\cdot 2^{125}\cdot 2^{62}\cdot 2^{31}\cdot 2^{15}\cdot 2^{7}\cdot 2^{3}\cdot 2^{1}\cdot 1!\cdot P(3)\cdot P(7)\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot$
$P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1001+500+250+125+62+31+15+7+3+1}\cdot 1!\cdot P(3)\cdot P(7)\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)$
$\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

$= 2^{1995}\cdot P(3)\cdot P(7)\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$

เพราะว่า $P(3)\cdot P(7)\cdot P(15)\cdot P(31)\cdot P(61)\cdot P(125)\cdot P(249)\cdot P(499)\cdot P(1001)\cdot P(2001)$
ไม่มี 2 เป็นตัวประกอบ
เพราะฉะนั้น $k = 1995$

จากตัวอย่างปัญหาที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่า k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว มีรูปแบบเป็นดังนี้

$2^k|10!$ $k = 5 + 2 + 1$ $= 8$

$2^k|40!$ $k = 20 + 10 + 5 + 2 + 1$ $= 38$

$2^k|100!$ $k = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1$ $= 97$

$2^k|2002!$ $k = 1001+500+250+125+62+31+15+7+3+1$ $= 1995$

พิจารณาในรูปแบบของกรณีทั่วไปจะได้ว่า

การหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k|10!$ มีค่า $k = 5 + 2 + 1$ แต่ละพจน์ของผลบวกได้มาจาก

5 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{10}{2}$

2 $\longleftarrow$ ได้มาจากจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\frac{5}{2}$

1 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{2}{2}$

การหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k|100!$ มีค่า $k = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ แต่ละพจน์ของผลบวกได้มาจาก

50 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{100}{2}$

25 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{50}{2}$

12 $\longleftarrow$ ได้มาจากจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\frac{25}{2}$

6 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{12}{2}$

3 $\longleftarrow$ ได้มาจาก $\frac{6}{2}$

1 $\longleftarrow$ ได้มาจากจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\frac{3}{2}$

ในวิชาคณิตศาสตร์มีการใช้สัญลักษณ์ [x] จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x

ตัวอย่างเช่น $[4.1] = 4$ $[4.5] = 4$ $[4.99] = 4$

$[-1.1] = -2$ $[-1.5] = -2$ $[-1.9] = -2$

ในกรณีที่ x เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า $[x] = x$

ดังนั้นปัญหาการหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k|100!$ จะทำได้ง่ายขึ้นดังนี้

$$\left[\frac{100}{2}\right] = 50$$

$$\left[\frac{50}{2}\right] = 25$$

$$\left[\frac{25}{2}\right] = 12$$

$$\left[\frac{12}{2}\right] = 6$$

$$\left[\frac{6}{2}\right] = 3$$

$$\left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

จะได้ $k = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$ เหมือนกัน

หรือ $k = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{25}{2}\right] + \left[\frac{12}{2}\right] + \left[\frac{6}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right]$

$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1$

$= 97$

ต่อไปเราจะพิจารณาการหาค่า k ที่มากที่สุดที่ทำให้ $2^k|n!$ ลงตัว ในลักษณะการหาผลบวกของลำดับ โดยพิจารณาสูตรของ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ ดังนี้

$$a_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$a_{i+1} = \left[\frac{a_i}{2}\right] \quad \text{เมื่อ } i = 1,2,3,4,5,$$

คำนวนค่า a_i จนถึงพจน์ที่ a_i ตัวที่เป็นศูนย์

ตัวอย่างเช่นการหาค่าจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 2002! ลงตัว

$$a_1 = \left[\frac{2002}{2}\right] = 1001$$

$$a_2 = \left[\frac{1001}{2}\right] = 500$$

$$a_3 = \left[\frac{500}{2}\right] = 250$$

$$a_4 = \left[\frac{500}{2}\right] = 250$$

$$a_5 = \left[\frac{250}{2}\right] = 125$$

$$a_6 = \left[\frac{125}{2}\right] = 62$$

$$a_7 = \left[\frac{62}{2}\right] = 31$$

$$a_8 = \left[\frac{31}{2}\right] = 15$$

$$a_9 = \left[\frac{15}{2}\right] = 7$$

$$a_{10} = \left[\frac{7}{2}\right] = 3$$

$$a_{11} = \left[\frac{3}{2}\right] = 1$$

$$a_{12} = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$$

เพราะฉะนั้น $k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{10} + a_{11}$

$$= 1001 + 500 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 1995$$

หมายเหตุ ค่า m ที่ทำให้ $a_m = 0$ และ $k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $2^k \mid n!$ สามารถคิดได้จากค่า m เป็นค่าน้อยที่สุดที่ทำให้ $n \le 2^m$

ตัวอย่างเช่น $2002 \le 2^m$

$$\log 2002 \le \log 2^m$$

$$\log 2002 \le m \log 2$$

$$\frac{\log 2002}{\log 2} \le m$$

$$\frac{3.3014}{0.3010} \le m$$

$$10.967 \le m$$

เพราะฉะนั้น $m = 11$

สรุปปัญหา การการหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว

ขั้นที่ 1 หาค่า m ที่เล็กที่สุดที่ทำให้ $n \le 2^m$

ขั้นที่ 2 กำหนด $a_1 = \left[\frac{n}{2}\right]$

ขั้นที่ 3 กำหนด $a_{i+1} = \left[\frac{a_i}{2}\right]$ เมื่อ $i = 1,2,3,\ldots,m$

ขั้นที่ 4 $k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$

การคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

1. คำนวนค่า m จากสูตร $\frac{\ln(n)}{\ln 2}$

2. floor(x) หมายถึง [x]

3. $a_1 = \text{floor}(\frac{n}{2})$ $a_{i+1} = \text{floor}(\frac{a_i}{2})$

4. $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$

การหาค่าจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 2002! ลงตัว

$$n := 2002$$

$$m := \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$$

$$m = 10.9672$$

$$m := \text{floor}(m) + 1$$

$$m = 11$$

$$i := 1 \,..\, m$$

$$a_1 := \text{floor}\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$a_{i+1} := \text{floor}\left[\frac{a_i}{2}\right]$$

i	a_i
1	1001
2	500
3	250
4	125
5	62
6	31
7	15
8	7
9	3
10	1
11	0

$$k := \sum_i a_i$$

$$k = 1995$$

การหาค่าจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 2541! ลงตัว

$n := 2541$

$$m := \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$$

$m = 11.3112$

$m := \mathrm{floor}(m) + 1$

$m = 12$

$i := 1 \,..m$

$$a_1 := \mathrm{floor}\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$a_{i+1} := \mathrm{floor}\left[\frac{a_i}{2}\right]$$

i	a_i
1	1270
2	635
3	317
4	158
5	79
6	39
7	19
8	9
9	4
10	2
11	1
12	0

$$k := \sum_i a_i$$

$k = 2533$

$n := 100$

$$m := \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$$

$m = 6.6439$

$m := \mathrm{floor}(m) + 1$

$m = 7$

$i := 1 \,..m$

$$a_1 := \mathrm{floor}\left[\frac{n}{2}\right]$$

$$a_{i+1} := \mathrm{floor}\left[\frac{a_i}{2}\right]$$

i	a_i
1	50
2	25
3	12
4	6
5	3
6	1
7	0

$$k := \sum_i a_i$$

$k = 97$

การหาค่าจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 100! ลงตัว

ท้ายสุดของบทความนี้ สำหรับครูผู้สอนและนักเรียนคงจะได้เห็นแนวทางในการเรียนรู้และการแก้ปัญหาจากง่ายไปหายากและสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ และหากจะนำแนวคิดนี้ไปทำเป็นข้อสอบก็สามารถเลือกความยากหรือง่ายให้เหมาะสมกับระดับของนักเรียนได้เช่น

ม. ต้น	หาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k \mid 10!$ ลงตัว
ม. ปลาย	หาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k \mid 100!$ ลงตัว
ข้อสอบแข่งขัน	หาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ $2^k \mid 1998!$ ลงตัว

แบบฝึกหัด

1. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 25! ลงตัว
2. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 40! ลงตัว
3. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 4^k หาร 40! ลงตัว
4. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 4^k หาร $(4^4)!$ ลงตัว
5. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 8^k หาร 80! ลงตัว
6. $A = \{k \in N \mid 2^k$ หาร 20! ลงตัว$\}$ จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด
7. $B = \{k \in N \mid 2^k$ หาร 20! ลงตัว$\}$ ผลบวกของสมาชิกใน B เท่ากับเท่าใด
8. $C = \{k \in N \mid 4^k$ หาร 40! ลงตัว$\}$ ผลบวกของสมาชิกใน C เท่ากับเท่าใด
9. $D = \{k \in N \mid 8^k$ หาร 100! ลงตัว$\}$ ผลบวกของสมาชิกใน D เท่ากับเท่าใด

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ p^k หาร n! ลงตัว เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ในปัญหาที่ผ่านมาเราสนใจกรณีของ จำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว เมื่อเราเปลี่ยนจาก 2^k เป็น p^k และ p เป็นจำนวนเฉพาะจะทำให้ปัญหาและแนวคิดมีความน่าสนใจมากขึ้น เช่น

จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว

จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 40! ลงตัว

จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 100! ลงตัว

แนวคิดในการแก้ปัญหาจะคล้ายกับปัญหาการหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว โดยต้องมีการจัดรูปแบบทางพีชคณิตผลคูณของตัวเลข

ตัวอย่าง 1. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. 3 3. 4 4. 5

ตอบ 3.

แนวคิด

$$10! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10$$
$$= 3\cdot6\cdot9\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10)$$
$$= 3^3\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10)$$
$$= 3^3\cdot3\cdot(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10)$$

$= 3^4(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10)$

สรุป $k = 4$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว

ตัวอย่าง 2. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 5^k หาร 40! ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 4 2. 6 3. 8 4. 10

ตอบ 3.

แนวคิด $40! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot\ldots\cdot34\cdot35\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40$

$= (5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25\cdot30\cdot35\cdot40)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot\ldots\cdot34\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39)$

$= 5^8(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot\ldots\cdot34\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39)$

$= 5^8(5)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot\ldots\cdot34\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39)$

$= 5^8(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot\ldots\cdot34\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39)$

สรุป $k = 8$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 40! ลงตัว

ข้อตกลง ในการเขียนผลคูณของตัวเลข p เป็นจำนวนเฉพาะ P(p,n) หมายถึงผลคูณของตัวเลข 1 ถึง n ยกเว้นตัวเลขที่ p หารลงตัว ตัวอย่างเช่น

$P(2,10) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9$

$P(2,19) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19$

$P(2,20) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19$

$P(2,21) = 1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15\cdot17\cdot19\cdot21$

$P(3,10) = 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10$

$P(3,20) = 1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10\cdot11\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot19\cdot20$

$P(5,20) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19$

$P(5,30) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot21\cdot22\cdot23\cdot24\cdot26\cdot27\cdot28\cdot29$

หมายเหตุ $P(p,p) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(p-1) = (p-1)!$

$P(p,p-1) = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(p-1) = (p-1)!$

$P(p,n)$ ไม่มี p เป็นตัวประกอบ เพราะฉะนั้น p หาร $P(p,n)$ ไม่ลงตัว

ตัวอย่างเช่น การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว

$$
\begin{aligned}
10! &= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 \\
&= 3\cdot6\cdot9\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10) \\
&= 3\cdot6\cdot9\cdot P(3,10) \\
&= 3^3\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10) \\
&= 3^3\cdot(1\cdot2\cdot3)\cdot P(3,10) \\
&= 3^3\cdot3\cdot(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10) \\
&= 3^3\cdot3\cdot P(3,3)\cdot P(3,10) \\
&= 3^4(1\cdot2)\cdot(1\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7\cdot8\cdot10) \\
&= 3^4 P(3,3)\cdot P(3,10)
\end{aligned}
$$

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 40! ลงตัว

$$
\begin{aligned}
40! &= 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot\ldots\cdot34\cdot35\cdot36\cdot37\cdot38\cdot39\cdot40 \\
&= (5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25\cdot30\cdot35\cdot40)P(5,40)
\end{aligned}
$$

$= 5^8(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8)P(5,40)$

$= 5^8(5)P(5,8)\cdot P(5,40)$

$= 5^8P(5,8)\cdot P(5,40)$

ตัวอย่าง 3. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 100! ลงตัวมีค่าเท่าใด

1. 25 2. 33 3. 48 4. 52

ตอบ 3.

แนวคิด $100! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot\ldots\cdot98\cdot99\cdot100$

$= (3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot93\cdot96\cdot99)P(3,100)$

$= 3^{33}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot31\cdot32\cdot33)P(3,100)$

$= 3^{33}33!\cdot P(3,100)$

$33! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot\ldots\cdot31\cdot32\cdot33$

$= (3\cdot6\cdot9\cdot\ldots\cdot27\cdot30\cdot33)P(3,33)$

$= 3^{11}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11)P(3,33)$

$= 3^{11}(11!)\cdot P(3,33)$

$11! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11$

$= (3\cdot6\cdot9)\cdot P(3,11)$

$= 3^3(1\cdot2\cdot3)\cdot P(3,11)$

$= 3^3(3!)\cdot P(3,11)$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$

$= 3^1(1 \cdot 2)$

$= 3^1(P(3,2)$

$100! = 3^{33}33!P(3,100)$

$= 3^{33}3^{11}11!P(3,33))P(3,100)$

$= 3^{33}3^{11}3^3 3!P(3,11)P(3,33)P(3,100)$

$= 3^{33}3^{11}3^3 3^1P(3,2)P(3,11)P(3,33)P(3,100)$

$= 3^{33+11+3+1}P(3,2)P(3,11)P(3,33)P(3,100)$

$= 3^{48}P(3,2)P(3,11)P(3,33)P(3,100)$

เพราะว่า P(3,2)P(3,11)P(3,33)P(3,100) ไม่มี 3 เป็นตัวประกอบ

เพราะฉะนั้น $k = 48$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 100! ลงตัว

ข้อสังเกต $100! = 3^{33+11+3+1}P(3,2)P(3,11)P(3,33)P(3,100)$ จะเห็นได้ว่า

$33 \longleftarrow$ ได้มาจาก $\left[\frac{100}{3}\right] = [33.33] = 33$

$11 \longleftarrow$ ได้มาจาก $\left[\frac{33}{3}\right] = [11] = 11$

$3 \longleftarrow$ ได้มาจาก $\left[\frac{11}{3}\right] = [3.67] = 3$

$1 \longleftarrow$ ได้มาจาก $\left[\frac{3}{3}\right] = [1] = 1$

การหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร n! ลงตัว

ขั้นที่ 1. หาค่า m น้อยที่สุดที่ทำให้ $n \le 3^m$ จากเงื่อนไข

$$\log n \le \log 3^m$$

$$\log n \le m \log 3$$

$$\frac{\log n}{\log 3} \le m$$

ขั้นที่ 2. ให้ $a_1 = \left[\frac{n}{3}\right]$

ขั้นที่ 3. ให้ $a_{i+1} = \left[\frac{a_i}{3}\right]$ $\quad i = 2,3,4,5,\ldots,m$

สรุป $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_m$

หมายเหตุ เราสามารถข้ามขั้นตอนที่ 1 ได้โดยการหาค่า $a_1, a_2, \ldots$ จนกระทั่ง $a_m = 0$

ตัวอย่างเช่น การหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 1000! ลงตัว

$$a_1 = \left[\frac{1000}{3}\right] = [333.3] = 333$$

$$a_2 = \left[\frac{333}{3}\right] = [111] = 111$$

$$a_3 = \left[\frac{111}{3}\right] = [37] = 37$$

$$a_4 = \left[\frac{37}{3}\right] = [12.33] = 12$$

$$a_5 = \left[\frac{12}{3}\right] = [4] = 4$$

$$a_6 = \left[\frac{4}{3}\right] = [1.3] = 1$$

$$a_7 = \left[\frac{1}{3}\right] = [0.33] = 0$$

สรุป $k = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 333 + 111 + 37 + 12 + 4 + 1 + 0 = 498$

ตัวอย่าง 4. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 100! ลงตัวมีค่าเท่าใด

1. 20 2. 22 3. 23 4. 24

ตอบ 4.

แนวคิด $100! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot....\cdot98\cdot99\cdot100$

$= (5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot...\cdot95\cdot100)P(5,100)$

$= 5^{20}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot....\cdot19\cdot20)P(5,100)$

$= 5^{20}(20!)P(5,100)$

$20! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot....\cdot18\cdot19\cdot20$

$= (5\cdot10\cdot15\cdot20)\cdot P(5,20)$

$= 5^4(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20)$

$100! = 5^{20}(20!)P(5,100)$

$= 5^{20}(5^4(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20))P(5,100)$

$= 5^{20+4}(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20))P(5,100)$

$= 5^{24}(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20))P(5,100)$

เพราะว่า $(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20))P(5,100)$ ไม่มี 5 เป็นตัวประกอบ เพราะฉะนั้น $k = 24$

ข้อสังเกต จาก $100! = 5^{20+4}(1\cdot2\cdot3\cdot4)\cdot P(5,20))P(5,100)$ จะเห็นได้ว่า

20 ได้มาจาก $\left[\frac{100}{5}\right] = 20$

4 ได้มาจาก $\left[\frac{20}{5}\right] = 4$

ในกรณีทั่วไปสำหรับปัญหา การหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ p^k หาร n! ลงตัว เมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. หาค่า m น้อยที่สุดที่ทำให้ $n \le p^m$ จากเงื่อนไข

$$\log n \le \log p^m$$

$$\log n \le m\log p$$

$$\frac{\log n}{\log p} \le m$$

ขั้นที่ 2. ให้ $a_1 = \left[\frac{n}{p}\right]$

ขั้นที่ 3. ให้ $a_{i+1} = \left[\frac{a_i}{p}\right]$ $\qquad i = 2,3,4,5,\dots,m$

สรุป $k = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

หมายเหตุ ในการคำนวณจริง $a_1, a_2, \dots$ จะมีค่าน้อยลงจนกระทั่ง $a_m = 0$ แล้วจึงหาค่า k ดังนั้นไม่ต้องหารค่า m ก็ได้

ตัวอย่างการหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 100! ลงตัว

$$a_1 = \left[\frac{100}{7}\right] = [14.28] = 14$$

$$a_2 = \left[\frac{14}{7}\right] = [2] = 2$$

$$a_3 = \left[\frac{2}{7}\right] = [0.2] = 0$$

สรุป $k = a_1 + a_2 + a_3 = 14 + 2 + 0 = 16$

ตัวอย่างการหาค่า k มากที่สุดที่ทำให้ 11^k หาร 100! ลงตัว

$$a_1 = \left[\frac{100}{11}\right] = [9.09] = 9$$

$$a_2 = \left[\frac{9}{11}\right] = [0.8] = 0$$

สรุป $k = a_1 + a_2 = 9 + 0 = 9$

การคำนวณข้างต้นเราสามารถนำโปรแกรม MATHCAD มาช่วยคำนวณได้ดังนี้

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 100! ลงตัว

$$p := 3$$
$$n := 100$$
$$m := \frac{\log(n)}{\log(p)}$$
$$m = 4.1918$$
$$m := \mathrm{floor}(m) + 1$$
$$m = 5$$
$$i := 1 .. m$$
$$a_1 := \mathrm{floor}\left[\frac{n}{p}\right]$$
$$a_{i+1} := \mathrm{floor}\left[\frac{a_i}{p}\right]$$

i	a_i
1	33
2	11
3	3
4	1
5	0

$$k := \sum_i a_i$$
$$k = 48$$

k = 48 เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 100! ลงตัว

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 100! ลงตัว

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 100! ลงตัว

$$p := 7$$
$$n := 100$$
$$m := \frac{\log(n)}{\log(p)}$$
$$m = 2.3666$$
$$m := \text{floor}(m) +$$
$$m = 3$$
$$i := 1 \,..m$$
$$a_1 := \text{floor}\left[\frac{n}{p}\right]$$
$$a_{i+1} := \text{floor}\left[\frac{a_i}{p}\right]$$

i	a_i
1	14
2	2
3	0

$$k := \sum_i a_i$$
$$k = 16$$

$$p := 5$$
$$n := 100$$
$$m := \frac{\log(n)}{\log(p)}$$
$$m = 2.8614$$
$$m := \text{floor}(m) + 1$$
$$m = 3$$
$$i := 1 \,..m$$
$$a_1 := \text{floor}\left[\frac{n}{p}\right]$$
$$a_{i+1} := \text{floor}\left[\frac{a_i}{p}\right]$$

i	a_i
1	20
2	4
3	0

$$k := \sum_i a_i$$
$$k = 24$$

k = 16 เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 100! ลงตัว

k = 24 เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 100! ลงตัว

ตัวอย่าง 5. จงเขียน 10! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ตอบ $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

แนวคิด จำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 10 คือ 2,3,5,7

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 10! ลงตัว คือ 8

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว คือ 4

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 10! ลงตัว คือ 2

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 10! ลงตัว คือ 1

สรุป $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

ตัวอย่าง 6. จงเขียน 20! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ตอบ $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

แนวคิด จำนวนเฉพาะที่น้อยกว่า 20 คือ 2,3,5,7,11,13,17,19

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร 20! ลงตัว คือ $10 + 5 + 2 + 1 = 18$

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^k หาร 20! ลงตัว คือ $6 + 2 = 8$

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^k หาร 20! ลงตัว คือ 4

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 20! ลงตัว คือ 2

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 11^k หาร 20! ลงตัว คือ 1

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 13^k หาร 20! ลงตัว คือ 1

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 17^k หาร 20! ลงตัว คือ 1

k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 19^k หาร 20! ลงตัว คือ 1

สรุป $20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

แบบฝึกหัด

1. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^k หาร 50! ลงตัว
2. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 19^k หาร 90! ลงตัว
3. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 25^k หาร 125! ลงตัว
4. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 27^k หาร 100! ลงตัว
5. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 6^k หาร 20! ลงตัว
6. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 15^k หาร 100! ลงตัว
7. จงเขียน 5! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ
8. จงเขียน 20! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ
9. จงเขียน 25! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ
10. จงเขียน 40! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ
11. จงเขียน 50! ในรูปแบบผลคูณของจำนวนเฉพาะ
12. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 3^k$ หาร 30! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
13. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 9^k$ หาร 50! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
14. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 6^k$ หาร 30! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
15. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 18^k$ หาร 30! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
16. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 30^k$ หาร 30! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
17. กำหนด $A = \{ k \in N \mid 100^k$ หาร 100! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
18. จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 5! ลงตัวมีกี่ตัว อะไรบ้าง
19. จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 10! ลงตัวมีกี่ตัว
20. จำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่หาร 20! ลงตัวมีกี่ตัว

1000000! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว

ปัญหาจากง่ายไปหายากเราพิจารณาจาก

1! = 1	2! = 2	3! = 6	4! = 24
5! = 120	6! = 720	7! = 5040	8! = 40320
9! = 362880	10! = 3628800		

จะเห็นได้ว่า 10! ลงท้ายด้วยศูนย์สองตัว ปัญหาที่ยากและมีตัวเลขมากขึ้นเช่น 100! 1000! 10000! 2540! 2002! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว แนวคิดในการแก้ปัญหาจะคล้ายกับปัญหาการหาจำนวนเต็มบวก k ที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ 2^k หาร n! ลงตัว เหตุผลที่ทำให้เกิดเลขศูนย์ท้าย n! เป็นผลมาจากการเลข 10 และเลข 10 เป็นผลมาจากเลข 2 และ เลข 5 คูณกัน ดังนั้นการหาจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย n! สามารถทำตามขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. หาจำนวนเต็มบวก i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร n! ลงตัว

ขั้นที่ 2. หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^j หาร n! ลงตัว

ขั้นที่ 3. ให้ k เป็นค่าต่ำสุดระหว่าง i และ j

k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^k และ 5^k หาร n! ลงตัว

k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(2^k)(5^k)$ หาร n! ลงตัว

k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 10^k หาร n! ลงตัว

สรุป n! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ k ตัว

ตัวอย่าง 1. 10! ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

ตอบ 2.

แนวคิด ขั้นที่ 1. หาจำนวนเต็มบวก i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร 10! ลงตัว

$$i = \left[\frac{10}{2}\right] + \left[\frac{5}{2}\right] + \left[\frac{2}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 5 + 2 + 1 + 0$$

$$= 8$$

ขั้นที่ 2. หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^j หาร 100! ลงตัว

$$j = \left[\frac{10}{5}\right] + \left[\frac{2}{5}\right]$$

$$= 2 + 0$$

$$= 2$$

ขั้นที่ 3. ให้ k เป็นค่าต่ำสุดระหว่าง i และ j เพราะฉะนั้น k = 2

สรุป 10! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ 2 ตัว

ตัวอย่าง 2. 100! ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

1. 20 2. 23 3. 25 4. 26

ตอบ 3.

แนวคิด ขั้นที่ 1. หาจำนวนเต็มบวก i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร 100! ลงตัว

$$i = \left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{50}{2}\right] + \left[\frac{25}{2}\right] + \left[\frac{12}{2}\right] + \left[\frac{6}{2}\right] + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0$$

$$= 97$$

ขั้นที่ 2. หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^j หาร 100! ลงตัว

$$j = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{20}{5}\right] + \left[\frac{4}{5}\right]$$

$$= 20 + 4 + 0$$

$$= 25$$

ขั้นที่ 3. ให้ k เป็นค่าต่ำสุดระหว่าง i และ j เพราะฉะนั้น k = 25

สรุป 100! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ 25 ตัว

ข้อแนะนำ เพราะว่า i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร n! ลงตัว และ j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^j หาร n! ลงตัว ค่าของ j น้อยกว่า i เสมอ เพราะฉะนั้นคำนวณเฉพาะค่า j เท่านั้นก็พอ และจะได้ว่า j เป็นจำนวนเลขศูนย์ที่ลงท้าย n!

ตัวอย่าง 3. 1000! ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

1. 248 2. 249 3. 250 4. 251

ตอบ 2.

แนวคิด หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^i หาร 1000! ลงตัว

$$j = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{200}{5}\right] + \left[\frac{40}{5}\right] + \left[\frac{8}{5}\right] + \left[\frac{1}{5}\right]$$

$$= 200 + 40 + 8 + 1 + 0$$

$$= 249$$

สรุป 1000! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ 249 ตัว

ตัวอย่าง 4. 10000! ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

1. 2488 2. 2489 3. 2499 4. 2500

ตอบ 3.

แนวคิด หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^i หาร 10000! ลงตัว

$$j = \left[\frac{10000}{5}\right]+\left[\frac{2000}{5}\right]+\left[\frac{400}{5}\right]+\left[\frac{80}{5}\right]+\left[\frac{16}{5}\right]+\left[\frac{3}{5}\right]$$

$$= 2000 + 400 + 80 + 16 + 3 + 0$$

$$= 2499$$

สรุป 10000! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ 2499 ตัว

ตัวอย่าง 5. 1000000! ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว

1. 244999 2. 249998 3. 249999 4. 250000

ตอบ 3.

แนวคิด หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^i หาร 1000000! ลงตัว

$$j = \left[\frac{1000000}{5}\right]+\left[\frac{200000}{5}\right]+\left[\frac{40000}{5}\right]+\left[\frac{8000}{5}\right]+\left[\frac{1600}{5}\right]+\left[\frac{320}{5}\right]+\left[\frac{64}{5}\right]+\left[\frac{12}{5}\right]+\left[\frac{2}{5}\right]$$

$$= 200000 + 40000 + 8000 + 1600 + 320 + 64 + 12 + 2 + 0$$

$$= 249998$$

สรุป 1000000! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์ 249998 ตัว

คำถามที่มีแนวทางเดียวกันแต่มีความซับซ้อนของตัวเลขมากขึ้นเช่น

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 6^k หาร 100! ลงตัว

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 288^k หาร 1000! ลงตัว

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 420^k หาร 10000! ลงตัว แนวทางในการแก้ปัญหาจะเหมือนกับ การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 10^k หาร n! ลงตัว โดยทำการแยกตัวประกอบ 6,30,420 ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

ตัวอย่าง 6 จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 6^k หาร 100! ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 48 2. 49 3. 50 4. 51

ตอบ 1.

แนวคิด ขั้นที่ 1. แยกตัวประกอบ 6 ออกเป็น $2 \cdot 3$

ขั้นที่ 2 หาจำนวนเต็มบวก i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร 100! ลงตัว

$$i = \left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{25}{2}\right]+\left[\frac{12}{2}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0$$

$$= 97$$

ขั้นที่ 3 หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^j หาร 100! ลงตัว

$$j = \left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{33}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= 33 + 11 + 3 + 1 + 0$$

$$= 48$$

ขั้นที่ 4. ให้ k เป็นค่าต่ำสุดระหว่าง i และ j เพราะฉะนั้น k = 48

สรุป k = 48 เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ 6^k หาร 100! ลงตัว

ตัวอย่าง 7 จำนวนเต็มบวก k ค่ามากสุดที่ทำให้ 288^k หาร 100! ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 17 2. 18 3. 19 4. 20

ตอบ 3.

แนวคิด ขั้นที่ 1. แยกตัวประกอบ 288 ออกเป็น $2^5 \cdot 3^2$

ขั้นที่ 2 หาจำนวนเต็มบวก i ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^i หาร 100! ลงตัว

$$i = \left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{50}{2}\right]+\left[\frac{25}{2}\right]+\left[\frac{12}{2}\right]+\left[\frac{6}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 + 0$$

$$= 97$$

เพราะว่า $i = 97$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 2^i หาร 100! ลงตัว

เพราะฉะนั้น $i = \left[\frac{97}{5}\right] = 19$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(2^5)^i$ หาร 100! ลงตัว

ขั้นที่ 3 หาจำนวนเต็มบวก j ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^j หาร 100! ลงตัว

$$j = \left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{33}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= 33 + 11 + 3 + 1 + 0$$

$$= 48$$

เพราะว่า $j = 48$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากสุดที่ทำให้ 3^j หาร 100! ลงตัว

เพราะฉะนั้น $j = \left[\frac{48}{2}\right] = 24$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(3^2)^j$ หาร 100! ลงตัว

เพราะว่า $i = 19$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(2^5)^i$ หาร 100! ลงตัว และ $j = 24$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(3^2)^j$ หาร 100! ลงตัว

เพราะฉะนั้น $k = 19$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(2^5 \cdot 3^2)^k$ หาร 100! ลงตัว

การหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ m^k หาร n! ลงตัว

ขั้นที่ 1. แยก m ออกเป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ $m = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \dots p_r^{n_r}$

โดยที่ $p_1, p_2, p_3, \dots, p_r$ เป็นจำนวนเฉพาะ $p_1 < p_2 < p_3, \dots, < p_r$ และ $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$ เป็นจำนวนเต็ม

ขั้นที่ 2. หาจำนวนเต็มบวก k_1 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p_1^{k_1}$ หาร n! ลงตัว

$t_1 = \left[\frac{k_1}{n_1}\right]$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(p_1^{n_1})^{t_1}$ หาร n! ลงตัว

หาจำนวนเต็มบวก k_2 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p_2^{k_2}$ หาร n! ลงตัว

$t_2 = \left[\frac{k_2}{n_2}\right]$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(p_2^{n_2})^{t_2}$ หาร n! ลงตัว

หาจำนวนเต็มบวก k_3 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p_3^{k_3}$ หาร n! ลงตัว

$t_3 = \left[\frac{k_3}{n_3}\right]$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(p_3^{n_3})^{t_3}$ หาร n! ลงตัว

:

หาจำนวนเต็มบวก k_r ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $p_r^{k_r}$ หาร n! ลงตัว

$t_r = \left[\frac{k_r}{n_r}\right]$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(p_r^{n_r})^{t_r}$ หาร n! ลงตัว

ให้ k = ค่าต่ำที่สุดของ $\{ t_1, t_2, t_3, \dots, t_r \}$

สรุป k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ m^k หาร n! ลงตัว

ตัวอย่าง 7. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 1440^k หาร 900! ลงตัว เท่ากับเท่าใด

1. 177   2. 178   3. 179   4. 180

ตอบ 3.

แนวคิด ขั้นที่ 1. แยกตัวประกอบ 1440 ออกเป็น $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$

ขั้นที่ 2. หาจำนวนเต็มบวก k_1 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 2^{k_1} หาร 900! ลงตัว

$$k_1 = \left[\frac{900}{2}\right]+\left[\frac{450}{2}\right]+\left[\frac{225}{2}\right]+\left[\frac{112}{2}\right]+\left[\frac{56}{2}\right]+\left[\frac{28}{2}\right]+\left[\frac{14}{2}\right]+\left[\frac{7}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 450 + 225 + 112 + 56 + 28 + 14 + 7 + 3 + 1 + 0$$

$$= 896$$

$t_1 = \left[\frac{896}{5}\right] = [179.2] = 179$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(2^3)^{t_1}$ หาร 900! ลงตัว

หาจำนวนเต็มบวก k_2 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 3^{k_2} หาร 900! ลงตัว

$$k_1 = \left[\frac{900}{3}\right]+\left[\frac{300}{3}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{33}{3}\right]+\left[\frac{11}{3}\right]+\left[\frac{3}{3}\right]+\left[\frac{1}{3}\right]$$

$$= 300 + 100 + 33 + 11 + 3 + 1 + 0$$

$$= 448$$

$t_2 = \left[\frac{448}{2}\right] = 228$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(3^2)^{t_2}$ หาร 900! ลงตัว

หาจำนวนเต็มบวก k_3 ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 5^{k_3} หาร 900! ลงตัว

$$k_3 = \left[\frac{900}{5}\right]+\left[\frac{180}{5}\right]+\left[\frac{36}{5}\right]+\left[\frac{7}{5}\right]+\left[\frac{1}{5}\right]$$

$$= 180 + 36 + 7 + 1 + 0$$

$$= 224$$

$t_3 = \left[\frac{224}{1}\right] = 224$ เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(5^1)^{t_3}$ หาร n! ลงตัว

ให้ k = ค่าต่ำที่สุดของ $\{179, 228, 224\} = 179$

สรุป $k = 179$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ m^k หาร n! ลงตัว

หมายเหตุ ในกรณีที่ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r$ ทุกตัวมีค่าเป็น 1 ให้พิจารณาเฉพาะตัวประกอบที่มีค่ามากที่สุดของ m ก็พอ

ตัวอย่าง 8. จำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 420^k หาร 10000! ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 1665 2. 1666 3. 1667 4. 1669

ตอบ 1.

แนวคิด แยกตัวประกอบ 420 ออกเป็น $420 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

เพราะฉะนั้น 7 เป็นจำนวนเฉพาะที่ใหญ่ที่สุดที่หาร 420 ลงตัว

หาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 7^j หาร 10000! ลงตัว

$$k = \left[\frac{10000}{7}\right] + \left[\frac{1428}{7}\right] + \left[\frac{204}{7}\right] + \left[\frac{29}{7}\right] + \left[\frac{4}{7}\right]$$

$$= 1428 + 204 + 29 + 4 + 0$$

$$= 1665$$

สรุป k = 1665 เป็นค่ามากที่สุดที่ทำให้ 420^k หาร 10000! ลงตัว

ตัวอย่าง 9 $A = \{ 2^m \cdot 3^n \mid m,n \in N$ และ $2^m \cdot 3^n$ หาร 10! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว

1. 30 2. 31 3. 32 4. 33

ตอบ 3.

แนวคิด k = 8 เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ 2^k หาร 10! ลงตัว

k = 4 เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ 3^k หาร 10! ลงตัว

เพราะฉะนั้น $n(A) = 8 \cdot 4 = 32$

แบบฝึกหัด

1. 2002! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว
2. 2544! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว
3. (7!)! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว
4. (10!)! ลงท้ายด้วยเลขศูนย์กี่ตัว
5. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 10^k หาร 10! ลงตัว
6. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 50^k หาร 50! ลงตัว
7. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 100^k หาร 100! ลงตัว
9. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 30^k หาร 100! ลงตัว
10. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ 210^k หาร 210! ลงตัว
11. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $(5!)^k$ หาร (5!)! ลงตัว
12. $A = \{ 2^m \cdot 3^n \mid m,n \in N$ และ $2^m \cdot 3^n$ หาร 25! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
13. $A = \{ 2^m \cdot 3^n \mid m,n \in N$ และ $2^m \cdot 3^n$ หาร 50! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
14. $A = \{ 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k \mid m,n,k \in N$ และ $2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$ หาร 10! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
15. $A = \{ 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k \mid m,n,k \in N$ และ $2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$ หาร 25! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
16. $A = \{ 2^m \cdot 3^n \cdot 5^k \mid m,n,k \in N$ และ $2^m \cdot 3^n \cdot 5^k$ หาร 50! ลงตัว $\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว
17. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ k^k หาร 10! ลงตัว
18. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ k^k หาร 100! ลงตัว
19. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มีค่ามากที่สุดที่ทำให้ $2^k 3^{3k}$ หาร 100! ลงตัว

สมการภาคตัดกรวย กับ เมทริกซ์และค่ากำหนด

นักเรียนได้เรียนภาคตัดกรวยโดยเริ่มตั้งแต่จุดในพิกัดมุมฉาก สมการเส้นตรง สมการวงกลม สมการพาราโบลา สมการวงรี สมการไฮเพอร์โบลา โดยเริ่มเรียนการ plot จุดในพิกัดมุมฉากตั้งแต่ ระดับมัธยมศึกษาตอนต้น จนครบเนื้อหาภาคตัดกรวยใน ค.012 ในระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และเมื่อเรียนถึง ม.5 เทอมที่ 1 นักเรียนก็จะได้เรียนเนื้อหาเมทริกซ์และค่ากำหนด ในบทความนี้จะชี้ให้เห็นความสัมพันธ์ระหว่างภาคตัดกรวยและค่ากำหนดบางประการที่จะเป็นประโยชน์อย่างมากแก่นักเรียน

การหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1 , y_1) และ (x_2 , y_2)

สมการเส้นตรงคือ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ตัวอย่างเช่นจงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 ,4) และ (3 , 7)

การทำตามหลักสูตรคงต้องทำดังต่อไปนี้

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{7-4}{3-1}$$

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{3}{2}$$

$$2y - 8 = 3x - 3$$

$$3x - 2y + 5 = 0$$

ลองมาดูสมการค่ากำหนดนี้กันก่อน $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x)(4-7) - (y)(1-3) + (1)(7-12) = 0$$

$$-3x + 2y - 5 = 0$$

$$3x - 2y + 5 = 0$$

จะเห็นได้ว่าได้สมการเส้นตรงเหมือนกัน

การหาสมการเส้นตรงในรูปแบบของสมการค่ากำหนด

สมมติสมการเส้นตรงคือ $Ax + By + C = 0$ ——————(1)

เส้นตรงผ่านจุด (x_1, y_1) ; $Ax_1 + By_1 + C = 0$ ——————(2)

เส้นตรงผ่านจุด (x_2, y_2) ; $Ax_2 + By_2 + C = 0$ ——————(3)

สมการ (1),(2),(3) เป็นระบบสมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร A,B,C มีคำตอบมากกว่าหนึ่งชุดคำตอบ

ตัวอย่างเช่น ถ้า $3x + 4y + 5 = 0$ เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) ก็จะได้ว่า $-3x - 4y - 5 = 0$, $30x + 40y + 50 = 0$, ...เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) เหมือนกัน นั้นคือความหมายของคำว่า A,B,C มีได้หลายค่า

เพราะว่า ระบบสมการ 3 สมการ 3 ตัวแปร

$$Ax + By + C = 0$$

$$Ax_1 + By_1 + C = 0$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$

มีหลายคำตอบ เพราะฉะนั้น $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

สรุปสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , 1) และ (3 , 7)

วิธีทำ สมการเส้นตรงคือ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x)(1-7)-(y)(2-3)+(1)(14-3)=0$$

$$-6x+y+11=0$$

หรือ $6x-y-11=0$

สรุปสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, 1)$ และ $(3, 7)$ คือ $6x-y-11=0$

การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุดสามจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่างเช่นการหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด $(1, 7), (6, 2)$ และ $(4, 6)$

ตามหลักสูตร ม. ปลายใน ค.012 เราต้องสมมติสมการวงกลมเป็น

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0$$

หรือ $Ax+By+C=-(x^2+y^2)$

วงกลมผ่านจุด $(1, 7)$ จะได้สมการ $A+7B+C=-(1+49)$

วงกลมผ่านจุด $(6, 2)$ จะได้สมการ $6A+2B+C=-(36+4)$

วงกลมผ่านจุด $(4, 6)$ จะได้สมการ $4A+6B+C=-(16+36)$

โดยการแก้สมการ 3 ตัวแปร 3 สมการได้ $A=-2, B=-4, C=-20$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมคือ $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

ลองมาดูสมการค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+7^2 & 1 & 7 & 1 \\ 6^2+2^2 & 6 & 2 & 1 \\ 4^2+6^2 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} - (x)\begin{vmatrix} 50 & 7 & 1 \\ 40 & 2 & 1 \\ 52 & 6 & 1 \end{vmatrix} + (y)\begin{vmatrix} 50 & 1 & 1 \\ 40 & 6 & 1 \\ 52 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 50 & 1 & 7 \\ 40 & 6 & 2 \\ 52 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)(10) - (x)(20) + (y)(-40) - (1)(200) = 0$$

$$(x^2+y^2) - (x)(2) + (y)(-4) - (1)(20) = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

จะเห็นได้ว่าทั้งสองวิธีได้สมการวงกลมเหมือนกัน

เหตุผลที่ทำให้เราได้สมการวงกลมในรูปแบบของสมการค่ากำหนด

สมมติสมการวงกลมคือ $A(x^2+y^2) + Bx + Cy + D = 0$ ——————(1)

เพราะว่าวงกลมผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) เพราะฉะนั้น

$A(x_1^2 + y_1^2) + Bx_1 + Cy_1 + D = 0$ ——————(2)

$A(x_2^2 + y_2^2) + Bx_2 + Cy_2 + D = 0$ ——————(3)

$A(x_3^2 + y_3^2) + Bx_3 + Cy_3 + D = 0$ ——————(4)

ระบบสมการ (1) – (4) เป็นระบบสมการ 4 ตัวแปร 4 สมการ มีคำตอบมากกว่า 1 ชุดคำตอบ เพราะฉะนั้นค่ากำหนดของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ต้องเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น
$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

เป็นสมการวงกลมที่ผ่านจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3)

ตัวอย่าง จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (– 3 , 2) , (– 2 , 3) และ (1 , 4)

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (-3)^2+(2)^2 & -3 & 2 & 1 \\ (-2)^2+(3)^2 & -2 & 3 & 1 \\ (1)^2+(4)^2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 13 & -3 & 2 & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 17 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (x)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + (y)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2+y^2)(-2) - (x)(-4) + (y)(-4) - (1)(-46) = 0$$

$$x^2+y^2-2x+2y-23 = 0$$

สรุปวงกลมที่ผ่านจุด (– 3 , 2) , (– 2 , 3) และ (1 , 4) คือ $x^2+y^2-2x+2y-23=0$

การหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุดสามจุด (x_1, y_1), (x_2, y_2) และ (x_3, y_3) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

กรณี กำหนดให้แกนพาราโบลาขนานแกน Y

วิธีที่ 1. สมมติสมการพาราโบลาคือ $y = Ax^2 + Bx + C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_1 , y_1) จะได้สมการ $y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_2 , y_2) จะได้สมการ $y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_3 , y_3) จะได้สมการ $y_3 = Ax_3^2 + Bx_3 + C$

ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (1 , 9) , (– 1, 3) และ (– 2 , 6)

$$9 = A + B + C$$

$$3 = A - B + C$$

$$6 = 4A - 2B + C$$

โดยการแก้สมการจะได้ A = 2 , B = 3 และ C = 4

สรุปสมการพาราโบลาคือ $y = 2x^2 + 3x + 4$

วิธีที่ 2 สมมติสมการพาราโบลาคือ $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$

สมการค่ากำหนดคือ
$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (1 , 9) , (– 1, 3) และ (– 2 , 6)

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)(\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}) - (x)(\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}) + (y)(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}) - (1)(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{vmatrix}) = 0$$

$$(x^2)(-12)-(x)(-18)+(y)(6)-(1)(-24)=0$$

$$2x^2+3x-y+4=0$$

สรุปได้สมการพาราโบลาเป็น $y=2x^2+3x+4$ เหมือนกัน

กรณี กำหนดให้แกนพาราโบลาขนานแกน X

วิธีที่ 1. สมมติสมการพาราโบลาคือ $x=Ay^2+By+C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_1, y_1) จะได้สมการ $x_1=Ay_1^2+By_1+C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_2, y_2) จะได้สมการ $x_2=Ay_2^2+By_2+C$

พาราโบลาผ่านจุด (x_3, y_3) จะได้สมการ $x_3=Ay_3^2+By_3+C$

ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด $(8, 1)$, $(0, -1)$ และ $(5, -2)$

$$8=A+B+C$$

$$0=A-B+C$$

$$5=4A-2B+C$$

โดยการแก้สมการจะได้ $A=3$, $B=4$ และ $C=1$

สรุปสมการพาราโบลาคือ $x=3y^2+4y+1$

วิธีที่ 2 สมมติสมการพาราโบลาคือ $Ay^2+By+Cx+D=0$

สมการค่ากำหนดคือ $\begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ y_1^2 & y_1 & x_1 & 1 \\ y_2^2 & y_2 & x_2 & 1 \\ y_3^2 & y_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

ตัวอย่าง จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด $(8, 1)$, $(0, -1)$ และ $(5, -2)$

$$\begin{vmatrix} y^2 & y & x & 1 \\ 1 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y^2)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix} - (y)\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} + (x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$(y^2)(-18) - (y)(24) + (x)(6) - (1)(6) = 0$$

$$-18y^2 - 24y + 6x - 6 = 0$$

สรุปได้สมการพาราโบลาเป็น $x = 3y^2 + 4y + 1$ เหมือนกัน

การหาสมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด 4 จุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ และ (x_4, y_4) ที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

เนื่องจากสมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา มีรูปแบบเหมือนกันคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$$

เพราะฉะนั้นสมการค่ากำหนดที่ได้อาจเป็นสมการวงรี หรือ ไฮเพอร์โบลา

ซึ่งสมการค่ากำหนดนั่นคือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่าง จงหาสมการวงรีที่ผ่านจุด $(-3, 1), (5, 1), (1, 4), (1, -2)$

$$\text{สมการค่ากำหนดคือ} \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 9 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (y^2)\begin{vmatrix} 9 & -3 & 1 & 1 \\ 25 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} + (x)\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 16 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} - (y)$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 & 1 \\ 25 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 16 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)(-432) - (y^2)(768) + (x)(864) - (y)(-1536) + (1)(5712) = 0$$

$$-432x^2 - 768y^2 + 864x + 1536y + 5712 = 0$$

จัดรูปต่อไปจะได้

$$432x^2 + 768y^2 - 864x - 1536y - 5712 = 0$$

$$432(x^2 - 2x + 1) + 768(y^2 - 2y + 1) = 5712 + 432 + 768$$

$$432(x-1)^2 + 768(y-1)^2 = 6912$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

สรุปวงรีที่ผ่านจุด $(-3, 1), (5, 1), (1, 4), (1, -2)$ คือ $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

หมายเหตุ ในบางกรณีค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}$ มีค่าเป็น 0 โดยไม่ปรากฏพจน์ของ x และ y ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ภาคตัดกรวยผ่านจุด (– 3 , – 1) , (– 3 , 1) , (3 , – 1) และ (3 , 1) จะได้ว่าค่ากำหนด $\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 9 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ เมื่อทำการกระจายสูตรแล้วจะไม่เหลือพจน์ของ x และ y ทั้งๆที่มีสมการวงกลม วงรี และไฮเพอร์โบลา ผ่านจุด (– 3 , – 1) , (– 3 , 1) , (3 , – 1) และ (3 , 1) คือ

สมการวงกลม $x^2 + y^2 = 10$

สมการวงรี $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{7y^2}{16} = 1$

สมการไฮเพอร์โบลา $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{5y^2}{4} = 1$

ในระดับการเรียนที่สูงขึ้นภาคตัดกรวย เช่น วงรี ไฮเพอร์โบลา มีแกนสมมาตรไม่ขนานกับ แกน X หรือ แกน Y ได้ รูปแบบทั่วไปของสมการคือ

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

สมการ วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด 5 จุด (x_1 , y_1) , (x_2 , y_2) , (x_3 , y_3) , (x_4 , y_4) และ (x_5 , y_5) คือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2 & y_4^2 & x_4y_4 & x_4 & y_4 & 1 \\ x_5^2 & y_5^2 & x_5y_5 & x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ตัวอย่าง จงหาสมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุด (0 , 0) , (0 , –1) , (2 , 0) , (2 , -5) และ (4 , – 1)

สมการภาคตัดกรวยคือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & -10 & 25 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & -4 & 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x^2)(-160) - (y^2)(160) + (xy)(-320) - (x)(320) + (y)(-160) + (1)(0) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2xy - 2x + y = 0$$

ในบทความนี้จะเห็นได้ว่ามีการคำนวนค่ากำหนดมาก ดังนั้นขอแนะนำการคำนวนค่ากำหนดด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD ซึ่งคำนวนได้ทั้งค่าตัวเลข และคำนวนออกมาเป็นสูตร ตัวอย่างเช่น

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\right| = 48$$

เพราะฉะนั้นค่ากำหนดที่คำนวนผ่านมาข้างต้นสามารถคำนวนด้วย MATHCAD ได้โดยง่ายดังนี้

$$\left|\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}\right|$$

ผลการคำนวนด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$-3\cdot x+2\cdot y-5$$

การคำนวนด้วยโปรแกรม MATHCAD

สามารถได้ในพจน์ของตัวแปร x และ y

$$\left|\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 13 & -3 & 2 & 1 \\ 13 & -2 & 3 & 1 \\ 17 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

ผลการคำนวนด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$-2\cdot x^2-2\cdot y^2+4\cdot x-4\cdot y+46$$

$$\left|\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 50 & 1 & 7 & 1 \\ 40 & 6 & 2 & 1 \\ 52 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

ผลการคำนวนด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$10\cdot x^2+10\cdot y^2-20\cdot x-40\cdot y-200$$

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & xy & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 25 & -10 & 2 & -5 & 1 \\ 16 & 1 & -4 & 4 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right|$$

ผลการคำนวนด้วยโปรแกรม MATHCAD

$$-160\cdot y-160\cdot y^2-320\cdot x\cdot y+320\cdot x-160\cdot x^2$$

ตัวอย่างข้อสอบ

ตัวอย่าง 1. (สมาคมคณิตศาสตร์ 2533)

พาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ ผ่านจุด $(0 , 0)$ จุด $(-1 , -3)$ และจุด $(-2 , -4)$

P และ Q เป็นจุดที่พาราโบลาตัดแกน X สมการของวงกลมที่มี PQ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมคือสมการในข้อใด

1. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4y = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด สมการพาราโบลาคือ

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2x^2 - 8x + 2y = 0$$

ได้สมการ $y = x^2 + 4x$

เพราะฉะนั้นจุดตัดแกน X คือ $(0,0)$ และ $(-4 , 0)$

ดังนั้นจุดศูนย์กลางวงกลมคือ $(-2 ,0)$ และรัศมี $= 2$

สมการวงกลมคือ $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

$$x^2 + y^2 + 4x = 0$$

ตัวอย่าง 2. (วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3)

พื้นที่วงกลมที่ผ่านจุด A(1 , 1) , B(4 , 2) และ C(3 , 5) เท่ากับเท่าใด

ตอบ 1.

แนวคิด สมการวงกลมคือ

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 4 & 2 & 1 \\ 34 & 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$10x^2 + 10y^2 - 40x - 60y + 80 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -8 + 4 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 5$$

เป็นสมการวงกลมรัศมี $\sqrt{5}$ เพราะฉะนั้นพื้นที่วงกลมมีค่าเท่ากับ $\pi r^2 = 5\pi$

ค่าของจำนวน e = 2.718281828 มาจากไหน

บทความนี้เป็นการนำเสนอเนื้อหาเกี่ยวกับ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม แคลคูลัส โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อผู้อ่านคือ

1. รู้จักกับจำนวนธรรมชาติ e
2. รู้ว่าทำไม ค่า e จึงมีค่าประมาณเท่ากับ 2.718281828
3. รู้จักความหมายของลอการิทึมฐานธรรมชาติ (ลอการิทึมแบบเนเปียร์, ลอการิทึมฐาน e) ซึ่งเรามักจะพบในสัญลักษณ์ของ lnx
4. รู้จักตัวอย่างการประยุกต์ใช้งานของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชันลอการิทึม และแคลคูลัส กับปัญหาอื่น เช่น ในสาขา ฟิสิกส์, ชีววิทยา, เศรษฐศาสตร์

ในการศึกษาแคลคูลัสเกี่ยวกับ การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการอินทิเกรต ในส่วนของการหาอนุพันธ์นั้นเป็นที่ทราบกันดีว่า

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 4) = 2x + 4$

$$\frac{d}{dx}(x^3 - 4x^2 - 3x + 4) = 3x^2 - 8x - 3$$

โดยความหมายของอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}f(x)$ เท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของค่าฟังก์ชัน f(x) เทียบกับการเปลี่ยนแปลงค่าของ x

ตัวอย่างปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลง

1. ปัญหาทางฟิสิกส์

x = เวลา

$f(x)$ = ปริมาณของแร่ยูเรเนียม

อัตราการสลายตัวของแร่ยูเรเนียมแปรผันตรงกับปริมาณของแร่ยูเรเนียมที่มีจะทำให้ได้สมการแปรผัน

$\frac{d}{dx}f(x)$ แปรผันตรงกับ $f(x)$

$$\frac{d}{dx}f(x) \propto f(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \;;\; k > 0$$

2. ปัญหาทางชีววิทยา

x = เวลา

$f(x)$ = ปริมาณของเชื้อโรคในขณะเวลา x ใดๆ

อัตราการเพิ่มของเชื้อโรคแปรผันตรงกับปริมาณของเชื้อโรคในขณะนั้นจะทำให้ได้สมการแปรผัน

$\frac{d}{dx}f(x)$ แปรผันตรงกับ $f(x)$

$$\frac{d}{dx}f(x) \propto f(x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \;;\; k > 0$$

3. ปัญหาทางเศรษฐศาสตร์

x = อัตราดอกเบี้ย

$f(x)$ = ปริมาณการลงทุนในขณะที่อัตราดอกเบี้ยเท่ากับ x

อัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในการลงทุนแปรผันตรงกับอัตราดอกเบี้ย จะทำให้ได้สมการแปรผัน

$\frac{d}{dx}f(x)$ แปรผันตรงกับ $f(x)$

$\frac{d}{dx}f(x) \propto f(x)$

$\frac{d}{dx}f(x) = kf(x)$; $k > 0$

จากตัวอย่างที่กล่าวมาจะเห็นว่า มีปัญหาจริงในชีวิตประจำวันที่สามารถอธิบายได้ด้วยสมการ $\frac{d}{dx}f(x) = kf(x)$; $k > 0$
ดังนั้นเราจึงศึกษาแนวทางการหาฟังก์ชันอะไรสักฟังก์ชันหนึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$\frac{d}{dx}f(x) = kf(x) \ ; \ k > 0$$

ก่อนอื่นขอศึกษาฟังก์ชัน f ที่มิใช่ฟังก์ชันค่าคงตัว และ

$f(xy) = f(x) + f(y)$ ทุกค่า $x > 0$ และ $y > 0$

จะพบว่า f มีคุณสมบัติที่น่าสนใจดังนี้

1. $f(1) = 0$

เพราะว่า $f(1) = f(1\times1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$

2. $f(y^{-1}) = -f(y)$ เมื่อ $y > 0$

เพราะว่า $yy^{-1} = 1$

$f(yy^{-1}) = f(1)$

$f(y) + f(y^{-1}) = 0$

เพราะฉะนั้น $f(y^{-1}) = -f(y)$

3. $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ ทุก $x > 0$ และ $y > 0$

เพราะว่า $f(\frac{x}{y}) = f(xy^{-1}) = f(x) + f(y^{-1})$

เพราะฉะนั้น $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

4. $f'(x) = \frac{1}{x} f'(1) \quad , x > 0$

เพราะว่า $f(x+h) - f(x) = f(\frac{x+h}{x}) = f(1+\frac{h}{x})$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(1+\frac{h}{x})}{h}$

เพราะว่า $f(1) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{h} = \frac{1}{x}[\frac{f(1+\frac{h}{x})-f(1)}{\frac{h}{x}}]$

เมื่อ $h \to 0$ จะได้ $\frac{h}{x} \to 0$ ด้วย

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{1}{x} f'(1)$

ข้อสังเกต เนื่องจากฟังก์ชัน f ที่เราสนใจต้องไม่เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว ดังนั้นหากให้ $f'(1)$ มีค่าเป็นศูนย์ จะทำให้ $f'(x) = 0$ นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว นั่นเอง ดังนั้นเราสนใจกรณีที่ $f'(1) \neq 0$ เท่านั้น นอกจากนี้เรายังสนใจเจาะจงลงไปที่ $f'(1) = 1$ เป็นกรณีเฉพาะอีกด้วย ปัญหาที่เราสนใจต่อไปคือ สูตรของฟังก์ชัน f เป็นอย่างไรได้บ้าง

จึงจะทำให้ $\quad f(xy) = f(x) + f(y) \;;\; x > 0, y > 0$

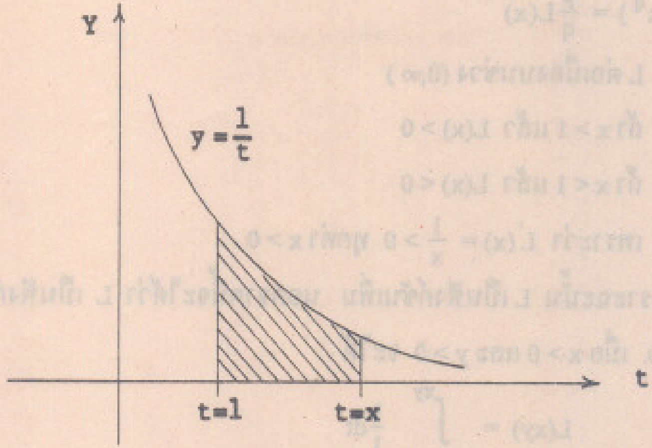
$\quad f'(1) = 1$

และ $\quad f'(x) = \frac{1}{x}$

ด้วยความรู้เกี่ยวกับอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์ พบว่าหากเรากำหนดให้

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad ; x > 0$$

นั่นคือ $L(x)$ เป็นพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = \frac{1}{t}$ กับแกน t จาก $t = 1$ ถึง $t = x$



จะได้ว่า 1. $L(1) = 0$

2. $L'(x) = \frac{1}{x}$

3. $L'(1) = 1$

4. โดเมนของ L คือ $(0, \infty)$

5. เพราะว่าทุกค่า $x > 0$ และ p,q ที่เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}[L(x^{\frac{p}{q}})] = \frac{d}{dx}\left[\int_1^{x^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{t}dt\right] = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}}\left(\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}\right)$$

$$= \frac{p}{qx}$$

และ $\frac{d}{dx}[\frac{p}{q}L(x)] = \frac{p}{q}\frac{d}{dx}[L(x)] = \frac{p}{q}(\frac{1}{x}) = \frac{p}{qx}$

สรุป $\frac{d}{dx}[\frac{p}{q}L(x)] = \frac{d}{dx}[L(x^{\frac{p}{q}})]$

เพราะฉะนั้น $L(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}L(x) + K$; K เป็นค่าคงตัว

เพราะว่า $L(1) = 0$ เพราะฉะนั้น $K = 0$

นั่นคือ $L(x^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q}L(x)$

6. L ต่อเนื่องบนช่วง $(0,\infty)$

7. ถ้า $x > 1$ แล้ว $L(x) > 0$

8. ถ้า $x < 1$ แล้ว $L(x) < 0$

9. เพราะว่า $L'(x) = \frac{1}{x} > 0$ ทุกค่า $x > 0$

เพราะฉะนั้น L เป็นฟังก์ชันเพิ่ม นอกจากนี้จะได้ว่า L เป็นฟังก์ชัน 1–1

10. เมื่อ $x > 0$ และ $y > 0$ จะได้

$$\begin{aligned} L(xy) &= \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt \\ &= \int_1^{x} \frac{1}{t}dt + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt \\ &= L(x) + \int_x^{xy} \frac{1}{t}dt \end{aligned}$$

พิจารณา $\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt$ ดังนี้ ให้ $u = \frac{t}{x}$

จะได้ว่า $\int_x^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{y} \frac{1}{u}du = L(y)$

เพราะฉะนั้น $L(xy) = L(x) + L(y)$

ต่อไปเป็นการหาเรนจ์ของฟังก์ชัน L ให้ M เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 0, $M > 0$

เพราะว่า $L(2) = \int_1^2 \frac{1}{t}dt$ เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะฉะนั้น $\frac{M}{L(2)}$ เป็นจำนวนจริงบวก และต้องมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$n > \dfrac{M}{L(2)}$ นั่นคือ $nL(2) > M$ และ $-M < -nL(2)$

$$L(2^n) > M \text{ และ } -M < L(2^{-n})$$

จากที่กล่าวมาสรุปได้ว่า ทุกจำนวนจริงบวก M จะมีจำนวนจริง 2^n และ 2^{-n}

ที่ทำให้ $-M < L(2^{-n})$ และ $L(2^n) > M$

เพราะฉะนั้น $\{ L(x) \mid x > 0 \}$ ไม่มีขอบเขตบนและไม่มีขอบเขตล่าง

เนื่องจาก L มีความต่อเนื่องบนช่วง $(0, \infty)$

เพราะฉะนั้น $\{ L(x) \mid x > 0 \}$ เป็นช่วงของจำนวนจริง

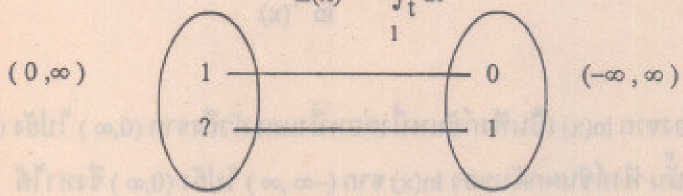
สรุป $\{ L(x) \mid x > 0 \} = (-\infty, \infty)$

ขณะนี้ความรู้ต่างๆ เกี่ยวกับฟังก์ชัน L ที่เราจะนำไปใช้ต่อคือ

$L : (0,\infty) \rightarrow (-\infty,\infty)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ดังนั้นต้องมีจำนวนจริงในเซต $(0,\infty)$ ที่ส่งค่าไปยัง 1 ใน $(-\infty, \infty)$

$$L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$$



ให้ e เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $L(e) = 1$ นั่นคือ $L(e) = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt = 1$

เนื่องจาก L(x) มีลักษณะของคุณสมบัติคล้ายลอการิทึม กล่าวคือ

$$L(1) = 0$$

$$L(xy) = L(x) + L(y) \quad , x > 0 , y > 0$$

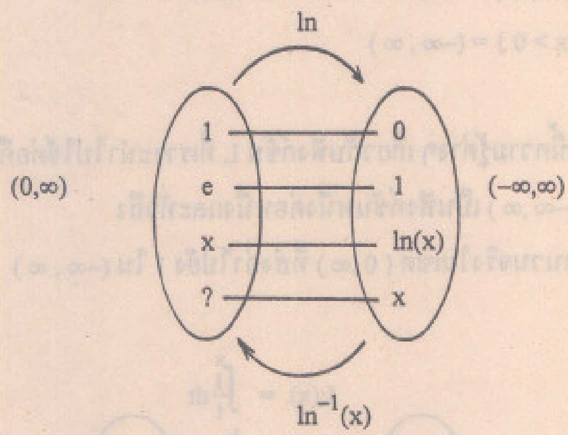
$$L(\frac{1}{x}) = -L(x) \qquad , x > 0$$

$$L(x^n) = nL(x)$$

ดังนั้นเราจึงเลือกใช้สัญลักษณ์ $\log_e(x)$ แทน $L(x)$

ต่อมาเนื่องจากมีการใช้ log แทน $\log_{10}$ จึงมีผู้นิยมที่จะใช้ $\ln(x)$ แทน $\log_e(x)$

และเรียก $\ln(x)$ ว่า <u>ลอการิทึมฐานธรรมชาติ</u>



เนื่องจาก $\ln(x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึงจาก $(0,\infty)$ ไปยัง $(-\infty,\infty)$

ดังนั้น ฟังก์ชันผกผันของ $\ln(x)$ จาก $(-\infty,\infty)$ ไปยัง $(0,\infty)$ จึงหาได้

เพราะว่า $\quad \ln(e^x) = x\ln(e) = x$

เพราะฉะนั้น e^x จึงเป็นฟังก์ชันผกผันของ $\ln(x)$ และเราเรียก e^x ว่าเป็น <u>ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล</u> นอกจากนี้เมื่อเราทราบแต่แรกว่า $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

ดังนั้นโดยกฎลูกโซ่ในการ หาอนุพันธ์จะได้

$$\frac{d}{dx}\ln(e^x) = \frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}e^x$$

แต่ $\ln(e^x) = x$

เพราะฉะนั้น $1 = \frac{dx}{dx} = \frac{1}{e^x}\frac{d}{dx}e^x$

นั่นคือ $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

ผลจาก $\frac{d}{dx}e^x = e^x > 0$ เสมอจะได้ว่า ฟังก์ชัน e^x เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะว่า $\ln(e^{\ln(x)}) = [\ln(x)]\ln e = \ln(x)(1) = \ln(x)$

และ ln เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้น $e^{\ln(x)} = x$

การประมาณค่าของ e

ทฤษฎีบท ทุกจำนวนเต็มบวก n $(1+\frac{1}{n})^n \le e \le (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

ข้อพิสูจน์ ทุกค่า $n \in N$ $\ln(1+\frac{1}{n}) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}dt$

เพราะว่าบนช่วง $t \in (1, 1+\frac{1}{n})$, $\frac{1}{t} < 1$ และ $\frac{1}{t} > \frac{1}{(1+\frac{1}{n})}$

เพราะฉะนั้น $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}dt < \int_1^{1+\frac{1}{n}} (1)dt = (1+\frac{1}{n}) - (1) = \frac{1}{n}$

นั่นคือ $\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

จาก $\int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{t}dt > \int_1^{1+\frac{1}{n}} (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})dt = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})}(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$

นั่นคือ $\ln(1+\frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

เพราะว่า e เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น

จาก $\ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ จะได้ $1+\frac{1}{n} < e^{\frac{1}{n}}$ นั่นคือ $(1+\frac{1}{n})^n < e$

จาก $\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n})$ จะได้ $e^{\frac{1}{n+1}} < 1+\frac{1}{n}$

นั่นคือ $e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

สรุป ทุกจำนวนเต็มบวก n $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

จากตารางต่อไปนี้

n	$(1+\frac{1}{n})^n$	$(1+\frac{1}{n})^{n+1}$
1	2	4
2	2.25	3.375
10	2.59374246	2.853116706
1000000	2.718280469	2.718283188
10000000	2.718281693	2.718281964
100000000	2.718281815	2.718281842
1000000000	2.718281827	2.71828183
10000000000	2.718281828	2.718281829

สรุป ค่าที่ถูกต้องถึงทศนิยม 8 ตำแหน่งของ e คือ 2.71828182

ความหมายของค่า e อีกประการหนึ่งที่มีบทนิยามในการใช้งานคือ

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

หรือ $$\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t = e$$

หรือ $\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

จากตัวอย่างของลิมิตนี้จะเห็นได้ว่ามีการนำค่า e ไปแทนความหมายของค่าลิมิตของฟังก์ชันทั้งในความหมายของลิมิตเมื่อตัวแปรมีค่าเข้าใกล้และตัวแปรมีค่าเข้าใกล้ 0 ซึ่งในตำราบางเล่มอาจเริ่มต้นกำหนดค่า

$$e = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

และ
$$e^x = \lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{x}{t}}$$

แล้วจึงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $\frac{d}{dx}e^x = e^x$

ตัวอย่างการประยุกต์ใช้งาน

1. จงหาคำตอบของสมการ $f'(x) = f(x)$ และ $f(0) = 2$

เพราะว่า $f(x) = e^x$ ทำให้ $f'(x) = e^x = f(x)$

เพราะฉะนั้นคำตอบของสมการ $f'(x) = f(x)$ คือ $f(x) = e^x + k$

เพราะว่า $f(0) = 2$ เพราะฉะนั้น $2 = e^0 + k$

$$k = 1$$

สรุป $f(x) = e^x + 1$

2. จงหาคำตอบของสมการ $f'(x) = 4f(x)$ และ $f(0) = -3$

เพราะว่า $\frac{d}{dx}e^{4x} = e^{4x}\frac{d}{dx}4x = 4e^{4x}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = e^{4x} + K$ เป็นคำตอบของสมการ $f'(x) = 4f(x)$

เพราะว่า $f(0) = -3$ เพราะฉะนั้น $-3 = e^0 + K$

$$K = -4$$

สรุป $f(x) = e^{4x} - 4$

โดยทั่วไปเราจะสรุปได้ว่า $f(x) = e^{mx} + K$ เป็นคำตอบของสมการ $f'(x) = mf(x)$

หวังว่าบทความนี้คงทำให้ผู้อ่านได้รู้ที่มาของจำนวนธรรมชาติ e = 2.718281828 และประโยชน์ รวมทั้งที่มาของฟังก์ชัน e^x และ lnx

ตัวอย่างข้อสอบที่มีการนำ ค่า e , lnx ,e^x ไปเป็นคำถาม

ตัวอย่าง 1. (กข.35) ถ้า $f(x) = \ln(2^{5x}3^{4x^2})$

แล้ว $f'(1) - f''(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0   2. 5ln2   3. 8ln3   4. 5ln2 – 8ln3

ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \ln(2^{5x}3^{4x^2}) = \ln(2^{5x}) + \ln(3^{4x^2}) = 5x\ln2 + 4x^2\ln3$

$f'(x) = 5\ln2 + 8x\ln3 \qquad f'(1) = 5\ln2 + 8\ln3$

$f''(x) = 8\ln3 \qquad f''(1) = 8\ln3$

$f'(1) - f''(1) = 5\ln2 + 8\ln3 - 8\ln3 = 5\ln2$

ตัวอย่าง 2. (กข.35) ถ้า $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ และ $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

แล้ว $f(x + y)$ จะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(x)g(y) + g(x)f(y)$ 2. $f(x)g(x) + f(y)g(y)$
3. $g(x)f(y) - f(x)g(y)$ 4. $f(y)g(y) - f(x)g(x)$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x และ y

แทนค่า x = 0 และ y = 1

$f(0)=0$, $g(0)=1$, $f(1)\neq 0$, $g(1)\neq 0$ และ $f(1)\neq g(1)$

ค่าของโจทย์ $f(x+y)=f(1)$ ค่าของแต่ละตัวเลือก

1. $f(x)g(y)+g(x)f(y)=f(0)g(1)+g(0)f(1)=f(1)$

2. $f(x)g(x)+f(y)g(y)=f(0)g(0)+f(1)g(1)=f(1)g(1)\neq f(1)$

3. $g(x)f(y)-f(x)g(y)=g(0)f(1)-f(0)g(1)=f(1)$

4. $f(y)g(y)-f(x)g(x)=f(1)g(1)-f(0)g(0)=f(1)g(1)\neq f(1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x=1$ และ $y=0$

ค่าของโจทย์ $f(x+y)=f(1)$ ค่าของแต่ละตัวเลือก

1. $f(x)g(y)+g(x)f(y)=f(1)g(0)+g(1)f(0)=f(1)$

3. $g(x)f(y)-f(x)g(y)=g(1)f(0)-f(1)g(0)=-f(1)\neq f(1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3. (กข.34) คำตอบของอสมการ $e^{x^2\ln 2}<2^x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,\frac{\ln 2}{\ln 3})$ 2. $(0,\frac{\ln 2}{\ln 3})$
3. $(\frac{\ln 3}{\ln 2},\infty)$ 4. $(0,\frac{\ln 3}{\ln 2})$

ตอบ เซตคำตอบคือ (0,1)

แนวคิด เพราะว่า $2<2.7<e$ เพราะฉะนั้น $x=0$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $\ln 3>\ln 2$ เพราะฉะนั้น $\frac{\ln 3}{\ln 2}>1$ และ $(0,1]\subset(0,\frac{\ln 3}{\ln 2})$

แทนค่า $x=1$ $e^{\ln 2}=2^{\ln e}=2$

เพราะฉะนั้น $x=1$ ไม่ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $e^{x^2 \ln 2} < 2^x$

$e^{\ln 2^{x^2}} < 2^x$

$(2^{x^2})^{\ln e} < 2^x$ (เพราะว่า $A^{\ln B} = B^{\ln A}$)

$2^{x^2} < 2^x$

$x^2 < x$

$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$

$0 < x < 1$

เพราะว่า $\frac{\ln 3}{\ln 2} \neq 1$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. และ 3. ก็ผิดด้วย

ตัวอย่าง 4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (x+1)}{e^{x+1} - (x+1)e}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0　　2.　　3. e　　4. $\frac{1}{e}$

ตอบ 4.

แนวคิด $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (x+1)}{e^{x+1} - (x+1)e} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - (x+1)}{e(e^x - (x+1))}$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{e}$

$= \dfrac{1}{e}$

ค่า $\pi = \frac{22}{7}$ หรือ 3.14 หรือ 3.1415926536 เราจะใช้อะไรดี

ในเซตของจำนวนจริงประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และ จำนวนอตรรกยะ ซึ่งจำนวนอตรรกยะที่พบเห็นกันโดยทั่วไปในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายมีหลายจำนวนเช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ซึ่งในการประมาณค่าด้วยจำนวนทศนิยมจะได้ว่า

$$\sqrt{2} = 1.414$$
$$\sqrt{3} = 1.732$$
$$\sqrt{5} = 2.236$$
$$e = 2.71828$$

จำนวนอตรรกยะที่รู้จักกันดีในเรื่องของการหาพื้นที่วงกลมคือ π ซึ่งในการเรียนรู้ระดับประถมศึกษาหรือมัธยมศึกษาตอนต้นนิยมที่จะประมาณค่า π ด้วย $\frac{22}{7}$ ต่อมาเมื่อเรียนกันในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายก็อาจจะประมาณค่า π ด้วย 3.14 เมื่อมาถึงในระดับอุดมศึกษาค่า π ที่ถูกต้องมากขึ้นควรจะใช้เป็น 3.141592654 นั่นคือ

$$\pi = \frac{22}{7} \approx 3.142857143$$

หรือ $\pi = 3.14$

หรือ $\pi = 3.141592654$

ปัญหาที่น่าสนใจคือเราควรจะแทนค่า π ด้วยตัวเลขอะไรดี

<u>ตอบ</u> ต้องแทนค่า π ตามข้อตกลงหรือตามกติกาของหลักสูตรขณะนั้น เช่น

– เมื่อเรียนในระดับประถมศึกษาหรือมัธยมศึกษาตอนต้นครูผู้สอนตกลงที่จะแทนค่า $\pi = \frac{22}{7}$ นักเรียนก็ต้องใช้ $\pi = \frac{22}{7}$ ตามครู

– เมื่อเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายครูผู้สอนตกลงให้ใช้
  $\pi = 3.14$ ก็ต้องใช้ $\pi = 3.14$ ตามหลักสูตรขณะนั้น

ปัญหาที่อยากรู้ต่อไปคือ π มีค่าถูกต้องเป็นเท่าไรกันแน่

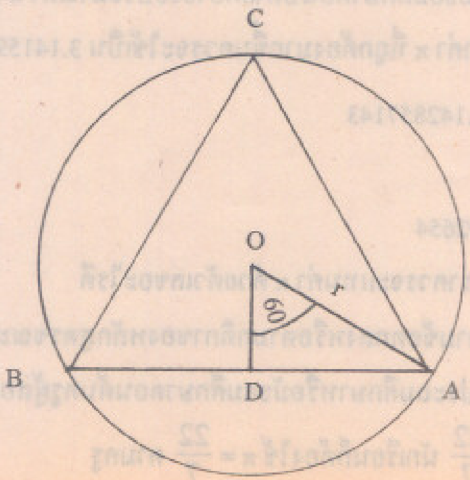
ตอบ ถ้าอยากรู้ค่าของ π ก็ต้องย้อนกลับไปดูความหมายหรือบทนิยามของ π

π = อัตราส่วนความยาวเส้นรอบวงกลม ต่อ ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง

$$\pi = \frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$$

ดังนั้นในการประมาณค่า π ที่เราจะเลือกใช้ขณะนี้คือ ประมาณความยาวเส้นรอบวงกลมด้วยความยาวเส้นรอบรูปของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม เนื่องจากอัตราส่วน $\pi = \frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$ ไม่ขึ้นกับความยาวของเส้นรัศมี ดังนั้นเราจะใช้วงกลมรัศมี 1 หน่วยช่วยในการคำนวณค่า π

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านขอทบทวนสูตรพื้นที่ และความยาวเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปสี่เหลี่ยมด้านเท่า และรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลมรัศมี r



$$|OA| = r$$

$$\cos 60^{o} = \frac{|OD|}{|OA|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|OD|}{r}$$

$$|OD| = \frac{r}{2}$$

$$\sin 60^{o} = \frac{|AD|}{|OA|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|AD|}{r}$$

$$|AD| = \frac{\sqrt{3}r}{2}$$

ดังนั้น $|AB| = \sqrt{3}r$

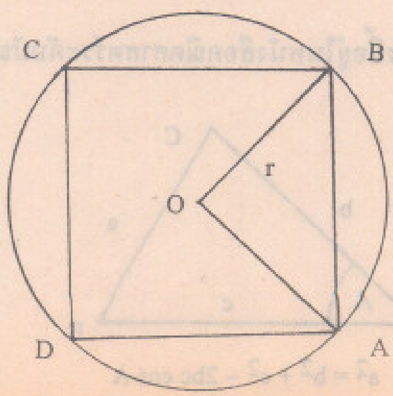
พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times$ ฐาน$\times$ สูง

$$= \frac{1}{2} \times |AB| \times |CD|$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3}r \times (r + \frac{r}{2})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

ความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC = $3|AB| = 3(\sqrt{3}r) = 3\sqrt{3}r$



$|OB| = r$

$|OA| = r$

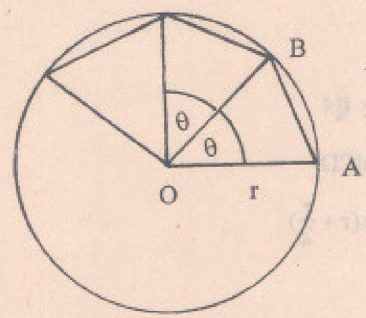
$|AB|^2 = |OB|^2 + |OA|^2$

$= r^2 + r^2$

$|AB| = \sqrt{2}\,r$

พื้นที่ ABCD $= |AB|^2 = 2r^2$

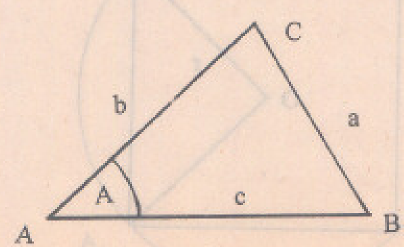
ความยาวเส้นรอบรูป □ABCD $= 4|AB| = 4\sqrt{2}\,r$



AB เป็นด้านหนึ่งด้านของรูป n เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม

มุม θ กางเท่ากับ $\frac{360}{n}$

จากกฎของโคไซน์ (สูตรนี้อยู่ในหนังสือคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย)



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

จากรูปสามเหลี่ยม OAB จะได้

$$|AB|^2 = |OB|^2 + |OA|^2 - 2|OB|\,|OA|\cos\theta$$

$$= r^2 + r^2 - 2\,r\,r\cos(\frac{360}{n})$$

$$= 2r^2 - 2r^2\cos(\frac{360}{n})$$

$$= 2r^2(1 - \cos(\frac{360}{n}))$$

$$|AB| = \sqrt{2r^2(1-\cos(\frac{360}{n}))}$$

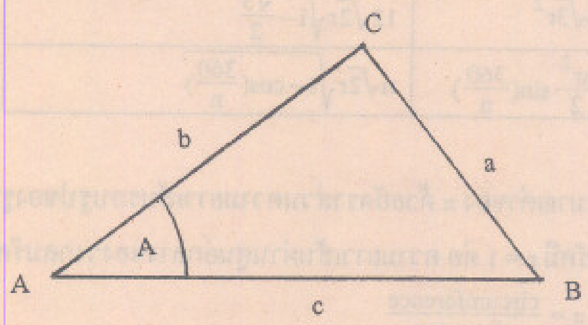
$$= \sqrt{2}\,r\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$$

ความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมด้านเท่าที่บรรจุอยู่ในวงกลม

$$= n|AB|$$

$$= n\sqrt{2}\,r\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$$

จากสูตรพื้นที่สามเหลี่ยม



พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}bc\sin A$

จะได้ว่าพื้นที่สามเหลี่ยม OAB เท่ากับ $\frac{1}{2}|OB|\,|OA|\sin\theta$

$$= \frac{1}{2}\,r\,r\sin(\frac{360}{n})$$

$$= \frac{r^2}{2}\sin(\frac{360}{n})$$

ดังนั้นพื้นที่รูป n เหลี่ยมด้านเท่าบรรจุอยู่ในวงกลม

$$= n(\text{พ.ท. } \Delta OAB)$$

$$= n\frac{r^2}{2}\sin(\frac{360}{n})$$

ตารางแสดงค่า พื้นที่ และ ความยาวเส้นรอบรูป n เหลี่ยมที่บรรจุในวงกลม

n	พื้นที่	ความยาวเส้นรอบรูป
3	$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$	$3\sqrt{3}r$
4	$2r^2$	$4\sqrt{2}r$
5	$\frac{3\sqrt{3}r^2}{2}$	$6r$
8	$2\sqrt{2}r^2$	$8\sqrt{2}r\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}$
12	$3\sqrt{3}r^2$	$12\sqrt{2}r\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$
n	$\frac{nr^2}{2}\sin(\frac{360}{n})$	$n\sqrt{2}r\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$

ต่อไปเราจะประมาณค่าของ π ด้วยอัตราส่วนความยาวเส้นรอบรูปของรูป n เหลี่ยมบรรจุในวงกลมรัศมี $r = 1$ ต่อ ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมรัศมี 1

$$\pi = \frac{\text{circumference}}{\text{diameter}}$$

$$= \frac{n\sqrt{2}(1)\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}}{2}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$$

ตารางแสดงค่าประมาณของ π

n	ค่าประมาณของ $\pi = \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$
3	$\frac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(120)} = 2.598076211$
4	$\frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(90)} = 2.828427125$
5	$\frac{5}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(72)} = 2.938926261$
6	$\frac{6}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(60)} = 3$
7	$\frac{7}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\frac{360}{7})} = 3.037186174$
8	$\frac{8}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(45)} = 3.061467459$

ในการคำนวณค่า $\frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})}$ เมื่อ n = 3,4,5,... เราจะใช้การคำนวณด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD ซึ่งได้ผลดังนี้

n = 3

$$\frac{n}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\cos\left(\frac{360\cdot deg}{n}\right)} = 2.5980762114$$

n = 4

$$\frac{n}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\cos\left(\frac{360\cdot deg}{n}\right)} = 2.8284271247$$

n = 8

$$\frac{n}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\cos\left(\frac{360\cdot deg}{n}\right)} = 3.0614674589$$

โดยการเพิ่มค่า n ให้มากขึ้น

$n = 100000 .. 100010$

n	$\frac{n}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{1 - \cos\left(\frac{360 \cdot deg}{n}\right)}$
100000	3.1415926818
100001	3.1415926451
100002	3.1415926958
100003	3.1415926572
100004	3.1415926177
100005	3.1415926655
100006	3.1415926241
100007	3.1415926701
100008	3.1415926268
100009	3.141592671
100010	3.1415926258

<u>หมายเหตุ</u> ค่า π ในโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

$\pi = 3.1415926536$

ความหมายของค่า π ในรูปลิมิตของลำดับ คือ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\cos(\frac{360}{n})} = \pi$

ปัญหาการจับคู่

ในเรื่องของการนับจำนวนวิธีและความน่าจะเป็นที่น่าสนใจ และเคยออกข้อสอบแข่งขันกับข้อสอบ ENTERANCE มาแล้ว ตัวอย่างเช่น

คำถามข้อที่ 1. $A = \{1,2,3,4,5\}$

$F = \{ f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง $A \}$

$G = \{ f \in F \mid f(x) \neq x$ ทุกค่า $x \}$

จำนวนสมาชิกของ G เท่ากับเท่าใด

คำถามข้อที่ 2. เกมส์ทายตัวเลข 8 หลักที่แตกต่างกันทั้งหมด เมื่อตัวเลขแต่ละหลักเป็นสมาชิกของ {1,2,3,4,5,6,7,8} ความน่าจะเป็นที่จะทายตัวเลขถูกต้องหลักเพียง 4 หลักมีค่าเท่ากับเท่าใด

คำถามข้อที่ 3. ข้อสอบชนิดจับคู่ระหว่างคำถามจำนวน 10 ข้อ และคำตอบจำนวน 10 ข้อ การทำข้อสอบของนักเรียนที่ไม่มีความรู้เลยแต่ทำโดยวิธีการเดา ความน่าจะเป็นที่เขาจะจับคู่คำถามกับคำตอบได้ถูกต้อง 5 ข้อเท่านั้นเท่ากับเท่าไร

ในบทความนี้เป็นการนำเสนอเรื่องราวที่เกี่ยวข้องกับปัญหาข้างต้น นั่นคือการหาจำนวนวิธี และความน่าจะเป็นของ **ปัญหาการจับคู่** ตัวอย่างของปัญหาการจับคู่อื่นๆ เช่น มีแผ่นป้ายเขียนหมายเลข 1,2,3,4,5,...,n มีตำแหน่งที่จะต้องนำแผ่นป้ายไปวางเรียงกันทั้งหมด n ตำแหน่ง เมื่อนำแผ่นป้ายนั้นคว่ำหน้าและเรียงลำดับกันอย่างสลับไปสลับมา เมื่อเรียงเสร็จแล้วจึงหงายแผ่นป้ายขึ้น จะมีแผ่นป้ายหมายเลขใดบ้างที่วางตรงกับตำแหน่งของหมายเลขนั้น

ตัวอย่าง 1. แผ่นป้าย 1 อัน เขียนหมายเลข 1 ไว้ เมื่อนำไปเรียงลำดับ จะมีวิธีเรียงได้เพียง 1 วิธีเท่านั้น และหมายเลขในแผ่นป้ายตรงกับตำแหน่งของแผ่นป้ายด้วย

ตัวอย่าง 2. แผ่นป้าย 2 อัน เขียนหมายเลข 2 ไว้ เมื่อนำไปเรียงลำดับ จะมีวิธีเรียงได้เพียง 2 วิธีคือ

		ตำแหน่ง 1	ตำแหน่ง 2
ผลการทดลอง	1.	①	②
	2.	②	①

ตัวอย่าง 3. แผ่นป้าย 3 อัน เขียนหมายเลข 3 ไว้ เมื่อนำไปเรียงลำดับ จะมีวิธีเรียงได้เพียง 6 วิธีคือ

		ตำแหน่ง		
		1	2	3
ผลการทดลอง	1.	①	②	③
	2.	①	③	②
	3.	②	①	③
	4.	②	③	①
	5.	③	①	②
	6.	③	②	①

ข้อสังเกตจะเห็นได้ว่า

คำถามที่ 1. การส่งค่าของฟังก์ชัน f ก็คือการจับคู่ระหว่างตัวเลขใน {1,2,3,4,5} กับเลขที่ตำแหน่งใน {1,2,3,4,5}

คำถามที่ 2. การทายตัวเลข 8 หลักเหมือนกับการจับคู่ระหว่างตัวเลขใน {1,2,3,4,5,6,7,8} กับเลขที่ตำแหน่งใน {1,2,3,4,5,6,7,8}

คำถามที่ 3. การจับคู่คำถามกับคำตอบเหมือนกับการจับคู่ระหว่างตัวเลขใน {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} กับเลขที่ตำแหน่งใน {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}

เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการทำความเข้าใจเราสามารถมองปัญหาทั้งหมดเป็นการจับคู่ของแผ่นป้ายกับตำแหน่ง

ให้ $L_n = \{1,2,3,...,n\}$ เป็นเซตของหมายเลขในแผ่นป้าย

ผลการทดลองของการเรียงลำดับแผ่นป้าย n แผ่นป้ายจะแทนด้วยลำดับ n ตัว $(a_1,a_2,a_3,...,a_n)$ เมื่อ $a_1,a_2,a_3,...,a_n \in L_n$ และ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ มีค่าต่างกัน

ตัวอย่างเช่น (1,2) หมายถึงแผ่นป้ายที่ตำแหน่ง 1,2 มีหมายเลข 1,2 ตามลำดับ

(2,1) หมายถึงแผ่นป้ายที่ตำแหน่ง 1,2 มีหมายเลข 2,1 ตามลำดับ

ให้ $S_n = \{(a_1,a_2,a_3,...,a_n) \mid a_1,a_2,a_3,...,a_n \in L_n$ และ $a_1,a_2,a_3,...,a_n$ มีค่าต่างกัน $\}$

จากตัวอย่าง 3 แผ่นป้าย 3 อัน เขียนหมายเลข 3 ไว้ เมื่อนำไปเรียงลำดับ จะมีวิธีเรียงได้เพียง 6 วิธีคือ

		ตำแหน่ง			
		1	2	3	
ผลการทดลอง	1.	①	②	③	แทนด้วย (1,2,3)
	2.	①	③	②	แทนด้วย (1,3,2)
	3.	②	①	③	แทนด้วย (2,1,3)
	4.	②	③	①	แทนด้วย (2,3,1)
	5.	③	①	②	แทนด้วย (3,1,2)
	6.	③	②	①	แทนด้วย (3,2,1)

$L_3 = \{1,2,3\}$

$S_3 = \{(a_1,a_2,a_3) \mid a_1,a_2,a_3 \in L_3$ และ a_1,a_2,a_3 มีค่าต่างกัน $\}$

$= \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

ในทำนองเดียวกัน $S_1 = \{(1)\}$

$S_2 = \{(1,2),(2,1)\}$

การนับจำนวนสมาชิก ของ S_n

ตำแหน่งที่ 1 เลือกได้ n วิธี

ตำแหน่งที่ 2 ลือกได้ $n-1$ วิธี

ตำแหน่งที่ 3 เลือกได้ $n-2$ วิธี

$\vdots$

ตำแหน่งที่ $n-1$ เลือกได้ 2 วิธี

ตำแหน่งที่ n เลือกได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด $= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1 = n!$

สรุป $|S_n| = n!$

เพราะฉะนั้น

n	1	2	3	4	5	6	7
S_n	1	2	6	24	120	720	5040

ต่อไปเราจะพิจารณาปัญหาการนับจำนวนวิธีและความน่าจะเป็นที่มีเงื่อนไขมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 4. การทดลองด้วยแผ่นป้าย 5 แผ่น จงหาจำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลข 5 อยู่ที่ตำแหน่งที่ 5

วิธีทำ จำนวนวิธีที่ต้องการคือแผ่นป้ายที่เหลือคือหมายเลข 1,2,3,4 วางสลับตำแหน่งกันได้ 4 ตำแหน่งซึ่งทำได้ 4! = 24 วิธี

ตัวอย่าง 5. การทดลองด้วยแผ่นป้าย 6 แผ่น จงหาจำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลข 1 และหมายเลข 5 จะต้องอยู่ตรงตำแหน่งของมันคือตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 5

วิธีทำ จำนวนวิธีที่ต้องการคือแผ่นป้ายที่เหลือคือหมายเลข 2,3,4 และ 6 วางสลับตำแหน่งกันได้ 4 ตำแหน่งซึ่งทำได้ 4! = 24 วิธี

ตัวอย่าง 6. การทดลองด้วยแผ่นป้าย 5 แผ่น จงหาจำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลข 3 ไม่อยู่ตรงที่ตำแหน่งที่ 3

วิธีทำ จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดลำดับแผ่นป้าย 5 แผ่น = 5! =120 วิธี

จำนวนวิธีแผ่นป้ายหมายเลข 3 จะอยู่ตรงตำแหน่งที่ 3 เท่ากับ 4! = 24 วิธี

จำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลข 3 ไม่อยู่ตรงที่ตำแหน่งที่ 3 เท่ากับ 120 – 24 = 96 วิธี

ตัวอย่าง 7. การทดลองด้วยแผ่นป้าย 8 แผ่นที่ประกอบด้วยเลข 1,2,3,4,5,6,7,8 จงหาจำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลขคู่อยู่ตำแหน่งเลขคู่

วิธีทำ หมายเลขคู่ในที่นี้คือ 2,4,6,8 ขั้นตอนการนับจำนวนวิธีดังนี้

(1) แผ่นป้ายเลขคู่อยู่ที่ตำแหน่งเลขคู่ทำได้ 4! = 24 วิธี

(2) แผ่นป้ายเลขคี่ที่เหลือจัดลำดับได้ 4! = 24 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่แผ่นป้ายหมายเลขคู่อยู่ตำแหน่งเลขคู่ = (24)(24) = 576

ตัวอย่าง 8. การทดลองด้วยแผ่นป้าย 5 แผ่นที่ประกอบด้วยเลข 1,2,3,4,5 จงหาความน่าจะเป็นที่แผ่นป้ายหมายเลข 3 และ 4 อยู่ตรงตำแหน่งที่ 3 และ 4

วิธีทำ $L_5 = \{1,2,3,4,5\}$

$S_5 = \{(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5) \mid a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 \in L_5$ และ a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 มีค่าต่างกัน$\}$

$n(S_5) = 5! = 120$

$E = \{(a_1,a_2,3,4,a_5) \in S_5 \mid a_1,a_2,a_5 \in \{1,2,5\}$ และ a_1,a_2,a_5 มีค่าต่างกัน$\}$

$n(E) = 3! = 6$

สรุป P(แผ่นป้ายหมายเลข 3 และ 4 อยู่ตรงตำแหน่งที่ 3 และ 4)

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S_5)} = \frac{24}{120} = \frac{1}{20}$$

สำหรับปัญหาที่มีความยุ่งยากในการนับจำนวนวิธีมากยิ่งขึ้นเช่น

1. การทดลองกับแผ่นป้าย 1 แผ่น จำนวนวิธีที่ไม่มีหมายเลขบนแผ่นป้ายใดอยู่ตรงกับตำแหน่งของมันแม้แต่แผ่นป้ายเดียว คำตอบ คือ 0 วิธี

2. การทดลองกับแผ่นป้าย 2 แผ่น จำนวนวิธีที่ไม่มีหมายเลขบนแผ่นป้ายใดอยู่ตรงกับตำแหน่งของมันแม้แต่แผ่นป้ายเดียว จากตัวอย่าง 2. คำตอบ คือ 1 วิธี

3. การทดลองกับแผ่นป้าย 3 แผ่น จำนวนวิธีที่ไม่มีหมายเลขบนแผ่นป้ายใดอยู่ตรงกับตำแหน่งของมันแม้แต่แผ่นป้ายเดียว จากตัวอย่าง 3. คำตอบ คือ 2 วิธี

การทดลองกับแผ่นป้าย n = 4,5,6, แผ่น จำนวนวิธีที่ไม่มีหมายเลขบนแผ่นป้ายใดอยู่ตรงกับตำแหน่งของมันแม้แต่แผ่นป้ายเดียว

4. การทดลองกับแผ่นป้าย 3 แผ่น ความน่าจะเป็นมีหมายเลข 2 แผ่นเดียวเท่านั้นที่อยู่ตรงตำแหน่งที่ 2 จากตัอย่าง 3. คำตอบคือ 0

5. การทดลองกับแผ่นป้าย 9 แผ่น ความน่าจะเป็นมีหมายเลข 5 แผ่นเดียวเท่านั้นที่อยู่ตรงตำแหน่งที่ 5

6. การทดลองกับแผ่นป้าย 5 แผ่น ความน่าจะเป็นมีแผ่นป้าย 2 แผ่นเท่านั้นที่อยู่ตรงตำแหน่งของมัน

ปัญหากรณีทั่วไปคือการทดลองกับแผ่นป้าย n = 1,2,3,... แผ่น ความน่าจะเป็นมีแผ่นป้าย k = 0,1,2,.. ,n แผ่นเท่านั้นที่อยู่ตรงตำแหน่งของมัน

แนวทางในการหาจำนวนวิธีและความน่าจะเป็นพิจารณาดังต่อไปนี้

n = จำนวนแผ่นป้าย

$L_n = \{1,2,3,...,n\}$

$S_n = \{(a_1,a_2,a_3,...,a_n) \mid a_1,a_2,a_3,...,a_n \in L_n$ และ $a_1,a_2,...,a_n$ มีค่าต่างกัน $\}$

ให้ x เป็นจำนวนของแผ่นป้ายที่หมายเลขบนแผ่นป้ายมีค่าตรงกับตำแหน่งที่แผ่นป้ายนั้นวางอยู่

$x = 0,1,2,3,4,5,...,n$

เพราะฉะนั้น x มีสภาพเป็นฟังก์ชันจาก S_n ไปยัง $\{0,1,2,...,n\}$

ตัวอย่างเช่น $S_3 = \{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

x ของแต่ละเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซมีค่าดังนี้

$x((1,2,3)) = 3$

$x((1,3,2)) = 1$

$x((2,1,3)) = 1$

$x((2,3,1)) = 0$

$x((3,1,2)) =$

$x((3,2,1)) = 1$

หรือพิจารณาในรูปแบบตารางความน่าจะเป็น

ค่าของ x	จำนวนวิธีที่เกิด	ความน่าจะเป็น
0	2	$P(x=0) = \frac{2}{6}$
1	3	$P(x=1) = \frac{3}{6}$
2	0	$P(x=2) = 0$
3	1	$P(x=3) = \frac{1}{6}$

สำหรับ $x = 0,1,2,3,...,n$

ให้ $C(x = k / n)$ = จำนวนวิธีที่ $(x = k)$ เมื่อทำการทดลองกับแผ่นป้าย n แผ่นป้าย

จากตัวอย่างต่างๆที่ผ่านมาจะได้ว่า

$n = 1$; $C(x = 1/n = 1) = 1$

$C(x = 0/n = 1) = 0$

$n = 2$; $C(x = 2/n = 2) = 1$

$C(x = 1/n = 2) = 0$

$C(x = 0/n = 2) = 1$

$n = 3$; $C(x = 3/n = 3) = 1$

$C(x = 2/n = 3) = 0$

$C(x = 1/n = 3) = 3$

$C(x = 0/n = 3) = 2$

$n = 4$; $C(x = 4/n = 4) = 1$

$C(x = 3/n = 4) = 0$

$C(x = 2/n = 4)$ = จำนวนวิธีที่ถูกตำแหน่ง 2 จาก 4 ตัว และ อีก 2 ตัวที่เหลือผิดตำแหน่งทุกตัว

$$= \binom{4}{2} C(x = 0/ n = 2) = (6)(1) = 6$$

$C(x = 1/n = 4)$ = จำนวนวิธีที่ถูกตำแหน่ง 1 จาก 4 ตัว และ อีก 3 ตัวที่เหลือผิดตำแหน่งทุกตัว

$$= \binom{4}{1} C(x = 0/ n = 3) = (4)(2) = 8$$

$$C(x = 0/n = 4) = |S_4| - \sum_{k=1}^{4} C(x = k / n = 4) = 24 - (8 + 6 + 0 + 1) = 9$$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาค่า $C(x = k / n)$ ได้โดยใช้สูตร

1. $C(x = n / n) = 1$
2. $C(x = n - 1 / n) = 0$
3. $C(x = k / n) = \binom{n}{k} C(x = 0 / n - k) \qquad k = 0,1,2,\ldots,n$
4. $C(x = 0 / n) = n! - \sum_{k=1}^{n} C(x = k / n)$

ตัวอย่างเช่น n = 5 จะได้

1. $C(x = 5 / n = 5) = 1$
2. $C(x = 4 / n = 5) = 0$
3. $C(x = 3 / n = 5) = \binom{5}{3} C(x = 0 / n = 2) = (10)(1) = 10$
4. $C(x = 2 / n = 5) = \binom{5}{2} C(x = 0 / n = 3) = (20)(2) = 40$
5. $C(x = 1 / n = 5) = \binom{5}{1} C(x = 0 / n = 4) = (5)(9) = 45$
6. $C(x = 0 / n = 5) = 5! - \sum_{k=1}^{5} C(x = k / n = 5)$

$$= 120 - (45 + 20 + 10 + 0 + 1)$$

$$= 44$$

ในทำเดียวกันเมื่อ n = 1,2,3,...,8 เราสรุปตารางแสดงค่า $C(x / n)$ ได้ดังนี้

x / n	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	9	44	265	1854	14833
1	1	0	3	8	45	264	1855	14832
2		1	0	6	20	135	924	7420
3			1	0	10	40	315	2464
4				1	0	15	70	630
5					1	0	21	112
6						1	0	28
7							1	0
8								1
$\|S_n\|$	1	2	6	24	120	720	5040	40320

ตารางที่ 1.

ในเรื่องของการประยุกต์ปัญหาการจับคู่ ตำแหน่งและหมายเลขอาจเป็น

1. เลขที่ของแผ่นป้าย กับ ตำแหน่งของแผ่นป้าย
2. สามี จับคู่กับ ภรรยา
3. เกมทายตัวเลข ค่าตัวเลข กับ หลักของตัวเลข
4. การจับคู่ระหว่างคนกับเก้าอี้ประจำตำแหน่งที่ถูกต้อง
5. การจับคู่ของสิ่งของให้ตรงกับน้ำหนักของมัน
6. การติดฉลากชื่อของสิ่งของให้ตรงกับกัน
7. การติดป้ายชื่อให้กับผู้เข้าประชุม

ตัวอย่าง 9. การทดลองนำแผ่นป้าย 6 แผ่นเขียนหมายเลข 1,2,3,4,5,6 ไว้แต่ละแผ่นตามลำดับ เมื่อนำแผ่นป้ายนั้นมาจัดลำดับอย่างสุ่มในแนวเส้นตรงดังภาพ

	□	□	□	□	□	□
ตำแหน่ง	1	2	3	4	5	6

จงหาจำนวนวิธีที่มีแผ่นป้าย 4 แผ่นวางตรงตำแหน่ง

วิธีทำ ในปัญหานี้ $n = 6$

จำนวนวิธีที่มีแผ่นป้าย 4 แผ่นวางตรงตำแหน่ง = $C(x = 4 / n = 6) = 15$

ตัวอย่าง 10. การทายตัวเลข 6 หลักที่ไม่ซ้ำจากเลข 1,2,3,4,5,6 สมมติตัวเลขคือ 246135

	□	□	□	□	□	□
ตัวเลขที่ตั้งไว้	2	4	6	1	3	5

จงหาความน่าจะเป็นที่จะทายถูกต้อง 4 หลัก

วิธีทำ ในปัญหานี้ $n = 6$

จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดลำดับ = $6! = 720$

จำนวนวิธีที่มีแผ่นป้าย 4 แผ่นวางตรงตำแหน่ง = $C(x = 4 / n = 6) = 15$

ความน่าจะเป็นที่จะทายถูกต้อง 4 หลัก = $\frac{15}{720}$

ตัวอย่าง 11. คู่สามี–ภรรยา จำนวน 6 คู่ เมื่อเข้าไปในงานเต้นรำได้ตกลงจับฉลากเพื่อจับคู่เต้นรำกัน จงหา

1. จำนวนวิธีที่มีคู่สามี–ภรรยา จำนวน 1 คู่เท่านั้นที่ได้เต้นรำคู่กัน
2. ไม่มีคู่สามี–ภรรยา ใดเลยที่ได้จับคู่เต้นรำคู่กัน

วิธีทำ ในปัญหานี้เราจะให้ชายคนที่ 1,2,3,4,5,6 เป็นตำแหน่งของการจัดลำดับหญิง 6 คนเทียบได้กับหมายเลข 1,2,3,4,5,6

เพราะฉะนั้นปัญหาจึงกลายเป็นการจับคู่ $n = 6$

1. จำนวนวิธีที่มีคู่สามี–ภรรยา จำนวน 1 คู่เท่านั้นที่ได้เต้นรำคู่กัน

$= C(x = 1 / n = 6)$

$= 264$ (จากตารางที่ 1.)

2. ไม่มีคู่สามี–ภรรยา ใดเลยที่ได้จับคู่เต้นรำคู่กัน

$= C(x = 0 / n = 6)$

$= 265$ (จากตารางที่ 1.)

ตัวอย่าง 12. การเล่นเกมส์ทายตัวเลข 4 หลักที่ไม่ซ้ำจาก 2,4,6,8 จงหาความน่าจะเป็นที่ทายตัวเลขได้ถูกต้องมากกว่า 1 หลัก

วิธีทำ ปัญหานี้คือปัญหาการจับคู่ $n = 4$ โดยที่ตัวเลขที่ตั้งไว้คือตำแหน่ง ตัวเลขในการทายเหมือนกับการวางแผ่นป้าย

จำนวนวิธีทายตัวเลขทั้งหมด $= 4! = 24$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่ทายตัวเลขได้ถูกต้องมากกว่า 1 หลัก

$= C(x = 2 / n = 4) + C(x = 3 / n = 4) + C(x = 4 / n = 4)$

$= 6 + 0 + 1$ (จากตารางที่ 1.)

$= 7$

ความน่าจะเป็นที่ทายตัวเลขได้ถูกต้องมากกว่า 1 หลัก $= \frac{7}{24}$

ตัวอย่าง 13. ชาย 8 คนได้รับบัตรเชิญให้ไปร่วมรับประทานอาหาร โดยที่ผู้เชิญได้เจาะจงไว้แล้วว่าแต่ละคนต้องนั่งที่เก้าอี้ตัวใด แต่เมื่อชายทั้ง 8 คนเข้าไปในงานก็จัดแจงนั่งกันเองโดยไม่ได้ถามผู้เชิญว่าตนต้องนั่งที่ใด

จงหาความน่าจะเป็นที่มีชายมากกว่า 3 คนนั่งเก้าอี้ได้ถูกต้องตามที่ผู้เชิญจัดไว้

วิธีทำ ปัญหานี้คือปัญหาการจับคู่ $n = 8$ โดยที่เก้าอี้ที่จัดไว้คือตำแหน่ง 1,2,3,4,5,6,7,8 ชายที่เดินเข้าไปนั่งคือตัวเลขแผ่นป้าย

จำนวนวิธีจัดลำดับทั้งหมด = 8! = 40320

จำนวนวิธีที่มีชายมากกว่า 3 คนนั่งเก้าอี้ได้ถูกต้องตามที่ผู้เชิญจัดไว้

$$= \sum_{k=4}^{8} C(x = k / n = 8)$$

$$= 630 + 112 + 28 + 0 + 1 \qquad \text{(จากตารางที่ 1.)}$$

$$= 771$$

ความน่าจะเป็นที่มีชายมากกว่า 3 คนนั่งเก้าอี้ได้ถูกต้องตามที่ผู้เชิญจัดไว้

$$= \frac{771}{40320}$$

ตัวอย่าง 14. ในการเล่นเกมส์ชิงรางวัลทองคำหนัก 1 กิโลกรัม มีสิ่งของต้องทายน้ำหนัก 7 ชิ้น

สิ่งของ	น้ำหนักจริง(ก.ก.)
โคมไฟ	2
เก้าอี้	3
กระเป๋า	1
โทรทัศน์	15
วิทยุ	4
แจกันแก้ว	1.5
รูปปั้น	9

กติกาในการรับรางวัลคือ ให้นำแผ่นป้ายที่เขียนหมายเลขน้ำหนักของสิ่งของ 7 แผ่นป้าย 2,3,1,15,4,1.5 และ 9 ไปวางให้ตรงกับน้ำหนักจริงของสิ่งของ ถ้าวางแผ่นป้ายได้ตรงกับน้ำหนักจริงของสิ่งของจำนวน 4 ชิ้นจากทั้งหมด 7 ชิ้นจะได้รับรางวัลเป็นทองคำหนัก 1 กิโลกรัม

จงหาความน่าจะเป็นที่มีผู้เล่นเกมส์คนหนึ่งวางแผ่นป้ายทายน้ำหนักด้วยการเดาสุ่มจะได้รับรางวัลเป็นทองคำหนัก 1 กิโลกรัม

วิธีทำ ปัญหานี้คือปัญหาการจับคู่ $n = 7$ โดยที่สิ่งของที่จัดไว้คือตำแหน่ง แผ่นป้ายน้ำหนักคือตัวเลขที่ใช้ในการทาย

จำนวนวิธีทายทั้งหมด = 7! = 504

จำนวนวิธีทายถูก 4 ชิ้นจากทั้งหมด 7 ชิ้น = $C(x = 4 / n = 7) = 70$ (จากตารางที่ 1.)

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้รับรางวัลเป็นทองคำหนัก 1 กิโลกรัม = $\frac{70}{504}$

การคำนวนที่ผ่านมาทั้งหมดเราหาค่าของ $C(x = k / n)$ โดยดูจากตาราง และ การคำนวนค่า $C(x = k / n)$ ก็เป็นการหาค่าแบบย้อนกลับด้วยการลดค่า n นั่นคือ การหาค่า $C(x = k / n)$ นั้นเราต้องรู้ค่าของ $C(x = t / m)$ เมื่อ $m = 1,2,3...,n-1$ และ $t = 0,1,2,...,m$

เพื่อความสะดวกในการคำนวนเราจึงคิดแนวทางในการหาสูตรของ $C(x = k / n)$ โดยตรงซึ่งสามารถทำได้ดังนี้

n = จำนวนตำแหน่งที่ต้องวางหมายเลข 1,2,3,...,n

x = จำนวนที่ตำแหน่งและหมายเลขตรงกัน

= 0,1,2,...,n

$P(x = k / n)$ = ความน่าจะเป็นที่ตำแหน่งและหมายเลขตรงกัน k ตัว

เพราะฉะนั้น

1. $P(x = n / n) = \frac{1}{n!}$
2. $P(x = n - 1 / n) = 0$
3. $P(x = k / n) = \frac{C(x = k / n)}{n!}$

ในการหาสูตรของ $C(x = k / n)$ ก่อนอื่นเราต้องพิจารณาค่าของ $P(x = 0 / n)$ ดังนี้

ให้ A_i = เหตุการณ์ที่แผ่นป้ายหมายเลขที่ i อยู่ตรงตำแหน่งที่ i ; $i = 1,2,3,\ldots,n$

เพราะฉะนั้น $|A_i| = (n-1)!$ $\quad i = 1,2,3\ldots,n$

$$P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2}| = (n-2)! \qquad i_1 \neq i_2$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n}$$

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| = (n-3)! \qquad i_1 \neq i_2 \neq i_3$$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \frac{(n-3)!}{n!} = \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

ในทำนองเดียวกัน $i_1 \neq i_2 \neq i_3 \neq \ldots \neq i_r$

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap \ldots \cap A_{i_r}) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}$$

โดยการใช้สูตรทำนองเดียวกันกับ

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ซึ่งมีกรณีทั่วไปเป็น

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i_1<i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

$$\ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$$

หมายเหตุ สูตรนี้มีชื่อว่า Inclusion and Exclusion formular

เพราะฉะนั้น $$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2})$$

$$+ \sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

$$\sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \sum_{i_1<i_2} \frac{1}{n(n-1)} = \binom{n}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)}\right) = \frac{1}{2!}$$

$$\sum_{i_1<i_2<i_3} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}) = \sum_{i_1<i_2<i_3} \frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{3!}$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap .. \cap A_n) = \frac{1}{n!}$$

เพราะฉะนั้น $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \quad + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$

เพราะว่า $P(x = 0 / n) = P((A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)')$

$$= 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n)$$

$$= 1 - (1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \quad + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!})$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \quad + (-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

$$= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \quad + (-1)^{n}\frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

สรุปเราได้สูตรที่สำคัญคือ $P(x = 0 / n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$

เพราะว่า $C(x = k / n) = \binom{n}{k} C(x = 0 / n - k)$

$$P(x = 0 / n - k) = \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{C(x = 0 / n - k)}{(n-k)!}$$

$$C(x = 0 / n - k) = (n-k)!\, P(x = 0 / n - k)$$

และ $P(x=k/n) = \dfrac{C(x=k/n)}{n!} = \dfrac{\binom{n}{k}C(x=0/n-k)}{n!}$

$$= \frac{n!C(x=0/n-k)}{(n-k)!k!n!} = \frac{C(x=0/n-k)}{(n-k)!k}$$

$$= \frac{(n-k)!P(x=0/n-k)}{(n-k)!k!} = \frac{P(x=0/n-k)}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

เพราะฉะนั้น $C(x=k/n) = \dfrac{n!}{k!}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

ตัวอย่างเช่น $C(x=2/3) = \dfrac{3!}{2!}\displaystyle\sum_{i=0}^{3-2}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{3!}{2!}(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}) = 0$

$$C(x=3/5) = \frac{5!}{3!}\sum_{i=0}^{5-3}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{5!}{3!}(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}) = 20(1-1+\frac{1}{2}) = 10$$

$$C(x=3/7) = \frac{7!}{3!}\sum_{i=0}^{7-3}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{7!}{3!}(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!})$$

$$= 840(1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24})$$

$$= 315$$

จากสูตรของอนุกรม $e^x = 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dfrac{x^5}{5!}+\ldots = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}$

จะได้ว่า $e^{-1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = 1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots..$

เพราะฉะนั้นเมื่อ n มีค่ามากๆ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} P(x=0/n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e} = 0.3678794$$

ตัวอย่างจากตารางที่ 1. จะได้ว่า

n	$P(x=0/n)$
1	0
2	0.5
3	0.33333
4	0.375
5	0.36667
6	0.36806
7	0.36786
8	0.36788

สรุปปัญหาทั้งหมดโดยรวมของปัญหาการจับคู่ n หมายเลข กับตำแหน่ง n ตำแหน่ง เมื่อให้ $x =$ จำนวนหมายเลขและตำแหน่งที่ตรงกัน $= 0,1,2,3,\ldots,n$

$C(x=k/n) =$ จำนวนวิธีที่หมายเลขและตำแหน่งตรงกัน k ตัว

$$= \binom{n}{k} C(x=0/n-k)$$

$$= \frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$P(x=k/n) =$ ความน่าจะเป็นที่หมายเลขและตำแหน่งตรงกัน k ตัว

$$= \frac{C(x=k/n)}{n!}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

และเมื่อ $n > 4$ จะได้ $P(x=0/n) = 0.37$

ตัวอย่างข้อสอบที่มีเนื้อหาตรงกับบทความนี้

ตัวอย่าง 15. นาย ก ข ค ง และ จ นำของขวัญมาจับฉลากร่วมกัน ความน่าจะเป็นที่มีคน 3 คนใน 5 คนจับฉลากได้ของขวัญที่ตัวเองนำมามีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{3}$

ตอบ 1.

แนวคิด $n = 5$ และ $k = 3$

P(คน 3 คนจาก 5 คนได้ของตัวเอง) = $P(x = 3 / n = 5) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$

$= \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{5-3}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{2}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{6}(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}) = \frac{1}{6}(1 - 1 + \frac{1}{2})$

$= \frac{1}{12}$

หมายเหตุ แนวคิดพื้นฐานในการนับจำนวนวิธี

มีสิ่งของ 5 สิ่งจัดลำดับได้ 5! = 120 วิธี

การนับจำนวนวิธีที่มีคน 3 คนได้ของตัวเอง

ขั้นที่ 1. เลือกคนได้ของตัวเอง = $\binom{5}{3} = 10$ วิธี

ขั้นที่ 2. คน 3 คนที่เลือกได้ของตัวเองทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3. คน 2 คนที่เหลือไม่ได้ของตัวเองทำได้ 1 วิธี

สรุปจำนวนวิธีที่มีคน 3 คนเท่านั้นได้ของตัวเอง = (10)(1)(1) = 10 วิธี

ดังนั้นความน่าจะเป็นที่มีคน 3 คนเท่านั้นได้ของตัวเอง = $\frac{10}{120} = \frac{1}{12}$

ตัวอย่าง 16. การเล่นเกมส์โยนลูกบอล 9 ลูกที่เขียนหมายเลข 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ที่ลูกละหนึ่งหมายเลข มีหลุมอยู่ 9 หลุมแต่ละหลุมเขียนหมายเลข 1,2,3,4,5,6,7,8,9 กำกับไว้ เมื่อโยนลูกบอลทั้งหมดพร้อมกันและลูกบอลแต่ละลูกลงหลุม ความน่าจะเป็นที่มีลูกบอล 4 ลูกที่หมายเลขตรงกับหมายเลขหลุม

1. $\frac{11}{24}$ 2. $\frac{11}{120}$ 3. $\frac{11}{720}$ 4. $\frac{11}{1440}$

ตอบ 3.

แนวคิด $n = 9$ และ $k = 4$

P(ลูกบอล 4 ลูกจาก 9 ลูกมีหมานเลขตรงกับหลุม) = $P(x = 4 / n = 9)$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{4!}\sum_{i=0}^{9-4}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{24}\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= \frac{1}{24}(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!})$$

$$= \frac{1}{24}(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120})$$

$$= \frac{1}{24}(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120})$$

$$= \frac{1}{24}(\frac{60-20+5-1}{120})$$

$$= \frac{1}{24}(\frac{44}{120})$$

$$= \frac{11}{720}$$

ตัวอย่าง 17 กำหนด $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$F = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง A $\}$

$G = \{f \in F \mid f(x) = x$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นเลขคู่ $\}$

จำนวนสมาชิกของ G เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด เมื่อ $f \in G$ จะได้ว่า $f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(6) = 6$

นอกนั้น $f(x) \neq x$ ทุกค่า $x = 1,3,5$

นั่นคือ 1,3,5 ไม่มีการจับคู่ที่ตรงกัน มีจำนวนวิธี = $C(x = 0 / n = 3) = 2$

สรุป $n(G) = 2$

หมายเหตุ สมาชิกของ G ทั้งสองตัวคือ

$f = \{(1,3),(2,2),(3,5),(4,4),(5,1),(6,6)\}$

$f = \{(1,5),(2,2),(3,1),(4,4),(5,3),(6,6)\}$

แบบฝึกหัดเพิ่มเติม

1. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

$F = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง A $\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

$G = \{f \in F \mid f(x) = x$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นเลขคี่ $\}$

$H = \{f \in F \mid f(x) = x$ ก็ต่อเมื่อ x เป็นจำนวนเฉพาะ $\}$

$I = \{f \in F \mid f(x) \neq x\}$

$J = \{f \in F \mid f(x) \neq x$ ก็ต่อเมื่อ x หาร 6 ลงตัว$\}$

ตัวอย่าง 18 กำหนด $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$F = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึงจาก A ไปยัง A $\}$

$G = \{f \in F \mid f(p) = p$ ก็ต่อเมื่อ p เป็นจำนวนเฉพาะ $\}$

จำนวนสมาชิกของ G เท่ากับเท่าใด

1. 262 2. 263 3. 264 4. 265

ตอบ 4.

แนวคิด เมื่อ f∈G จะได้ว่า f(2) = 2 , f(3) = 3 , f(5) = 5 , f(7) = 7

นอกนั้น f(x) ≠ x ทุกค่า x = 1,4,6,8,9 ปัญหาขณะนี้จึงกลายเป็นการจับคู่ของ 5 สิ่ง

จำนวนวิธีที่ f(x) ≠ x ทุกค่า x = 1,4,6,8,9

$$= C(x = 0 / n = 5)$$

$$= \frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= \frac{9!}{0!}\sum_{i=0}^{9}\frac{(-1)^i}{i!}$$

= 265 (ดูจากตารางที่ 1)

ตัวอย่าง 19 การเล่นเกมส์ทายตัวเลข 5 หลักที่ไม่มีการซ้ำโดยที่ตัวเลขแต่ละหลักเลือกมาจาก {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} จงหาความน่าจะเป็นที่จะทายตัวเลขถูกต้องทั้ง 5 ตัวแต่ถูกหลักเพียง 3 หลักเท่านั้น

1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{1}{252}$ 3. $\frac{1}{1512}$ 4. $\frac{1}{3024}$

ตอบ 4.

แนวคิด จำนวนวิธีในการทายทั้งหมดมีวิธีนับดังนี้

ขั้นที่ 1. เลือกเลข 5 ตัวจาก 10 ตัวทำได้ $\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ วิธี

ขั้นที่ 2. เลข 5 ตัวที่เลือกได้สลับที่กันได้ 5! = 120 วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด = (252)(120) = 30240

การนับจำนวนวิธีที่จะทายตัวเลขถูกต้องทั้ง 5 ตัวแต่ถูกหลักเพียง 3 หลักเท่านั้น

ขั้นที่ 1. เลือกตัวเลขได้ถูกต้องทั้ง 5 ตัว = 1 วิธี

ขั้นที่ 2. จำนวนวิธีที่เลข 5 ตัวจะถูกหลัก 3 หลัก คือปัญหาการจับคู่

n = 5 และ x = 3

$$C(x=3/n=5)=\frac{n!}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{5!}{3!}\sum_{i=0}^{2}\frac{(-1)^i}{i!}=20\left(\frac{1}{0!}-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)=10$$

สรุปจำนวนวิธีทายตัวเลขถูกต้องทั้ง 5 ตัวแต่ถูกหลักเพียง 3 หลัก = 10

P(ทายตัวเลขถูกต้อง 5 ตัวแต่ถูกหลักเพียง 3 หลัก) = $\frac{10}{30240}=\frac{1}{3024}$

ตัวอย่าง 20 รหัสสำหรับบัตรถอนเงินจากตู้ ATM เป็นตัวเลข 4 หลักที่ไม่ซ้ำกันจากตัวเลข 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 เมื่อสมรักษ์ มีความจำเป็นต้องถอนเงินจากตู้ ATM แต่เขาลืมรหัส ความน่าจะเป็นที่เขาจะถอนเงินจากตู้ ATM ได้เท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{1}{5040}$

แนวคิด จำนวนวิธีในการกดรหัสทั้งหมด = $\binom{10}{4}(4!)=\frac{10!}{4!6!}(4!)=5040$

จำนวนวิธีที่สมรักษ์จะกดรหัสได้ถูกต้องมี 1 วิธีเท่านั้น

สรุป P(สมรักษ์จะถอนเงินจากตู้ ATM ได้) = $\frac{1}{5040}$

ตัวอย่าง 21. เกมส์ชั่งน้ำหนักสิ่งของ 6 ชิ้นเพื่อชิงรางวัลทองคำหนัก 1 กิโลกรัม ผู้เล่นเกมส์ต้องทายน้ำหนักสิ่งของได้จากน้อยไปหามาก จึงจะได้รับรางวัล ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมส์คนหนึ่งที่ได้เข้ารอบทายน้ำหนักสิ่งของแล้วได้รับรางวัลเท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{1}{720}=0.0013888$

แนวคิด จำนวนวิธีในการชั่งน้ำหนักได้ถูกต้องจากน้อยไปมาก = 1 วิธี

จำนวนวิธีจัดลำดับการชั่งน้ำหนักของ 6 สิ่งทำได้ 6! = 720 วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นเกมส์คนหนึ่งที่ได้เข้ารอบทายน้ำหนักสิ่งของแล้วได้รับรางวัลเท่ากับ = $\frac{1}{720}$ = 0.0013888

ตัวอย่าง 22. ข้อสอบวิชาภูมิศาสตร์เป็นการจับคู่ระหว่างคำถาม 10 ข้อ กับคำตอบ 10 ข้อ สำหรับนักเรียนที่ทำข้อสอบโดยการเดาสุ่ม ความน่าจะเป็นที่เขาจะจับคู่ได้ถูกต้อง 5 ข้อเท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{44}{14400}$ = 0.0030555

แนวคิด ปัญหานี้เป็นการจับคู่ $n = 10$ และ $x = 5$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะจับคู่ได้ถูกต้อง 5 ข้อ = $P(x = 5 / n = 10)$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{5!}\sum_{i=0}^{10-5}\frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{120}\sum_{i=0}^{5}\frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= \frac{1}{120}\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$$

$$= \frac{1}{120}\left(1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120}\right)$$

$$= \frac{1}{120}\left(\frac{60-20+5-1}{120}\right)$$

$$= \frac{44}{14400} = 0.0030555$$

①≥∅→α∃∀⊂~πΔ∉∞θ∩∪∈∧∨≤∃②③

เรียนรู้การแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

การแก้ปัญหาจากง่ายไปยากในบทความนี้เป็นเนื้อหาเกี่ยวกับ ระบบจำนวนเต็ม การหารลงตัว การหารแบบมีเศษเหลือ ตัวอย่างเช่น

1. $U = \{1,2,3,...,100\}$

   $A = \{ x \in U \mid 3$ หาร x ลงตัว $\}$

   $B = \{ x \in U \mid 4$ หาร x ลงตัว $\}$

   $A \cap B = ?$

2. $U = \{1,2,3,...,1000\}$

   $A = \{ x \in U \mid 13$ หาร x เหลือเศษ $4 \}$

   $B = \{ x \in U \mid 17$ หาร x เหลือเศษ $5 \}$

   $A \cap B = ?$

ในบทความนี้จะเป็นการนำเสนอการแก้ปัญหาโดยเริ่มต้นด้วยแนวคิดจากเงื่อนไขที่ง่ายๆไปหาเงื่อนไขที่ยาก และสรุปเป็นวิธีการแก้ปัญหาในรูปแบบของสูตรทั่วไป ก่อนอื่นขอให้สังเกตแนวคิดแบบง่ายๆในการหาสมาชิกของ $A \cap B$ โดยวิธีการแจงสมาชิกโดยใช้ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก มาเป็นตัวอย่าง 3 ข้อ แล้วหลังจากนั้นจะเป็นการศึกษาแนวทางการแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

ตัวอย่าง 1. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 2 สิงหาคม 2535

มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 6 เหลือเศษ 2 และ เมื่อหารด้วย 14 แล้วเหลือเศษ 10

ตอบ 23

แนวคิด โดยการแจงสมาชิกของแต่ละเซต

$X = \{1,2,3,...,1000\}$

$A = \{x \in X \mid 6$ หาร x แล้วเหลือเศษ $2\}$

$= \{2,8,14,20,26,32,38,44,50,56,62,68,74,80,...\}$

$B = \{x \in X \mid 14$ หาร x แล้วเหลือเศษ $10\}$

$= \{10,24,38,52,66,80,94,108,122,136,...\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid 6$ หาร x เหลือเศษ 2 และ 14 หาร x เหลือเศษ $10\}$

$= \{38,80,122,164,...,962\}$

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 23$

ปัญหาที่น่าสนใจคือ

1. การหาจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ โดยไม่ใช้การแจงสมาชิก
2. ถ้าสมาชิกของ $U = \{1,2,3,...,100000\}$ จะทำอย่างไร
3. ถ้า U มีสมาชิกที่เป็นลบด้วยเช่น

   $U = \{-1000,-999...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,1000\}$ จะทำอย่างไร

ตัวอย่าง 2. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 24 มิถุนายน 2538

กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลักซึ่งหารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และ เมื่อหารด้วย 132 แล้วเหลือเศษ 98

ตอบ $m = 1946$

แนวคิด โดยการแจงสมาชิก

$X = \{1000,1001,1002,...,9999\}$

$A = \{x \in X \mid 131$ หาร x เหลือเศษ $112\}$

$= \{1029,1160,1291,1422,1553,1684,1815,1946,...\}$

$B = \{x \in X \mid 132$ หาร x เหลือเศษ $98\}$

$= \{1022,1154,1286,1418,1550,1682,1814,1946,...\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid 131$ หาร x เหลือเศษ 112 และ 132 หาร x เหลือเศษ $98\}$

$A \cap B = \{1946\}$

สรุป $m = 1946$

ปัญหาที่น่าสนใจต่อไป

1. ถ้าไม่บังคับว่า m เป็นจำนวนเต็มสี่หลัก แล้ว ค่าอื่นๆของ m เป็นเท่าใด
2. ถ้า $X = \{1,2,3,...,1000000\}$ แล้ว $A \cap B$ มีสมาชิกกี่ตัว

ตัวอย่าง 3. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 25 สิงหาคม 2533

กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 3,4,5,6,7 จะเหลือเศษ 2,3,4,5 และ 6 ตามลำดับ ค่า n ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้เท่ากับเท่าใด

ตอบ $n = 419$

แนวคิด $X = \{1,2,3,4,....\}$

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x เหลือเศษ $2\} = \{2,5,8,11,14,17,20,23,.....\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x เหลือเศษ $3\} = \{3,7,11,15,19,23,27,...\}$

$C = \{x \in X \mid 5$ หาร x เหลือเศษ $4\} = \{4,9,14,19,24,29,34,39,44,...\}$

$D = \{x \in X \mid 6$ หาร x เหลือเศษ $5\} = \{5,11,17,23,29,35,41,47,53,...\}$

$E = \{x \in X \mid 7$ หาร x เหลือเศษ $6\} = \{6,13,20,27,34,41,48,55,62,69,76,...\}$

ค่า n ที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 3,4,5,6,7 จะเหลือเศษ 2,3,4,5 และ 6 ตามลำดับเป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ $A \cap B \cap C \cap D \cap E$

การหาสมาชิกของ $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ เราทำโดยหาอินเตอร์เซกชันที่ละคู่ดังนี้

$F = A \cap B = \{23,35,47,59,71,...,119,...,179,....\}$

$G = C \cap D = \{29,59,89,119,149,179,209,239,\ldots\}$

$H = F \cap G = \{59,119,179,239,299,359,419,479,\ldots\}$

$I = H \cap E = \{419,839,1259,\ldots\}$

$I = (F \cap G) \cap E$

$= ((A \cap B) \cap (C \cap D)) \cap E$

$= A \cap B \cap C \cap D \cap E$

สรุป n ที่น้อยที่สุดซึ่งหารด้วย 3,4,5,6,7 จะเหลือเศษ 2,3,4,5 และ 6 ตามลำดับเป็นสมาชิกค่าน้อยสุดของ $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ คือ $n = 419$

ทดลองตรวจสอบคำตอบ $419 = 139(3) + 2$

$419 = 104(4) + 3$

$419 = 83(5) + 4$

$419 = 69(6) + 5$

$419 = 59(7) + 6$

ในการหาผลเฉลยนี้เราใช้การแจงกรณีเพื่อหาสมาชิกของ $A \cap B \cap C \cap D \cap E$ ซึ่งจะเห็นได้ว่ากว่าจะได้สมาชิกตัวที่เล็กที่สุด $n = 419$ จะเสียเวลามาก ดังนั้นในบทความนี้จึงนำเสนอแนวคิดการหาสมาชิกของ $A \cap B$ เมื่อ

$A = \{x \in X \mid m$ หาร x เหลือเศษ $r\}$

$B = \{x \in X \mid n$ หาร x เหลือเศษ $s\}$

โดยใช้แนวคิดการแก้ปัญหาจากง่ายไปยากดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4. ให้ $X = \{1,2,3,\ldots,100\}$

$A = \{x \in X \mid 2$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 3$ หาร x ลงตัว$\}$

จงหา $A \cap B$

วิธีทำ $A = \{2,4,6,8,...,98,100\}$

$B = \{3,6,9,12,...,96,99\}$

$A \cap B = \{6,12,18,24,...,90,96\}$

ลักษณะปัญหาตามตัวอย่าง 4 นี้หากครูผู้สอนถามนักเรียนว่ามีแนวคิดในการแก้ปัญหาอย่างไร

นักเรียนคนที่ 1. ตอบว่าทำโดยการแจงสมาชิกของ A และ B ออกมาดูก่อน แล้วจึงหา $A \cap B$

นักเรียนคนที่ 2. ตอบว่าทำโดยพิจารณาเงื่อนไขการแจงสมาชิกของ $A \cap B$

$x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A$ และ $x \in B$

$\longleftrightarrow$ 2 หาร x ลงตัว และ 3 หาร x ลงตัว

$\longleftrightarrow$ 2 และ 3 หาร x ลงตัว

$\longleftrightarrow$ 6 หาร x ลงตัว

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{x \in X \mid$ 6 หาร x ลงตัว$\}$

จากตัวอย่างแนวคิดของนักเรียนสองคนนี้จะพบว่าตามความคิดของนักเรียนคนที่ 1 เมื่อเซต X ใหญ่ขึ้นจะต้องทำการแจงสมาชิกมากยิ่งขึ้น แต่แนวคิดของนักเรียนคนที่ 2 เป็นวิธีทำหรือแสดงข้อพิสูจน์เท่าเดิม ก็จะสามารถหาสมาชิกของ $A \cap B$ ได้

ในขั้นตอนต่อไปสำหรับการแก้ปัญหาทำนองเดียวกันนี้ หากครูผู้สอนนำปัญหาไปให้นักเรียนคิดหาวิธีแก้ปัญหาเพื่อสังเกตดูว่านักเรียนจะสามารถสรุปออกมาเป็นกฎเกณฑ์ได้หรือไม่

ตัวอย่างแบบฝึกหัด กำหนด $X = \{1,2,3,4,...,9999,10000\}$ จงหาเซต $A \cap B$ เมื่อ

1. $A = \{x \in X \mid$ 2 หาร x ลงตัว$\}$

   $B = \{x \in X \mid$ 5 หาร x ลงตัว$\}$

2. $A = \{x \in X \mid 11$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 7$ หาร x ลงตัว$\}$

3. $A = \{x \in X \mid 9$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 10$ หาร x ลงตัว$\}$

4. $A = \{x \in X \mid 4$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 6$ หาร x ลงตัว$\}$

5. $A = \{x \in X \mid 12$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 16$ หาร x ลงตัว$\}$

6. $A = \{x \in X \mid 15$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 42$ หาร x ลงตัว$\}$

ผลจากการทำแบบฝึกหัดที่ลองให้นักเรียนทำอาจจะมีนักเรียนบางคนสามารถได้ข้อสรุปหรือสามารถเข้าใจข้อสรุปต่อไปนี้คือ

$X = \{1,2,3,4,\ldots,9999,10000\}$

$A = \{x \in X \mid m$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid n$ หาร x ลงตัว$\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. ของ m และ n หาร x ลงตัว$\}$

ข้อพิสูจน์ $x \in A \cap B \longleftrightarrow x \in A$ และ $x \in B$

$\longleftrightarrow$ m หาร x ลงตัวและ n หาร x ลงตัว

$\longleftrightarrow$ m และ n หาร x ลงตัว

$\longleftrightarrow$ ค.ร.น. m และ n หาร x ลงตัว

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. m และ n หาร x ลงตัว$\}$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $X = I$ เป็นเซตของจำนวนเต็มข้อสรุปที่ได้ยังเหมือนเดิม ดังนั้นครูผู้สอนสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทไว้ใช้ในโอกาสต่อไปได้

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า $A = \{x \in I \mid m$ หาร x ลงตัว$\}$

และ $B = \{x \in X \mid n$ หาร x ลงตัว$\}$

แล้ว $A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. ของ m และ n หาร x ลงตัว$\}$

ต่อไปเราจะเพิ่มเงื่อนไขของปัญหาให้น่าคิดต่อไปมากขึ้น เช่น A,B เป็นเซตของจำนวนเต็มที่หารด้วยเลขบางตัว แล้วมีเศษเหลือ ในตัวอย่างต่อไปจะเริ่มด้วยปัญหาง่ายๆก่อนคือ เศษเหลือเป็น 1

กำหนด $X = \{1,2,3,4,\ldots,25\}$

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

การหา $A \cap B$ เราพิจารณาดังนี้ เนื่องจาก X เป็นเซตที่มีสมาชิกน้อย ดังนั้นการแจงสมาชิกยังเป็นวิธีที่สะดวก

$A = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25\}$

$B = \{1,5,9,13,17,21,25\}$

$A \cap B = \{1,13,25\}$

ต่อไปเพิ่มเงื่อนไขให้ X มีสมาชิกมากขึ้น

กำหนด $X = \{1,2,3,4,\ldots,9999,10000\}$

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

โดยการแจงสมาชิก $A = \{1,4,7,10,13,16,19,22,25,\ldots\ldots,994,997,1000\}$

$B = \{1,5,9,13,17,21,25,\ldots,993,997\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{1,13,25,37,49,\ldots,985,997\}$

แนวคิดในการสรุปปัญหาครูผู้สอนอาจให้เวลามากขึ้นและปัญหามากขึ้นแก่นักเรียนตัวอย่างเช่น กำหนด $X = \{1,2,3,4,...,9999,10000\}$ จงหา $A \cap B$

1. $A = \{x \in X \mid 4$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

   $B = \{x \in X \mid 5$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

2. $A = \{x \in X \mid 10$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

   $B = \{x \in X \mid 13$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

3. $A = \{x \in X \mid 9$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

   $B = \{x \in X \mid 15$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

4. $A = \{x \in X \mid 18$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

   $B = \{x \in X \mid 24$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

จากการทำปัญหาแบบเดียวกันซ้ำๆกันหลายๆครั้ง นักเรียนแต่ละคนอาจมีแนวคิดที่แตกต่างกัน

นักเรียนคนที่ 1 ทำโดยการแจงสมาชิกของ A และ B ออกมาดู แล้วจึงหา $A \cap B$

นักเรียนคนที่ 2 ได้แนวคิดที่มีวิธีหาสมาชิกของ $A \cap B$ ดังนี้

$X = \{1,2,3,4,...,9999,10000\}$

$A = \{x \in X \mid 4$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$A = \{1,5,9,13,17,21,25,...,993,997\}$

$B = \{x \in X \mid 5$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{1,6,11,16,21,26,31,...,991,996\}$

ต่อไปทำการเรียงสมาชิกของ A และ B จากน้อยไปหามาก สังเกตพบว่า

- สองตัวแรกที่ซ้ำกันคือ 1,21 มีค่าต่างกัน 20 นอกจ
- ตัวเลขถัดไปมีค่าเพิ่มขึ้นทีละ 20

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{1,21,41,61,...,971,991\}$

เมื่อนักเรียนได้ทำแบบฝึกหัดมากขึ้นบางคนอาจหาข้อสรุปได้เอง บางคนอาจเข้าได้จากข้อสรุปต่อไปนี้

กำหนด $X = \{1,2,3,4,...,9999,10000\}$

$A = \{x \in X \mid m$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in X \mid n$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

จะได้ $A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. m และn หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

ซึ่งข้อสรุปนี้ ครูผู้สอนอาจจะให้นักเรียนแสดงข้อพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด หรือ จะทำให้นักเรียนดูเป็นตัวอย่างโดยใช้ตัวเลขก่อน แล้วจึงพิสูจน์กรณีทั่วไป

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$A \cap B = \{1, 1+12, 1+12+12, 1+12+12+12, ..., 997\}$

$= \{1, 1+12, 1+2(12), 1+3(12), ..., 1+83(12)\}$

ข้อพิสูจน์กรณีทั่วไป

$A = \{x \in I \mid m$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in I \mid n$ หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

$C = \{x \in I \mid$ ค.ร.น. m และ n หาร x แล้วเหลือเศษ $1\}$

ให้ $c =$ ค.ร.น. ของ m และ n

การแสดงว่า $A \cap B \subset C$ ให้ $x \in A \cap B$ ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B$

m หาร x แล้วเหลือเศษ 1 และ n หาร x แล้วเหลือเศษ 1

มี $a,b \in I$ ที่ทำให้ $x = am + 1$ และ $x = bn + 1$

เพราะฉะนั้น $am = bn$

ให้ $p,q \in I$ ที่ทำให้ $m = pc$, $n = qc$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1

ดังนั้น $apc = bqc$

$ap = bq$

เพราะว่า ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1

เพราะฉะนั้น p หาร b ลงตัว และ q หาร a ลงตัว

ให้ $s,t \in I$ ที่ทำให้ $a = sq$ และ $b = tp$

ดังนั้น $x = sqm + 1$ และ $x = tpn + 1$

$x = spqc + 1$ และ $x = tpqc + 1$

เพราะฉะนั้น c หาร x เหลือเศษ 1 นั่นคือ $A \cap B \subset C$

การแสดงว่า $C \subset A \cap B$ ให้ $x \in C$ เพราะฉะนั้น c หาร x เหลือเศษ 1

ให้ $k \in I$ ทำให้ $x = kc + 1$

เพราะฉะนั้น m หาร kc ลงตัว และ n หาร kc ลงตัว

เพราะฉะนั้น m หาร $kc + 1$ เหลือเศษ 1 และ n หาร $kc + 1$ เหลือเศษ 1

ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B$ เพราะฉะนั้น $x \in A \cap B$ สรุป $C \subset A \cap B$

เมื่อมาถึงตรงนี้เราจะสรุปเป็นทฤษฎีไว้ใช้ต่อไป

<u>ทฤษฎีบท</u> ถ้า $A = \{x \in I \mid$ **m หาร x แล้วเหลือเศษ 1**$\}$

และ $B = \{x \in I \mid$ **n หาร x แล้วเหลือเศษ 1**$\}$

แล้ว $A \cap B = \{x \in I \mid$ **ค.ร.น. m และn หาร x แล้วเหลือเศษ 1**$\}$

ต่อไปลองคดิกรณีเศษเหลือเป็นตัวเลขอื่นที่ไม่ใช่ 1 ตัวอย่างเช่น

กำหนด $X = \{1,2,3,4,\ldots,999,1000\}$

$A = \{x \in X \mid 10$ หาร x แล้วเหลือเศษ 3$\}$

$B = \{x \in X \mid 24$ หาร x แล้วเหลือเศษ 3$\}$

โดยการแจงสมาชิกพบว่า $A = \{3,13,23,33,43,\ldots,983,993\}$

$B = \{3,27,51,75,99,123,...,960,984\}$

จะเห็นได้ว่าเมื่อเรียงสมาชิกจากน้อยไปมาก

– ตัวแรกที่ซ้ำกันคือ 3

– ตัวถัดไปคือ 123 ซึ่งค่าที่เพิ่มขึ้นเท่ากับ 120 และ เท่ากับ ค.ร.น.(10,24)

เราจะสรุปได้หรือไม่ว่า

$A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. 10 และ 24 หาร x แล้วเหลือเศษ 3$\}$

เหมือนกับตัวอย่างที่ผ่านมานั้นคือลองทำแบบฝึกหัดให้มากขึ้นเพื่อจะได้เห็นแนวทางของการพิสูจน์ ตัวอย่างแบบฝึกหัดเช่น

กำหนด $X = \{1,2,3,...,1000\}$ จงหา $A \cap B$ เมื่อ

1. $A = \{x \in X \mid$ 3 หาร x แล้วเหลือเศษ 2$\}$

   $B = \{x \in X \mid$ 5 หาร x แล้วเหลือเศษ 2$\}$

2. $A = \{x \in X \mid$ 10 หาร x แล้วเหลือเศษ 7$\}$

   $B = \{x \in X \mid$ 12 หาร x แล้วเหลือเศษ 7$\}$

3. $A = \{x \in X \mid$ 8 หาร x แล้วเหลือเศษ 5$\}$

   $B = \{x \in X \mid$ 12 หาร x แล้วเหลือเศษ 5$\}$

เมื่อนักเรียนได้ทำแบบฝึฎหัดมากขึ้นก็จะเห็นได้ว่า สมาชิกตัวแรกของ A และ B เหมือนกัน และ สมาชิกตัวถัดไปของ $A \cap B$ คือสมาชิกตัวแรกบวกด้วย ค.ร.น. ของ m และ n ต่อไปเราจึงสรุปเป็นทฤษฎีบท

<u>**ทฤษฎีบท**</u> **ถ้า** $\mathbf{A = \{x \in I \mid}$ **m หาร x แล้วเหลือเศษ r**$\mathbf{\}}$

และ $\mathbf{B = \{x \in I \mid}$ **n หาร x แล้วเหลือเศษ r**$\mathbf{\}}$

แล้ว $\mathbf{A \cap B = \{x \in I \mid}$ **ค.ร.น. m และn หาร x แล้วเหลือเศษ r**$\mathbf{\}}$

ข้อพิสูจน์ $A = \{x \in I \mid$ m หาร x แล้วเหลือเศษ r$\}$

$B = \{x \in I \mid n$ หาร x แล้วเหลือเศษ $r\}$

$C = \{x \in I \mid$ ค.ร.น. m และ n หาร x แล้วเหลือเศษ $r\}$

ให้ c = ค.ร.น. ของ m และ n

การแสดงว่า $A \cap B \subset C$ ให้ $x \in A \cap B$ ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B$

m หาร x แล้วเหลือเศษ r และ n หาร x แล้วเหลือเศษ r

มี $a,b \in I$ ที่ทำให้ $x = am + r$ และ $x = bn + r$

เพราะฉะนั้น $am = bn$

ให้ $p,q \in I$ ที่ทำให้ $m = pc$, $n = qc$ และ ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1

ดังนั้น $apc = bqc$

$ap = bq$

เพราะว่า ห.ร.ม. ของ p และ q เท่ากับ 1

เพราะฉะนั้น p หาร b ลงตัว และ q หาร a ลงตัว

ให้ $s,t \in I$ ที่ทำให้ $a = sq$ และ $b = tp$

ดังนั้น $x = sqm + r$ และ $x = tpn + r$

$x = sqpc + r$ และ $x = tpqc + r$

เพราะฉะนั้น c หาร x เหลือเศษ r นั่นคือ $A \cap B \subset C$

การแสดงว่า $C \subset A \cap B$ ให้ $x \in C$ เพราะฉะนั้น c หาร x เหลือเศษ r

ให้ $k \in I$ ทำให้ $x = kc + r$

เพราะฉะนั้น m หาร kc ลงตัว และ n หาร kc ลงตัว

เพราะฉะนั้น m หาร $kc + r$ เหลือเศษ r และ n หาร $kc + r$ เหลือเศษ r

ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B$ เพราะฉะนั้น $x \in A \cap B$ สรุป $C \subset A \cap B$

สรุป $A \cap B = \{x \in I \mid$ ค.ร.น. m และ n หาร x แล้วเหลือเศษ $r\}$

ระดับความยากขึ้นของปัญหาต่อไปคือ กรณีที่เศษเหลือไม่เท่ากัน ตัวอย่างเช่น

$X = \{1,2,3,...,1000\}$

$A = \{x \in X \mid m$ หาร x เหลือเศษ $r\}$

$B = \{x \in X \mid n$ หาร x เหลือเศษ $s\}$

$A \cap B = ?$

โดยการแจงสมาชิก $A = \{3,7,11,15,19,23,27,31,35,39,,43,...,995,999\}$

$B = \{4,9,14,19,24,29,34,39,44,49,54,...,994,999\}$

จะได้ว่าตัวแรกที่ซ้ำกันคือ 19 ตัวถัดไปเพิ่มค่าทีละ 20 ซึ่งก็คือ ค.ร.น.(4,5)

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{19,19+20,19+20+20,19+20+20+20,...,999\}$

$= \{19,39,59,...,999\}$

ทดลองทำแบบฝึกหัดต่อไป

กำหนด $X = \{1,2,3,...,999,1000\}$ จงหา $A \cap B$ เมื่อ

1. $A = \{x \in X \mid 12$ หาร x เหลือเศษ $11\}$

   $B = \{x \in X \mid 18$ หาร x เหลือเศษ $17\}$

2. $A = \{x \in X \mid 10$ หาร x เหลือเศษ $3\}$

   $B = \{x \in X \mid 25$ หาร x เหลือเศษ $13\}$

3. $A = \{x \in X \mid 9$ หาร x เหลือเศษ $7\}$

   $B = \{x \in X \mid 12$ หาร x เหลือเศษ $10\}$

สรุปขั้นตอนของการหา $A \cap B$ คือ

- หาสมาชิกตัวแรกที่ซ้ำกัน สมมติเป็น a
- หา ค.ร.น. ของ m และ n สมมติเป็น d

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{a, a+d, a+2d, a+3d,....\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. ของ m และ n หาร x เหลือเศษ a $\}$

ตัวอย่างเช่น $X = \{1,2,3,...,999,1000\}$

$A = \{x \in X \mid 10$ หาร x เหลือเศษ $7\}$

$B = \{x \in X \mid 12$ หาร x เหลือเศษ $11\}$

1. สมาชิกตัวแรกที่ซ้ำกัน คือ 47

2. ค.ร.น. ของ 10 และ 12 คือ 60

$A \cap B = \{x \in X \mid$ ค.ร.น. ของ m และ n หาร x เหลือเศษ a $\}$

$= \{47, 47+60, 47+60+60, ..., 947\}$

$= \{47, 107, 167, ..., 947\}$

ในการแก้ปัญหาต่อไปเราจะความรู้ของระบบจำนวนเต็มเพื่อช่วยในการหาสมาชิกของ $A \cap B$ โดยมีข้อตกลงเบื้องต้นบางประการดังนี้

$x \mid y$ หมายถึง x หาร y ลงตัว

$x \equiv a \bmod n$ หมายถึง n หาร x เหลือเศษ a หรือ $n \mid (x-a)$

ตัวอย่างเช่น $5 \equiv 2 \bmod 3$

$17 \equiv 2 \bmod 5$

$25 \equiv 1 \bmod 6$

จาก $A = \{x \in I \mid 3$ หาร x เหลือเศษ $1\} = \{x \in I \mid x \equiv 1 \bmod 3\}$

$B = \{x \in I \mid 5$ หาร x เหลือเศษ $1\} = \{x \in I \mid x \equiv 1 \bmod 5\}$

การหาสมาชิกของ $A \cap B$ คือ $A \cap B = \{x \in I \mid x \equiv 1 \bmod 3$ และ $x \equiv 1 \bmod 5\}$

ซึ่งเป็นการหาค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 1 \bmod 3$ และ $x \equiv 1 \bmod 5$

ตัวอย่าง จงหาค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 0 \bmod 3$

และ $x \equiv 0 \bmod 5$

วิธีทำ $\{x \in I \mid x \equiv 0 \bmod 3$ และ $x \equiv 0 \bmod 5\}$

$= \{x \in I \mid 3 \mid x$ และ $5 \mid x\}$

$= \{x \in I \mid 15 \mid x\}$

$= \{x \in I \mid x \equiv 0 \bmod 15\}$

เพราะฉะนั้น คำตอบของระบบสมการ $x \equiv 0 \bmod 3$

และ $x \equiv 0 \bmod 5$

คือ $x \equiv 0 \bmod 15$

ความรู้จากตัวอย่างนี้เทียบได้กับ การหา $A \cap B$ ของ

$A = \{x \in I \mid 3$ หาร x เหลือเศษ $0\}$

$B = \{x \in I \mid 5$ หาร x เหลือเศษ $0\}$

จะได้ $A \cap B = \{x \in I \mid 15$ หาร x เหลือเศษ $0\}$

ทฤษฎีบท ถ้า $x \equiv a \bmod m$ และ $x \equiv a \bmod n$ แล้ว $x \equiv a \bmod$ (ค.ร.น.(m,n))

ตัวอย่าง จงหาค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 1 \bmod 3$

และ $x \equiv 1 \bmod 5$

วิธีทำ เพราะฉะนั้น คำตอบคือ $x \equiv 1 \bmod$ (ค.ร.น.(3,5))

$x \equiv 1 \bmod 15$

ความรู้จากตัวอย่างนี้เทียบได้กับ การหา $A \cap B$ ของ

$A = \{x \in I \mid 3$ หาร x เหลือเศษ $1\}$

$B = \{x \in I \mid 5$ หาร x เหลือเศษ $1\}$

จะได้ $A \cap B = \{x \in I \mid 15$ หาร x เหลือเศษ $1\}$

ตัวอย่าง จงหาค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 3 \bmod 10$

และ $x \equiv 3 \bmod 24$

วิธีทำ คำตอบคือ $x \equiv 3 \bmod$ (ค.ร.น.(10,24))

$x \equiv 3 \bmod 120$

ความรู้จากตัวอย่างนี้เทียบได้กับ การหา $A \cap B$ ของ

$A = \{x \in I \mid 10$ หาร x แล้วเหลือเศษ $3\}$

$B = \{x \in I \mid 24$ หาร x แล้วเหลือเศษ $3\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{x \in I \mid 120$ หาร x เหลือเศษ $3\}$

ทฤษฎีบท $\boldsymbol{x \equiv a \bmod m}$ **และ** $\boldsymbol{x \equiv (a + nk) \bmod n}$ **ทุกค่า k**

ตัวอย่าง จงหาค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 2 \bmod 12$

และ $x \equiv 8 \bmod 15$

วิธีทำ $x \equiv 2 \bmod 12 \equiv (2 + 12k) \bmod 12$

$x \equiv 8 \bmod 15 \equiv (8 + 15t) \bmod 15$

หาค่า k และ t ที่เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$2 + 12k = 8 + 15t$

$12k - 15t = 6$

เลือก $k = 3$ และ $t = 2$ เพราะฉะนั้น

$x \equiv 2 \bmod 12 \equiv (2 + 12(3)) \bmod 12 \equiv 38 \bmod 12$

$x \equiv 8 \bmod 15 \equiv (8 + 15(2)) \bmod 15 \equiv 38 \bmod 15$

สรุปคำตอบคือ $x \equiv 38 \bmod (\text{ค.ร.น.}(12,15)) \equiv 38 \bmod 60$

ความรู้จากตัวอย่างนี้เทียบได้กับ การหา $A \cap B$ ของ

$A = \{x \in I \mid 12$ หาร x แล้วเหลือเศษ $2\}$

$B = \{x \in I \mid 15$ หาร x แล้วเหลือเศษ $8\}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{x \in I \mid 60$ หาร x เหลือเศษ $38\}$

สรุป ขั้นตอนในการหาคำตอบของ $x \equiv a \bmod n$ และ $x \equiv b \bmod m$

1. แก้สมการหาค่า k และ t ที่ทำให้ $a + kn = b + tm$

2. หา ค.ร.น.ของ m และ n

คำตอบคือ $x \equiv (a + kn) \bmod m$

ตัวอย่าง จงหา $A \cap B$ เมื่อ $A = \{x \in I \mid 12$ หาร x แล้วเหลือเศษ $4\}$

$B = \{x \in I \mid 21$ หาร x แล้วเหลือเศษ $5\}$

วิธีทำ โดยการแจงกรณีเราจะสรุปไม่ได้ว่า $A \cap B = \varnothing$ แต่การสรุปโดยวิธีต่อไปนี้ยืนยันได้ว่า $A \cap B = \varnothing$

ระบบสมการ $x \equiv 4 \bmod 12$

$x \equiv 5 \bmod 21$

ขั้นที่ 1. แก้สมการหาค่า k และ t ที่ทำให้ $4 + 12k = 5 + 21t$

$12k - 21t = 1$

เพราะว่า ห.ร.ม.$(12,21) = 3$ เพราะฉะนั้น ไม่มี k และ t ที่ทำให้ $4 + 12k = 5 + 21t$

เพราะฉะนั้น ไม่มี x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $x \equiv 4 \bmod 12$ และ $x \equiv 5 \bmod 21$

สรุป $A \cap B = \varnothing$

แบบฝึกหัด จงหาคำตอบของระบบสมการ

1. $x \equiv 2 \bmod 3$ และ $x \equiv 3 \bmod 4$

2. $x \equiv 4 \bmod 5$ และ $x \equiv 11 \bmod 12$

3. $x \equiv 59 \bmod 60$ และ $x \equiv 5 \bmod 6$

4. $x \equiv 59 \bmod 60$ และ $x \equiv 6 \bmod 7$

5. $x \equiv 2 \bmod 6$ และ $x \equiv 10 \bmod 14$

6. $x \equiv 112 \bmod 131$ และ $x \equiv 98 \bmod 132$

จากตัวอย่าง 1. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 2 สิงหาคม 2535

มีจำนวนนับตั้งแต่ 1 ถึง 1000 รวมทั้งสิ้นกี่จำนวนซึ่งเมื่อหารด้วย 6 เหลือเศษ 2 และ เมื่อหารด้วย 14 แล้วเหลือเศษ 10

ตอบ มี 23 ตัว

แนวคิด $X = \{1,2,3,\ldots,1000\}$

$A = \{x \in X \mid 6$ หาร x แล้วเหลือเศษ $2\} = \{x \in X \mid x \equiv 2 \bmod 6\}$

$B = \{x \in X \mid 14$ หาร x แล้วเหลือเศษ $10\} = \{x \in X \mid x \equiv 10 \bmod 14\}$

การหาคำตอบของ $x \equiv 2 \bmod 6$ และ $x \equiv 10 \bmod 14$

ขั้นที่ 1. แก้สมการหาค่า k และ t ที่ทำให้ $2 + 6k = 10 + 14t$

$6k - 14t = 8$

$3k - 7t = 4$

เลือก $k = 6$ และ $t = 2$ จะได้ $2 + 6k = 38$

ค.ร.น. ของ 6 และ 14 คือ 42 เพราะฉะนั้น คำตอบคือ $x \equiv 38 \bmod 42$

$A \cap B = \{x \in X \mid x \equiv 38 \bmod 42\}$

$= \{x \in X \mid x = 38 + 42n,\ n = 0,1,2,\ldots.\}$

การหาค่า n มากสุดที่ทำให้ $38 + 42n \le 1000$

$42n \le 962$

$n \le 22.904$

เลือก $n = 22$

เพราะฉะนั้น $n(A \cap B) = 23$

จากตัวอย่าง 2. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 24 มิถุนายน 2538

กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกสี่หลักซึ่งหารด้วย 131 เหลือเศษ 112 และ เมื่อหารด้วย 132 แล้วเหลือเศษ 98

ตอบ $m = 1946$

แนวคิด $X = \{1000, 1001, 1002, \ldots, 9999\}$

$A = \{x \in X \mid 131$ หาร x เหลือเศษ $112\} = \{x \in X \mid x \equiv 112 \bmod 131\}$

$B = \{x \in X \mid 132$ หาร x เหลือเศษ $98\} = \{x \in X \mid x \equiv 98 \bmod 132\}$

การหาคำตอบของ $x \equiv 112 \bmod 131$ และ $x \equiv 98 \bmod 132$

ขั้นที่ 1. แก้สมการหาค่า k และ t ที่ทำให้ $112 + 131k = 98 + 132t$

$132t - 131k = 14$

เลือก $k = 14$ และ $t = 14$ จะได้ $112 + 131k = 112 + 131(14) = 1946$

เพราะว่า ค.ร.น.ของ 131 และ132 เท่ากับ 17292 เพราะฉะนั้น $m = 1946$

จากตัวอย่าง 3. ข้อสอบคัดเลือกคณิตศาสตร์โอลิมปิก 25 สิงหาคม 2533

กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งหารด้วย 3,4,5,6,7 จะเหลือเศษ 2,3,4,5 และ 6 ตามลำดับ ค่า n ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ท่ากับเท่าใด

ตอบ $n = 419$

แนวคิด $X = \{1,2,3,4,....\}$

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x เหลือเศษ $2\} = \{x \in X \mid x \equiv 2 \bmod 3\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x เหลือเศษ $3\} = \{x \in X \mid x \equiv 3 \bmod 4\}$

$C = \{x \in X \mid 5$ หาร x เหลือเศษ $4\} = \{x \in X \mid x \equiv 4 \bmod 5\}$

$D = \{x \in X \mid 6$ หาร x เหลือเศษ $5\} = \{x \in X \mid x \equiv 5 \bmod 6\}$

$E = \{x \in X \mid 7$ หาร x เหลือเศษ $6\} = \{x \in X \mid x \equiv 6 \bmod 7\}$

$A \cap B = \{x \in X \mid x \equiv 2 \bmod 3$ และ $x \equiv 3 \bmod 4\}$

$= \{x \in X \mid x \equiv 11 \bmod 12\}$

$A \cap B \cap C = \{x \in X \mid x \equiv 11 \bmod 12$ และ $x \equiv 4 \bmod 5\}$

$= \{x \in X \mid x \equiv 59 \bmod 60\}$

$A \cap B \cap C \cap D = \{x \in X \mid x \equiv 59 \bmod 60$ และ $x \equiv 5 \bmod 6\}$

$= \{x \in X \mid x \equiv 59 \bmod 60\}$

$A \cap B \cap C \cap D \cap E = \{x \in X \mid x \equiv 59 \bmod 60$ และ $x \equiv 6 \bmod 7\}$

$= \{x \in X \mid x \equiv 419 \bmod 420\}$

$= \{419 , 419 + 420 , ...$

เพราะฉะนั้น $n = 419$

∅①②≡③≥←→α∃∀⊂~πΔ∉∞θ∩∪∈∧∨≤∃

ปัญหาที่มีโครงสร้างคล้ายกัน

ข้อสอบที่มีโครงสร้างคล้ายกันในบทความนี้จะพิจารณาคำถามในรูปแบบของ $x+\frac{1}{x}$ ตัวอย่างเช่น

1. ถ้า $x=4$ แล้ว $x+\frac{1}{x}$ เท่ากับเท่าใด ตอบ $x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$
2. ถ้า $x=4$ แล้ว $x^2+\frac{1}{x^2}$ เท่ากับเท่าใด ตอบ $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{257}{16}$

หากถามกลับกันเช่น ถ้า $x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$ แล้ว x เท่ากับเท่าใดจะเป็นปัญหาที่ยากกว่า แต่การหาคำตอบสามารถทำได้ดังนี้ $x+\frac{1}{x}=\frac{17}{4}$

$$4x^2+4=17x$$

$$4x^2-17x+4=0$$

$$(4x-1)(x-4)=0$$

$$x=\frac{1}{4},4$$

หากเราเพิ่มระดับของคำถามเป็นถ้า $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{17}{4}$ แล้ว $\sin x$ เท่ากับเท่าใด แนวคิดในการหาคำตอบจะเหมือนกันดังนี้ $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{17}{4}$

$$4\sin x^2+4=17\sin x$$

$$4\sin x^2-17\sin x+4=0$$

$$(4\sin x-1)(\sin x-4)=0$$

สรุป $\sin x=\frac{1}{4}$ เท่านั้น ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในระดับ ม.ปลาย อีกมากมายที่

สามารถจะถามได้ในรูปแบบของ $x+\frac{1}{x}$, $\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}$, $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ นอกจากนั้นแนวทางของคำถามสามารถเชื่อมโยงเนื้อหา อสมการ เซตคำตอบ แคลคูลัส ฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด ขอบเขตบนและขอบเขตล่าง ฯลฯ

ตัวอย่าง 1. $A=\{x+\frac{1}{x} \mid x>0\}$ มีขอบเขตล่างค่ามากที่สุดเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 \ge 0$

$$x-2+\frac{1}{x} \ge 0$$

$$x+\frac{1}{x} \ge 2$$

เพราะฉะนั้น $A \subset [2,\infty)$ เพราะว่า $x=1$ ทำให้ $x+\frac{1}{x}=2 \in A$

เพราะฉะนั้น 2 เป็นขอบเขตล่างค่ามากที่สุดของ A

ตัวอย่าง 2. $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือลดบนช่วงใด

วิธีทำ $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$

$$f'(x)=2x-\frac{2}{x^3}=\frac{2(x^4-1)}{x^3}=\frac{2(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3}$$

พิจารณาเครื่องหมายของ $\frac{2(x^2+1)(x+1)(x-1)}{x^3}$ บนช่วง $(-\infty,\infty)$

$$\begin{array}{ccccccc} - & & + & & - & & + \\ & -1 & & 0 & & 1 & \end{array}$$

สรุป $f'(x)>0$ บนช่วง $(-1,0)$, $(1,\infty)$

$f'(x)<0$ บนช่วง $(-\infty,-1)$, $(0,1)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-1,0)$, $(1,\infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty,-1)$, $(0,1)$

ตัวอย่าง 3. กำหนด $x+\frac{1}{x}=3$ ค่าของ $x^2-\frac{1}{x^2}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

$$(x+\frac{1}{x})^2=3^2$$

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=9$$

$$x^2-2+\frac{1}{x^2}=5$$

$$(x-\frac{1}{x})^2=5$$

$$x-\frac{1}{x}=\sqrt{5}$$

$$x^2-\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x})=3\sqrt{5}$$

ตัวอย่าง 4. รากสมการ $x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

$$x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}=0$$

$$1+x+x^2+x^3=0$$

$$\frac{x(1-x^4)}{1-x}=0$$

$$\frac{x(1-x)(1+x)(1+x^2)}{1-x}=0$$

เพราะว่า $x\neq 0$ และ $x\neq 1$ เพราะฉะนั้น $(1+x)(1+x^2)=0$

สรุป $x=-1, i, -i$

หมายเหตุ คำถามนี้หากกำหนดเอกภพสัมพัทธ์ต้องตอบแบบนี้

$$\{x \in R \mid x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0\} = \{-1\}$$

$$\{x \in C \mid x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 0\} = \{-1, i, -i\}$$

ตัวอย่าง 5. $A = \{x \in C \mid x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0\}$ มีสมาชิกกี่ตัว

วิธีทำ $x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}$ เป็นลำดับเรขาคณิต $a = 1 \quad r = \frac{1}{x}$

$$x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{(1)(1-(-\frac{1}{x})^5)}{1-(-\frac{1}{x})}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{x^5+1}{x^4(x+1)}$$

$\frac{x^5+1}{x^4(x+1)} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x^5 + 1 = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x^5 = -1$

การหารากที่ 5 ของ –1

$$x^5 = -1$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi$$

$$= \cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$x = \cos(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5}) \qquad k = 0,1,2,3,4$$

k	x
0	$\cos(\frac{\pi}{5})+i\sin(\frac{\pi}{5})$
1	$\cos(\frac{3\pi}{5})+i\sin(\frac{3\pi}{5})$
2	$\cos(\pi)+i\sin(\pi)=-1$
3	$\cos(\frac{7\pi}{5})+i\sin(\frac{7\pi}{5})$
4	$\cos(\frac{9\pi}{5})+i\sin(\frac{9\pi}{5})$

เพราะว่า $x \neq 0$ และ $x \neq -1$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in C \mid x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 0\}$ มีสมาชิก 4 ตัว

ตัวอย่าง 6. จงหาค่าต่ำสุดสัมบรูณ์ของ $f(x) = \log x + \frac{1}{\log x}$ เมื่อ $D_f = (1,\infty)$

วิธีทำ เพราะว่า $x > 1$ เพราะฉะนั้น $\log x > 0$

$$(\sqrt{\log x} - \frac{1}{\sqrt{\log x}})^2 \geq 0$$

$$\log x - 2 + \frac{1}{\log x} \geq 0$$

$$\log x + \frac{1}{\log x} \geq 2$$

เพราะว่า $x = 10$ ทำให้ $f(10) = \log 10 + \frac{1}{\log 10} = 2$

เพราะฉะนั้น $f(10) = 2$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบรูณ์ของ f บน $D_f = (1,\infty)$

หมายเหตุ 1. $f(x) = \log_a x + \frac{1}{\log_a x} \geq 2$ ทุกค่า $a > 1$ และ $x > 1$

2. $f(x) = \log_a x + \log_x a \geq 2$ ทุกค่า $a > 1$ และ $x > 1$

ตัวอย่าง 7. $A = \{ x \mid x \in [0,2\pi]$ และ $1 + \sin x + \sin^2 x = 0 \}$ มีสมาชิกกี่ตัว

วิธีทำ $\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$$\sin x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(1) \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

ดังนั้นไม่มี x ที่ทำให้ $\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $n(A) = 0$

ตัวอย่าง 8. $A = \{ x \mid x \in [-4\pi,4\pi]$ และ $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = 0 \}$ มีสมาชิกกี่ตัว

วิธีทำ $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $\quad a = 1, r = \sin x$

$$0 = \frac{1 - \sin^4 x}{1 - \sin x}$$

$$= \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}$$

$$= (1 + \sin x)(1 + \sin^2 x)$$

$1 + \sin^2 x \neq 0$ เพราะฉะนั้น $1 + \sin x = 0$ ดังนั้น $\sin x = -1 = \sin(\frac{3\pi}{2})$

$x = n\pi + (-1)^n \frac{3\pi}{2}$ เพราะว่า $x \in [-4\pi,4\pi]$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}$

สรุป $A = \{\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}\}$ มีสมาชิก 4 ตัว

ตัวอย่าง 9. กำหนด $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 7$ และ $x > 0$ ค่าของ $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 7$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-6=0$$

$$(\frac{1}{x}+3)(\frac{1}{x}-2)=0$$

$$\frac{1}{x}=-3,2$$

เพราะว่า $x>0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x}=2$ สรุป $1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1-2+4=3$

ตัวอย่าง 10. กำหนด $f(x)=1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x+\cos^5 x$

และ $A=\{f(x)\mid x\in[0,2\pi]\}$

ผลบวกของขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x+\cos^5 x=\frac{(1)(1-\cos^6 x)}{1-\cos x}$

$$f(x)=\frac{(1-\cos^3 x)(1-\cos^3 x)}{1-\cos x}$$

$$f(x)=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\cos^3 x)}{1-\cos x}$$

$$f(x)=(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\cos^3 x)$$

เพราะว่า $-1\le\cos x\le 1$ เพราะฉะนั้น $-1\le\cos^3 x\le 1$ และ $0\le 1+\cos^3 x\le 2$

เพราะว่า $\cos^2 x+\cos x+1=(\cos x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

เพราะฉะนั้น $f(x)=(1+\cos x+\cos^2 x)(1+\cos^3 x)\ge 0$

เพราะว่า $\cos^k x\le 1$ ทุกค่า $k=1,2,3,4,5$ และทุกค่า $x\in[0,2\pi]$

เพราะฉะนั้น $f(x)=1+\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x+\cos^5 x\ge 6$

เพราะฉะนั้น $0\le f(x)\le 6$ นั่นคือ $A\subset[0,6]$

เพราะว่า $f(-\pi)=1-1+1-1+1-1=0$ และ $f(0)=6$

0 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A และ 6 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A

ผลบวกของขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับ $0 + 6 = 6$

ตัวอย่าง 11. กำหนด $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x$ และ $A = \{f(x) \mid 0 < x < \pi\}$ จงหาเซต A

วิธีทำ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x + \ldots\ldots$

$$= \frac{1}{1-\cos x}$$

พิจารณา $\quad g(x) = \frac{1}{1-x} \quad$ เมื่อ $-1 < x < 1$

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \text{ ทุกค่า } x \text{ เมื่อ } -1 < x < 1$$

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $g(-1) < g(x) < \infty$

$$\frac{1}{2} < g(x) < \infty$$

เมื่อ $\frac{1}{2} < y < \infty$ จะได้ว่า $\quad \frac{1}{y} < 2$

$$-\frac{1}{y} > -2$$

$$1 - \frac{1}{y} > -1$$

เลือก $x = 1 - \frac{1}{y}$ จะได้ว่า $-1 < x < 1$ และ $g(x) = \frac{1}{1-(1-\frac{1}{y})} = y$

สรุป $R_g = (\frac{1}{2}, \infty)$ นั่นคือ $\{\frac{1}{1-x} \mid -1 < x < 1\} = (\frac{1}{2}, \infty)$

เพราะฉะนั้น $\quad \{\frac{1}{1-\cos x} \mid -1 < \cos x < 1\} = (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\{\frac{1}{1-\cos x} \mid -1 < \cos x < 1\} = (\frac{1}{2}, \infty)$$

$$A = \{f(x) \mid 0 < x < \pi\} = (\frac{1}{2}, \infty)$$

คำถามเพิ่มเติม เซตต่อไปนี้คือช่วงจำนวนจริงใด

1. $A = \{\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}x \mid 0 < x < \pi\}$

2. $A = \{\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{n}x \mid 0 < x < \frac{\pi}{2}\}$

3. $A = \{\sum_{n=0}^{\infty}\sin^{n}x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$

ตัวอย่าง 12. กำหนด $f(x) = (\frac{3}{4})^x + (\frac{4}{3})^x$ และ $D_f = (-\infty,\infty)$

จงหาค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของฟังก์ชัน f

วิธีทำ ให้ $V = (\frac{3}{4})^x > 0$ ทุกค่า x เพราะฉะนั้น $V + \frac{1}{V} \geq 2$

$f(x) = (\frac{3}{4})^x + (\frac{4}{3})^x = V + \frac{1}{V} \geq 2$

เพราะว่า $f(0) = 2$ เพราะฉะนั้น 2 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f

ก่อนจบบทความนี้ขอสรุปกรณีทั่วไปเกี่ยวกับค่าของ $x + \frac{1}{x}$ ที่สำคัญดังนี้

1. $\{x + \frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\} = (2,\infty)$

ข้อพิสูจน์ กำหนดให้ $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} < 0$ ทุกค่า $0 < x < 1$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน ลดบนช่วง $(0, 1)$

เพราะว่า $2 < x + \frac{1}{x}$ และ $\lim_{x\to\infty} x + \frac{1}{x} = \infty$ เพราะฉะนั้น $2 < f(x) < \infty$

ให้ $y \in (2,\infty)$ เลือก $x = \dfrac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}$ จะได้ว่า $-1 < x < 1$ และ

$$f(x) = f\left(\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\right) = \frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2} + \frac{2}{y-\sqrt{y^2-4}}$$

$$= \frac{y^2-2y\sqrt{y^2-4}+y^2-4+4}{2(y-\sqrt{y^2-4})}$$

$$= y$$

เพราะฉะนั้น $R_f = (2,\infty)$

สรุป $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\,)\} = (2,\infty)$

2. $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x \le 1\} = [2,\infty)$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x < 1\,)\} = (2,\infty)$ และ $1 + \frac{1}{1} = 2$

เพราะฉะนั้น $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\,)\} = [2,\infty)$

3. $\{x+\frac{1}{x} \mid 0 < x < \infty\} = [2,\infty)$

ในทำนองเดียวกัน

4. $\{\sin x+\frac{1}{\sin x} \mid 0 < \sin x < 1\} = (2,\infty)$
5. $\{\sin x+\frac{1}{\sin x} \mid 0 < \sin x \le 1\} = [2,\infty)$
6. $\{\sin x+\frac{1}{\sin x} \mid 0 < x \le \frac{\pi}{2}\} = [2,\infty)$
7. $\{\cos x+\frac{1}{\cos x} \mid 0 < \cos x < 1\} = (2,\infty)$
8. $\{\cos x+\frac{1}{\cos x} \mid 0 < \cos x \le 1\} = [2,\infty)$
9. $\{\cos x+\frac{1}{\cos x} \mid 0 < \cos x \le 1\} = [2,\infty)$

10. $\{\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} \mid -\frac{\pi}{2} < \cos x < \frac{\pi}{2}\} = [2,\infty)$

11. $\{\tan x + \frac{1}{\tan x} \mid 0 < \tan x < \infty\} = [2,\infty)$

12. $\{\log_2 x + \log_x 2 \mid x > 1\} = [2,\infty)$

13. $\{|z| + \frac{1}{|z|} \mid z \in C$ และ $z \neq 0\} = [2,\infty)$

14. $\{|z| + \frac{1}{|z|} \mid |z| \leq 1$ และ $z \neq 0\} = [2,\infty)$

15. $\{a^x + a^{-x} \mid -\infty < x < \infty\} = [2,\infty)$

แบบฝึกหัด

1. ถ้า $x + \frac{1}{x} = 23$ แล้ว $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ เท่ากับเท่าใด
2. ถ้า $\cos x + \frac{1}{\cos x} = 3$ แล้ว $\cos^3 x + \sec^3 x$ เท่ากับเท่าใด
3. กำหนด $f(x) = x + \frac{1}{x} + x^2 + \frac{1}{x^2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ และ $D_f = (0,1)$ แล้ว R_f คือเซตใด
4. ถ้า $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{4}$ แล้ว $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots$
   มีค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด
5. ถ้า $4 \leq x \leq 10$ แล้ว $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \ldots$
   มีค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด
6. เซต $A = \{x \in R-\{0\} \mid 2 \leq |x| + \frac{1}{|x|}\}$ เท่ากับช่วงจำนวนจริงใด
7. เซต $A = \{x \in R-\{0\} \mid 2 \leq |x| + \frac{1}{|x|} \leq 4\}$ เท่ากับช่วงจำนวนจริงใด
8. เซต $A = \{x \in R-\{0\} \mid 2 \leq |x| - \frac{1}{|x|}\}$ เท่ากับช่วงจำนวนจริงใด
9. กำหนด $f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x + \sin^5 x$

$A = \{f(x) \mid x \in [0,2\pi]\}$ เท่ากับช่วงจำนวนจริงใด

10. กำหนด $f(x+\frac{1}{x}) = x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$ จงหาสูตร f(x) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [0,4]

เฉลยแบบฝึกหัด(แบบย่อ)

1. $(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})^2 = x+2+\frac{1}{x} = 25$

2. $\cos^3x+\sec^3x = \cos^3x+\frac{1}{\cos^3x}$

$$= (\cos x+\frac{1}{\cos x})(\cos^2x-\cos x\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\cos^2x})$$

$$= (\cos x+\frac{1}{\cos x})(\cos^2x-1+\frac{1}{\cos^2x})$$

$$= 3(\cos^2x+2\frac{1}{\cos^2x}-3)$$

$$= 3((\cos x+\frac{1}{\cos x})^2-3)$$

$$= 18$$

3. เพราะว่า $0<x<1$ เพราะฉะนั้น $2<x+\frac{1}{x}<\infty$

$$2<x^2+\frac{1}{x^2}<\infty$$

$$2<\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}<\infty$$

เพราะฉะนั้น $R_f = (6,\infty)$

4. ให้ $f(x) = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots = \frac{1}{1+x}$

$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$ ทุกค่า x เมื่อ $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ลดบนช่วง $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{4}$

สรุป $f(-\frac{1}{2}) = 2$ เป็นค่าสูงสุดสัมบรูณ์

$f(\frac{1}{4}) = \frac{4}{5}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบรูณ์

5. $f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - .... = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$

$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ ทุกค่า x เมื่อ $4 \le x \le 10$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

สรุป $f(4) = \frac{4}{5}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบรูณ์

$f(10) = \frac{10}{11}$ เป็นค่าสูงสุดสัมบรูณ์

6. เพราะว่า $|x| > 0$ เพราะฉะนั้น $|x| + \frac{1}{|x|} \ge 2$

สรุป $A = \{x \in R - \{0\} \mid 2 \le |x| + \frac{1}{|x|}\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

7. เพราะว่า $2 \le |x| + \frac{1}{|x|}$ เสมอ เพราะฉะนั้นพิจารณาเฉพาะ $|x| + \frac{1}{|x|} \le 4$

เมื่อ $x > 0$;

$$|x| + \frac{1}{|x|} \le 4$$

$$x + \frac{1}{x} \le 4$$

$$x^2 + 1 \le 4x$$

$$x^2 - 4x + 1 \le 0$$

$$\frac{4 - \sqrt{16-4}}{2} \le x \le \frac{4 + \sqrt{16-4}}{2}$$

$$2 - \sqrt{3} \le x \le 2 + \sqrt{3}$$

เมื่อ $x < 0$;

$$|x| + \frac{1}{|x|} \le 4$$

$$-x - \frac{1}{x} \le 4$$

$$0 \le 4 + x + \frac{1}{x}$$

$$0 \le x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{-4-\sqrt{16-4}}{2} \le x \le \frac{-4+\sqrt{16-4}}{2}$$

$$-2-\sqrt{3} \le x \le -2+\sqrt{3}$$

สรุป $A = [-2-\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}] \cup [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$

8. $x > 0$; $2 \le |x| - \frac{1}{|x|}$

$$2 \le x - \frac{1}{x}$$

$$0 \le x^2 - 2x - 1$$

$x \le \frac{2-\sqrt{4+4}}{2}$ หรือ $\frac{2+\sqrt{4+4}}{2} \le x$

$x \le 1-\sqrt{2}$ หรือ $1+\sqrt{2} \le x$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $1+\sqrt{2} \le x$

$x < 0$; $2 \le |x| - \frac{1}{|x|}$

$$2 \le -x + \frac{1}{x}$$

$$0 \le x^2 + 2x - 1$$

$x \le \frac{-2-\sqrt{4+4}}{2}$ หรือ $\frac{-2+\sqrt{4+4}}{2} \le x$

$x \le -1-\sqrt{2}$ หรือ $-1+\sqrt{2} \le x$

เพราะว่า $x < 0$ เพราะฉะนั้น $x \le -1-\sqrt{2}$

สรุป $A = (-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, \infty)$

9. เหมือนตัวอย่าง 10 $A = [0,6]$

10. กำหนด $f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$ จงหาสูตร f(x) ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง [0,4]

10. $f(x+\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$

$$f(x) = f(1+(x-1)) = f(1 + \frac{1}{(\frac{1}{x-1})})$$

$$= 1 + \frac{1}{(\frac{1}{x-1})} + \frac{1}{(\frac{1}{x-1})^2} + \frac{1}{(\frac{1}{x-1})^3}$$

$$= 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3$$

$$= x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 2 = 3(x - \frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3} > 0$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง [0,4] ดังนั้น

$$f(0) \le f(x) \le f(4)$$

$$0 \le f(x) \le 40$$

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องบนช่วงและทั่วถึงบนช่วง [0,4] เพราะฉะนั้น $R_f = [0,40]$

สรุป 0 เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f และ 40 เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f

เสริมประสบการณ์การแก้ปัญหาจากง่ายไปหายาก

1. ค.ร.น. ของ 6 และ 15 เท่ากับเท่าใด
2. ค.ร.น. ของ 42 , 60 และ 96 เท่ากับเท่าใด
3. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,100\}$ จงหาสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{x \in U \mid$ ค.ร.น.$(6, x) = 6\}$

   $B = \{x \in U \mid$ ค.ร.น.$(15, x) = 15\}$
4. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{x \in U \mid$ ค.ร.น.$(6, x) = 6\}$

   $B = \{x \in U \mid$ ค.ร.น.$(15, x) = 45\}$
5. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,100\}$ จงหาสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 2\}$

   $B = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 4\}$

   $C = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 8\}$

   $D = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 18\}$
6. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 2\}$

   $B = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 4\}$

   $C = \{(x,y) \in U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y) = 18\}$
7. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต

   $A = \{\{(x,y,z) \in U \times U \times U \mid$ ค.ร.น.$(x,y,z) = 1125\}$

ติดตามอ่านแนวคิดได้ใน *เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิก* เล่มต่อไป

การหาค่า x และ y ที่ทำให้ 13 หาร 123x12y3 ลงตัว

ลักษณะของปัญหาจากง่ายไปหายากเช่น เมื่อ x เป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์จะมีค่าเป็นอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ 3 หาร x ลงตัว คำตอบก็คือ x = 0,3,6,9,.... ต่อไปเมื่อเราเจาะจงว่า x เป็นจำนวนเต็มหนึ่งหลัก(บางครั้งเรียกว่าเลขโดด digit number) จะได้ว่าค่าของ x ที่เป็นไปได้คือ x = 0,3,6,9 เท่านั้น ในปัญหาต่อๆ ไป x จะหมายถึงสมาชิกของเซต {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} เพื่อการคิดหาคำตอบจะได้มีเงื่อนไขที่รัดกุมมากยิ่งขึ้น

ข้อตกลง 4x หมายถึงจำนวนเต็มสองหลัก เช่น 45 เมื่อ x = 5

x4x หมายถึงจำนวนเต็มสามหลัก เช่น 343 เมื่อ x = 3

4xy หมายถึงจำนวนเต็มสองหลัก เช่น 457 เมื่อ x = 5 และ y = 7

คำถาม x เป็นอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ 4x หารด้วย 3 ลงตัว

คำตอบ โดยการแทนค่า x = 0,1,2,...,8,9 จะได้ว่า 42,45,48 เท่านั้นที่ 3 หารลงตัว

เพราะฉะนั้น x = 2,5,8

คำถาม x เป็นอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ 4x4 หารด้วย 3 ลงตัว

คำตอบ โดยการแทนค่า x = 0,1,2,...,8,9 และทำการหารยาวจะได้ว่า 414 หารด้วย 3 ลงตัว 424 หารด้วย 3 ไม่ลงตัว การทำแบบนี้จะเสียเวลามาก ดังนั้นจึงขอแนะนำวิธีต่อไปนี้

4x4 = 400 + 10(x) + 4

= 399 + 1 + 9(x) + x +3 + 1

= (399 + 3 + 9(x)) + (x + 1 + 1)

$= (402 + 9(x)) + (x + 2)$

$= 3(134 + 3(x)) + (x + 2)$

เพราะว่า 3 หาร 4x4 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ 3 หาร $3(134 + 3(x)) + (x + 2)$ ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ 3 หาร $(x + 2)$ ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ $x = 1,4,7$

เพราะฉะนั้น x ที่ทำให้ 3 หาร 4x4 ลงตัวคือ $x = 1,4,7$

หมายเหตุ เหตุผลสำคัญที่ใช้ในการทำโจทย์ข้อนี้คือ

ถ้า $a | b$ และ $a | c$ แล้ว $a | (b + c)$

ถ้า $a | b$ และ $a | c$ แล้ว $a | (b - c)$

ถ้า $a | (b + c)$ และ $a | c$ แล้ว $a | b$

ถ้า $a | (b - c)$ และ $a | c$ แล้ว $a | b$

เพราะว่า 3 หาร $3(134 + 3(x)) + (x + 2)$ ลงตัว และ 3 หาร $3(134 + 3(x))$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร $(x + 2)$ ลงตัว

ข้อตกลง 4x หมายถึงจำนวนเต็มสองหลัก

4(x) หมายถึงผลคูณ 4 กับ x

ตัวอย่าง 1. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 7 หาร 7x777 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด เมื่อตัวเลขมากขึ้นการตั้งหารยาวจริงๆจะเป็นเรื่องเสียเวลามาก ดังนั้นจึงควรใช้เหตุผลของการหารลงตัวจะดีกว่า

$7x777 = 70000 + 1000(x) + 700 + 70 + 7$

$= 70777 + 1000(x)$

$= 7(10111) + (994 + 6)(x)$

$= 7(10111) + 7(142)(x) + 6(x)$

$= 7(10111 + 142(x)) + 6(x)$

$7 \mid (7x777) \quad \longleftrightarrow \quad 7 \mid 7(10111 + 142(x)) + 6(x)$

$\longleftrightarrow \quad 7 \mid 6(x)$

$\longleftrightarrow \quad 7 \mid x$

$\longleftrightarrow \quad x = 0,7$

สรุป x มีสองค่าเท่านั้นคือ 0 และ 7

หมายเหตุ เหตุผลสำคัญที่ใช้คือ ถ้า $a \mid bc$ และ $a \mid b$ แล้ว $a \mid c$
ดังนั้นเมื่อ $7 \mid 6(x)$ และ $7 \nmid 6$ จึงต้องได้ว่า $7 \mid x$ แน่นอน

ตัวอย่าง 2. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}$

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 7 หาร x44x ลงตัวเท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

ตอบ 1.

แนวคิด $x44x = 1000(x) + 400 + 40 + x$

$= 440 + 1001(x)$

$= 7(62) + 6 + 7(143)(x)$

$= 7(62 + 143(x)) + 6$

สรุป 7 หาร x44x เหลือเศษ 6 ทุกค่า x

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 7 หาร x44x ลงตัวมีค่าเท่ากับ 0

คำถามในลักษณะต่อไป แทนที่จะถามเกี่ยวกับการหารลงตัว เราจะถามในลักษณะของการเหลือเศษ ตัวอย่างเช่น

ตัวอย่าง 3. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 8 หาร 13x13x เหลือเศษ 3 เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

ตอบ 2.

แนวคิด $13x13x = 130000 + 1000(x)\ 130 + x$

$= 130130 + 1001(x)$

$= 8(16266) + 2 + (8(125) + 1)(x)$

$= 8(16266\ 125(x)) + x + 2$

8 หาร 13x13x เหลือเศษ 3 $\longleftrightarrow$ 8 หาร $13x13x - 3$ ลงตัว

$\longleftrightarrow$ 8 หาร $8(16266\ 125(x)) + x + 2 - 3$ ลงตัว

$\longleftrightarrow$ 8 หาร $8(16266\ 125(x)) + x - 1$ ลงตัว

$\longleftrightarrow$ 8 หาร $x - 1$ ลงตัว

$\longleftrightarrow x = 1,9$

สรุปจำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 8 หาร 13x13x เหลือเศษ 3 เท่ากับ 2

ตัวอย่าง 4. กำหนด $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

จำนวนเต็มบวก 123x12y3 มีกี่จำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว

1. 10 2. 12 3. 14 4. 16

ตอบ 3.

แนวคิด $123x12y3 = 12301203 + 1000(x) + 10(y)$

$= 7(1757314) + 5 + (7(142) + 6)(x) + 7(y) + 3(y)$

$= 7(1757314 + 142(x) + 1(y)) + 5 + 6(x) + 3(y)$

$7 \mid 123x12y3 \longleftrightarrow 7 \mid 7(1757314 + 142(x) + 1(y)) + 5 + 6(x) + 3(y)$

$\longleftrightarrow 7 \mid (5 + 6(x) + 3(y))$

$$\longleftrightarrow 7 \mid (5 + 7(x) - x + 3(y))$$

$$\longleftrightarrow 7 \mid (5 - x + 3(y))$$

ต่อไปทำการแจงกรณีตามค่าของ x และ y กับ $5 - x + 3(y)$

$y := 0 .. 9$

$x := 0 .. 9$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31
2	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
3	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29
4	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28
5	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
6	-1	2	5	8	11	14	17	20	23	26
7	-2	1	4	7	10	13	16	19	22	25
8	-3	0	3	6	9	12	15	18	21	24
9	-4	-1	2	5	8	11	14	17	20	23

ตารางแสดงเศษเหลือของการหาร $5 - x + 3(y)$ ด้วย 7

$y := 0 .. 9$

$x := 0 .. 9$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5	1	4	0	3	6	2	5	1	4
1	4	0	3	6	2	5	1	4	0	3
2	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
3	2	5	1	4	0	3	6	2	5	1
4	1	4	0	3	6	2	5	1	4	0
5	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6
6	-1	2	5	1	4	0	3	6	2	5
7	-2	1	4	0	3	6	2	5	1	4
8	-3	0	3	6	2	5	1	4	0	3
9	-4	-1	2	5	1	4	0	3	6	2

สรุป (x,y) ที่ทำให้ $7 \mid (5 - x + 3(y))$ ลงตัวคือ (0,3),(1,1),(1,8),(2,6),(3,4),(4,2),(4,9),(5,0),(5,7),(6,4),(7,3),(8,1),(8,8) และ (9,6) รวมทั้งหมด 14 ตัว

123x12y3 = 12301233,12311213,12311283,12321263,12331243,12341223
12341293,12351203,12351273,12361243,12371233,12381213
12381283,12391263

ตัวอย่าง 5. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}$

A เป็นจำนวนเต็ม 6 หลักและสามหลักสุดท้ายเหมือนกันโดยที่ A = 523xxx

ถ้า 7 และ 2 หาร A ลงตัว แล้ว A เท่ากับเท่าใด

ตอบ A = 523222

แนวคิด
$$
\begin{aligned}
523xxx &= 523000 + 111(x) \\
&= 7(74714) + 2 + 105(x) + 6(x) \\
&= 7(74714) + 2 + 7(15)(x) + 6(x) \\
&= 7(74714 + 15(x)) + 2 + 6(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
7 \mid 523xxx &\longleftrightarrow 7 \mid 7(74714 + 15(x)) + 2 + 6(x) \\
&\longleftrightarrow 7 \mid (2 + 6(x)) \\
&\longleftrightarrow x = 2,9
\end{aligned}
$$

เพราะว่า 523xxx หารด้วย 28ลงตัว เพราะฉะนั้น A = 523222

ตัวอย่าง 6. กำหนด $x,y \in \{0,1,2,3,\ldots,8,9\}$

A เป็นจำนวนเต็ม 5 หลักโดยที่ A = 123xy

ถ้า 7 และ 9 หาร A ลงตัว แล้ว A เท่ากับเท่าใด

ตอบ A = 12348

แนวคิด 123xy = 12300 + 10(x) + y

พิจารณากรณี 7 | 123xy

$123xy = 12300 + 10(x) + y$

$= 7(1757) + 1 + 7(x) + 3(x) + y$

$= 7(1757 + x) + 1 + 3(x) + y$

$7 \mid 123xy \longleftrightarrow 7 \mid 7(1757 + x) + 1 + 3(x) + y$

$\longleftrightarrow 7 \mid (1 + 3(x) + y)$

ตาราง แสดงเศษเหลือจากการหาร 1 + 3x + y ด้วย 7

Y

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3
1	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
2	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2
3	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5
4	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1
5	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
6	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0
7	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3
8	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
9	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2

สรุป $P = \{(x,y) \mid 7 \mid 123xy\}$

$= \{(0,6),(1,3),(2,0),(2,7),(3,4),(4,1),(4,8),(5,5),(6,2),(6,9),(7,6),(8,3),(9,0),(9,7)\}$

พิจารณากรณี 9 | 123xy

$123xy = 12300 + 10(x) + y$

$= 9(1366) + 6 + 10(x) + y$

$= 9(1366) + 6 + 9(x) + x + y$

$= 9(1366 + x) + 6 + x + y$

$9 \mid 123xy \longleftrightarrow 9 \mid 9(1366 + x) + 6 + x + y$

$\longleftrightarrow 9 \mid (6 + x + y)$

ตาราง แสดงเศษเหลือจากการหาร $6 + x + y$ ด้วย 9

Y

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6
1	7	8	0	1	2	3	4	5	6	7
2	8	0	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	0
4	1	2	3	4	5	6	7	8	0	1
5	2	3	4	5	6	7	8	0	1	2
6	3	4	5	6	7	8	0	1	2	3
7	4	5	6	7	8	0	1	2	3	4
8	5	6	7	8	0	1	2	3	4	5
9	6	7	8	0	1	2	3	4	5	6

สรุป $Q = \{(x,y) \mid 9 \mid 123xy\}$

$= \{(0,3),(1,2),(3,0),(3,9),(4,8),(5,7),(6,6),(7,5),(8,4),(9,3)\}$

$P \cap Q = \{(x,y) \mid 7 \mid (1 + 3(x) + y)$ และ $9 \mid (6 + x + y)\}$

$= \{(4,8)\}$

สรุป $A = 12348$

แนวคิดที่สำคัญของของการแก้ปัญหาข้างต้นสามารถใช้ฟังก์ชัน mod ช่วยในการแก้ปัญหาจะสะดวกมากขึ้นดังนี้

บทนิยาม $x \equiv y \bmod z$ หมายความว่า $z \mid (x - y)$

หรือ y เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร x ด้วย z

ตัวอย่างเช่น $10 \equiv 4 \bmod 6, 13 \equiv 2 \bmod 11, 25 \equiv 4 \bmod 21, 32 \equiv 0 \bmod 2$

สมบัติของ mod ที่ช่วยในการแก้ปัญหา

1. $a_1 \equiv b_1 \bmod c$ และ $a_2 \equiv b_2 \bmod c \rightarrow a_1 + a_2 \equiv (b_1 + b_2) \bmod c$

2. ห.ร.ม.$(k,z) = d$ จะได้ $kx \equiv ky \bmod z \rightarrow x \equiv y \bmod (\frac{z}{d})$

   ห.ร.ม.$(k,z) = 1$ จะได้ $kx \equiv ky \bmod z \rightarrow x \equiv y \bmod z$

3 $x \equiv y \bmod z$ และ $y \equiv w \bmod z \rightarrow x \equiv w \bmod z$

4. $x \equiv y \bmod z \rightarrow y \equiv x \bmod z$

5. $x \equiv 1 \bmod z \rightarrow x^n \equiv 1 \bmod z$

ตัวอย่างเช่น $20 \equiv 2 \bmod 3$ และ $16 \equiv 1 \bmod 3$ จะได้ $36 \equiv 3 \bmod 3$

$5 \equiv 1 \bmod 4$ จะได้ $5^4 \equiv 1 \bmod 4$

จะได้ $625 \equiv 1 \bmod 4$

$35 \equiv 25 \bmod 10$ จะได้ $7 \equiv 5 \bmod 2$

$35 \equiv 7 \bmod 4$ จะได้ $5 \equiv 1 \bmod 4$

ตัวอย่าง 7. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

x เป็นอะไรได้บ้างจึงจะทำให้ 7 หาร 12x ลงตัว

ตอบ $x = 6$

แนวคิด $12x = 120 + x$

7 หาร 12x ลงตัวหมายความว่า $12x \equiv 0 \bmod 7$

$$\begin{aligned} 12x &\equiv (120 + x) \bmod 7 \\ &\equiv 120 \bmod 7 + x \bmod 7 \\ &\equiv 1 \bmod x + x \bmod 7 \\ &\equiv (1 + x) \bmod 7 \end{aligned}$$

เพราะว่า $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ เพราะฉะนั้น $x = 6$

ตัวอย่าง 8. กำหนด $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ 7 หาร 7x777 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

ตอบ $x = 0,7$

แนวคิด $7x777 = 70777 + 1000(x)$

7 หาร 7x777 ลงตัวหมายความว่า $7x777 \equiv 0 \bmod 7$

$7x777 \equiv (70777 + 1000(x)) \bmod 7$

$\equiv 70777 \bmod 7 + 1000(x) \bmod 7$

$\equiv 0 \bmod x + (7(142) + 6)(x) \bmod 7$

$\equiv 7(142) \bmod 7 + 6(x) \bmod 7$

$\equiv 0 \bmod 7 + 6(x) \bmod 7$

$\equiv 6(x) \bmod 7$

เพราะว่า $x \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ เพราะฉะนั้น $x = 0,7$

ตัวอย่าง 9. กำหนด $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$

จำนวนค่าของ x4y ที่ทำให้ 11 หาร x4y ลงตัวเท่ากับเท่าใด

ตอบ 9 ตัว

แนวคิด $x4y = 100(x) + 40 + y$

11 หาร x4y ลงตัวหมายความว่า $x4y \equiv 0 \bmod 11$

$x4y \equiv (100(x) + 40 + y) \bmod 11$

$\equiv 100(x) \bmod 11 + 40 \bmod 11 + y \bmod 11$

$\equiv 99(x) \bmod 11 + x \bmod 11 + 7 \bmod 11 + y \bmod 11$

$\equiv x \bmod 11 + 7 \bmod 11 + y \bmod 11$

$\equiv (x + 7 + y) \bmod 11$

เพราะว่า $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ เพราะฉะนั้น 11 หาร $x + 7 + y$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $x + 7 + y = 11,22$ สรุป $x + y = 4$ หรือ 15 เท่านั้นคือ $(x,y) = (0,4),(1,3),(2,2),(3,1),(4,0),(6,9),97,8),(8,7),(9,6)$ มีทั้งหมด 9 ตัว

ตัวอย่าง 10. กำหนด $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ จำนวนค่าของ 123x12y3 ที่ทำให้ 13 หาร 123x12y3 ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 7 ค่า

แนวคิด $123x12y3 = 12300000 + 10000(x) + 1200 + 10(y) + 3$

$= 12301203 + 10000(x) + 10(y)$

13 หาร 123x12y4 ลงตัวหมายความว่า $123x12y4 \equiv 0 \bmod 13$

$123x12y4 \equiv (12301203 + 10000(x) + 10(y)) \bmod 13$

$\equiv 12301203 \bmod 13 + 10000(x) \bmod 13 + 10(y) \bmod 13$

$\equiv 12301198 \bmod 13 + 5 \bmod 13 + 9997(x) \bmod 13 + 3(x) \bmod 13$

$+ 10(y) \bmod 13$

$\equiv 5 \bmod 13 + 3(x) \bmod 13 + 10(y) \bmod 13$

$\equiv (5 + 3(x) + 10(y)) \bmod 13$

$0 \bmod 13 \equiv (5 + 3(x) + 10(y)) \bmod 13$

ตาราง แสดงเศษเหลือจากการหาร $5 + 3x + 10y$ ด้วย 13 Y

X

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5	2	12	9	6	3	0	10	7	4
1	8	5	2	12	9	6	3	0	10	7
2	11	8	5	2	12	9	6	3	0	10
3	1	11	8	5	2	12	9	6	3	0
4	4	1	11	8	5	2	12	9	6	3
5	7	4	1	11	8	5	2	12	9	6
6	10	7	4	1	11	8	5	2	12	9
7	0	10	7	4	1	11	8	5	2	12
8	3	0	10	7	4	1	11	8	5	2
9	6	3	0	10	7	4	1	11	8	5

เพราะว่า $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ เพราะฉะนั้น 13 หาร $5 + 3(x) + 10(y)$ เมื่อ $(x,y) = (0,6),(1,7),(2,8),(3,9),(7,0),(8,1),(9,2)$ มีทั้งหมด 7 ค่า

ตัวอย่าง 11. กำหนด $x,y \in \{0,1,2,3,...,8,9\}$ จำนวนค่าของ 12x12y ที่ทำให้ 3 และ 7 หาร 12x12y ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 12 ค่า

แนวคิด $12x12y = 120000 + 1000(x) + 120 + y$

$\equiv 120120 + 1000(x) + y$

3 หาร 12x12y ลงตัวหมายความว่า $12x12y \equiv 0 \bmod 3$

$12x12y \equiv (120120 + 1000(x) + y) \bmod 3$

$\equiv 120120 \bmod 3 + 1000(x) \bmod 3 + y \bmod 3$

$\equiv x \bmod 3 + y \bmod 3$

$\equiv (x + y) \bmod 3$

ตาราง แสดงเศษเหลือจากการหาร $x + y$ ด้วย 3

X \ Y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
1	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
2	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
3	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
4	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
5	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
6	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0
7	1	2	0	1	2	0	1	2	0	1
8	2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
9	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0

7 หาร 12x12y ลงตัวหมายความว่า $12x12y \equiv 0 \bmod 7$

$12x12y \equiv (120120 + 1000(x) + y) \bmod 7$

$\equiv 120120 \bmod 7 + 1000(x) \bmod 7 + y \bmod 7$

$\equiv 0 \bmod 3 + 994(x) \bmod 7 + 6(x) \bmod 7 + y \bmod 7$

$\equiv (6(x) + y) \bmod 7$

ตาราง แสดงเศษเหลือจากการหาร $6x + y$ ด้วย 7

Y

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2
1	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1
2	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0
3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	6
4	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5
5	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
6	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3
7	0	1	2	3	4	5	6	0	1	2
8	6	0	1	2	3	4	5	6	0	1
9	5	6	0	1	2	3	4	5	6	0

x,y ที่ทำให้ 7 หาร 6(x) + y ลงตัว และ 3 หาร x + y ลงตัว คือ

(x,y) = (0,0),(1,6),(1,8),(2,9),(3,3),(4,3),(5,9),(6,6),(7,0),(8,1),(8,6),(9,9)

มีทั้งหมด 12 ค่า

แบบฝึกหัด

กำหนด x,y ∈ {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

1. จงหาจำนวนค่าของ 7x ที่ทำให้ 3 หาร 7x ลงตัว
2. จงหาจำนวนค่าของ 7x7 ที่ทำให้ 11 หาร 7x7 ลงตัว
3. จงหาจำนวนค่าของ 7xx7 ที่ทำให้ 7 หาร 7xx7 ลงตัว
4. จงหาจำนวนค่าของ 7xy7 ที่ทำให้ 7 หาร 7xy7 ลงตัว
5. จงหาจำนวนค่าของ x77y ที่ทำให้ 3 และ 7 หาร x77y ลงตัว
6. จงหาจำนวนค่าของ 3x ที่หารด้วย 4 แล้วเหลือเศษ 3
7. จงหาจำนวนค่าของ 3x3 ที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2
8. จงหาจำนวนค่าของ 3xy3 ที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2
9. จงหาจำนวนค่าของ 3xx3 ที่หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 3
10. จงหาจำนวนค่าของ 3xxyy3 ที่หารด้วย 7 แล้วเหลือเศษ 3
11. จงหาจำนวนค่าของ 3xx3 ที่หาร 5 แล้วเหลือเศษ 3 และหาร 3 เหลือเศษ 2
12. จงหาจำนวนค่าของ 3xy3 ที่หาร 5 แล้วเหลือเศษ 3 และหาร 3 เหลือเศษ 2

เสริมประสบการณ์การแก้ปัญหาจากง่ายไปหายาก

1. ห.ร.ม. ของ 40 และ 150 เท่ากับเท่าใด
2. ห.ร.ม. ของ 42 , 60 และ 96 เท่ากับเท่าใด
3. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,100\}$ จงหาสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(12, x) = 6\}$

   $B = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(30, x) = 15\}$
4. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(12, x) = 6\}$

   $B = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(30, x) = 45\}$
5. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,100\}$ จงหาสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 2\}$

   $B = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 4\}$

   $C = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 8\}$

   $D = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 18\}$
6. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   $A = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 2\}$

   $B = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 4\}$

   $C = \{(x, y) \in U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y) = 18\}$
7. กำหนด $U = \{1,2,3,4,...,10000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต

   $A = \{(x, y, z) \in U \times U \times U \mid$ ห.ร.ม.$(x, y, z) = 30\}$

ติดตามอ่านแนวคิดได้ใน <u>*เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิก*</u> เล่มต่อไป

เสริมประสบการณ์การแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

กำหนด A เป็นเซตจำกัด r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A

r มีสมบัติ **สะท้อน** (reflexive) ก็ต่อเมื่อ $(x, x) \in r$ ทุกสมาชิก $x \in A$

r มีสมบัติ **สมมาตร** (symmetric) ก็ต่อเมื่อ

ทุกสมาชิก $x,y \in A$ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r$

r มีสมบัติ **ปฏิสมมาตร** (anti-symmetric) ก็ต่อเมื่อ

ถ้า $(x, y) \in r$ และ $(y, x) \in r$ แล้ว $x = y$

1. จงหาความสัมพันธ์ทั้งหมดบนเซต A = {1,2}
2. จงหาความสัมพันธ์ทั้งหมดบนเซต A = {1,2,3}
3. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสะท้อนบน A = {1,2,3}
4. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสมมาตรบน A = {1,2,3}
5. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติปฏิสมมาตรบน A = {1,2,3}
6. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสะท้อนบน A = {1,2,3,4}
7. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสมมาตรบน A = {1,2,3,4}
8. จงหาความสัมพันธ์ที่มีสมบัติปฏิสมมาตรบน A = {1,2,3,4}
9. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสะท้อนบน A = {1,2,3,4,5,6}
10. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสมมาตรบน A = {1,2,3,4,5}
11. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติปฏิสมมาตรบน A = {1,2,3,4}

กำหนด A = { 1, 2, 3, ... n }

12. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสะท้อนบน A
13. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสมมาตรบน A
14. จงหาจำนวนความสัมพันธ์ที่มีสมบัติปฏิสมมาตรบน A

ติดตามแนวคิดได้ใน <u>เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์</u> เล่มต่อไป

เสริมประสบการณ์การแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

บทนิยาม $n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ลำดับ $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ เรียกว่า **ผลแบ่งกั้นการบวก** ของ n

ก็ต่อเมื่อ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k = n$

ตัวอย่างเช่น $n = 1$ มีผลแบ่งกั้นการบวก คือ (1)

$n = 2$ มีผลแบ่งกั้นการบวก คือ (2), $(1,1)$

$n = 3$ มีผลแบ่งกั้นการบวก คือ (3), $(2,1)$, $(1,2)$, $(1,1,1)$

1. จงหาสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการบวกของ 5 }
2. จงหาสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการบวกของ 6 }
3. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการบวกของ 10 }

บทนิยาม $n, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

ลำดับ $A = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ เรียกว่า **ผลแบ่งกั้นการคูณ** ของ n

ก็ต่อเมื่อ $(a_1)(a_2)(a_3) \ldots (a_k) = n$

ตัวอย่างเช่น $n = 6$ มีผลแบ่งกั้นการคูณ คือ (6),$(3,2)$,$(2,3)$

$n = 8$ มีผลแบ่งกั้นการคูณ คือ (8),$(4,2)$,$(2,4)$,$(2,2,2)$

1. จงหาสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการคูณของ 30 }
2. จงหาสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการคูณของ 60 }
3. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการคูณของ 2^5 }
4. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต { A | A เป็นผลแบ่งกั้นการคูณของ $2^4 3^5$ }

ติดตามแนวคิดได้ใน เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์ เล่มต่อไป