คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16

คู่มือตัดตัวเลือก(ภาค 3)

เฉลยคณิตศาสตร์ ก & กข 2540

โดยใช้วิธีจริง vs. วิธีตัดตัวเลือก

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ISBN 974-89944-4-9

ดำรงค์ ทิพย์โยธา
คณิตศาสตร์ปรนัย (เล่มที่ 16) / ดำรงค์ ทิพย์โยธา
คู่มือตัดตัวเลือก (ภาค 3) เฉลย
คณิตศาสตร์ กข. 2540 และ คณิตศาสตร์ ก. 2540
โดยใช้ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ISBN 974-89944-4-9

พิมพ์ครั้งที่ 1 จำนวน 2000 เล่ม พ.ศ. 2540

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
โทร. 2183980,2187000 โทรสาร 2554441

ศูนย์หนังสือจุฬาฯ ที่ศาลาพระเกี้ยว เปิดบริการ จันทร์ – ศุกร์ ๘.๓๐ – ๑๘.๓๐ น.
เสาร์ ๐๙.๐๐ – ๑๔.๐๐ น.
ศูนย์หนังสือจุฬาฯ ที่สยามสแควร์ เปิดบริการทุกวัน เวลา ๐๙.๐๐ – ๑๙.๓๐ น.

พิมพ์ที่โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์ โทร. 4112765

คำนำ

คู่มือตัดตัวเลือก (ภาค 3) เล่มนี้รวบรวมแนวคิดและหลักการในการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการตัดตัวเลือกซึ่งนำมาให้นักเรียนได้ใช้กันนี้เกิดจากการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับข้อสอบต่างๆที่ผ่านมา การตัดตัวเลือกที่ได้รวบรวมแนวคิดไว้ในหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย สามารถทำข้อสอบทั้งคณิตศาสตร์ กข.2540 และ ก. 2540 ได้มากกว่า 25 คะแนนในแต่ละชุดข้อสอบ

สิ่งสำคัญที่นักเรียนควรนำไปใช้ให้เป็นประโยชน์กับการทำข้อสอบแบบปรนัยขณะที่นักเรียนใช้วิธีจริงทำข้อสอบขอให้นักเรียนฝึกหัดสังเกตตัวเลือกทั้งสี่ตัวไปด้วยเพราะว่าขณะที่เราแก้ปัญหาข้อสอบด้วยวิธีจริงนั้นเราอาจได้คำตอบโดยไม่ต้องทำให้เสร็จก็ได้ตัวอย่างเช่น กข.2540 ข้อ 10

การทำข้อสอบให้ถูกต้องสมบรูณ์ 100% เป็นสิ่งที่ผู้ออกข้อสอบทุกคนต้องการ อย่างไรก็ตามข้อผิดพลาดในการทำงานอาจเกิดขึ้นได้เสมอ ดังนั้นผู้ออกข้อสอบควรจะเตรียมพร้อมในการแก้ข้อผิดพลาดด้วยเช่น หากพบข้อใดไม่มีคำตอบให้นักเรียนแรเงาทั้ง 4 ตัวเลือก ซึ่งในการเฉลยข้อสอบ กข 2540 ผมคิดว่ามีความไม่สมบูรณ์ในข้อสอบหลายข้อเช่น

- ข้อสอบผิดอย่างชัดเจนเนื่องจากไม่มีตัวเลือกที่ถูกต้อง เช่น ข้อ 2,ข้อ 44
- ข้อสอบผิดที่เกิดจากการพิมพ์ผิดจนทำให้หาคำตอบไม่ได้เช่น ข้อ 2 ตอนที่ 3
- ข้อสอบที่มีความคลุมเครือยากที่จะสรุปคำตอบที่ถูกต้องได้เช่น ข้อ 28

หวังว่าข้อสอบคณิตศาสตร์ ก และ กข 2541 และข้อสอบ ENTRANCE แบบใหม่คงจะมีข้อผิดพลาดน้อยที่สุด หรือหากมีข้อผิดพลาดก็คงจะมีวิธีแก้ไขที่เป็นประโยชน์กับนักเรียนมากที่สุด พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

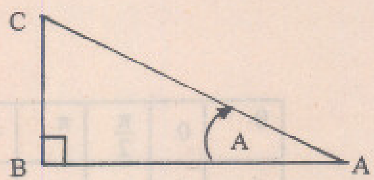
สวัสดีครับ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

วงกลมหนึ่งหน่วยช่วยท่านได้

การเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น เนื้อหาเกี่ยวกับตรีโกณมิติให้ความหมายของ sinA, cosA, tanA ในโดยใช้อัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

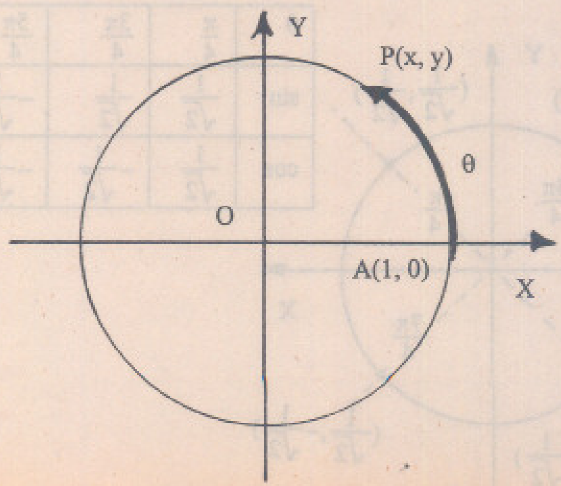


$$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{BC}{AB}$$

เมื่อเข้าสู่ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin, cos กำหนดด้วยพิกัดของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย



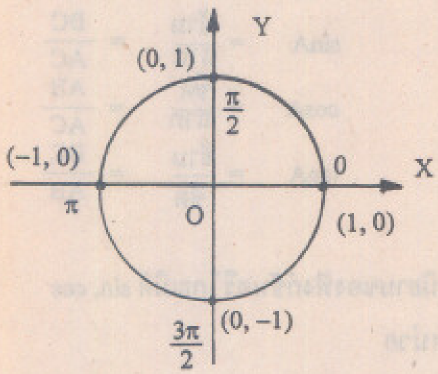
$P(x,y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ ที่วัดจากจุด A ไปยัง P ตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

โดยบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะได้ว่า $\cos\theta = x$ และ $\sin\theta = y$

<u>ข้อแนะนำ</u> การจำสูตร x มาก่อน y และ c มาก่อน s

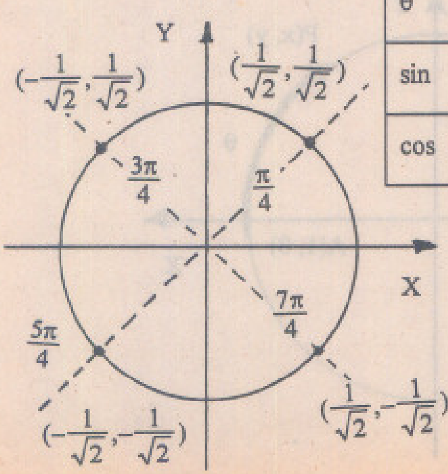
ดังนั้น x คู่กับ $\cos\theta$ และ y คู่กับ $\sin\theta$

จากการนิยามค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติแบบนี้ทำให้เรารู้ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติได้หลายมุม แม้กระทั่งมุมที่เป็นลบหรือมุมที่มีค่าเกิน 90° ตัวอย่างเช่น



θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin	0	1	0	−1
cos	1	0	−1	0

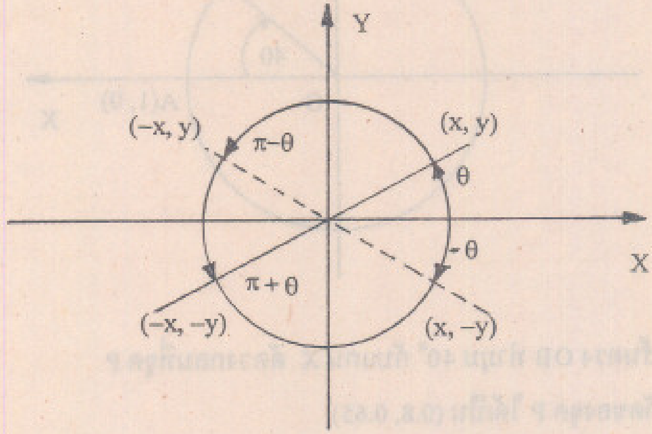
θ	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
sin	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
cos	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$



ประโยชน์ของวงกลมหนึ่งหน่วยอันดับแรกคือ ช่วยในการพิสูจน์สูตรฟังก์ชันตรีโกณมิติบางสูตรเช่น

1. P(x,y) เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 1$
ทำให้ได้ว่า $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

2. โดยใช้หลักการสมมาตรของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยจะทำให้ได้สูตรหลายสูตร เช่น



$\cos(\pi + \theta) = -x = -\cos\theta$ $\qquad$ $\sin(\pi + \theta) = -y = -\sin\theta$

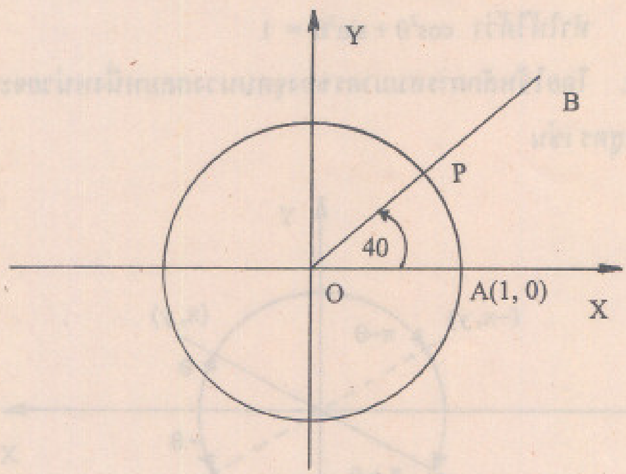
$\cos(-\theta) = x = \cos\theta$ $\qquad$ $\sin(-\theta) = -y = -\sin\theta$

$\cos(\pi - \theta) = -x = -\cos\theta$ $\qquad$ $\sin(\pi - \theta) = y = \sin\theta$

ในบทความนี้จะช่วยให้เห็นแนวทางของการใช้ประโยชน์ของวงกลมหนึ่งหน่วยเพื่อหาค่า sin, cosของมุม 43°, 27°, 67°, ... ซึ่งการประมาณค่า sin, cos ของมุมบางมุมสามารถช่วยในทำข้อสอบ ENTRANCE โดยใช้การตัดตัวเลือกได้ นอกจากนั้นวงกลมหนึ่งหน่วยยังสามารถประมาณค่า arcsin, arccos ได้อีกด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> การประมาณค่า $\sin 40^\circ$ และ $\cos 40^\circ$

1. เขียนวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย (ใช้ 1 นิ้วต่อ 1 หน่วย)



2. ลากเส้นตรง OB ทำมุม 40° กับแกน X ตัดวงกลมที่จุด P

3. วัดพิกัดของจุด P ได้เป็น (0.8, 0.65)

สรุปค่าประมาณของ $\cos 40^\circ = 0.80$ และ $\sin 40^\circ = 0.65$

<u>หมายเหตุ</u> ค่าจริง $\cos 40^\circ = 0.7660$ และ $\sin 40^\circ = 0.6428$

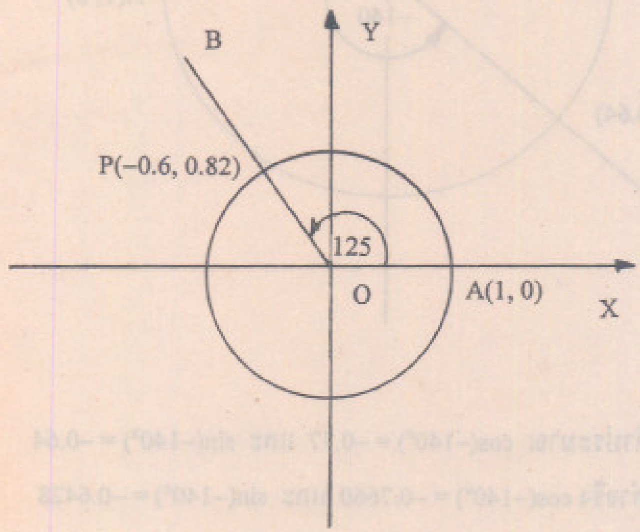
<u>ข้อแนะนำ</u> 1. การวัดความยาว 1 นิ้ว ควรใช้ 1 นิ้ว ชนิดที่แบ่งออกเป็น 10 ส่วน เพื่อที่ 1 ช่องจะได้มีค่าเท่ากับ 0.1

2. การวัดมุมควรใช้ครึ่งวงกลมช่วยในการวัด ไม่ควรใช้ไม้โปรในการวัดมุม เพราะว่าไม้โปรส่วนใหญ่จะวัดองศาแรกๆ ผิดเสมอด้วยเหตุผลจากความหนาของพลาสติกหรือความไม่มาตรฐานของไม้โปร

3. ถ้าต้องการความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง ให้ทำการทดสเกลโดยใช้ 10 เซนติเมตรต่อหนึ่งหน่วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงประมาณค่าของ $\cos125^\circ$ และ $\sin125^\circ$

1. เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย (ลองใช้ 10 cm. ต่อหนึ่งหน่วย)
2. ลาก OB ทำมุม 125° กับแกน X ตัดวงกลมที่จุด P
3. วัดพิกัดจุด P

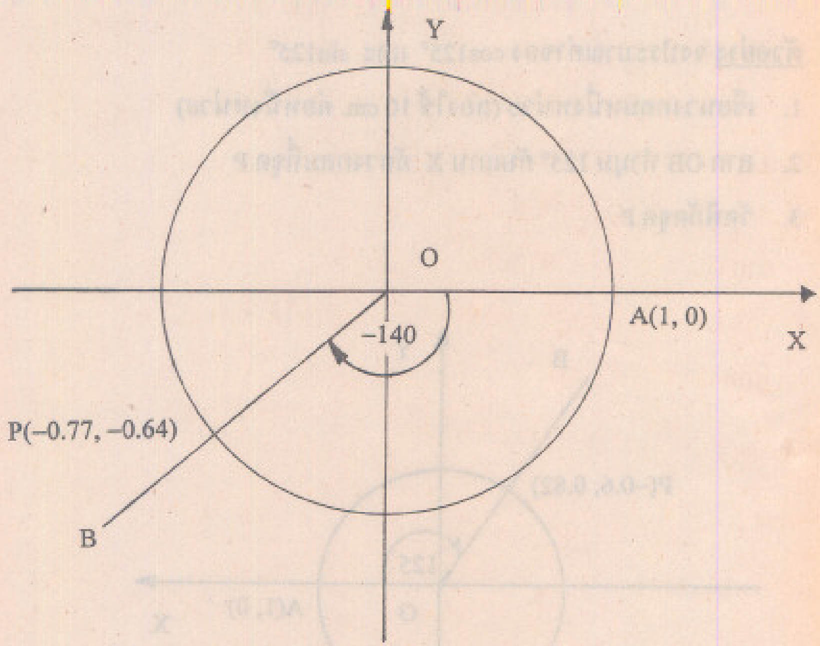


เพราะฉะนั้นค่าประมาณ $\cos125^\circ = -0.6$ และ $\sin125^\circ = 0.82$

หมายเหตุ ค่าจริง $\cos125^\circ = -0.5736$ และ $\sin125^\circ = 0.8192$

<u>ตัวอย่าง</u> จงประมาณค่า $\cos(-140^\circ)$ และ $\sin(-140^\circ)$

1. เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย (ใช้สเกล 10 cm.ต่อหนึ่งหน่วย)
2. ลาก OB ทำมุม -140° กับแกน X ตัดวงกลมที่จุด P วัดพิกัด P



เพราะฉะนั้น ค่าประมาณ $\cos(-140^\circ) = -0.77$ และ $\sin(-140^\circ) = -0.64$

หมายเหตุ ค่าจริง $\cos(-140^\circ) = -0.7660$ และ $\sin(-140^\circ) = -0.6428$

การประมาณค่า tanA แบบที่ 1

ใช้ค่าประมาณของ sin และ cos ช่วยในการประมาณค่าเช่น

$\tan 40^\circ = \dfrac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} = \dfrac{0.65}{0.8} = 0.8125$, ค่าจริง $\tan 40^\circ = 0.8391$

$\tan 125^\circ = \dfrac{\sin 125^\circ}{\cos 125^\circ} = \dfrac{0.82}{-0.6} = -1.37$, ค่าจริง $\tan 125^\circ = -1.4281$

$\tan(-140^\circ) = \dfrac{\sin(-140^\circ)}{\cos(-140^\circ)} = \dfrac{-0.64}{-0.77} = 0.83$, ค่าจริง $\tan(-140^\circ) = 0.8391$

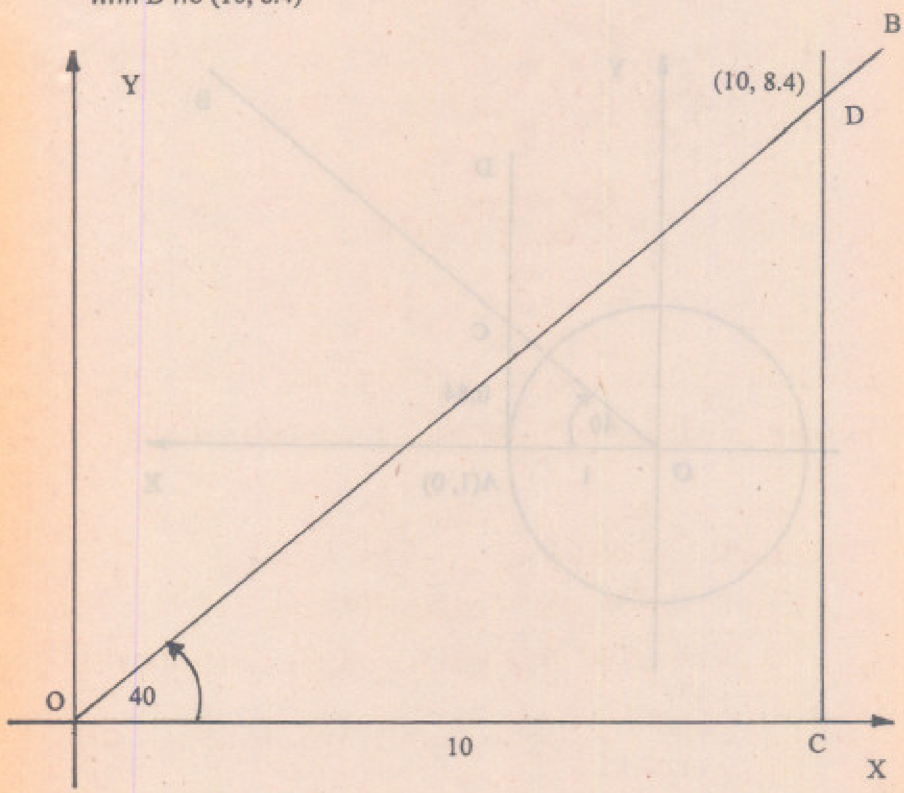
<u>การประมาณค่า tanA แบบที่ 2</u>

ใช้การวาดรูปช่วยจะได้ค่าที่ใกล้เคียงกว่าแบบแรก

<u>ตัวอย่าง</u> การประมาณค่า $\tan 40^\circ$ ทำการวาดรูปดังนี้

1. ลาก OB ทำมุมกับแกน X 40°
2. ลาก OC ยาว 10 cm. ตามแกน X ทางด้านขวา
3. ลาก DC ตั้งฉากกับแกน X วัดความยาว CD ได้ 8.4 cm.

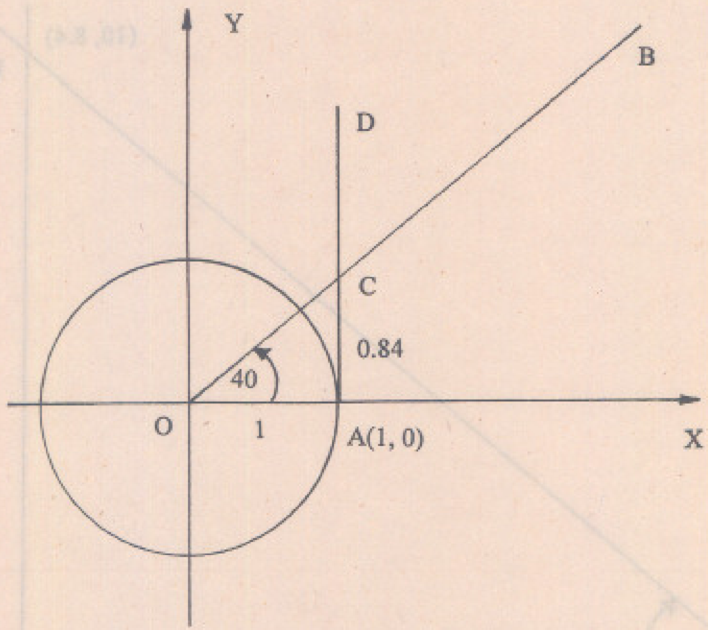
   พิกัด D คือ (10, 8.4)



$$\tan 40^\circ = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{CD}{OC} = \frac{8.4}{10} = 0.84$$

<u>การประมาณค่า tanA แบบที่ 3</u>

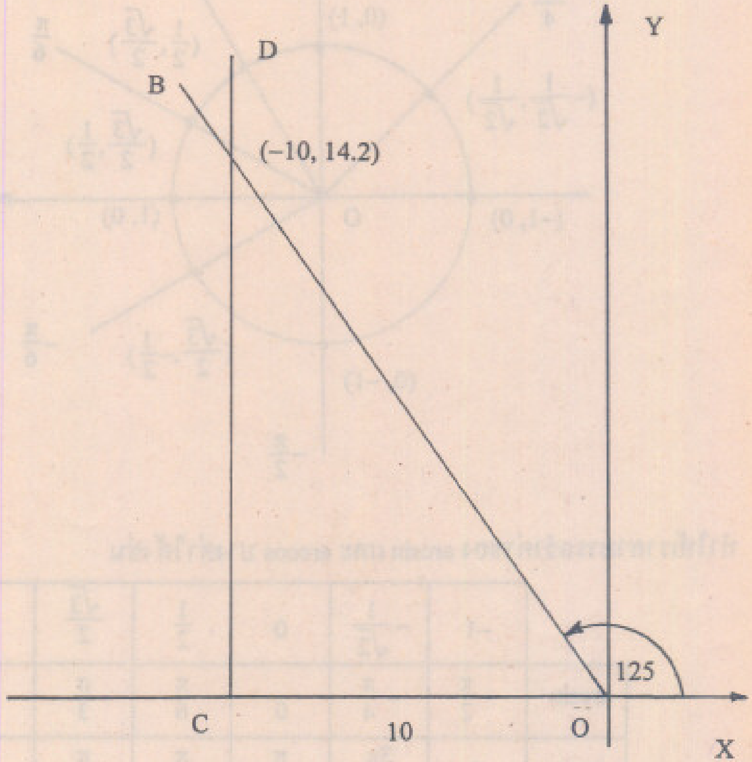
1. เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย (ในที่นี้ควรใช้ 10 cm.ต่อหนึ่งหน่วย)
2. ลากเส้น OB ทำมุม 40^o กับแกน X
3. ลากเส้น AD ตั้งฉากกับแกน X ตัด OB ที่จุด C
4. วัดความยาว AC ได้ 0.84



เพราะฉะนั้น $\tan 40^o = \tan A\hat{O}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{AC}{OA} = \frac{0.84}{1} = 0.84$

การประมาณค่า tan125°

1. ลาก OB ทำมุม 125° กับแกน X
2. ลาก OC ยาว 10 cm. ไปทางแกน X ด้านลบ
3. ลาก CD ตั้งฉากกับแกน X และตัด OB ที่จุด D
4. วัดพิกัดจุด D ได้เป็น (–10, 14.2)

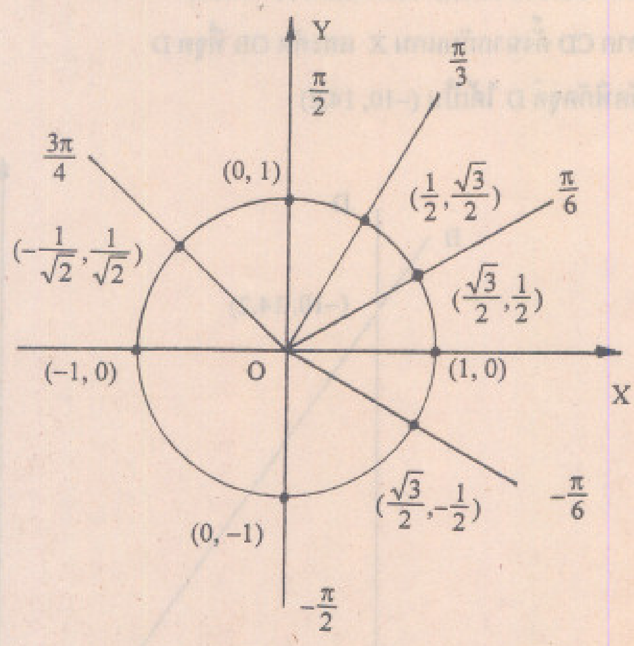


ค่าประมาณของ $\tan 125^\circ = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{CD}{OC} = \frac{14.2}{-10} = -1.42$

<u>สรุป</u> การประมาณค่า tan แบบที่ 2 เราทำโดยการวัดมุมจริงและให้ตัวหารมีค่าเป็น 10 cm. เสมอ แล้วนำค่าพิกัดที่ปรากฏในกราฟจริงมาหารกัน

การประมาณค่า arcsin และ arccos

ผลจากความสัมพันธ์ของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยและมุม



ทำให้เราสามารถจำค่าของ arcsin และ arccos บางค่าได้ เช่น

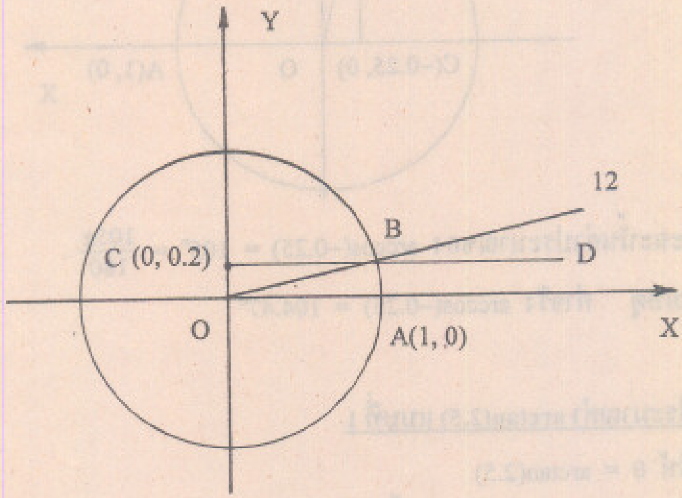
	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
arccos	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0

ในการทำข้อสอบบางครั้งเรามีความจำเป็นต้องประมาณค่า arcsin(0.2), arcsin(0.1), arcsin(−0.4), ... ซึ่งสามารถช่วยในการหาคำตอบของข้อสอบแบบตัวเลือกได้

<u>ตัวอย่าง</u> การหาค่าประมาณของ arcsin(0.2)

1. เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย (ใช้สเกลหนึ่งนิ้วต่อหนึ่งหน่วย)
2. เขียนจุด C(0, 0.2) ลาก CD ขนานกับแกน X ตัดวงกลมที่จุด B

   วัดมุม AOB ได้ 12°

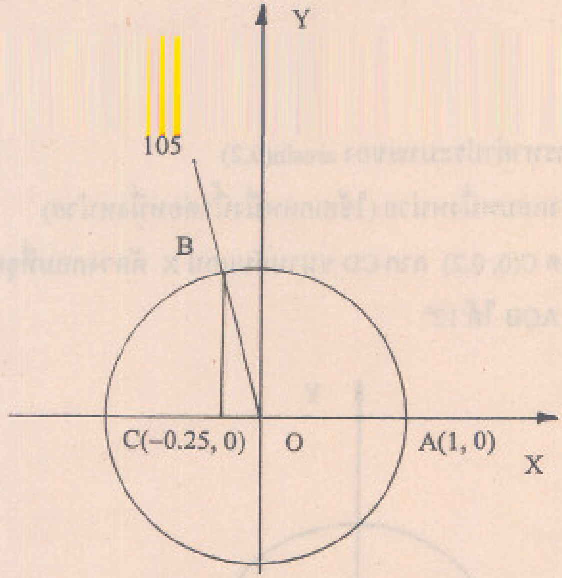


เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ arcsin(0.2) = $12^\circ = \frac{12\pi}{180}$ เรเดียน

หมายเหตุ ค่าจริง arcsin(0.2) = 11.536°

<u>ตัวอย่าง</u> การประมาณค่าของ arccos(–0.25)

1. เขียนวงกลม 1 หน่วย (ใช้สเกล 10 cm.ต่อหนึ่งหน่วยจึงจะเหมาะสมกับตัวเลข 0.25)
2. เขียนจุด C(–0.25, 0) บนแกน X ลากเส้นจากจุด C ตั้งฉากกับแกน X ไปตัดวงกลมที่จุด B
3. วัดมุม OAB ได้ 105°



เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ $\arccos(-0.25) = 105^\circ = \frac{105\pi}{180}$

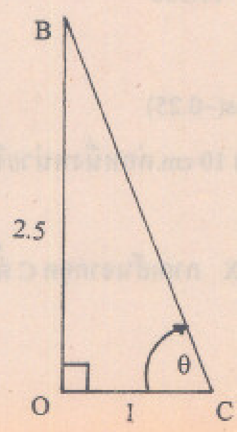
หมายเหตุ ค่าจริง $\arccos(-0.25) = 104.47^\circ$

<u>การประมาณค่า arctan(2.5) แบบที่ 1</u>

1. ให้ $\theta = \arctan(2.5)$

   $\tan\theta = 2.5 = \frac{2.5}{1} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

2. เขียนสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีด้านตรงข้ามมุม = 2.5, ด้านประชิดมุม = 1



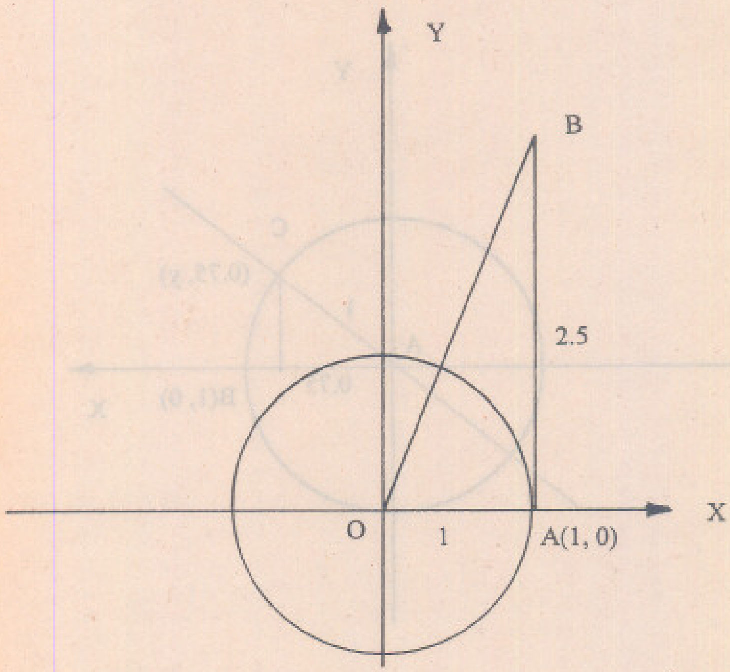
วัดมุม OCB ได้ 68^{o}

เพราะฉะนั้น arctan(2.5) มีค่าประมาณเท่ากับ 68^{o}

หมายเหตุ ค่าจริง arctan(2.5) = 68.198^{o}

การประมาณค่า arctan(2.5) แบบที่ 2

1. เขียนวงกลมหนึ่งหน่วยใช้สเกล 1 นิ้วต่อหนึ่งหน่วย
2. ลากเส้น AB ตั้งฉากกับแกน X ที่จุด A และ AB ยาว 2.5 นิ้ว
3. วัดมุม AOB ได้ 68^{o}



เพราะฉะนั้น arctan(2.5) มีค่าประมาณเท่ากับ 68^{o}

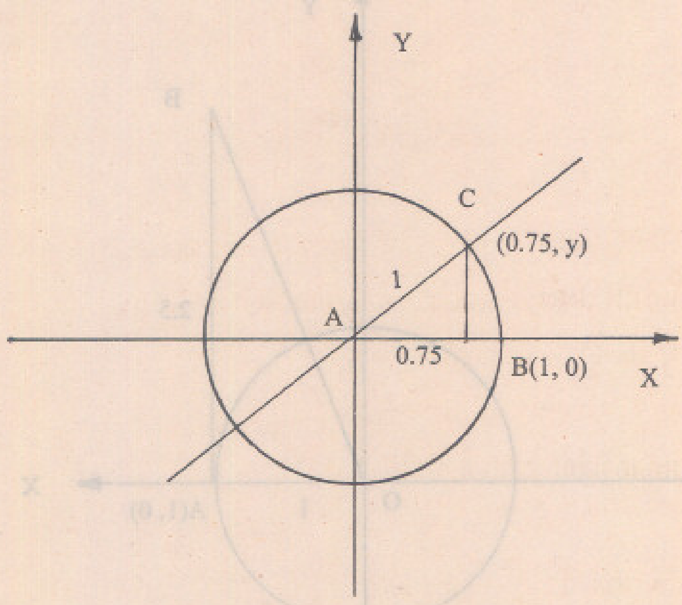
สรุปจากแนวทางที่กล่าวมาทั้งหมดจะเห็นได้ว่าวงกลมหนึ่งหน่วยสามารถประมาณค่า sin, cos, tan ของมุม และ arcsin, arccos, arctan ได้แน่นอน ต่อไปเรามาใช้ประโยชน์ของการประมาณค่าช่วยในการทำข้อสอบระดับ ม.ปลาย

ตัวอย่าง 1. (กข. 2539) ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{32}$ 2. $\frac{11}{16}$ 3. $\frac{9}{16}$ 4. $\frac{9}{12}$

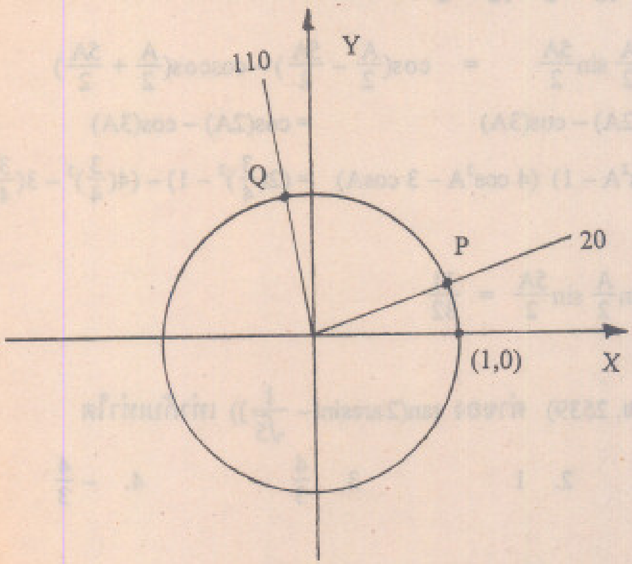
ตอบ 1.

แนวคิด $\cos A = \frac{3}{4} = 0.75 \rightarrow A = \arccos(0.75)$



วัดมุม $B\hat{A}C$ ได้ 40° เพราะฉะนั้น $A = 40^\circ$, $\frac{A}{2} = 20^\circ$ และ $\frac{5A}{2} = 100^\circ$

ต่อไปประมาณค่า sin20° และ sin100°



วัดพิกัดเฉพาะค่า y ของจุด P และ Q ได้ P(x, 0.95) และ Q(x, 0.35)

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของ sin20° = 0.35 และ sin110° = 0.95

สรุป $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = (0.35)(0.95) = 0.3325$

ค่าในตัวเลือก 2., 3. และ 4. มีค่ามากกว่า 0.5 ทั้งหมด

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3., 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 จากสูตร $\sin\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$ จะได้ว่า

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{3}{4})}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} < \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\sin\frac{5A}{2} \le 1$ เสมอ

เพราะฉะนั้น $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} \le \sin\frac{A}{2} < \frac{1}{2}$ แน่นอน

แต่ $\frac{11}{16} > \frac{1}{2}$, $\frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, $\frac{9}{12} > \frac{1}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

<u>**วิธีจริง**</u> $2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \cos(\frac{A}{2} - \frac{5A}{2}) - \text{coscos}(\frac{A}{2} + \frac{5A}{2})$

$= \cos(-2A) - \cos(3A) \qquad = \cos(2A) - \cos(3A)$

$= (2\cos^2A - 1)\ (4\cos^3A - 3\cos A) \quad = (2(\frac{3}{4})^2 - 1) - (4(\frac{3}{4})^3 - 3(\frac{3}{4}))$

$= \frac{11}{16}$

เพราะฉะนั้น $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$

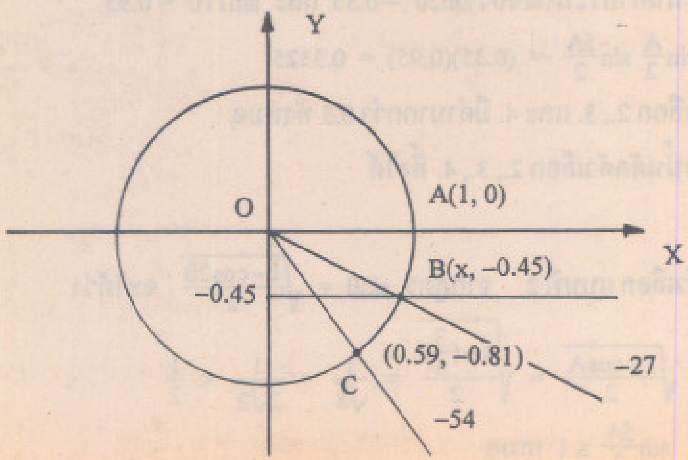
ตัวอย่าง 2. (กข. 2539) ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 1 3. $\frac{4}{3}$ 4. $-\frac{4}{3}$

ตอบ 4.

แนวคิด $-\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{-2.23}{5} = -0.446$ เราประมาณด้วย -0.45

เขียนจุด B(x, −0.45) ในควอดรันท์ที่ 4



วัดมุม AOB ได้ -27° เพราะฉะนั้น $2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = 2(-27^\circ) = -54^\circ$

การประมาณค่า $\tan(-54^\circ)$ ลากเส้น OC และ $A\hat{O}C = -54^\circ$

วัดพิกัด C ได้เป็น (0.59, −0.8) ดังนั้น $\sin(-54^\circ) = -0.81$, $\cos(-54^\circ) = 0.59$

$$\tan(-56^\circ) = \frac{\sin(-56^\circ)}{\cos(-56^\circ)} = \frac{-0.81}{0.59} = -1.37$$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

ข้อสังเกต การหาคำตอบโดยการวาดรูปจะมีหลายขั้นตอนที่นักเรียนสามารถตัดตัวเลือกไปได้เรื่อยๆ เช่น

1. เมื่อรู้ว่า $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = -27^\circ$ แสดงว่า $2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) = -54^\circ$

   เพราะฉะนั้น $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ ต้องมีค่าเป็นลบแน่นอน

   ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

2. เพราะว่า $\tan(-45^\circ) = -1$ เพราะฉะนั้น $\tan(-54^\circ) \neq -1$ แน่นอน

   ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จะเห็นได้ว่า นักเรียนยังไม่จำเป็นต้องทำขั้นตอนของการประมาณค่า $\tan(-45^\circ)$ ก็สามารถได้คำตอบที่ถูกต้องแล้ว

<u>**การตัดตัวเลือกโดยใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์**</u>

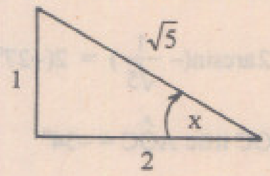
เพราะว่า $\sqrt{2} < \sqrt{5}$ เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$

เพราะว่า arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{2}}) < \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) < 0$

$$-\frac{\pi}{4} < \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) < 0 \text{ และ } -\frac{\pi}{2} < 2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}) < 0$$

เพราะฉะนั้น $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) < 0$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ และ $2\arctan x = \arctan(\frac{2x}{1-x^2})$



$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$x = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \tan\left(-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\tan\left(2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$= -\tan\left(2\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -\tan\left(\arcsin\left(\frac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2}\right)\right) = -\tan\left(\arcsin\left(\frac{4}{3}\right)\right) = -\frac{4}{3}$$

ตัวอย่าง 3. (กข. 37) ถ้า $f(x) = \sin x$ และ $g(x) = \arcsin 2x + 2\arcsin x$

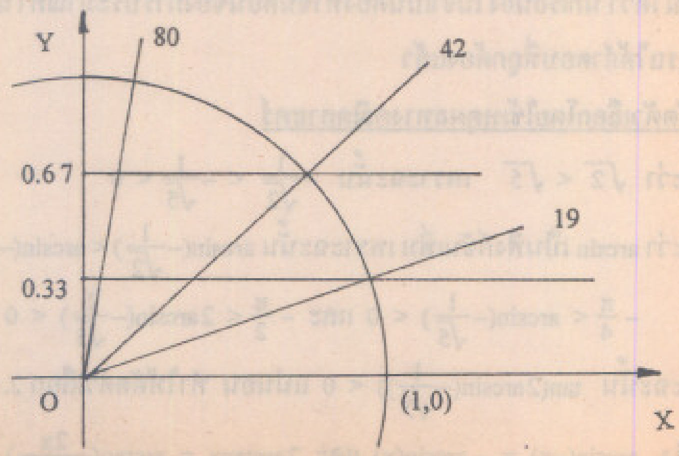
แล้วค่าของ $(f \circ g)(\frac{1}{3})$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{9}$ 2. $\frac{4}{9}(1+\sqrt{8})$ 3. $4\sqrt{2}+\frac{\sqrt{10}}{12}$ 4. $\frac{4}{23}(7+2\sqrt{10})$

ตอบ 4.

แนวคิด $g(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + 2\arcsin(\frac{1}{3})$

การประมาณค่ามุม $\arcsin(\frac{2}{3}) = \arcsin(0.67)$ และ $2\arcsin(0.33)$



จากการประมาณโดยรูปจะได้ $\arcsin(0.67) = 42^\circ$, $\arcsin(0.33) = 19$

ดังนั้น $g(\frac{1}{3}) = 42^\circ + 2(19^\circ) = 80^\circ$

$(f \circ g)(\frac{1}{3}) = f(g(\frac{1}{3})) = f(80^\circ) = \sin 80^\circ$

การประมาณค่า $\sin 80^\circ$ ด้วยวงกลมหนึ่งหน่วยจะได้ $\sin 80^\circ = 0.98$

ต่อไปประมาณค่าแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{4}{9} = 0.4444$
2. $\frac{2}{9}(1+\sqrt{8}) = \frac{2}{9}(1+2\sqrt{2}) = \frac{2}{9}(1+2(1.4)) = \frac{2}{9}(3.8) = 0.84$
3. $4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12} = 4(1.4) + \frac{3.16}{12} = 5.86$
4. $\frac{2}{27}(7+2\sqrt{10}) = \frac{2}{27}(7+2(3.16)) = \frac{2}{27}(13.32) = 0.98$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

หมายเหตุ เพราะว่า $f(x) = \sin x$ เพราะฉะนั้น $-1 \le f(x) \le 1$

แต่ตัวเลือก 3. มีค่ามากกว่า 1 ดังนั้น $f(g(x)) \neq 4\sqrt{2} + \frac{\sqrt{10}}{12}$ แน่นอน

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าการประมาณค่าจะทำให้ตัดตัวเลือก 3. ได้เร็วที่สุด

วิธีจริง จากสูตร $2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

$$g(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + 2\arcsin(\frac{1}{3}) = \arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(2(\frac{1}{3})\sqrt{1-\frac{1}{9}})$$

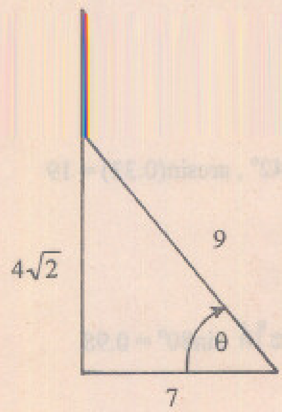
$$= \arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$$

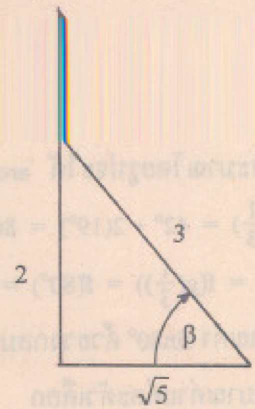
$$(f \circ g)(\frac{1}{3}) = f(g(\frac{1}{3})) = f(\arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))$$

$$= \sin(\arcsin(\frac{2}{3}) + \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))$$

$$= \sin(\arcsin(\frac{2}{3}))\cos(\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})) + \sin(\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9}))\cos(\arcsin(\frac{2}{3}))$$

$$= (\frac{2}{3})\cos(\arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})) + (\frac{4\sqrt{2}}{9})\cos(\arcsin(\frac{2}{3}))$$





$\sin\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos\theta = \dfrac{7}{9}$ $\qquad$ $\sin\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\theta = \arcsin(\frac{4\sqrt{2}}{9})$ $\qquad$ $\beta = \arcsin(\frac{2}{3})$

$\theta = \arccos(\frac{7}{9})$ $\qquad$ $\beta = \arccos(\frac{\sqrt{5}}{3})$

$$(f \circ g)(\tfrac{1}{3}) = (\tfrac{2}{3})\cos(\arccos(\tfrac{7}{9})) + (\tfrac{4\sqrt{2}}{9})\cos(\arccos(\tfrac{\sqrt{5}}{3}))$$

$$= (\tfrac{2}{3})(\tfrac{7}{9}) + (\tfrac{4\sqrt{2}}{9})(\tfrac{\sqrt{5}}{3}) = \frac{17}{27} + \frac{4\sqrt{10}}{27}$$

$$= \frac{2}{27}(7 + 2\sqrt{10})$$

ตัวอย่าง 4. (กข. 38) กำหนดให้ $\cos(\alpha + \beta) = \dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{10}$,

$\cos(\alpha - \beta) = \dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$ ค่าของ $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\dfrac{12\sqrt{3}}{25}$ $\qquad$ 2. $-\dfrac{6\sqrt{3}}{25}$ $\qquad$ 3. $\dfrac{6\sqrt{3}}{25}$ $\qquad$ 4. $\dfrac{12\sqrt{3}}{25}$

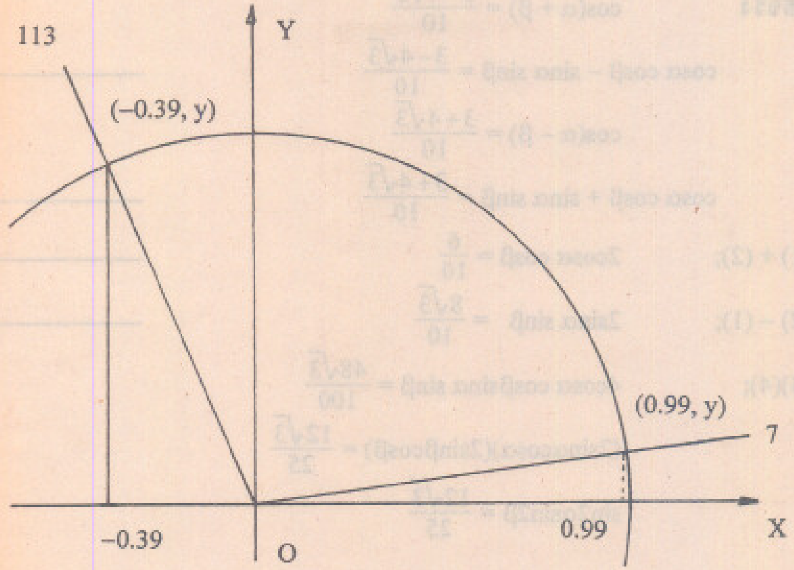
ตอบ 4.

แนวคิด $4\sqrt{3} = 4(1.732) = 6.928$ เราประมาณ $4\sqrt{3}$ ด้วย 6.9

ดังนั้น $\dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{10} = \dfrac{3 - 6.9}{10} = -0.39$ และ $\dfrac{3 + 4\sqrt{3}}{10} = \dfrac{3 + 6.9}{10} = 0.99$

เพราะฉะนั้น $\qquad \alpha + \beta = \arccos(\dfrac{3 - 4\sqrt{3}}{10}) = \arccos(-0.39)$

$$\alpha - \beta = \arccos(\frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}) = \arccos(0.99)$$



จากรูปจะได้ $\arccos(-0.39) = 113^o$ และ $\arccos(0.99) = 7^o$

เพราะฉะนั้น $\alpha + \beta = 113$ และ $\alpha - \beta = 7$

ดังนั้น $\alpha = 60$ และ $\beta = 57$ และ $2\alpha = 120$ และ $2\beta = 114$

$\sin 2\alpha = \sin 120 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sin 2\beta = \sin 114 = 0.93$ (ค่าประมาณที่ได้จากรูป)

เพราะฉะนั้น $\sin 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\sqrt{3}}{2}(0.93)$ มีค่าเป็นบวกทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ได้

เพราะว่า $\frac{\sqrt{3}}{2}(0.93) = \frac{1.732}{2}(0.93) > \frac{1}{2}$

แต่ $\frac{6\sqrt{3}}{25} = \frac{6(1.732)}{25} < \frac{1}{2}$ และ $\frac{12\sqrt{3}}{25} = \frac{12(1.732)}{25} > \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ข้อแนะนำ ไม่จำเป็นจริงๆอย่าคูณเลขออกมา พยายามใช้เหตุผล มากกว่า น้อยกว่า อย่างที่ทำให้ดูในข้อนี้

วิธีจริง $\cos(\alpha+\beta) = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$

$$\cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta = \frac{3-4\sqrt{3}}{10} \qquad \text{———(1)}$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

$$\cos\alpha\,\cos\beta + \sin\alpha\,\sin\beta = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} \qquad \text{———(2)}$$

(1) + (2); $2\cos\alpha\,\cos\beta = \frac{6}{10}$ ———(3)

(2) − (1); $2\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{8\sqrt{3}}{10}$ ———(4)

(3)(4); $4\cos\alpha\,\cos\beta\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{48\sqrt{3}}{100}$

$$(2\sin\alpha\cos\alpha)(2\sin\beta\cos\beta) = \frac{12\sqrt{3}}{25}$$

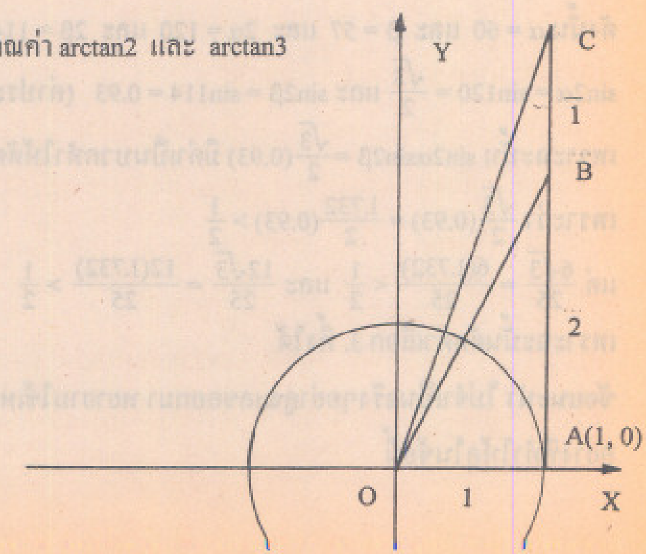
$$\sin2\alpha\sin2\beta = \frac{12\sqrt{3}}{25}$$

ตัวอย่าง 5. (โอลิมปิก 2537) ค่าของ arctan2 + arctan3 เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{\pi}{4}$ 2. $-\frac{3\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{3\pi}{4}$

ตอบ 4.

แนวคิด การประมาณค่า arctan2 และ arctan3



วัดมุม AOB ได้ 63° และ วัดมุม AOC ได้ 71°

เพราะฉะนั้น $\arctan 2 = 63^\circ$ และ $\arctan 3 = 71^\circ$

$\arctan 2 + \arctan 3 = 63 + 71 = 134$ มีค่าประมาณเท่ากับ $135 = \frac{3\pi}{4}$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

การตัดตัวเลือก $\arctan 2 > 0$ และ $\arctan 3 > 0$

เพราะฉะนั้น $\arctan 2 + \arctan 3 > 0$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า arctan เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ $2 > 1$ เพราะฉะนั้น $\arctan 2 > \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $\arctan 2 + \arctan 3 > \frac{\pi}{4}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง คำเตือนข้อสอบข้อนี้มีตัวลวงสำหรับคนรู้ความจริงไม่หมด

จากสูตร $\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \arctan(\frac{2+3}{1-(2)(3)}) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

คิดแบบนี้ผิดเพราะว่าต้องระวังเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของ arctan

เพราะว่า $0 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$ และ $0 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $0 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$

ดังนั้น $\arctan 2 + \arctan 3 = -\frac{\pi}{4}$ ต้องผิดแน่นอน

วิธีที่ถูกต้องต้องทำดังนี้ ให้ $A = \arctan 2$ และ $B = \arctan 3$

เพราะฉะนั้น $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2+3}{1-(2)(3)} = -1$

เพราะว่า $0 < \arctan 2 + \arctan 3 < \pi$ เพราะฉะนั้น $0 < A + B < \pi$

สรุป $A + B = -\frac{3\pi}{4}$ เพราะฉะนั้น $\arctan 2 + \arctan 3 = -\frac{3\pi}{4}$

ตัวอย่าง 6. (โอลิมปิก 2537) กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติ

ว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้วค่าของ $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{3}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$

$$\frac{6\sin A}{12} = \frac{4\sin B}{12} = \frac{3\sin C}{12}$$

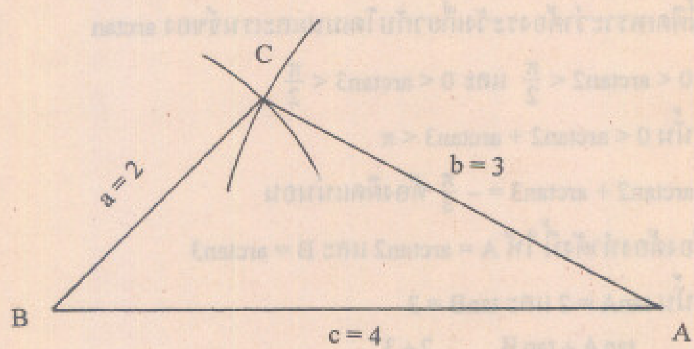
$$\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4} \qquad \text{———————(1)}$$

ขณะนี้ข้อสอบอยู่ในรูปแบบของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ

สามเหลี่ยมที่มีด้านและมุมสอดคล้องเงื่อนไข (1)

เพราะฉะนั้นเราเลือกสามเหลี่ยมที่มีด้าน $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$ ก็จะสามารถตัด

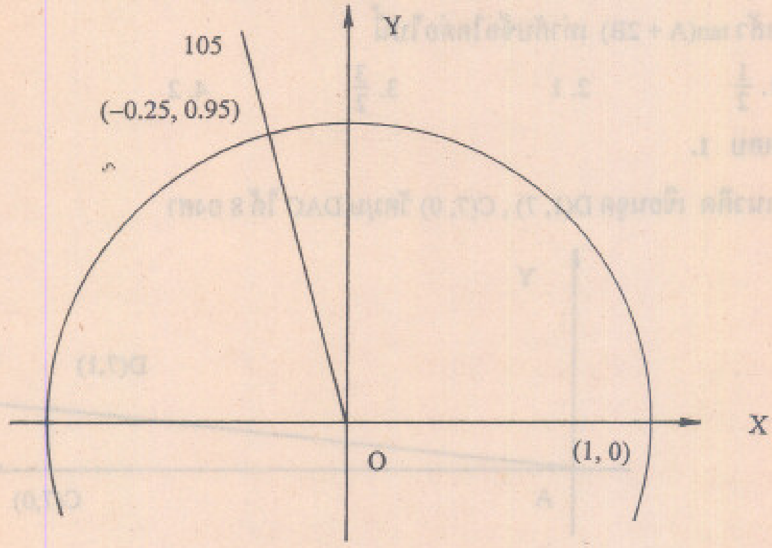
ตัวเลือกได้ ต่อไปวาดรูปสามเหลี่ยมที่มี $a = 2$, $b = 3$ และ $c = 4$



จากรูปวัดมุม C ได้ 105°

เพราะฉะนั้น $\cos C < 0$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

การประมาณค่า $\cos 105^\circ$



โดยการวัดจากรูปจะได้ $\cos 105^\circ = -0.25$ สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

หมายเหตุ การใช้เหตุผลอีกแบบหนึ่งคือ cos เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, \pi]$

เพราะฉะนั้น เมื่อ $90 < 105 < 120$

จะได้ว่า $\cos 90 > \cos 105 > \cos 120$

$$0 > \cos 105 > -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\cos 105 \neq -\frac{3}{4}$ เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้เหมือนกัน

วิธีจริง จากสมการ (1) $\frac{\sin A}{2} = \frac{\sin B}{3} = \frac{\sin C}{4}$

ให้ $a = 2k$, $b = 3k$ และ $c = 4k$ จากกฎของโคไซน์

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(2k)^2 + (3k)^2 - (4k)^2}{2(2k)(3k)} = \frac{4+9-16}{12} = -\frac{1}{4}$$

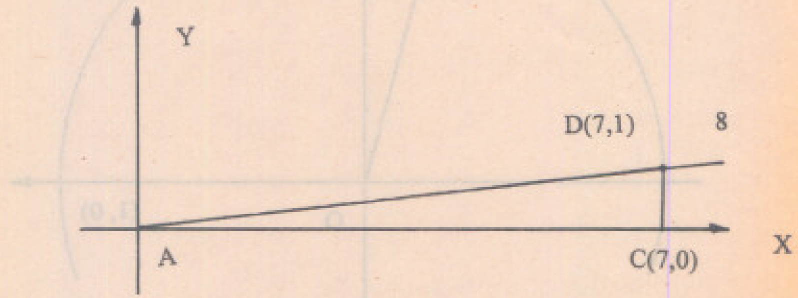
หมายเหตุ เลือก $a = 2, b = 3, c = 4$ ก็จะได้ $\cos C = -\frac{1}{4}$ เหมือนกัน

ตัวอย่าง 7. (กข 2536) ถ้า $\tan A = \frac{1}{7}$ และ $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$ เมื่อ A,B เป็นมุมแหลม แล้ว $\tan(A + 2B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

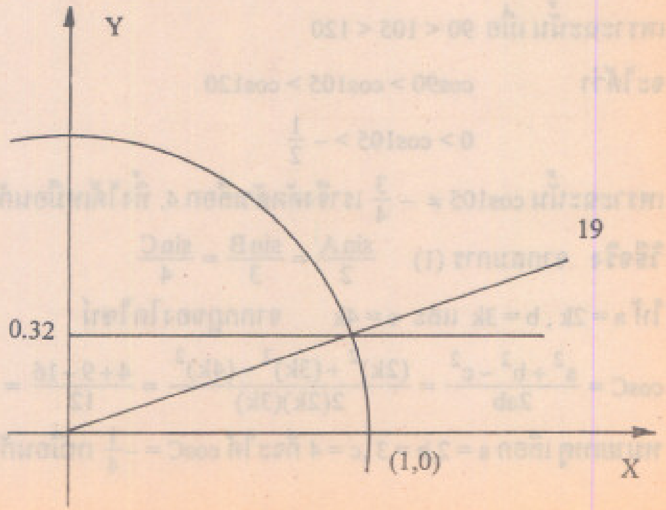
ตอบ 1.

แนวคิด เขียนจุด D(1, 7) , C(7, 0) วัดมุม DAC ได้ 8 องศา



เพราะฉะนั้น $\tan A = \frac{1}{7}$ และ $A = \arctan\frac{1}{7} = 8^\circ$

จาก $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3.2}{10} = 0.32$ เพราะฉะนั้น $B = \arcsin(0.32)$



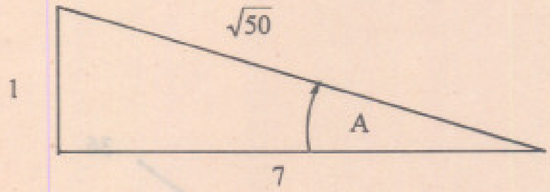
จากรูปจะได้ B = arcsin(0.32) = 19 องศา

เพราะฉะนั้น tan(A + 2B) = tan(8 + 2(19)) = tan46 ค่าประมาณเท่ากับ tan45 = 1

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

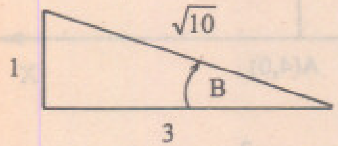
วิธีจริง โดยใช้อัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉาก

จาก $\tan A = \frac{1}{7}$



เพราะฉะนั้น $\sin A = \frac{1}{\sqrt{50}}$ และ $\cos A = \frac{7}{\sqrt{50}}$

จาก $\sin B = \frac{1}{\sqrt{10}}$



เพราะฉะนั้น $\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$ และ $\tan B = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1-\tan^2 B} = \frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2} = (\frac{2}{3})(\frac{9}{8}) = \frac{3}{4}$

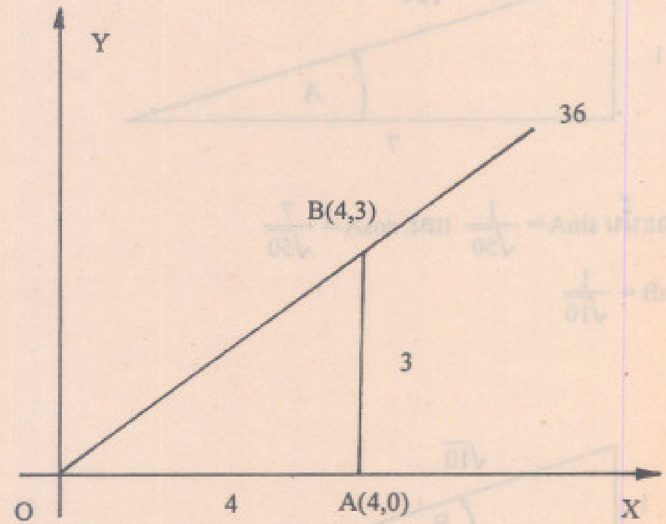
$$\tan(A + 2B) = \frac{\tan A + \tan 2B}{1 - \tan A \tan 2B} = \frac{(\frac{1}{7}) + (\frac{3}{4})}{1-(\frac{1}{7})(\frac{3}{4})} = \frac{(\frac{25}{28})}{(\frac{25}{28})} = 1$$

ตัวอย่าง 8. **(กข 2534)** ค่าของ $\sin\left(\frac{\arctan(\frac{3}{4})}{2}\right) + \cos(2\arcsin\frac{3}{5})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{6}{25}$ 2. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{6}{25}$ 3. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25}$ 4. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{7}{25}$

ตอบ 3.

แนวคิด การประมาณค่า $\arctan(\frac{3}{4})$ เขียนจุด (4, 3)



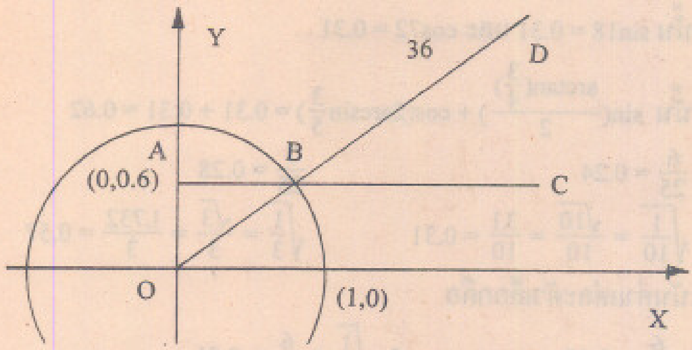
จากรูปวัดมุม AOB ได้ 36 องศา $\tan AOB = \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $\arctan(\frac{3}{4}) = 36$ องศา

การประมาณค่า $\arcsin\frac{3}{5}$ เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย plot จุด A(0, 0.6)

ลากเส้น AC ขนานกับแกน X ตัดวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด B ลากเส้น OB

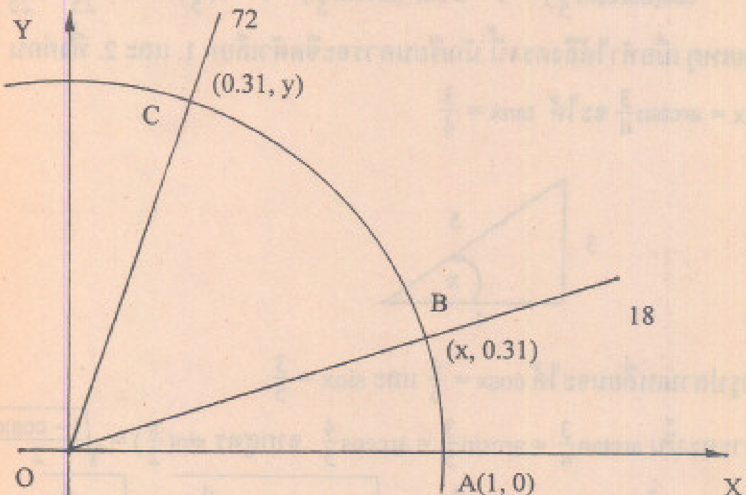
วัดมุม BOX ได้ 36 องศา



จากรูปวัดมุม BOX ได้ 36 องศา $\sin BOX = \frac{3}{5}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\frac{3}{5}) = 36$ องศา

$\sin(\frac{\arctan(\frac{3}{4})}{2}) = \sin(\frac{36}{2}) = \sin 18$ และ $\cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = \cos(2(36)) = \cos 72$



เขียนวงกลมหนึ่งหน่วย ลาก OB และ OC เพื่อทำให้ AOB = 18 และ AOC = 72

วัดพิกัดจุด B,C ได้เป็น B(x, 0.31) และ C(0.31, y)

เพราะฉะนั้น sin18 = 0.31 และ cos72 = 0.31

เพราะฉะนั้น $\sin(\frac{\arctan(\frac{3}{4})}{2}) + \cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = 0.31 + 0.31 = 0.62$

เพราะว่า $\frac{6}{25} = 0.24$ $\qquad \frac{7}{25} = 0.28$

$\sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{3.1}{10} = 0.31 \qquad \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.57$

เพราะฉะนั้นค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{6}{25} = 0.55$ $\qquad$ 2. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{6}{25} = 0.81$

3. $\sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25} = 0.59$ $\qquad$ 4. $\sqrt{\frac{1}{3}} + \frac{7}{25} = 0.85$

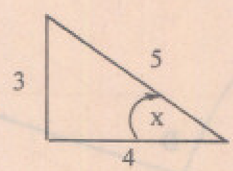
สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

วิธีจริง $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$\cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2\sin^2(\arcsin\frac{3}{5}) = 1 - 2(\frac{3}{5})^2 = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$$

หมายเหตุ เมื่อทำได้ถึงตรงนี้ นักเรียนควรจะขีดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งก่อน

เมื่อ $x = \arctan\frac{3}{4}$ จะได้ $\tan x = \frac{3}{4}$



จากรูปสามเหลี่ยมจะได้ $\cos x = \frac{4}{5}$ และ $\sin x = \frac{3}{5}$

เพราะฉะนั้น $\arctan\frac{3}{4} = \arcsin\frac{3}{5} = \arccos\frac{4}{5}$ จากสูตร $\sin(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$$\sin(\frac{\arctan(\frac{3}{4})}{2}) = \sin(\frac{\arccos(\frac{4}{5})}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos(\arccos(\frac{4}{5}))}{2}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{4}{5})}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}}$$

สรุป $\sin(\frac{\arctan(\frac{3}{4})}{2}) + \cos(2\arcsin\frac{3}{5}) = \sqrt{\frac{1}{10}} + \frac{7}{25}$

ตัวอย่าง 9. (กข 2534) ให้ L_1 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 36 = 0$

และ L_2 เป็นเส้นตรงที่มีสมการ $x - 2y - 5 = 0$ ถ้าให้ θ เป็นมุมแหลมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง L_1 และ L_2 แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

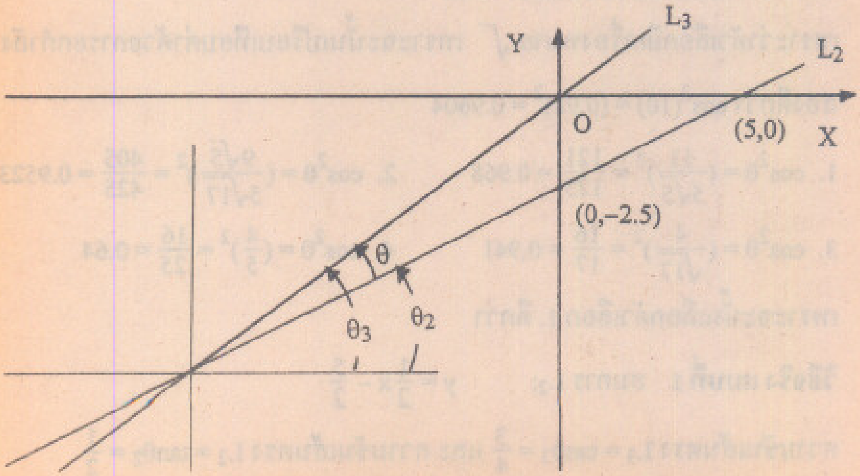
1. $\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$
2. $\cos\theta = \frac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{17}}$
3. $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$
4. $\cos\theta = \frac{4}{5}$

ตอบ 1.

แนวคิด วิธีที่เหมาะสมคือการใช้เหตุผลว่า ถ้า L_3 ขนานกับ L_1 แล้ว มุมระหว่าง L_2 กับ L_1 จะเท่ากับ มุมระหว่าง L_2 กับ L_3

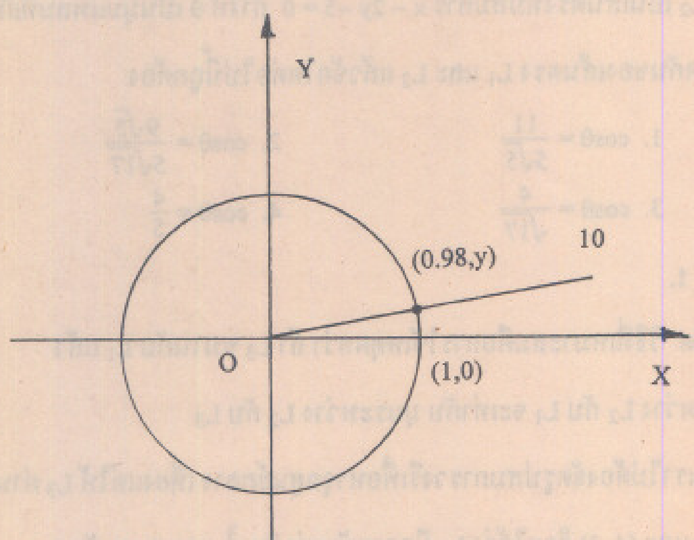
ดังนั้นเราไม่ต้องจัดรูปสมการวงรีเพื่อหาจุดศูนย์กลาง เพียงแต่ให้ L_3 ผ่านจุด (0, 0) และ (4, 3) ก็จะได้ว่า L_3 มีความชันเท่ากับ $\frac{3}{4}$ และขนานกับ L_1

การวาดกราฟเพื่อวัดมุม θ



จากรูปวัดมุมระหว่าง L_2 และ L_3 ได้เท่ากับ $\theta = 10^{\circ}$

การประมาณค่า cos10 โดยใช้วงกลมรัศมี 10 cm.



จะได้ว่าค่าประมาณของ cos10 = 0.98

เพราะว่าตัวเลือกมีเครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ เพราะฉะนั้นเปรียบเทียบค่าด้วยการยกกำลังสองดีกว่า $\cos^2(10) = (0.98)^2 = 0.9604$

1. $\cos^2\theta = (\frac{11}{5\sqrt{5}})^2 = \frac{121}{125} = 0.968$ 2. $\cos^2\theta = (\frac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{17}})^2 = \frac{405}{425} = 0.9523$

3. $\cos^2\theta = (\frac{4}{\sqrt{17}})^2 = \frac{16}{17} = 0.941$ 4. $\cos^2\theta = (\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25} = 0.64$

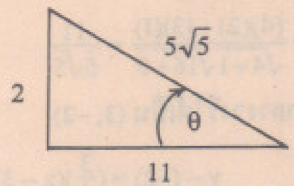
เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

วิธีจริง แบบที่ 1 สมการ L_2; $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

ความชันเส้นตรง $L_3 = \tan\theta_3 = \frac{3}{4}$ และ ความชันเส้นตรง $L_2 = \tan\theta_2 = \frac{1}{2}$

จากรูปจะได้ $\theta = \theta_3 - \theta_2$ เพราะฉะนั้น

$$\tan\theta = \tan(\theta_3 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_3 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_3\tan\theta_2} = \frac{(\frac{3}{4})-(\frac{1}{2})}{1+(\frac{3}{4})(\frac{1}{2})} = \frac{6-4}{8+3} = \frac{2}{11}$$



เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$

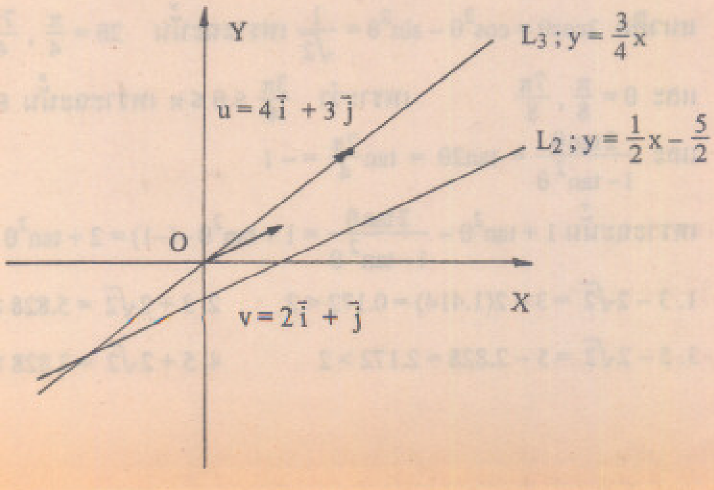
วิธีจริง แบบที่ 2. สมการเส้นตรง L ; $ax + by + c = 0$ และ $b \neq 0$

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

มีเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L คือเวกเตอร์ $b\bar{i} - a\bar{j}$

สมการ $L_3 ; y = \frac{3}{4}x$ เลือก $u = 4\bar{i} + 3\bar{j}$

สมการ $L_2 ; y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ เลือก $v = 2\bar{i} + \bar{j}$



θ = มุมระหว่าง L_1 กับ L_2

= มุมระหว่าง L_3 กับ L_2 (เพราะว่า L_3 ขนานกับ L_1)

= มุมระหว่าง u กับ v (เพราะว่า $u \,//\, L_3$ และ $v \,//\, L_2$)

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{|u||v|} = \frac{(4)(2)+(3)(1)}{\sqrt{4+1}\sqrt{16+9}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$

วิธีจริง แบบที่ 3. หาจุดศูนย์กลางวงรีได้เป็น (3, –2)

หาสมการเส้นตรง L_1 ได้เป็น $y-(-2) = (\frac{3}{4})(x-3)$

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{4}$$

เสร็จแล้วกลับไปทำตามวิธีที่ 1 ข้างต้น

ตัวอย่าง 10. (กข 2534) ถ้า $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$ แล้วค่าของ $1 + \tan^2\theta - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $3-2\sqrt{2}$ 2. $3+2\sqrt{2}$ 3. $5-2\sqrt{2}$ 4. $5+2\sqrt{2}$

ตอบ 3.

แนวคิด $2\cos\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เพราะฉะนั้น $2\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

และ $\theta = \frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}$ เพราะว่า $\frac{3\pi}{4} \le \theta \le \pi$ เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{7\pi}{8}$

และ $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan2\theta = \tan\frac{7\pi}{4} = -1$

เพราะฉะนั้น $1 + \tan^2\theta - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 1 + \tan^2\theta - (-1) = 2 + \tan^2\theta > 2$

1. $3-2\sqrt{2} = 3-2(1.414) = 0.172 < 2$ 2. $3+2\sqrt{2} = 5.828 > 2$

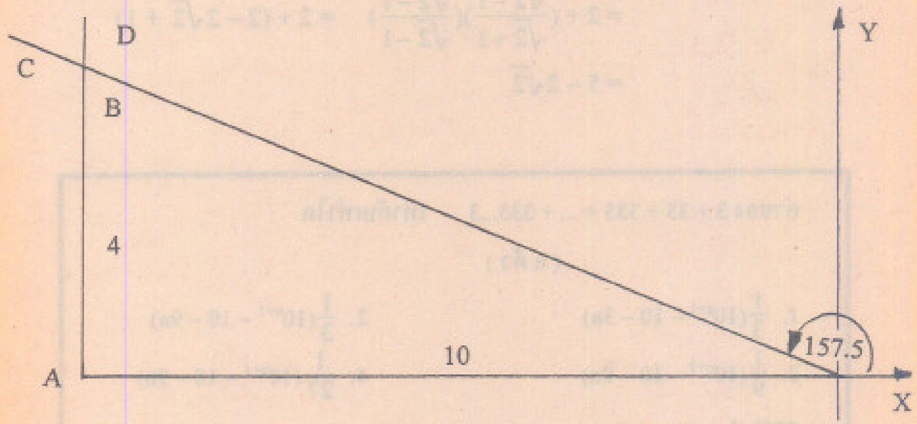
3. $5-2\sqrt{2} = 5-2.828 = 2.172 > 2$ 4. $5+2\sqrt{2} = 7.828 > 2$

หมายเหตุ เรายังไม่จำเป็นต้องคำนวน $\tan^2\theta$ ก็สามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้

การประมาณค่า $\tan\frac{7\pi}{8} = \tan\frac{7(180)^o}{8} = \tan 157.5^o$

1. ลาก OA ยาว 10 cm ลาก AD ตั้งฉากกับ OA

2. ลาก OC ที่ทำให้ AOC = 157.5 องศา ตัด AD ที่ B วัดระยะทาง AB ได้ 4 cm



จากรูป $\tan\frac{7\pi}{8} = \tan 157.5^o = \tan AOB = \frac{AB}{AO} = \frac{4}{-10} = -0.4$

$\tan^2(\frac{7\pi}{8}) = 0.16$

เพราะฉะนั้น $1+\tan^2\theta - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 1+\tan^2\theta-(-1) = 2+\tan^2\theta = 2.16$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

วิธีจริง เมื่อเราได้ $\theta = \frac{7\pi}{8}$ จะได้ว่า

$$1+\tan^2\theta - \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = 2+\tan^2\theta = 2+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= 2+\frac{(\frac{1-\cos2\theta}{2})}{(\frac{1+\cos2\theta}{2})} = 2+\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$$

$$= 2 + \frac{1-\cos 2(\frac{7\pi}{8})}{1+\cos 2(\frac{7\pi}{8})} \qquad = 2 + \frac{1-\cos\frac{7\pi}{4}}{1+\cos\frac{7\pi}{4}}$$

$$= 2 + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} \qquad = 2 + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$= 2 + (\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}) \qquad = 2 + (2 - 2\sqrt{2} + 1)$$

$$= 5 - 2\sqrt{2}$$

ค่าของ $3 + 33 + 333 + ... + \underbrace{333...3}_{(n\ \text{ตัว})}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{3}(10^{n+1} - 10 - 3n)$
2. $\frac{1}{3}(10^{n+1} - 10 - 9n)$
3. $\frac{1}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n)$
4. $\frac{1}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n)$

ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

แทนค่า n = 1 จะได้โจทย์มีค่าเท่ากับ 3 เมื่อแทนค่า n = 1 ในตัวเลือกจะได้

1. $\frac{1}{3}(10^{n+1} - 10 - 3n) = \frac{1}{3}(10^{1+1} - 10 - 3(1)) = \frac{87}{3}$
2. $\frac{1}{3}(10^{n+1} - 10 - 9n) = \frac{1}{3}(10^{1+1} - 10 - 9(1)) = 27$
3. $\frac{1}{9}(10^{n+1} - 10 - 9n) = \frac{1}{9}(10^{1+1} - 10 - 9(1)) = 9$
4. $\frac{1}{27}(10^{n+1} - 10 - 9n) = \frac{1}{27}(10^{1+1} - 10 - 9(1)) = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

ติดตามแนวคิดแบบนี้ได้ในคณิตศาสตร์ปรนัยทุกเล่ม

การตัดตัวเลือกอย่างรวดเร็ว

ในบทความนี้จะใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมที่สุดสำหรับข้อสอบข้อแต่ละข้อซึ่งเหตุผลที่ใช้เช่น

1. สมการพหุนามดีกรี 2 $x^2+Ax+B=0$

   ผลคูณของรากเท่ากับค่าคงตัว B ผลบวกของราก = –A

2. สมการพหุนามดีกรี 3 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$

   ผลคูณของรากเท่ากับค่าคงตัว –C ผลบวกของราก = –A

3. สามเหลี่ยมใดๆ ผลบวกของด้านสองด้านต้องยาวกว่าด้านที่สาม
4. สามเหลี่ยมใดๆ sinA : sinB : sinC = a : b : c
5. ถ้าอัตราส่วน cosA : cosB : cosC เป็นบวก แล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม
6. การโยนลูกเต๋า 1 ลูก n ครั้ง หรือ การโยนลูกเต๋า n ลูก 1 ครั้ง เราสามารถแทนค่า n บางค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก
7. การแจงกรณีตามเงื่อนไขของโจทย์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้
8. เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าจะทำให้ตัดตัวเลือกได้เสมอ
9. คำว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรออกสอบได้ในหลายๆเนื้อหาเช่น ความน่าจะเป็น อนุกรมเลขคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัส
10. การวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้แน่นอน

ตัวอย่าง 1.(กข.39) ให้ a เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษ 4 แล้ว ผลบวกของค่า a ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6 2. -2 3. 2 4. 6

ตอบ 2.

แนวคิด $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2$ เหลือเศษ 4

เพราะฉะนั้น $x - a$ หาร $x^3 + 2x^2 - 5x - 2 - 4$ ลงตัว

ดังนั้น a เป็นรากของสมการ $x^3 + 2x^2 - 5x - 2 - 4 = 0$

ผลบวกของค่า a ทั้งหมดเท่ากับ –(ส.ป.ส. ของ x^2) = -2

หมายเหตุ $(x - A)(x - B)(x - C) = 0$

$$x^3 - (A + B + C)x^2 + (AB + AC + BC)x - ABC = 0$$

เพราะฉะนั้นผลบวกของค่ารากทั้งหมดเท่ากับ –(ส.ป.ส. ของ x^2) = $-(a + b + c)$

ขอให้นักเรียนลองคิดอีกทีว่าอ่านโจทย์แล้วได้คำตอบเลขจริงหรือไม่

ตัวอย่าง 2.(สมาคมคณิตศาสตร์ 40) กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 9 ใบ หมายเลข 1,2,3,...,8,9 อย่างละ 1 ใบ สุ่มหยิบบัตรทีละใบ n ครั้ง โดยที่ใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป และบัตรแต่ละใบมีโอกาสถูกหยิบเท่ากัน ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของ n จำนวนที่ปรากฏบนบัตรที่สุ่มได้จะหารด้วย 10 ลงตัวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 - (\frac{8}{9})^n - (\frac{5}{9})^n - (\frac{4}{9})^n$ 2. $1 - (\frac{8}{9})^n - (\frac{5}{9})^n + (\frac{4}{9})^n$

3. $1 - (\frac{8}{9})^n + (\frac{5}{9})^n - (\frac{4}{9})^n$ 4. $1 + (\frac{8}{9})^n - (\frac{5}{9})^n - (\frac{4}{9})^n$

ตอบ 2.

แนวคิด แทนค่า $n = 1$ จะได้ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของจำนวนหนึ่งจำนวนที่ปรากฏบนบัตรที่สุ่มได้จะหารด้วย 10 ลงตัวมีค่าเท่ากับ 0

ต่อไปแทนค่า $n = 1$ ในแต่ละตัวเลือก

1. $1-(\frac{8}{9})-(\frac{5}{9})-(\frac{4}{9}) = -\frac{8}{9}$
2. $1-(\frac{8}{9})-(\frac{5}{9})+(\frac{4}{9}) = 0$
3. $1-(\frac{8}{9})+(\frac{5}{9})-(\frac{4}{9}) = \frac{2}{9}$
4. $1+(\frac{8}{9})-(\frac{5}{9})-(\frac{4}{9}) = \frac{8}{9}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 3.(สมาคมคณิตศาสตร์ 40) กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x^2+2x} & ,x<0 \\ \dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2} & ,x \geq 0 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และที่ $x = 1$
2. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และที่ $x = 0$
3. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และที่ $x = 0$
4. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ตอบ 4.

แนวคิด การพิจารณาควรดูตรงที่ไม่ต่อเนื่องจะง่ายกว่าเพราะว่าเงื่อนไขใดก็ได้ต่อไปนี้ไม่จริงก็สรุปได้ว่า f ไม่ต่อเนื่อง $x = a$

1. $f(a)$ หาค่าไม่ได้ หรือ 2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ หรือ 3. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้

การจะดูว่า $f(a)$ หาค่าไม่ได้ ให้ดูว่ามีการหารด้วย 0 หรือไม่

เพราะว่า $f(1) = \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2} = \frac{1+2\sqrt{1}-3}{1+1-2}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$ ทำให้เลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

ตัวอย่าง 4.(สมาคมคณิตศาสตร์ 40) อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่ง อัตราส่วนผลบวกของ r พจน์แรก ต่อ ผลบวกของ s พจน์แรกเท่ากับ $\frac{r^2}{s^2}$ อัตราส่วนของพจน์ที่ 7 ต่อพจน์ที่ 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{7}{20}$

ตอบ 2.

แนวคิด อนุกรมเลขคณิตคือ $a, a+d, a+2d, \ldots$ โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า $r = 1$ และ $s = 2$ เพราะฉะนั้น $\frac{a_1}{a_1+a_2} = \frac{1^2}{2^2}$

$$\frac{a}{a+(a+d)} = \frac{1}{4}$$

$$4a = 2a + d$$

$$d = 2a$$

$$\frac{a_7}{a_{20}} = \frac{a+6d}{a+19d} = \frac{a+6(2a)}{a+19(2a)} = \frac{13a}{39a} = \frac{1}{3}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 5.(สมาคมคณิตศาสตร์ 40) กำหนด $f : \{x \in R \mid 2x^2 \le 7x - 3\} \to R$ โดย $f(x) = 2^{-2x}$ ค่าต่ำสุดของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -2 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{64}$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $2^{-2x} > 0$ ทุกค่า x เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$2^{-2x} = \frac{1}{64} = 2^{-6} \to x = 3$ และ $2(3^2) = 18 \le 7(3) - 3$

สรุปค่าต่ำสุดของ f เท่ากับ $\frac{1}{64}$

ตัวอย่าง 6.(สมาคมคณิตศาสตร์ 40) กำหนด $f : [-\pi,\pi] \to R$ โดย $f(x) = \lfloor 4.5\cos x \rfloor$

เมื่อ $\lfloor a \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a

เรนจ์ของ f มีจำนวนสมาชิกท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3   2. 5   3. 10   4. 11

ตอบ 3.

แนวคิด แทนค่าไปเรื่อยๆ ก็จะตัดตัวเลือกไปได้เรื่อยๆ

$f(0) = \lfloor 4.5\cos(0) \rfloor = \lfloor 4.5 \rfloor = 4$ $\qquad$ $f(\pi) = \lfloor 4.5\cos(\pi) \rfloor = \lfloor -4.5 \rfloor = -5$

$f(\frac{\pi}{2}) = \lfloor 4.5\cos(\frac{\pi}{2}) \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$

$f(\frac{\pi}{3}) = \lfloor 4.5\cos(\frac{\pi}{3}) \rfloor = \lfloor 2.25 \rfloor = 2$ ถึงตรงนี้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$(\frac{\pi}{4}) = \lfloor 4.5\cos(\frac{\pi}{4}) \rfloor = \lfloor \frac{4.5}{\sqrt{2}} \rfloor = \lfloor \frac{4.5}{1.414} \rfloor = \lfloor 3.18 \rfloor = 3$

$(\frac{3\pi}{4}) = \lfloor 4.5\cos(\frac{3\pi}{4}) \rfloor = \lfloor -\frac{4.5}{\sqrt{2}} \rfloor = \lfloor -\frac{4.5}{1.414} \rfloor = \lfloor -3.18 \rfloor = -4$

ถึงตรงนี้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีกแล้ว

วิธีจริง $\qquad -1 \le \cos x \le 1$

$$-4.5 \le 4.5\cos x \le 4.5$$

$$\lfloor -4.5 \rfloor \le \lfloor 4.5\cos x \rfloor \le \lfloor 4.5 \rfloor$$

$$-5 \le \lfloor 4.5\cos x \rfloor \le 4$$

$R_f = \{\lfloor 4.5\cos x \rfloor \mid x \in [-\pi,\pi]\} = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ มีสมาชิก 10 ตัว

ตัวอย่าง 7.(สมาคมคณิตศาสตร์ 39) ในสามเหลี่ยม ABC ถ้าอัตราส่วน

cosA :cosB : cosC = 2 : 9 : 12 แล้ว sinA : sinB :sinC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 : 9 : 2 2. 3 : 2 : 1 3. 9 : 7 : 5 4. 6 : 5 : 4

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ เพราะฉะนั้น sinA : sinB :sinC = a : b : c

นั้นคือ sinA : sinB :sinC ต้องเป็นอัตราส่วนของด้านสามเหลี่ยม

เพราะว่า ด้านสองด้านรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่สาม

เพราะฉะนั้น 12 : 9 : 2 และ 3 : 2 : 1 ไม่เป็นอัตราส่วนของด้านสามเหลี่ยม

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า cosA :cosB : cosC = 2 : 9 : 12 เพราะฉะนั้น cosA > 0 , cosB > 0 และ

cosC > 0 นั้นคือ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม

เพราะว่าเมื่อวาดรูปสามเหลี่ยมที่มี a : b : c = 9 : 7 : 5 จะเป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่าง 8.(สมาคมคณิตศาสตร์ 39)

arcsin(cos(arcsin x)) + arccos(sin(arccos x)) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x แทนค่า x = 0 ก็ตัดตัวเลือกทิ้งได้

arcsin(cos(arcsin x)) + arccos(sin(arccos x))

$= \arcsin(\cos(\arcsin 0)) + \arccos(\sin(\arccos 0))$

$= \arcsin(\cos(0)) + \arccos(\sin(\frac{\pi}{2}))$

$= \arcsin(1) + \arccos(1)$

$= \frac{\pi}{2} + 0$

$= \frac{\pi}{2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 9.(สมาคมคณิตศาสตร์ 39) โยนลูกเต๋ามาตรฐาน n ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม j (j = 1,2,3,4,5,6) ลูก เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = n$

1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!}$
2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!}$
3. $\frac{n!}{6^n 6!n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$
4. $\frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n ได้

ลองโยนลูกเต๋า 1 ลูกก็จะตัดตัวเลือกได้

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 จำนวน 1 ลูก $= \frac{1}{6}$

แทนค่า $n_1 = 1, n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 0$ และ $n = 1$ ในตัวเลือก

1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 6!1!} = \frac{1}{36}$
2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 1!} = \frac{1}{6}$
3. $\frac{n!}{6^n 6!n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 6!1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{36}$
4. $\frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้ก่อน

ลองโยนลูกเต๋า 2 ลูกก็จะตัดตัวเลือกได้อีก

ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 จำนวน 1 ลูกและแต้ม 2 จำนวน 1 ลูก = $\frac{2}{36}$

แทนค่า $n_1 = 1, n_2 = 1$ และ $n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 0$ และ $n = 2$ ในตัวเลือก

2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!1!0!0!0!0!}{6^2 2!} = \frac{1}{72} \neq \frac{2}{36}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่าง 10.(กข.39) กำหนดให้ $f(x) = \log(1 + x)$ สำหรับ $x \in R$

ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \dots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $f(n+1)$ 2. $f(n)$ 3. $f(\frac{1}{n})$ 4. $f(\frac{1}{n+1})$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

แทนค่า $n = 1$ โจทย์จะมีค่าเท่ากับ $f(1)$

1. $f(n+1) = f(2)$ 2. $f(n) = f(1)$

3. $f(\frac{1}{n}) = f(1)$ 4. $f(\frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{2})$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งก่อน

แทนค่า $n = 2$ โจทย์จะมีค่าเท่ากับ $f(1) + f(\frac{1}{2})$

2. $f(n) = f(2)$

3. $f(\frac{1}{n}) = f(\frac{1}{2}) \neq f(1) + f(\frac{1}{2})$ (เพราะว่า $f(1) = \log(2) \neq 0$)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

ตัวอย่าง 11.(กข.39) เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

เป็นสับเซตของตัวเลือกใด

1. $[0,3]$ 2. $[2,4]$

3. $[-3,-2]\cup[2,3]$ 4. $[-2,-1]\cup[1,2]$

ตอบ 1.

แนวคิด จากสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ จะเห็นว่า $x = 1$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

จากสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ จะเห็นว่า x ต้องมากกว่า 0

เพราะฉะนั้นการเป็นสับเซตจึงไม่ต้องสนใจส่วนที่เป็นลบ

ดังนั้นตัวเลือกเราจึงพิจารณาเป็น

1. $[0,3]$ 2. $[2,4]$

3. $[2,3]$ 4. $[1,2]$

ตัวเลือก 3. และ 4. เป็นสับเซตของตัวเลือก 1. ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

(หากคำตอบเป็นตัวเลือก 3. หรือ 4. ก็จะได้ตัวเลิกก 1. เป็นคำตอบด้วย)

ตัวอย่าง 12.(กข.38) ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

แล้วโดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(-\infty,2]$

3. $(-3,2)$ 4. $(-3,2]$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $f(2) = 0$ และ $g(2) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ เพราะฉะนั้น 2 ต้องอยู่ในโดเมนของ fg

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง เพราะว่า f หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = -100$

เพราะฉะนั้น -100 ต้องไม่อยู่ในโดเมนของ f

นั้นคือ -100 ต้องอยู่ในโดเมนของ fg ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่าง 13.(สมาคมคณิตศาสตร์ 31)

เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2} \le 1-x$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,0]\cup(\frac{5}{4},\infty]$ 2. $(-\infty,0]$

3. $[-1\,,0]$ 4. $[-1\,,0]\cup(\frac{5}{4},\infty]$

ตอบ 3.

แนวคิด จากอสมการ $\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2} \le 1-x$ จะเห็นว่า x เท่ากับ –100 ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

จากอสมการ $\sqrt{\sqrt{x+1}+x^2} \le 1-x$ จะเห็นว่า x เท่ากับ 100 ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ตัวอย่าง 14.(สมาคมคณิตศาสตร์ 33) จุด A(3,0) เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ ภายในวงกลม $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ สมการเส้นตรง PQ คือสมการในข้อใด

1. $x+y=3$ 2. $x-y=3$

3. $2x+y=6$ 4. $2x-y=6$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ มีจุด $(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ คือ B(2,–1)

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{-1-0}{2-3}=-1$

สมการเส้นตรงแต่ละตัวเลือกมีความชันเท่ากับ

1. –1 2. 1 3. –2 4. 2

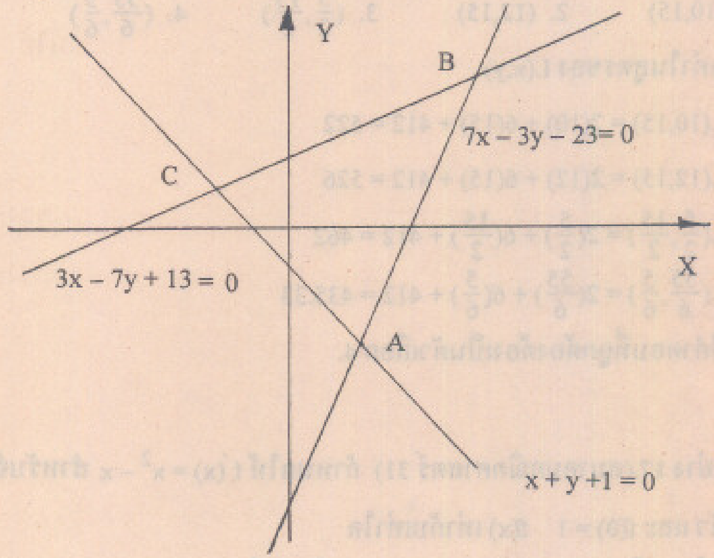
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3.. และ 4. ทิ้ง

ตัวอย่าง **15.**(สมาคมคณิตศาสตร์ 39) พื้นที่สามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรงสามเส้นที่มีสมการเป็น $x + y + 1 = 0$, $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ ตัดกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 ตารางหน่วย
2. 18 ตารางหน่วย
3. 20 ตารางหน่วย
4. 22 ตารางหน่วย

ตอบ 3.

แนวคิด วาดรูปเส้นตรงสามเส้นตัดกันแล้ววัดพื้นที่



วัดพื้นที่จากรูปได้ค่าประมาณ 20.14 สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

ตัวอย่าง **16.**(สมาคมคณิตศาสตร์ 39) กำหนดให้ $L(x,y) = 2x + 6y + 412$ และ x,y สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$y \le 15$$

$$x + y \ge 10$$

$$y - x \le 5$$

$$5x - y \leq 45$$

แล้ว L(x,y) มีค่าน้อยสุดอยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงคู่ใดต่อไปนี้

1. $y = 15$ และ $y - x = 5$ 2. $y = 15$ และ $5x - y = 45$

3. $x + y = 10$ และ $y - x = 5$ 4. $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

ตอบ 4.

แนวคิด ดูให้ดีจะเห็นว่าตัวเลือกคือพิกัดของจุดตัดเส้นตรง

1. (10,15) 2. (12,15) 3. $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$ 4. $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$

แทนค่าในสูตรของ L(x,y)

1. $L(10,15) = 2(10) + 6(15) + 412 = 522$

2. $L(12,15) = 2(12) + 6(15) + 412 = 526$

3. $L(\frac{5}{2},\frac{15}{2}) = 2(\frac{5}{2}) + 6(\frac{15}{2}) + 412 = 462$

4. $L(\frac{55}{6},\frac{5}{6}) = 2(\frac{55}{6}) + 6(\frac{5}{6}) + 412 = 435.33$

สรุปคำตอบที่ถูกต้องต้องเป็นตัวเลือก 4.

ตัวอย่าง 17.(สมาคมคณิตศาสตร์ 31) กำหนดให้ $f'(x) = x^2 - x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว และ $f(0) = 1$ f(x) เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ 2. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$

3. 1 4. $x^2 - x + 1$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $f(0) = 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า $f'(x)$ มีดีกรี 2 เพราะฉะนั้น f(x) ต้องมีดีกรี 3

ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรกับปัญหาแคลคูลัส

ข้อสอบที่เกี่ยวกับแคลคูลัสมีมากมายที่สามารถใช้แนวคิดของคำว่า โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ช่วยในการตัดตัวเลือกเพื่อจะได้คำตอบอย่างรวดเร็ว

ตัวอย่าง 1. (สมาคมคณิตศาสตร์ 39) ให้ $y = 3^{\ln(x^2+1)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{(2x)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$ 2. $\frac{3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$

3. $\frac{(2x\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$ 4. $\frac{(2x)3^{\ln(x^2+1)}}{(x^2+1)\ln 3}$

ตอบ 3.

แนวคิด $y = 3^{\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\ln 3}$ (จาก สูตร $A^{\log_C(B)} = B^{\log_C(A)}$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1)^{\ln 3} = (\ln 3)((x^2+1)^{(\ln 3)-1}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$= (\ln 3)((x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x) \qquad \text{---------(1)}$$

จากสมการ (1) หากเราจัดรูปไปหาตัวเลือกไม่เป็นก็สามารถใช้เหตุผลของคำว่า โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

โดยการแทนค่า $x = 0$ จะได้ค่า $\frac{dy}{dx}$ ของโจทย์มีค่าเท่ากับ 0 ค่าแต่ละตัวเลือกเป็น

1. $\frac{dy}{dx} = 0$ 2. $\frac{dy}{dx} = 1$ 3. $\frac{dy}{dx} = 0$ 4. $\frac{dy}{dx} = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ก่อน

โดยการแทนค่า x = 1 จะได้ค่า $\frac{dy}{dx}$ ของโจทย์มีค่า = $(\ln 3)(2)^{(\ln 3)-1}(2) = (\ln 3)2^{\ln 3}$

1. $\frac{(2x)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1} = \frac{(2)3^{\ln(2)}}{2} = 3^{\ln 2} \neq (\ln 3)2^{\ln 3}$

3. $\frac{(2x\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1} = \frac{(2\ln 3)3^{\ln(2)}}{2} = (\ln 3)3^{\ln 2}$

4. $\frac{(2x)3^{\ln(x^2+1)}}{(x^2+1)\ln 3} = \frac{(2)3^{\ln(2)}}{(2)\ln 3} = \frac{3^{\ln(2)}}{\ln 3} \neq (\ln 3)2^{\ln 3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ลองจัดรูปต่อ $\frac{dy}{dx} = (\ln 3)((x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x)$

$$= \frac{(2x\ln 3)((x^2+1))^{\ln 3}}{x^2+1} = \frac{(2x\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$$

ตัวอย่าง 2. (กข. 34) ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันเส้นโค้ง y = f(x) ณ จุดใดๆ มีค่าเป็น x − 1 และเส้นโค้งนี้มีความชันเป็น 1 ณ จุด (−1,0) แล้งสมการของเส้นโค้งนี้คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$
2. $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$
3. $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$
4. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6}$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (−1,0) เพราะฉะนั้น y(−1) = 0

แทนค่า x = − 1 ในตัวเลือก

1. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} \neq 0$

2. $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1\ \frac{3}{2} \neq 0$

3. $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = \frac{-1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

4. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{13}{6} \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\frac{d^2y}{dx^2} = x - 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - x + C$

$x = -1, \frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow 1 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} + 1 + C \rightarrow C = -\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + K$

$x = -1, y = 0 \rightarrow 0 = \frac{-1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} + K \rightarrow K = \frac{1}{6}$

สรุป $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$

ตัวอย่าง 3. (กข. 32) กำหนดให้ a และ n เป็นค่าคงตัว โดยที่ $a > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ถ้า $f(x) = ax^n$ และ $f(x)$ เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ $f'(x) = \sqrt{f(x)}$ แล้ว $f(4)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1　　2. 2　　3. 4　　4. 8

ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ $n = 2,4,6,...$ ลองแทนค่า $n = 2$

$f(x) = ax^2$ และ $f'(x) = 2ax$ เพราะว่า $f'(x) = \sqrt{f(x)}$

เพราะฉะนั้น $2ax = \sqrt{ax^2} \rightarrow 4a^2x^2 = ax^2 \rightarrow a = \frac{1}{4}$

สรุป $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ และ $f(4) = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 4. (กข. 31) กำหนดให้ $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$

$f'(x^2) - f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3}$
2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3}$
3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3}$
4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$

ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ $\qquad f'(x) = 2(3x-2)(3) - 4(\frac{1}{2x\sqrt{x}})$

$f'(x) = 18x - 12 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x แทนค่า x = 2 จะได้

โจทย์ $f'(x^2) - f'(1) = f'(4) - f'(1) \quad = (18(4) - 12 - \frac{2}{8}) - (18 - 12 - 1)$

$= (60 - \frac{1}{4}) - (5) = 55 - \frac{1}{4}$

แทนค่า x = 2 ในตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3} = 24 - 2 - \frac{4}{8} \neq 55 - \frac{1}{4}$
2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3} = 24 - 4 - \frac{2}{8} \neq 55 - \frac{1}{4}$
3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3} = 72 - 14 - \frac{1}{2} \neq 55 - \frac{1}{4}$
4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3} = 72 - 16 - \frac{1}{4} = 55 - \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 5. (กข. 31) กำหนดให้ $f(x) = -\frac{1}{x}$ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง x + h มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-2x-h}{hx(x+h)}$ 2. $\frac{1}{x(x+h)}$

3. $\frac{2x+h}{hx(x+h)}$ 4. $\frac{1}{x^2}$

ตอบ 2.

แนวคิด อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง x + h มีค่าเท่ากับ

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ แทนค่า x = 1 และ h = 1 จะได้ว่าค่าของโจทย์

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f(2)-f(1)}{1} = (-\frac{1}{2})-(-1) = \frac{1}{2}$$

แทนค่า x = 1 และ h = 1 จะได้ว่าค่าของแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น

1. $\frac{-2x-h}{hx(x+h)} = \frac{-1}{2}$ 2. $\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{2}$ 3. $\frac{2x+h}{hx(x+h)} = \frac{3}{2}$ 4. $\frac{1}{x^2} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ,3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 6. (ก. 39) ถ้า $f(x) = 3x^2 + 2x$ และ $\int(f(x) + g(x))dx = x^5 + C$

แล้ว $\int g(x)dx$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^5 - x^3 - x^2 + C_1$ 2. $x^5 + x^3 + x^2 + C_1$

3. $\frac{x^6}{6} - x^3 - x^2 + C_1$ 4. $\frac{x^6}{6} + x^3 + x^2 + C_1$

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\int(f(x) + g(x))dx = x^5 + C$

เพราะฉะนั้น $\int g(x)dx = (x^5 + C) - \int f(x)dx = x^5 + C - \int(3x^2 + 2x)dx$

เพราะฉะนั้น $\int g(x)dx$ ต้องมีดีกรี 5 ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

$\int g(x)dx = x^5 + C - \int f(x)dx = x^5 + C - \int (3x^2 + 2x)dx = x^5 + C - x^3 + ..$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 7. (ก. 39) ข้อใดเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x^2(2x - 3)$

1. $(x^3 - 2)x$ 2. $(2 - x^3)x$ 3. $(2 - x)x^3$ 4. $(x - 2)x^3$

ตอบ 4

แนวคิด เพราะว่า $2x^2(2x - 3) = 4x^3 - 6x^2$

เพราะฉะนั้น $\int (4x^3 - 6x^2)dx = x^4 - 2x^3$

เพราะว่า ส.ป.ส. ของ x^4 เป็นบวก ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า ส.ป.ส. ของ x^3 เป็นลบ ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ลองมาฝึกหัดใช้เหตุผลอีกแบบเช่น กำลังต่ำสุดของ $2x^2(2x - 3)$ เท่ากับ 2

เพราะฉะนั้นกำลังต่ำสุดของปฏิยานุพันธ์ของ $2x^2(2x - 3)$ ต้องเท่ากับ 3

ด้วยเหตุผลนี้เราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า ส.ป.ส. ของ x^4 ใน $\int (4x^3 - 6x^2)dx$ เท่ากับ 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 8. (ก. 39) กำหนดให้ $f(x) = px^2 + qx + r$ เมื่อ p,q,r เป็นจำนวนจริง

ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ $F(0) = 0$

แล้ว $F(1) + F(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. p 3. q 4. r

ตอบ 3

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจฯของ p,q,r แทนค่า $p = 3$,$q = 2$ และ $r = 1$ จะได้ $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ และตัวเลือกทั้งสี่กลายเป็น

1. 0　　2. 3　　3. 2　　4. 1

$F(x) = \int f(x)dx = \int(3x^2 + 2x + 1)dx = x^3 + x^2 + x + K$

เพราะว่า $F(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $K = 0$ และ $F(x) = x^3 + x^2 + x$

สรุป $F(1) + F(-1) = (1 + 1 + 1) + (-1 + 1 - 1) = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ,2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 9. (ก. 39) กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^3$ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1,2) และมีความชันเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = -1$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7x + 3y - 13 = 0$　　2. $11x + 3y - 17 = 0$

3. $-7x + 3y + 1 = 0$　　4. $-11x + 3y + 5 = 0$

ตอบ 2

แนวคิด $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^3$　$f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 3x^2$

ที่ $x = -1$ จะได้ความชันเท่ากับ $f'(-1) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{-1}} - 3(1) = -\dfrac{2}{3} - 3 = -\dfrac{11}{3}$

เพราะว่าความชันเส้นตรงที่ต้องการต้องเท่ากับความชันสัมผัสเส้นโค้ง $= -\dfrac{11}{3}$

ความชันของเส้นตรงแต่ละตัวเลือกคือ

1. $-\frac{7}{3}$　　2. $-\frac{11}{3}$　　3. $\frac{7}{3}$　　4. $\frac{11}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 10. (ก. 39) กำหนดให้ $f(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2$ และ g(x) เป็นอนุพันธ์ของ f(x) ค่าของ $g'(x)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $12x(x+1)^2(x^2+1)^2$
2. $42x^5 + 90x^4 + 100x^3 + 84x^2 + 42x + 10$
3. $7x^5 + 18x^4 + 25x^3 + 28x^2 + 21x + 10$
4. $2(x+1)^2(x^2+1)(3x+1) + 4x(x+1)(3x^2+2x+5)$

ตอบ 2

แนวคิด เพราะว่า g(x) = อนุพันธ์ของ f(x) = $f'(x)$ เพราะฉะนั้น $g'(x) = f''(x)$

เพราะว่า $f(x) = x^7 + ...$ เพราะฉะนั้น $g'(x) = f''(x) = 42x^5 + ...$

ส.ป.ส. ของ x กำลัง 5 ในแต่ละตัวเลือกคือ

1. 12　　2. 42　　3. 7　　4. 6

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 11. กำหนดให้ a,b,c เป็นจำนวนจริงใดๆ

ค่า x ที่ทำให้ $(a-x)^2 + (b-x)^2 + (c-x)^2$ มีค่าน้อยที่สุด คือข้อใด

1. $\frac{a+b+c}{3}$　　2. 0
3. $a+b+c$　　4. $\frac{a+b+c}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด แทนค่า a = 1 , b = 1 , c = 1 จะได้ว่าค่าต่ำสุดของ

$(1-x)^2 + (1-x)^2 + (1-x)^2 = 0$ เมื่อ x = 1 ตัวเลือกทั้งสี่มีค่าเป็น

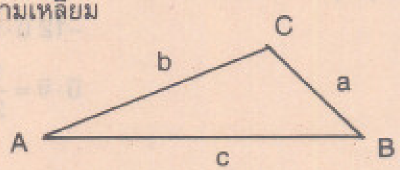
1. 1　　2. 0　　3. 3　　4. $\frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้

มุมแหลมหรือมุมป้านก็ตัดตัวเลือกได้

ข้อสอบที่มีเนื้อหาเกี่ยวกับสามเหลี่ยม มุมระหว่างเวกเตอร์ มุมระหว่างเส้นตรง เราสามารถนำประโยชน์จากมุมแหลมและมุมป้านมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ โดยใช้เหตุผลเบื้องต้นง่ายๆ เช่น

1. $\bar{u}\cdot\bar{v}=0$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\perp\bar{v}$
2. $\bar{u}\cdot\bar{v}>0$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นมุมแหลม
3. $\bar{u}\cdot\bar{v}<0$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นมุมป้าน
4. a, b, c เป็นด้านของสามเหลี่ยม



ถ้า $a^2+b^2=c^2$ แล้ว $\hat{c}=90^\circ$

ถ้า $a^2+b^2>c^2$ แล้ว $\hat{c}<90^\circ$

ถ้า $a^2+b^2<c^2$ แล้ว $\hat{c}>90^\circ$

5. ผลบวกของด้านสองด้านของสามเหลี่ยมต้องยาวกว่าด้านที่สาม นั่นคือ

   ถ้า a : b : c เป็นอัตราส่วนของด้านของสามเหลี่ยม

   แล้ว $a+b>c$, $a+c>b$ และ $b+c>a$

6. กฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$

   และ $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

ตัวอย่าง 1.

กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และถ้า $|3\bar{u}-2\bar{v}|=\sqrt{7}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือมุมในข้อใดต่อไปนี้

1. $\P+\operatorname{arcsec}(2)$
2. $\P-\operatorname{arcsec}(2)$
3. $\frac{\P}{2}-\arcsin(\frac{1}{2})$
4. $\frac{\P}{2}-\arccos(\frac{1}{2})$

ตอบ 3.

แนวคิด $|3\bar{u}-2\bar{v}|=\sqrt{7}$

$$|3\bar{u}-2\bar{v}|^2=7$$

$$9|\bar{u}|^2-2(3\bar{u})\cdot(2\bar{v})+4|\bar{v}|^2=7$$

เพราะว่า $|\bar{u}|=|\bar{v}|=1$ เพราะฉะนั้น $9-12\cdot\bar{u}\cdot\bar{v}+4=7$

$$-12\,\bar{u}\cdot\bar{v}=-6$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{v}>0$ เพราะฉะนั้น มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ต้องเป็นมุมแหลม

นั่นคือ $0<\theta<\frac{\P}{2}$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะว่า $\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\P}{6}$ $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\P}{3}$ $\operatorname{arcsec}2=\frac{\P}{3}$

เพราะฉะนั้นมุมในตัวเลือก ทั้ง 4 คือ

1. $\P+\text{arcsee }2=\P+\frac{\P}{3}>\frac{\P}{2}$
2. $\P-\text{aresee }2=\P-\frac{\P}{3}>\frac{\P}{2}$
3. $\frac{\P}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\P}{2}-\frac{\P}{6}=\frac{\P}{3}$
4. $\frac{\P}{2}-\arccos\frac{1}{2}=\frac{\P}{2}-\frac{\P}{3}=\frac{\P}{6}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

สมมติ $\theta = \frac{\P}{6}$ จะได้

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}$$

$$\cos\frac{\P}{6} = \bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{u}\cdot\bar{v}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ในทางกลับกัน ถ้าเราลอง $\theta = \frac{\P}{3}$ ก็จะได้

$$\cos\frac{\P}{3} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \bar{u}\cdot\bar{v}$$

เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\P}{3}$ ได้

วิธีจริง เมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{2}$ ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

เพราะว่า $|\bar{u}| = 1$ และ $|\bar{v}| = 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \frac{1}{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\P}{3}$$

$$\theta = \frac{\P}{2} - \frac{\P}{6}$$

$$\theta = \frac{\P}{2} - \arcsin\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 2.

สามเหลี่ยม ABC มีมุม A, B และ C ที่ทำให้ cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12

อัตราส่วน sinA : sinB : sinC มีค่าตรงกับตัวเลือกใด

1. 2 : 3 : 5
2. 5 : 12 : 13
3. 10 : 5 : 7
4. 6 : 5 : 4

ตอบ 4.

แนวคิด

เพราะว่า A, B, C เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม และ อัตราส่วน

cos A : cos B : cos C = 2 : 9 : 12 เป็นบวกทุกค่า

เพราะฉะนั้น A, B, C เป็นมุมแหลม

เพราะว่าโดยกฎของไซน์จะได้ว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

เพราะฉะนั้น sin A : sin B : sin C = a : b : c

เหตุผลที่สำคัญของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมคือ

ผลบวกของด้าน 2 ด้านรวมกันต้องมากกว่าด้านที่ 3

ตัวเลือก 1. สมมติ sinA : sinB : sinC = 2 : 3 : 5

เพราะฉะนั้น a : b : c = 2 : 3 : 5 ดังนั้น a + b = 5 ไม่มากกว่า c

สรุป 2 : 3 : 5 ไม่เป็นอัตราส่วนด้านของสามเหลี่ยม ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ตัวเลือก 2. เพราะว่า $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$

เพราะฉะนั้น 5 : 12 : 13 เป็นอัตราส่วนของสามเหลี่ยมมุมฉาก

ดังนั้นถ้า sinA : sinB : sinC = 5 : 12 : 13 แล้ว $C = 90^\circ$

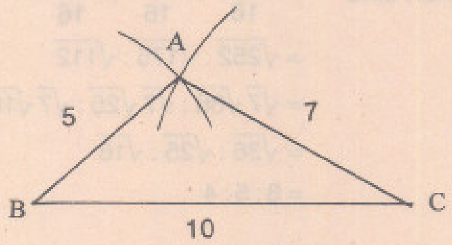
เพราะฉะนั้น cosC = 0 จะขัดแย้งกับโจทย์

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ตัวเลือก 3. สมมติ $\sin A : \sin B : \sin C = 10 : 7 : 5$

เพราะฉะนั้น $a : b : c = 10 : 7 : 5$

ด้วยเหตุผลของสามเหลี่ยมคล้ายเราสามารถวาดรูปสามเหลี่ยมที่มี $a = 10$, $b = 7$, $c = 5$ เซนติเมตรช่วยในการตัดตัวเลือกได้



โดยการวัดมุมจะได้ $A > 90°$

ดังนั้น $\cos A < 0$ ซึ่งขัดแย้งกับโจทย์ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง

$$\cos A = 2k \qquad \sin A = \sqrt{1-4k^2}$$
$$\cos B = 9k \qquad \sin B = \sqrt{1-81k^2}$$
$$\cos C = 12k \qquad \sin C = \sqrt{1-144k^2}$$

$$A + B + C = 180°$$
$$A + B = 180 - C$$
$$\sin (A + B) = \sin (180 - C)$$
$$\sin A \cos B + \cos A \sin B = \sin C$$
$$\left(\sqrt{1-4k^2}\right)(9k) + (2k)\sqrt{1-81k^2} = \sqrt{1-144k^2}$$

โดยการแก้สมการจะได้ $k = \frac{1}{16}$

$$\sin A = \sqrt{1-\frac{4}{256}} = \frac{\sqrt{252}}{16}$$

$$\sin B = \sqrt{1-\frac{81}{256}} = \frac{\sqrt{175}}{16}$$

$$\sin C = \sqrt{1-\frac{144}{256}} = \frac{\sqrt{112}}{16}$$

เพราะฉะนั้น sinA : sinB : sinC

$$= \frac{\sqrt{252}}{16} : \frac{\sqrt{175}}{16} : \frac{\sqrt{112}}{16}$$
$$= \sqrt{252} : \sqrt{175} : \sqrt{112}$$
$$= \sqrt{7}\sqrt{36} : \sqrt{7}\sqrt{25} : \sqrt{7}\sqrt{16}$$
$$= \sqrt{36} : \sqrt{25} : \sqrt{16}$$
$$= 6 : 5 : 4$$

ตัวอย่าง 3.

ถ้า $|\bar{u}| = 2$ และ $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u}-\bar{v}| = 4$

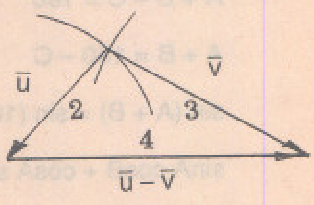
แล้ว $(\bar{u}\cdot\bar{v})\,|\bar{u}+\bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $11\sqrt{6}$
2. $-\frac{3}{2}\sqrt{10}$
3. $-4\sqrt{10}$
4. $\sqrt{13}$

ตอบ 2.

แนวคิด

เพราะว่า $|-\bar{v}| = |\bar{v}| = 3$



เพราะฉะนั้น $\bar{u}, -\bar{v}$ และ $\bar{u}+(-\bar{v})$ เป็นเวกเตอร์ที่ประกอบกัน

เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้านยาว 2, 3 และ 4 ตามลำดับ

จากรูปจะได้ว่ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นมุมป้าน

ให้ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

ดังนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos\theta<0$

ทำให้ $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}|<0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งไปก่อน

วิธีจริง $|\bar{u}-\bar{v}|=4$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2=16$$

$$(\bar{u}-\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})=16$$

$$|\bar{u}|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v}+|\bar{v}|^2=16$$

$$4-2\bar{u}\cdot\bar{v}+9=16$$

$$-2\bar{u}\cdot\bar{v}=3$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\frac{-3}{2}$$

หมายเหตุ ขณะที่ทำตามวิธีจริงเมื่อเรารู้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v}=\frac{-3}{2}$

นักเรียนจะเห็นว่า $(\bar{u}-\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}|<0$ แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ได้เหมือนกัน

ทำตามวิธีจริงต่อไป $-2\bar{u}\cdot\bar{v}=3$

$$2\bar{u}\cdot\bar{v}=-3$$

$$4+2\bar{u}\cdot\bar{v}+9=10$$

$$|\bar{u}|^2-2\bar{u}\cdot\bar{v}+|\bar{v}|^2=10$$

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2=10$$

$$|\bar{u}+\bar{v}|=\sqrt{10}$$

สรุป $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}|=\frac{-3}{2}\sqrt{10}$

หมายเหตุ เมื่อเราได้ $(\bar{u}\cdot\bar{v}) = \frac{-3}{2}$ และเหลือตัวเลือก 2 ตัว

คือ 2. $\frac{-3}{2}\sqrt{10}$ และ 3. $-4\sqrt{10}$

สมมติ $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}| = -4\sqrt{10}$

$$\frac{-3}{2}|\bar{u}+\bar{v}| = -4\sqrt{10}$$

$$|\bar{u}+\bar{v}| = \frac{8}{3}\sqrt{10}$$

$$= \frac{8(3.2)}{3} = 10.67$$

แต่ $|\bar{u}+\bar{v}| \le |\bar{u}| + |\bar{v}| = 2+3 = 5$

และ $10.67 \not\le 5$ ดังนั้นเกิดข้อขัดแย้ง

สรุป $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}| = -4\sqrt{10}$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

กำหนด $A = \{\cos x \mid \cos x \ge 0$ และ $x \in [0,2\pi]\}$

$B = \{\tan x \mid \tan x < 0$ และ $x \in [0,2\pi]\}$

$C = \{\sin x \mid \sin x < 0$ และ $x \in [0,2\pi]\}$ แล้ว $(A\cup B)-C$ คือเซตใด

1. $(-\infty,-1)$ 2. $(0,\pi)$ 3. $(0,\pi)\cup\{2\pi\}$ 4. $(-\infty,-1)\cup[0,1]$

ตอบ 4.

แนวคิด $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow 0 \in A \rightarrow 0 \in A\cup B$ และ 0 ไม่อยู่ใน C

เพราะฉะนั้น $0 \in (A\cup B)-C$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

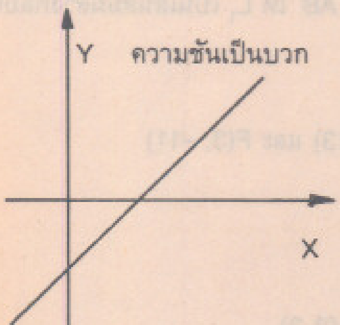
คิดตามแนวคิดแบบนี้ได้ในคณิตศาสตร์ปรนัยทุกเล่ม

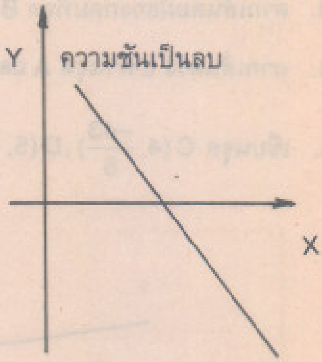
ถามเรื่องเส้นตรงต้องใช้ความชันตัดตัวเลือก

ข้อสอบที่เกี่ยวข้องกับเส้นตรง เส้นสัมผัสเส้นโค้ง เส้นสัมผัสวงกลม เส้นตรงตั้งฉากกัน เส้นตรงขนานกัน เส้นตรงตัดกัน ส่วนใหญ่จะมีเรื่องของความชันเส้นตรงเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังนั้นเราสามารถนำประโยชน์เกี่ยวกับความชันของเส้นตรงเข้ามาช่วยในการตัดตัวเลือก จึงขอให้ศึกษาแนวทางจากตัวอย่างต่อไปนี้

หมายเหตุ สิ่งที่นักเรียนต้องจำคือลักษณะการเอียงของเส้นตรง

1.





2. เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน ความชันคูณกันต้องเท่ากับ -1

ตัวอย่าง 1. คณิตศาสตร์ กข. 2535

ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 - 2x + y^2 + 10y - 39 = 0$ และขนานกับเส้นสัมผัสของวงกลมนี้ที่จุด (2, 3) แล้วจุดใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง L

1. $(4, \frac{-43}{8})$
2. $(5, \frac{-9}{2})$
3. $(2, -13)$
4. $(3, -11)$

ตอบ 1.

แนวคิด $x^2 - 2x + y^2 + 10y - 39 = 0$

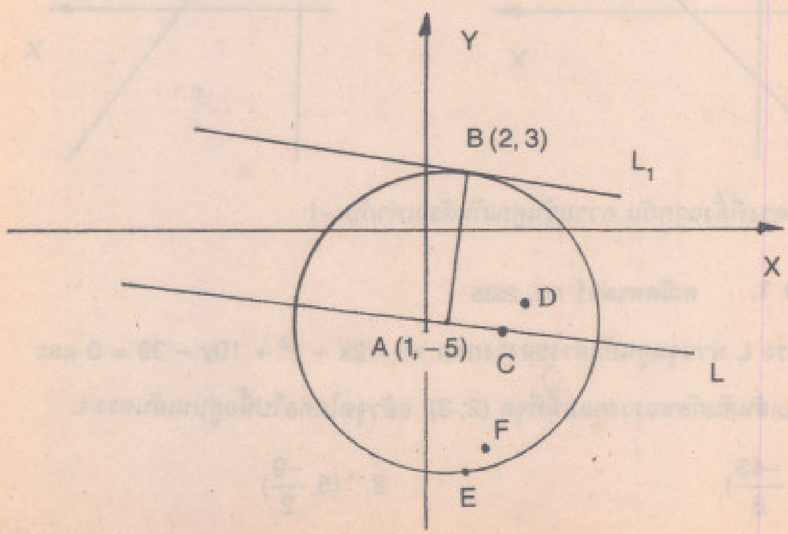
$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 10y + 25) = 39 + 1 + 25$$

$$(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 65$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (1, –5) และรัศมี $\sqrt{65}$

ขณะนี้เราเขียนวงกลมได้แล้ว เพราะว่าเรารู้จุดศูนย์กลาง (1, –5) และวงกลมผ่านจุด (2, 3) โดยไม่ต้องประมาณค่า $\sqrt{65}$ ก็ได้

1. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง A(1, –5) และวงกลมผ่านจุด B(2, 3)
2. ลากเส้นตรง AB
3. ลากเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B ให้ตั้งฉากกับ AB ให้ L_1 เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B
4. ลากเส้นตรง L ผ่านจุด A และขนานกับ L_1
5. เขียนจุด C $(4, \frac{-43}{8})$, D $(5, \frac{-9}{2})$, E $(2, -13)$ และ F$(3, -11)$



จากรูปที่วาดจะเห็นว่า มีจุด $C(4, \frac{-43}{8})$ เท่านั้นที่เป็นจุดบนเส้นตรง L ดังนั้นเรา

เลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

ต่อไปเราจะใช้เหตุผลความชันก็ตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า ความชัน $AB = \frac{3-(-5)}{2-1} = 8$ เพราะฉะนั้นความชัน L ต้องเท่ากับ $\frac{-1}{8}$

ตัวเลือก 1. $C(4, \frac{-43}{8})$

ความชัน $AC = \dfrac{\frac{-43}{8}-(-5)}{4-1} = \dfrac{-43+40}{3(8)} = \dfrac{-1}{8}$

เพราะฉะนั้นเลือก $C(4, \frac{-43}{8})$ เป็นคำตอบได้เลย เพราะว่า $C(4, \frac{-43}{8})$ อยู่บน L

วิธีจริง L มีความชันเท่ากับ $\frac{-1}{8}$ และผ่านจุด (1, –5)

สมการเส้นตรง L คือ $y + 5 = (\frac{-1}{8})(x-1)$

$8y + 40 = -x + 1$

$x + 8y + 39 = 0$

เมื่อ x = 4 จะได้ $4 + 8y + 39 = 0 \longrightarrow y = \frac{-43}{8}$

สรุป $(4, \frac{-43}{8})$ อยู่บน L แน่นอน

ตัวอย่าง 2. คณิตศาสตร์ กข. 2536

เวกเตอร์ใดต่อไปนี้ขนานกับเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ที่จุด (6, 0)

1. $3\bar{i} + 4\bar{j}$
2. $3\bar{i} - 4\bar{j}$
3. $5\bar{i} - 3\bar{j}$
4. $5\bar{i} + 3\bar{j}$

ตอบ 2.

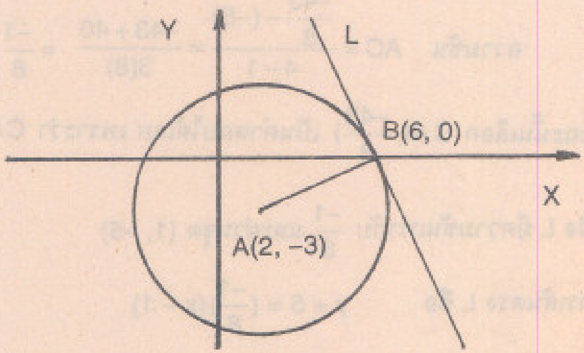
แนวคิด จัดรูปวงกลมเพื่อหาจุดศูนย์กลางและรัศมี

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 12 + 4 + 9$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมคือ (2, −3) รัศมีวงกลมเท่ากับ 5



ให้ L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมที่จุด B

ให้ A(2, −3), B(6, 0) จะได้ $\overrightarrow{AB} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$

เพราะว่าเส้นตรงที่สัมผัสวงกลมที่จุด B ต้องตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ที่ขนานกับเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$

เราสามารถใช้เหตุผลข้างต้นตัดตัวเลือกได้ดังนี้

ตัวเลือก 1. $\overrightarrow{AB} \cdot (3\bar{i} + 4\bar{j}) = (4\bar{i} + 3\bar{j}) \cdot (3\bar{i} + 4\bar{j}) = 24 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $3\bar{i} + 4\bar{j}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$

ตัวเลือก 2. $\overrightarrow{AB} \cdot (3\bar{i} - 4\bar{j}) = (4\bar{i} + 3\bar{j}) \cdot (3\bar{i} - 4\bar{j}) = 0$

เพราะฉะนั้น $3\bar{i} - 4\bar{j} \perp \overrightarrow{AB}$

ขณะนี้เราได้คำตอบแล้วโดยไม่ต้องคำนวณตัวเลือก 3. และ 4. ก็ได้

หมายเหตุ $\bar{v} = a\bar{i} + b\bar{j}$ ความชันเวกเตอร์ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{b}{a}$

ความชัน $(\overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}$ เพราะว่า L ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AB}$ ดังนั้นความชันเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{-4}{3}$

ตัวเลือก 1. ความชัน $(3\bar{i} + 4\bar{j}) = \frac{4}{3}$

ตัวเลือก 2. ความชัน $(3\bar{i} - 4\bar{j}) = \frac{-4}{3}$ = ความชัน L

เพราะฉะนั้น $3\bar{i} - 4\bar{j}$ ขนานกับเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.

จุด A(3, 0) เป็นจุดกึ่งกลางของคอร์ด PQ ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

สมการเส้นตรง PQ คือสมการในตัวเลือกใด

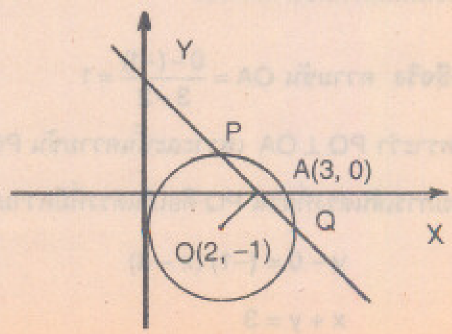
1. $x + y = 3$
2. $x - y = 3$
3. $2x + y = 6$
4. $2x - y = 6$

ตอบ 1.

แนวคิด จัดรูปสมการวงกลมเพื่อหารัศมีและจุดศูนย์กลาง

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 2^2$$

มีจุดศูนย์กลาง O(2, −1) รัศมี 2.



ขั้นตอนการวาดรูป

1. เขียนวงกลมจุดศูนย์กลาง O(2, −1) และรัศมี 2

2. เขียนจุด A(3, 0)

3. ลากเส้น PQ ตั้งฉากกับ OA และผ่านจุด A จะได้ PQ เป็นคอร์ดที่ต้องการ

จากลักษณะของเส้น PQ จะเห็นว่า ความชัน PQ เป็นลบ

ดูความชันของแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $x + y = 3$; ความชัน = −1

ตัวเลือก 2. $x - y = 3$; ความชัน = 1

ตัวเลือก 3. $2x + y = 6$; ความชัน = −2

ตัวเลือก 4. $2x - y = 6$; ความชัน = 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

ขณะวาดรูปขอให้นักเรียนสังเกตให้ดีจะเห็นว่า เส้นตรงที่ผ่าน PQ ตัดแกน Y ทางด้านบวกเมื่อวัดระยะทางจะได้ จุดตัดแกน Y เป็น (0, 3)

ตัวเลือก 1. $x + y = 3$; $x = 0$ จะได้ $y = 3$

ตัวเลือก 4. $2x + y = 6$; $x = 0$ จะได้ $y = 6$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ความชัน OA $= \dfrac{0-(-1)}{3-2} = 1$

เพราะว่า $PQ \perp OA$ เพราะฉะนั้นความชัน PQ เท่ากับ −1

สมการเส้นตรงที่ผ่าน PQ คือเส้นตรงที่มีความชัน −1 และผ่านจุด A(3, 0)

$$y - 0 = (-1)(x - 3)$$

$$x + y = 3$$

ตัวอย่าง 4. คณิตศาสตร์ กข. 2534

กำหนดให้เส้นตรง L_1 ลากผ่านจุดกำเนิดและทำมุม 60° กับแกน X ทางด้านบวก ถ้าเส้นตรง L_2 ห่างจากจุดกำเนิด 6 หน่วย และตั้งฉากกับเส้นตรง L_1 ในควอดรันท์ที่หนึ่ง แล้วสมการของเส้นตรง L_2 คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

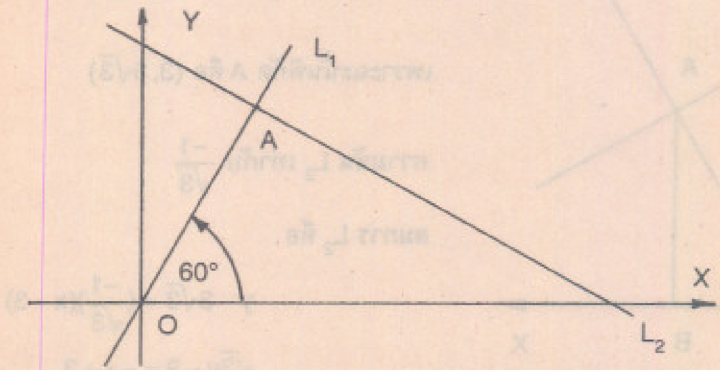
1. $x+\sqrt{3}y+12=0$
2. $\sqrt{3}x+y+12=0$
3. $x+\sqrt{3}y-12=0$
4. $\sqrt{3}x+y-12=0$

ตอบ 3.

แนวคิด การทำโจทย์ข้อสอบที่ดีนักเรียนควรจะวาดรูปจริงตามโจทย์ เพื่อประโยชน์ในการคำนวณวิธีจริง และใช้แนวทางตัดตัวเลือก

การวาดรูปทำตามขั้นตอนดังนี้

1. ลากเส้น L_1 ผ่านจุดกำเนิดและทำมุม 60° กับแกน X
2. ลาก OA ยาว 6 เซนติเมตร
3. ลากเส้น L_2 ผ่านจุด A และตั้งฉากกับ L_1



เพราะว่า L_1 ทำมุม 60° กับแกน X เพราะฉะนั้น ความชัน L_1 เท่ากับ $\tan 60° = \sqrt{3}$

เพราะว่า L_2 ตั้งฉากกับ L_1 เพราะฉะนั้น ความชัน L_2 เท่ากับ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

ดูความชันแต่ละตัวเลือก

1. ความชัน = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
2. ความชัน = $-\sqrt{3}$
3. ความชัน = $\frac{-1}{\sqrt{3}}$
4. ความชัน = $-\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งก่อน

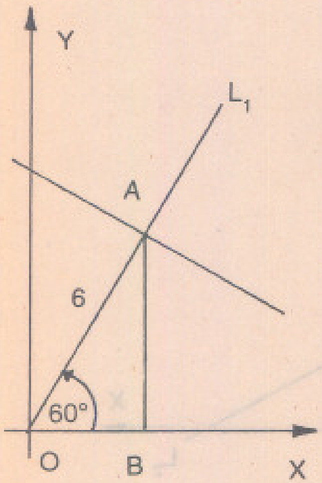
จากรูปจริงที่เราวาดจะเห็นว่าเส้นตรง L_2 ตัดแกน Y ทางด้านบวก

ตัวเลือก 1. $x = 0$ จะได้ $y = \frac{-12}{\sqrt{3}} < 0$

ตัวเลือก 3. $x = 0$ จะได้ $y = \frac{12}{\sqrt{3}}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

วิธีจริง



$\sin 60° = \frac{AB}{OA}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{6}$

$AB = 3\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{OB}{OA}$

$\frac{1}{2} = \frac{OB}{6}$

$OB = 3$

เพราะฉะนั้นพิกัด A คือ $(3, 3\sqrt{3})$

ความชัน L_2 เท่ากับ $\frac{-1}{\sqrt{3}}$

สมการ L_2 คือ

$$y - 3\sqrt{3} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)(x - 3)$$

$$\sqrt{3}y - 9 = -x + 3$$

$$x + \sqrt{3}y - 12 = 0$$

ตัวอย่าง 5. คณิตศาสตร์ กข. 2536

กำหนดให้ A(a, 3), B(7, −3) และ C(−4, −2) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมที่มี A เป็นมุมฉาก ถ้า a > tan 60° แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ C คือข้อใดต่อไปนี้

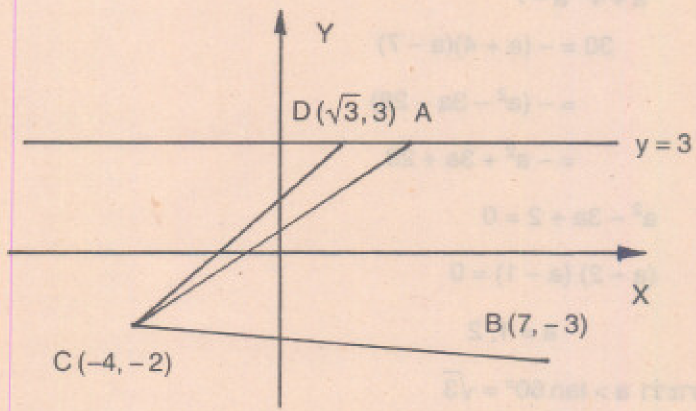
1. $x - y + 2 = 0$
2. $5x - 6y + 8 = 0$
3. $5x - 4y + 12 = 0$
4. $7x - 5y + 18 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $a > \tan 60°$ ดังนั้น $a > \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น A(a, 3) อยู่บนเส้นตรง y = 3 และอยู่ทางด้านขวาของจุด $(\sqrt{3}, 3)$

ต่อไปวาดรูปตามโจทย์กำหนด



ให้ $D(\sqrt{3}, 3)$ จะได้ความชัน $CD = \frac{-2-3}{-4-\sqrt{3}} = \frac{-5}{-4-1.732}$

$= \frac{5}{5.732}$

$= 0.87229$

เพราะว่าจุด A อยู่ทางขวาของจุด D

เพราะฉะนั้น ความชัน AC < ความชัน AD

ความชันของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. ความชัน = 1 2. ความชัน = $\frac{5}{6} = 0.833$

3. ความชัน = 1.25 4. ความชัน = $\frac{7}{5} = 1.4$

เพราะว่าความชัน AC ต้องน้อยกว่า 0.87229

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า A เป็นมุมฉาก เพราะฉะนั้น CA ตั้งฉากกับ BA

ดังนั้น (ความชัน AC) (ความชัน AB) = –1

$$\left(\frac{3+2}{a+4}\right)\left(\frac{3+3}{a-7}\right) = -1$$

$$30 = -(a+4)(a-7)$$

$$= -(a^2 - 3a - 28)$$

$$= -a^2 + 3a + 28$$

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$(a-2)(a-1) = 0$$

$$a = 1, 2$$

เพราะว่า $a > \tan 60° = \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $a = 2$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A(2, 3) และ C(–4, –2) คือ

$$\frac{y-3}{x-2} = \frac{-2-3}{-4-2} = \frac{5}{6}$$

$$6y - 18 = 5x - 10$$

$$5x - 6y + 8 = 0$$

การนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์

ความหมายของคำว่าการนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์นั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเช่น

1. โจทย์ถามเกี่ยวกับพิกัดของจุดและตัวเลือกเป็นพิกัดของจุด เราก็นำพิกัดของจุดในตัวเลือกไปแทนค่า

2. โจทย์ถามเกี่ยวกับมุมและตัวเลือกเป็นมุมเราก็สามารถนำค่ามุมในตัวเลือกไปตรวจสอบว่าจะสอดคล้องกับโจทย์หรือไม่

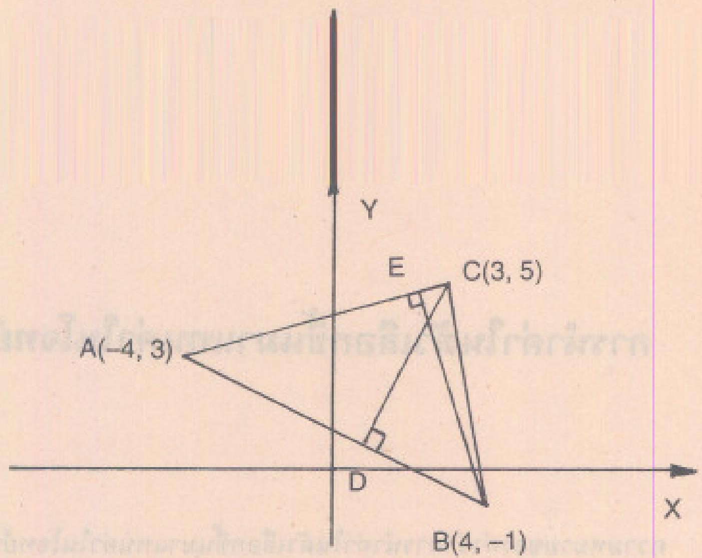
ตัวอย่างต่างๆ ที่นำมาให้ดูนี้เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจความหมายของการนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์ได้มากขึ้น

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$ และ M เป็นจุดตัดของเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดไปตั้งฉากกับฐาน ถ้าพิกัด $M(3, 3)$ แล้วพิกัดของจุด C เท่ากับเท่าใด

1. (3, 5)	2. (4, 5)
3. (5, 4)	4. (6, 4)

ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามข้อสมมติว่า C มีพิกัดเป็น (3, 5)

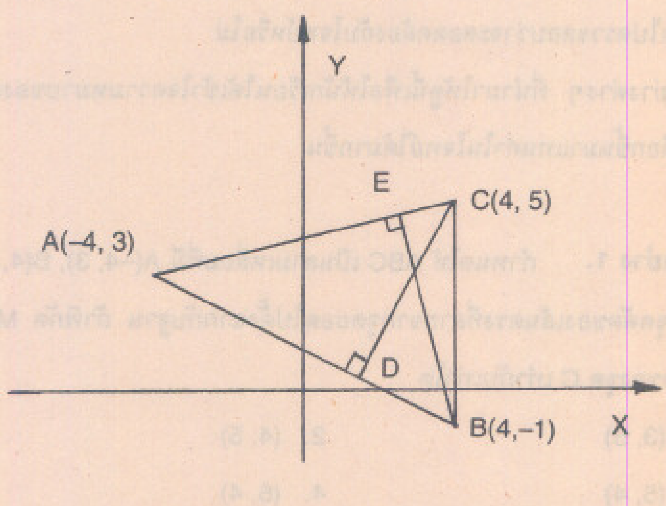


ลาก BE ⊥ AC และ CD ⊥ AB

วัดพิกัดของจุดตัดได้เป็น (2.5, 4.2) ไม่เท่ากับ (3, 3)

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้

สมมติ C(4,5)



ลาก BE ⊥ AC และ CD ⊥ AB

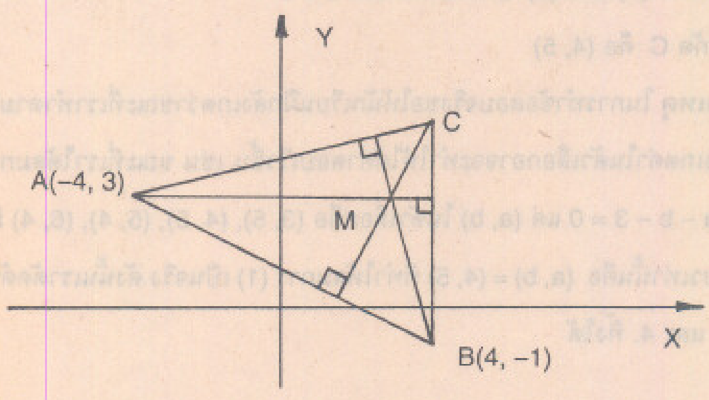
วัดพิกัดของจุดตัดได้เป็น (3, 3) ตรงกับพิกัดของจุด M

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

หมายเหตุ ขอให้นักเรียนลองวาดรูปตามพิกัด C(5, 4) และ C(6, 4) จะพบว่าจุดตัดที่ได้จะไม่เท่ากับ (3, 3)

ข้อสังเกต นักเรียนสามารถใช้เหตุผลนี้ตัดตัวเลือกได้เร็วที่สุด เพราะว่า A(−4, 3) และ M(3, 3) ดังนั้น AM ขนานแกน X และ AM ตั้งฉากกับ BC ได้ก็ต่อเมื่อ BC ต้องขนานกับแกน Y เพราะฉะนั้น (4, 5) เป็นตัวเลือกเดียวที่ทำให้ BC ขนานกับแกน Y ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง



สมมติจุด C มีพิกัดเป็น (a, b)

ความชัน MC เท่ากับ $\frac{b-3}{a-3}$

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{3-(-1)}{-4-4} = \frac{-1}{2}$

เพราะว่า MC ⊥ AB เพราะฉะนั้น $\left(\frac{b-3}{a-3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

$$b-3 = 2(a-3)$$

$$= 2a-6$$

$$2a - b - 3 = 0 \qquad \text{———} (1)$$

ความชัน AC เท่ากับ $\dfrac{b-3}{a-(-4)} = \dfrac{b-3}{a+4}$

ความชัน MB เท่ากับ $\dfrac{3-(-1)}{3-4} = -4$

เพราะว่า $AC \perp MB$ เพราะฉะนั้น $(\dfrac{b-3}{a+4})(-4) = -1$

$$4b - 12 = a + 4$$

$$a - 4b + 16 = 0 \qquad \text{———} (2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a = 4$ และ $b = 5$

สรุปพิกัด C คือ (4, 5)

หมายเหตุ ในการทำข้อสอบจริงขอให้นักเรียนฝึกสังเกตว่าขณะที่เราทำตามวิธีจริง และสังเกตค่าในตัวเลือกอาจจะทำให้ได้คำตอบเร็วขึ้น เช่น ขณะที่เราได้สมการ (1) คือ $2a - b - 3 = 0$ แต่ (a, b) ในตัวเลือกคือ (3, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 4) มีเพียงจุดเดียวเท่านั้นคือ (a, b) = (4, 5) ที่ทำให้สมการ (1) เป็นจริง ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่าง 2. คณิตศาสตร์ กข. 2534

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีพิกัดของจุด A เป็น (−1, 2) และกำหนด $\overrightarrow{AB} = 9\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{AD} = -\bar{i} + 5\bar{j}$ อยากทราบว่าพิกัดของจุด C เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. (7, 11) 2. (8, 11)

3. (9, 11) 4. (8, 9)

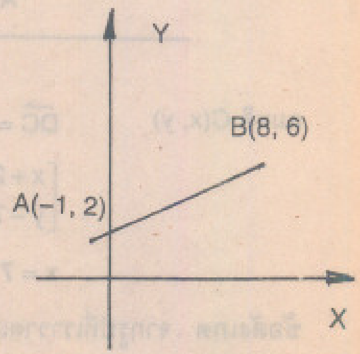
ตอบ 1.

แนวคิด

เขียนรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้วนำตัวเลือกไปแทนค่าเพื่อดูว่าเป็นจุด C ได้หรือไม่

เพราะว่า A(−1, 2) และ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นพิกัด B คือ (8, 6)



เพราะว่า $\overrightarrow{AD}$ ขนานกับ $\overrightarrow{BC}$

เพราะฉะนั้นเรานำตัวเลือกมาพิจารณาได้เลย

1) ถ้า C(7, 11) แล้ว $\overrightarrow{BC} = -\bar{i} + 5\bar{j}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$

2) ถ้า C(8, 11) แล้ว $\overrightarrow{BC} = 5\bar{j}$ ไม่ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$

3) ถ้า C(9, 11) แล้ว $\overrightarrow{BC} = \bar{i} + 5\bar{j}$ ไม่ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$

4) ถ้า C(8, 9) แล้ว $\overrightarrow{BC} = 3\bar{j}$ ไม่ขนานกัน $\overrightarrow{AD}$

เพราะฉะนั้นมีพิกัด (7, 11) เท่านั้นที่ทำให้ $\overrightarrow{BC}$ ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้โดยไม่ต้องหาพิกัด D

วิธีจริง A = (−1, 2)

สมมติ B(x,y); $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$

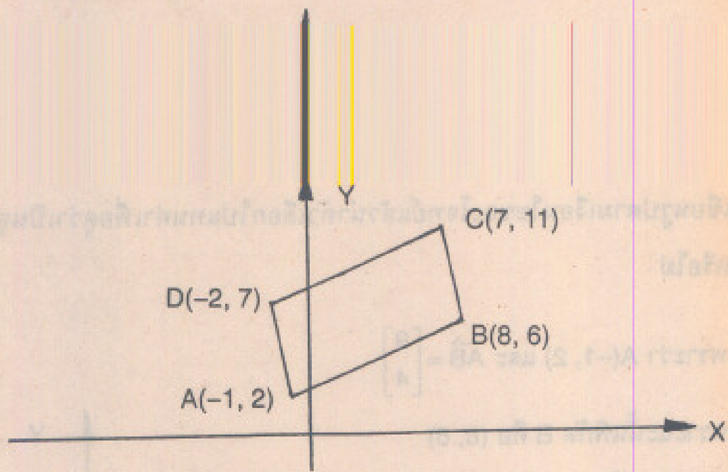
$$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น x = 8, y = 6 ดังนั้น B มีพิกัดเป็น (8, 6)

สมมติ D(x,y); $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y-2 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น x = −2, y = 7 ดังนั้น D มีพิกัดเป็น (−2, 7)



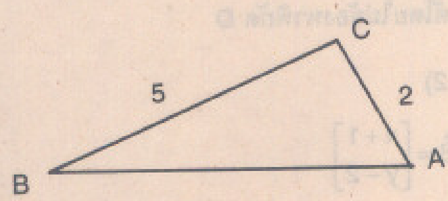
สมมติ C(x, y) $\qquad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix} x+2 \\ y-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$x = 7$ และ $y = 11$ สรุป C(7, 11)

ข้อสังเกต จากรูปที่เราวาดเมื่อเขียนจุด A, B และ D แล้วจะพบว่า C(x, y) นั้น $x < 8$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. ได้เลย

ตัวอย่าง 3.



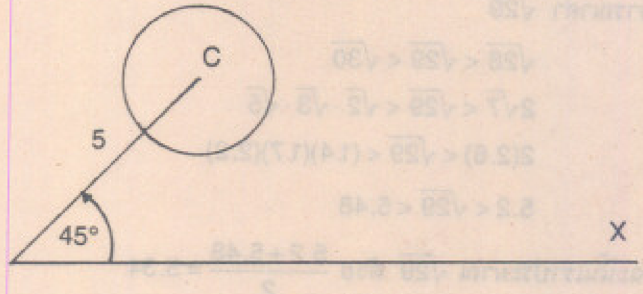
จากรูป ABC เป็นสามเหลี่ยมมี AC = 2, BC = 5 มี B เท่ากับเท่าใดจึงจะทำให้สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่มากที่สุด

1. $\frac{¶}{4}$ $\qquad$ 2. $\frac{¶}{3}$

3. $\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}}$ $\qquad$ 4. $\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$

ตอบ 3.

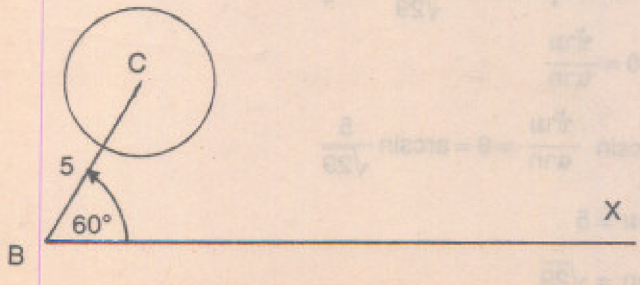
แนวคิด ลองวาดรูปตามค่าในตัวเลือก 1. และ 2. ก่อน



1. ลาก BX
2. ลาก CB และ $C\hat{B}X = \frac{\P}{4}$ และ BC = 5
3. การวงเวียนรัศมี 2 จุดศูนย์กลางที่ C

   จะเห็นได้ว่าวงกลมไม่ตัดแนว BX

เพราะฉะนั้นไม่เกิดรูปสามเหลี่ยมเมื่อ $\hat{B} = \frac{\P}{4}$



ในทำนองเดียวกัน $\hat{B} = \frac{\P}{3}$ ก็ไม่ทำให้เกิดรูปสามเหลี่ยม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ลองพิจารณาค่า $\sqrt{29}$

$$\sqrt{28} < \sqrt{29} < \sqrt{30}$$

$$2\sqrt{7} < \sqrt{29} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$$

$$2(2.6) < \sqrt{29} < (1.4)(1.7)(2.2)$$

$$5.2 < \sqrt{29} < 5.48$$

เพราะฉะนั้นเราประมาณ $\sqrt{29}$ ด้วย $\frac{5.2 + 5.48}{2} = 5.34$

หมายเหตุ ค่าจริง $\sqrt{29} = 5.385$

เพราะว่า $\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} = \arcsin \frac{5}{5.34} > \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}} > \frac{\P}{4}$

ดังนั้นจะไม่เกิดรูปสามเหลี่ยม เมื่อ $\hat{B} = \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$

สรุปตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

การประมาณค่ามุม $\arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$ โดยรูปภาพ

จาก $\sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$

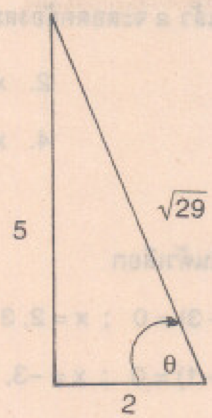
$$\arcsin \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \theta = \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$$

เมื่อ ข้าม $= 5$

ฉาก $= \sqrt{29}$

เพราะฉะนั้นด้านประชิดมุม $= \sqrt{\text{ฉาก}^2 - \text{ข้าม}^2} = \sqrt{29-25} = 2$

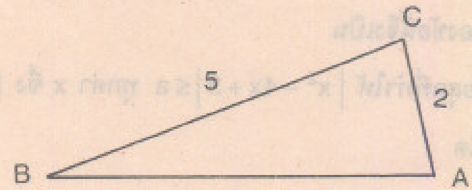
วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี ชิด = 2, ข้าม = 5



วัดมุม θ ได้ 62°

นั่นคือ $\arcsin\frac{5}{\sqrt{29}} > \frac{\pi}{4}$ จึงทำให้ไม่เกิดรูปสามเหลี่ยม

วิธีจริง



พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC\cdot \sin C \quad = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\cdot \sin C = 5\sin C$

ซึ่งมีค่ามากสุดเมื่อ $\sin C = 1$ หรือ $C = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $BA = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$

$\sin B = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{29}}$

สรุป $B = \arcsin\frac{2}{\sqrt{29}}$

ตัวอย่าง 4. คณิตศาสตร์ กข. 2533

ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left|x^2-4x+3\right| \le a$

ทุกค่า x ซึ่ง $|4x-11| \le 5$ แล้ว a จะสอดคล้องสมการใดต่อไปนี้

1. $x^2-5x+6=0$
2. $x^2+2x-3=0$
3. $x^2-3x+2=0$
4. $x^2+5x+4=0$

ตอบ 1.

แนวคิด หารากของทุกสมการในตัวเลือก

1. $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)=0$; $x=2, 3$
2. $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$; $x=-3, 1$
3. $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)=0$; $x=1, 2$
4. $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)=0$; $x=-1, -4$

คำถามของข้อนี้จึงเป็น

a ค่าน้อยสุดที่ทำให้ $\left|x^2-4x+3\right| \le a$ ทุกค่า x ซึ่ง $|4x-11| \le 5$ เป็นสมาชิกของเซตใด

1. $\{2, 3\}$
2. $\{-3, 1\}$
3. $\{1, 2\}$
4. $\{-1, -4\}$

เพราะว่า 2 อยู่ในตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะฉะนั้น $a=2$ ไม่ได้ มิฉะนั้นจะทำให้โจทย์มีตัวเลือก 2 ตัว

เพราะว่า 1 อยู่ในตัวเลือก 2. และ 3. เพราะฉะนั้น $a=1$ ไม่ได้

สรุปตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไปก่อนได้

เหลือตัวเลขที่อาจเป็นค่า a ได้คือ 3, −3, −1, −4

เพราะว่า $\left|x^2-4x+3\right| \le a$ เพราะฉะนั้น $a=3$ แน่นอน สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

หมายเหตุ เพราะว่า $\left|x^2-4x+3\right| \le a$

ดังนั้น $a \le 0$ เพราะฉะนั้นนักเรียนอาจตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อนตัวเลือกอื่น

ข้อสังเกต การทำโจทย์ข้อนี้เรานำค่าในตัวเลือกมาแทนในโจทย์ โดยไม่สนใจประโยชน์จาก $|4x-11| \le 5$ ที่โจทย์ให้มา

วิธีจริง พิจารณา $|4x-11| \le 5$

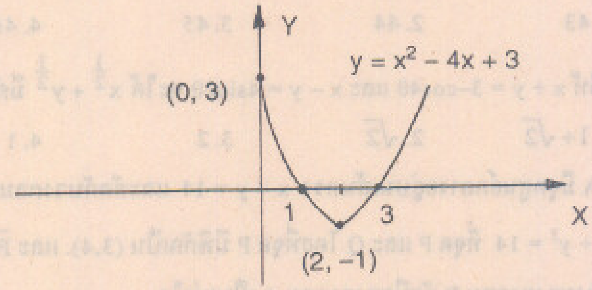
$$-5 \le 4x-11 \le 5$$

$$6 \le 4x \le 16$$

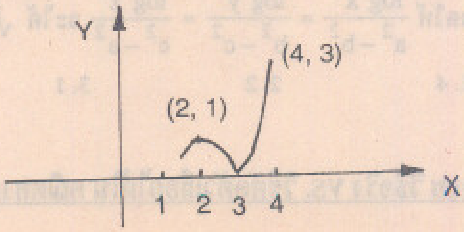
$$1.5 \le x \le 4$$

และ $y = x^2-4x+3$

$y+1 = x^2-4x+4 = (x-2)^2$ มีกราฟเป็น



กราฟของ $y = \left|x^2-4x+3\right|$ บนช่วง $1.5 \le x \le 4$ คือ



เพราะฉะนั้น $\left|x^2-4x+3\right| \le 3$ ทุกค่า x ซึ่ง $|4x-11| \le 5$

โจทย์เสริมทักษะการตัดตัวเลือก
ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกประจำปี พ.ศ. 2539
22 มิถุนายน พ.ศ. 2539

1. เศษเหลือจากการหาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ ด้วย $x^2 - 1$ เป็นเท่าใด

   1. $6x$ 2. $9x$ 3. $3x + 1$ 4. $7x + 1$

2. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ เมื่อ $2 < x < 3$ มีค่าเท่าใด

   1. $3\sqrt{3}$ 2. $4\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{2}$ 4. $3\sqrt{2}$

3. จำนวนเต็มบวก 5 จำนวนเรียงติดต่อกัน ซึ่งมีผลคูณเท่ากับ 6375600 ผลบวกของจำนวนที่น้อยที่สุดกับจำนวนที่มากที่สุดใน 5 จำนวนนั้นเป็นเท่าใด

   1. 43 2. 44 3. 45 4. 46

5. กำหนดให้ $x + y = 3-\cos 4\theta$ และ $x - y = 4\sin 2\theta$ จะได้ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด

   1. $1+\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. 2 4. 1

8. วงกลม A มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 14$ และตัดกับวงกลมซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 14$ ที่จุด P และ Q โดยที่จุด P มีพิกัดเป็น (3,4). และ $\overline{PQ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม B รัศมีของวงกลม A เป็นเท่าใด

   1. $5\sqrt{5}$ 2. $4\sqrt{5}$ 3. $3\sqrt{5}$ 4. $2\sqrt{5}$

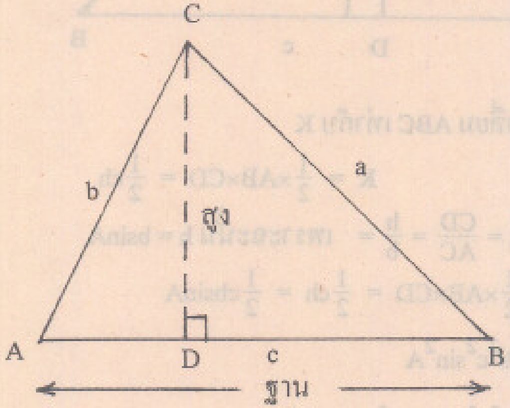
12. กำหนดให้ $\dfrac{\log x^2}{a^2-b^2} = \dfrac{\log y^2}{b^2-c^2} = \dfrac{\log z^2}{c^2-a^2}$ จะได้ $\sqrt{xyz}$ มีค่าเท่าใด

   1. 4 2. 2 3. 1 4. 0

<u>อ่านเฉลย วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือกได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 15</u>

สูตร 6 สูตรกับการหาพื้นที่สามเหลี่ยม

สูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยมเป็นที่ทราบกันดีตั้งแต่ระดับประถมศึกษาว่ามีสูตรเป็น $\frac{1}{2}$ คูณ ความยาวฐาน คูณ ความสูง

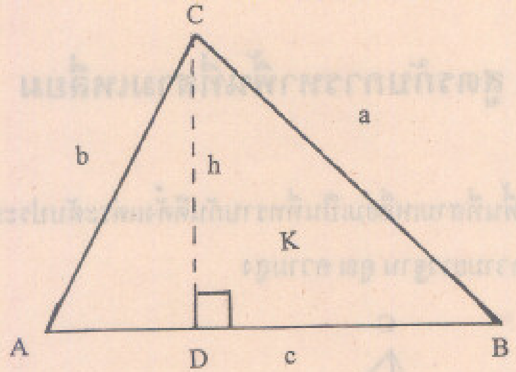


พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\frac{1}{2}\times AB\times CD$

ต่อมาเมื่อมีการเรียนรู้การกำหนดเกี่ยวกับการกำหนดจุดในพิกัดมุมฉากและใช้ความรู้ทางตรีโกณมิติ ทำให้เราสามารถหาพื้นที่สามเหลี่ยมโดยใช้สูตร $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s=\frac{a+b+c}{2}$ และ a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A,,B,C ตามลำดับ

การพิสูจน์ว่า พื้นที่สามเหลี่ยม ABC = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี a,b,c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A,B,C ตามลำดับ และ $s=\frac{a+b+c}{2}$



ให้พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับ K

เพราะฉะนั้น $K = \frac{1}{2}\times AB\times CD = \frac{1}{2}ch$

เพราะว่า $\sin A = \frac{CD}{AC} = \frac{h}{b} =$ เพราะฉะนั้น $h = b\sin A$

ดังนั้น $K = \frac{1}{2}\times AB\times CD = \frac{1}{2}ch = \frac{1}{2}cb\sin A$

$$K^2 = \frac{1}{4}b^2c^2\sin^2 A$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)$$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos A)(1+\cos A)$$

$$= [\frac{1}{2}bc(1+\cos A)][\frac{1}{2}bc(1-\cos A)]$$

เพราะว่า $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}bc(1+\cos A) = \frac{1}{2}bc(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{4}$$

$$= [\frac{(b+c)+a}{2}][\frac{(b+c)-a}{2}]$$

$$= [\frac{b+c+a}{2}][\frac{b+c-a}{2}]$$

และ $\frac{1}{2}bc(1-\cos A)=\frac{1}{2}bc(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})$

$$=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4}$$

$$=\frac{a^2-(b+c)^2}{4}$$

$$=[\frac{a-(b-c)}{2}][\frac{a+(b-c)}{2}]$$

$$=[\frac{a-b+c}{2}][\frac{a+b-c}{2}]$$

เพราะฉะนั้น $K^2=[\frac{1}{2}bc(1+\cos A)][\frac{1}{2}bc(1-\cos A)]$

$$=[\frac{b+c+a}{2}][\frac{b+c-a}{2}][\frac{a-b+c}{2}][\frac{a+b-c}{2}]$$

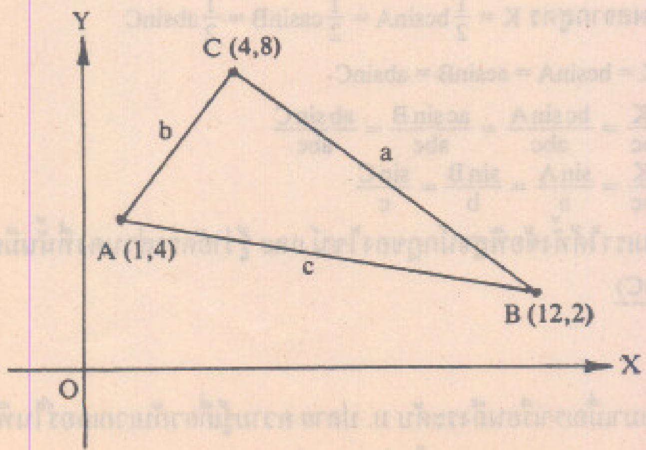
เพราะว่า $s=\frac{a+b+c}{2}$ เพราะฉะนั้น $s-a=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}$

$s-b=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a-b+c}{2}$ $s-c=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$

และ $K^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$

สรุป พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ตัวอย่างเช่น สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดของจุดยอดเป็น A(1 , 4) , B(12 , 2) , C(4 , 8)



$$a = |BC| = \sqrt{(12-4)^2+(2-8)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$
$$b = |AC| = \sqrt{(1-4)^2+(4-8)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$
$$c = |AB| = \sqrt{(12-1)^2+(2-4)^2} = \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$
$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{10+5+5\sqrt{5}}{2} = \frac{15+5\sqrt{5}}{2}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$= \sqrt{(\frac{15+5\sqrt{5}}{2})(\frac{15+5\sqrt{5}}{2}-10)(\frac{15+5\sqrt{5}}{2}-5)(\frac{15+5\sqrt{5}}{2}-5\sqrt{5})}$$
$$= \frac{1}{4}\sqrt{5(3+\sqrt{5})5(-1+\sqrt{5})5(1+\sqrt{5})5(3-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{25}{4}\sqrt{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{25}{4}\sqrt{(-1+5)(9-5)}$$
$$= \frac{25}{4}\sqrt{16}$$
$$= 25$$

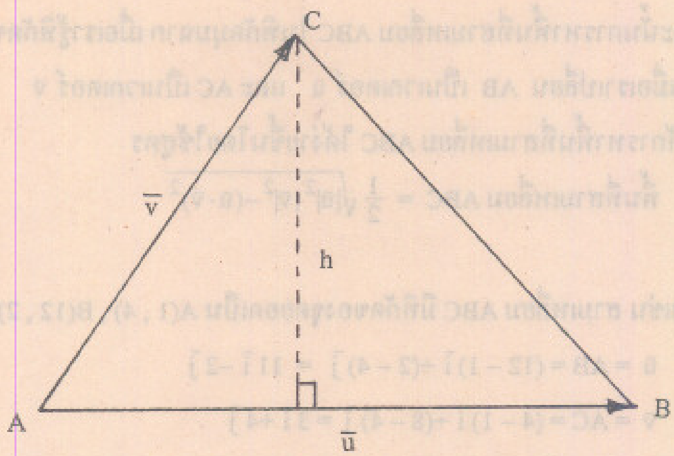
หมายเหตุ ผลจากสูตร $K = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

จะได้ $2K = bc\sin A = ac\sin B = ab\sin C$

$$\frac{2K}{abc} = \frac{bc\sin A}{abc} = \frac{ac\sin B}{abc} = \frac{ab\sin C}{abc}$$
$$\frac{2K}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

เพราะฉะนั้นเราได้ทั้งข้อพิสูจน์กฎของไซน์ และ รู้ว่าอัตราส่วนคงที่นั้นมีค่าเท่ากับ $\frac{2(\text{Area ABC})}{abc}$

ต่อมาเมื่อเราเรียนถึงระดับ ม. ปลาย ความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในพิกัดมุมฉากสามารถนำมาช่วยในการหาพื้นที่สามเหลี่ยมได้



กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มี $AC = \bar{v}$ และ $AB = \bar{u}$

ให้ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

ทบทวน $\cos A = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = ac + bd$

$$
\begin{aligned}
\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\
&= \frac{1}{2} \times \text{ขนาดเวกเตอร์ } \bar{u} \times \text{สูง} \\
&= \frac{1}{2}|\bar{u}|h \\
&= \frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sin A \\
&= \frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sqrt{1-\cos^2 A} \\
&= \frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sqrt{1-\left(\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}|\bar{u}||\bar{v}|\sqrt{\frac{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}{(|\bar{u}||\bar{v}|)^2}} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นการหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ในพิกัดมุมฉาก เมื่อเรารู้พิกัดของจุดยอด A,B,C เมื่อเราเปลี่ยน AB เป็นเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ AC เป็นเวกเตอร์ $\bar{v}$ จะทำให้การหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ได้ง่ายขึ้นโดยใช้สูตร

$$\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$$

ตัวอย่างเช่น สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดของจุดยอดเป็น A(1 , 4) , B(12 , 2) , C(4 , 8)

$$\bar{u} = AB = (12-1)\bar{i} + (2-4)\bar{j} = 11\bar{i} - 2\bar{j}$$

$$\bar{v} = AC = (4-1)\bar{i} + (8-4)\bar{j} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$$

$$|\bar{u}|^2 = 11^2 + (-2)^2 = 121 + 4 = 25$$

$$|\bar{v}|^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (11\bar{i} - 2\bar{j})\cdot(3\bar{i} + 4\bar{j}) = (11)(3) + (-2)(4) = 33 - 8 = 25$$

$$\begin{aligned}\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2} &&= \frac{1}{2}\sqrt{(125)(25)-(25)^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{3125-625} &&= \frac{1}{2}\sqrt{2500}\\ &= \frac{1}{2}50 &&= 25\end{aligned}$$

ในหลักสูตร ม.ปลายหลังจากนักเรียนได้เรียนเรื่องเวกเตอร์ ต่อไปก็จะได้เรียนเรื่องเมทริกซ์ เราสามารถนำความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์และค่ากำหนดมาช่วยในการหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมได้

พิจารณาต่อจาก $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

$$|\bar{u}|^2 = a^2 + b^2$$

$$|\bar{v}|^2 = c^2 + d^2$$

$$(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 = (ac+bd)^2$$

$$|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 - (\bar{u}\cdot\bar{v})^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) - (ac+bd)^2$$

$$= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - (a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2)$$

$$= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2$$

$$= (ad-bc)^2$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 - (\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(ad-bc)^2}$$

$$= \frac{1}{2}|ad-bc|$$

$$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})|$$

ตัวอย่างเช่น สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดของจุดยอดเป็น A(1 , 4) , B(12 , 2) , C(4 , 8)

$$\bar{u} = AB = (12-1)\bar{i} + (2-4)\bar{j} = 11\bar{i} - 2\bar{j}$$

$$\bar{v} = AC = (4-1)\bar{i} + (8-4)\bar{j} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})|$

$$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix})|$$

$$= \frac{1}{2}|44-(-6)|$$

$$= 25$$

ขณะนี้เรามีสูตรการหาพื้นที่สามเหลี่ยมให้ใช้ตามความเหมาะสมของข้อกำหนดที่โจทย์หรือคำถามขณะนั้นกำหนดให้

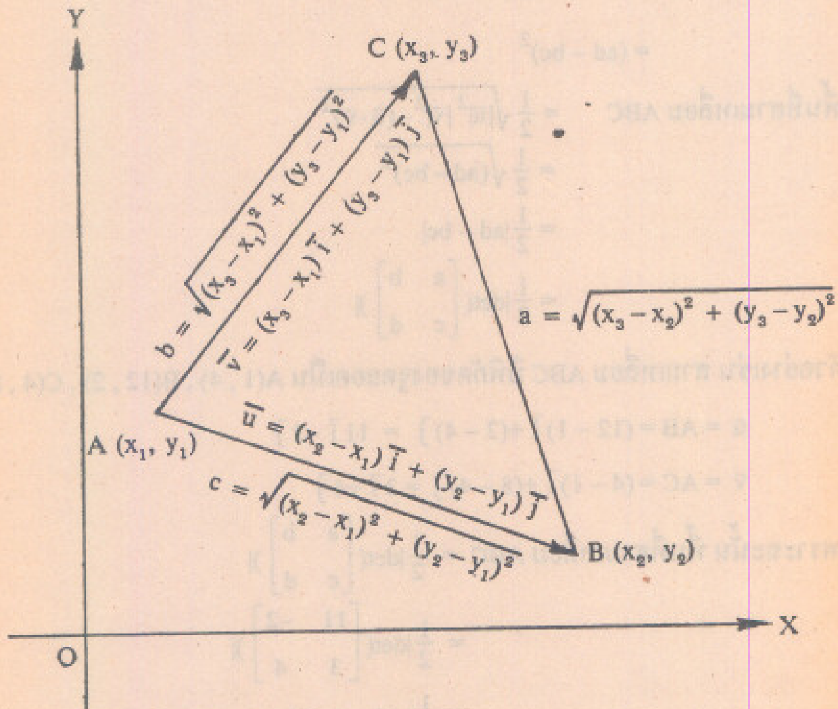
พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}$ คูณ ความยาวฐาน คูณ ความสูง

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2-(\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$$

$$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})|$$

สรุปโดยรวมให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีพิกัด $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$



$$a = |BC| = \sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$$

$$b = |AC| = \sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$

$$c = |AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$\bar{u} = AB = (x_2 - x_1)\,\bar{i} + (y_2 - y_1)\,\bar{j}$

$\bar{v} = AC = (x_3 - x_1)\,\bar{i} + (y_3 - y_1)\,\bar{j}$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{|\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 - (\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$

$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})|$

$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix})|$

ตัวอย่างเช่น สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดของจุดยอดเป็น A(1 , 4) , B(12 , 2) , C(4 , 8)

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix})|$

$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} 12-1 & 2-4 \\ 4-1 & 8-4 \end{bmatrix})|$

$= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix})|$

$= \frac{1}{2}|\,44 + 6\,|$

$= 25$

ตัวอย่างข้อสอบที่เกี่ยวข้องกับบทความนี้

ตัวอย่าง 1. (ข้อสอบ ENTRANCE)

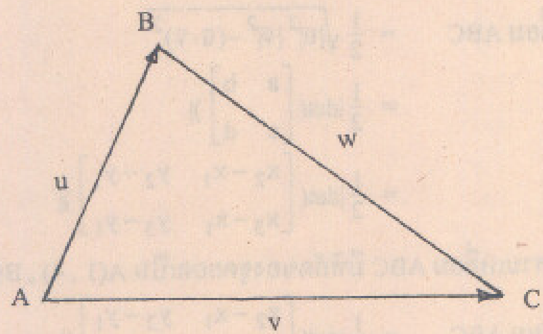
ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ $AB = \bar{u}$, $AC = \bar{v}$ และ $BC = \bar{w}$

แล้วพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

1. $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{v}\cdot\bar{v})(\bar{w}\cdot\bar{w}) - (\bar{v}\cdot\bar{w})^2}$
2. $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v}) + (\bar{w}\cdot\bar{w})^2}$
3. $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v}) + (\bar{u}\cdot\bar{v})^2}$
4. $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{v})(\bar{v}\cdot\bar{w}) + (\bar{u}\cdot\bar{w})^2}$

ตอบ 1.

แนวคิด



พื้นที่สามเหลี่ยมที่ให้ค่าเท่ากันมีสามสูตรคือ

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{v}\cdot\bar{v})(\bar{w}\cdot\bar{w})-(\bar{v}\cdot\bar{w})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{v}\cdot\bar{v})(\bar{u}\cdot\bar{u})-(\bar{v}\cdot\bar{u})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{w}\cdot\bar{w})-(\bar{u}\cdot\bar{w})^2}$

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกดูได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย(คู่มือตัดตัวเลือก) เล่มที่ 7 หน้า 13

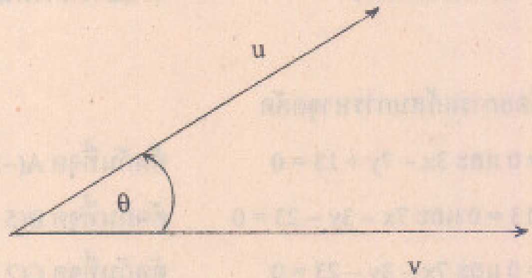
ตัวอย่าง 2. (ข้อสอบ ENTRANCE)

กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะได้ cosθ เป็นเท่าใด

1. $1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
2. $1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
3. $-1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$
4. $-1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

ตอบ 1.

แนวคิด



$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|}$$

$$\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = \left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)\cdot\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)$$

$$= \frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\cdot\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - 2\,\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\cdot\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} + \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\cdot\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}$$

$$= \frac{\bar{u}\cdot\bar{u}}{|\bar{u}|^2} - 2\cos\theta + \frac{\bar{v}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}$$

$$= \frac{|\bar{u}|^2}{|\bar{u}|^2} - 2\cos\theta + \frac{|\bar{v}|^2}{|\bar{v}|^2}$$

$$= 2 - 2\cos\theta$$

$$2\cos\theta = 2 - \left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$$

เพราะฉะนั้น $1 - \frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกดูได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย(คู่มือตัดตัวเลือก) เล่มที่ 7 หน้า 34

ตัวอย่าง 3. (ข้อสอบ สมาคมคณิตศาสตร์ 14 มกราคม 2539)

พื้นที่สามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรงที่มีสมการ $x + y + 1 = 0$, $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 ตารางหน่วย
2. 18 ตารางหน่วย
3. 20 ตารางหน่วย
4. 22 ตารางหน่วย

ตอบ 3.

แนวคิด โดยการแก้สมการหาจุดตัด

$x + y + 1 = 0$ และ $3x - 7y + 13 = 0$ ตัดกันที่จุด $A(-2 , 1)$

$3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ ตัดกันที่จุด $B(5 , 4)$

$x + y + 1 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ ตัดกันที่จุด $C(2 , -3)$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC
$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix})| \\
&= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ 2-(-2) & -3-1 \end{bmatrix})| \\
&= \frac{1}{2}|\det(\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix})| \\
&= \frac{1}{2}|-28-12| \\
&= 20
\end{aligned}
$$

การตัดตัวเลือก ทำโดยการวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ตามพิกัดและสเกลจริง ก็จะได้ค่าที่ใกล้เคียง 20 มาก นอกจากนั้นหากเราเขียนเส้นตรงจริงตามสมการ $x + y + 1 = 0$, $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ และดูจุดตัดจากกราฟก็ไม่จำเป็นที่จะต้องแก้สมการหาจุดตัด ก็จะได้คำตอบเหมือนกัน

≥→≥⊂~π∆∉ ī j̄ √ ∞θ∩∪∈×≤∧ ∨v̄ ū

ข้อสอบคณิตศาสตร์ที่มีโครงสร้างเหมือนกัน

ปัญหาคณิตศาสตร์ในรูปแบบของระบบสมการเชิงเส้น เช่น

$$2x + 3y = 17 \qquad \text{———} \; (1)$$

$$5x - 4y = 8 \qquad \text{———} \; (2)$$

สามารถหาคำตอบได้ด้วยวิธีการดังนี้

$5(1)$; $10x + 15y = 85$ ——— (3)

$5(2)$; $10x - 8y = 16$ ——— (4)

$(3) - (4)$; $23y = 69$

$y = 3$

จาก (1) $2x = 17 - 3y$

$= 17 - 9$

$= 8$

$x = 4$

ปัญหาข้างต้นนี้เป็นปัญหาในระบบจำนวนจริง

เมื่อเปลี่ยนเป็นปัญหาในระบบจำนวนเชิงซ้อน เช่น

จงหาจำนวนเชิงซ้อน x และ y ที่ทำให้

$$2x + 3y = 17i \qquad \text{———} \; (1)$$

$$5x - 4y = 8i \qquad \text{———} \; (2)$$

ด้วยวิธีการหาคำตอบแบบเดียวกันจะได้ว่า

5(1) ; $10x + 15y = 85i$ ——— (3)

2(2) ; $10x - 8y = 16i$ ——— (4)

(3) − (4) ; $23y = 69i$

$y = 3i$

จาก (1) $2x = 17i - 3y$

$= 17i - 3(3i)$

$= 8i$

$x = 4i$

จากตัวอย่างปัญหาข้างต้นนี้จะทำให้เห็นว่าเราสามารถสร้างปัญหาคณิตศาสตร์ที่มีโครงสร้างเป็นลักษณะของระบบสมการเชิงเส้นได้หลายลักษณะเช่น

1. จงหาเวกเตอร์ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ ที่ทำให้

$$2\bar{x} + 3\bar{y} = 17\bar{i}$$

$$5\bar{x} - 4\bar{y} = 8\bar{i}$$

2. จงหาเมตริกซ์ X และ Y ที่ทำให้

$$2X - 3Y = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$$

$$5X - 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

3. จงหาฟังก์ชัน f(x) และ g(x) ที่ทำให้

$$2f(x) - 3g(x) = 17x$$

$$5f(x) - 4g(x) = 8 + x$$

4. จงหาฟังก์ชัน f(x) และ g(x) ที่ทำให้

$$2f'(x) - 3g'(x) = 17$$

$$5f'(x) - 4g'(x) = 8$$

เพื่อให้ผู้อ่านได้เกิดแนวคิดในการประยุกต์เกี่ยวกับคำถาม คำตอบ และวิธีหาคำตอบ ขอให้ศึกษาจากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ x และ y เป็นคำตอบของสมการ

$$4x + 3y = 11$$

$$5x - 4y = 6$$

ค่าของ $x^2 + y^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 3
2. 4
3. 5
4. 10

ตอบ 3.

แนวคิด

$$4x + 3y = 11 \quad \text{——— (1)}$$

$$5x - 4y = 6 \quad \text{——— (2)}$$

4(1) ; $16x + 12y = 44$ ——— (3)

3(2) ; $15x - 12y = 18$ ——— (4)

(3) + (4) ; $31x = 62$

$$x = 2$$

จาก (1) ; $3y = 11 - 4x = 11 - 8 = 3$

$$y = 1$$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 2^2 + 1^2 = 5$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$5z + w = 4 + 3i$$

$$5z + 3w = 1 - 4i$$

ค่าของ $|z + w|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 17
2. 25
3. 49
4. 149

ตอบ 4.

แนวคิด $2z + w = 4 + 3i$ ——— (1)

$5z + 3w = 1 - 4i$ ——— (2)

3(1) ; $6z + 3w = 12 + 9i$ ——— (3)

(3)–(2) ; $z = (12 + 9i) - (1 - 4i)$

$= 11 + 13i$

จาก (1) ; $w = (4 + 3i) - 2z$

$= (4 + 3i) - 2(11 + 13i)$

$= -18 - 23i$

$z + w = (11 + 13i) + (-18 - 23i)$

$= -7 - 10i$

$|z + w|^2 = 49 + 100$

$= 149$

ตัวอย่าง 3.

กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$3\bar{u} + 2\bar{v} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$$

$$5\bar{u} + 3\bar{v} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$$

ค่าของ $|\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 634 2. 791

3. 891 4. 918

ตอบ 3.

แนวคิด $3\bar{u}+2\bar{v}=3\bar{i}+2\bar{j}$ ——— (1)

$5\bar{u}+3\bar{v}=4\bar{i}-5\bar{j}$ ——— (2)

5(1) ; $15\bar{u}+10\bar{v}=15\bar{i}+10\bar{j}$ ——— (3)

3(2) ; $15\bar{u}+9\bar{v}=12\bar{i}-15\bar{j}$ ——— (4)

(3) – (4) ; $\bar{v}=3\bar{i}+25\bar{j}$

$|\bar{v}|^2=3^2+25^2 = 9+625 = 634$

จาก (1) ; $3\bar{u}=3\bar{i}+2\bar{j}-2\bar{v}$

$=3\bar{i}+2\bar{j}-2(3\bar{i}+25\bar{j})$

$=-3\bar{i}-48\bar{j}$

$\bar{u}=-\bar{i}-16\bar{j}$

$|\bar{u}|^2 = 1+16^2 = 1+256 = 257$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2 = 257+634 = 891$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ f(x) และ g(x) สอดคล้องเงื่อนไข

$f(x) + 4g(x) = x^2 + 4$

$2f(x) + 6g(x) = x - 4$

ค่าของ (fog) (2) เท่ากับเท่าใด

1. –107 2. 107 3. 6 4. –6

ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) + 4g(x) = x^2 + 1$ ——— (1)

$2f(x) + 6g(x) = x - 4$ ——— (2)

2(1) ; $2f(x) + 8g(x) = 2x^2 + 2$ ——— (3)

$(3)-(2)$; $2g(x) = 2x^2+2-(x-4)$

$= 2x^2-x+6$

$g(x) = x^2-\frac{x}{2}+3$

จาก (1) ; $f(x) = x+1-4g(x)$

$= x+1-(4x^2-2x+12)$

$= -3x+2x-11$

เพราะว่า $g(2) = 4-1+3=6$

และ $f(6) = -3(36)+12-11 = -107$

เพราะฉะนั้น $(f\circ g)(2) = f(g(2)) = f(6) = -107$

ตัวอย่าง 5.

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$4f(x)+g(x) = x\sin x$$

$$f(x) + 2g(x) = \cos 2x$$

ค่าของ $f(0)+g(0)$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{7}$ 2. $\frac{3}{7}$

3. $-\frac{4}{7}$ 4. $\frac{4}{7}$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าเราต้องการหาค่าของ $f(0)+g(0)$

เพราะฉะนั้นแทนค่า $x=0$ ในสมการแล้วหาค่า $f(0)$ และ $g(0)$ จะดีกว่า

$$4f(0) + g(0) = 0 \quad \text{——— (1)}$$

$$f(0) + 2g(0) = 1 \quad \text{——— (2)}$$

4(2) ; $$4f(0) + 8g(0) = 4 \quad \text{——— (3)}$$

(3) − (1) $$7g(0) = 4$$

$$g(0) = \frac{4}{7}$$

จาก (2) ; $$f(0) = 1 - 2g(0)$$

$$= 1 - 2\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$= -\frac{1}{7}$$

เพราะฉะนั้น $$f(0) + g(0) = -\frac{1}{7} + \frac{4}{7}$$

$$= \frac{3}{7}$$

ตัวอย่าง 6.

กำหนดให้ A, B เป็นเมตริกซ์มิติ 2 x 2 ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$2A + 3B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3A + 4B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

เมตริกซ์ A + B เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} -1 & -7 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

ตอบ 2.

แนวคิด $2A+3B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{bmatrix}$ ——— (1)

$3A+4B=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ——— (2)

3(1) ; $6A+9B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 30\end{bmatrix}$ ——— (3)

2(2) ; $6A+8B=\begin{bmatrix}4 & 12\\ 2 & 8\end{bmatrix}$ ——— (4)

(3) – (4) ; $B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 30\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4 & 12\\ 2 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 10 & 22\end{bmatrix}$

จาก (1) ; $2A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 10\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 10 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 20\\ -26 & 56\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}2 & 10\\ -13 & -28\end{bmatrix}$

สรุป $A+B=\begin{bmatrix}2 & 10\\ -13 & -28\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 10 & 22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -3 & -6\end{bmatrix}$

วิธีลัด (2) – (1) ก็จะได้ A + B เหมือนกัน

ตัวอย่าง 7.

กำหนดให้ F(x) และ G(x) เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$5F'(x)+G'(x) = 4x+2$$

$$2F'(x)-3G'(x) = x^2+3$$

ค่าของ F' (0) + G' (1) เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. –1 4. 3

ตอบ 2.

แนวคิด $5F'(x) + G'(x) = 4x + 2$ ——— (1)

$2F'(x) - 3G'(x) = x^2 + 3$ ——— (2)

2(1) ; $10F'(x) + 2G'(x) = 8x + 4$ ——— (3)

5(2) ; $10F'(x) - 15G'(x) = 5x^2 + 15$ ——— (4)

(3) – (4) ; $17G'(x) = 8x + 4 - 5x^2 - 15$

$$17G'(x) = -5x^2 + 8x - 11$$

แทนค่า x = 1 จะได้

$$17G'(1) = -5 + 8 - 11 = -8$$

$$G'(1) = \frac{-8}{17}$$

จาก (1) ; $5F'(x) = 4x + 2 - G'(x)$

$$= 4x + 2 - \frac{1}{17}(-5x^2 + 8x - 11)$$

ดังนั้น $5F'(0) = 2 + \frac{11}{17} = \frac{45}{17}$

$$F'(0) = \frac{9}{17}$$

สรุป $F'(0) - G'(1) = \frac{9}{17} + \frac{8}{17} = 1$

ตัวอย่าง 8. กำหนดให้ A, B $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$\sqrt{2}\sin A + 2\cos B = 2$$

$$4\sin A + 6\cos B = 2\sqrt{2} + 3$$

ค่าของ tan(A + B) เท่ากับเท่าใด

1. $2 + \sqrt{3}$
2. $1 + \sqrt{3}$
3. $-2 - \sqrt{3}$
4. $1 - \sqrt{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด $\sqrt{2}\ \sin A + 2\cos B = 2$ ——— (1)

$4\sin A + 6\cos B = 2\sqrt{2} + 3$ ——— (2)

$3(1)$; $3\sqrt{2}\ \sin A + 6\cos B = 6$ ——— (3)

$(2) - (3)$; $(4 - 3\sqrt{2})\sin A = 2\sqrt{2} - 3$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{2}-2}{4-3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2}-3)(4+3\sqrt{2})}{(4-3\sqrt{2})(4+3\sqrt{2})}$$

$$= \frac{8\sqrt{2}+12-12-9\sqrt{2}}{16-18} = \frac{-\sqrt{2}}{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น $A = \frac{\P}{4}$ จาก (1) ; $2\cos B = 2 - \sqrt{2}\sin A = 2 - \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$

$\cos B = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $B = \frac{\P}{3}$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\tan\frac{\P}{4} + \tan\frac{\P}{3}}{1 - \tan\frac{\P}{4}\tan\frac{\P}{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{4+2\sqrt{3}}{1-3} = -2-\sqrt{3}$$

จากแนวคิดในการสร้างคำถามและคำตอบจะเห็นได้ว่า วิธีแก้สมการจะเหมือนกัน แต่ผลในทางประยุกต์เราสามารถนำเนื้อหาจำนวนเชิงซ้อน เวกเตอร์ ตรีโกณมิติ ฟังก์ชัน แคลคูลัส และอื่นๆ เข้ามาเชื่อมโยงเพื่อให้สอดคล้องกับเนื้อหาที่ต้องการวัดผลในบทเรียนขณะนั้น หวังว่าแนวคิดนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครูผู้สอนและนักเรียนผู้เข้าสอบและผู้สนใจทุกท่าน

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2540

วันเสาร์ที่ 5 เมษายน 2540

ตอนที่ 1.

1. กำหนดให้ $A = \{a,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

 1. $(A - \{b,c\}) \cup \{b\} = \{a,b,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$

 2. $(A - \{b,c\}) \cup \{b\} = \{a,\{a\},\{b\}\}$

 3. $(A - \{a,\{b\}\}) - \{a\} = \{\{b,c\}\}$

 4. $(A - \{a,\{b\}\}) - \{a\} = \{b,c\}$

2. ถ้าเซต A มีสมาชิก 8 จำนวน เซต B มีจำนวนสมาชิก 6 จำนวน และ A กับ B มีสมาชิกร่วมกัน 3 จำนวน แล้วฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต $(B - A)$ ไปยังเซต $(A - B)$ มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

 1. 3 2. 5 3. 10 4. 2.0

3. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

 B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1$

$(A - B)'$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

 1. $(-\infty,-2) \cup (-1, \infty)$ 2. $(-\infty,-2) \cup [-1, \infty)$

 3. $(-\infty,-2] \cup (-1, \infty)$ 4. $(-\infty,-2] \cup [-1, \infty)$

4. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 500 และหารด้วย 3 หรือ 5 ลงตัว มีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

 1. 167 2. 200 3. 233 4. 266

5. ถ้า p และ q เป็นประพจน์ แล้ว ประพจน์ $p \to \sim(q \to p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$
2. $\sim p \vee (p \vee q)$
3. $p \to (\sim q \vee q)$
4. $p \to (\sim q \wedge q)$

6. ถ้า $f = \{(x,y) \mid y = \log(x+2) + \log(x-3) - \log(4-x)\}$ แล้วโดเมนของ f คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(3, 4)$ 2. $(2, 3)$ 3. $(2, 4)$ 4. $(0, 2) \cup (3, 4)$

7. ให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ S เป็นเซตของฟังก์ชัน f ทั้งหมดโดยที่ $f: A \to A$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึง ถ้า $f(1) > 3$ แล้ว จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 40 2. 48 3. 56 4. 72

8. นาย ก เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ต่อจากนั้นจึงเดินทางไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่า นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$
2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$
3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2}$
4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2}$

9. กำหนดให้ $5\cos 3A \cos A + 5\sin 3A \sin A = -3$ เมื่อ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\tan A$

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

10. ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (5,2) และ (1,–6) เส้นตรง L_2 ผ่านจุด (3,–1) และมีความชัน –1 ถ้า (a,b) เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –2 2. –1 3. 1 4. 2

11. สมการพาราโบลาที่มีแกนอยู่บนแกน X มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของของวงรี $4x^2 + 3y^2 - 16x + 4 = 0$ คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2 = x$ 2. $y^2 = 4x$ 3. $2y^2 = x$ 4. $8y^2 = x$

12. ให้ $f(x) = \log\sqrt{x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{\log x}$ $R_f - D_{f+g}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 1)$ 2. $[0, 1]$ 3. $(-\infty, 1)$ 4. $(-\infty, 1]$

13. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x 2. $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x

3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ทุกๆ $x > 0$ 4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & y & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ x & -y & -1 \end{bmatrix}$ โดยที่โคแฟคเตอร์ของ $a_{21} = -6$, โคแฟคเตอร์ของ $a_{23} = 4$ แล้ว โคแฟคเตอร์ของ a_{33} มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -14 2. -13 3. 13 4. 14

15. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

ถ้า $AX + B = A$ แล้ว $b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 9 3. 10 4. 11

16. ให้ $\bar{u} = -\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j}$ แล้วเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในข้อใดต่อไปนี้มีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{w}$

1. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})$ 2. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})$

3. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} + \bar{j})$ 4. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} - \bar{j})$

17. กำหนด A(1,−1) , B(5,−4) และ P(2,3) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า Q เป็นจุดในระนาบ XY ที่ $\overline{PQ} = 2\overline{AB}$ แล้ว $\overline{AP} \cdot \overline{PQ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. −9　　2. −1　　3. 9　　4. 1

18. รากที่ 6 ของ −64 ที่ไม่เป็นจำนวนจริง เป็นจริงตามข้อใด

1. มี 4 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$
2. มี 4 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$ และ $-1 \pm \sqrt{3}i$
3. มี 6 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$, $-1 \pm \sqrt{3}i$ และ $\pm 2i$
4. มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$, $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

19. ถ้า $(2 + i)$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$ เมื่อ $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(1) = 8$, $f(-1) = 0$　　2. $f(1) = 0$, $f(-1) = 8$
3. $f(1) = 4$, $f(-1) = 0$　　4. $f(1) = 0$, $f(-1) = 4$

20. ให้ a+3 , a , a−2 เป็น 3 พจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น r แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 8　　2. 9　　3. 16　　4. 18

21. พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต 200, 182, 164, 146, ... มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 54　　2. 38　　3. 22　　4. 20

22. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & ,x \neq 0 \\ 1 & ,x = 0 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{4}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้ทั้งคู่
4. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

23. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดยมี $x - 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่ง และ $f(0) = 0$, $f'(0) = 2$, $f''(0) + f'''(0) = 1$ ดังนั้น $f(2)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 0 3. 1 4. 2

24. ถ้าเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันที่จุด (x,y) ใดๆบนเส้นโค้งเป็น $2x - 1$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $(1,2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 1 = 0$ แล้ว ความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $x = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. 0 3. 1 4. 2

25. ค่าของ $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}dx + \int_0^1 (4-\sqrt{x})^2 dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 14 3. 20 4. 20

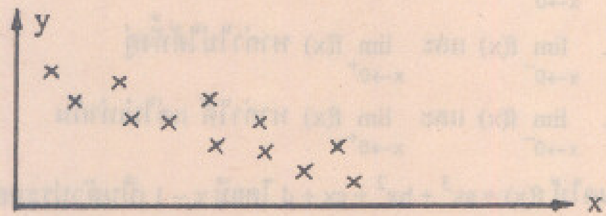
26 ในการแข่งขันฟุตบอล คณะกรรมการจัดการแข่งขันจัดให้มีการแข่งขันแบบพบกันหมด ปรากฏว่าจะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมด 36 คู่ การแข่งขันนี้มีทีมเข้าร่วมแข่งขันจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 8 3. 9 4. 12

27. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ P(A) = 0.5 , P(B) = 0.6 และ $P(A' \cap B') = 0.2$ $P(A \cap B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.3 3. 0.8 4. 0.9

28. พิจารณาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร x และ y ดังรูป



สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ระหว่าง x และ y อยู่ในรูปแบบใดต่อไปนี้

1. $y = x - 1$
2. $y = a - bx$, $a,b > 0$
3. $y = a - bx^2$, $a,b > 0$
4. $y = a + bx$, $a,b > 0$

29. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีเส้นโค้งความถี่เป็นเส้นโค้งเบ้ทางซ้ายโดยที่ 80 เปอร์เซนต์ของนักเรียนทั้งหมดสอบได้คะแนนเท่ากันคือ 75 คะแนน สมชายสอบได้คะแนนเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้ โดยที่คะแนนของสมชายต่างจากฐานนิยมของคะแนนสอบอยู่ 6 คะแนน สมชายสอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 81 2. 69 3. 60 4. 48

30. ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
2. มัธยฐานมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
3. ฐานนิยมมีค่าอยู่ระหว่างเดไซล์ที่ 2.5 และ เดไซล์ที่ 7.5
4. มัธยฐาน < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < ฐานนิยม

ตอนที่ 2.

31. กำหนดให้ A,B,C เป็นเซต $n(A\cup B) = 92$, $n(A\cup C) = 79$, $n(B\cup C) = 75$, $n(A\cap B\cap C) = 32$, $n((A\cap B)-C) = 18$, $n((A\cap C)-B) = 6$, $n((B\cap C)-A) = 2$ ดังนั้น $n(A\cup B\cup C)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 93　　2. 94　　3. 95　　4. 96

32. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\{x\in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{x\in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

ข. $\{x\in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \ge 2\} = \{x\in R \mid |x| \ge 2|x-1|\}$

1. ก และ ข ถูกทั้งคู่　　2. ก ถูก แต่ ข ผิด

3. ก ผิด แต่ ข ถูก　　4. ก และ ข ผิดทั้งคู่

33. นิเสธของข้อความ $\forall x \exists y\,[(xy = 0 \wedge x \ne 0) \rightarrow y = 0]$

สมมูลกับข้อความใดต่อไปนี้

1. $\exists x \forall y\,[(xy = 0 \vee x = 0) \wedge y \ne 0]$
2. $\exists x \forall y\,[(xy \ne 0 \wedge x = 0) \vee y = 0]$
3. $\exists x \forall y\,[xy = 0 \wedge x \ne 0 \wedge y \ne 0]$
4. $\exists x \forall y\,[xy \ne 0 \vee x = 0 \vee y = 0]$

34. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

ก. <u>เหตุ</u> : 1. $p \rightarrow \sim q$

2. $q \vee r$

3. $\sim r$

<u>ผล</u> : p

ข. <u>เหตุ</u> : 1. $p \wedge q$

2. $q \rightarrow r$

3. $\sim r \vee s$

<u>ผล</u> : s

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. สมเหตุสมผล
2. ก. สมเหตุสมผล แต่ ข. ไม่สมเหตุสมผล
3. ก. ไม่สมเหตุสมผล แต่ ข. สมเหตุสมผล
4. ก. และ ข. ไม่สมเหตุสมผล

35. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x - 1$ และ $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9$

แล้ว $(fog^{-1})(7)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

36. ให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก กำหนดให้

$f = \{(x,y) \mid x + 2y = 12$ และ $x,y \in I^+\}$ แล้ว fof เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(8,5), (4,4)\}$ 2. $\{(5,8), (4,4)\}$
3. $\{(2,2), (4,4)\}$ 4. $\{(6,3), (4,4)\}$

37. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$

เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\}$ 2. $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\}$
3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\}$ 4. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\}$

38. จำนวนสมาชิกของเซตคำตอบของสมการ

$\arccos(x - x^2) = \arcsin x + \arcsin(x - 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

39. กำหนดให้ A(1,2) และ B(−1,4) เป็นจุดสองจุดที่มีจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB ถ้าวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด M รัศมี $\sqrt{8}$ หน่วย ตัดส่วนของเส้นตรง AB ที่ต่อออกมาทั้งสองข้างที่จุดสองจุด แล้วจุดตัดจุดหนึ่งคือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. (2,1) 2. (2,5) 3. $(\sqrt{2}, 3-\sqrt{6})$ 4. $(\sqrt{3}, 3-\sqrt{5})$

40. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ (−4, 0) โฟกัสที่ (−5, 0) และ (1, 0) ถ้าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้ และมีความยาวของแกนเอกและแกนโท เท่ากับความยาวของแกนสังยุคและแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาตามลำดับแล้วสมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x+2)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$ 2. $\frac{(x+2)^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$
3. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 4. $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$

41. ผลบวกของรากของสมการ $2\log_3 x - 2\log_{x^2} 9 + 3 = 0$
มีค่าใกล้เคียงข้อใดมากที่สุด

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

42. ให้ R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ

$A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 0\}$

ข้อใดถูกต้อง

1. $A \subset B$ 2. $B \subset A$
3. $A \cap B = \varnothing$ 4. $A \cup B = R^+$

43. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 3 & b\\ -1 & 0 & c\end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$

โดยที่ a,b,c เป็นจำนวนจริง ถ้า AX = B และ $A \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix} R_2 - 2R_1$

แล้ว x มีค่าเท่ากับค่าใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{2}{3}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. 2

44. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 1500 - 8x - 10y$ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$x + y \geq 40$, $x + y \leq 100$, $0 \leq x \leq 80$, $0 \leq y \leq 70$

ค่าสูงสุดของ P เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 60 2. 160 3. 560 4. 660

45. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\bar{i} + \bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่จุด D พื้นที่ของ ΔOAD คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{77}{\sqrt{34}}$ 2. $\frac{77}{2\sqrt{17}}$ 3. $\frac{77}{17}$ 4. $\frac{77}{34}$

46. กำหนด $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ a,b,c,d เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(-1) = -18$, $f(3) = 10$ แล้ว $f(-2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -60 2. -48 3. -36 4. 0

47. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} g(x) & ,x \leq 1 \\ \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1} & ,x > 1 \end{cases}$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = 1 แล้ว $\lim\limits_{x \to 1^-} (x+3)g(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 3 3. 6 4. 9

48. กำหนดให้ $f(x) = (3x^2 + 5x)g(x)$ ถ้า g เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ที่จุด $x = 1$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 40 2. 45 3. 50 4. 55

49. ถ้า $\int_1^{\sin\theta} x^2 dx = -\frac{2}{3}$ แล้ว $1 + \sin\theta + \cos\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 1 3. 0 4. −1

50. ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีของนักเรียนกลุ่มหนึ่งปรากฏว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ และ $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาเคมี ถ้าความน่าจะเป็นของนักเรียนคนหนึ่งในกลุ่มนี้ที่จะสอบผ่านอย่างมากหนึ่งวิชาเป็น $\frac{4}{5}$ แล้วความน่าจะปีนที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{1}{15}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{13}{15}$

51. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1–10 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบ โดยให้มีแต้มรวมกันเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{40}$ 3. $\frac{1}{30}$ 4. $\frac{1}{20}$

52. มีข้อมูลอยู่ 2 ชุด คือชุด x และชุด y

ชุด $x : x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{10}$

ชุด $y : y_1 < y_2 < y_3 < .. < y_{10}$

ถ้าข้อมูล 2 ชุดนี้มีความสัมพันธ์กันในรูป

$y_i = x_i + a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว, $a > 0$ และ $i = 1,2,3,...,10$

แล้วสมบัติข้อใดต่อไปนี้ <u>ไม่จริง</u>

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของชุด x น้อยกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของชุด y
2. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของชุด x น้อยกว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของชุด y
3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของชุด x น้อยกว่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของชุด y
4. ค่ามาตรฐานของคะแนน x_3 เท่ากับค่ามาตรฐานของคะแนน y_3

53. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 24 %และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 คะแนน ถ้ากำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.2$ และถึง $z = 1.25$ เป็น 0.3849 และ 0.3944 ตามลำดับ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของนักเรียนที่สอบได้ 65 คะแนน

1. 38.49 2. 39.44 3. 88.49 4. 89.44

54. ผลการสอบของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติโดยมีความแปรปรวนเท่ากับ 9 ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 60 คะแนน มีจำนวนเท่ากับนักเรียนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 72 คะแนน แล้วนักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 60 คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

(กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ ดังนี้ $z = 0$ ถึง $z = 2$ มี พ.ท. 0.4773
$z = 0$ ถึง $z = 2.2$ มี พ.ท. 0.4861)

1. 1.39 2. 2.27 3. 47.73 4. 48.61

55. ตารางต่อไปนี้แสดงปริมาณและราคาสินค้า 2 ชนิด ของร้านไฟฟ้าในปี พ.ศ. 2532 และ 2536

	ราคา(หน่วย : พันบาท)		ปริมาณ(หน่วย : เครื่อง)	
รายการสินค้า	พ.ศ.2532	พ.ศ.2536	พ.ศ.2532	พ.ศ.2536
โทรทัศน์	5	8	100	105
วิทยุ	3	6	a	a

ถ้าดัชนีราคาสินค้าในปี พ.ศ.2536 โดยใช้ พ.ศ.2532 เป็นปีฐาน แบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน โดยวิธีลาสไพเยอเรส มีค่าเท่ากับ 170 แล้ว a จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 56 3. 57 4. 58

56. ในปี พ.ศ.2536 สุเมธมีรายได้ 10,000 บาทต่อเดือน ในปี พ.ศ.2537 เขามีรายได้เพิ่มขึ้น 15 เปอร์เซนต์จากปี พ.ศ.2536 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของปี พ.ศ.2537 เมื่อให้ปี พ.ศ.2536 เป็นปีฐานเท่ากับ 200 แล้วรายได้ที่แท้จริงของสุเมธในปี พ.ศ. 2537 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ.2536 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5,075 2. 5,750 3. 6,500 4. 11,500

ตอนที่ 3.

1. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ n และ 42 เท่ากับ 6

ถ้า $42 = nq_0 + r_0$, $0 < r_0 < n$

$n = 2r_0 + r_1$, $0 < r_1 < r_0$

และ $r_0 = 2r_1$

โดยที่ q_0 , r_0 , r_1 เป็นจำนวนเต็ม แล้ว ค.ร.น. ของ n และ 42 มีค่าเท่ากับเท่าไร

2. ให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $P(A)$ คือเพาเวอร์เซตของ A

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง P(A) กำหนดโดย

$r = \{(a, B) \mid a \geq 2, a \notin B$ และ $a + 1 \neq B\}$ แล้ว r มีจำนวนสมาชิกกี่จำนวน

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $X = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$

ถ้า $A^2(\mathrm{adj}A)X = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$ แล้ว p มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. ถ้า $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ แล้วจงหาสัมประสิทธิ์ของ x^8 ในการกระจาย $(x + a)^{10}$

5. ถ้าวัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใดๆเป็น $24t^2$ เมตร/(วินาที)^2 และขณะเวลา เป็น $t = 1$ วินาที มีความเร็ว 16 เมตร/วินาที และเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร แล้วเมื่อเวลา $t = 2$ วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางเท่าไร

6. ครู 3 คน พานักเรียน 6 คนไปเข้าค่ายวิชาการซึ่งต้องพักในบ้านหลังหนึ่งที่มีห้องนอน 3 ห้อง ห้องเล็กอยู่ได้ 2 คน ห้องกลางอยู่ได้ 3 คน และห้องใหญ่อยู่ได้ 4 คน ถ้าต้องการให้ครู 3 คน พักในห้องเดียวกัน จะมีวิธีการแบ่งคนเข้าพักได้ทั้งหมดกี่วิธี

≥→≥⊂~π∆∉ î ĵ ∞θ∩∪∈≤∧ ∨

เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2540

ตอนที่ 1.

1. ตอบ 1.

แนวคิด $A = \{a,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$

$A - \{b,c\} = \{a,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$

$(A - \{b,c\}) \cup \{b\} = \{a,b,\{a\},\{b\},\{b,c\}\}$

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง และ ตัวเลือก 2. ผิด

$A - \{a, \{b\}\} = \{\{a\},\{b,c\}\} \neq \{\{b, c\}\}$ ตัวเลือก 3. ผิด

$A - \{a, \{b\}\} = \{\{a\},\{b,c\}\} \neq \{b, c\}$ ตัวเลือก 4. ผิด

ข้อสังเกต คำถามข้อนี้เหมือนกับ คณิตศาสตร์ ก. 2536 ข้อ 7

2. ตอบ คำตอบที่ถูกต้องคือ 60 ไม่มีในตัวเลือกที่ให้มา

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของจำนวนสมาชิก

ให้ $A = \{1,2,3,4,5,a,b,c\}$ $B = \{a,b,c,6,7,8\}$

จะได้ $A \cap B = \{a,b,c\}$

$B - A = \{6,7,8\}$ $A - B = \{1,2,3,4,5\}$

การนับจำนวนสมาชิก $S = \{f \mid f: (B-A) \to (A-B)$, f เป็น 1–1$\}$

$f(6)$ เลือกส่งค่าได้ 5

$f(7)$ เลือกส่งค่าได้ 4

$f(8)$ เลือกส่งค่าได้ 3

เพราะจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับ $(5)(4)(3) = 60$

3. ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $(A-B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

$A = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\} \rightarrow A' = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} < 0\} \cup \{-2\}$

$B = \{x \in R \mid |\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1\}$

$-2 \in A' \rightarrow -2 \in A' \cup B \rightarrow -2 \in (A-B)' \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

$-1 \in B \rightarrow -1 \in A' \cup B \rightarrow -1 \in (A-B)' \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3

วิธีจริง จากอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

$\frac{x-3}{x+2} \leq 0$

$$\begin{array}{ccccc} & -2 & & 3 & \\ + & & - & & + \end{array}$$

$-2 < x \leq 3$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\} = (-2, 3]$

จากอสมการ $|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1$

$|\frac{1-x}{2}| \leq 1$

$|1-x| \leq 2$

$|x-1| \leq 2$

$-2 \leq x-1 \leq 2$

$-1 \leq x \leq 3$

เพราะฉะนั้น $B = \{x \in R \mid |\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1\} = [-1, 3]$

$A - B = (-2, 3] - [-1, 3] = (-2, -1)$

เพราะฉะนั้น $(A-B)' = (-\infty, \infty) - (-2, -1) = (-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

4. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{x \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{3,6,9,12,...,498\}$

การหาจำนวนสมาชิกของ A $a = 3$, $d = 3$, $a_n = 498$

$498 = a_n = a + (n-1)d = 3 + (n-1)3 = 3n$

เพราะฉะนั้น $n = 166$ ดังนั้น $n(A) = 166$

$B = \{x \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{5,10,15,20,...,500\}$ $n(B) = 100$

$A \cap B = \{x \mid 3 \text{ และ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{x \mid 15 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{15,30,45,60,...,495\}$ $n(A \cap B) = 33$

$A \cup B = \{x \mid 3 \text{ หรือ } 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 166 + 100 - 33 = 233$

ข้อแนะนำ การนับจำนวนสมาชิกอย่างรวดเร็ว

3 หารลงตัว : 3,6,9,...,498

3 หารตลอด : 1,2,3,...,166 3 หารลงตัวมี 166 ตัว

5 หารลงตัว : 5,10,15,...,500

5 หารตลอด : 1,2,3,...,100 5 หารลงตัวมี 100 ตัว

15 หารลงตัว : 15,30,45,...,495

15 หารตลอด : 1,2,3,...,33 5 หารลงตัวมี 33 ตัว

5. ตอบ 1.

แนวคิด สูตรประพจน์สมมูลยอดนิยม (ออกสอบทุกครั้ง)

$A \rightarrow B$ สมมูลกับ $\sim A \vee B$

$\sim(A \vee B)$ สมมูลกับ $\sim A \wedge \sim B$

$\sim(A \wedge B)$ สมมูลกับ $\sim A \vee \sim B$

เพราะฉะนั้น $p \to \sim(q \to p) = p \to \sim(\sim q \vee p)$

$= p \to (q \wedge \sim p)$

$= \sim p \vee (q \wedge \sim p)$

$= \sim p \vee (\sim p \wedge q)$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า T หรือ F ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = T \to q \to p = T \to \sim(q \to p) = F \to p \to \sim(q \to p) = F$

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q) = F$

ตัวเลือก 2. $\sim p \vee (p \vee q) = T$

ตัวเลือก 3. $p \to (\sim q \vee q) = T$ เมื่อ $q = T$

ตัวเลือก 4. $p \to (\sim q \wedge q) = T$ เมื่อ $q = F$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4.

6. ตอบ 1.

แนวคิด

การตัดตัวเลือก คำถามข้อนี้ตรงกับหลักการเซตคำตอบตรงการตัวเลือกใด

ดูจากพจน์ $\log(x-3) \to x = 1.9$ ไม่ได้ และ $x = 2.1$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง โดเมนของ f ต้องสอดคล้องเงื่อนไข

$x + 2 > 0$ และ $x - 3 > 0$ และ $4 - x > 0$

$x > -2$ และ $x > 3$ และ $x < 4$

$x \in (-2, \infty) \cap (3, \infty) \cap (-\infty, 4) = (3, 4)$

7. ตอบ 2.

แนวคิด ขอให้อ่านคำถามให้ดี ให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ

S เป็นเซตของฟังก์ชัน f ทั้งหมดโดยที่ $f : A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึง

ถ้า $f(1) > 3$ แล้ว จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 40 2. 48 3. 56 4. 72

ถ้าเราแปลโจทย์ว่า เซต S คือ

$S = \{f \mid f : A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึง ถ้า $f(1) > 3\}$ จะหาคำตอบได้ยาก

ขอแปลโจทย์เพื่อให้ได้คำตอบเข้าข้างข้อสอบสักข้อ นั่นคือ

$S = \{f \mid f : A \rightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และทั่วถึง และ $f(1) > 3\}$

การนับสมาชิกของ S ทำตามขั้นตอนการนับดังนี้

ขั้นที่ 1 f(1) ส่งค่าได้ 2 วิธี (f(1) = 4 หรือ f(1) = 5)

ขั้นที่ 2 f(2) ส่งค่าได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 3 f(3) ส่งค่าได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 4 f(4) ส่งค่าได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 5 f(5) ส่งค่าได้ 1 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับ (2)(4)(3)(2)(1) = 48 ฟังก์ชัน

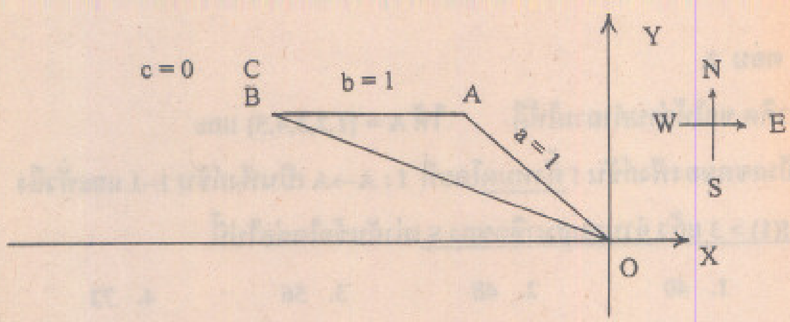
หมายเหตุ น่าจะถามว่าจำนวนสมาชิกของ S ที่ $f(1) > 3$ มีกี่ฟังก์ชัน

8. ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a,b,c

สำหรับคนที่รู้สูตรกฎของโคไซน์ แทนค่า $a = 1, b = 1, c = 0$

จะได้กราฟแสดงระยะทางเป็นดังนี้



ขั้นตอนการวาดรูป ให้ O เป็นจุดเริ่มต้น ลาก OA ไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ และ OA = a = 1 นิ้ว ลาก AB ไปทางทิศตะวันตกและ AB = b = 1 นิ้ว ให้ c = 0 หมายความว่า B และ C เป็นจุดเดียวกัน วัดความยาว OB ด้วยไม้บรรทัดได้ 1.8 หรือถ้านักเรียนรู้กฎของโคไซน์จะได้ค่า OB จริงดังนี้

$$\text{ระยะทางของโจทย์} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(135)}$$
$$= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2(1)(1)(-\frac{1}{\sqrt{2}})}$$
$$= \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

ตัวเลือก 1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

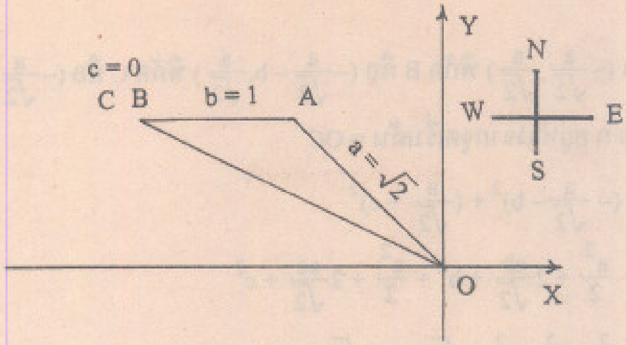
ตัวเลือก 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2} = (1 + 1 + 0 + \sqrt{2} + 0)^{1/2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ตัวเลือก 3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ตัวเลือก 4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2} = 2 \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4.

สำหรับคนที่รู้การเลื่อนพิกัดของจุด A,B,C แทนค่า $a = \sqrt{2}$, $b = 1$, $c = 0$ จะได้พิกัดของ A เป็น (–1,1) และ พิกัดของ B เป็น (–2,1)



เพราะฉะนั้น นาย ก ห่างจากจุดเริ่มต้น = $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ตัวเลือก 1. $(a^2+b^2+c^2)^{1/2} = \sqrt{2+1+0} = \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$

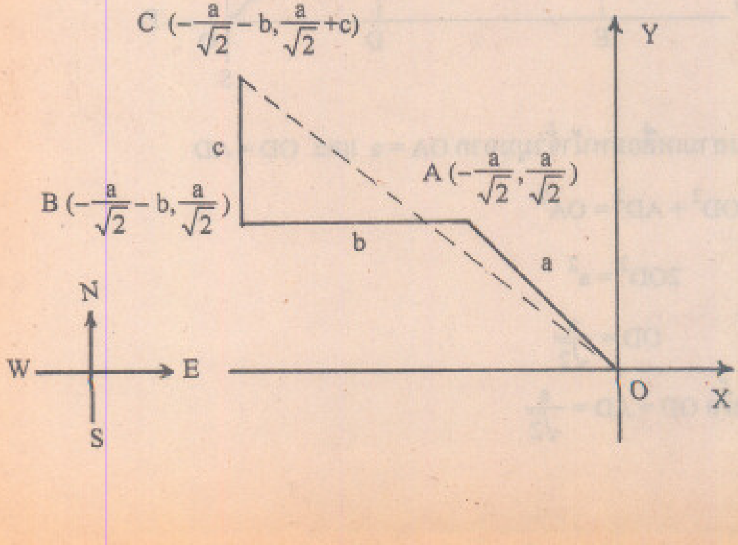
ตัวเลือก 2. $(a^2+b^2+c^2+\sqrt{2}\,ab+\sqrt{2}\,ac)^{1/2} = (2+1+0+2+0)^{1/2} = \sqrt{5}$

ตัวเลือก 3. $(a^2+b^2+c^2+ab+ac)^{1/2} = (2+1+0+\sqrt{2}+0)^{1/2} = \sqrt{3+\sqrt{2}} \neq \sqrt{5}$

ตัวเลือก 4. $a+(b^2+c^2)^{1/2} = \sqrt{2}+1 \neq \sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4.ได้เหมือนกัน

วิธีจริง วิธีที่ 1. วาดรูปตามโจทย์กำหนดและใช้พิกัดของจุด



พิกัด A คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}})$ พิกัด B คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}}-b,\frac{a}{\sqrt{2}})$ พิกัด C คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}}-b,\frac{a}{\sqrt{2}}+c)$

ระยะที่นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น = OC

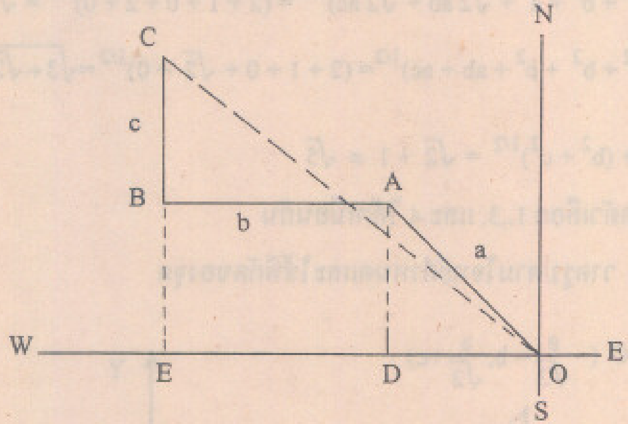
$$OC^2 = (-\frac{a}{\sqrt{2}}-b)^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}}+c)^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + 2\frac{ab}{\sqrt{2}} + b^2 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{ac}{\sqrt{2}} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac$$

$$OC = (a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$$

วิธีที่ 2. ไม่ใช้การอ้างอิงพิกัดของจุด



OAD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก OA = a และ OD = AD

$$OD^2 + AD^2 = OA^2$$

$$2OD^2 = a^2$$

$$OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $OD = AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$

ECO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $OE = AD + AB = \frac{a}{\sqrt{2}} + b$

$EC = BC + BE = BC + OD = c + \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$OC^2 = OE^2 + CE^2 = (\frac{a}{\sqrt{2}} + b)^2 + (c + \frac{a}{\sqrt{2}})^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + 2\frac{ab}{\sqrt{2}} + b^2 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{ac}{\sqrt{2}} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac$$

สรุป $OC = (a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$

9. ตอบ 4.

แนวคิด $5\cos3A\cos A + 5\sin3A\sin A = -3$

$$5(\cos3A\cos A + \sin3A\sin A) = -3$$

$$5(\cos(3A - A)) = -3$$

$$\cos(2A) = -\frac{3}{5}$$

จากสูตร $\sin^2 A = \frac{1-\cos2A}{2}$ และ $\cos^2 A = \frac{1+\cos2A}{2}$

เพราะฉะนั้น $\tan^2 A = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{(\frac{1-\cos2A}{2})}{(\frac{1+\cos2A}{2})} = \frac{1-\cos2A}{1+\cos2A} = \frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 4$

เพราะว่า $0 < A < \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\tan A > 0$ และ $\tan A = 2$

10. ตอบ 4.

แนวคิด สมการ L_2 คือ $(y - (-1)) = (-1)(x - 3)$

$x + y = 2$ ---(1)

พอเราได้สมการ L_2 ก็จะได้คำตอบแล้ว (เป็นความโชคดีของนักเรียนที่ฝึกสังเกต)

เพราะว่า (a , b) อยู่บน L_2 เพราะฉะนั้น $a+b=2$

เพื่อความสมบูรณ์ของการเฉลยเราจะหาค่า a และ b ต่อไป

สมการ L_1 คือ $\frac{y-2}{x-5} = \frac{-6-2}{1-5}$

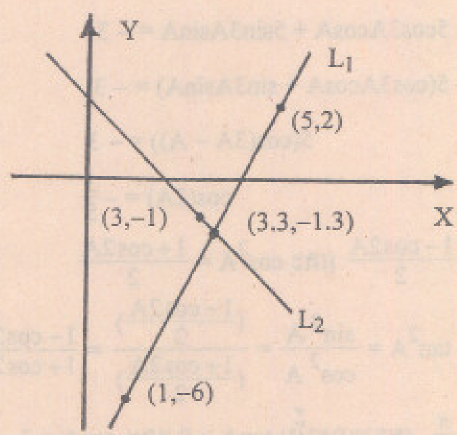
$\frac{y-2}{x-5} = 2$

$y-2 = 2x-10$

$2x-y = 8$ ——————————————(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a = \frac{10}{3}$ และ $b = -\frac{4}{3}$ เพราะฉะนั้น $a+b=2$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทาง



ลาก L_1 ผ่านจุด (5,2) และ (1,–6)

L_2 เป็นเส้นตรงที่มีความชัน – 1 คือเส้นตรงที่ทำมุม 135 องศากับแกน X และ

ผ่านจุด (3,–1) วัดพิกัดของจุดตัด L_1 กับ L_2 ได้เป็น (3.3,–1.3)

สรุปเลือก $a+b = 3.3-1.3 = 2$ ดีกว่า

11. ตอบ 3.

แนวคิด $4x^2 + 3y^2 - 16x + 4 = 0$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 3y^2 = -4 + 16$$

$$4(x-2)^2 + 3y^2 = 12$$

$$\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

วงรีมีแกนเอกขนานแกน Y โดยมี $a = 2$, $b = \sqrt{3}$, $c = 1$ จุดศูนย์กลาง $(2 , 0)$ จุดยอด $(2 , 2)$ และ $(2, -2)$ โฟกัส $(2, 1)$ และ $(2, -1)$

สมการพาราโบลาที่มีแกนอยู่บนแกน X มีจุดยอด $(0 , 0)$ มีสมการเป็น $y^2 = 4cx$ เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด $(2 , 1)$ เพราะฉะนั้น $1 = 8c$ และ $c = \frac{1}{8}$

สรุปสมการพาราโบลาคือ $y^2 = 4(\frac{1}{8})x$ หรือ $2y^2 = x$

หมายเหตุ ฝึกสังเกตอีกแล้วเมื่อรู้ว่าพาราโบลาผ่านจุด โฟกัส $(2, 1)$ นำค่า $x = 2$ และ $y= 1$ แทนค่าในตัวเลือกก็จะได้คำตอบเหมือนกัน

12. ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่าบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 101$, $x = 1.01$

$$f(101) = \log\sqrt{101-1} = \log 10 = 1 \rightarrow 1 \in R_f$$

$$1 \notin D_f \rightarrow 1 \notin D_{f+g} \rightarrow 1 \in R_f - D_{f+g}$$ → ตัดตัวเลือก 1. และ 3.

$$f(1.01) = \log\sqrt{1.01-1} = \log\sqrt{0.01} = \log(0.1) = -1 \rightarrow -1 \in R_f$$

$$-1 \notin D_f \rightarrow 1 \notin D_{f+g} \rightarrow 1 \in R_f - D_{f+g}$$ → ตัดตัวเลือก 2

วิธีจริง **การหาโดเมนและเรนจ์ของ f** $f(x) = \log\sqrt{x-1}$

$$x - 1 > 0$$

$$x > 1$$

เพราะฉะนั้น $D_f = (1, \infty)$

เพราะว่า $-\infty < \log\sqrt{x-1} < \infty$ เพราะฉะนั้น $R_f = (-\infty, \infty)$

การหาโดเมนและเรนจ์ของ g $g(x) = \sqrt{\log x}$

$$\log x \geq 0 = \log(1)$$

$$x \geq 1$$

เพราะฉะนั้น $D_g = [1, \infty)$ และ $R_g = [0, \infty)$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (1, \infty) \cap [1, \infty) = (1, \infty)$$

$$R_f - D_{f+g} = (-\infty, \infty) - (1, \infty) = (-\infty, 1]$$

13. ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $0 < \sin 18 < 1$ และ $0 < \cos 18 < 1$

เพราะฉะนั้น f(x) ในตัวเลือก 1. และ 2. เหมือนกันซึ่งเป็นคำตอบไม่ได้ มิเช่นนั้นโจทย์จะผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

พิจารณาสูตรในตัวเลือก 3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ จะได้ $f(1) = 0$ และ $f(2) = 1$

เพราะฉะนั้น $1 < 2$ แต่ $f(1) > f(2)$ เพราะฉะนั้น $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ไม่เป็นฟังก์ชันลด

วิธีจริง **ข้อสอบข้อนี้วัดความจำของนักเรียนแน่นอน**

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวเลือก 1. $f(x) = (\sin 18^{\circ})^{-2x}$ ทุกๆ x

$$f(x) = (\sin 18^{\circ})^{-2x}$$

$$f(x) = (\frac{1}{\sin 18})^{2x}$$

$$f(x) = ((\frac{1}{\sin 18})^{2})^{x}$$

เพราะว่า $0 < \sin 18 < 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sin 18} > 1$ และ $((\frac{1}{\sin 18})^{2}) > 1$

สรุป $f(x) = (\sin 18^{\circ})^{-2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในทำนองเดียวกัน $f(x) = (\cos 18^{\circ})^{-2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวเลือก 4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -\log_2 x$$

เพราะว่า $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $f(x) = -\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันลด

14. ตอบ 4.

แนวคิด $$A = \begin{bmatrix} x & y & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ x & -y & -1 \end{bmatrix}$$

$$-6 = C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} y & 4 \\ -y & -1 \end{vmatrix} = (-1)(-y + 4y) = -3y \rightarrow y = 2$$

$$4 = C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} x & y \\ x & -y \end{vmatrix} = (-1)(-xy - xy) = 2xy \rightarrow x = 1$$

เพราะฉะนั้น $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

สรุปโคแฟคเตอร์ของ $a_{33} = C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 6 = 14$

15. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A = \frac{1}{(3)(3)-(4)(2)}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

จาก
$$AX + B = A$$
$$AX = A - B$$
$$AX = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$X = (A^{-1})\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $b = 6$ และ $c = 5$ สรุป $b + c = 11$

16. ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้เหตุผลนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์ เพราะว่า $\bar{u} \cdot \bar{v} = 2$ ต่อไปลองนำเวกเตอร์ในตัวเลือกมา dot กับ $\bar{v}$

ตัวเลือก 1. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \cdot (\frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})) = 2$

ตัวเลือก 2. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \cdot (\frac{-2}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})) \neq 2$

ตัวเลือก 3. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \cdot (\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} + \bar{j})) \neq 2$

ตัวเลือก 4. $(\bar{i}-3\bar{j})\cdot(\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}-\bar{j}))\neq 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง สมมติ $\bar{w}=a\bar{i}+b\bar{j}$

$\bar{u}\cdot\bar{v}=(-\bar{i}-\bar{j})\cdot(\bar{i}-3\bar{j})=2$

$\bar{v}\cdot\bar{w}=(\bar{i}-3\bar{j})(a\bar{i}+b\bar{j})=a-3b$

เพราะฉะนั้น $a-3b=2$ ————(1)

เพราะว่า $|\bar{w}|=2$ เพราะฉะนั้น $a^2+b^2=4$ ————(2)

แทนค่า $a=2+3b$; $(2+3b)^2+b^2=4$

$$4+12b+9b^2+b^2=4$$

$$12b+10b^2=0$$

$$b(6+5b)=0$$

$$b=0 \text{ หรือ } -\frac{6}{5}$$

<u>เมื่อทำมาถึงตรงนี้แล้วขอให้สังเกตตัวเลือกจะเห็นได้ว่าเราสามารถตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้เหมือนกัน</u>

คำนวนต่อไปจะได้ $a=-\frac{8}{5}$ สรุป $\bar{w}=\frac{-2}{5}(4\bar{i}+3\bar{j})$

17. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่าจุด A(1,−1) , B(5,−4)

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB}=(5-1)\bar{i}+(-4+1)\bar{j}=4\bar{i}-3\bar{j}$

สมมติพิกัด Q(a , b) จะได้ $\overrightarrow{PQ}=(a-2)\bar{i}+(b-3)\bar{j}$

เพราะว่า $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{AB}$ เพราะฉะนั้น $(a-2)\bar{i}+(b-3)\bar{j}=2(4\bar{i}-3\bar{j})$

$a - 2 = 8$ และ $b - 3 = -6$

$a = 10$ และ $b = -3$

พิกัด Q คือ (10 , −3)

$\overrightarrow{AP} = (2-1)\bar{i} + (3+1)\bar{j} = \bar{i} + 4\bar{j}$

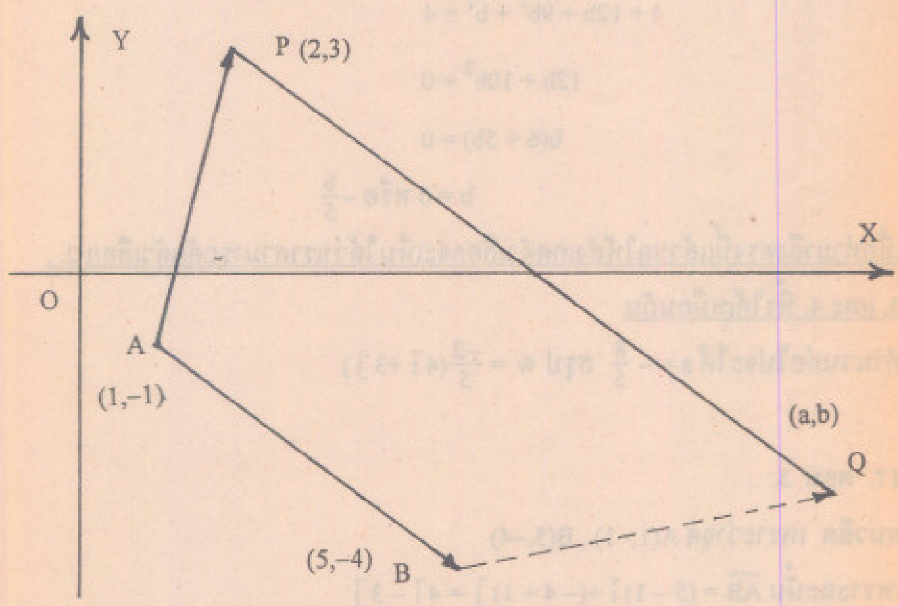
$\overrightarrow{BQ} = (10-5)\bar{i} + (-3+4)\bar{j} = 5\bar{i} + \bar{j}$

สรุป $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = (\bar{i} + 4\bar{j}) \cdot (5\bar{i} + \bar{j}) = 5 + 4 = 9$

การตัดตัวเลือก 1. ลากเส้น AB

2. ลากเส้น PQ จาก P ในทิศทาง AB และยาวสองเท่าของ AB

3. ลากเส้น AP และ BQ



เวกเตอร์ $\overrightarrow{AP}$ และ $\overrightarrow{BQ}$ ทำมุมกันเป็นมุมแหลม เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

18. ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก มีเหตุผลมากมายในการตัดตัวเลือก

เหตุผล 1. เพราะว่าจำนวนจริงยกกำลังเลขคู่ต้องเป็นบวก

เพราะฉะนั้นสมการ $z^6 = -64$ ต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนหมดทั้ง 6 ตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เหตุผล 2. ใช้การนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ถึงแม้ว่าเราจะหารากไม่เป็นแต่ยกกำลังเป็นหรือคูณจำนวนเชิงซ้อนเป็นก็ได้คำตอบ

เหมือนกัน $(2i)^6 = -64 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $(1+\sqrt{3}i)^6 = 64$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เหตุผล 3. ใช้เหตุผล ถ้า z เป็นราก แล้ว $-z$ เป็นราก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $z^6 = -64$

$$z^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z^6 = 2^6(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)) \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$$z = 2(\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{6})) \qquad k = 0,1,2,3,4,5$$

$k = 0;\quad z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$

ข้อสังเกต ตามวิธีจริงทำได้ถึงตรงนี้ควรตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

$k = 1;\quad z = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 2i$

$k = 2;\quad z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$

ข้อสังเกต ตามวิธีจริงทำได้ถึงตรงนี้นี้ควรตัดตัวเลือก 1. ทิ้งและไปทำข้อต่อไป

$k = 3;\quad z = 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} - i$

$k = 4;\quad z = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -2i$

$k = 5;\quad z = 2(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i$

สรุป รากที่ 6 ของ -64 มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$, $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

19. ตอบ 1.

แนวคิด $\quad f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$

เพราะว่า $2 + i$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $\quad 2(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 10 = 0$

$$2(8 + 12i + 6i^2 + i^3) + a(4 + 2i + i^2) + b(2 + i) + 10 = 0$$

$$2(2 + 11i) + a(3 + 4i) + b(2 + i) + 10 = 0$$

$$(3a + 4b + 14) + (22 + 4a + b)i = 0$$

เพราะฉะนั้น $\quad 3a + 2b + 14 = 0 \quad \text{———— (1)}$

$4a + b + 22 = 0 \quad \text{———— (2)}$

2(2); $\quad 8a + 2b + 44 = 0 \quad \text{———— (3)}$

(3)–(1); $\quad 5a + 30 = 0 \rightarrow a = -6$ และ $b = -22 - 4a = 2$

เพราะฉะนั้น $\quad f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$

$f(1) = 2 - 6 + 2 + 10 = 8 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งโดยไม่ต้องหาค่า $f(-1)$

$f(-1) = -2 - 6 - 2 + 10 = 0$

ข้อเตือนใจ ข้อสอบข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ดีของการทำงานไป และ สังเกตตัวเลือกไปด้วยจะทำได้คำตอบที่ต้องการ โดยไม่จำเป็นต้องทำงานให้ครบทั้งหมดของข้อนั้น

หมายเหตุ หากครูท่านใดจะนำข้อสอบนี้ไปใช้อีกควรระบุให้ชัดเจนและรัดกุมด้วยว่า a, b เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน มิเช่นนั้น f อาจมีได้หลายฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x^3 + 10i\,x^2 - 26i\,x + 10$

มี $f(2+i) = 0$ แต่ $f(1) = 12 - 16i \neq 8$ และ $f(-1) = 8 + 36i \neq 0$

โชคดีเป็นของนักเรียนที่ข้อสอบข้อนี้ไม่ได้เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ

หมายเหตุ ถ้าโจทย์กำหนดว่า a และ b เป็นจำนวนจริง เราสามารถอ้างได้ว่า $2 - i$ เป็นรากของ $f(x) = 0$ ด้วย

เพราะฉะนั้น $(x-(2+i))(x-(2-i))$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

เพราะว่า $(x-(2+i))(x-(2-i)) = x^2 - 4x + 5$

เพราะฉะนั้น $(x^2 - 4x + 5)(2x + 2) = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$

$2x^3 - 6x^2 + 2x + 10 = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$

เพราะฉะนั้นเราได้ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ เหมือนกัน

20. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $a+3$, a , $a-2$ เป็น 3 พจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น $\dfrac{a}{a+3} = \dfrac{a-2}{a}$

$a^2 = (a+3)(a-2)$

$a^2 = a^2 + a - 6$

$a = 6$

เพราะฉะนั้นลำดับเรขาคณิตคือ 9,6,4,...เพราะฉะนั้น $r = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{2}{3}} = 18$

หมายเหตุ $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ...$

คิดแค่ 2 พจน์แรก $a + ar = 6 + 6(\frac{2}{3}) = 10 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

21. ตอบ 1.

แนวคิด ลำดับเลขคณิต 200, 182, 164, 146, ...; $a = 200$ และ $d = 182 - 200 = -18$

$a_n = a + (n-1)d = 200 + (n-1)(-18) = 218 - 18n$

การหาค่า n ที่ทำให้ $a_n < 0$

$$218 - 18n < 0$$

$$218 < 18n$$

$$12.11 < n$$

เพราะฉะนั้นพจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบคือ พจน์ที่ 13

$$a_{13} = a + 12d = 200 + (12)(-18) = -16$$

$$a_{10} = a + 9d = 200 + (9)(-18) = 38$$

$$a_{10} - a_{13} = 38 - (-16) = 54$$

หมายเหตุ ตัวเลขไม่มากลองทำแบบนี้ก็ได้ 200, 182, 164, 146, 128, 110, 92, 74, 56, 38(a_{10}) , 20, 2, –16 หยุดได้ เพราะฉะนั้น 38 – (–16) = 54

22. ตอบ 1.

แนวคิด ในการทำโจทย์ข้อนี้ขอแนะนำว่าหากเราทำอะไรได้บ้างในการทำโจทย์ก็ให้ใช้ผลนั้นช่วยในการตัดตัวเลือกเท่าที่จะทำได้เช่น

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4}$$

ได้ของมาแค่นี้ก็สามารถตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย และ ทางขวา มีสูตรของ f(x) เหมือนกัน

เพราะฉะนั้น ถ้าลิมิตเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย และ ทางขวา หาค่าได้ต้องมีค่าเท่ากัน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ทำตามวิธีจริงต่อไปจะได้ว่า

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{ตัดตัวเลือก 4.}$$

สรุปตัวเลือกที่ได้ 2 คะแนนจากข้อนี้คือตัวเลือก 1.

23. ตอบ 3.

แนวคิด จากโจทย์ $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

เพราะว่า x – 1 เป็นตัวประกอบ เพราะฉะนั้น f(1) = 0 และ f(1) = a + b + c + d

$$a + b + c + d = 0$$

เพราะว่า f(0) = 0 เพราะฉะนั้น d = 0 ผลที่ได้ตามมาคือ a + b + c = 0

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ และ $f'(0) = 2 \rightarrow c = 2$

เพราะฉะนั้น $a + b = -2$ ——————————(1)

$f''(x) = 6ax + 2b$ และ $f''(0) = 2b$

$f'''(x) = 6a$ และ $f'''(0) = 6a$

$$f''(0) + f'''(0) = 1$$

$$2b + 6a = 1 \quad \text{————————(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = \frac{5}{4}$ และ $b = -\frac{13}{4}$

สรุป $f(x) = \frac{5}{4}x^3 - \frac{13}{4}x^2 + 2x$ และ $f(2) = 10 - 13 + 4 = 1$

24 ตอบ 4.

แนวคิด กำหนดให้ $y = f(x)$

เพราะว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันที่จุด (x,y) ใดๆบนเส้นโค้งเป็น $2x - 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$ ซึ่งจะได้ว่า $\frac{dy}{dx} = \int(2x-1)dx = x^2 - x + C$

ความชันเส้นตรง $x + 2y - 1 = 0$ มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

เพราะว่าเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (1, 2) ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx}(x = 1)$ มีค่าเท่ากับ 2 ดังนั้น $1 - 1 + C = 2$ ทำให้ $C = 2$

สรุป $\frac{dy}{dx} = x^2 - x + 2$ และ $\frac{dy}{dx}(x = 0) = 2$

สรุปความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $x = 0$ เท่ากับ 2

25. ตอบ 2.

แนวคิด $\int \frac{x^4+1}{x^2}dx = \int(x^2 + x^{-2})dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$

$$\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}dx = (\frac{8}{3} - \frac{1}{2}) - (\frac{1}{3} - 1) = \frac{7}{3} + \frac{1}{2} = \frac{17}{6}$$

$$\int(4-\sqrt{x})^2dx = \int(16-8\sqrt{x}+x)dx = 16x - 8\frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$= 16x - \frac{16x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int_0^1 (4-\sqrt{x})^2dx = (16 - \frac{16}{3} + \frac{1}{2}) - (0) = \frac{96-32+3}{6} = \frac{67}{6}$$

สรุป $\int_1^2 \frac{x^4+1}{x^2}dx + \int_0^1 (4-\sqrt{x})^2 dx = \frac{17}{6} + \frac{67}{6} = 14$

26. ตอบ 3.

แนวคิด จำนวนทีมเข้าแข่งขันแบบพบกับหมด n ทีมจะมีการแข่งขันทั้งหมดเท่ากับ $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{n(n-1)}{2} = 36$

$$n^2 - n = 72$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$(n-9)(n+8) = 0$$

ดังนั้น $n = -8$ หรือ 9 เพราะว่า $n > 0$ เพราะฉะนั้น $n = 9$

27 ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือกได้เพียงบางส่วนก็ยังดี เพราะว่าจะมีประโยชน์ที่เห็นชัดสองประการคือ การเดาตัวเลือกจะมีตัวเลือกที่ต้องเดาน้อยลง หากคิดเลขได้ตรงกับตัวเลือกที่เราตัดทิ้งไปแล้วจะได้รู้ตัวว่าเราได้คิดอะไรผิดบางอย่างแล้ว

$A \cap B \subset A \rightarrow P(A\cap B) \le P(A) \rightarrow P(A\cap B) \le 0.5 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $A' \cap B' = (A \cup B)'$

$$P((A \cup B)') = P(A' \cap B') = 0.2 \rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.3$$

28. ความเห็นของผู้เขียนคือไม่ควรนำคำถามแบบนี้มาเป็นข้อสอบ ENTRANCE

แนวคิด 1. ข้อบกพร่องของโจทย์คือไม่รู้ค่าของ x และ y ที่เป็นข้อมูล

2. สัมพันธ์ระหว่าง x และ y จะใช้เส้นตรง หรือ พาราโบลา ใช้รูปแบบใดดีกว่ากันเป็นเรื่องที่เกินหลักสูตรระดับ ม. ปลาย

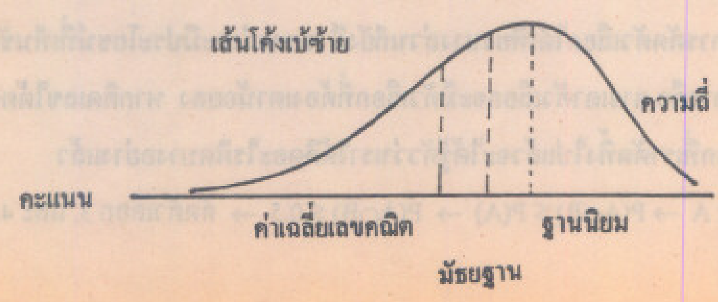
ความเห็นของผู้เขียน 1. ผู้ออกข้อสอบคงจะบอกว่าจากลักษณะของกราฟแกน X และ Y มีสเกลเหมือนกัน

2. ถ้าความสัมพันธ์เป็นเส้นตรง จะต้องมีความชันเป็นลบ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 4. จึงไม่ใช่คำตอบของผู้ออกข้อสอบ

3. ต้องถามผู้ออกข้อสอบจริงๆว่าตัวเลือกที่เหลือข้อใดถูกต้องด้วยเหตุผลใด

29. ตอบ 2.

แนวคิด



เพราะว่า80 เปอร์เซนต์ของนักเรียนทั้งหมดสอบได้คะแนนเท่ากันคือ 75
เพราะฉะนั้นฐานนิยมเท่ากับ 75
คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์มีเส้นโค้งความถี่เป็นเส้นโค้งเบ้ทางซ้าย
เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต < มัธยฐาน < ฐานนิยม = 75
เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = คะแนนของสมชาย และ คะแนนของสมชายต่างจากฐานนิยมของคะแนนสอบอยู่ 6 คะแนน
เพราะฉะนั้นสมชายสอบได้คะแนนเท่ากับ 69

30. ตอบ 4.
แนวคิด คำถามวัดความจำอีกแล้ว เพราะว่า ข้อมูลมีการแจกแจงปกติ
เพราะฉะนั้น มัธยฐาน = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = ฐานนิยม และ
เดไซล์ที่ 2.5 < มัธยฐาน = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = ฐานนิยม < เดไซล์ที่ 7.5
ดังนั้นตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ถูกต้อง

<u>ตอนที่ 2.</u>

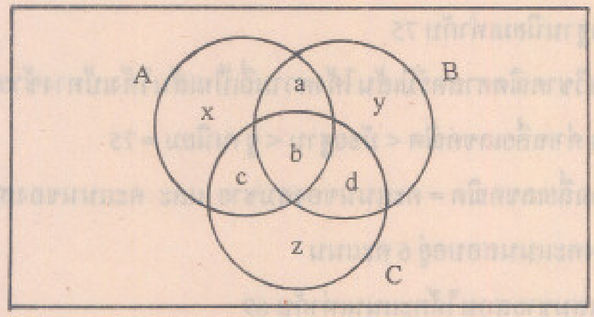
31. ตอบ 2.
แนวคิด ใช้แผนภาพของเวนน์ช่วยในการคำนวน

$n(A \cup B) = 92$ $\quad$ $n(A \cup C) = 79$ $\quad$ $n(B \cup C) = 75$

$n(A \cap B \cap C) = 32$ $\quad$ $n((A \cap B) - C) = 18$ $\quad$ $n((A \cap C) - B) = 6$

$n((B \cap C) - A) = 2$

ให้ a,b,c,d,x,y,z เป็นจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณตามแผนภาพเวนน์



จากเงื่อนไขของโจทย์จะได้จำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณดังนี้

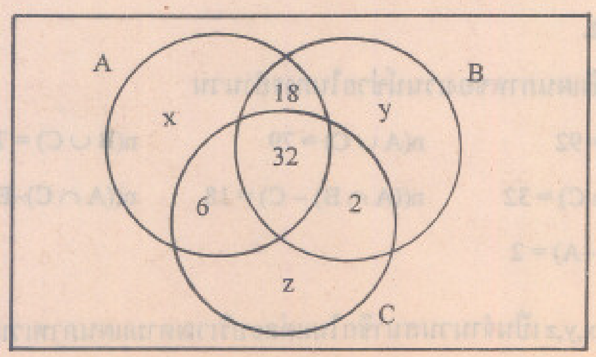
เพราะว่า $n(A \cap B \cap C) = 32$ เพราะฉะนั้น $b = 32$

เพราะว่า $n((A \cap B) - C) = 18$ เพราะฉะนั้น $a = 18$

เพราะว่า $n((A \cap C) - B) = 6$ เพราะฉะนั้น $c = 6$

เพราะว่า $n((B \cap C) - A) = 2$ เพราะฉะนั้น $d = 2$

ผลจากการคำนวนข้างต้นจะได้สมาชิกในแต่ละบริเวณเป็น



เพราะว่า $n(A\cup B) = 92$ เพราะฉะนั้น $x + 18 + 32 + 6 + 2 + y = 92$ ———(1)

$x + y = 34$ ———(2)

เพราะว่า $n(A\cup C) = 79$ เพราะฉะนั้น $x + 18 + 32 + 6 + 2 + z = 79$ ———(3)

$x + z = 21$ ———(4)

เพราะว่า $n(B\cup C) = 75$ เพราะฉะนั้น $18 + 32 + 2 + y + 6 + z = 75$ ———(5)

$y + z = 17$ ———(6)

(2) – (4); $y - z = 13$ ———(7)

(6) – (7); $2z = 4 \rightarrow z = 2$

เพราะฉะนั้น $n(A\cup B\cup C) = x + 18 + 32 + 6 + 2 + y + z = 92 + 2 = 94$

หมายเหตุ นักเรียนไม่ต้องหาค่า $y = 15$ และ $x = 19$ ก็ได้คำตอบสำหรับข้อนี้

32. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก

$$A = \{x\in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\}$$

$$B = \{x\in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$$

$$x = -\frac{1}{3} \rightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}}} = 2 \rightarrow -\frac{1}{3}\in A$$

แต่ $-\frac{1}{3} \notin B$ ดังนั้น $A \neq B$

เพราะฉะนั้น ข้อความ ก ผิด

หมายเหตุ โดยการแก้สมการจะได้ว่า

$$A = \{x\in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{-\frac{1}{3}\}$$

$$B = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\} = \varnothing$$

พิจารณาข้อความ ข $A = \{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\}$

$B = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

$1 \in B$ และ $1 \notin A \rightarrow A \neq B$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข ผิด

หมายเหตุ โดยการแก้อสมการจะได้ว่า

$$A = \{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\} = [\frac{2}{3}, 1) \cup (1, 2]$$

$$B = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\} = [\frac{2}{3}, 2]$$

33. ตอบ 3.

แนวคิด ทบทวนสูตรประพจน์สมมูล $x \rightarrow y \equiv \sim x \vee y$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r$$

$$\sim((p \wedge q) \rightarrow r) \equiv \sim(\sim(p \wedge q) \vee r)$$

$$\equiv p \wedge q \wedge \sim r$$

$$\sim[(xy = 0 \ \wedge \ x \neq 0) \rightarrow y = 0] \equiv (xy = 0) \wedge (x \neq 0) \wedge \sim(y = 0)$$

$$\equiv (xy = 0) \wedge (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)$$

สรุป $\sim[\forall x \exists y [(xy = 0 \ \wedge \ x \neq 0) \rightarrow y = 0]]$

$$\equiv \exists x \forall y [\sim[(xy = 0 \ \wedge \ x \neq 0) \rightarrow y = 0]]$$

$$\equiv \exists x \forall y [(xy = 0) \wedge (x \neq 0) \wedge (y \neq 0)]$$

$$\equiv \exists x \forall y [xy = 0 \ \wedge \ x \neq 0 \ \wedge \ y \neq 0]$$

34. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาการอ้างเหตุผล ก

$[(p \to \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim r)] \to (p)$ แทนค่า $p = F$, $q = T$, $r = F$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}[(p \to \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim r)] \to (p) &= [(F \to \sim T) \wedge (T \vee F) \wedge (\sim F)] \to (F) \\ &= [(F \to F) \wedge (T) \wedge (T)] \to (F) \\ &= [(T) \wedge (T) \wedge (T)] \to (F) \\ &= [T] \to (F) \\ &= F\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $[(p \to \sim q) \wedge (q \vee r) \wedge (\sim r)] \to (p)$ ไม่สมเหตุสมผล

พิจารณาการอ้างเหตุผล ข

สมมติ $[(p \wedge q) \wedge (q \to r) \wedge (\sim r \vee s)] \to (s) = F$

เพราะฉะนั้น $s = F$, $(p \wedge q) = T$, $(q \to r) = T$, $(\sim r \vee s) = T$

เพราะว่า $s = F$ และ $(\sim r \vee s) = T$ เพราะฉะนั้น $\sim r = T$ และ $r = F$

เพราะว่า $(q \to r) = T$ และ $r = F$

เพราะฉะนั้น $q = F$ และ $(p \wedge q) = F$ ขัดแย้งกับ $(p \wedge q) = T$

เพราะฉะนั้น $[(p \wedge q) \wedge (q \to r) \wedge (\sim r \vee s)] \to (s)$ ต้องเป็นจริงเสมอ

สรุปการอ้างเหตุผล ข. สมเหตุสมผล

35. ตอบ 2.

แนวคิด $g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 9 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 8 = (x+1)^3 + 8$

$g(x) = 7$

$(x+1)^3 + 8 = 7$

$$(x+1)^3 = -1$$

$$x+1 = -1$$

$$x = -2$$

เพราะฉะนั้น $g^{-1}(7) = -2$

เพราะว่า $f(x) = x^2 + 2x - 1$ เพราะฉะนั้น $f(-2) = -1$

สรุป $(fog^{-1})(7) = f(g^{-1}(7)) = f(-2) = -1$

36. ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $x + 2y = 12 \rightarrow y = \dfrac{12-x}{2} \rightarrow f(x) = \dfrac{12-x}{2}$

$f(8) = 2$

$f(2) = 5$

$(fof)(8) = f(f(8)) = f(2) = 5 \rightarrow (8,5) \in fof$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การแสดงข้อพิสูจน์ว่า $fof = \{(8,5), (4,4)\}$

เพราะว่า $f(x) = \dfrac{12-x}{2}$ เพราะฉะนั้น $D_f = \{,2,4,6,8,10\}$ และ $R_f = \{5,4,3,2,1\}$

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{12-x}{2}\right) = \frac{12-\left(\frac{12-x}{2}\right)}{2} = \frac{12+x}{4}$$

$(fof)(x)$ หาค่าได้เมื่อ $x = 4$ และ $x = 8$ เท่านั้น

$(fof)(4) = 4$ และ $fof(8) = 5$

เพราะฉะนั้น $fof = \{(8,5), (4,4)\}$

37. ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าได้เสมอ

เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆ เช่น $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{\pi}{2}) \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$x = \frac{5\pi}{2} \rightarrow \cos\frac{5\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{5\pi}{2}) \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$

$$\cos^2 x = 3(1 - 2\sin x + \sin^2 x)$$

$$1 - \sin^2 x = 3 - 6\sin x + 3\sin^2 x$$

$$4\sin^2 x - 6\sin x + 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = 1, \frac{1}{2}$$

$\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}, \ldots$

$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \ldots$

เพราะว่า $x \in [0, 4\pi]$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}$

38. ตอบ 1.

แนวคิด ทบทวนสูตร $\arcsin x = \arccos(\sqrt{1 - x^2})$ และ $\arccos x = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$

$$\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\arccos(x - x^2) = \arcsin x + \arcsin(x - 1)$$

$$\cos(\arccos(x - x^2)) = \cos(\arcsin x + \arcsin(x - 1))$$

$x-x^2 = \cos(\arcsin x)\cos(\arcsin(x-1)) - \sin(\arcsin x)\sin(\arcsin(x-1))$

$x-x^2 = \cos(\arccos(\sqrt{1-x^2}))\cos(\arccos(\sqrt{1-(x-1)^2})) - (x)(x-1)$

$x-x^2 = (\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1-(x-1)^2}) - (x)(x-1)$

$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-(x-1)^2} = 0$

$(1-x^2)(1-(x-1)^2) = 0$

$(1-x)(1+x)(1-x^2+2x-1) = 0$

$(1-x)(1+x)(x)(2-x) = 0$

$x = -1, 0, 1, 2$

เพราะว่า โดเมนของ arcsinx ไม่มี 2 เพราะฉะนั้น $x \neq 2$

$x = 1;\quad \arccos(1-1^2) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin 1 + \arcsin(1-1) = \arcsin 1 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$

$x = 0;\quad \arccos(0-0^2) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin 0 + \arcsin(0-1) = \arcsin 0 + \arcsin(-1) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2}$

$x = -1;\quad \arccos(-1-1^2) = \arccos(-2)$ หาค่าไม่ได้

สรุป $\{x \mid \arccos(x-x^2) = \arcsin x + \arcsin(x-1)\} = \{1\}$

39. ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปตามโจทย์กำหนด

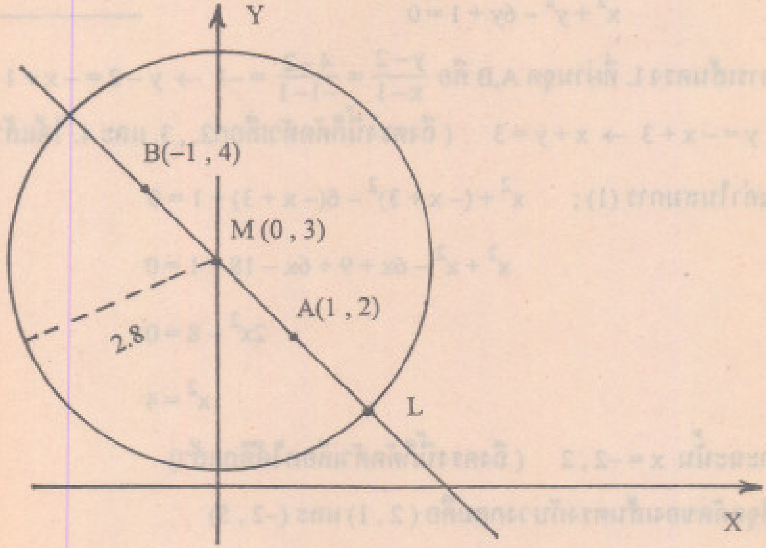
ลากเส้นตรง L ผ่านจุด A(1 , 2) และ B((–1 , 4)

จุด M มีพิกัดเป็น (0 , 3) (หมายเหตุ กะระยะด้วยไม้โปรก็พอ ถ้าไม่รู้สูตร)

ประมาณค่า $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2(1.4) = 2.8$

เขียนวงกลมรัศมี 2.8 จุดศูนย์กลาง M(0 , 3)

ขณะนี้เราได้จุดตัดตามที่โจทย์ต้องการแล้ว



วัดพิกัดของจุดตัดในควอดรันท์ที่ 1. ได้เป็น (2 , 1)

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

หมายเหตุ เพราะว่าตัวเลือกเป็นจุดในควอดรันท์ 1. ทุกตัวเลือกเราจึงไม่ต้องสนใจจุดในควอดรันท์ 2

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2 สมการเส้นตรง L คือ $\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{-1-1} = -1$

$$y - 2 = -x + 1$$

$$y = -x + 3$$

โดยการแทนค่า (2 , 5) , $(\sqrt{2}, 3-\sqrt{6})$, $(\sqrt{3}, 3-\sqrt{5})$ ไม่อยู่บนเส้นตรง L

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง หาจุดกึ่งกลางของ A(1 , 2) และ B(−1 , 4) ได้เป็น M(0 , 3)

สมการวงกลมคือ $(x-0)^2+(y-3)^2=8$

$$x^2+y^2-6y+9=8$$

$$x^2+y^2-6y+1=0 \qquad \text{———————(1)}$$

สมการเส้นตรง L ที่ผ่านจุด A,B คือ $\frac{y-2}{x-1}=\frac{4-2}{-1-1}=-1 \rightarrow y-2=-x+1$

$\rightarrow y=-x+3 \rightarrow x+y=3$ (ถึงตรงนี้ก็ตัดตัวเลือก2. , 3. และ 4. ได้แล้ว)

แทนค่าในสมการ (1) ; $x^2+(-x+3)^2-6(-x+3)+1=0$

$$x^2+x^2-6x+9+6x-18+1=0$$

$$2x^2-8=0$$

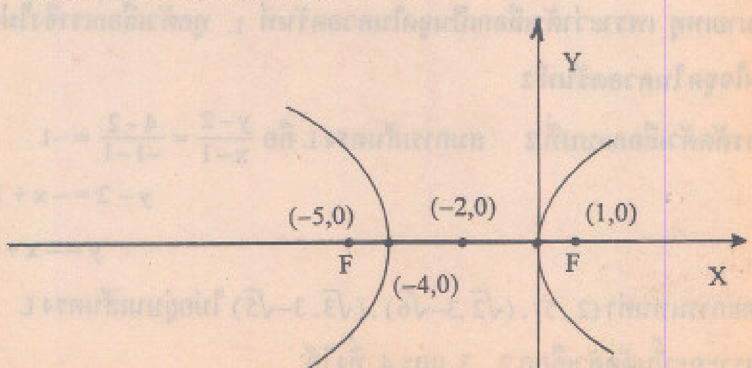
$$x^2=4$$

เพราะฉะนั้น $x=-2 , 2$ (ถึงตรงนี้ก็ตัดตัวเลือกได้อีกแล้ว)

สรุปจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลมคือ (2 , 1) และ (−2 , 5)

40. ตอบ 1.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดเท่าที่จะทำได้



การตัดตัวเลือก จุดศูนย์กลางของวงรีแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(-2 , 0)$ 2. $(-2 , 0)$ 3. $(2 , 0)$ 4. $(2 , 0)$

เพราะว่าไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง $(-2 , 0)$

เพราะฉะนั้นวงรีมีจุดศูนย์กลาง $(-2 , 0)$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

จากรูปความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา = 4

ความยาวแกนโทของวงรีในตัวเลือกที่เหลือคือ

ตัวเลือก 1. แกนโทยาว 4 ตัวเลือก 2. แกนโทยาว $2\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.ทิ้ง

วิธีจริง ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ $(-4, 0)$ โฟกัสที่ $(-5, 0)$ และ $(1, 0)$

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง $(-2 , 0)$, $c = 3$, $a = 2$ และ $b = \sqrt{5}$

สมการของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

ความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา = 4

ความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลา = $2\sqrt{5}$

วงรีมีจุดศูนย์กลาง $(-2 , 0)$

ความยาวแกนเอกของวงรี = ความยาวแกนสังยุค = $2\sqrt{5}$ $\rightarrow$ a วงรี = $\sqrt{5}$

ความยาวแกนโทของวงรี = ความยาวแกนตามขวาง = 4 $\rightarrow$ b วงรี = 2

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$$

หรือ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

$$\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

สรุปต้องเลือกตัวเลือก 1. จึงจะได้ 2 คะแนน (อย่าคิดมากเพราะว่ามีข้อที่แยกวาน อีก เช่น ข้อ 2. , 44.)

หมายเหตุ ยังมีวงรีที่แกนเอกไม่ขนานกับแกน X หรือไม่ขนานกับแกน Y แต่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์อีกมากมาย

41. ตอบ 2.

แนวคิด
$$2\log_3 x - 2\log_{x^2} 9 + 3 = 0$$
$$2\log_3 x - 2\log_{x^2}(3^2) + 3 = 0$$
$$2\log_3 x - 4\log_{x^2} 3 + 3 = 0$$
$$2\log_3 x - 4\frac{1}{\log_3 x^2} + 3 = 0$$
$$2\log_3 x - 4\frac{1}{2\log_3 x} + 3 = 0$$
$$2\log_3 x - 2\frac{1}{\log_3 x} + 3 = 0$$

แทนค่า $V = \log_3 x$; $2V - 2\frac{1}{V} + 3 = 0$
$$2V^2 + 3V - 2 = 0$$
$$(2V - 1)(V + 2) = 0$$
$$V = \frac{1}{2}, -2$$

$\log_3 x = \frac{1}{2} \rightarrow \log_3 x = \frac{1}{2}\log_3 3$

$\rightarrow \log_3 x = \log_3 \sqrt{3} \rightarrow x = \sqrt{3}$

$\log_3 x = -2 \rightarrow \log_3 x = -2\log_3 3$

$\rightarrow \log_3 x = \log_3(3^{-2}) \rightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของราก $= \sqrt{3} + \frac{1}{9} = 1.732 + 0.111 = 1.843$

42. ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆช่วยในการตัดตัวเลือก

เช่น x = 1,2,3,...

$x = 1$ $\quad 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 4 - 4 - 8 = -8 < 0 \rightarrow 1 \notin A$

$\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{0} - \sqrt{-1}$ หาค่าไม่ได้ $\rightarrow 1 \notin B$

เพราะฉะนั้น $1 \notin A \cup B$ นั่นคือ $A \cup B \neq R^+$ ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

$x = 2$ $\quad 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 16 - 8 - 8 = 0 \rightarrow 2 \notin A$

$\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} \geq 1 \rightarrow 2 \in B$

เพราะฉะนั้น $B \not\subset A$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2.

$x = 3$ $\quad 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 64 - 16 - 8 = 40 > 0 \rightarrow 3 \in A$

$\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \geq 1 \rightarrow 3 \in B$

เพราะฉะนั้น $A \cap B \neq \varnothing$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง การหาเซต $A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 8 > 0$$

$$(2^x - 4)(2^x + 2) > 0$$

เพราะว่า $(2^x + 2) > 0$ เพราะฉะนั้น $2^x - 4 > 0$

$$2^x > 4$$

$$2^x > 2^2$$

$$x > 2$$

สรุป $A = (2, \infty)$

การหาเซต B $\quad \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1$

$$(\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2})^2 \geq 1$$

$$2x-2-2\sqrt{2x-2}\sqrt{x-2} + x - 2 \geq 1$$

$$3x-5 \geq 2\sqrt{2x-2}\sqrt{x-2}$$

$$9x^2 - 30x + 25 \geq 4(2x-2)(x-2)$$

$$9x^2 - 30x + 25 \geq 8x^2 - 24x + 16$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0$$

$-\infty < x < \infty$ ————————————(1)

$x - 2 \geq 0$ เมื่อ $x \geq 2$ ————————————(2)

$2x - 2 \geq 0$ เมื่อ $x \geq 1$ ————————————(3)

สรุป $B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1\} = [2, \infty)$

เพราะฉะนั้น $A \subset B$

43. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า แถวที่สองของ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ถูกลบด้วยสองเท่าของแถวที่หนึ่ง

ได้เป็น $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} R_2 - 2R_1$

เพราะฉะนั้น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $x + 2y + 3z = 1$ ——————(1)

$2x + 3y + 5z = 1$ ——————(2)

$-x + 2z \quad = 0$ ——————(3)

$-3(1)$; $-3x - 6y - 9z = -3$ ——————(4)

$2(2)$; $4x + 6y + 10z = 2$ ——————(5)

$(4) + (5)$; $x + z = -1$ ——————(6)

$-2(6)$; $-2x - 2z = 2$ ——————(7)

$(3) + (7)$; $-3x = 2$

$x = -\frac{2}{3}$

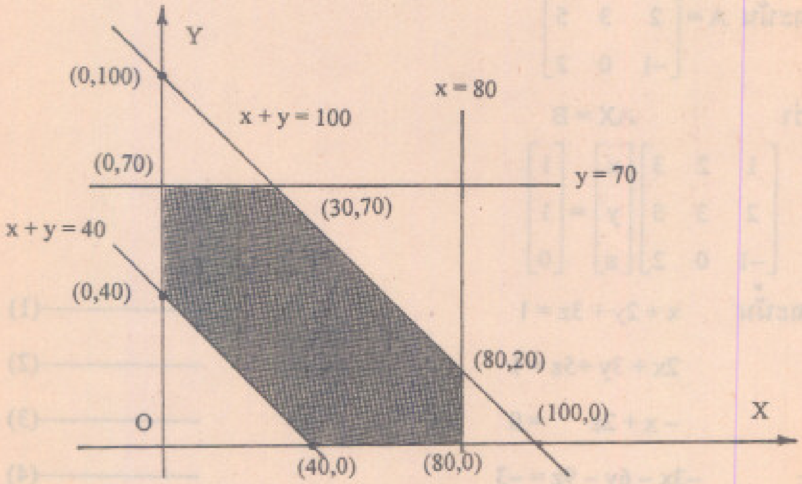
หมายเหตุ การหาค่า x , y , z สามารถใช้สูตร

$$X = A^{-1}B = (\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -6 & 4 & -1 \\ 9 & -5 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix})\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (\frac{1}{3})\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ในการสอบจริงไม่ควรทำโดยใช้สูตร $X = A^{-1}B$ เพราะว่าโจทย์ถามค่า x เพียงค่าเดียวเท่านั้นจึงควรใช้วิธีแก้สมการดีกว่า

44. ตอบ ค่าสูงสุดของ $P = 1180$ เมื่อ $x = 40$ และ $y = 0$ ไม่มีในตัวเลือก

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดและหาจุดตัดของเส้นตรง เพื่อหาจุดมุม



จุดมุมคือ (40 ,0) , (80 , 0) , (80 , 20) , (30 , 70) , (0 , 70) และ (0 , 40)

จุดมุม (x , y)	$P = 1500 - 8x - 10y$
(40 ,0)	1180
(80 , 0)	860
(80 , 20)	660
(30 , 70)	560
(0 , 70)	800
(0 , 40)	1100

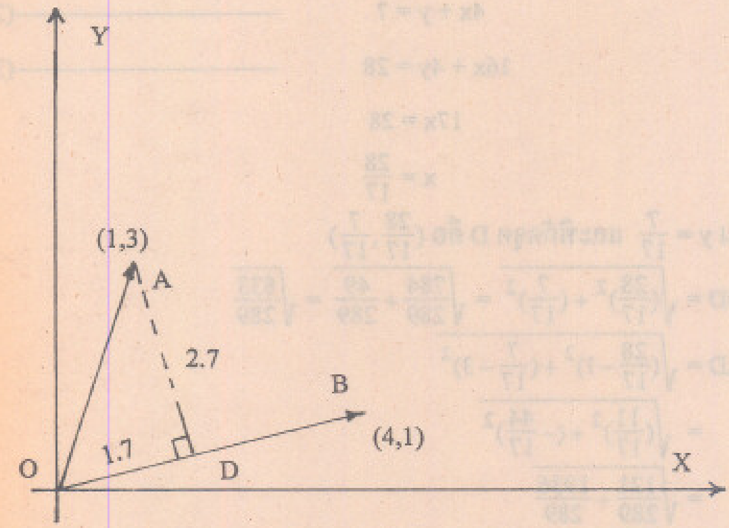
สรุป P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 560 เมื่อ $x = 30$ และ $y = 70$

P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 1180 เมื่อ $x = 40$ และ $y = 0$

45. ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทางเพื่อประมาณค่าพื้นที่ OAD

1. ลากเส้นเวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$ และ $\overrightarrow{OB}$
2. ลาก OD ตั้งฉากกับ OB
3. วัดระยะทาง OD = 1.7 และ AD = 2.7



ค่าประมาณค่าพื้นที่ OAD = $\frac{1}{2}$(OD)(AD) = $\frac{1}{2}$(1.7)(2.7) = 2.295

$\frac{77}{17} = 4.5 > 3$ แน่นอน → ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$\frac{77}{2\sqrt{17}} > \frac{77}{17} > 3$ แน่นอน → ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$\frac{77}{\sqrt{34}} = \frac{77}{\sqrt{2}\sqrt{17}} > \frac{77}{2\sqrt{17}} > \frac{77}{17} > 3$ แน่นอน → ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$\frac{77}{34} = 2.264$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีที่สุด

วิธีจริง สมการเส้นตรง OB คือ $\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}$

$$x - 4y = 0 \quad \text{———————(1)}$$

เพราะฉะนั้นความชัน OB เท่ากับ $\frac{1}{4}$

AD ตั้งฉากกับ OB เพราะฉะนั้นความชัน AD เท่ากับ -4

สมการเส้นตรง AD คือ $(y-3) = (-4)(x-1)$

$$4x + y = 7 \quad \text{———————(2)}$$

4(2) ; $$16x + 4y = 28 \quad \text{———————(3)}$$

(1) + (3) ; $$17x = 28$$

$$x = \frac{28}{17}$$

เพราะฉะนั้น $y = \frac{7}{17}$ และพิกัดจุด D คือ $(\frac{28}{17}, \frac{7}{17})$

ความยาว OD = $\sqrt{(\frac{28}{17})^2 + (\frac{7}{17})^2} = \sqrt{\frac{784}{289} + \frac{49}{289}} = \sqrt{\frac{833}{289}}$

ความยาว AD = $\sqrt{(\frac{28}{17} - 1)^2 + (\frac{7}{17} - 3)^2}$

$$= \sqrt{(\frac{11}{17})^2 + (-\frac{44}{17})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{121}{289} + \frac{1936}{289}}$$

$$= \sqrt{\frac{2057}{289}}$$

พื้นที่ OAD = $\frac{1}{2}(OD)(AD)$

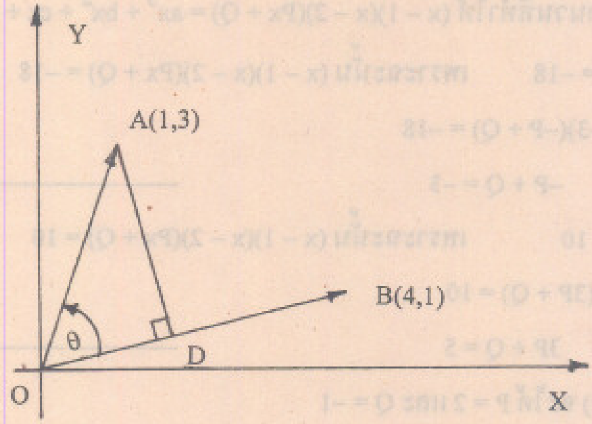
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{833}{289}}\sqrt{\frac{2057}{289}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{833}}{17}\frac{\sqrt{2057}}{17}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(77)(77)(17)(17)}}{(17)(17)}$$

$$= \frac{77}{34}$$

วิธีที่ 2.



พื้นที่สามเหลี่ยม OAD $= \frac{1}{2}(\mathrm{OD})(\mathrm{AD})$

$\cos\theta = \frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OA}} \rightarrow \mathrm{OD} = \mathrm{OA}\cos\theta$

$\sin\theta = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{OA}} \rightarrow \mathrm{AD} = \mathrm{OA}\sin\theta$

พื้นที่สามเหลี่ยม OAD $= \frac{1}{2}(\mathrm{OA}\cos\theta)(\mathrm{OA}\sin\theta) = \frac{1}{2}(\mathrm{OA}\cos\theta)(\mathrm{OA}\sin\theta)$

$\cos\theta = \frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}{|\mathrm{OA}|\cdot|\mathrm{OB}|} = \frac{(1)(4)+(3)(1)}{\sqrt{10}\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{170}}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{49}{170}} = \frac{11}{\sqrt{170}}$

$\mathrm{OA}^2 = 1^2 + 3^2 = 10$

สรุป พื้นที่สามเหลี่ยม OAD $= \frac{1}{2}\mathrm{OA}^2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}(10)(\frac{7}{\sqrt{170}})(\frac{11}{\sqrt{170}}) = \frac{77}{34}$

46. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $f(1) = 0$ และ $f(2) = 0$

เพราะฉะนั้น $(x-1)$ และ $(x-2)$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

ให้ P , Q เป็นจำนวนที่ทำให้ $(x-1)(x-2)(Px+Q) = ax^3 + bx^2 + cx + d = f(x)$

เพราะว่า $f(-1) = -18$ เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(Px+Q) = -18$

$$(-2)(-3)(-P+Q) = -18$$

$$-P + Q = -3 \qquad \text{———(1)}$$

เพราะว่า $f(3) = 10$ เพราะฉะนั้น $(x-1)(x-2)(Px+Q) = 10$

$$(2)(1)(3P+Q) = 10$$

$$3P + Q = 5 \qquad \text{———(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $P = 2$ และ $Q = -1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (x-1)(x-2)(2x-1)$ สรุป $f(-2) = (-3)(-4)(-5) = -60$

หมายเหตุ ระบบสมการ 4 สมการ 4 ตัวแปร จะเสียเวลามากในการหาคำตอบ

จาก $\qquad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(1) = 0$; $\qquad a + b + c + d = 0$ ———(1)

$f(2) = 0$; $\qquad 8a + 4b + 2c + d = 0$ ———(2)

$f(-1) = -18$; $\qquad -a + b - c + d = -18$ ———(3)

$f(3) = 10$; $\qquad 27a + 9b + 3c + d = 10$ ———(4)

ข้อแนะนำ การหาค่า a,b,c,d เป็นเสียเวลามากข้ามไปทำข้ออื่นที่ง่ายกว่าก่อนดีกว่า

โดยการแก้สมการจะได้ $a = 2$, $b = -7$, $c = 7$ และ $d = -2$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

สรุป $f(-2) = -16 - 28 - 14 - 2 = -60$

47. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ x = 1 เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) = g(1)$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\frac{(x^2+x+1)}{(x+1)} = \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้น $g(1) = \frac{3}{2}$

สรุป $\lim\limits_{x\to1^-} (x+3)g(x) = (1+3)g(1) = 4(\frac{3}{2}) = 6$

48. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า g เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่งมีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 5 ที่จุด x = 1

เพราะฉะนั้น $g(1) = 5$ และ $g'(1) = 0$

$$f(x) = (3x^2+5x)g(x)$$

$$f'(x) = (\frac{d}{dx}(3x^2+5x))(g(x)) + (3x^2+5x)\frac{d}{dx}g(x)$$

$$= (6x+5)(g(x)) + (3x^2+5x)g'(x)$$

$$f'(1) = (6+5)(g(1)) + (3+5)g'(1) = (11)(5) + (8)(0) = 55$$

49. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$ เพราะฉะนั้น $\int_1^{\sin\theta} x^2dx = \frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{1}{3}$

$$\frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\sin^3\theta = -1$$

$\sin\theta = -1$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = 0$ และ $1 + \sin\theta + \cos\theta = 1 - 1 + 0 = 0$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $-\sqrt{2} \leq \sin\theta + \cos\theta \leq \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $1 + \sin\theta + \cos\theta \neq -1$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

50. ตอบ 1.

แนวคิด M = เหตุการณ์นักเรียนสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

C = เหตุการณ์นักเรียนสอบผ่านวิชาเคมี

เพราะว่า $\frac{1}{3}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

เพราะฉะนั้น $P(M) = \frac{1}{3}$

เพราะว่า $\frac{8}{15}$ ของนักเรียนทั้งหมดสอบผ่านวิชาเคมี

เพราะฉะนั้น $P(C) = \frac{8}{15}$

เพราะว่าความน่าจะเป็นของนักเรียนในกลุ่มนี้ที่จะสอบผ่านอย่างมากหนึ่งวิชา = $\frac{4}{5}$

เพราะฉะนั้น $P((M \cap C)') = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $P(M \cap C) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

ความน่าจะปืนที่เขาจะสอบผ่านอย่างน้อยหนึ่งวิชาเท่ากับ

$$= P(M \cup C) \qquad = P(A) + P(C) - P(M \cap C)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{8}{15} - \frac{1}{5}$$

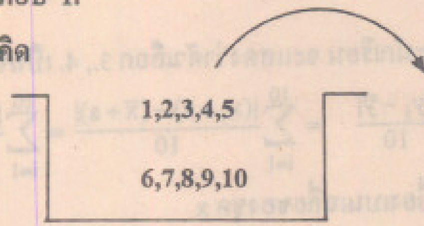
$$= \frac{5+8-3}{15}$$

$$= \frac{10}{15}$$

$$= \frac{2}{3}$$

51. ตอบ 1.

แนวคิด



หยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบ

ทำได้ $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

S = แซมเปิลสเปซของการหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบจาก 10 ใบ

$= \{\{x,y,z\} \mid x,y,x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ และ $x \neq y \neq z \neq x\}$

$n(S) = 120$

E = เหตุการณ์แต้มรวมกันเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5

$= \{\{1,4,5\},\{2,3,5\}\}$

$n(E) = 2$

เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60}$

ข้อสังเกต คำถามข้อนี้คล้ายกับข้อสอบวัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 1. ข้อ 28

52. ตอบ 2.

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้วัดผลเกี่ยวกับความจำของนักเรียนว่าจะจำสมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และ ค่ามาตรฐาน

เพราะว่า $y_i = x_i + a$ เพราะฉะนั้น $\overline{Y} = \overline{X} + a$

เพราะว่า $a > 0$ เพราะฉะนั้น $\overline{X} < \overline{Y}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. เป็นจริง

เพราะว่า $y_i = x_i + a$

เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของชุด X = ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของชุด Y

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ไม่จริง

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ของครูและนักเรียน จะแสดงว่าตัวเลือก 3., 4. เป็นจริง

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของชุด $y = \sum_{i=1}^{10} \frac{|y_i - \bar{y}|}{10} = \sum_{i=1}^{10} \frac{|(x_i + a) - (\bar{x} + a)|}{10} = \sum_{i=1}^{10} \frac{|x_i - \bar{x}|}{10}$

= ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของชุด x

ค่ามาตรฐานของคะแนน $x_3 = \frac{x_3 - \bar{x}}{s_x}$

ค่ามาตรฐานของคะแนน $y_3 = \frac{y_3 - \bar{y}}{s_y} = \frac{(x_3 + a) - (\bar{x} + a)}{s_x} = \frac{x_3 - \bar{x}}{s_x}$

= ค่ามาตรฐานของคะแนน x_3

ข้อสังเกต สำหรับคนที่จำสมบัติค่าเฉลี่ยเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และ ค่ามาตรฐานไม่ได้ ข้อสอบข้อจัดอยู่ในประเภทโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นโดยการแทนค่า $a = 1 > 0$

ข้อมูล X คือ : $-5,-4,-3,-2,-1,1,2,3,4,5$

ข้อมูล Y คือ : $-4,-3,-2,-1,0,2,3,4,5,6$

เมื่อคำนวนออกมาจริงๆ ก็จะได้ว่าตัวเลือก 2. ไม่จริงทำให้ได้คำตอบเหมือนกัน

53. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า สัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 24 % เพราะฉะนั้น $\frac{s}{\bar{x}} = 0.24$

เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12

เพราะฉะนั้น $s = 12$ และ $\bar{x} = 50$

หมายเหตุ ถึงตรงนี้จะตัดตัวเลือกได้ 2 ตัวเลือกมาดูการใช้เหตุผลกัน

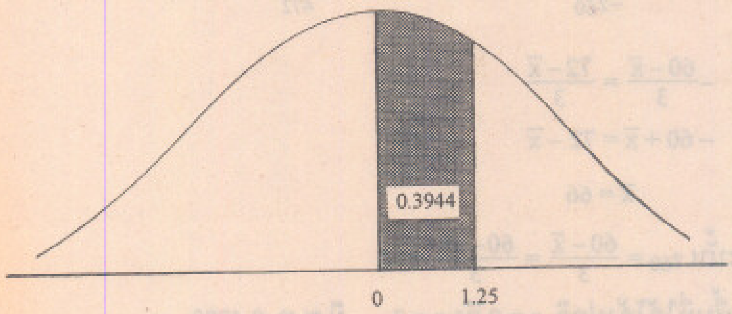
เพราะว่า 65 > 50 = ค่าเฉลี่ย = ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ 50

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$x = 65$ จะได้ค่า $z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{65-50}{12} = 1.25$

จากพื้นที่ใต้โค้งปกติ ระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.2$ เป็น 0.3849

ระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.25$ เป็น 0.3944



เพราะฉะนั้น $P(z < 1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$

สรุปคะแนน 65 ตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 89.44

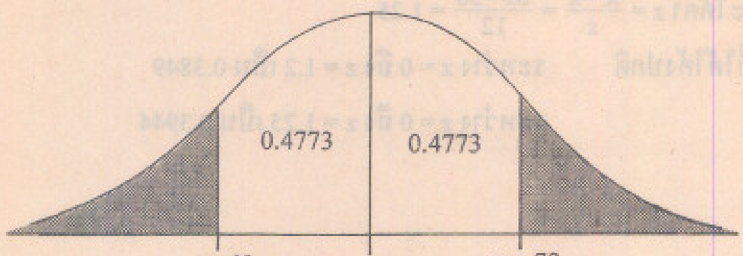
54 ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $s^2 = 9$ เพราะฉะนั้น $s = 3$ สมมติ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ย

คะแนน 60 ตรงกับ $z_{60} = \frac{60-\bar{x}}{3}$

คะแนน 72 ตรงกับ $z_{72} = \frac{72-\bar{x}}{3}$

เพราะว่านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 60 คะแนน มีจำนวนเท่ากับนักเรียนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 72 คะแนน เพราะฉะนั้น $-z_{60} = z_{72}$



$$-\frac{60-\bar{x}}{3} = \frac{72-\bar{x}}{3}$$

$$-60+\bar{x} = 72-\bar{x}$$

$$\bar{x} = 66$$

เพราะฉะนั้น $z_{60} = \frac{60-\bar{x}}{3} = \frac{60-66}{3} = -2$

เพราะว่าพื้นที่ใต้โค้งปกติ $z = 0$ ถึง $z = 2$ มี พ.ท. 0.4773

เพราะฉะนั้นพื้นที่ใต้โค้งปกติเมื่อ $z < 2$ มี พ.ท. $= 0.5 - 0.4773 = 0.0227$

สรุป นักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 60 คะแนนมีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 2.27

55 ตอบ 2.

แนวคิด แสดงปริมาณและราคาสินค้า 2 ชนิด ของร้านไฟฟ้า

ในปี พ.ศ. 2532 และ 2536

	ราคา(หน่วย : พันบาท)		ปริมาณ(หน่วย : เครื่อง)	
รายการสินค้า	พ.ศ.2532	พ.ศ.2536	พ.ศ.2532	พ.ศ.2536
โทรทัศน์	5	8	100	105
วิทยุ	3	6	a	a

ดัชนีราคาสินค้าในปี พ.ศ.2536 โดยใช้ พ.ศ.2532 เป็นปีฐาน แบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐานมีค่าเท่ากับ 170

$$I_L = \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{oi}} \times 100$$

$$170 = \frac{(8)(100)+(6)(a)}{(5)(100)+(3)(a)} \times 100$$

$170(500 + 3a) = 100(800 + 6a)$

$85000 + 510a = 80000 + 600a$

$90a = 5000$

$a = 55.55$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบดีกว่า

56 ตอบ 2.

แนวคิด ปี พ.ศ.2536 สุเมธมีรายได้ 10,000 บาทต่อเดือน

เพราะว่าปี พ.ศ.2537 เขามีรายได้เพิ่มขึ้น 15 เปอร์เซนต์จากปี พ.ศ.2536

เพราะฉะนั้นปี พ.ศ.2537 เขามีรายได้ 11,500 บาทต่อเดือน

เพราะว่าดัชนีราคาผู้บริโภคปี พ.ศ.2537 เมื่อให้ปี พ.ศ.2536 เป็นปีฐานเท่ากับ 200

เพราะฉะนั้นรายได้ที่แท้จริงของสุเมธในปี พ.ศ.2537 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ.2536

$$= \frac{\text{เงินเดือนปี พ.ศ. 2537}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภค พ.ศ. 2537}} \times 100$$

$$= \frac{11500}{200} \times 100$$

$$= 5750$$

ตอนที่ 3.

1 ตอบ ค.ร.น. ของ n และ 42 มีค่าเท่ากับ 210

แนวคิด วิธีที่ 1. เพราะว่า ห.ร.ม. ของ n และ 42 เท่ากับ 6

เพราะฉะนั้น n มี 2 และ 3 เป็นตัวประกอบ

ให้ $n = 2 \cdot 3 \cdot x$ เมื่อ x เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $42 = nq_0 + r_0$, $0 < r_0 < n$ เพราะฉะนั้น $n < 42$

เพราะว่า $n = 2r_0 + r_1$, $0 < r_1 < r_0$ และ $r_0 = 2r_1$

เพราะฉะนั้น $n = 2(2r_1) + r_1 = 5r_1$

เพราะฉะนั้น 5 หาร n ลงตัว และ $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y$ เมื่อ y เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $n < 42$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น $y = 1$ สรุป $n = 30$

เพราะว่า $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ และ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

เพราะฉะนั้น ค.ร.น. ของ 30 และ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$

วิธีที่ 2 จากขั้นตอนวิธียุคลิด ค 011 หน้า 104 - 105

$m = nq + r$; $0 < r < |n|$ ....(0)

$n = rq_1 + r_1$; $0 < r_1 < r$ ....(1)

$r = r_1q_2 + r_2$; $0 < r_2 < r_1$ ....(2)

....

$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k$; $0 < r_k < r_{k-1}$ ....(k)

$r_{k-1} = r_kq_{k+1}$; ....(k + 1)

จากขั้นตอนวิธียุคลิดจะได้ว่า ห.ร.ม. $(m, n) = r_k$

เปรียบเทียบกับเงื่อนไขที่โจทย์ให้มา

$42 = nq_0 + r_0 \quad , \quad 0 < r_0 < n$

$n = 2r_0 + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < r_0$

$r_0 = 2r_1$

เขียนในรูปแบบขั้นตอนวิธียุคลิดได้เป็น

$42 = nq_0 + r_0 \quad , \quad 0 < r_0 < n$

$n = r_0 2 + r_1 \quad , \quad 0 < r_1 < r_0$

$r_0 = r_1 2$

จากขั้นตอนวิธียุคลิดจะได้ว่า ห.ร.ม. $(42, n) = r_1$

เพราะฉะนั้น $r1 = 6$, $r0 = 12$, $n = 30$

สรุป ค.ร.น. ของ $(42, 30) = 210$

2 ตอบ เงื่อนไข $a + 1 \neq B$ ไม่มีความหมายทำให้โจทย์ไม่สมบูรณ์

แนวคิด เพื่อประโยชน์ของครูและนักเรียน ขอเปลี่ยนคำถามเป็น

ให้ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ และ $P(A)$ คือเพอเวอร์เซตของ A

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง P(A) กำหนดโดย

$r = \{(a, B) \mid a \geq 2, a \notin B$ และ $a + 1 \notin B\}$ แล้ว r มีจำนวนสมาชิกกี่จำนวน

การนับจำนวนสมาชิกของ r

กรณี $a = 2$

$r_{a=2} = \{(2, B) \mid 2 \notin B$ และ $3 \notin B\}$

$= \{(2, B) \mid 2 \notin B$ และ $3 \notin B\}$

B ต้องเป็นสับเซตของ {0,1} ซึ่งมีได้ 4 เซตคือ $\varnothing$, {0} , {1} , {0,1}

กรณี a = 3

$r_{a=3} = \{(3, B) \mid 3 \notin B$ และ $4 \notin B\}$

B ต้องเป็นสับเซตของ {0,1,2} ซึ่งมีได้ 8 เซตคือ

$\varnothing$, {0} , {1} , {2} , {0,1},{0,2},{1,2},{0,1,2}

สรุปจำนวนสมาชิกของ r เท่ากับ 4 + 8 = 12

หมายเหตุ เห็นแนวทางการหาคำตอบแล้ว ลองหาจำนวนสมาชิกของ r ต่อไปนี้

1. $r = \{(a, B) \mid a \geq 2, a \notin B$ และ $a + 1 \in B\}$
2. $r = \{(a, B) \mid a \geq 2, a \notin B$ และ $\{a + 1\} \neq B\}$

3. ตอบ $p = \frac{1}{2}$

แนวคิด $$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}A$$

$$|A|A^{-1} = \text{adj}A$$

$$A^2|A|A^{-1} = A^2(\text{adj}A)$$

$$|A|A^2A^{-1} = A^2(\text{adj}A)$$

$$|A|A = A^2(\text{adj}A)$$

เพราะว่า $$A^2(\text{adj}A)X = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $$|A|A\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $|A| = 6$

ดังนั้น
$$6\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 0 & -6 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ระบบสมการ $6p + 12q + 18r = 1$

$$-6q = 6$$
$$12p + 6q = 0$$

สรุป $q = -1$, $p = \frac{1}{2}$

4 ตอบ 45

แนวคิด $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$\frac{\sqrt{2+1}-\sqrt{1}}{\sqrt{2(1+1)}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{1+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{\sqrt{2+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2(2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\frac{\sqrt{3+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{3(3+1)}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}$$

:

:

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = (1-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}})+\ldots+(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

$$a = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}})$$

$$= 1$$

จากสูตรพจน์ที่ $r+1$ ของ $(x+1)^n$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^8 ในการกระจาย $(x+1)^{10}$ คือ $\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$

5. ตอบ 46 เมตร

แนวคิด $s(t)$ เป็นฟังก์ชันของการเคลื่อนที่

เพราะว่าความเร่งขณะเวลา t ใดๆเป็น $24t^2$ เมตร/(วินาที)^2

เพราะฉะนั้น $\frac{d^2s}{dt^2} = 24t^2$

เพราะว่า $\int 24t^2dt = 8t^3 + C$

เพราะฉะนั้น $\frac{ds}{dt} = 8t^3 + C$

เพราะว่าขณะวเลา เป็น $t = 1$ วินาที มีความเร็ว 16 เมตร/วินาที

เพราะฉะนั้น $16 = 8 + C$ ซึ่งจะได้ $C = 8$

เพราะฉะนั้น $\frac{ds}{dt} = 8t^3 + 8$

เพราะว่า $\int (8t^3 + 8)dt = 2t^4 + 8t + K$

เพราะฉะนั้น $s = 2t^4 + 8t + K$

เพราะว่าขณะเวลา เป็น $t = 1$ วินาทีเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 8 เมตร

เพราะฉะนั้น $8 = 2 + 8 + K$ ดังนั้น $K = -2$

เพราะฉะนั้น $s = 2t^4 + 8t + -2$

สรุป เวลา $t = 2$ วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $= 32 + 16 - 2 = 46$

6. ตอบ 75 วิธี

แนวคิด จำแนกกรณีครู 3 คน พักในห้องเดียวกันเป็น 2 กรณี

กรณี 1. ครู 3 คนพักห้องกลาง

เหลือคน 6 คนเข้าพักห้องที่เหลือ(2 กับ 4) ทำได้ $\frac{6!}{2!4!} = 15$ วิธี

กรณี 2. ครู 3 คนพักห้องใหญ่

เหลือคน 6 คนเข้าพักได้ 3 ห้อง(1,2 กับ 3) ทำได้ $\frac{6!}{1!2!3!} = 60$ วิธี

สรุปครู 3 คนพักในห้องเดียวกันจะมีวิธีการแบ่งคนเข้าพักได้ทั้งหมด 75 วิธี

∅≥→α∃∀⊂~π∆∉ ī j̄ ∞θ∩∪∈∧∨≤∃

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 5 25 มกราคม 2540

3. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R\times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

เซตในตัวเลือกใด <u>ไม่เป็นสับเซต</u> ของ $D_r \cap R_r$

1. $(2, \infty)$ 2. $(-\infty, -1)$ 3. $(0, 2)$ 4. $(-1, 0)$

15. กำหนดให้ $f(\log_{16}x) = \sqrt[16]{x}$ ค่าของ $\sum_{x=4}^{15} f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $14(\sqrt{2}+1)$ 2. $7(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}-1)$

3. $14(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt{2}+1)$ 4. $7(\sqrt[4]{2}-1)(\sqrt{2}-1)$

25. จากอนุกรมเรขาคณิต จะได้ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$ นอกจากนี้

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $|x| < 1$ ค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ เท่ากับพจน์ใดต่อไปนี้

1. $\frac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$ 2. $\frac{n}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$

3. $\frac{x}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$ 4. $\frac{n}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$

28. ข้อมูลอายุ (หน่วยเป็นปี) ของกลุ่มนักเรียน 4 กลุ่ม ต่อไปนี้

<u>กลุ่มที่ 1</u> 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18,19, 19, 20

<u>กลุ่มที่ 2</u> 16, 16, 16, 16, 17, 18, 18, 19, 19, 21

<u>กลุ่มที่ 3</u> 15, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 20

<u>กลุ่มที่ 4</u> 16, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 19

อายุของกลุ่มนักเรียนกลุ่มใดมีความแปรปรวนมากที่สุด

1. กลุ่มที่ 1 2. กลุ่มที่ 2 3. กลุ่มที่ 3 4. กลุ่มที่ 4

<u>ติดตามอ่านเฉลย วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก ได้ในคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 14</u>

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2540

วันพฤหัสบดีที่ 10 เมษายน 2540

ตอนที่ 1.

1. กำหนดให้ $A = \{0, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

$B = \{0, \{\varnothing\}\}$

$C = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\varnothing \in A \cap C$ 2. $\varnothing \in A - B$

3. $C \subset A$ 4. $B \subset C$

2. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ผลสรุปในข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\{x \in I \mid 3x^2 - 4x = 0\}$ เป็นเซตว่าง

2. $\{x \in I \mid x^2 - 4 \neq 0\}$ เป็นเซตจำกัด

3. $\{x \in R \mid x \neq x^2\}$ เป็นเซตอนันต์

4. $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\}$ เป็นเซตอนันต์

3. เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-2, 1]$ 2. $[-1, 2]$ 3. $[-2, 1)$ 4. $[-1, 2)$

4. คำตอบของสมการ $4x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{2}{3}} = 0$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 0]$ 2. $[0, 3)$ 3. $[3, 10)$ 4. $[10, \infty)$

5. ประพจน์ข้อใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $p \to q$

   1. $\sim p \vee q$ 2. $p \vee \sim q$
   3. $\sim p \wedge q$ 4. $p \wedge \sim q$

6. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{-2,-1,0,1,2\}$
   ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

   1. $\forall x [x < (x-1)^2]$ 2. $\forall x [x^2 \geq x - 1]$
   3. $\exists x [x^2 \geq 9]$ 4. $\exists x [x^2 + x - 12 = 0]$

7. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
   ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป R×R

   1. $\{(x, y, z) \mid x = y + z\}$ 2. $\{(x, (y, z)) \mid x = y + z\}$
   3. $\{((x, y), z) \mid x = y + z\}$ 4. $\{((x, y), (y, z)) \mid x = y + z\}$

8. กำหนดให้ $f = \{(0,1), (1,3), (2,3), (3,2)\}$
   $g = \{(0,0), (3,4), (5,6)\}$
   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $D_g \subset D_f$ 2. $R_g \subset D_g$ 3. $R_g \subset R_f$ 4. $R_f \subset D_f$

9. ถ้า $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$ แล้ว $f(x+4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\dfrac{2x+11}{x+2}$ 2. $\dfrac{2x+1}{x-2}$ 3. $\dfrac{2x+3}{x+2}$ 4. $\dfrac{2x+3}{x-2}$

10. ฟังก์ชัน f ในข้อใดต่อไปนี้มีคุณสมบัติว่า $f(x) = f(-x)$

   1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 2. $f(x) = |x - 4|$
   3. $f(x) = x^3 - 1$ 4. $f(x) = x^2 + 2$

11. เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบ แล้วตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{150}{\sqrt{2}}$ 3. $150\sqrt{3}$ 4. $150\sqrt{2}$

12. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30° 2. 60° 3. 90° 4. 120°

13. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 = 144$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,-5)$ และ $(0,5)$ 2. $(0,-\sqrt{7})$ และ $(0,\sqrt{7})$

3. $(-5,0)$ และ $(5,0)$ 4. $(-\sqrt{7},0)$ และ $(\sqrt{7},0)$

14. ถ้า A และ B เป็นจุดที่วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดกับแกน Y แล้วข้อใดต่อไปนี้คือระยะทางจาก A ไป B

1. $2\sqrt{3}$ 2. $4\sqrt{3}$ 3. 6 4. 8

15. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\log_a(2a)^b$

1. $2b$ 2. 2^b 3. $\log_a 2 + b$ 4. $b\log_a 2 + b$

16. ถ้า $\log 2 = A$ $\log 3 = B$ และ $\log 5 = C$ แล้ว $\log(0.006)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}(a + B)$ 2. $3(A + B)$ 3. $A + B - 3$ 4. $A + B + 3$

17. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ถ้า $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $x = 2$, $y = 1$

2. ถ้า $\begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $x = 1$, $y = 5$

3. ถ้า $A=\begin{bmatrix}-5 & 2 & -1\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix}$ แล้ว $-A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 1\\ -3 & -4 & 6\end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix}10 & -15\\ 0 & 20\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$

18. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ แล้ว A^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix}\frac{5}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13}\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}\frac{5}{13} & \frac{-3}{13}\\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13}\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}\frac{-2}{13} & \frac{-3}{13}\\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13}\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}\frac{-2}{13} & \frac{3}{13}\\ \frac{-1}{13} & \frac{-5}{13}\end{bmatrix}$

19. ถ้า A , B และ C เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ 2. ถ้า AB = AC แล้ว B = C

3. ถ้า AB = O แล้ว A = O หรือ B = O 4. det(AB) = det(A)det(B)

20. ให้ $f(x)=\begin{cases}3x-6 & ,x<2\\ x-1 & ,x\ge 2\end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 0$ 2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$ 4. ฟังก์ชัน f(x) ไม่ต่อเนื่อง x = 2

21. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ a<x<b แล้ว $f'(x) < 0$ สำหรับทุกๆ x เมื่อ a<x<b

ข ถ้า f(x) มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x = c และ $f'(c)$ หาค่าได้ แล้ว $f'(c) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

22. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{2x+4}$ ค่าของ $f'(0)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2

23. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}}dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} + C$
2. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C$
3. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} + C$
4. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C$

24. จำนวนวิธีจัดเลข 3 หลักที่มีค่ามากกว่า 300 จากเลข 0,1,2,3,4 และ 5 โดยตัวเลขเหล่านี้สามารถนำมาใช้ได้ครั้งเดียว มีเท่ากับค่าใดในข้อต่อไปนี้

1. 12　　2. 24　　3. 60　　4. 154

25. จำนวนวิธีจัดผู้ชาย 3 คน และ ผู้หญิง 4 คนให้นั่งในแถว โดยที่ผู้ชายจะนั่งในตำแหน่งเลขคู่เสมอ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12　　2. 144　　3. 288　　4. 5040

26 ในการจับฉลากชื่อนักเรียน 1 คน จากนักเรียน 4 คน ซึ่งเป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน จากโรงเรียนในกรุงเทพ เพื่อเป็นตัวแทนไปแข่งขันตอบปัญหา ความสนใจผลลัพธ์ข้อใดต่อไปนี้ทำให้การทดลองนี้เป็นการทดลองสุ่ม

1. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนของโรงเรียนในกรุงเทพ
2. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนของโรงเรียนในต่างจังหวัด
3. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนชาย
4. ถูกทั้งข้อ 1,2 และ 3

27. ในการทดลองสุ่มใดๆให้ P(A) แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A ใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ <u>ไม่</u> ถูกต้อง

1. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = 0$
2. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = 1$
3. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) = \frac{1}{2}$
4. มีอย่างน้อยหนึ่งเหตุการณ์ A ที่ $P(A) > \frac{1}{2}$

28. จากตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่ง ถ้าต้องการทราบอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนในแต่ละอันตรภาคชั้นกับจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด ต้องดูช่องใดของตารางในข้อต่อไปนี้

1. ความถี่ 2. ความถี่สัมพัทธ์
3. ความถี่สะสม 4. ความถี่สะสมสัมพัทธ์

29. จำนวนที่นั่งว่างของสายการบินไทย เที่ยวบินจากกรุงเทพไปฮ่องกงได้ถูกจัดทำเป็นตารางแจกแจงความถี่ โดยมีอันตรภาคชั้น 0 – 4 , 5 – 9 , 10 – 14 , 15 – 19 , 20 – 24 , 25 – 29 และ 30 หรือมากกว่า พิจารณาเหตุการณ์ต่อไปนี้

ก. {จำนวนที่นั่งว่างอย่างน้อย 15 ที่}
ข. {จำนวนที่นั่งว่างมากกว่า 15 ที่}
ค. {จำนวนที่นั่งว่างมากกว่า 14 ที่}
ง. {จำนวนที่นั่งว่างเท่ากับ 9 ที่}

ข้อใดต่อไปนี้เป็นเหตุการณ์ที่สามารถหาคำตอบได้จากตารางแจกแจงความถี่

1. {ก,ข} 2. {ก,ค} 3. {ข,ค} 4. {ข,ง}

30. พิจารณาข้อความเกี่ยวกับดัชนี ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เลขดัชนีราคาผู้บริโภคมีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด
2. เลขดัชนีปริมาณมีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด
3. เลขดัชนีมูลค่ามีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนมากที่สุด
4. เลขดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้ผลิตเท่านั้น

ตอนที่ 2.

31. กำหนดให้ A และ B พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$

ข. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

32. จากการสำรวจการประกอบอาชีพการทำนา ทำไร่ และทำสวน ของชาวบ้านหมู่บ้านหนึ่ง ซึ่งมีอยู่ 100 ครอบครัว ปรากฏมี 41 ครอบครัวไม่ได้ประกอบอาชีพทั้งสามอาชีพนี้ มี 10 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพทั้งสามอย่าง และมี 32 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพอย่างน้อยสองอย่างในสามอาชีพนี้ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนครอบครัวที่ประกอบอาชีพเพียงอย่างเดียวในสามอาชีพนี้

1. 27
2. 36
3. 59
4. 68

33. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 3]$
2. $[0, 3]$
3. $(0, \infty)$
4. $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

34. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ก ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a < b^2$

ข ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt{a} \leq a$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

35. กำหนดให้ $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และประพจน์ $r \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก $\sim r \rightarrow (p \wedge \sim q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข $r \vee \sim p$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

36. A ให้สัญญากับ B ว่า " ถ้า B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ แล้ว เขาจะพา B ไปดูหนัง หรือซื้อของขวัญให้ " สมมติว่า B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ ข้อใดต่อไปนี้ถือว่า A ทำผิดคำสัญญา

1. A พา B ไปดูหนัง และ ซื้อของขวัญให้
2. A พา B ไปดูหนัง แต่ไม่ซื้อของขวัญให้
3. A ซื้อของขวัญให้ B แต่ไม่พาไปดูหนัง
4. A ไม่ซื้อของขวัญให้ B และไม่พาไปดูหนัง

37. กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก $D_r = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

ข $R_r = \{x \mid 0 \leq x\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

38. ให้ A = {0, 1, 2} จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\{(x,y) \in A\times A \mid y = x^2 - 2x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. $\{(x,y) \in A\times A \mid x - 2y + 3 = 3x\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

39. ถ้า $f(x) = 2x - 5$ และ $(f\circ g)(x) = -4x + 13$

แล้ว g(1.3) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6.0 2. 6.2 3. 6.4 4. 6.8

40. ให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = (x-1)^3$

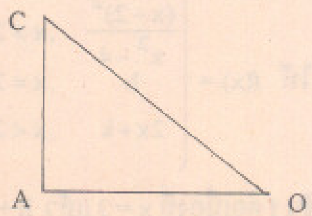
ค่าของ $2f^{-1}(2) + 3g^{-1}(1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 10 4. หาค่าไม่ได้

41. ถ้า $\sin(2\pi - \theta) - \sin(\pi - \theta) = 1$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\cos^2\theta$

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. 1

42. กำหนดให้ AOC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป โดยที่มุม AOC = 60° และด้าน AC ยาว 8 หน่วย ถ้า B เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AC โดยที่เส้น BO แบ่งครึ่งมุม AOC แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของเส้นตรง BC



1. 2 2. 4 3. $\frac{8}{3}$ 4. $\frac{16}{3}$

43. สมการวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0, –5) และ (0, 5) และจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย คือข้อใดต่อไปนี้

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$
2. $25x^2 + 9y^2 = 225$
3. $16x^2 + 25y^2 = 400$
4. $25x^2 + 16y^2 = 400$

44. ข้อใดต่อไปนี้ คือ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และ รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา

1. $x^2 + y^2 - 4x = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4y = 0$
4. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

45. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $2^x - 2^{x-1} = 16$ แล้ว $x^2 + x + 1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. 20
2. 25
3. 28
4. 31

46. กำหนดให้ $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a^x < a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$
2. $a^x < a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$
3. $a^x > a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$
4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

47. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2}{x^2-4} & ,x > 2 \\ h & ,x = 2 \\ 2x + k & ,x < 2 \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x = 2 แล้ว h + k มีเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –4
2. –2
3. 0
4. 2

48. มีไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร ต้องการกั้นรั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ให้มีพื้นที่มากที่สุดจะได้พื้นที่เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 80,000 ตารางเมตร
2. 160,000 ตารางเมตร
3. 360,000 ตารางเมตร
4. 480,000 ตารางเมตร

49. ถ้าจุดบนเส้นโค้ง $y = 2x^3 - x^2$ ทำให้ เส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 4y = 10$ แล้ว จุดนั้น x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 , \frac{-2}{3}$
2. $1 , \frac{2}{3}$
3. $-1 , \frac{-2}{3}$
4. $-1 , \frac{2}{3}$

50. ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีอนุพันธ์ที่จุด x ใดๆเป็น $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$ และ $f(1) = 3$ แล้วค่าของ $f(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

51. บริษัทหนึ่งมีตำแหน่งงานว่างอยู่ 2 ตำแหน่ง ที่แตกต่างกัน ถ้ามีผู้สมัครเข้าทำงาน 4 คน คือ ก ข ค และ ง เมื่อทำการสัมภาษณ์แล้ว ปรากฏว่าคนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 1 คือ ก ข ค คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 2 คือ ข ค ง ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน ที่บริษัทจะบรรจุคนเข้าทำงาน โดยให้คนเหมาะสมกับงาน

1. 9
2. 7
3. 6
4. 3

52. สมชายมีเสื้ออยู่ 5 ตัว เป็นสีขาว 3 ตัว สีฟ้า 2 ตัว มีกางเกงขายาว 4 ตัว เป็นสีขาว 1 ตัว และ สีเทา 3 ตัว ถ้าสมชายแต่งตัวออกจากบ้านโดยไม่เจาะจงแล้วความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีต่างกันคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{15}{20}$
2. $\frac{16}{20}$
3. $\frac{17}{20}$
4. $\frac{18}{20}$

53. ถ้าความน่าจะเป็นที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.9 และ ความน่าจะเป็นที่แดง <u>หรือ</u> ดำ จะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.96 แล้วข้อใดต่อไปนี้คือความน่าจะเป็นที่แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า

1. 0.04   2. 0.46

3. 0.54   4. 0.96

54. ครูสอนคณิตศาสตร์ได้รายงานผลการสอบย่อยของนักเรียน 3 กลุ่มดังนี้

	<u>กลุ่มที่ 1</u>	<u>กลุ่มที่ 2</u>	<u>กลุ่มที่ 3</u>
คะแนนเฉลี่ย	15	12	13
จำนวนนักเรียน	10	8	x

ถ้าคะแนนเฉลี่ยของวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 13.4 จำนวนนักเรียนกลุ่มที่ 3 (x) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8   2. 10

3. 12   4. 14

55. ในการทดสอบข้อเขียนของผู้สมัครงานของบริษัทแห่งหนึ่งจำนวน 33 คน ได้คะแนนดังนี้

71 70 69 69 69 64 64 63 61 60 59 58 58 57 56 55 54

54 54 54 53 52 52 51 50 50 49 47 40 39 34 30 29

บริษัทต้องการคัดผู้ที่ได้คะแนนสูงจำนวน 4 ใน 10 ของผู้เข้าสอบทั้งหมดไว้สอบสัมภาษณ์ ข้อใดต่อไปนี้เป็นคะแนนสูงสุดของผู้ที่ไม่ผ่านเข้าสอบสัมภาษณ์

1. 55   2. 56   3. 57   4. 58

56. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ และ วิชาภาษาไทยของนักเรียนห้องหนึ่ง ปรากฏว่านายสมชาติได้ 75 คะแนนทั้งสองวิชา ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของวิชาคณิตศาสตร์ เป็น 60 และ 10 ตามลำดับ และของวิชาภาษาไทยเป็น 67.5 และ 5 ตามลำดับ

ข้อใดต่อไปนี้เป็นการเปรียบเทียบผลการเรียนของนายสมชาติที่ถูกต้อง

1. คณิตศาสตร์ดีกว่าภาษาไทย 2. ภาษาไทยดีกว่าคณิตศาสตร์
3. ทั้งสองวิชาดีเท่ากัน 4. เปรียบเทียบกันไม่ได้เพราะข้อมูลไม่เพียงพอ

ตอนที่ 3.

1. คำตอบของสมการ $2^{-\frac{1}{x-3}} = \frac{1}{4}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
2. กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\sec\theta$ เมื่อ θ สอดคล้องสมการ $2\tan^2\theta - \sec\theta = 1$
3. กำหนดให้ $\sqrt{3} = 1.732$ และ $\sqrt{5} = 2.2361$ ค่าของ $10^2(\sqrt[4]{729} + \sqrt{125})$ เท่ากับเท่าใด
4. ถ้าจำนวนจริงสองจำนวนบวกกันได้ 15 แล้ว ผลคูณของสองจำนวนนี้จะมีค่าสูงสุดเท่ากับเท่าใด
5. พิจารณาสามเหลี่ยม ABC โดยที่เราทราบว่าด้าน AB เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $3x - y = 1$ ด้าน BC เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $x = 2$ และด้าน AC เป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรง $y = 8$ อยากทราบว่าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

6. ตารางข้างล่างนี้แสดงความถี่ และความถี่สะสมบางส่วนของคะแนนสอบของนักเรียน 200 คน

คะแนนสอบ	ความถี่	ความถี่สะสม
:	:	:
75 – 79	40	152
70 – 74	50	112
65 – 69	26	62
:	:	:

จงหามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้

เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2540

ตอนที่ 1.

1. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \{0, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

$B = \{0, \{\varnothing\}\}$

$C = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

เพราะว่า $0, \{\varnothing\} \in C$ เพราะฉะนั้น ตัวเลือกที่ถูกคือ 4. $B \subset C$

ตัวเลือก 1., 2. และ 3. ผิดด้วยเหตุผลต่อไปนี้

เพราะว่า $A \cap C = \{0, \{\varnothing\}\}$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin A \cap C$

เพราะว่า $A - B = \{\{\varnothing\}\}$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin A - B$

เพราะว่า $\varnothing \in C$ แต่ $\varnothing \notin A$ เพราะฉะนั้น $C \not\subset A$

2. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $x = 0 \in \{x \in I \mid 3x^2 - 4x = 0\}$ เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 1. ผิด

เพราะว่า $\{x \in I \mid x^2 - 4 = 0\} = \{-2, 2\}$ เป็นเซตจำกัด และ I เป็นเซตอนันต์

เพราะฉะนั้น $\{x \in I \mid x^2 - 4 \neq 0\} = I - \{-2, 2\}$ เป็นเซตอนันต์ ตัวเลือก 2. ผิด

เพราะว่า $\{x \in R \mid x = x^2\} = \{0, 1\}$ เป็นเซตจำกัด และ R เป็นเซตอนันต์

เพราะฉะนั้น $\{x \in R \mid x \neq x^2\} = R - \{0, 1\}$ เป็นเซตอนันต์ ตัวเลือก 3. ถูกต้อง

หมายเหตุ ตัวเลือก 4. $\{x \in R \mid x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$ เป็นเซตจำกัด

3. ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เซตคำตอบคือข้อใดตรงกับหลักการตัดตัวเลือกพอดี

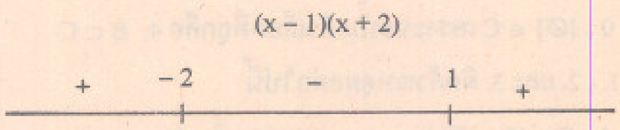
จากอสมการ $x^2 \le 2 - x$ $\quad x = -2$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

$x = 1$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง จากอสมการ $\quad x^2 \le 2 - x$

$$x^2 + x - 2 \le 0$$

$$(x-1)(x+2) \le 0$$



$$-2 \le x \le 1$$

สรุป เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \le 2 - x$ คือ $[-2, 1]$

4. ตอบ 3.

แนวคิด จากสมการ $\quad 4x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{2}{3}} = 0$

$$4x^{\frac{1}{3}}(1 - 3x^{-1}) = 0$$

$$4x^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 0$$

$$4x^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-3}{x}\right) = 0$$

$$x = 3$$

สรุป คำตอบของสมการ $4x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{2}{3}} = 0$ อยู่ในช่วง $[3, 10)$

5. ตอบ 1.

แนวคิด จำสูตรได้ดีที่สุด $p \to q$ สมมูลกับประพจน์ $\sim p \vee q$

การตัดตัวเลือก $q = T$ และ $p = T \to p \to q = T$

3. $\sim p \wedge q = F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

4. $p \wedge \sim q = F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ยังไงก็ยังช้ากว่าจำสูตร แนะนำการจำสูตร $p \to q$ สมมูลกับประพจน์ $\sim p \vee q$ ดีกว่า เพราะว่าสูตรนี้ออกสอบ ENTANCE ทุกปี

6. ตอบ 2.

แนวคิด การทำโจทย์แบบนี้แนะนำให้คิดข้อง่ายก่อนดีกว่า

เพราะว่า $[\, x < (x-1)^2 \,]$ เป็นเท็จเมื่อ $x = 1$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 1. $\forall x\, [\, x < (x-1)^2 \,]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่ากำลังสองของสมาชิกใน $U = \{-2,-1,0,1,2\}$ มีค่ามากสุดเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 3. $\exists x\, [\, x^2 \geq 9 \,]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะว่า
$$x^2 + x - 12 = 0$$
$$(x+4)(x-3) = 0$$
$$x = -4\,,\ 3 \text{ และ } U = \{-2,-1,0,1,2\}$$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 4. $\exists x\, [\, x^2 + x - 12 = 0 \,]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

7. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า r เป็นความสัมพันธ์จาก R ไป $R \times R$ ดังนั้น $r \subset R \times (R \times R)$

เพราะฉะนั้นสมาชิกของ r ต้องมีรูปแบบเป็น (x,(y,z))

สรุปตัวเลือก 2. ถูกต้อง

8. ตอบ 4.

แนวคิด $f = \{(0,1),(1,3),(2,3),(3,2)\}$ $D_f = \{0,1,2,3\}$ และ $R_f = \{1,2,3\}$

$g = \{(0,0),(3,4),(5,6)\}$ $D_g = \{0,3,5\}$ และ $R_g = \{0,4,6\}$

เพราะฉะนั้น 1. $D_g \subset D_f$ ผิด 2. $R_g \subset D_g$ ผิด

3. $R_g \subset R_f$ ผิด 4. $R_f \subset D_f$ ถูกต้อง

9. ตอบ 1.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $x = 0$ ค่าของโจทย์ $f(x+4) = f(4) = \frac{11}{2}$ ค่าแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{2x+11}{x+2} = \frac{11}{2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{11}{2}$

3. $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2} \neq \frac{11}{2}$ 4. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{3}{-2} \neq \frac{11}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การหาสูตร f(x + 4) โดยแทนค่า x ด้วย x + 4 อาจง่ายกว่าก็ได้อย่าคิดเลขผิดก็แล้วกัน $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ จะได้ $f(x+4) = \frac{2(x+4)+3}{(x+4)-2} = \frac{2x+11}{x+2}$

10. ตอบ 4.

แนวคิด สูตรที่ควรจำคือ f มีคุณสมบัติว่า $f(x) = f(-x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันคู่** โพลิโนเมียลที่กำลังของ x ทุกตัวเป็นเลขคู่เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ถูกต้อง

วิธีจริง เลือก x ที่ทำให้ $f(x) \neq f(-x)$

ตัวเลือก 1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ $\quad f(-1) = 7$ และ $f(1) = 3$

ตัวเลือก 2. $f(x) = |x - 4|$ $\quad f(-1) = 5$ และ $f(1) = 3$

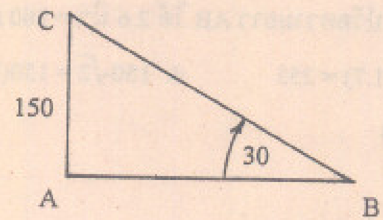
ตัวเลือก 3. $f(x) = x^3 - 1$ $\quad f(-1) = -2$ และ $f(1) = 0$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 1., 2. และ 3. ไม่เป็นฟังก์ชันคู่

11. ตอบ 3.

แนวคิด AC แทนตึกสูง 150 เมตร

เพราะว่าดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบ เพราะฉะนั้น $ABC = 30^\circ$



$$\tan ABC = \frac{AC}{AB}$$

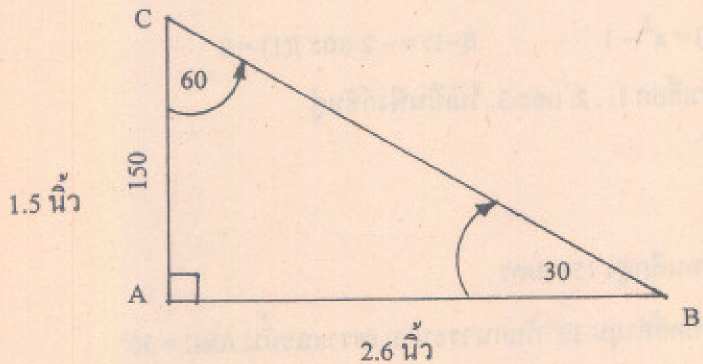
$$\tan 30 = \frac{150}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{AB}$$

$$AB = 150\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้นตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาว $150\sqrt{3}$

การตัดตัวเลือก เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยให้ AC = 150 (ใช้ 1 นิ้ว ต่อ 100 เมตร) CAB = 90 องศา AC แทนตึกสูง 150 เมตร และ ABC = 30°



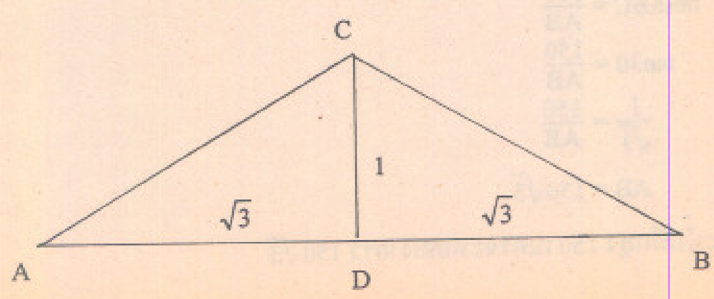
เพราะฉะนั้น AB คือเงาของตึก จากรูป AB ยาวกว่า AC เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อน ต่อไปวัดความยาว AB ได้ 2.6 นิ้ว = 260 เมตร

3. $150\sqrt{3} = 150(1.7) = 255$ 4. $150\sqrt{2} = 150(1.4) = 210$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

12. ตอบ 4.

แนวคิด



ให้ ABC สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร

$AB = 2\sqrt{3}$ $AD = 1$

เพราะว่า CD แบ่งครึ่งฐาน เพราะฉะนั้น $AD = \sqrt{3}$

$$\tan ACD = \frac{AD}{CD}$$

$$\tan ACD = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

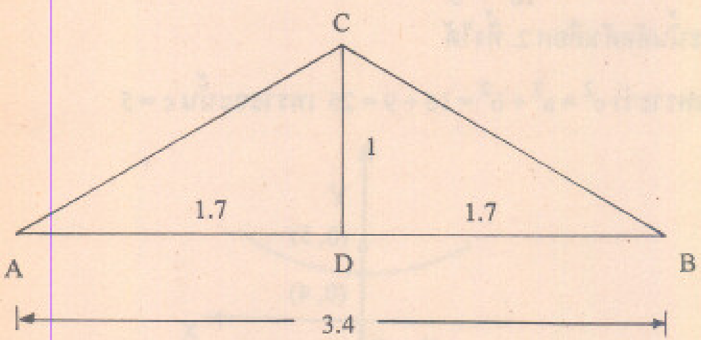
$$\tan ACD = \sqrt{3}$$

$$ACD = 60^\circ$$

$$ACB = 2(ACD) = 2(60) = 120$$

สรุปสามเหลี่ยมหน้าจั่วฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตรสูง 1 เมตรแล้วมุมยอด = 120 องศา

การตัดตัวเลือก ประมาณค่า $2\sqrt{3} = 2(1.7) = 3.4$



ลาก AB ยาว 3.4

ลาก CD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

ลากเส้น AC และ BC จะเห็นว่ามุม ACB เกิน 90 ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

13. ตอบ 1.

แนวคิด สังเกตจากตัวเลือก

1. จุดโฟกัส (0,–5) และ (0,5) แกนตามขวางทับแกน Y

2. จุดโฟกัส $(0,-\sqrt{7})$ และ $(0,\sqrt{7})$ แกนตามขวางทับแกน Y

3. จุดโฟกัส (–5,0) และ (5,0) แกนตามขวางทับแกน X

4. จุดโฟกัส $(-\sqrt{7},0)$ และ $(\sqrt{7},0)$ แกนตามขวางทับแกน X

จากโจทย์ $9y^2 - 16x^2 = 144$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

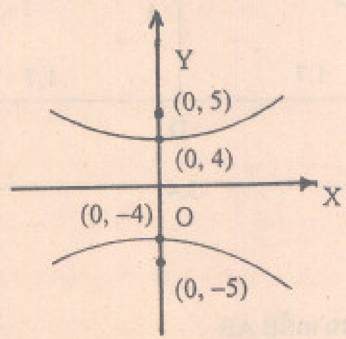
เป็นไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางทับแกน Y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มี $a = 4$, $b = 3$ และ $c > a = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$ เพราะฉะนั้น $c = 5$



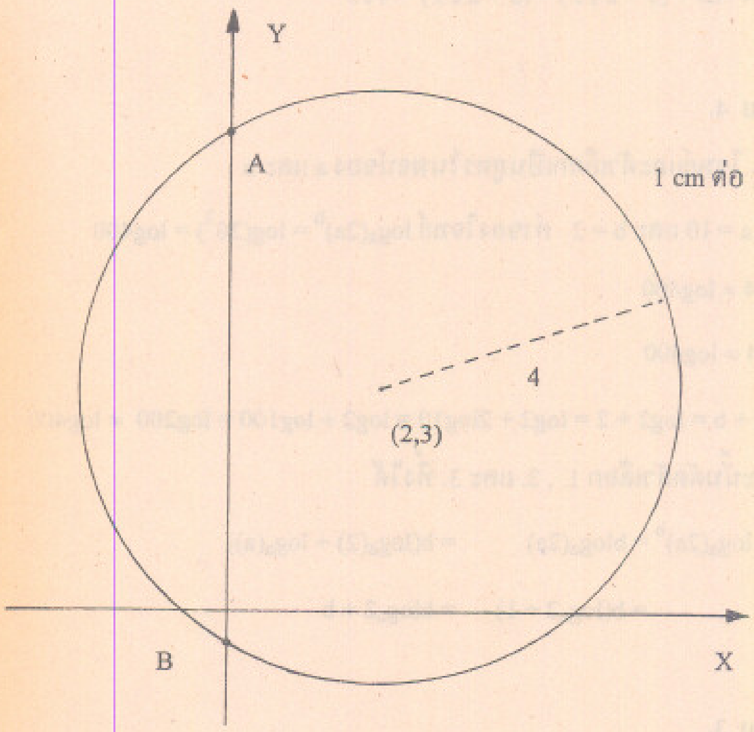
เพราะว่าไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มีจุดศูนย์กลาง (0,0) และ $c = 5$

เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสคือ (0,–5) และ (0,5)

14. ตอบ 2.

แนวคิด ใช้การวาดรูปแล้ววัดระยะทาง

เพราะว่าวงกลม $x^2+y^2+Px+Qy+R=0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{P}{2},-\frac{Q}{2})$ และ รัศมี $\sqrt{(\frac{P}{2})^2+(\frac{Q}{2})^2-R}$ เพราะฉะนั้นวงกลม $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ มีจุดศูนย์กลาง (2,3) และ รัศมี $\sqrt{4+9+3}=4$



1 cm ต่อ 1 หน่วย

วัดระยะทาง AB จากรูปได้ 7 cm

1. $2\sqrt{3}=2(1.73)=3.46$

2. $4\sqrt{3}=4(1.73)=6.92$ สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง จุดที่วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดกับแกน Y

ได้จากแทนค่า $x = 0$ แล้วหาค่า y จากสมการ $y^2 - 6y - 3 = 0$

จะได้ $y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2}$

$= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}\ ,\ 3 - 2\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นพิกัด $A(0\ ,\ 3 + 2\sqrt{3})$ และ $B(0\ ,\ 3 - 2\sqrt{3})$

ระยะทาง $AB = (3 + 2\sqrt{3}) - (3 - 2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

15. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a และ b

แทนค่า $a = 10$ และ $b = 2$ ค่าของโจทย์ $\log_a(2a)^b = \log(20^2) = \log 400$

1. $2b = 4 \neq \log 400$

2. $2^b = 4 \neq \log 400$

3. $\log_a 2 + b = \log 2 + 2 = \log 2 + 2\log 10 = \log 2 + \log 100 = \log 200 \neq \log 400$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $\log_a(2a)^b = b\log_a(2a) = b(\log_a(2) + \log_a(a))$

$= b(\log_a 2 + 1) = b\log_a 2 + b$

16. ตอบ 3.

แนวคิด $\log(0.006) = \log(\frac{6}{1000}) = \log 6 - \log 1000$

$= \log(2 \cdot 3) - \log 10^3 = \log 2 + \log 3 - 3 = A + B - 3$

17. ตอบ 2.

แนวคิด ตัวเลือก 1., 3. และ 4. ถูกต้อง

ตัวเลือก 2. ผิด เพราะว่า ถ้า $\begin{bmatrix} x \\ y+1 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $x = 1$ และ $y = 3$ จึงจะถูกต้อง

18. ตอบ 1.

แนวคิด เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

จากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = 10 + 3 = 13$

$$\text{เพราะฉะนั้น } A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$$

หมายเหตุ หากจำสูตร A^{-1} ไม่ได้ให้นำค่าในตัวเลือกมาคูณกับ A

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งถือเป็นโชคดีของนักเรียน

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

19. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้จำสูตรได้ดีที่สุด

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 4. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ ถูกต้อง

หมายเหตุ 1. $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ ผิด ตัวอย่างเช่น

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1}B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ที่ถูกต้องคือ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

2. ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$ เป็นจริงเมื่อ $\det A \neq 0$

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = AC$ แต่ $B \neq C$

3. ถ้า $AB = O$ แล้ว $A = O$ หรือ $B = O$ ผิด

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = O$ แต่ $A \neq O$ และ $B \neq O$

20. ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ตัวเลือก 3. และ 4. เป็นของที่ตรงกันข้าม

เพราะฉะนั้นจะถูกพร้อมกันก็ไม่ได้ จะผิดพร้อมกันก็ไม่ได้

เพราะฉะนั้นคำตอบต้องอยู่ที่สองตัวเลือกนี้แน่นอน

ลองใช้เหตุผลต่ออีกนิดหากตัวเลือก 3. ถูกต้อง มันก็จะพาให้ตัวเลือก 1. หรือ 2.

ผิดตามไปด้วยอย่างน้อยหนึ่งตัว ทำให้ข้อสอบข้อนี้ก็จะเป็นข้อสอบที่ผิดอีก

ข้อสอบข้อนี้คงไม่ผิดเหมือน กข. 40 ข้อ 2 ซึ่งเป็นข้อสอบที่ผิด

สรุป ตัวเลือกแบบข้อสอบข้อนี้ไม่ต้องคำนวนค่าลิมิตเลยก็ได้คะแนน

วิธีจริง $f(x) = \begin{cases} 3x-6 & ,x<2 \\ x-1 & ,x \geq 2 \end{cases}$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-} 3x-6 = 0$ (ตัวเลือก 1. ถูก)

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} x-1 = 1$ (ตัวเลือก 2. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to2^-} f(x)$ (ตัวเลือก 4. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ตัวเลือก 3. จึงผิด

21. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $f'(x) > 0$ บนช่วง $a < x < b$

เพราะฉะนั้น ข้อความ ก ผิด

ข้อความ ข ถ้า $f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = c$ และ $f'(c)$ หาค่าได้แล้ว $f'(c) = 0$ เป็นข้อความที่ถูกต้อง

22. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \sqrt{2x+4} = (2x+4)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(2x+4)^{-1/2}\left(\frac{d}{dx}(2x+4)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+4}}(2) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

23. ตอบ 3.

แนวคิด $$\int \frac{x-9}{\sqrt{x}}dx = \int\left(\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \int (x^{\frac{1}{2}} - 9x^{-\frac{1}{2}})dx$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})} - 9\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(\frac{1}{2})} + C$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} + C$$

24. ตอบ 3.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีพิจารณาดังนี้

หลักร้อย	หลักสิบ	หลักหน่วย
□	□	□

หลักร้อยเลือกได้ 3 วิธีจาก {3,4,5}

หลักสิบเลือกได้ 5 วิธีจากตัวเลขที่เหลือ

หลักหน่วยเลือกได้ 4 วิธีจากตัวเลขที่เหลือ

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = (3)(5)(4) = 60 วิธี

หมายเหตุ สำหรับคนที่ไม่รู้สูตรก็สามารถเขียนเลขออกมาดูเช่น 301,302,304,..

จะสามารถตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

25. ตอบ 2.

แนวคิด ผู้ชาย 3 คน และ ผู้หญิง 4 คนให้นั่งในแถว

ตำแหน่ง 1	2	3	4	5	6	7
□	□	□	□	□	□	□

การนับจำนวนวิธีมีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 ให้ชายสามคนนั่งที่ตำแหน่ง 2,4,6 ทำได้ 3! = 6 วิธี

ขั้นที่ 2 ให้หญิงสี่คนนั่งที่ตำแหน่ง 1,3,5,7 ทำได้ $4! = 24$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = $(6)(24) = 144$ วิธี

26. ตอบ 3.

แนวคิด จาก ค 106 หน้า 35 การทดลองสุ่ม คือ การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น

เพราะฉะนั้นการทดลองที่จะเป็นการทดลองสุ่มได้ต้องเป็นจริง 2 ประการคือ

1. การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง

2. การทดลองซึ่งไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น

ตัวเลือก 1. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนของโรงเรียนในกรุงเทพ **ไม่เป็นการทดลองสุ่ม** เพราะขาดคุณสมบัติข้อ 2 นั้นคือเราบอกได้ว่าทุกครั้งที่ทดลองจะได้นักเรียนของโรงเรียนในกรุงเทพ

ตัวเลือก 2. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนของโรงเรียนในต่างจังหวัด **ไม่เป็นการทดลองสุ่ม** เพราะขาดคุณสมบัติข้อ 2 นั้นคือเราบอกได้ว่าทุกครั้งที่ทดลองจะไม่ได้นักเรียนของโรงเรียนในต่างจังหวัดแน่นอน

ตัวเลือก 3. ได้ตัวแทนเป็นนักเรียนชาย **เป็นการทดลองสุ่ม** เพราะว่ามีคุณสมบัติครบทั้ง 2 ข้อ คือ

1. การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็น ชาย หรือ หญิง

2. การทดลองซึ่งไม่สามารถบอกได้อย่างถูกต้องแน่นอนว่าในแต่ละครั้งที่ทดลองผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น นั้นคือ อาจจะได้ ชาย หรือ หญิง ก็ได้

หมายเหตุ __ตัวเลือก 4.ถูกทั้งข้อ 1,2 และ 3__ **สูญพันธ์ไปจากข้อสอบ ENTERACE หลายปีแล้ว เพราะว่าตัวเลือกแบบนี้มีความขัดแย้งทางตรรกศาสตร์กับตัวเลือกที่เหลือ ไม่จำเป็นไม่ควรมีตัวเลือกแบบนี้ในข้อสอบ**

27. ตอบ 3.

แนวคิด ตัวเลือก 1. ถูกต้อง โดยการ เลือก A = ∅

ตัวเลือก 2. ถูกต้อง โดยการ เลือก A = แซมเปิลสเปซ

ตัวเลือก 3. ถูกต้อง โดยการ เลือก A = แซมเปิลสเปซ

ตัวอย่างของการทดลองสุ่มที่ทำให้ตัวเลือก 3. ผิด

การทดลองหยิบหมายเลข 1 ใบออกจากกล่องที่มีหมายเลขสามใบคือ 1,2,3

$S = \{1,2,3\}$

เซตของเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้คือ

$P(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, S\}$

จะเห็นได้ว่าไม่มีสับเซต A ของ S ที่ทำให้ $P(A) = \frac{1}{2}$

28. ตอบ 2.

แนวคิด ความถี่สัมพัทธ์เป็นอัตราส่วนของจำนวนนักเรียนในแต่ละอันตรภาคชั้นกับจำนวนนักเรียนที่เข้าสอบทั้งหมด

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

29. ตอบ 2.

แนวคิด ตารางแจกแจงความถี่คือ

จำนวนที่นั่งว่าง	ความถี่
0 – 4	a
5 – 9	b
10 – 14	c
15 – 19	d
20 – 24	e
25 – 29	f
30 หรือ มากกว่า	g

ก. {จำนวนที่นั่งว่างอย่างน้อย 15 ที่} = {d + e + f + g}

ข. {จำนวนที่นั่งว่างมากกว่า 15 ที่} หาไม่ได้

ค. {จำนวนที่นั่งว่างมากกว่า 14 ที่} = {d + e + f + g}

ง. {จำนวนที่นั่งว่างเท่ากับ 9 ที่} หาไม่ได้

เหตุการณ์ที่สามารถหาคำตอบได้จากตารางแจกแจงความถี่คือ ก และ ค

30. ตอบ .ไม่ควรมีคำถามแบบนี้ในการสอบ ENTRANCE

แนวคิด ข้อสอบข้อนี้ถือว่าเป็นคำถามที่ตอบยากมาก แต่อย่างไรก็ตามตัวเลือกที่ผิดแน่นอนคือตัวเลือก 4. เลขดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้ผลิตเท่านั้น เพราะว่าดัชนีทั้ง 3 ชนิดมีความสำคัญต่อผู้บริโภคด้วย

เลขดัชนีราคาผู้บริโภค เลขดัชนีปริมาณ เลขดัชนีมูลค่า มีความสำคัญต่อการครองชีพของประชาชนทั้งนั้น

เมื่อถึงคราวจำเป็นต้องเลือกเพื่อให้ได้ 1 คะแนนคงต้องเลือกตัวเลือก 1.

ตอนที่ 2.

31. ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cap B = A$ ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $A \subset B$ ให้ $x \in A \cap B$ เพราะฉะนั้น $x \in A$ และ $x \in B$

นั้นคือสมาชิกทุกตัวของ $A \cap B$ เป็นสมาชิกของ A เพราะฉะนั้น $A \cap B \subset A$

ให้ $x \in A$ เพราะว่า $A \subset B$ เพราะฉะนั้น $x \in B$

ดังนั้น $x \in A$ และ $x \in B$ ทำให้ $x \in A \cap B$

นั้นคือสมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ $A \cap B$ เพราะฉะนั้น $A \subset A \cap B$

สรุป $A \cap B = A$

ข. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \cup B = B$ ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ $A \subset B$ ให้ $x \in A \cup B$ เพราะฉะนั้น $x \in A$ หรือ $x \in B$

แต่จากข้อสมมติ $A \subset B$ เพราะฉะนั้น $x \in B$ เสมอ

นั้นคือสมาชิกทุกตัวของ $A \cup B$ เป็นสมาชิกของ B เพราะฉะนั้น $A \cup B \subset B$

ให้ $x \in B$ เพราะฉะนั้น $x \in A \cup B$

นั้นคือสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ $A \cup B$ เพราะฉะนั้น $B \subset A \cup B$

สรุป $A \cup B = B$

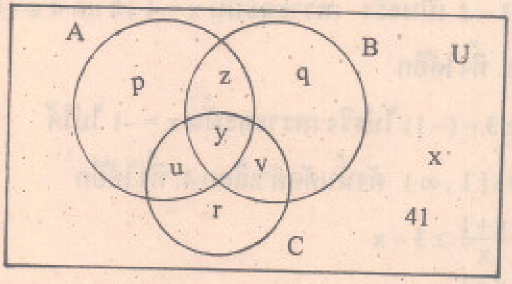
32. ตอบ 1.

แนวคิด A = เซตของครอบครัวที่ประกอบอาชีพการทำนา

B = เซตของครอบครัวที่ประกอบอาชีพการทำไร่

C = เซตของครอบครัวที่ประกอบอาชีพการทำสวน

แผนภาพเวนน์



เพราะว่าปรากฏมี 41 ครอบครัวไม่ได้ประกอบอาชีพทั้งสามอาชีพนี้

เพราะฉะนั้น $n(U-(A\cup B\cup C))=41$ ดังนั้น $x=41$

เพราะว่ามี 10 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพทั้งสามอย่าง

เพราะฉะนั้น $n(A\cap B\cap C)=10$ ดังนั้น $y=10$

เพราะว่ามี 32 ครอบครัวที่ประกอบอาชีพอย่างน้อยสองอย่างในสามอาชีพนี้

เพราะฉะนั้น $n((A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C))=32$

ดังนั้น $z+y+u+v=32$ และ $z+u+v=22$

เพราะว่าหมู่บ้านหนึ่ง ซึ่งมีอยู่ 100 ครอบครัว

เพราะฉะนั้น $x+y+z+u+v+p+q+r=100$

$$41+10+22+p+q+r=100$$

$$p+q+r=27$$

สรุป จำนวนครอบครัวที่ประกอบอาชีพเพียงอย่างเดียวเท่ากับ $p+q+r=27$

33. ตอบ 3.

แนวคิด เชคคำตอบของอสมการคือข้อใดใช้การแทนค่าจะได้ 2 คะแนนเร็วที่สุด

จากอสมการ $\frac{x+1}{x}\geq 3-x$ จะเห็นว่า $x=0$ ไม่ได้ แต่ $0\in[0\,,3]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งก่อน

เพราะว่า $\frac{4+1}{4} \geq 3-4$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $x = 4$ ได้ แต่ $4 \notin (0, 3]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

เพราะว่า $\frac{-1+1}{-1} \geq 3-(-1)$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = -1$ ไม่ได้

แต่ $-1 \in (-\infty, 0)[1, \infty)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง

$$\frac{x+1}{x} \geq 3-x$$

$$\frac{x+1}{x} + x - 3 \geq 0$$

$$\frac{x+1+x^2-3x}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

$$x > 0$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3-x$ คือ $(0, \infty)$

34. ตอบ 4.

แนวคิด ก ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a < b^2$ ผิด ตัวอย่างเช่น

$a = 0.1$, $b = 0.2$, $b^2 = 0.04$ จะได้ว่า $0 < a < b$ แต่ a ไม่น้อยกว่า b^2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งเสียก่อน

ข ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt{a} \leq a$ ผิด ตัวอย่างเช่น

$a = 0.01$ จะได้ $\sqrt{a} = \sqrt{0.01} = 0.1$ ไม่น้อยกว่า 0.01

สรุปตัวเลือกของข้อนี้คือ ตัวเลือก 4.

35. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $p = T$ และ $r = F$

เพราะว่า $r \vee q$ มีค่าความจริงเป็นจริง เพราะฉะนั้น $q = T$

สรุปโจทย์กำหนด $p = T$ และ $r = F$ และ $q = T$

ก $\sim r \rightarrow (p \wedge \sim q) = \sim F \rightarrow (T \wedge \sim T) = \sim F \rightarrow (T \wedge \sim T) = T \rightarrow F = F$

เพราะฉะนั้น ก ผิด ดังนั้นเราควรขีดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งซะก่อน

ข $r \vee \sim p = F \vee \sim T = F$

เพราะฉะนั้น ข ผิด

สรุปคำตอบคือ ตัวเลือก 4.

36. ตอบ 4.

แนวคิด A ให้สัญญากับ B ว่า " ถ้า B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ แล้ว เขาจะพา B ไปดูหนัง หรือซื้อของขวัญให้ " คิดกันแบบง่าย

เมื่อ B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ สิ่งที่ถือว่า A ทำผิดคำสัญญา

คือ ตัวเลือก 4. A ไม่ซื้อของขวัญให้ B <u>และ</u>ไม่พาไปดูหนัง

คิดแบบใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์

p = B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้

q = A พา B ไปดูหนัง

r = A ซื้อของขวัญให้ B

คำสัญญา **" ถ้า B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ แล้ว เขาจะพา B ไปดูหนัง หรือซื้อของขวัญให้ "** คือ $p \rightarrow (q \vee r)$

การผิดคำสัญญาคือ การทำให้ประพจน์ $p \rightarrow (q \vee r)$ เป็นเท็จ

นั่นคือ p เป็นจริง $(q \vee r)$ เป็นเท็จ

p เป็นจริง q เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ

B สอบเข้ามหาวิทยาลัยได้ A ไม่พา B ไปดูหนัง และ A ไม่ซื้อของขวัญให้ B

ตัวเลือก 4. A ไม่ซื้อของขวัญให้ B <u>และ</u>ไม่พาไปดูหนัง จึงถือว่าเป็นการผิดสัญญา

37. ตอบ 2.

แนวคิด $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

$D_r = \{x \mid 9 - x^2 \geq 0\}$

$= \{x \mid x^2 - 9 \leq 0\}$

$= \{x \mid (x-3)(x+3) \leq 0\}$

$= \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

เพราะฉะนั้น ก ถูก ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $0 \leq 9 - x^2 \leq 9$ เพราะฉะนั้น $0 \leq y = \sqrt{9-x^2} \leq 3$

เพราะฉะนั้น ข $R_r = \{x \mid 0 \leq x\}$ ผิด

สรุปคำตอบข้อนี้คือ ตัวเลือก 2.

38. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{0, 1, 2\}$

ก $\{(x,y) \in A \times A \mid y = x^2 - 2x + 1\} = \{(0,1),(1,0),(2,1)\}$

ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้นข้อความ ก ผิด ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ข. $\{(x,y) \in A\times A \mid x - 2y + 3 = 3x\} = \{(x,y) \in A\times A \mid 2y = -2x + 3\}$

$= \{(x,y) \in A\times A \mid y = \frac{-2x+3}{2}\}$

$= \varnothing$

ข้อนี้จัดว่ายากในเรื่องของเหตุผล แต่ท่องจำไว้ใช้ต่อไปได้เลยว่า $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะฉะนั้น ข ถูก

สรุปคำตอบข้อนี้คือ ตัวเลือก 3.

หมายเหตุ การถามว่า $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ เป็นคำถามที่ตอบได้ยาก แต่ถ้าดูตามบทนิยามใน ค.012 หน้า 62

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1,y)\in f$ และ $(x_2,y)\in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

เพราะว่าค่าความจริงของ ถ้า $(x_1,y)\in\varnothing$ และ $(x_2,y)\in\varnothing$ แล้ว $x_1 = x_2$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

39. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = 2x - 5$

เพราะว่า $y = 2x - 5$ จะได้ $x = \frac{y+5}{2}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

เพราะว่า $(fog)(x) = -4x + 13$

$f(g(x)) = -4x + 13$

$f^{-1}(f(g(x))) = f^{-1}(-4x + 13)$

เพราะฉะนั้น $g(x) = f^{-1}(-4x + 13))$

$g(1.3) = f^{-1}(-4(1.3) + 13)) = f^{-1}(7.8) = \frac{7.8+5}{2} = 6.4$

หมายเหตุ การหาสูตร g(x) ทำได้ดังนี้

จาก $f(g(x)) = -4x + 13$

และ $f(x) = 2x - 5$ ทำให้ $f(g(x)) = 2g(x) - 5$

เพราะฉะนั้น $-4x + 13 = 2g(x) - 5$

$g(x) = -2x + 9$

$g(1.3) = -2(1.3) + 9 = 6.4$

40. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = 3x - 1$ และ $g(x) = (x-1)^3$

เพราะว่า $y = 3x - 1$ จะได้ $x = \frac{y+1}{3}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3}$

เพราะว่า $y = (x-1)^3$ จะได้ $x - 1 = \sqrt[3]{y}$ และ $x = 1 + \sqrt[3]{y}$

เพราะฉะนั้น $g^{-1}(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$

เพราะฉะนั้น $2f^{-1}(2) + 3g^{-1}(1) = 2(\frac{2+1}{3}) + 3(1 + \sqrt[3]{1}) = 2 + 6 = 8$

41. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$ และ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

เพราะฉะนั้น $\sin(2\pi - \theta) - \sin(\pi - \theta) = 1$

$$-\sin\theta - \sin\theta = 1$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2}$$

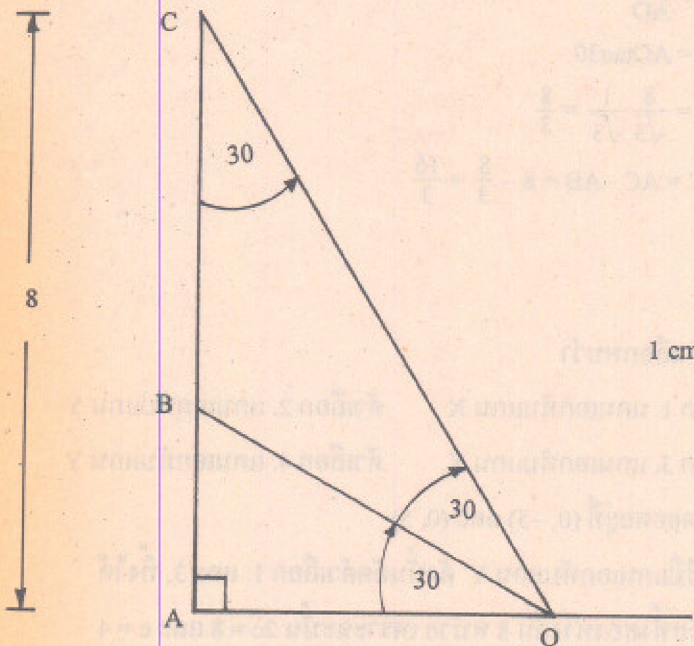
สรุป $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - (-\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

42. ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปจริงตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ลากเส้น AX และ AC ยาว 8 cm. ตั้งฉากกับ AX

2. ลาก CO เพื่อให้ ACO = 30 องศา เพราะฉะนั้น AOC = 60 องศา



1 cm ต่อ 1 หน่วย

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้วแล้ววัดระยะทางจะได้ BC ยาว 5.3 cm เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง

จากรูป $\tan AOC = \frac{AC}{AO}$

$$\tan 60 = \frac{8}{AO}$$

$$\sqrt{3} = \frac{8}{AO}$$

$$AO = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

จากรูป $\tan AOB = \frac{AB}{AO}$

$$\tan 30 = \frac{AB}{AO}$$

$$AB = AO\tan 30$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

เพราะฉะนั้น $BC = AC - AB = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

43. ตอบ 2.

แนวคิด ดูจากตัวเลือกพบว่า

ตัวเลือก 1. แกนเอกทับแกน X ตัวเลือก 2. แกนเอกทับแกน Y

ตัวเลือก 3. แกนเอกทับแกน X ตัวเลือก 4. แกนเอกทับแกน Y

เพราะว่าวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0, −5) และ (0, 5)

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่าจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย เพราะฉะนั้น $2c = 8$ และ $c = 4$

ตัวเลือก 2. $25x^2 + 9y^2 = 225 \rightarrow \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \rightarrow a = 5, b = 3$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

ตัวเลือก 4. $25x^2 + 16y^2 = 400 \rightarrow \frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 \rightarrow a = 5, b = 4$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่าวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -5)$ และ $(0, 5)$

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y , $a = 5$ จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ และ $a = 5$

เพราะว่าจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย เพราะฉะนั้น $2c = 8$ และ $c = 4$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = 3$

เพราะฉะนั้นสมการวงรีคือ $\dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

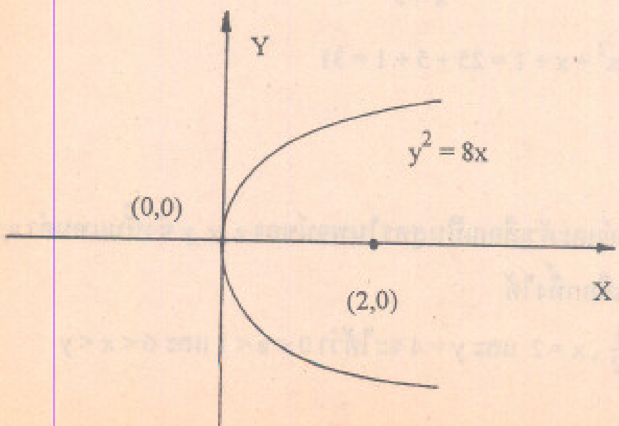
44. ตอบ 1.

แนวคิด สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$

$$y^2 = 8x = 4(2)x$$

เป็นพาราโบลา แกนพาราโบลาทับแกน X จุดยอด $(0,0)$ จุดโฟกัส $(2,0)$

เพราะฉะนั้นวงกลมที่โจทย์ต้องการต้องมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,0)$



สูตรที่ใช้ได้ในการสอบ ENTRANCE ทุกครั้ง $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางแต่ละตัวเลือกคือ

1. (2,0) 2. (–2,0) 3. (0,2) 4. (0,–2)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา = 2

สมการวงกลมจุดศูนย์กลาง (2,0) รัศมี 2 คือ $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

นั่นคือ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

45. ตอบ 4.

แนวคิด $2^x - 2^{x-1} = 16$

$$2(2^x - 2^{x-1}) = 2(16)$$

$$2(2^x) - 2^x = 32$$

$$2^x = 32$$

$$x = 5$$

เพราะฉะนั้น $x^2 + x + 1 = 25 + 5 + 1 = 31$

46. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ,x ,y ดังนั้นแทนค่า a,x,y บางค่าก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้

แทนค่า $a = \frac{1}{2}$, $x = 2$ และ $y = 4$ จะได้ว่า $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$

$a^x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4 = a^y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อนได้

$\log_a x = \log_{(\frac{1}{2})}(2) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2})^{-1} = -\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) = -1$

$\log_a y = \log_{(\frac{1}{2})}(4) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2})^{-2} = -2\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) = -2 < -1 = \log_a x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง เพราะว่า $0 < a < 1$

เพราะฉะนั้น $f(t) = a^t$ เป็นฟังก์ชันลด และ $g(t) = \log_a t$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะว่า $0 < x < y$ เพราะฉะนั้น $f(x) > f(y)$ นั้นคือ $a^x > a^y$

เพราะว่า $0 < x < y$ เพราะฉะนั้น $g(x) > g(y)$ นั้นคือ $\log_a x > \log_a y$

สรุปตัวเลือก 4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$ ถูกต้อง

47. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} & ,x > 2 \\ h & ,x = 2 \\ 2x+k & ,x < 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{x+2} = 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (2x+k) = 4+k$$

เพราะว่าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$0 = h = 4 + k$$

เพราะฉะนั้น $h = 0$, $k = -4$ และ $h + k = -4$

48. ตอบ 2.

แนวคิด ขอแนะนำสูตรสำเร็จรูปสำหรับคำถามแบบนี้ เส้นรอบรูปยาวเท่ากัน

สี่เหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ สี่เหลี่ยมจัตุรัส

สามเหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ สามเหลี่ยมด้านเท่า

n เหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ n เหลี่ยมด้านเท่า

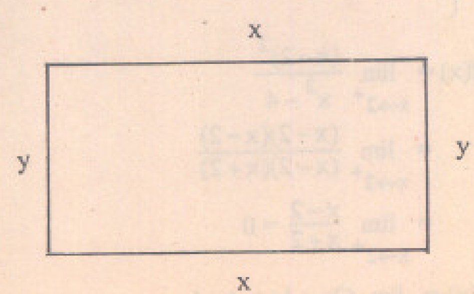
ไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร รั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุด ต้องเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว $\frac{1600}{4} = 400$

เพราะฉะนั้นพื้นที่มากที่สุด= $(400)(400) = 160{,}000$

วิธีจริง x = ความยาวของสี่เหลี่ยม

y = ความกว้างของสี่เหลี่ยม

พื้นที่สี่เหลี่ยม = xy



เพราะว่า $x + x + y + y = 1600$ เพราะฉะนั้น $y = 800 - x$

ดังนั้นพื้นที่ $= xy = x(800 - x)$ ให้ $f(x) = 800x - x^2$

$f'(x) = 800 - 2x$ และ $f''(x) = -2$

$f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 400$

เพราะว่า $x < 400 \rightarrow f'(x) > 0$ และ $x > 400 \rightarrow f'(x) < 0$

เพราะฉะนั้น $f(400) = 160,000$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

สรุปพื้นที่มากที่สุด $= 160,000$

49. ตอบ 1.

แนวคิด $y = 2x^3 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x$$

เพราะว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน ความชันคูณกันต้องเท่ากับ -1

และ เส้นตรง $x + 4y = 10$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{4}$ และเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้นตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 4y = 10$

เพราะฉะนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุดนั้น $= 4$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x$$

$$4 = 6x^2 - 2x$$

$$3x^2 - x - 2 = 0$$

$$(3x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = 1 , \frac{-2}{3}$$

50. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = 2x + 1$

เพราะฉะนั้น $y = \int(2x+1)dx = x^2 + x + C$

$f(x) = x^2 + x + C$

เพราะว่า $f(1) = 3$

เพราะฉะนั้น $1 + 1 + C = 3$ ดังนั้น $C = 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^2 + x + 1$ และ $f(2) = 4 + 2 + 1 = 7$

51. ตอบ 2.

แนวคิด คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 1 คือ ก ข ค

คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 2 คือ ข ค ง

เพราะว่ามีคนไม่มากใช้แจงกรณีดีกว่า

	ตำแหน่งที่ 1	ตำแหน่งที่ 2
1.	ก	ข
2.	ก	ค
3.	ก	ง
4.	ข	ค
5.	ข	ง
6.	ค	ข
7.	ค	ง

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน = 7 วิธี

วิธีจริง การนับจำนวนวิธีโดยใช้ขั้นตอนการนับทำได้ดังนี้

กรณีที่ 1. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ก ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 3 วิธี

กรณีที่ 2. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ข ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 2 วิธี

กรณีที่ 3. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ค ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 2 วิธี

รวมทั้งสามกรณีจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน = 3 + 2 + 2 = 7 วิธี

52. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่าสมชายมีเสื้ออยู่ 5 ตัว มีกางเกงขายาว 4 ตัว

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีในการเลือกทำได้ = (5)(4) = 20

สมชายมีเสื้ออยู่ 5 ตัว เป็นสีขาว 3 ตัว สีฟ้า 2 ตัว

สมชายมีกางเกงขายาว 4 ตัว เป็นสีขาว 1 ตัว และ สีเทา 3 ตัว

จำนวนวิธีที่ สมชายสวมเสื้อ และ กางเกงสีต่างกันมีวิธีนับดังนี้

กรณีที่ 1 สมชายสวมเสื้อสีขาว เลือกได้ 3 วิธี

สมชายสวมกางเกงสีเทา เลือกได้ 3 วิธี

รวมจำนวนวิธี = (3)(3) = 9 วิธี

กรณีที่ 2 สมชายสวมเสื้อสีฟ้า เลือกได้ 2 วิธี

สมชายสวมกางเกงสีขาวหรือสีเทา เลือกได้ 4 วิธี

รวมจำนวนวิธี = (2)(4) = 8 วิธี

จากทั้งสองกรณีจำนวนวิธีที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีต่างกัน = 8 + 9 = 17 วิธี

ความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีต่างกันเท่ากับ $\frac{17}{20}$

หมายเหตุ หากนักเรียนคิดแบบเหตุการณ์ตรงกันข้ามจะพบว่า

จำนวนวิธีที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีเหมือนกันมี 3 วิธีเท่านั้น (มาจากการมีเสื้อขาว 3 ตัว และ กางเกงขาว 1 ตัว)

ความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีเหมือนกันเท่ากับ $\frac{3}{20}$

ความน่าจะเป็นที่เขาสวมเสื้อ และ กางเกงสีเหมือนกันเท่ากับ $1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$

53. ตอบ 3.

แนวคิด

การตัดตัวเลือก ความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า ต้องน้อยกว่า ความน่าจะเป็นที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าซึ่งเท่ากับ 0.6

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

ให้ A = เหตุการณ์ที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า $P(A) = 0.6$

B = เหตุการณ์ที่ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า $P(B) = 0.9$

ความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า = $P(A \cap B)$

เพราะว่าความน่าจะเป็นที่แดง <u>หรือ</u> จะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.96

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = 0.96$

เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.96 = 0.6 + 0.9 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1.5 - 0.96 = 0.54$$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า = 0.54

54. ตอบ 3.

แนวคิด	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2	กลุ่มที่ 3
คะแนนเฉลี่ย	15	12	13
จำนวนนักเรียน	10	8	x

คะแนนเฉลี่ยของวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 13.4

สูตร ค่าเฉลี่ยรวม $= \dfrac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + N_3\overline{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3}$

$$13.4 = \frac{(10)(15)+(8)(12)+(x)(13)}{10+8+x}$$

$$13.4 = \frac{246+13x}{18+x}$$

$$241.2 + 13.4x = 246 + 13x$$

$$0.4x = 4.8$$

$$x = 12$$

55. ตอบ 3.

แนวคิด ต้องขอบคุณผู้ออกข้อสอบที่เรียงลำดับจากมากไปน้อยให้แล้ว

71,70,69,69,69, 64,64,63,61,60, 59,58,58,57,56, 55,54,54,54,54,

53,52,52,51,50, 50,49,47,40,39, 34,30,29

จำนวน 4 ใน 10 ของคนทั้งหมด $= \frac{4}{10}(33) = 13.2$ ปัดเศษเป็น 13

คนที่เข้าสอบสัมภาษณ์ได้คือคนที่ได้คะแนน 71 – 58

เรียงคะแนนจากมากไปน้อย คนที่ 13 สอบได้คะแนน 58

คนที่ 14 สอบได้คะแนน 57

คนที่เข้าสอบสัมภาษณ์ได้คือคนที่ได้คะแนน 71 – 58

คะแนนสูงสุดของผู้ที่ไม่ผ่านเข้าสอบสัมภาษณ์ = 57

56. ตอบ 3.

แนวคิด นายสมชาติได้ 75 คะแนนทั้งสองวิชา

วิชาคณิตศาสตร์ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 60

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 10

คะแนนมาตรฐานวิชาคณิตศาสตร์ = $\frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{75-60}{10} = 1.5$

วิชาภาษาไทย ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 67.5

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 5

คะแนนมาตรฐานวิชาภาษาไทย = $\frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{75-67.5}{5} = 1.5$

สรุป ผลการเรียนของนายสมชาติทั้งสองวิชาดีเท่ากัน

ตอนที่ 3.

1. ตอบ $x = 3.5$

แนวคิด

$$2^{-\frac{1}{x-3}} = \frac{1}{4}$$

$$2^{-\frac{1}{x-3}} = 2^{-2}$$

$$\frac{1}{x-3} = 2$$

$$2x-6 = 1$$

$$x = 3.5$$

2. ตอบ $\sec\theta = 1.5$

แนวคิด

$$2\tan^2\theta - \sec\theta = 1$$

$$2(\sec^2\theta - 1) - \sec\theta = 1$$

$$2\sec^2\theta - \sec\theta - 3 = 0$$

$$(2\sec\theta - 3)(\sec\theta + 1) = 0$$

$$\sec\theta = -1 \text{ หรือ } \frac{3}{2}$$

เพราะว่า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sec\theta > 0$ ดังนั้น $\sec\theta = 1.5$

3. ตอบ $10^2(\sqrt[4]{729} + \sqrt{125}) = 1637.68$

แนวคิด $10^2(\sqrt[4]{729} + \sqrt{125}) = 100(\sqrt[4]{(9)(9)(9)} + \sqrt{(5)(5)(5)})$

$= 100(\sqrt[4]{(3)(3)(3)(3)(3)(3)} + 5\sqrt{5})$ $= 100(\sqrt[4]{3^4 3^2} + 5\sqrt{5})$

$= 100(3\sqrt[4]{3^2} + 5\sqrt{5})$ $= 100((3)(3^{\frac{2}{4}}) + 5\sqrt{5})$

$= 100(3\sqrt{3} + 5\sqrt{5})$ $= 100(3(1.7321) + 5(2.2361))$

$= 100(5.1963 + 11.1805)$ $= 100(16.3768)$

$= 1637.68$

4. ตอบ 56.25

แนวคิด ข้อนี้เหมือนกับข้อ 48. นั่นคือมีสูตรเฉพาะ

จำนวน x เมื่อแบ่งออกเป็นสองส่วนแล้วคูณกันจะมีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{x^2}{4}$

เพราะฉะนั้นจำนวนจริงสองจำนวนบวกกันได้ 15 แล้ว ผลคูณของสองจำนวนนี้

จะมีค่าสูงสุด $= (7.5)^2 = 56.25$

วิธีจริง จำนวนสองจำนวนคือ $x, 15 - x$

ให้ $f(x) = x(15 - x) = 15x - x^2$

$y = 15x - x^2$

$y = 56.25 - 56.25 + 15x - x^2$

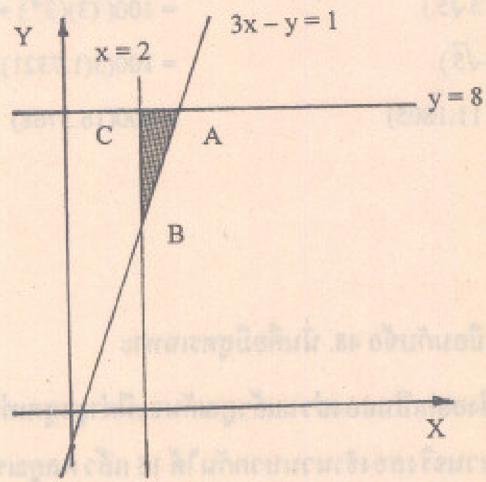
$y = 56.25 - (56.25 - 15x + x^2)$

$y = 56.25 - (7.5 - x)^2 \le 56.25$

เพราะฉะนั้นค่ามากสุดของ y เท่ากับ 56.25

5. ตอบ พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับ 1.5

แนวคิด เขียนรูปตามที่โจทย์กำหนดเพื่อจะได้เห็นจุด A , B และ C



แก้สมการเพื่อหาจุดตัด

$y = 8$ และ $x = 2$ ตัดกันที่จุด C(2,8)

$y = 8$ และ $3x - y = 1$ ตัดกันที่จุด A(3,8)

$x = 2$ และ $3x - y = 1$ ตัดกันที่จุด B(2,5)

CA ยาว 1 หน่วย และ BC ยาว 3 หน่วย

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ BCA = 90 องศา

เพราะฉะนั้น พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}\times CA\times CB = \frac{1}{2}\times 1\times 3 = 1.5$

6. ตอบ 73.3

แนวคิด มัธยฐานอยู่ที่ชั้น 70 – 74

คะแนนสอบ	ความถี่	ความถี่สะสม
:	:	
75 – 79	40	152
70 – 74	50	112
65 – 69	26	62
:	:	:

L = ขอบเขตล่างของอันตรภาคชั้นที่มัธยฐานอยู่ = 69.5

N = จำนวนคนทั้งหมด = 200

f_M = ความถี่ที่มัธยฐานอยู่ = 50

$\sum f_L$ = ผลรวมของความถี่ของทุกอันตรภาคชั้นที่

ช่วงคะแนนต่ำกว่าชั้นที่มัธยฐานอยู่ = 62

I = ความกว้างของของอันตรภาคชั้นที่มัธยฐานอยู่ = 5

มัธยฐาน $= L + \left(\frac{\frac{N}{2}-\sum f_L}{f_M}\right)I = 69.5 + \left(\frac{\frac{200}{2}-62}{50}\right)(5) = 69.5 + \left(\frac{38}{50}\right)(5)$

$= 69.5 + 3.8 \qquad = 73.3$

$\geq\rightarrow\geq\subset\sim f\ \emptyset\pi\not\subset\Delta\notin\ \bar{i}\ \bar{j}\infty\sqrt{3}\theta\cap\cup\in\leq\wedge\frac{8}{3}\vee$

เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

<u>ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ 2531</u>

ให้ $g(x) = 3x^2$ ค่าของ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ เท่ากับเท่าใด

1. $6x$ 2. $6x + h$ 3. $6x + 3h$ 4. $3h^2$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$ ต้องมีทั้งตัวแปร x และ h

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 0$ และ $h = 1$ ค่าของโจทย์ $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{g(1)-g(0)}{1} = 3$

ตัวเลือก 2. $6x + h = 1$ ตัวเลือก 3. $6x + 3h = 3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

<u>ข้อสอบแข่งขันสมาคมคณิตศาสตร์ 2530</u>

เซตคำตอบของอสมการ $\frac{|x^2+2x-2|}{\sqrt{x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}} \le \sqrt{3}$ คือเซตในข้อใด

1. $[-1-2\sqrt{3},-1]$ 2. $[1,1+2\sqrt{3}]$ 3. $[-1-2\sqrt{3},1]$ 4. $[-1,1+2\sqrt{3}]$

ตอบ 3.

แนวคิด แทนค่า $x = 0$ จะได้

$$\frac{|x^2+2x-2|}{\sqrt{x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt{4-2(1.732)}} = \frac{2}{\sqrt{0.536}} > 2$$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -1$ $\frac{|x^2+2x-2|}{\sqrt{x^2+2x-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}} = \frac{|1-2-2|}{\sqrt{1-2-2\sqrt{3}x+4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $x = -1$ ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

โจทย์เสริมทักษะการตัดตัวเลือก

ข้อสอบแข่งขันวัฏจักรคณิตศาสตร์ชิงแชมป์ประเทศไทย ครั้งที่ 1

1. กำหนดให้ $x, y \in R^{+}$ ค่าน้อยที่สุดของ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ เท่ากับเท่าใด

   1. 1　　2. 4　　3. 6　　4. 8

2. เซตคำตอบของสมการ $\log(3-2^{x}) = (1-x)\log 2$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

   1. $[-1, 2]$　　2. $[-2, \frac{1}{2}]$　　3. $[\frac{1}{2}, 2]$　　4. $[-1, \frac{1}{2}]$

3. กำหนดให้ $|u| = 1$, $|v| = 2$, $|w| = 3$ $w \perp v$ และ w มีทิศทางเดียวกับ u
ค่าของ $|u + v + w|$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\sqrt{5}$　　2. $2\sqrt{5}$　　3. 5　　4. 20

4. กำหนด $z^2 = 2 - 4i$ ค่าของ $|z + z^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　2. $\sqrt{5}$　　3. $\frac{\sqrt{2}\ \sqrt[4]{125}}{2}$　　4. $\sqrt{2}\ \sqrt[4]{125}$

5. กำหนดให้ $z_1^2 z_2 = 1 + i$ และ $z_1 z_2^2 = 1 - i$ ค่าของ $|z_1 - z_2|$ เท่ากับเท่าใด

   1. 1　　2. $\sqrt{2}$　　3. $\sqrt[3]{2}$　　4. $\sqrt[3]{4}$

6. กำหนดให้ $\theta \in [-\pi, \pi]$ เซตคำตอบของสมการ $1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + \ldots + \tan^{2n}\theta + \ldots = \frac{3}{2}$
ตรงกับเซตในข้อใด

   1. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$　　2. $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

   3. $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$　　4. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

7. ค่าของ $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

   1. $n(2n + 1)$　　2. $-(2n + 1)$　　3. $n(2n - 1)$　　4. $-n(2n - 1)$

ติดตามอ่านเฉลย วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือกได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 14

วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ถ้าด้านของสามเหลี่ยมรูปหนึ่งเป็น $x, y, \sqrt{x^2+xy+y^2}$ ตามลำดับ แล้วสามเหลี่ยมรูปนี้คือ

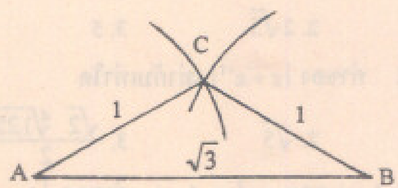
1. สามเหลี่ยมมุมแหลม
2. สามเหลี่ยมมุมป้าน
3. สามเหลี่ยมมุมฉาก
4. สามเหลี่ยมมีมุมๆหนึ่งเท่ากับ $60°$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 1$, $y = 1$ ก็ได้คำตอบแล้ว

เมื่อ $x = 1$, $y = 1$ จะได้ $\sqrt{x^2+xy+y^2} = \sqrt{3} = 1.732$

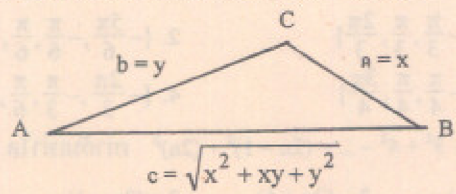
วาดรูป สามเหลี่ยมให้มีด้านเป็น $1, 1, \sqrt{3}$



จากรูปมุม $C > 90°$ และ $A \neq 60°$ และ $B \neq 60°$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1, 3 และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีด้าน $a = x$, $b = y$ และ $c = \sqrt{x^2+xy+y^2}$



จากกฎโคไซน์ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{x^2+y^2-(x^2+xy+y^2)}{2xy} = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $C = 120°$ นั่นคือ ABC สามเหลี่ยมมุมป้าน