คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 17

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 17 / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

เฉลยข้อสอบโดยใช้วิธีจริง vs. วิธีตัดตัวเลือก

ISBN 974-639-249-2

สงวนลิขสิทธิ์

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980, 2187000, 2554433 โทรสาร 2554441

e-mail:cubook@chula.edu

http://www.chula.edu/cubook/index.htm

พิมพ์ที่โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626

เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์
โดยใช้
วิธีจริง vs. วิธีตัดตัวเลือก

- คณิตศาสตร์ กข. ประจำปี พ.ศ. 2541
- คณิตศาสตร์ ก. ประจำปี พ.ศ. 2541
- คณิตศาสตร์โอลิมปิกรอบคัดเลือก พ.ศ. 2540
- คณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์
  - ประจำปีการศึกษา 2538
  - ประจำปีการศึกษา 2539
  - ประจำปีการศึกษา 2540

คำนำ

หนังสือเล่มนี้เป็นการรวมข้อสอบและเฉลย ข้อสอบคณิตศาสตร์ ก กข ข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิก ข้อสอบของสมาคมคณิตศาสตร์ ซึ่งมีข้อสอบหลายข้อที่ใช้ได้กับหลักสูตรการตัดตัวเลือกตัวอย่างเช่น ในข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข 2541

♠ **โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร**

36. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x+1}$ โดยที่ $x \neq -1$

ถ้า I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ และ $g = (fof)(f+I)$ แล้ว $g(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\frac{(x+1)^2}{(x+2)}$ 3. $\frac{(x+1)^2+x}{(x+2)}$ 4. $\frac{(x+1)^2-x}{(x+2)}$

♥ **โดเมนและเรนจ์คือเซตใด**

7. ถ้าความสัมพันธ์ $r = \{(x,y)\in R\times R \mid y = 2-\frac{4}{(x-1)^2-4}\}$ แล้วข้อใดเป็นเรนจ์ของ r

1. $(-\infty,2)\cup[3,\infty)$ 2. $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$ 3. $(-\infty,2]\cup[3,\infty)$ 4. $(-\infty,2]\cup(3,\infty)$

♦ **เซตคำตอบคือช่วงใด**

4. เซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(2,3)$ 3. $(-1,2)\cup(2,7)$ 4. $(\frac{5}{3},2)\cup(2,3)$

♣ **วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์**

18. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i}+2\bar{j}$ ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $\bar{a}$ เท่ากับที่ทำกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}-3\bar{j})$ 2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}+3\bar{j})$ 3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}+\bar{j})$ 4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}-\bar{j})$

แต่ก็มีหลายข้อที่คำถามมีความรอบคอบมากยิ่งขึ้นไม่สามารถตัดตัวเลือกได้ ซึ่งต้องขอขอบคุณกรรมการที่ออกข้อสอบทุกท่านที่ออกข้อสอบที่มีคุณภาพซึ่งจะเป็นการพัฒนาคุณภาพการเรียนการสอนทางด้านคณิตศาสตร์ของเด็กไทยให้ดียิ่งขึ้น

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

	หน้า
ข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ประจำปี พ.ศ. 2541	กข 2541 (1-48)
ข้อสอบคณิตศาสตร์ ก. ประจำปี พ.ศ. 2541	ก 2541 (1-32)
ข้อสอบคณิตศาสตร์โอลิมปิกรอบคัดเลือก พ.ศ. 2540	Olimpic40(1-48)
ข้อสอบคณิตศาสตร์ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ในพระบรมราชูปถัมภ์	
– ประจำปีการศึกษา 2540	คณิตศาสตร์ 2540(1-40)
– ประจำปีการศึกษา 2539	คณิตศาสตร์ 2539(1-56)
– ประจำปีการศึกษา 2538	คณิตศาสตร์ 2538(1-72)
การเฉลย คณิตศาสตร์ กข.ด้วย MATHCAD	กข. 2541 – 46
การเฉลย คณิตศาสตร์ ก.ด้วย MATHCAD	คณิตศาสตร์ 253 – 69
เคล็ดลับคณิตศาสตร์	Olimpic40 – 46
	Olimpic40 – 47
	คณิตศาสตร์ 2539 – 55
	คณิตศาสตร์ 2539 – 56

ความสามารถของโปรแกรม MATHCAD ที่น่าสนใจ

1. ดีกว่าเครื่องคิดเลข

$$\frac{15+12-13}{4}=3.5 \qquad \log(100)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+\tan(45\cdot\text{deg})=4$$

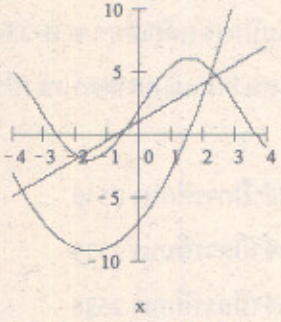
2. แยกตัวประกอบได้ $x^2+3\cdot x-4$ $(x+4)\cdot(x-1)$

3. กระจายพหุนามเป็น $(x+1)^4$ $x^4+4\cdot x^3+6\cdot x^2+4\cdot x+1$

4. เขียนกราฟได้เก่ง

$$\frac{4\cdot\sin(x)+2}{1.5\cdot x+1}$$

$$\frac{}{x^2+3\cdot x-7}$$



5. หาอนุพันธ์เป็นสูตรก็ได้

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+3\cdot x-4\right) \qquad 2\cdot x+3$$

6. หาปริพันธ์เป็นตัวเลขหรือสูตรก็ได้

$$\int x^2\,dx \qquad \frac{1}{3}\cdot x^3$$

$$\int_0^1 x^2\,dx=0.333$$

ความสามารถของ MATHCAD ยังมีอีกมากอ่านได้ในหนังสือ **คู่มือ MATHCAD** เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา หาซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์น่าสนใจ เมื่อ n = 1 , 2 , 3 , ...

1. การแสดงว่า $a_1a_2a_3...a_n \le (\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n}{n})^n$
2. การแสดงว่า $(1 + 2 + 3 + ... + n)$ หาร $(1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k)$ ลงตัว
3. การแสดงว่า $a - b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว
4. การแสดงว่า 8 หาร $(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ ลงตัว
5. การแสดงว่า $|x_1 + x_2 + ... + x_n| \le |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$
6. การแสดงว่า

   $(1)(2) + (2)(3) + ... + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
7. การแสดงว่า 7 หาร $n^7 - n$ ลงตัว
8. การแสดงว่า 6 หาร $n(n + 1)(2n +1)$ ลงตัว
9. การแสดงว่า 35 หาร $3^{6n} - 2^{6n}$ ลงตัว
10. การแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

    เมื่อกำหนด $a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + n$
11. การหาสูตรผลบวกของ $1^k + 2^k + 3^k + ... + n^k$

สนใจการแก้ปัญหาต่างๆ เหล่านี้ติดตามอ่านได้ใน

คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 18

ปัญหาคณิตศาสตร์น่าสนใจ

1. การแสดงว่า 3 หาร 888 ลงตัว
2. การแสดงว่า 9 หาร 555,555,555 ลงตัว
3. การแสดงว่า 9 หาร 777,777,777 ลงตัว
4. การแสดงว่า 27

   หาร 555,555,555, 555,555,555, 555,555,555 ลงตัว
5. การแสดงว่า 3^n

   หาร 555,555,...,555 (จำนวน 3^n) ลงตัว
6. การแสดงว่า 3^n หาร kkk,kkk,...,kkk (จำนวน 3^n) ลงตัว

   ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, 9$
7. การหาคำตอบของสมการ $(z-1)^2 = z^2$

   $(z-1)^5 = z^5$

   $(z-1)^{2n} = z^{2n}$

   $(z-1)^{2n+1} = z^{2n+1}$
8. การหาสูตรของ a_n เมื่อกำหนด $a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + n$

สนใจการแก้ปัญหาต่างๆ เหล่านี้ติดตามอ่านได้ใน
คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 18

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข 2541

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. ถ้า $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ และ $B = \{a, b\}$

แล้วจำนวนเซต X ซึ่ง $B \subset X \subset A$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 15 3. 16 4. 32

2. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียน 80 คน และมีชมรมกีฬา 3 ชมรมคือ ฟุตบอล กรีฑา และว่ายน้ำ นักเรียนทุกคนต้องเป็นสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งชมรม ถ้ามีนักเรียน 30 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ มีนักเรียน 20 คน ที่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมฟุตบอล และมีนักเรียน 18 คน ที่เป็นสมาชิกทั้งชมรมฟุตบอลและชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมกรีฑา แล้วจำนวนนักเรียนที่เป็นสมาชิกทั้ง 3 ชมรมเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 12 3. 14 4. 15

3. กำหนด p, q, r และ s เป็นประพจน์

ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ **ไม่เป็น** สัจนิรันดร์

1. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
2. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim[p \vee (p \wedge r)]$
3. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q))]$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s \vee \sim r) \wedge \sim s] \leftrightarrow p$

4. เซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$
2. $(2, 3)$
3. $(-1, 2) \cup (2, 7)$
4. $(\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3)$

5. เซตใดต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์

1. $\{x \mid |x| = x - 5\}$
2. $\{x \mid |x| = x + 5\}$
3. $\{x \mid x^2 - 2|x| - 3 = 0\}$
4. $\{x \mid \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}\}$

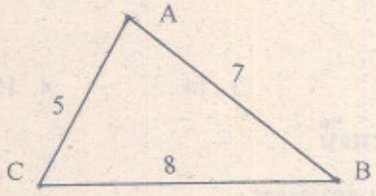
6. ถ้า $f(x) = 10^x$ เป็นจำนวนจริงบวก และ a , b เป็นสมาชิกของเรนจ์ของ f แล้ว $\frac{f^{-1}(ab)}{f^{-1}(b)}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_{10}a$
2. $1 + \log_{10}a$
3. $1 + \log_b a$
4. $1 + \log_a b$

7. ถ้าความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}\}$ แล้วข้อใดเป็นเรนจ์ของ r

1. $(-\infty , 2) \cup [3 , \infty)$
2. $(-\infty , 2) \cup (3 , \infty)$
3. $(-\infty , 2] \cup [3 , \infty)$
4. $(-\infty , 2] \cup (3 , \infty)$

8. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมดังรูป



ค่า $\sin^2\frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{28}$
2. $\frac{7}{28}$
3. $\frac{12}{28}$
4. $\frac{21}{28}$

9. $\tan(\frac{11\pi}{12})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1}{1+\sqrt{3}}$
2. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
3. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$
4. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

10 กำหนด $A = \{ (x , y) \mid 4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0 \}$ ข้อใดต่อไปนี้สรุปเกี่ยวกับเซต A ได้ถูกต้อง

1. A เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางคือ $(-2 , 3)$

2. A เป็นวงรีมีความยาวแกนเอก 6 หน่วย

3. A เป็นวงรีมีแกนเอกขนานแกน Y

4. A เป็นเซตว่าง

11. พาราโบลา P มีโฟกัสอยู่ที่ (2,0) มี $y = 2$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ ข้อใดต่อไปนี้ ผิด

1. P มีจุดยอดอยู่ที่ (2, 1)
2. P ผ่านจุดกำเนิด
3. P ตัดแกน X ที่จุด (4, 0)
4. P ผ่านจุด (–2 , –2)

12. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}}\left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-3x+4}}\right] = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

13. เซตคำตอบของสมการ $\log_9 3^{(x^2+3x-30)} = x$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้

1. (–11,0)
2. (0, 8)
3. (–10, 5)
4. (–7, 7)

14. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $2A^{-1}B^t$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

15. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่งทำให้ $AB = C$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(B^{-1}) = 12$
2. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$
3. $\det(2B^t) = 24$
4. $\det(A^2B) = 48$

16. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z_1 = (\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})^4$ และ $\overline{z_2} = \overline{2+i} - \frac{\sqrt{2}}{z_1}$ แล้ว z_2 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. – 1
3. i
4. – i

17. กำหนดให้ $A = \{ x \in C \mid x^3 + x^2 + x + 1 = 0 \}$

$$B = \{ x \in C \mid x^4 - 81 = 0 \}$$

เซต $(A - B) \cup (B - A)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-3, -2, 3\}$
2. $\{-3, 2, 3\}$
3. $\{2, 3\}$
4. $\{3, -3\}$

18. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $\bar{a}$ เท่ากับที่ทำกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} - 3\bar{j})$
2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} + 3\bar{j})$
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} + \bar{j})$
4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} - \bar{j})$

19. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อ $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์

ก. ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}| \neq 0$ แล้ว $(\bar{u} - \bar{v}) \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = 0$

ข. ถ้า $|2\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{v}|$ แล้ว $\bar{u} \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
1. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
1. ก. ผิด แต่ ข. ถูก
1. ก. ผิด และ ข. ผิด

20. ถ้า $a_1, a_2, \ldots$ เป็นลำดับคอนเวอเจนต์และมีลิมิตเป็น 1 แล้วอนุกรม $a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. มีผลบวกเป็น a_1
2. มีผลบวกเป็น 0
3. มีผลบวกเป็น 1
4. เป็นอนุกรมไดเวอเจนต์

21. ถ้า $a_n = \frac{n^2 + n + 1}{3n^2 + 1}$ และ $b_n = \frac{2^n - 5^n}{5^n + 9}$ แล้วลิมิตของลำดับที่มีพจน์ที่ n เป็น $a_n - b_n + a_n b_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1
2. $-\frac{1}{3}$
3. 0
4. 1

22. ถ้า $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 4x$ และ $-y(1) = y(-1)$
แล้วค่าของ $y(0)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3

23. กำหนดให้ $f(x) = \frac{(x^2-1)^3}{g(x)}$ โดยที่ $g(2) = f'(2) = 3$
แล้ว $g'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 12 3. 13 4. 14

24. ถ้า $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ และ $F(x) = (fog)(x)$ เมื่อ $x \geq 1$
แล้ว $(F^{-1})'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 4

25. กำหนดให้ $f(x) = \frac{|x^2-9|}{x-3}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to 3} f(x) = 6$
3. $\lim_{x\to -3} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to 3} f(x) = -6$
4. $\lim_{x\to -3} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และ $\lim_{x\to 3} f(x) = 0$

26. ในการเลือกกรรมการนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 4 คน และ หญิง 2 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{8}{15}$ 3. $\frac{9}{15}$ 4. $\frac{10}{15}$

27. ในการกระจาย $(x+2)^n$ ถ้าพจน์ที่ 2 และที่ 3 เป็น 160 และ 320 ตามลำดับ แล้วความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ n ในข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x = n - 2$ 2. $2x = n - 1$ 3. $2x = n + 1$ 4. $3x = n - 2$

28.

		สอบย่อย		
	การบ้าน	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ปลายภาค
เกณฑ์การคิดคะแนน	20%	20%	30%	30%
คะแนนที่ได้ (จากคะแนนเต็ม 100)	92	84	63	

ตารางข้างบนนี้ เป็นเกณฑ์การคิดคะแนนที่ผู้สอนกำหนดไว้ และผลการเรียนของนักเรียนคนหนึ่ง ถ้านักเรียนคนนี้ได้คะแนนเฉลี่ยตลอดภาคเป็น 79 เปอร์เซนต์ แล้วคะแนนการสอบปลายภาคของเขาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 57.2 2. 74.7 3. 77.0 4. 83.0

29. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ดังนี้

อายุ(ปี)	1–3	4–6	7–9	10–12	13–15
จำนวนคน	2	a	8	7	3

a เป็นจำนวนจริง ถ้าเปอร์เซนต์ไทล์ที่ 25 ของอายุของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 6.5 ปี แล้วเด็กในกลุ่มนี้ที่มีอายุต่ำกว่า 10 ปีมีจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 14 คน 2 15 คน 3. 16 คน 4 17 คน

30. ดัชนีราคาผู้บริโภคของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2537–2540 เป็นดังนี้

พ.ศ. :	2537	2538	2539	2540
ดัชนี :	100	107	116	138

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 19

ข. ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2538 ร้อยละ 31

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูกทั้งคู่ 2. ก. ถูก ข. ผิด
3. ก. ผิด ข. ถูก 4. ก. และ ข. ผิดทั้งคู่

ตอนที่ 2 ข้อ 31 – 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ให้ a , b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $a < b$, 5 หาร a ลงตัวและ 3 หาร b ลงตัว ถ้า a , b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ ค.ร.น. ของ a , b เท่ากับ 165 แล้ว a หาร b เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

32. ถ้า $A = \{x \mid x = 1 - \frac{2}{n}$ และ n เป็นจำนวนนับ $\}$

$B = \{ 0 , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \ldots \}$

และ $C = \{-1 , 0 , \frac{1}{2} , \{\frac{1}{3} , \frac{2}{4} , \frac{3}{5} , \ldots \} \}$

แล้ว $(A \cap C) - B$ เป็นจริงตามข้อใด

1. เป็นเซตอนันต์
2. เป็นเซตจำกัดที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว
3. เป็นเซตที่มีสมาชิกตัวเดียว
4. เป็นเซตว่าง

33. ถ้า p, q, r เป็นประพจน์โดยที่ $\sim p \vee q$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง ทั้งคู่ พิจารณา

ก. $p \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. $(q \wedge \sim r) \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ทั้ง ก. และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ทั้ง ก. และ ข. ผิด

34. ข้อความข้างล่างต่อไปนี้ข้อใดไม่ใช่นิเสธของข้อความ $\exists x [p(x) \wedge \sim Q(x)]$

1. $\forall x [\sim p(x) \vee Q(x)]$
2. $\forall x [p(x) \rightarrow Q(x)]$
3. $\forall x [\sim Q(x) \rightarrow \sim p(x)]$
4. $\forall x [p(x) \vee \sim Q(x)]$

35. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \leq -1 \\ (x-1)^2 & , \quad -1 < x < 2 \\ (x+1) & , \quad x \geq 2 \end{cases}$

เซตคำตอบของสมการ $f(|x|) - 4 = 0$

เป็นสับเซตของเซตซึ่งเป็นช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-3, 5)$ 2. $(-6, -1)$ 3. $(-5, 4)$ 4. $(1, 6)$

36. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x+1}$ โดยที่ $x \neq -1$

ถ้า I เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ และ $g = (fof)(f+I)$ แล้ว $g(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\frac{(x+1)^2}{(x+2)}$ 3. $\frac{(x+1)^2+x}{(x+2)}$ 4. $\frac{(x+1)^2-x}{(x+2)}$

37. ถ้า $f = \{(x,y) \in R\times R \mid y = x^2 + 2x + 1\}$

$g = \{(x,y) \in R\times R \mid y = \frac{1}{1-x^2}\}$

และ $h = (gof) + fg$ แล้วโดเมนของ h คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid |x| \neq 1\}$ 2. $\{x \mid x(x-2) \neq 0\}$

3. $\{x \mid (x^2-1)(x-2) \neq 0\}$ 4. $\{x \mid x(x^2-1)(x+2) \neq 0\}$

38. กำหนดให้ $A = \{ \sin\theta \mid \tan\theta(1 - \sin\theta) = \frac{2\cos 2\theta}{\cos\theta} \}$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{5}{3}$ 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{5}{3}$

39. กำหนด $\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{12}{13} + x = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{16}{63}$ 2. $\frac{6}{63}$ 3. $-\frac{16}{63}$ 4. $-\frac{6}{63}$

40. ให้ A และ B เป็นจุดโฟกัสและจุดยอด (ตามลำดับ) ของพาราโบลา $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$ ถ้าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ A และจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ B โดยที่จุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนเส้นตรง $y = 4$ แล้วสมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $(x-4)^2 + \frac{(y-2)^2}{2} = 1$ 2. $\frac{(x-4)^2}{2} + (y-2)^2 = 1$

3. $\frac{(x-4)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$ 4. $\frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$

41. กำหนดให้ F เป็นจุดโฟกัสในควอดรันทร์ที่หนึ่งของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 5y^2 - 8x + 20y - 36 = 0$ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ F และสัมผัสแกน X มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$

42. ถ้า $A = \{x \in R \mid (\frac{2}{3})^{x(1-x)} > \frac{9}{4}\}$ แล้วเซต B เป็นช่วงในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $B \cap A' = \varnothing$

1. $(-2, -1)$
2. $(-1, 0)$
3. $(0, 1)$
4. $(1, 2)$

43. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$$

$$3^{(y-1)} = 2^{(2y-3)}$$

แล้ว x และ y จะเป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $y < 0 < x$
2. $0 < x < y$
3. $0 < y < x$
4. $0 < x = y$

44. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $M = \begin{bmatrix} x & -x \\ \frac{3}{7} & x+3 \end{bmatrix}$ เซตของจำนวนจริง x ที่ทำให้ $\det M = \det[(2A + A^t)A^{-1}]$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{11}{7}, -5\}$
2. $\{\frac{11}{7}, 5\}$
3. $\{-\frac{11}{7}, -5\}$
4. $\{-\frac{11}{7}, 5\}$

45. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

แล้วค่าของ a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบสมการ $AX = B$ หาคำตอบ (X) ได้ จะเป็นสมาชิกของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $R - \{1\}$
2. $R - \{1, 2\}$
3. $R - \{3\}$
4. $R - \{-1, 3\}$

46. กำหนดให้ A และ B คือจุด (–10, 0) และ (2, 4) ตามลำดับ แบ่งเส้นตรง AB ที่จุด C ด้วยอัตรา $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|} = \frac{1}{3}$ ถ้า O คือจุดกำเนิด แล้วโคไซน์ของมุม COB มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{\sqrt{10}}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{10}}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{10}}$

47. ถ้า $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)} & , \quad x < -1 \\ x + \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 3 \\ \frac{3}{2} & , \quad x > 3 \end{cases}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R
2. f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = 3
3. f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = –1
4. f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = –1 และ x = 3

48. ให้ b , c เป็นจำนวนจริง ถ้าเส้นโค้ง $y = x^2 + bx + c$ มีจุด (–1 , –4) เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์แล้วพื้นที่ที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้และแกน X จาก x = –1 ถึง x = 1 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{16}{3}$ 4. $\frac{32}{3}$

49. ถ้า $f(x) = \frac{x^4}{4} - x$ และ a เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\int_{-a}^{a^2} f''(x)dx = -\frac{1}{4}$ แล้ว $f'(a)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

50. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [1, 3] โดยที่ $f(x) = g(x) + x - 1$ และ $g(x) \ge 0$ ทุกค่า $x \in [1, 3]$ พิจารณาข้อความ

ก. $\int_1^3 f(x)dx \ge 2$ ข. $\int_1^3 (f(x) - g(x))^2 dx \ge \frac{8}{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูกทั้งคู่
2. ก. และ ข. ผิดทั้งคู่
3. ก. ถูก แต่ ข. ผิด
4. ก. ผิด แต่ ข. ถูก

51. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1–10 กำกับ ถ้าต้องการหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากดังกล่าวมีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{2}{9}$
2. $\frac{8}{15}$
3. $\frac{2}{35}$
4. $\frac{11}{156}$

52. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก นาย ก และ นาย ข ผลัดกันหยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนไปเรื่อยๆ และหยุดเมื่อมีใครคนหนึ่งหยิบได้ลูกบอลสีแดง ถ้านาย ก หยิบลูกบอลเป็นคนแรก แล้วความน่าจะเป็นที่นาย ก จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{7}$
2. $\frac{5}{7}$
3. $\frac{3}{8}$
4. $\frac{5}{8}$

53. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 40 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน และจำนวนนักเรียนสอบได้คะแนนที่มีค่ามาตรฐานอยู่ระหว่าง –1 และ 1 มีอยู่ 75 % ของนักเรียนทั้งหมด ถ้านาย ก สอบได้ 50 คะแนน แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ของคะแนนของนาย ก

1. 37.5
2. 50
3. 75
4. 87.5

54. ในการสอบย่อยครั้งหนึ่งคะแนนเต็ม 100 คะแนน มีนักเรียน 9 คนสอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีได้คะแนนดังนี้

คณิตศาสตร์	70	70	70	78	79	80	90	91	92
เคมี	50	60	72	78	80	85	90	92	95

ปรากฏว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 8.6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของวิชาเคมีเท่ากับ 14.2 ถ้านายปัญญาสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ 90

คะแนนและวิชาเคมีได้ 90 คะแนนแล้วสรุปว่านายปัญญาเรียนวิชานี้เป็นจริงดัง

ข้อใดต่อไปนี้

1. เรียนได้ดีเท่ากันเพราะได้คะแนนเท่ากัน
2. เรียนเคมีได้ดีกว่าคณิตศาสตร์
3. เรียนคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าเคมี
4. เรียนทั้งสองวิชาได้ดีเท่ากันเพราะได้คะแนนตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์เดียวกัน

55. ในการสอบวิชาภาษาอังกฤษ ถ้าคะแนนสอบของนักเรียนหญิงจำนวน 200 คน มีความแปรปรวนเท่ากับ 8100 และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 1.5 และคะแนนสอบของนักเรียนชายจำนวน 300 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 51 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 54.3 2. 54.6 3. 55.5 4. 55.8

56. ตารางแสดงจำนวนสินค้า 3 ชนิดใน พ.ศ. 2534 ถึง 2536 เป็นดังนี้

		ราคา(หน่วยเป็นบาท)	
รายการสินค้า	พ.ศ. 2534	พ.ศ. 2535	พ.ศ. 2536
เข็มขัดหนัง	800	800	600
กระเป๋าหนัง	x	y	1,200
รองเท้าหนัง	1,000	1,000	1,100

ถ้าราคาเฉลี่ยของสินค้าทั้ง 3 ชนิดใน พ.ศ. 2535 และ 2536 เมื่อคิดโดยใช้ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ เพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ. 2534 ร้อยละ 3.33 และ 1.67 ตามลำดับ แล้ว x และ y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (ใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

1. 969.49 บาท , 882.16 บาท 2. 1,043.48 บาท , 1,043.48 บาท
3. 1,052.37 บาท , 1,146.49 บาท 4. 1,000.00 บาท , 1,099.00 บาท

ตอนที่ 3 ข้อ 1 – 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. สำหรับ $x \in (-1,1)$ ให้ $S(x)$ เป็นผลบวกของอนุกรม $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ จงหาค่าขอบเขตบนของเซต A เมื่อ $A = \{\frac{1}{S(x)} \mid x \in (-1,1)\}$

2. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ โดยที่ a , b เป็นจำนวนจริง และ $f(1 + 2i) = 0$ จงหา $f(i^{10})$

3. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 3(x + y)$ โดยมีอสมการข้อจำกัด ดังนี้ $2x + y \leq 8$, $x + 2y \leq 8$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ จงหาค่าสูงสุดของ P

4. ให้ x , y , z , w เป็นพจน์ 4 พจน์เรียงกันในลำดับเรขาคณิต โดยที่ x เป็นพจน์แรก ถ้า $y + z = 6$ และ $z + w = -12$ จงหาค่าสัมบรูณ์ของพจน์ที่ 5 ของลำดับนี้

5. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดชาย 5 คน และหญิง 5 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยให้ชายหญิงนั้งสลับกัน และนาย ก จะต้องนั้งติดกับนางสาว ข

6. ความสัมพันธ์ระหว่างกำไร (y) และ ราคาทุน (x) ของสินค้าชนิดหนึ่งเป็น $y = 7 + 0.25x$ ถ้าราคาของสินค้า 5 ชิ้นเป็นดังนี้ 32 48 40 56 และ 44 แล้วจงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกำไรของสินค้า

$\rightarrow \varnothing \cap \cup \subset \not\subset \in \notin \forall \exists \wedge \vee \leftrightarrow \sim \pm \geq \leq$

เฉลยคณิตศาสตร์ กข 2541

ตอนที่ 1

1. ตอบ 3.

แนวคิด เลือก $X = B \cup Y$ โดยที่ $Y \subset \{c, d, e, f\}$จะได้ว่า $B \subset X \subset A$

เพราะว่า $Y \subset \{c, d, e, f\}$ มีได้ $2^4 = 16$ เซต

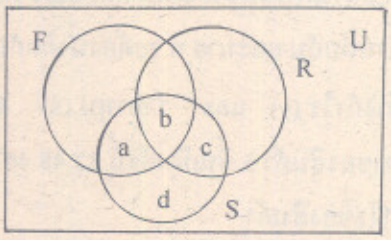
เพราะฉะนั้นจำนวนเซต X ซึ่ง $B \subset X \subset A$ เท่ากับ 16

2. ตอบ 2.

แนวคิด F = เซตของนักเรียนในชมรมฟุตบอล

R = เซตของนักเรียนในชมรมกรีฑา

S = เซตของนักเรียนในชมรมว่ายน้ำ



จากแผนภาพเวนน์

ให้ a , b , c , d เป็นจำนวนสมาชิกตามแผนภาพของเวนน์

เพราะว่ามีนักเรียน 30 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ

เพราะฉะนั้น $n(S') = 30$ ดังนั้น $n(S) = 50$

เพราะฉะนั้น $a + b + c + d = 50$ ....(1)

เพราะว่ามีนักเรียน 20 คน ที่เป็นสมาชิกชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมฟุตบอล

เพราะฉะนั้น $c + d = 20$ ....(2)

เพราะว่ามีนักเรียน 18 คน ที่เป็นสมาชิกทั้งชมรมฟุตบอลและชมรมว่ายน้ำ แต่ไม่เป็นสมาชิกชมรมกรีฑา

เพราะฉะนั้น $a = 18$ ....(3)

จากสมการ (1) – (3) จะได้ $b = 12$

เพราะฉะนั้นนักเรียนที่เป็นสมาชิกทั้ง 3 ชมรมเท่ากับ 12 คน

3. ตอบ 4.

แนวคิด สำหรับคนที่จำสูตรสัจนิรันดร์ได้จะรู้ทันที่ว่า ตัวเลือก 1. 2. และ 3. เป็นสัจนิรันดร์

การตีตารางค่าความจริงได้คำตอบแน่นอนแต่เป็นวิธีที่ช้าที่สุด

การพิสูจน์ว่า ตัวเลือก 1. 2. และ 3.เป็นสัจนิรันดร์ในห้องสอบก็ช้าเหมือนกัน

แทนค่าความจริงแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น $p = T$, $q = T$, $r = T$ และ $s = T$

จะได้ว่า 1. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)] = T$

2. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim[p \vee (p \wedge r)] = T$

3. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q))] = T$

4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s \vee \sim r) \wedge \sim s] \leftrightarrow p = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้

4. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกที่สุด

แทนค่า $x = 1.9$ จะได้ $\left|\frac{1.9-1}{1.9-2}\right| = 9 > 2$ เพราะฉะนั้น $x = 1.9$ ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 3$ จะได้ $\left|\frac{3-1}{3-2}\right| = 2 > 2$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = 3$ ไม่ได้

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$

$$\frac{x-1}{x-2} < -2 \text{ หรือ } \frac{x-1}{x-2} > 2$$

$$\frac{x-1}{x-2} + 2 < 0 \text{ หรือ } \frac{x-1}{x-2} - 2 > 0$$

$$\frac{x-1+2x-4}{x-2} < 0 \text{ หรือ } \frac{x-1-2x+4}{x-2} > 0$$

$$\frac{3x-5}{x-2} < 0 \text{ หรือ } \frac{-x+3}{x-2} > 0$$

$$\frac{3x-5}{x-2} < 0 \text{ หรือ } \frac{x-3}{x-2} < 0$$

$$\frac{5}{3} < x < 2 \text{ หรือ } 2 < x < 3$$

สรุปเซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซต $(\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3)$

5. ตอบ 4.

แนวคิด 1. $\{x \mid |x| = x - 5\} = \{x \mid |x| = x - 5 \text{ และ } x \geq 5\}$

$= \{x \mid x = x - 5 \text{ และ } x \geq 5\} = \{x \mid 0 = -5\} = \varnothing$

2. $\{x \mid |x| = x + 5\} = \{x \mid |x| = x + 5 \text{ และ } x \geq -5\}$

$= \{x \mid x = x + 5 \text{ หรือ } -x = x + 5 \text{ และ } x \geq -5\}$

$= \{x \mid 0 = 5 \text{ หรือ } -x = x + 5 \text{ และ } x \geq -5\} = \{-\frac{5}{2}\}$

3. $\{x \mid x^2 - 2|x| - 3 = 0\}$

$= \{x \mid x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ และ } x \geq 0\} \cup \{x \mid x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ และ } x \leq 0\}$

$= \{x \mid (x - 3)(x + 1) = 0 \text{ และ } x \geq 0\} \cup \{x \mid (x + 3)(x - 1) = 0 \text{ และ } x \leq 0\}$

$= \{3\} \cup \{-3\}$

หมายเหตุ คำถามที่ถามว่าเซต $\{x \mid x^2 - 2|x| - 3 = 0\}$ มีสมาชิกกี่ตัว ก็น่าจะมีคะแนนมากกว่า 2 คะแนนแล้ว เพราะว่าใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ค่อนข้างละเอียดและสำคัญ

ในการสอบจริงเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบเลย ไม่ต้องมาเสียเวลาอีกแล้ว

4. $\{x \mid \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1}\} = \{x \mid \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = \frac{x-1}{x+1} \text{ และ } \frac{x-1}{x+1} \geq 0\}$

$= \{x \mid \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x+1}$ และ $\frac{x-1}{x+1} \geq 0\} = \{x \mid \frac{x-1}{x+1} \geq 0\}$

$= (-\infty, -1) \cup [1, \infty)$ เป็นเซตอนันต์

6. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $f(x) = 10^x$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \log x$

$$\frac{f^{-1}(ab)}{f^{-1}(b)} = \frac{\log(ab)}{\log(b)} = \frac{\log(a)+\log(b)}{\log(b)} = 1 + \frac{\log(a)}{\log(b)} = 1 + \log_b a$$

7. ตอบ 1.

แนวคิด ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกอีกแล้ว

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = 2 - \frac{4}{(1-1)^2 - 4} = 3$

ดังนั้น $y = 3$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

ถ้า $y = 2$ แล้ว จากสูตร $y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$ จะได้ว่า $2 = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$

และ $0 = \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $y = 2$ ไม่ได้แน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4} \rightarrow \frac{4}{(x-1)^2 - 4} = 2 - y$

$\rightarrow (x-1)^2 - 4 = \frac{4}{2-y} \rightarrow (x-1)^2 = \frac{4}{2-y} + 4$

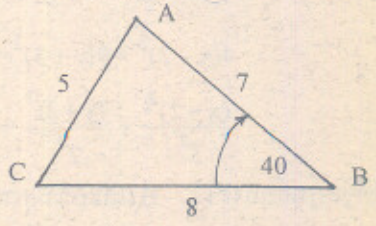
เพราะฉะนั้น $\frac{4}{2-y} + 4 \geq 0 \rightarrow \frac{4+4(2-y)}{2-y} \geq 0 \rightarrow \frac{12-4y}{2-y} \geq 0$

$\frac{y-3}{y-2} \geq 0 \rightarrow 2 < y$ หรือ $y \geq 3$

สรุปเรนจ์ของ r คือ $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$

8. ตอบ 1.

แนวคิด วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์



วัดมุม B ได้ 40 องศา เพราะฉะนั้น $\frac{B}{2} = 20$

เพราะว่า $0 < \sin 20 < \sin 30$

$$0 < \sin 20 < \frac{1}{2}$$

$$0 < \sin^2\frac{B}{2} < \frac{1}{4} = \frac{7}{28}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{8^2+7^2-5^2}{2(8)(7)} = \frac{64+49-25}{112} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$

$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{1-\cos B}{2} = \frac{1-\frac{11}{14}}{2} = \frac{3}{28}$$

9. ตอบ 2.

แนวคิด $\tan(\frac{11\pi}{12}) = \tan(165^\circ) = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = -\tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= -\frac{\tan(45^\circ) - \tan(30^\circ)}{1+\tan 45^\circ \tan 30^\circ} = -\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

การตัดตัวเลือก $\tan(\frac{11\pi}{12}) = \tan(165^\circ) = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ > -\tan 45^\circ = -1$

แต่ $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < -1$ และ $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < -1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

10. ตอบ 2.

แนวคิด $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$

$$4x^2 - 16x + 9y^2 + 54y = -61$$

$$4(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 6y + 9) = -61 + 16 + 81$$

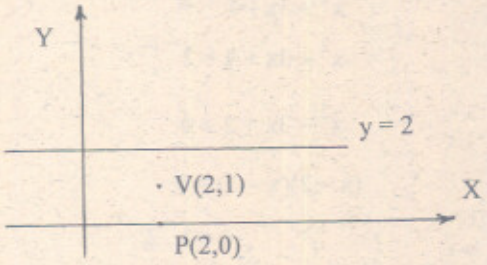
$$4(x-2)^2 + 9(y+3)^2 = 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$$

จะได้จุดศูนย์กลาง (2, –3) และความยาวแกนเอกเท่ากับ 6 หน่วย

11. ตอบ 4.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนดก่อนดีที่สุด



เพราะว่า พาราโบลา P มีโฟกัสอยู่ที่ (2,0) มี y = 2 เป็นเส้นไดเรกตริกซ์

เพราะฉะนั้นพาราโบลาเป็นรูปคว่ำจุดยอดคือ V(2,1) และ c = –1

สมการพาราโบลาคือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

$$(x-2)^2 = 4(-1)(y-1)$$

$$x^2 - 4x + 4 = -4y + 4 \qquad \text{....(1)}$$

สรุป พาราโบลามีจุดยอด V(2,1) ผ่านจุด (0,0) และ ตัดแกน X ที่ (4,0) ถูกต้อง

เพราะว่าแทนค่า x = – 2 และ y = – 2 แล้วสมการ (1) ไม่จริง

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

12. ตอบ 3.

แนวคิด $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-3x+4}}\right] = 0$

$$\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-3x+4}}\right] = 1$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x^2-3x+4}}\right] = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{x^2-3x+4}\right]^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{x^2-3x+4}\right] = \frac{1}{3}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2^{x^2-3x+4}}\right]=1$$

$$\frac{1}{x^2-3x+4}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-3x+4=2$$

$$x^2-3x+2=0$$

$$(x-2)(x-1)=0$$

$$x=1,2$$

ผลบวกของคำตอบทั้งหมด $1+2=3$

13. ตอบ 4.

แนวคิด $\log_9 3^{(x^2+3x-30)}=x$

$$3^{(x^2+3x-30)}=9^x=3^{2x}$$

$$x^2+3x-30=2x$$

$$x^2+x-30=0$$

$$(x-6)(x+5)=0$$

$$x=6,-5\in(-7,7)$$

14. ตอบ 1.

แนวคิด ฝึกหัดตัดตัวเลือกโดยใช้ค่า det กันดูบ้าง

เพราะว่า $\det(2A^{-1}B^t)=2^2\det(A^{-1})\det(B^t)=\frac{4\det(B)}{\det(A)}=\frac{4(-3)}{(-2)}=6$

และ det ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. 6 2. 6 3. 18 4. -18

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix}$, $B^t=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}$

$$2A^{-1}B^t=2\left(\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&-10\\2&-7\end{bmatrix}$$

15. ตอบ 4.

แนวคิด $\det(A) = 2 \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$, $\det(C) = 240 - 216 = 24$

$AB = C \rightarrow \det(A)\det(B) = \det(C) \rightarrow 2\det(B) = 24 \rightarrow \det(B) = 12$

เพราะฉะนั้น $\det(B^{-1}) = \frac{1}{12}$ → ตัวเลือก 1. ผิด

$\det(B^{-1}A^{-1}) = \det(B^{-1})\det(A^{-1}) = (\frac{1}{12})(\frac{1}{2}) \neq 24$ → ตัวเลือก 2. ผิด

$\det(2B^t) = 2^2\det(B) = 4\det(B) = 48$ → ตัวเลือก 3. ผิด

สรุปตัวเลือก 4. ต้องถูกต้อง มิฉะนั้นโจทย์ผิด

16. ตอบ 1.

แนวคิด $z_1 = (\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})^4 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$$\overline{z_2} = \overline{2+i} - \frac{\sqrt{2}}{z_1} = 2 - i - \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)} = 2 - i - \frac{2}{(1+i)} = 2 - i - \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}$$

$$= 2 - i - \frac{2(1-i)}{2} = 2 - i - 1 + i = 1$$

เพราะฉะนั้น $z_2 = 1$

17. ตอบ 2

แนวคิด $x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0$

$x^2(x-2) + 9(x-2) = 0$

$(x^2+9)(x-2) = 0$

$x = 3i, -3i, 2$

$A = \{3i, -3i, 2\}$

$x^4 - 81 = 0$

$x^4 = 81$

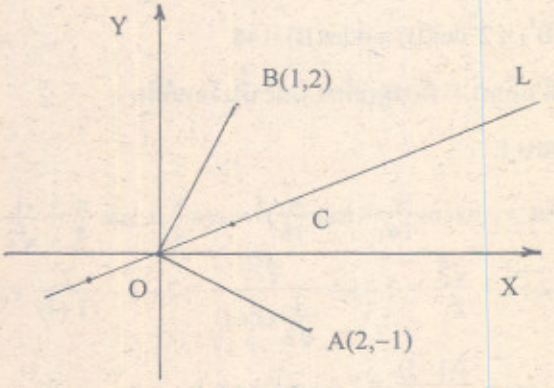
$x = 3 , -3 , 3i , -3i$

$B = \{3 , -3 , 3i , -3i\}$

$(A - B) \cup (B - A) = \{2\} \cup \{3 , -3\} = \{2 , 3 , -3\}$

18. ตอบ 3

แนวคิด คำถามเกี่ยวกับเวกเตอร์แบบนี้วาดรูปแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า



1. เขียนจุด A(2,–1) B(1,2) จะเห็นว่า OA ตั้งฉากกับ OB

2. ลากเส้นตรง L แบ่งครึ่งมุม AOB

3. C เป็นจุดบนเส้นแบ่งครึ่งมุม AOB ซึ่งอยู่ใน Q_1 หรือ Q_3

นั้นคือพิกัด (x,y) ของจุด C ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าจุดพิกัด (x,y) ของจุด Cบนเส้นตรง L ใน Q_1 จากรูป $x > y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ เพราะฉะนั้น $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{c}$ ทำมุม 45 องศากับ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$

สมมติ $\bar{c} = OC$ และ พิกัด C คือ (x,y) เพราะฉะนั้น $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j}$ และ $|x\bar{i} + y\bar{j}| = 1$

$$\frac{\vec{a}\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|} = \cos 45^\circ = \frac{\vec{b}\vec{c}}{|\vec{b}||\vec{c}|}$$

$$\frac{2x-y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2x-y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$$

$$2x - y = x + 2y$$

$$x = 3y \qquad \text{....(1)}$$

หมายเหตุ ตามวิธีจริงหากทำมาได้แค่นี้ก็สามารถตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $|x\vec{i} + y\vec{j}| = 1$ เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 1$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$ หรือ $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

สรุป $\vec{c} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{i} + \vec{j})$

19. ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถูก $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$= \vec{u}\,\vec{u} - \vec{v}\,\vec{v} = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$$

ข. ถูก $|2\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{v}| \rightarrow |2\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2 \rightarrow 4|\vec{u}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{v}|^2$

$$\rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 0$$

20. ตอบ 3.

แนวคิด $a_1 + \sum_{n=1}^{k}(a_{n+1} - a_n)$

$$= a_1 + [(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_{k+1} - a_k)] = a_{k+1}$$

$$a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{k\to\infty}(a_1 + \sum_{n=1}^{k}(a_{n+1} - a_n)) = \lim_{k\to\infty} a_{k+1} = 1$$

21. ตอบ 4.

แนวคิด $a_n = \frac{n^2+n+1}{3n^2+1} = \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$

$b_n = \frac{2^n-5^n}{5^n+9} = \frac{(\frac{2}{5})^n-1}{1+\frac{9}{5^n}}$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} b_n = -1$

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n+a_nb_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{3} - (-1) + (\frac{1}{3})(-1) = 1$

22. ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{dy}{dx} = 5x^4 + 3x^2 - 4x \rightarrow y = x^5 + x^3 - 2x^2 + C$

$-y(1) = y(-1) \rightarrow -(1+1+-2+C) = -1-1-2+C \rightarrow 2C = 4 \rightarrow C = 2$

$y(0) = C = 2$

23. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = \frac{(x^2-1)^3}{g(x)}$ ....(1)

เพราะว่า $g(2) = 3$ เพราะฉะนั้น $f(2) = \frac{(4-1)^3}{3} = 9$

จาก (1) $f(x)g(x) = (x^2-1)^3$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง $f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 3(x^2-1)^2(2x)$

เพราะว่า $g(2) = f'(2) = 3$ เพราะฉะนั้น $f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 2(4-1)^2(4)$

$(3)(3) + (9)g'(2) = 108$

$g'(2) = 11$

24. ตอบ 3.

แนวคิด $F(x) = (fog)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1$, $x \geq 1$

การหา $F^{-1}(x)$; $y = \sqrt{x} + 1$

$$\sqrt{x} = y - 1$$

$$x = (y-1)^2 \qquad , x \geq 1 \text{ และ } y \geq 2$$

เพราะฉะนั้น $F^{-1}(x) = (x-1)^2 \qquad , x \geq 2$

และ $(F^{-1})'(x) = 2(x-1)$

$(F^{-1})'(2) = 2$

25. ตอบ 1.

แนวคิด $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|x^2-9|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3||x+3|}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{(x-3)|x+3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} |x+3| = 6$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x^2-9|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x-3||x+3|}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^-} -\dfrac{(x-3)|x+3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} -|x+3| = -6$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

$\lim\limits_{x\to -3} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{|x^2-9|}{x-3} = 0$ สรุปเลือกตัวเลือก 1. ได้ 1 คะแนนแน่นอน

26. ตอบ 3.

แนวคิด P(ได้นักเรียนชายไม่น้อยกว่า 3 คน)

= P(ได้นักเรียนชาย 3 คน หรือ ได้นักเรียนชาย 4 คน)

= P(ได้นักเรียนชาย 3 คน) + P(ได้นักเรียนชาย 4 คน)

= P(ได้ชาย 3 คนและหญิง 1 คน) + P(ได้ชาย 4 คนและหญิง 0 คน)

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{2}{1}}{\binom{6}{4}} + \frac{\binom{4}{4}\binom{2}{0}}{\binom{6}{4}} = \frac{8}{15} + \frac{1}{15} = \frac{9}{15}$$

27. ตอบ 2.

แนวคิด $(x+2)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}2 + \binom{n}{2}x^{n-2}(2^2) + \ldots$

$= x^n + 2nx^{n-1} + 2n(n-1)x^{n-2} + \ldots$

เพราะฉะนั้น $2nx^{n-1} = 160$ และ $2n(n-1)x^{n-2} = 320$

$2nx^{n-1} = 160$ และ $n(n-1)x^{n-2} = 160$

$2nx^{n-1} = n(n-1)x^{n-2} \rightarrow 2x = n-1$

28. ตอบ 4.

แนวคิด

	การบ้าน	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ปลายภาค
เกณฑ์การคิดคะแนน	20%	20%	30%	30%
คะแนนที่ได้	92	84	63	x

คะแนนเฉลี่ยตลอดภาคเป็น 79 เปอร์เซนต์ เท่ากับ ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนักด้วยเปอร์เซนต์ของคะแนนแต่ละครั้ง เพราะฉะนั้น

$$79 = \frac{(92)(20)+(84)(20)+(63)(30)+(x)(30)}{20+20+30+30}$$

$$79 = \frac{5410+30x}{100} \rightarrow 7900 = 5410 + 3x \rightarrow 30x = 2490 \rightarrow x = 83$$

29. ตอบ 1.

แนวคิด

อายุ(ปี)	ความถี่	ความถี่สะสม
1–3	2	2
4–6	a	2 + a
7–9	8	10 + a
10–12	7	17 + a
13–15	3	20 + a

เพราะว่าเปอร์เซนต์ไทล์ที่ 25 ของอายุของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 6.5 ปี

ซึ่งเป็นรอยต่อระหว่างชั้น 4–6 และ 7–8

เพราะฉะนั้น 25% ของ $20 + a$ มีค่าเท่ากับ $2 + a$

$$\frac{20+a}{4} = 2 + a$$

$$a = 4$$

เด็กในกลุ่มนี้ที่มีอายุต่ำกว่า 10 ปีมีจำนวนเท่ากับ $10 + a = 14$ คน

30. ไม่สามารถสรุปคำตอบได้เพราะว่าข้อกำหนดของโจทย์ไม่ชัดเจน

แนวคิด

พ.ศ. :	2539	2540
ดัชนี :	116	138

ดัชนีแบบที่ 1 : 100 $\frac{138}{116}(100) = 118.9655$

ดัชนีแบบที่ 2 : $\frac{116}{138}(100) = 84.05797$ 100

คำถามแบบนี้ไม่สามารถตัดสินใจได้ เพราะว่าจากข้อความ

"ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 19"

ให้กำหนดเทียบกับฐานอะไร

หากกำหนดฐานเป็นปี 2537

ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 22

หากกำหนดฐานเป็นปี 2539

ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 18.9655

หากกำหนดฐานเป็นปี 2540

ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 15.9420

ในทำนองเดียวกันข้อความ ข. ก็สรุปไม่ได้

ตอนที่ 2

31. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า 5 หาร a ลงตัว เพราะฉะนั้น a = 5, 10, 15, 20, 25, 30, ...

เพราะว่า 3 หาร b ลงตัว เพราะฉะนั้น b = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 , 27, 30, 33

เพราะว่า a , b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ และ ค.ร.น. ของ a , b เท่ากับ 165

เพราะฉะนั้น a = 5 , b = 33 สรุป a หาร b เหลือเศษเท่ากับ 3

32. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{x \mid x = 1 - \frac{2}{n}$ และ n เป็นจำนวนนับ $\}$

$= \{1 - \frac{2}{1} , 1 - \frac{2}{2} , 1 - \frac{2}{3} , 1 - \frac{2}{4} , 1 - \frac{2}{5} , ...\}$

$= \{-1 , 0 , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , \frac{3}{5} , ...\}$

$B = \{ 0 , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , ... \}$

$C = \{- 1 , 0 , \frac{1}{2} , \{\frac{1}{3} , \frac{2}{4} , \frac{3}{5} , ... \} \}$

เพราะฉะนั้น $A \cap C = \{-1 , 0 , \frac{1}{2} \}$ และ $(A \cap C) - B = \{-1\}$

33. ตอบ 1.

แนวคิด $\sim p \vee q$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะว่า $\sim p \vee q = p \rightarrow q$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น r ต้องเป็นจริงด้วย

$\sim r \rightarrow q = F \rightarrow q$ เป็นจริงเสมอ

มีผลทำให้ $p \rightarrow (\sim r \rightarrow q)$ มีค่าความจริงเป็นจริง สรุป ก. ถูก

เพราะว่า r = T เพราะฉะนั้น $\sim r = F$ และ $(q \wedge \sim r) = F$

มีผลทำให้ $(q \wedge \sim r) \rightarrow p$ มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ สรุป ข. ถูก

34. ตอบ 4.

แนวคิด

คำแนะนำ จำไว้สอบ entrance คราวหน้าได้เลย $x \rightarrow y = \sim x \vee y = \sim y \rightarrow \sim x$

เพราะฉะนั้น $\sim(\exists x\,[p(x)\wedge\sim Q(x)]) = \forall x\,[\sim p(x)\vee Q(x)]$

$= \forall x\,[p(x) \rightarrow Q(x)]$

$= \forall x\,[\sim Q(x) \rightarrow \sim p(x)]$

35. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = \begin{cases} 2 & , \quad x \le -1 \\ (x-1)^2 & , \quad -1 < x < 2 \\ (x+1) & , \quad x \ge 2 \end{cases}$

การตัดตัวเลือก เราสามารถเลือกแทนค่าที่ทำให้ $f(|x|) = 4$ ได้โดยง่ายดังนี้

$x = 3$ จะทำให้ $f(|x|) - 4 = f(|3|) - 4 = f(3) - 4 = 4 - 4 = 0$

$x = -3$ จะทำให้ $f(|x|) - 4 = f(|-3|) - 4 = f(3) - 4 = 4 - 4 = 0$

เพราะฉะนั้น $3, -3$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. 2. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง กรณี 1 $0 \le |x| < 2$ $\quad f(|x|) - 4 = 0$

$$(|x| - 1)^2 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2|x| + 1 - 4 = 0$$

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0$$

กรณี 1.1 $0 \le x < 2$ $\quad x^2 - 2|x| - 3 = 0$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 3, -1$$

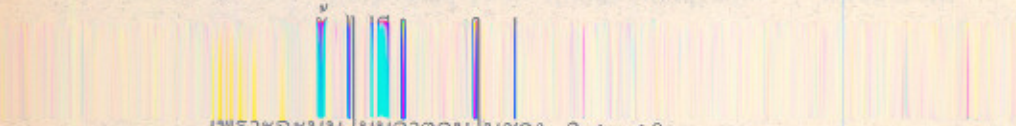
เพราะฉะนั้นไม่มีคำตอบในช่วง $0 \le x < 2$

กรณี 1.2 $-2 < x \le 0$ $\quad x^2 - 2|x| - 3 = 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$x = -3 , 1$



เพราะฉะนั้น ไม่มีคำตอบในช่วง $-2 < x \le 0$

กรณี $2 \le |x|$ $\qquad f(|x|) - 4 = 0$

$$|x| + 1 - 4 = 0$$

$$|x| = 3$$

$$x = 3 , -3$$

สรุป เซตคำตอบของสมการ $f(|x|)-4 = 0$ คือ $\{ 3 , -3\} \subset (-5 , 4)$

36. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใน**พจน์ของ x** แทนค่า $x = 0$ $\quad f(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow f(0) = 1$

$g(0) = [(fof)(f+I)](0) = (fof)(0)(f+I)(0) = (f(f(0))(f(0)+I(0)) = f(1)(1+0) = \frac{1}{2}$

แทนค่า $x = 0$ ในทุกตัวเลือก 1. 1 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1.

แทนค่า $x = 1$ $\quad f(x) = \frac{1}{x+1} \rightarrow f(1) = \frac{1}{2}$ และ $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

$g(1) = [(fof)(f+I)](1) = (fof)(1)(f+I)(1) = (f(f(1))(f(1)+I(1)) = f(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}+1)$

$= (\frac{2}{3})(\frac{3}{2}) = 1$

แทนค่า $x = 1$ ในตัวเลือกที่เหลือ 2. $\frac{4}{3}$ 3. $\frac{5}{3}$ 4. 1

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $g(x) = [(fof)(f+I)](x) = (fof)(x)(f+I)(x) = f(f(x))(f(x) + I(x))$

$$= f(\frac{1}{x+1})(\frac{1}{x+1} + x) = (\frac{1}{\frac{1}{x+1}+1})(\frac{1+x^2+x}{x+1})$$

$$= (\frac{x+1}{x+2})(\frac{1+x^2+x}{x+1}) = \frac{x^2+2x+1-x}{x+2}$$

$$= \frac{(x+1)^2 - x}{(x+2)}$$

37. ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f = \{(x,y) \in R\times R \mid y = x^2 + 2x + 1\} \rightarrow D_f = R$

$$g = \{(x,y) \in R\times R \mid y = \frac{1}{1-x^2}\} \rightarrow D_g = R - \{1, -1\}$$

จากสูตร $h = (gof) + fg$ จะได้ว่า $D_h \subset D_f \cap D_g = R - \{1, -1\}$

เพราะฉะนั้น $1 \notin D_h$ แต่ $1 \in \{x \mid x(x-2) \neq 0\} \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

$h(0) = ((gof) + fg)(0) = (gof)(0) + f(0)g(0) = g(f(0)) + f(0)g(0) = g(1) + (1)(1)$

แต่ $g(1)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $0 \notin D_h$

ตัวเลือก 1. $0 \in \{x \mid |x| \neq 1\}$ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

ตัวเลือก 3. $0 \in \{x \mid (x^2 - 1)(x - 2) \neq 0\}$ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $f = \{(x,y) \in R\times R \mid y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2\}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (x + 1)^2$ $D_f = R$ และ $R_f = [1, \infty)$

เพราะว่า $g = \{(x,y) \in R\times R \mid y = \frac{1}{1-x^2}\}$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ $D_g = R - \{1, -1\}$

$D_{fg} = D_f \cap D_g = R - \{1, -1\}$

$h(x) = ((gof) + fg)(x) = (gof)(x) + f(x)g(x) = g(f(x)) + f(x)g(x)$ $\quad x \neq \pm 1$

$= g((x + 1)^2) + ((x + 1)^2)(\frac{1}{1-x^2})$ $\quad x \neq \pm 1$

$= (\frac{1}{1-(x+1)^4}) + (\frac{1+x}{1-x})$ $\quad x \neq \pm 1$

เพราะฉะนั้น $x \neq 0$, $x \neq -2$, $x \neq \pm 1$

สรุป โดเมน $h = R - \{1, -1, 0, -2\} = \{x \mid x(x^2 - 1)(x + 2) \neq 0\}$

กข.2541-32

38. ตอบ 1.

แนวคิด $\tan\theta(1-\sin\theta) = \dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta}$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1-\sin\theta) = \frac{2\cos2\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta(1-\sin\theta) = 2\cos2\theta$$

$$\sin\theta - \sin^2\theta = 2(1-2\sin^2\theta)$$

$$\sin\theta - \sin^2\theta = 2 - 4\sin^2\theta$$

$$3\sin^2\theta + \sin\theta - 2 = 0$$

$$(3\sin\theta - 2)(\sin\theta + 1) = 0$$

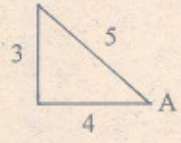
$$\sin\theta = -1, \frac{2}{3}$$

เพราะว่า $\cos\theta \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta \neq -1$

สรุป $A = \{ \sin\theta \mid \tan\theta(1-\sin\theta) = \dfrac{2\cos2\theta}{\cos\theta} \} = \{\frac{2}{3}\}$

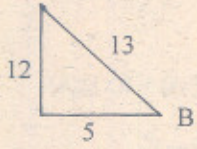
39. ตอบ 3.

แนวคิด



$A = \arccos\frac{4}{5}$

$\cos A = \frac{4}{5} \rightarrow \tan A = \frac{3}{4} \rightarrow A = \arctan\frac{3}{4}$



$B = \arcsin\frac{12}{13}$

$\sin B = \frac{12}{13} \rightarrow \tan B = \frac{12}{5} \rightarrow A = \arctan\frac{12}{5}$

$\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{12}{13} + x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{12}{5} = \frac{\pi}{2} - x$

เพราะฉะนั้น $\tan(\arctan\frac{3}{4} + \arctan\frac{12}{5}) = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\frac{\tan(\arctan(\frac{3}{4})) + \tan(\arctan(\frac{12}{5}))}{1 - \tan(\arctan(\frac{3}{4}))\tan(\arctan(\frac{12}{5}))} = \cot(x)$$

$$\cot(x) = \frac{\tan(\arctan(\frac{3}{4})) + \tan(\arctan(\frac{12}{5}))}{1 - \tan(\arctan(\frac{3}{4}))\tan(\arctan(\frac{12}{5}))} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{12}{5}}{1 - (\frac{3}{4})(\frac{12}{5})} = \frac{15+48}{20-36} = -\frac{63}{16}$$

เพราะฉะนั้น $\tan(x) = -\frac{16}{63}$

40. ตอบ 3.

แนวคิด คำถามแบบนี้ระหว่างที่ทำจะมีเหตุผลในการตัดตัวเลือกได้เรื่อยๆ

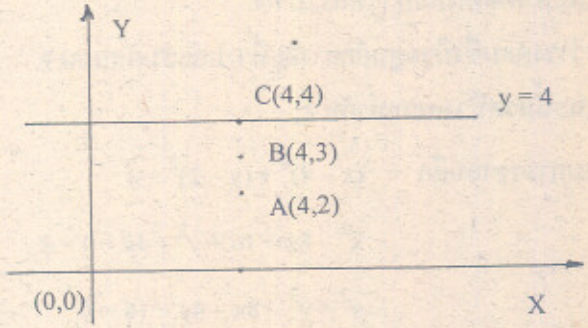
จัดรูปสมการพาราโบลา $x^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

$x^2 - 8x + 4y + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 8x + 16 = -4y + 12 \rightarrow (x-4)^2 = 4(-1)(y-3)$

เพราะฉะนั้น จุดโฟกัส A(4, 2) และจุดยอด B(4, 3)

วงรีมีจุดศูนย์กลาง A(4, 2) และโฟกัส B(4,3) เพราะฉะนั้น c = 1

หมายเหตุ ขณะนี้เรารู้ว่าแกนเอกขนานแกน Y ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง เพราะว่าจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนเส้นตรง y = 4 เพราะฉะนั้นจุดยอดคือ C(4,4)



เพราะว่า จุดศูนย์กลาง A(4, 2) และ จุดยอดคือ C(4,4)

เพราะฉะนั้น a = 2 และ แกนเอกขนานแกน Y เลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

หากทำต่อไปจะได้ $b^2 = a^2 - c^2 = 4 - 1 = 3$

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{(x-4)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

41. ตอบ 4.

แนวคิด $4x^2 - 5y^2 - 8x + 20y - 36 = 0$

$$4(x^2 - 2x + 1) - 5(y^2 - 4y + 4) = 36 + 4 - 20$$

$$4(x-1)^2 - 5(y-2)^2 = 20$$

$$\frac{(x-1)^2}{5} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

แกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาขนานแกน X

เพราะฉะนั้น $a^2 = 5$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 9$ ดังนั้น $c = 3$

จุดศูนย์กลาง (1, 2) ดังนั้นจุดโฟกัสคือ (–2, 2) และ (4, 2)

เพราะฉะนั้น F มีพิกัดเป็น (4, 2)

จากโจทย์จุดศูนย์กลางของแต่ละตัวเลือกคือ

1. (2, 2) 2. (2, 2) 3. (4, 2) 4. (4, 2)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

เพราะว่าวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ F และสัมผัสแกน X

เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมเท่ากับ 2

สรุปสมการวงกลมคือ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$$

42. ตอบ 1.

แนวคิด $\left(\frac{2}{3}\right)^{x(1-x)} > \frac{9}{4}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x(1-x)} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$

$$x(1-x) < -2$$

$$-x^2 + x + 2 < 0$$

$$x^2 - x - 2 > 0$$

$$(x-2)(x+1) > 0$$

$$x < -1 \text{ หรือ } x > 2$$

$A = (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$ $A' = [-1, 2]$ และ $A' \cap (-2, -1) = \varnothing$

สรุป $B = (-2, -1)$

43. ตอบ 2.

แนวคิด $(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4 \rightarrow 2\dfrac{\log 0.5}{\log 3}\dfrac{\log x}{\log 0.5} = \dfrac{\log 4}{\log 3}$

$\rightarrow$ $2\log x = \log 4\ 2\log 2 \rightarrow x = 2$

เพราะว่า $3^{(2-1)} \neq 2^{(4-3)}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่า $3^{(y-1)} = 2^{(2y-3)} \rightarrow (y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$

$\rightarrow (\log 3 - 2\log 2)y = \log 3 - 3\log 2 \rightarrow y = \dfrac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 - 2\log 2}$ ....(1)

จำค่า $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.48$ ได้ก็ดี เพราะฉะนั้น $y = \dfrac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 - 2\log 2} =$

$\dfrac{0.48 - 3(0.30)}{0.48 - 2(0.30)} = \dfrac{0.42}{-0.12} = 3.5$ เพราะฉะนั้น $0 < x < y$

หากจำค่า log2 log3 ไม่ได้ก็ยังหาคำตอบได้ดังนี้ จาก (1)

$$y = \frac{\log 3 - 3\log 2}{\log 3 - 2\log 2} = \frac{3\log 2 - \log 3}{2\log 2 - \log 3} = \frac{\log 8 - \log 3}{\log 4 - \log 3} = \frac{\log(2)(4) - \log 3}{\log 4 - \log 3}$$

$$= \frac{\log 2 + \log 4 - \log 3}{\log 4 - \log 3} = \frac{\log 2}{\log 4 - \log 3} + 1 = \frac{\log 2}{\log(\frac{4}{3})} + 1 = \frac{\log 2}{\log 1.33} + 1 > 1 + 1 = 2$$

ดังนั้น $y > 2$ เพราะฉะนั้นสรุปได้ว่า $0 < x < y$ เหมือนกัน

หมายเหตุ ค่าจริงของ $y = 3.409$

44. ตอบ 1.

แนวคิด $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 7$, $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

กข.2541-36

$$2A + A^t = 2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & -x \\ \frac{3}{7} & x+3 \end{bmatrix}\right) = x(x+3) + \frac{3}{7}x$$

$\det M = \det[(2A + A^t)A^{-1}]$

$= \det(2A + A^t)\det(A^{-1})$

$= 55(\frac{1}{\det A}) = 55(\frac{1}{7})$

เพราะฉะนั้น $x(x+3) + \frac{3}{7}x = 55(\frac{1}{7})$

$7x^2 + 21x + 3x = 55$

$7x^2 + 24x - 55 = 0$

$(7x - 11)(x + 5) = 0$

$x = \frac{11}{7}, -5$

เซตของจำนวนจริง x ที่ทำให้ $\det M = \det[(2A + A^t)A^{-1}]$ คือเซต $\{\frac{11}{7}, -5\}$

45. ตอบ 2.

แนวคิด $\det A = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{bmatrix}\right) = (a^2 + 1) + (-a - 1) + 2(1 - a)$

$= a^2 - 3a + 2 = (a - 2)(a - 1)$

ระบบสมการ $AX = B$ และ $B \neq 0$ มีคำตอบเดียว ก็ต่อเมื่อ $\det A \neq 0$

เพราะฉะนั้น $(a \neq 2$ หรือ $a \neq 1) \rightarrow \det A \neq 0$

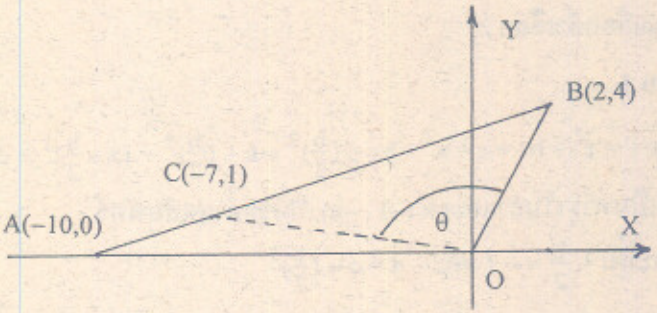
$\rightarrow$ ระบบสมการ $AX = B$ และ $B \neq 0$ มีคำตอบ

นอกจากนั้นเมื่อเราแทนค่า $a = 1$ หรือ $a = 2$ จะพบว่าระบบสมการจะไม่มีคำตอบ

สรุปค่าของ a ทั้งหมดที่ทำให้ระบบสมการ $AX = B$ หาคำตอบ (X) ได้ จะเป็นสมาชิกของเซต $R - \{1, 2\}$

46. ตอบ 2.

แนวคิด วาดรูปตามโจทย์กำหนด



เพราะว่า $|AC| : |CB| = 1 : 3$ เพราะฉะนั้นพิกัด C คือ

$$(-10 + \frac{1}{4}(-10-2)\ ,\ 0 + \frac{1}{4}(0-4)) = (-7\ ,\ 1)$$

จากรูปจะเห็นว่า $\theta > 90$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta < 0 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3. และ 4.

จากการวัดมุมจะได้ $\theta = 110$ องศา

และ $\cos 110^\circ = \cos(90^\circ + 20^\circ) = -\sin 20^\circ > -\sin 30 = -0.5$

แต่ $-\frac{2}{\sqrt{10}} = -\frac{2}{3.16} = -0.63$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $OC = -7i + j$, $OB = 2i + 4j$

$$\cos\theta = \frac{OC.OB}{|OC|.|OB|} = \frac{(-7i+j)(2i+4j)}{\sqrt{50}\sqrt{20}} = \frac{-10}{10\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{10}}$$

47. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)} & , \quad x < -1 \\ x + \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 3 \\ \frac{3}{2} & , \quad x > 3 \end{cases}$

$f(3) = \frac{7}{2}$ และ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \neq \frac{7}{2} \rightarrow f$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$

$\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 3.

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x+\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ และ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x-1} = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to -1} f(x) = -\frac{1}{2} = f(-1)$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = -1$

สรุปต้องเลือกตัวเลือก 2.

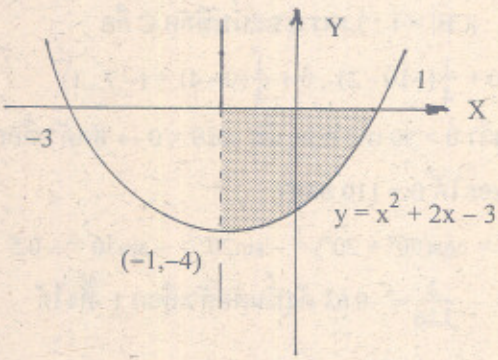
48. ตอบ 3.

แนวคิด $y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2 = (x+\frac{b}{2})^2 + c - (\frac{b}{2})^2$

มีกราฟเป็นพาราโบลาและจุด $(-1, -4)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น $-\frac{b}{2} = -1$ และ $-4 = c - (\frac{b}{2})^2$

ดังนั้น $b = 2$ และ $c = -3$ สรุป $y = x^2 + 2x - 3$ มีกราฟเป็น



เพราะว่า $\int_{-1}^{1} y\,dx = \int_{-1}^{1}(x^2+2x-3)dx = (\frac{x^3}{3}+x^2-3x\Big|_{x=1} - (\frac{x^3}{3}+x^2-3x\Big|_{x=-1}$

$= (\frac{1}{3}+1-3) - (-\frac{1}{3}+1+3) = -\frac{16}{3}$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $= \frac{16}{3}$

49. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = \frac{x^4}{4} - x \to f'(x) = x^3 - 1$

เพราะว่า $\int f''(x)dx = f'(x)$ เพราะฉะนั้น

$$-\frac{1}{4} = \int_{-a}^{a^2} f''(x)dx = f'(a^2) - f'(-a) = (a^6 - 1) - (-a^3 - 1) = a^6 + a^3$$

$$4a^6 + 4a^3 + 1 = 0 \rightarrow (2a^3 + 1)^2 = 0 \rightarrow 2a^3 + 1 = 0 \rightarrow a^3 = -\frac{1}{2} \rightarrow a^3 - 1 = -\frac{3}{2}$$

สรุป $f'(a) = -\frac{3}{2}$

50. ตอบ 1.

แนวคิด $g(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in [1, 3] \rightarrow \int_1^3 g(x)dx \geq 0$

พิจารณาข้อความ ก.

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (g(x) + x - 1)dx$$

$$= \int_1^3 g(x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$$

$$\geq \int_1^3 (x-1)dx$$

$$\geq \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{x=1}^{x=3} = 2$$

สรุป $\int_1^3 f(x)dx \geq 2$ ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข. $\int_1^3 (f(x) - g(x))^2 dx = \int_1^3 (x^2 - 2x + 1)dx$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_{x=1}^{x=3} = \left(\frac{27}{3} - 9 + 3\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) = \frac{8}{3}$$

สรุป $\int_1^3 (f(x) - g(x))^2 dx \geq \frac{8}{3}$ ถูกต้อง

51. ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนวิธีหยิบสลาก $= \binom{10}{8} = 45$

จำนวนวิธีหยิบสลากได้หมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น $= \binom{4}{3}\binom{6}{1} = 24$

ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบเท่านั้น

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{6}{5}}{\binom{10}{8}} = \frac{(4)(6)}{(45)} = \frac{8}{15}$$

52. ตอบ 2.

แนวคิด

ก หยิบ
- P(ก ได้แดง) $= \frac{5}{8}$ หยุด
- P(ก ได้ขาว) $= \frac{3}{8} \rightarrow$ ข หยิบ
  - P(ข ได้แดง) $= \frac{5}{7}$ หยุด
  - P(ข ได้ขาว) $= \frac{2}{7} \rightarrow$ ก หยิบ
    - P(ก ได้แดง) $= \frac{5}{6}$ หยุด
    - P(ก ได้ขาว) $= \frac{1}{6}$

ความน่าจะเป็นที่นาย ก จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงเท่ากับ

= ความน่าจะเป็นที่นาย ก จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 1

+ ความน่าจะเป็นที่นาย ก จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงในการหยิบครั้งที่ 2 ของ ก

= P(ครั้งแรก ก ได้แดง) + P(ครั้งแรก ก ได้ขาว ต่อมาข ได้ ขาว และ ก ได้ แดง)

$= \frac{5}{8} + (\frac{3}{8})(\frac{2}{7})(\frac{1}{6}) = \frac{5}{8} + \frac{5}{56} = \frac{40}{56} = \frac{5}{7}$

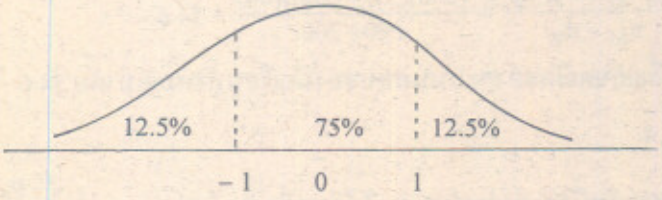
53. ตอบ 4.

แนวคิด ค่าเฉลี่ยเท่ากับ 40 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน

นาย ก สอบได้ 50 คะแนนตรงกับคะแนนมาตรฐาน = $\frac{50-40}{10} = 1$

เพราะว่าคะแนนสอบของนักเรียนการแจกแจงปกติ

เพราะฉะนั้น จำนวนนักเรียนที่มีคะแนนมาตรฐานน้อยกว่า – 1 เท่ากับ 12.5 %



สรุปตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ของคะแนนของนาย ก คือ 12.5 + 75 = 87.5

หมายเหตุ จากค่าในตารางท้ายเล่ม ค. 014 $P(0 < z < 1) = 0.3413$

เพราะฉะนั้นเปอร์เซนต์ไทล์ของคะแนนของนาย ก ต้อง = 50 + 34.13 = 84.13

54. ตอบ 3.

แนวคิด

ค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ = $\text{xbar}_{\text{math}}$ = (70+70+70+78+79+80+90+91+92)/9 = 80

ค่าเฉลี่ยเคมี = $\text{xbar}_{\text{chem}}$ = (50+60+72+78+80+85+90+92+95)/9 = 78

$s_{math} = 8.6$ และ $s_{chem} = 14.2$

นายปัญญาสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ 90 คะแนนและวิชาเคมีได้ 90 คะแนน

$$z_{math} = \frac{90 - \text{xbar}_{\text{math}}}{s_{math}} = \frac{90-80}{8.6} = 1.16$$

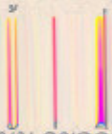
$$z_{chem} = \frac{90 - \text{xbar}_{\text{á·}}}{s_{chem}} = \frac{90-78}{14.2} = 0.84$$

สรุปเรียนคณิตศาสตร์ได้ดีกว่าเคมี

55. ตอบ 2.

แนวคิด ในการสอบวิชาภาษาอังกฤษคะแนนสอบของนักเรียนหญิงจำนวน 200 คน มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน s = 90 และสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 1.5

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผัน = $\frac{s}{\bar{x}}$



เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยคะแนนสอบของนักเรียนหญิง = $\bar{x}_W = \frac{90}{1.5} = 60$

คะแนนสอบของนักเรียนชายจำนวน 300 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 51

$\bar{x}_{total} = \frac{n_M\bar{x}_M + n_W\bar{x}_W}{n_M + n_W} = \frac{(300)(51)+(200)(60)}{300+200} = 54.6$

สรุปค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนทั้งหมดเท่ากับ 54.6

56. ตอบ 4.

แนวคิด สูตรดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ $I_{SR} = (\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{P_{ni}}{P_{oi}})\times 100$

		ราคา(หน่วยเป็นบาท)	
รายการสินค้า	พ.ศ. 2534	พ.ศ. 2535	พ.ศ. 2536
เข็มขัดหนัง	800	800	600
กระเป๋าหนัง	x	y	1,200
รองเท้าหนัง	1,000	1,000	1,100

$I_{SR2536} = (\frac{1}{3})(\frac{600}{800}+\frac{1200}{x}+\frac{1100}{1000})\times 100$

เพราะว่าดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยสัมพัทธ์ของปี 2536 เพิ่มขึ้นจากปี พ.ศ. 2534 ร้อยละ 1.67

เพราะฉะนั้น $I_{SR2536} = 100 + 1.67 = 101.67$

$$101.67 = (\frac{1}{3})(\frac{600}{800}+\frac{1200}{x}+\frac{1100}{1000})\times 100$$

$$(1.0167)(3) = 0.75+\frac{1200}{x}+1.1$$

$$\frac{1200}{x} = 3.0501 - 0.75 - 1.1 = 1.2001$$

$$x = 999.91667 = 1000$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน

$103.33 = I_{SR2535} = (\frac{1}{3})(\frac{800}{800}+\frac{y}{x}+\frac{1000}{1000})\times 100$ จะได้ $y = 1099.90$

ตอนที่ 3

1. ตอบ $x \in [2, \infty)$ เป็นขอบเขตบนของเซต A ทุกตัว

แนวคิด $S(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$ (อนุกรมเรขาคณิต $a = 1, r = -x$)

$A = \{\frac{1}{S(x)} \mid x \in (-1,1)\} = \{1 - x \mid x \in (-1,1)\}$

เพราะว่า $-1 < x < 1$

$-1 < -x < 1$

$0 < 1 - x < 2$

จากบทนิยามใน ค. 011 หน้า 95 ให้ $S \subset R$ กล่าวว่า จำนวนจริง u จะเป็น <u>ค่าขอบเขตบน</u>ของ S ก็ต่อเมื่อ u ไม่น้อยกว่าสมาชิกใดๆ ของ S ในกรณีนี้เรากล่าวว่า S <u>มีขอบเขตบน</u>

เพราะฉะนั้น $x \in [2, \infty)$ เป็นขอบเขตบนของเซต A ทุกตัว

คำแนะนำสำหรับคอมพิวเตอร์ที่ตรวจ ควรจะเขียนโปรแกรมย่อยเพื่อตรวจว่านักเรียนคนใดตอบค่าตัวเลขมากกว่าหรือเท่ากับ 2 ก็ให้ไป 3 คะแนนเต็มเลย

2. ตอบ 8

แนวคิด เพราะว่า $f(1 + 2i) = 0$ และ $a, b \in R$

เพราะฉะนั้น $f(1 - 2i) = 0$

$[x - (1 + 2i)][x - (1 - 2i)] = [x - 1 - 2i][x - 1 + 2i]$

$= x^2 - 2x + 1 + 4$

$= x^2 - 2x + 5$

เพราะฉะนั้น $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$

$= (x^2 - 2x + 5)(x + 2)$

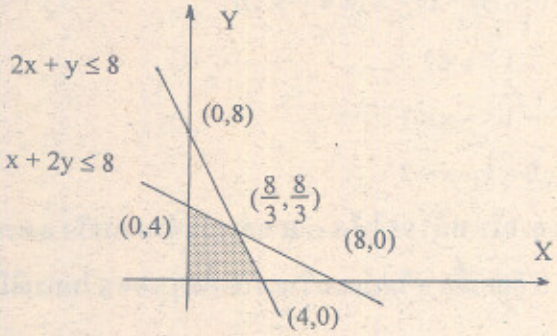
และ $f(i^{10}) = f(i^{4 \cdot 4 \cdot 2}) = f(-1) = (1 + 2 + 5)(-1 + 2) = 8$

3. ตอบ 16

แนวคิด $P = 3(x + y)$

อสมการข้อจำกัดคือ $2x + y \le 8$, $x + 2y \le 8$, $x \ge 0$ $y \ge 0$

ภาพของอาณาบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ



จุดมุม	(0,0)	(4,0)	(0,4)	$(\frac{8}{3},\frac{8}{3})$
$P = 3(x + y)$	0	12	12	16

ค่าสูงสุดของ $P = 16$

4. ตอบ 48

แนวคิด ให้ r เป็นอัตราส่วนร่วม เพราะฉะนั้น $y = rx$, $z = r^2x$, $w = r^3x$

$y + z = 6 \quad \rightarrow rx + r^2x = 6 \quad \rightarrow rx(1 + r) = 6$ ....(1)

$z + w = -12 \rightarrow r^2x + r^3x = -12 \rightarrow r^2x(1 + r) = -12$ ....(2)

เพราะฉะนั้น $\frac{r^2x(1-r)}{rx(1-r)} = \frac{-12}{6} \rightarrow r = -2$

จาก (1) $rx(1 + r) = 6 \rightarrow (-2) \times (1 + (-2)) = 6 \rightarrow x = 3$

ค่าสัมบูรณ์ของพจน์ที่ 5 คือ $|r^4x| = (16)(3) = 48$

5. ตอบ 1152

แนวคิด ขั้นที่ 1 ให้นาย ก จะต้องนั้งติดกับนางสาว ข ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 2 ชาย 4 คนที่เหลือเลือกนั้งได้ $4! = 24$ วิธี

ขั้นที่ 3 หญิง 4 คนที่เหลือเลือกนั้งได้ $4! = 24$ วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด $= (2)(24)(24) = 1152$ วิธี

6. ตอบ 18

แนวคิด $\overline{x} = \frac{32+48+40+56+44}{5} = \frac{220}{5} = 44$

$y = 7 + 0.25x$

$\overline{y} = 7 + 0.25\overline{x} = 7 + 0.25(44) = 7 + 11 = 18$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกำไรของสินค้า = 18

การเฉลย คณิตศาสตร์ กข 2541 ด้วย MATHCAD

โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เป็นโปรแกรมที่มีประโยชน์มากในการคำนวณทั้งระดับ ม. ปลาย และ ระดับอุดมศึกษา ท่านผู้อ่านสามารถเรียนรู้วิธีใช้งานได้จาก **คู่มือ MATHCAD** เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นความสามารถบางประการของ MATHCAD ที่นำมาช่วยในการหาคำตอบของข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ กข. 2541

9. $\tan(\frac{11\pi}{12})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1}{1+\sqrt{3}}$ 2. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ 3. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

ด้วยการคำนวณของ MATHCAD จะได้

$$\tan\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right) = -0.268$$

$$\frac{-1}{1+\sqrt{3}} = -0.366 \qquad \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = -0.268$$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -3.732 \qquad \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2.366$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบ

14. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $2A^{-1}B^{t}$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

ด้วยการคำนวณของ MATHCAD จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot A^{-1} \cdot B^{T} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

15. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่งทำให้ $AB = C$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(B^{-1}) = 12$
2. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$
3. $\det(2B^{t}) = 24$
4. $\det(A^{2}B) = 48$

ด้วยการคำนวณของ MATHCAD จะได้

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} \cdot C \qquad \left| B^{-1} \right| = 0.083$$

$$\left| B^{-1} \right| = 0.083 \qquad \left| B^{-1} \cdot A^{-1} \right| = 0.042$$

$$\left| 2 \cdot B^{T} \right| = 48 \qquad \left| A^{2} \cdot B \right| = 48$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ

16. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z_1 = (\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})^4$ และ $\overline{z_2} = \overline{2+i} - \frac{\sqrt{2}}{z_1}$ แล้ว z_2 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. -1
3. i
4. $-i$

ด้วยการคำนวณของ MATHCAD จะได้

$$i = \sqrt{-1}$$

$$z_1 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{16}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{16}\right)\right)^4$$

$$\overline{(2+i)} - \frac{\sqrt{2}}{z_1} = 1$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

39. กำหนด $\arccos\frac{4}{5} + \arcsin\frac{12}{13} + x = \frac{\pi}{2}$ แล้ว tanx มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{16}{63}$ 2. $\frac{6}{63}$ 3. $-\frac{16}{63}$ 4. $-\frac{6}{63}$

ด้วยการคำนวณของ MATHCAD จะได้

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{acos}\left(\frac{4}{5}\right) - \operatorname{asin}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = -0.254$$

$$\frac{16}{63} = 0.254 \qquad \frac{6}{63} = 0.095$$

$$-\frac{16}{63} = -0.254 \qquad -\frac{6}{63} = -0.095$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบ

ความสามารถของ MATHCAD มีอีกมากมายอ่านได้ใน **คู่มือ MATHCAD** มีจำหน่ายที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก 2541

ตอนที่ 1 ข้อ 1 – 30 ข้อละ 1 คะแนน

1. กำหนดให้ $A = \{ 1 , 2 , \{3 , 4\} , \{5\} , 6 \}$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่เป็นสับเซตของ A

   1. $\{ 1 , 2 , \{3 , 4\}\}$
   2. $\{ 1 , \{3 , 4\} , \{5\}\}$
   3. $\{ 1 , \{3 , 4\} , 6 \}$
   4. $\{\{3 , 4\} , 5 , 6 \}$

2. กำหนดให้ $A - B = \{ 1 , 2 , 4\}$, $B - A = \{ 3 , 5\}$ และ $A \cup B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$ แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

   1. $\{0 , 1 , 4 , 6 , 7\}$
   2. $\{0 , 1 , 3 , 5 , 7\}$
   3. $\{1 , 2 , 3 , 4 , 7\}$
   4. $\{1 , 2 , 4 , 5 , 6\}$

3. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า b หาร a ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 24 โดยที่ $24 < b$ 24 หาร b ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 12 แล้ว ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

   1. 1
   2. 2
   3. 6
   4. 12

4. กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5\}$

   $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$

   $C = \{x \mid x$ คือจำนวนแต้มลูกเต๋าหนึ่งลูก ที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว$\}$

   $D = \{x \mid x$ คือจำนวนหัวที่ได้เมื่อโยนเหรียญ 3 เหรียญ$\}$

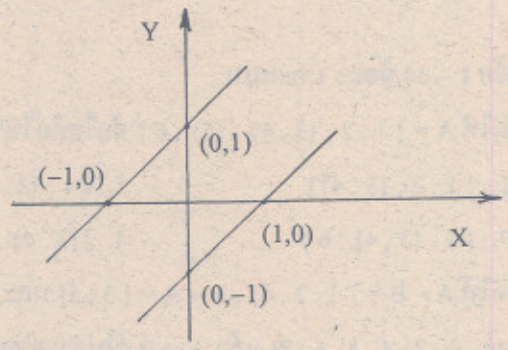
   แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. $A = B$
   2. $B = C$
   3. $C = D$
   4. $A = C$

5. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก ให้ $r = \{(x, y) \mid yx^2 = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้คือเรนจ์ของ r

   1. R^+
   2. $R^+ \cup \{0\}$
   3. $R - \{0\}$
   4. R

6. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้



1. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x + y| = 1\}$
2. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$
3. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$
4. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$

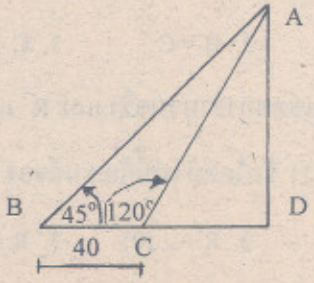
7. กำหนดให้ $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt{x}$ และ $h(x) = \frac{1}{x}$ โดยที่ f, g และ h เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(f + g)(-1)$ หาค่าได้
2. $(f - h)(-1)$ หาค่าได้
3. $(fg)(-1)$ หาค่าได้
4. $(\frac{h}{g})(-1)$ หาค่าได้

8. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ x เป็นจำนวนอตรรกยะ} \\ \sqrt{2} & , \text{ x เป็นจำนวนตรรกยะ} \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(0) = 0$
2. $f(0) = f(\sqrt{2})$
3. $f(\sqrt{2}) = 0$
4. $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

9. จากรูปกำหนดให้ มุม ABC = 45° มุม ACB = 120° ด้าน BC ยาว 40 หน่วย ด้าน AD ตั้งฉากกันกับด้าน BD ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของด้าน AD



1. $20(3+\sqrt{3})$ หน่วย 2. $20(1+\sqrt{3})$ หน่วย

3. $20(3-\sqrt{3})$ หน่วย 4. $20(1-\sqrt{3})$ หน่วย

10. กำหนดให้ $f(x)=\frac{\sqrt{2-x}}{x}$ และ $g(x)=x$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(fog)(1)=1$ 2. $(fog)(2)=0$ 3. $(gof)(1)=1$ 4. $(gof)(2)=2$

11. จุดยอดของสมการไฮเพอร์โบลา $4x^2-8x-9y^2=32$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,-2)$ และ $(0,2)$ 2. $(0,-2)$ และ $(0,4)$

3. $(-2,0)$ และ $(4,0))$ 4. $(-3,0)$ และ $(3,0)$

12. กำหนดให้ค่าของ $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{3}{16}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{3}{4}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 4. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

13. ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับเซตของจุด (x, y) ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีแกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย

1. $\{(x,y)\mid x^2+16y^2=16\}$ 2. $\{(x,y)\mid x^2+16y^2=64\}$

3. $\{(x,y)\mid x^2-16y^2=16\}$ 4. $\{(x,y)\mid x^2-16y^2=64\}$

14. วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น $9x^2+4y^2=36$ วงกลมซึ่งมีจุดศูนย์ร่วมกับวงรี และมีรัศมีเท่ากับความยาวครึ่งแกนโทของวงรี มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+y^2=2$ 2. $x^2+y^2=3$ 3. $x^2+y^2=4$ 4. $x^2+y^2=9$

15. ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\log144-2\log3+\log25-\log4$

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

16. เซตคำตอบของสมการ $\log_2(2x^2-1)=-3$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $[-1,\frac{3}{4}]$ 2. $[-2,\frac{1}{2}]$ 3. $[-3,\frac{1}{3}]$ 4. $[-4,\frac{1}{4}]$

17. พิจารณาดีเทอร์มินันต์ ต่อไปนี้

ก. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$

ข. $\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

18. กำหนด $x + 2y - z = 3$

$3x + y = 6$

$2x + y = 1$

เมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้แทนระบบสมการที่มีคำตอบเดียวกับกับระบบสมการที่กำหนดให้

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

19. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

ข. $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

20. $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 3 4. 4

21. ค่า x ที่ทำให้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{2x^2-1}{x}$ มีค่าเท่ากับ 4 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\pm\sqrt{2}$ 2. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. ± 2 4. $\pm\frac{1}{2}$

22. ให้ $f(x) = x^3 + x^2 - x + \frac{1}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$ 2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$
3. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$ 4. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -\frac{1}{2}$

23. หมายเลขโทรศัพท์ประกอบด้วยตัวเลข 7 ตัว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนหมายเลขที่ขึ้นต้นด้วย 427

1. 10,000 2. 5,040 3. 840 4. 210

24. ถ้า F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x) เมื่อ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ แล้ว $F(2) - F(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 0.25 3. -0.25 4. -0.50

25. กำหนดให้ E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ S

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $P(E_1 \cap E_2) - P(E_1) = P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$

ข. $P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2')$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

26. สมศรีมีเครื่องประดับที่เป็นทองและเพชรที่แตกต่างกัน 6 ชิ้น ต้องการบริจาคช่วยชาติ 3 ชิ้น จำนวนวิธีที่สมศรีจะบริจาคเครื่องประดับคือข้อใดต่อไป

1. 18 2. 20 3. 40 4. 60

27. ในการสอบแข่งขันชิงทุนรัฐบาลไปศึกษาต่อต่างประเทศ มีวิชาที่ต้องสอบ 2 วิชา ผู้สมัครสอบ 3 คน คือ ก ข และ ค ได้คะแนนแต่ละวิชาดังนี้

	คณิตศาสตร์	ภาษาอังกฤษ
ก	75	80
ข	80	60
ค	70	85

ถ้าคะแนนเฉลี่ยของวิชาคณิตศาสตร์และวิชาภาษาอังกฤษของผู้เข้าสอบทั้งหมดเท่ากับ 75 และ 75 ตามลำดับ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 และ 15 ตามลำดับ แล้วข้อใดต่อไปนี้คือลำดับค่ามาตรฐานรวมในการสอบเรียงจากมากไปหาน้อย

1. ก, ค, ข 2. ค, ข, ก 3. ก, ข, ค 4. ค, ก, ข

28. กำหนดข้อความ

ก. นักเรียนแต่ละคนในห้องนี้กำลังอ่านหนังสือ

ข. มีนักเรียนในห้องนี้กำลังอ่านหนังสือ

ค. มีนักเรียนในห้องนี้อย่างน้อยหนึ่งคนกำลังอ่านหนังสือ

ถ้าใช้วลีบ่งปริมาณ "สำหรับ.....บางคน" กับข้อความข้างต้นแล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. เป็นจริงเฉพาะข้อ ค. 2. เป็นจริงเฉพาะข้อ ข.
3. เป็นจริงเฉพาะข้อ ข. กับข้อ ค. 4. เป็นจริงทั้งข้อ ก. ข. และ ค.

29. ถ้าเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนตรรกยะแล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\exists x(x^2 - x - 3 = 0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. $\exists x(x^2 - x + 1 = 0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

30. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. สำหรับจำนวนจริง a และ b ใดๆ $|a + b| \geq |a| - |b|$

ข. ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a \leq b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอนที่ 2 ข้อ 31 – 56 ข้อละ 2 คะแนน

31. ข้อใดต่อไปนี้คือเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

1. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
2. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
3. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$
4. $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$

32. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $a < a^2$ สำหรับทุกๆ จำนวนจริง a
2. ถ้า $a < b \leq -1$ แล้ว $a^3 < b$
3. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$
4. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $-a < -a^2$

33. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง

ถ้า $A = (0, \infty)$

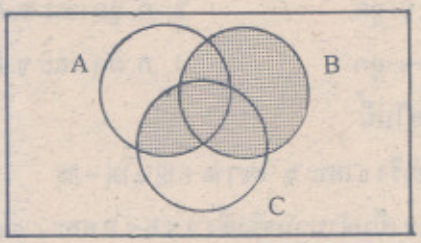
$B = (2, \infty)$

$C = (-1, 3]$

แล้ว $C - (A' \cup B)$ คือช่วงใดต่อไปนี้

1. $[-2, 0)$
2. $(-2, 0]$
3. $[0, 2)$
4. $(0, 2]$

34. ส่วนที่แรเงาคือเซตในข้อใดต่อไปนี้



1. $(B \cup A) \cap C$ 2. $(B \cap A) \cup C$ 3. $B \cap (A \cup C)$ 4. $B \cup (A \cap C)$

35. ประพจน์ " ถ้ามณีไม่เล่นฟุตบอลแล้วนิลไม่ทำการบ้าน" สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. มณีเล่นฟุตบอลหรือนิลไม่ทำการบ้าน
2. นิลทำการบ้านหรือมณีไม่เล่นฟุตบอล
3. ถ้ามณีเล่นฟุตบอลแล้วนิลทำการบ้าน
4. ถ้านิลไม่ทำการบ้านแล้วมณีไม่เล่นฟุตบอล

36. ถ้า $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. p มีค่าความจริงเป็นจริง
2. q มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. p, q มีค่าความจริงเหมือนกัน
4. p, q มีค่าความจริงต่างกัน

37. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 4 - x$ เมื่อ $x < 4$ และ $y = x - 4$ เมื่อ $x \geq 4\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. r และอินเวอร์สของ r เป็นฟังก์ชัน
2. r เป็นฟังก์ชัน แต่อินเวอร์สของ r ไม่เป็นฟังก์ชัน
3. r ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่อินเวอร์สของ r เป็นฟังก์ชัน
4. r และอินเวอร์สของ r ไม่เป็นฟังก์ชัน

38. ให้ $r = \{(x, y) \mid y = (x + 1)^3\}$ ข้อใดต่อไปนี้คืออินเวอร์สของความสัมพันธ์ r

1. $\{(x, y) \mid y = x^{\frac{1}{3}}\}$
2. $\{(x, y) \mid y = x^{\frac{1}{3}} - 1\}$
3. $\{(x, y) \mid y = x^{\frac{1}{3}} + 1\}$
4. $\{(x, y) \mid y = 3(x^{\frac{1}{3}} + 1)\}$

39. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม R เป็นเซตของจำนวนจริง

R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก

ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. $\{(x, y) \in I \times I \mid |y| = 2x\}$
2. $\{(x, y) \in I \times I \mid y = \frac{1}{xy}\}$
3. $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y^2 - 1 = x^2\}$
4. $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid x = (y - 1)^2\}$

40. ถ้า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta$ มีค่าเป็นบวก แล้วค่าของ $\sec\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{5}{3}$
3. $-\frac{3}{5}$
4. $-\frac{5}{3}$

41. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) ไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรง $x = 3$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = -4x$
3. $y^2 = 12x$
4. $y^2 = -12x$

42. ค่าของ $\left[\frac{3^{4n+3} + 3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 5
3. 7
4. 9

43. คำตอบของสมการ $(2^x)^x = 4^{(1-x)}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-1 \pm \sqrt{3}$
2. $-1 \pm \sqrt{2}$
3. $-1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริง

44. ค่า x ที่สอดคล้องสมการ $\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-5} = 1$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [4.5, 5.5)
2. [5.5, 6.5)
3. [6.5, 7.5)
4. [7.5, 8.5)

45. กำหนดให้ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 1
4. 2

46. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(3A) = 3\det A$

ข. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ 2×2 แล้ว $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

47. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)^2} = 1$

ข. $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

48. ให้ $f(x) = Ax^3 + x^2 - x + B$ เมื่อ A, B เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $f(1) = A + \frac{1}{2}$ และ $f'(1) = 4$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A + B = 1$
2. $A + B = \frac{3}{2}$
3. $A - B = 1$
4. $A - B = \frac{3}{2}$

49. ถ้า $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2}$ และ $f(2) = \frac{3}{2}$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 6
3. 9
4. 11

50. รถยนต์คันหนึ่งมีที่นั่งด้านหน้า 2 ที่ และด้านหลัง 3 ที่ ต้องการจัดคนเข้านั่งรถโดยให้คนขับรถเป็นเท่านั้นนั่งหน้า จำนวนวิธีที่จะจัดคน 5 คน(ในจำนวนนี้มี 3 คนที่ขับรถเป็น) เข้านั่งรถคือข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 18
3. 36
4. 42

51. การทดลองหนึ่ง มีอุปกรณ์เป็นเหรียญ 1 อัน และถุงใส่ลูกบอลสีแดง 1 ลูก สีขาว 1 ลูก อีก 1 ถุง การทดลองกระทำดังนี้

ขั้นที่ 1 โยนเหรียญ 1 ครั้ง

ขั้นที่ 2 ถ้าการโยนเหรียญครั้งที่ 1 ขึ้นหัวให้โยนเหรียญนั้นอีก 1 ครั้ง

ถ้าการโยนเหรียญครั้งที่ 1 ขึ้นก้อยให้หยิบลูกบอล 1 ลูกจากถุง

ให้ "ห" , "ก" แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว และ ก้อย ตามลำดับ

ให้ "ด" , "ข" แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีแดง และ สีขาว ตามลำดับ

แซมเปิลสเปซของการทดลองดังกล่าวคือข้อใดต่อไปนี้

1. S = {(ห, ห) , (ห, ก) , (ก, ห) , (ก, ก)}
2. S = {(ห, ห) , (ห, ก) , (ก, ด) , (ก, ข)}
3. S = {(ห, ด) , (ห, ข) , (ก, ห) , (ก, ก)}
4. S = {(ห, ด) , (ห, ข) , (ก, ด) , (ก, ข)}

52. ก ข และ ค ตกลงทำธุรกิจร่วมกัน ทั้ง 3 คนช่วยกันหาสถานที่ที่จะทำการเปิดสำนักงาน ก และ ข เสนอสถานที่ที่คาดว่าจะถูกเลือกเป็นสำนักงานด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน ส่วน ค เสนอสถานที่ที่คาดว่าจะถูกเลือกเป็นสำนักงานด้วยความน่าจะเป็นเป็น 2 เท่าของ ก ความน่าจะเป็นที่สถานที่ที่ ค เสนอไม่ได้รับเลือกเป็นสำนักงานมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.2 . 0.25 3. 0.5 4. 0.75

53. ราคาปิดหุ้นของบริษัท A และบริษัท B ในสัปดาห์ที่ผ่านมาปรากฏดังนี้

	A	B (หน่วย : บาท)
จันทร์	28	28
อังคาร	34	26
พุธ	18	22
พฤหัสบดี	20	24
ศุกร์	25	25

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยราคาปิดหุ้นบริษัท A เท่ากับค่าเฉลี่ยราคาปิดหุ้นบริษัท B

ข. มัธยฐานราคาปิดหุ้นบริษัท A เท่ากับมัธยฐานราคาปิดหุ้นบริษัท B

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

54. ถ้าค่าโดยสารรถประจำทางต่อวัน(บาท) ของนักเรียน 10 คน เป็นดังนี้

11 15 22 36 11 18 22 22 16 28

แล้วจำนวนเปอร์เซนต์ของนักเรียนที่ต้องจ่ายเป็นค่าโดยสารรถประจำทางสูงกว่าฐานนิยมของค่าโดยสารรถประจำทางต่อวันคือข้อใดต่อไปนี้

1. 10
2. 15
3. 20
4. 25

55. สมศรีผ่านการคัดเลือกเข้าทำงานในบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีสาขาอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่และสงขลา บริษัทได้เสนอเงินเดือนดังตารางข้างล่าง

จังหวัด	เงินเดือน(บาท)	ดัชนีราคาผู้บริโภค
กทม.	54,000	120
เชียงใหม่	49,000	90
สงขลา	52,000	110

ถ้าพิจารณาจากเงินเดือนที่ได้รับสมศรีจะเลือกทำงานในจังหวัดใดต่อไปนี้

1. กทม.
2. เชียงใหม่
3. สงขลา
4. จังหวัดใดก็ได้

56. อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์ ในขณะที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 32 องศาฟาเรนไฮต์ สมมติว่าอุณหภูมิที่วัดในมาตราองศาเซลเซียส(C) และองศา

ฟาเรนไฮต์(F) มีความสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F และ C คือข้อใดต่อไปนี้

1. $F = 32 + \frac{9}{5}C$
2. $F = 32 + 9C$
3. $F = 32 - \frac{9}{5}C$
4. $F = 32 - 9C$

ตอนที่ 3 ข้อ 1 – 6 ข้อละ 3 คะแนน

1. จงหาส่วนตัดบนแกน Y ของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(5, 2) และ B(–3,0)
2. ถ้า $4\tan\theta = 3$ แล้ว $\frac{5\sin\theta - 3\cos(\pi - \theta)}{6\cos\theta - 3\sin\theta}$ เท่ากับเท่าใด
3. กำหนดให้ $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3} = 1.732$ ค่าของ $7a^2 + 11ab - 7b^2$ เท่ากับเท่าใด (คำตอบให้ใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)
4. หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 300 ครอบครัว มีครอบครัวที่ปลูกข้าว 170 ครอบครัว ปลูกอ้อย 180 ครอบครัว และ ปลูกทั้งข้าวและอ้อย 80 ครอบครัว จงหาความน่าจะเป็นที่ครอบครัวหนึ่งในหมู่บ้านนั้นจะปลูกข้าวหรืออ้อย
5. ถ้ากราฟของ $y = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ มีเส้นสัมผัสในแนวนอนที่จุด $x \geq 0$ แล้ว x มีค่าเท่าใด
6. ความแปรปรวนของข้อมูลต่อไปนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

   44 44 45 45 46 48 48 48

$$\pm \rightarrow \varnothing \cap \cup \subset \theta \pi \infty \propto \in \notin \forall \exists \wedge \vee \leftrightarrow x \geq \leq \sim \sqrt{x}\ f'\ \frac{1}{x}$$

เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก 2541

ตอนที่ 1

1. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $5 \in \{\{3,4\},5,6\}$ แต่ $5 \notin A$

เพราะฉะนั้น $\{\{3,4\},5,6\}$ ไม่เป็นสับเซตของ A

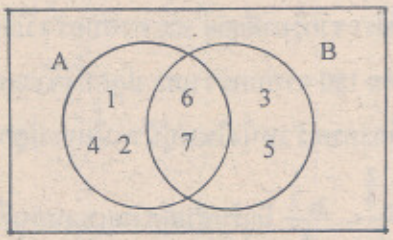
2. ตอบ 1.

แนวคิด **วิธีที่ 1.** จากโจทย์ $A - B = \{1,2,4\}$

$$B - A = \{3,5\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

เราเขียนแผนภาพเวนน์ได้เป็น



เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{6,7\} \subset \{0,1,4,6,7\}$

วิธีที่ 2. เพราะว่า $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ เพราะฉะนั้น

$$A \cap B = [(A \cup B) - (A - B)] - (B - A)$$

$$= [\{1,2,3,4,5,6,7\} - \{1,2,4\}] - \{3,5\}$$

$$= \{3,5,6,7\} - \{3,5\}$$

$$= \{6,7\} \subset \{0,1,4,6,7\}$$

3. ตอบ 4.

แนวคิด b หาร a ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 24 $\rightarrow a = b(1) + 24$ ...(1)

24 หาร b ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 12 $\rightarrow b = 24(1) + 12$ ...(2)

วิธีที่เร็วที่สุด จากสมการ (2) จะเห็นว่า 12 หาร b ลงตัว

และจากสมการ (1) จะได้ว่า 12 หาร a ลงตัวด้วย

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $24 = 12(2)$ ...(3)

จาก (1) – (3) และขั้นตอนวิธีของยุคลิดจะได้ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 12

4. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \{1, 3, 5\}$

$B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{x \mid (x - 3)(x - 1) = 0\} = \{1 , 3\}$

$C = \{x \mid x$ คือจำนวนแต้มลูกเต๋าหนึ่งลูก ที่หารด้วย 2 ไม่ลงตัว$\} = \{1 , 3 , 5\}$

$D = \{x \mid x$ คือจำนวนหัวที่ได้เมื่อโยนเหรียญ 3 เหรียญ$\} = \{0 , 1 , 2 , 3\}$

สรุป $A = C$

5. ตอบ 1.

แนวคิด คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก

จากเงื่อนไข $yx^2 = 1$ แสดงว่า $y = 0$ ไม่ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

จากเงื่อนไข $yx^2 = 1$ และ $x^2 > 0$ เพราะฉะนั้น $y = -1$ ไม่ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $r = \{(x, y) \mid yx^2 = 1\} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x^2}\}$

เพราะว่า $\frac{1}{x^2} > 0$ เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ r คือ R^+

6. ตอบ 3.

แนวคิด คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก "นำจุดบนกราฟไปแทนค่าในตัวเลือก"

$(0, 1)$ อยู่บนกราฟ แต่ $|0| - |1| = -1 \neq 1$ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 4.

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ไม่อยู่บนกราฟ แต่ $|\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}| = 1$ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

และ $\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=1$ → ตัดตัวเลือก 1

วิธีจริง สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0,1) และ (−1, 0) คือ $\frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1 \rightarrow x-y=-1$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0,−1) และ (1, 0) คือ $\frac{x}{1}+\frac{y}{-1}=1 \rightarrow x-y=1$

สรุปสมการเส้นตรงทั้งสองเส้นคือ $|x-y|=1$

7. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $g(-1)=\sqrt{-1}$ ไม่เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $(f+g)(-1)$ หาค่าไม่ได้ $(fg)(-1)$ หาค่าไม่ได้ $(\frac{h}{g})(-1)$ หาค่าไม่ได้

คำตอบคือตัวเลือก 2. $(f-h)(-1)$ หาค่าได้ $=f(-1)-h(-1)=-1+1=0$

8. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $f(x)=\begin{cases}0 & , \text{ x เป็นจำนวนอตรรกยะ}\\ \sqrt{2} & , \text{ x เป็นจำนวนตรรกยะ}\end{cases}$

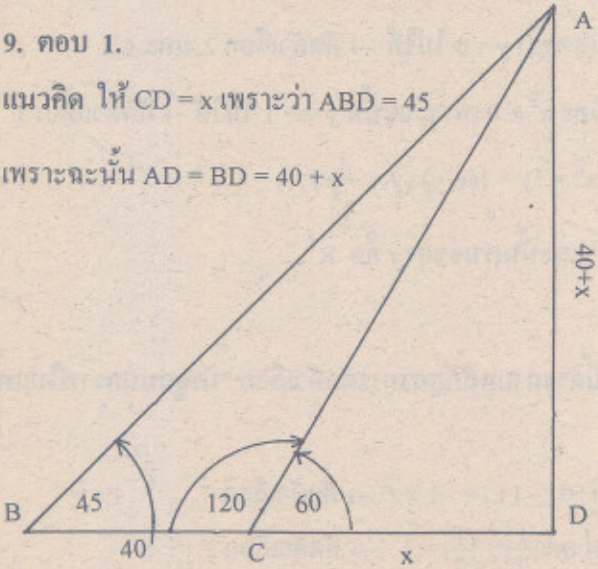
เพราะฉะนั้น $f(0)=\sqrt{2}$ และ $f(\sqrt{2})=0$

สรุปตัวเลือกที่ได้ 1 คะแนนคือ ตัวเลือก 3. $f(\sqrt{2})=0$

9. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ CD = x เพราะว่า ABD = 45

เพราะฉะนั้น AD = BD = 40 + x



$\tan ACD=\frac{AD}{CD}$

$\tan 60=\frac{40+x}{x}$

$x\tan 60 = 40 + x$

$\sqrt{3}x = 40 + x$

$(\sqrt{3} - 1)x = 40$

$$x = \frac{40}{\sqrt{3}-1} = \frac{40}{\sqrt{3}-1}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}+1)40}{3-1} = 20(1+\sqrt{3})$$

สรุป $AD = 40 + x = 40 + 20(1 + \sqrt{3}) = 20(3 + \sqrt{3})$

10. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ และ $g(x) = x$

1. $(fog)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1$
2. $(fog)(2) = f(g(2)) = f(2) = 0$
3. $(gof)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$
4. $(gof)(2) = g(f(2)) = g(0) = 0 \neq 2$

สรุปตัวเลือก 4. ผิด

11. ตอบ 3.

แนวคิด $4x^2 - 8x - 9y^2 = 32$

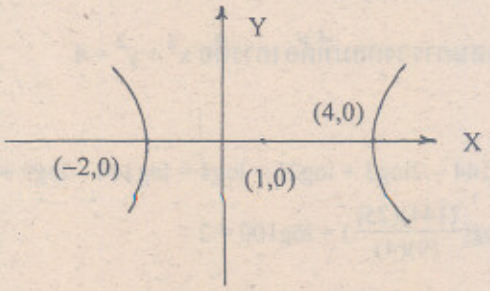
$$4(x^2 - 2x + 1) - 9y^2 = 32 + 4$$

$$4(x-1)^2 - 9y^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

ไฮเพอร์โบลามีค่า $a = 3$ จุดศูนย์กลาง $(1, 0)$

เพราะฉะนั้นจุดยอดคือ $(-2, 0)$ และ $(4, 0)$



12. ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta\cos\theta < 0$ ดังนั้น ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากโจทย์ $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{3}{16}$

เพราะว่า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta\cos\theta < 0$ และ $\sin\theta\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

สรุป $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

13. ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าโจทย์ถามสมการวงรี แต่ตัวเลือก 3. และ 4. เป็นไฮเพอร์โบลา เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จุด (x, y) ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีแกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย จะได้ $a = 4$, $b = 1$

มีสมการเป็น $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{1} = 1$ หรือ $\frac{y^2}{4^2} + \frac{x^2}{1} = 1$

$x^2 + 16y^2 = 16$ หรือ $y^2 + 16x^2 = 16$

สรุปต้องเลือกตัวเลือก 1. จึงจะได้ 1 คะแนน

14. ตอบ 3.

แนวคิด วงรีวงหนึ่งมีสมการเป็น $9x^2 + 4y^2 = 36 \rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

วงรีมีจุดศูนย์กลาง (0, 0) และ $b = 2$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 = 4$

15. ตอบ 2.

แนวคิด $\log 144 - 2\log 3 + \log 25 - \log 4 = \log 144 - \log 9 + \log 25 - \log 4$

$= \log(\frac{(144)(25)}{(9)(4)}) = \log 100 = 2$

16. ตอบ 1.

แนวคิด $\log_2(2x^2-1)=-3 \rightarrow 2x^2-1=2^{-3} \rightarrow 2x^2-1=\frac{1}{8}$

$\rightarrow 2x^2=\frac{9}{8} \rightarrow x^2=\frac{9}{16} \rightarrow x=\pm\frac{3}{4}$

สรุปเซตคำตอบของ $\log_2(2x^2-1)=-3$ คือ $\{\frac{3}{4},-\frac{3}{4}\}$ เป็นสับเซตของ $[-1,\frac{3}{4}]$

17. ตอบ 4.

แนวคิด $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq a_2b_1 - a_1b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$

ตัวอย่างเช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$ และ $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2$

$\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ -a_2 & 0 \end{vmatrix} = a_2b_1 \neq 0$ เช่น $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

สรุป ก. ผิด และ ข. ผิด

18. ตอบ 4.

แนวคิด $x+2y-z=3$

$3x+y=6$

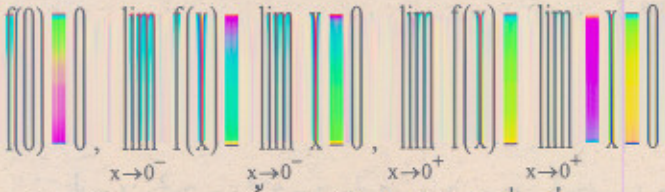
$2x+y=1$

เมตริกซ์ที่แทนระบบสมการคือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

สมมูลกับ $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ตรงกับตัวเลือก 4.

19. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x)=\begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0 \end{cases}$



สรุป $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ เพราะฉะนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \,,\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

สรุป $\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ผิด

20. ตอบ 3.

แนวคิด $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+2x+4)}{(x+2)} = \frac{12}{4} = 3$$

21. ตอบ 2.

แนวคิด $y = \frac{2x^2-1}{x} = 2x - \frac{1}{x} \to \frac{dy}{dx} = 2 + \frac{1}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \to 4 = 2 + \frac{1}{x^2} \to x^2 = \frac{1}{2} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

22. ตอบ 1.

แนวคิด $f(x) = x^3 + x^2 - x + \frac{1}{2}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (3x - 1)(x + 1)$$

$f' = 0$ เมื่อ $x = -1, \frac{1}{3}$

เพราะว่า $f'(-1) > 0$ เมื่อ $-2 < x < -1$

และ $f'(-1) < 0$ เมื่อ $-1 < x < 0$

เพราะฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

23. ตอบ 1.

แนวคิด หมายเลขโทรศัพท์ประกอบด้วยตัวเลข 7 ตัว 427XXXX

มีจำนวนเท่ากับ (10)(10)(10)(10) = 10000

24. ตอบ 3.

แนวคิด F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x) เมื่อ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

$$F(x) = \int (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})dx = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + C$$

$$F(2) - F(-1) = (\frac{16}{12} - \frac{8}{6} + C) - (\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + C) = \frac{15}{12} - \frac{9}{6} = -\frac{3}{12} = -0.25$$

25. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

เพราะฉะนั้น $P(E_1 \cap E_2) - P(E_1) = P(E_2) - P(E_1 \cup E_2)$ ดังนั้น ก ถูก

เพราะว่า $E_1 = (E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2')$ และ $(E_1 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2') = \varnothing$

เพราะฉะนั้น $P(E_1) = P((E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2'))$

$$= P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2') - P((E_1 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2'))$$

$$= P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2')$$

ดังนั้น ข ถูก

26. ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนวิธีที่สมศรีจะบริจาคเครื่องประดับ $= \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$

27. ตอบ 1.

แนวคิด

	คณิตศาสตร์	$z_{\text{คณิตศาสตร์}}$	ภาษาอังกฤษ	$z_{\text{ภาษาอังกฤษ}}$	$z_{\text{รวม}}$
ก	75	$\frac{75-75}{10} = 0$	80	$\frac{80-75}{15} = 0.33$	0.33
ข	80	$\frac{80-75}{10} = 0.5$	60	$\frac{60-75}{15} = -1$	−0.5
ค	70	$\frac{70-75}{10} = -0.5$	85	$\frac{85-75}{15} = 0.67$	0.17

สรุปลำดับค่ามาตรฐานรวมในการสอบเรียงจากมากไปหาน้อยคือ ก, ค, ข

28. ตอบ 4.

แนวคิด

นักเรียนแต่ละคนในห้องนี้กำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง→

สำหรับนักเรียนบางคนในห้องนี้กำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง

มีนักเรียนในห้องนี้กำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง→

สำหรับนักเรียนในห้องนี้ บางคนกำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง

มีนักเรียนในห้องนี้อย่างน้อยหนึ่งคนกำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง→

สำหรับนักเรียนในห้องนี้ บางคนกำลังอ่านหนังสือ เป็นจริง

29. ตอบ 4.

แนวคิด $x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+12}}{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น ก. $\exists x(x^2 - x - 3 = 0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ผิด

$x^2 - x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น ข. $\exists x(x^2 - x + 1 = 0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ผิด

30. ตอบ 1.

แนวคิด ก. ถูก

เพราะว่า $|a| = |a + b - b| = |(a + b) + (-b)| \leq |(a + b)| + |(-b)| = |(a + b)| + |b|$

เพราะฉะนั้น $|a| - |b| \leq |a + b|$

ข. ถูก $a \leq b < 0 \rightarrow -a \geq -b > 0$

$c < d < 0 \rightarrow -c > -d > 0$

$(-a)(-c) > (-b)(-d) > 0$

$ac > bd > 0$

เพราะฉะนั้น ข. ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a \leq b < 0$ และ $c < d < 0$ แล้ว $ac > bd$ ถูก

ตอนที่ 2

31. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามที่ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก "เซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใด" แทนค่า $x = -2$ $\quad \frac{(-2-1)(-4-1)}{4-1} = 5 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = -2$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{(\frac{1}{2}-1)(1-1)}{\frac{1}{4}-1} = 0 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

$\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ $\quad$ และ $x \neq 1$

$\frac{(2x-1)}{(x+1)} \geq 0$ $\quad$ และ $x \neq 1$

สรุป เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$ คือ $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$

32. ตอบ 1.

แนวคิด 1. ผิด ตัวอย่างเช่น $a = 0$

หมายเหตุ ในการสอบจริงอย่าเสียเวลากับข้อ 2 – 4 เลย

2. ถูก เพราะว่า $a < b \leq -1 \rightarrow a\,a^2 < b\,a^2 < b \leq -1 \rightarrow a^3 < b$

3. ถูกต้อง ท่องจำไว้เลย ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

4. ถูกต้อง เพราะว่า $0 < a < 1 \rightarrow a^2 < a \rightarrow -a < -a^2$

33. ตอบ 4.

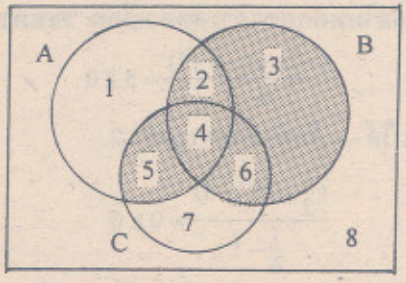
แนวคิด $A = (0, \infty)$, $B = (2, \infty)$, $C = (-1, 3]$, $A' = (-\infty, 0]$

$A' \cup B = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$

$C - (A' \cup B) = (-1, 3] - ((-\infty, 0] \cup (2, \infty)) = [0, 2)$

34. ตอบ 4.

แนวคิด เติมสมาชิกในแผนภาพเวนน์



เพราะฉะนั้น ส่วนแรเงา = {2, 3, 4, 5, 6}

1. $(B \cup A) \cap C = \{4, 5, 6\}$ → ตัดตัวเลือก 1.
2. $(B \cap A) \cup C = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ → ตัดตัวเลือก 2.
3. $B \cap (A \cup C) = \{2, 4, 6\}$ → ตัดตัวเลือก 3.
4. $B \cup (A \cap C) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ → เลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

35. ตอบ 1.

แนวคิด p = มณีเล่นฟุตบอล

q = นิลทำการบ้าน

ถ้ามณีไม่เล่นฟุตบอลแล้วนิลไม่ทำการบ้าน = $\sim p \rightarrow \sim q = q \rightarrow p = \sim q \vee p$

$= p \vee \sim q$ = มณีเล่นฟุตบอลหรือนิลไม่ทำการบ้าน

36. ตอบ 4.

แนวคิด $p \vee q \rightarrow p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \vee q$ เป็นจริง และ $p \wedge q$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p = T \rightarrow q = F$

$p = F \rightarrow q = T$

สรุป p, q มีค่าความจริงต่างกัน

37. ตอบ 2.

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 4 - x$ เมื่อ $x < 4$ และ $y = x - 4$ เมื่อ $x \geq 4\}$

$$r(x) = \begin{cases} 4 - x & , x < 4 \\ x - 4 & , x \geq 4 \end{cases} = |x - 4|$$

$r = \{(3, 1), (5, 1), \ldots\}$

$r^{-1} = \{(1, 3), (1, 5), \ldots\}$

เพราะฉะนั้น r เป็นฟังก์ชัน แต่อินเวอร์สของ r ไม่เป็นฟังก์ชัน

38. ตอบ 2.

แนวคิด $r = \{(x, y) \mid y = (x + 1)^3\}$

$$y = (x + 1)^3$$

$$x + 1 = y^{\frac{1}{3}}$$

$$x = y^{\frac{1}{3}} - 1$$

เพราะฉะนั้น $r^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}} - 1$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(x, y) \mid y = x^{\frac{1}{3}} - 1\}$

39. ตอบ 3.

แนวคิด 1. $\{(x, y) \in I \times I \mid |y| = 2x\} = \{(1,2), (1,-2), \ldots\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

2. $\{(x, y) \in I \times I \mid y = \frac{1}{xy}\} = \{(1,1), (1,-1), \ldots\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

3. $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y^2 - 1 = x^2\}$

$$y^2 - 1 = x^2 \rightarrow y^2 = x^2 + 1 \rightarrow y = \sqrt{x^2 + 1}$$

เพราะฉะนั้น $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid y^2 - 1 = x^2\}$ เป็นฟังก์ชัน

4. $\{(x, y) \in R \times R^+ \mid x = (y - 1)^2\} = \{(1, 0), (1,2), \ldots\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

40. ตอบ 4.

แนวคิด มาฝึกหัดการตัดตัวเลือกกันบ้าง

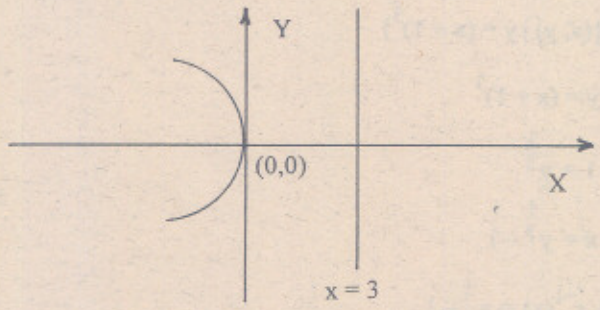
$\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta > 0 \rightarrow \theta$ อยู่ควอดรันท์ 3 $\rightarrow \sec\theta < 0 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1., 2.

$|\sec\theta| \geq 1 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5} \rightarrow \sec\theta = -\frac{5}{3}$

41. ตอบ 4.

แนวคิด พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0, 0) ไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรง $x = 3$



จากรูปเป็นพาราโบลาเปิดด้านซ้าย $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะฉะนั้น $c = -3$ และพาราโบลามีสมการเป็น $y^2 = 4cx = -12x$

42. ตอบ 4.

แนวคิด ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกอีกแล้วโดยการแทนค่า $n = 1$ จะได้

$$\left[\frac{3^{4n+3}+3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^7+3^6}{(3^4)(4)}\right]^{\frac{1}{1}} = \frac{3^3+3^2}{(4)} = \frac{27+9}{4} = 9$$

วิธีจริง $\left[\frac{3^{4n+3}+3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{27(3^{4n})+9(3^{4n})}{9(3^{2n})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{36(3^{4n})}{9(3^{2n})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{2n}\right]^{\frac{1}{n}} = 9$

43. ตอบ 1.

แนวคิด $(2^x)^x = 4^{(1-x)} = 2^{2(1-x)}$

$$2^{x^2} = 2^{2(1-x)}$$

$$x^2 = 2(1-x)$$

$$x^2 + 2x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

44. ตอบ 3.

แนวคิด

$$\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-5} = 1 \quad \text{....(1)}$$

$$(\sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-5})(\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5}) = \sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5}$$

$$(3x+4) - (3x-5) = \sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5}$$

$$9 = \sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5}$$

$$\sqrt{3x+4} + \sqrt{3x-5} = 9 \quad \text{....(2)}$$

(1) + (2) ;

$$2\sqrt{3x+4} = 10$$

$$\sqrt{3x+4} = 5$$

$$3x + 4 = 25$$

$$x = 7 \in [6.5, 7.5)$$

45. ตอบ 2.

แนวคิด $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$2x + 3y = 2 \quad \text{...(1)}$$

$$x + 2y = 3 \quad \text{...(2)}$$

(1) – (2) ; $x + y = -1$

46 ตอบ 4.

แนวคิด ก. ผิด ที่ถูกต้องเป็น $\det(3A) = 3^2 \det A$

ข. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$(A-B)(A+B) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -13 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 18 \\ 6 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \neq (A-B)(A+B)$$

47 ตอบ 3.

แนวคิด ก. ผิด เพราะว่า

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)}{(x-2)}$$ หาค่าไม่ได้

ข. ถูก เพราะว่า $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x+2)} = \frac{1}{4}$

48 ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = Ax^3 + x^2 - x + B$, $f'(x) = 3Ax^2 + 2x - 1$

$$4 = f'(1) = 3A + 1 \rightarrow A = 1$$

$$f(1) = A + \frac{1}{2} \rightarrow A + B = A + \frac{1}{2} \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $A + B = \frac{3}{2}$

49 ตอบ 3.

แนวคิด $f'(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2} = 2x - 3 + x^{-2}$

$$f(x) = \int f(x)dx = \int (2x - 3 + x^{-2})dx = x^2 - 3x - x^{-1} + C$$

$$f(2) = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = 4 - 6 - \frac{1}{2} + C \rightarrow C = 4$$

$$f(x) = x^2 - 3x - x^{-1} + 4$$

$$f(-1) = 1 + 3 + 1 + 4 = 9$$

50. ตอบ 3.

แนวคิด **ขั้นที่ 1** เลือก 2 คนจาก 3 คนที่ขับรถเป็นไปนั่งหน้าทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

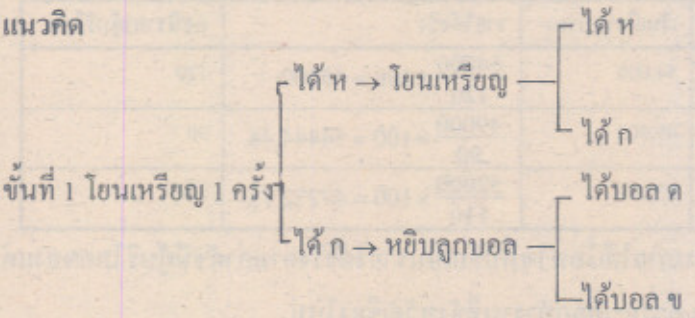
ขั้นที่ 2 สลับที่ระหว่าง 2 คนที่นั่งหน้าทำได้ 2! วิธี

ขั้นที่ 3 จัด 3 คนที่เหลือทำได้ 3! = 6 วิธี

รวมวิธีทั้งหมด = (3)(2)(6) = 36 วิธี

51. ตอบ 2.

แนวคิด



สรุป S = {(ห, ห) , (ห, ก) , (ก, ค) , (ก, ข)}

52. ตอบ 3.

แนวคิด ความน่าจะเป็นสถานที่ที่ ก เสนอจะถูกเลือก = w

ความน่าจะเป็นสถานที่ที่ ข เสนอจะถูกเลือก = w

ความน่าจะเป็นสถานที่ที่ ค เสนอจะถูกเลือก = 2w

เพราะว่า w + w + 2w = 1 เพราะฉะนั้น $w = \frac{1}{4}$

สรุป ความน่าจะเป็นสถานที่ที่ ค เสนอจะไม่ถูกเลือก = $1 - 2w = 1 - 2(\frac{1}{4}) = 0.5$

53. ตอบ 1.

แนวคิด ค่าเฉลี่ยราคาปิดหุ้นบริษัท A = (28+34+18+20+25)/5 = 125/5 = 25

ค่าเฉลี่ยราคาปิดหุ้นบริษัท B = (28+26+22+24+25)/5 = 125/5 = 25

เพราะฉะนั้น ก ถูก

มัธยฐานราคาปิดหุ้นบริษัท A : 18,20,25,28,34 เท่ากับ 25

มัธยฐานราคาปิดหุ้นบริษัท B : 22,24,25,26,28 เท่ากับ 25 เพราะฉะนั้น ข ถูก

54 ตอบ 3.

แนวคิด เรียงลำดับข้อมูล 11, 11, 15, 16, 22, 22, 22, 28, 36

ฐานนิยม = 22 มีคนคะแนนสูงว่า 22 คะแนนอยู่ 2 คนจาก 10 คน คิดเป็น 20%

55 ตอบ สรุปคำตอบไม่ได้อีกแล้ว

แนวคิด

จังหวัด	เงินเดือน(บาท)	รายได้จริง	ดัชนีราคาผู้บริโภค
กทม.	54,000	$\frac{54000}{120}\times 100 = 45000$	120
เชียงใหม่	49,000	$\frac{49000}{90}\times 100 = 54444.44$	90
สงขลา	52,000	$\frac{52000}{110}\times 100 = 47272.73$	110

เมื่อคิดเงินเดือนภายใต้เงื่อนไขที่ปรับเป็นรายได้จริงตามค่าดัชนีผู้บริโภคของแต่ละจังหวัดแล้ว ควรจะเลือกทำงานที่จังหวัดเชียงใหม่

แต่จากโจทย์บอกให้พิจารณาจากเงินเดือนที่ได้รับสมศรีควรจะเลือกทำงานในจังหวัด กทม. เพราะว่าได้เงินเดือนมากที่สุด

หมายเหตุ โจทย์ควรจะบอกว่าให้เทียบเงินเดือนที่ปรับค่าแล้วหรือไม่

56 ตอบ 1.

แนวคิด ส่งท้ายด้วยข้อสอบที่ตรงกับหลักสูตรตัดตัวเลือก

จากโจทย์อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์ C = 100 แล้ว F = 212 แทนค่า C = 100 แต่ละตัวเลือกจะได้ค่า F

1. 212 2. 932 3. – 148 4. – 868 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. 3. และ 4.

วิธีจริง สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0, 32) และ (100, 212) คือ

$$\frac{F-32}{C-0}=\frac{212-32}{100-0}\rightarrow\frac{F-32}{C}=\frac{212-32}{100-0}=\frac{180}{100}=\frac{9}{5}\rightarrow F=32+\frac{9}{5}C$$

ตอนที่ 3

1. ตอบ 0.75

แนวคิด สมการเส้นตรงคือ $\frac{y-2}{x-5}=\frac{0-2}{-3-5}=\frac{1}{4}$

เมื่อ $x=0$ จะได้ $\frac{y-2}{0-5}=\frac{1}{4}\rightarrow y=2-\frac{5}{4}=2-1.25=0.75$

เพราะฉะนั้นส่วนตัดบนแกน Y คือ 0.75

2. ตอบ 1.8

แนวคิด $4\tan\theta=3\rightarrow\tan\theta=\frac{3}{4}$

$$\frac{5\sin\theta-3\cos(\pi-\theta)}{6\cos\theta-3\sin\theta}=\frac{5\sin\theta+3\cos\theta}{6\cos\theta-3\sin\theta}=\frac{5\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+3\frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{6\frac{\cos\theta}{\cos\theta}-3\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{5\tan\theta+3}{6-3\tan\theta}$$

$$=\frac{5(\frac{3}{4})+3}{6-3(\frac{3}{4})}=\frac{15+12}{24-9}=\frac{27}{15}=\frac{9}{5}=1.8$$

3. ตอบ 107.99

แนวคิด $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

$$b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$$

$7a^2+11ab-7b^2=7(a^2-b^2)+11ab=7(a-b)(a+b)+11ab$

$=7(2\sqrt{3})(4)+11(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=56\sqrt{3}+11=56(1.732)+11=107.99$

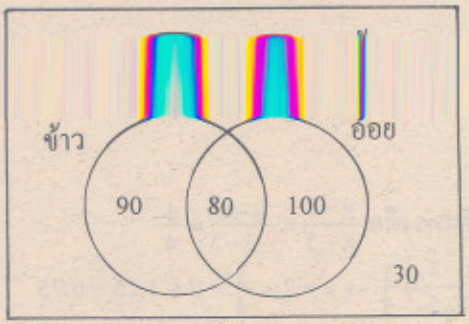
4. ตอบ 0.9

แนวคิด หมู่บ้านแห่งหนึ่งมีประชากรอาศัยอยู่ 300 ครอบครัว

ครอบครัวที่ปลูกข้าว 170 ครอบครัว

ครอบครัวที่ปลูกอ้อย 180 ครอบครัว

ครอบครัวปลูกทั้งข้าวและอ้อย 80 ครอบครัว สรุปแผนภาพเวนน์คือ



$P(\text{ครอบครัวหนึ่งปลูกข้าวหรืออ้อย}) = \frac{90+80+100}{300} = \frac{270}{300} = 0.9$

5. ตอบ 0.5

แนวคิด $y = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4} \rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{4}$

กราฟของ $y = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ มีเส้นสัมผัสในแนวนอนที่จุดซึ่ง $\frac{dy}{dx} = x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{4} = 0$

$x^{\frac{4}{3}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{4} = 0 \rightarrow 4x^{\frac{4}{3}} - x^{-\frac{2}{3}} = 0 \rightarrow 4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

กราฟของ $y = \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7} - \frac{3x^{\frac{1}{3}}}{4}$ มีเส้นสัมผัสในแนวนอนที่จุด $x = \frac{1}{2}$

6. ตอบ 2.75

แนวคิด เพราะว่าลบข้อมูลทุกตัวด้วย 45 ความแปรปรวนจะเท่าเดิม

เพราะฉะนั้น ความแปรปรวนของข้อมูล 44,44,45,45,46,48,48,48

= ความแปรปรวนของข้อมูล $-1,-1,0,0,1,3,3,3$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i^2}{8} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}\right)^2 = \frac{1+1+0+0+1+9+9+9}{8} - \left(\frac{-1-1+0+0+1+3+3+3}{8}\right)^2$$

$$= \frac{30}{8} - 1 = \frac{22}{8} = 2.75$$

$$\varnothing \pm \rightarrow \cap \cup \subset \theta \pi \infty \not\subset \in \notin \forall \wedge \vee \leftrightarrow \times \geq \leq \sim \sqrt{x}\ f'\ \frac{1}{x} \exists$$

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2540 (สอบแข่งขันรอบที่ 1) วิชาคณิตศาสตร์

สอบวันเสาร์ ที่ 21 มิถุนายน 2540 เวลา 09.00 – 12.00 น.

ตอนที่ 1 (ชนิดเลือกคำตอบมี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน)

1. ถ้า $30! = a \times 10^{k}$ โดยที่ a , k เป็นจำนวนเต็ม และ 5 หาร a ไม่ลงตัว แล้ว k มีค่าเท่าใด

   (1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13

2. กำหนดให้ $r_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^k - \left(-\frac{b}{a}\right)^k\right]$ และ $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} + 1$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริงบวก และ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ r_4 มีค่าเท่าใด

   (1) 3 (2) 13 (3) 23 (4) 43

3. จำนวนเต็มบวกที่หาร 2540 ลงตัวมีกี่จำนวน

   (1) 10 (2) 11 (3) 12 (4) 13

4. กำหนดให้

   $(1 + x)(1 + \frac{x}{2})(1 + \frac{x}{3})...(1 + \frac{x}{y}) = (1 + y)(1 + \frac{y}{2})(1 + \frac{y}{3})...(1 + \frac{y}{x})$

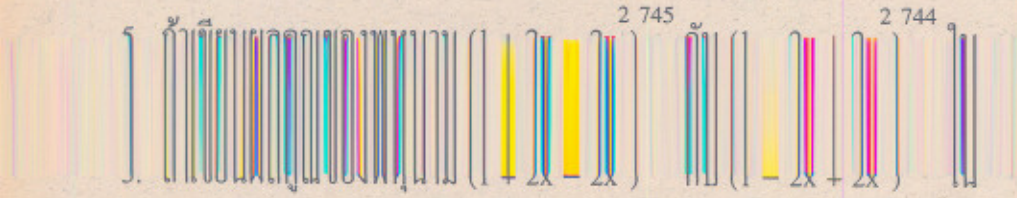
   โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   (1) ค่าของ x และ y ต้องมากกว่า 31

   (2) ค่าของ x และ y ต้องน้อยกว่า 13

   (3) ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ สอดคล้องสมการข้างต้น

   (4) x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกใดก็ได้



รูปทั่วไปของพหุนามแล้วผลบวกของสัมประสิทธิ์ของพหุนามนี้มีค่าเท่าใด

(1) -4 (2) 1 (3) 2 (4) $(2\times745) + (2\times744)$

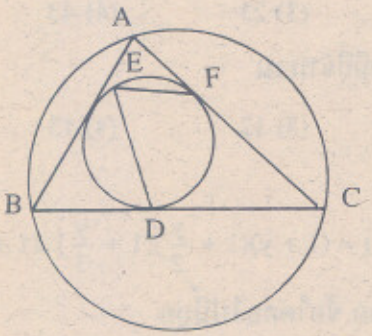
6. กำหนดให้ $f(x) = x^2\cos + \tan x^2 + e^{\sin x}$ และ $f(x) = g(x) + h(x)$ โดยที่ $g(x) = g(-x)$ และ $h(-x) = -h(x)$ จะได้ $h(x)$ มีค่าเท่าใด

(1) $e^{\sin x}$ (2) $\sin x\, e^{(\sin x)^2}$

(3) $\frac{1}{2}(e^{\sin x} - e^{-\sin x})$ (4) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} + x\tan x^2$

7. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมี AB = CD E, F, G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD BC และ AC ตามลำดับ ถ้า $B\hat{A}C = 85^\circ$ และ $A\hat{C}D = 45^\circ$ จะได้ $G\hat{F}E$ มีค่าเท่าใด

(1) 15° (2) 20° (3) 25° (4) 30°

8. 

จากรูป ถ้า AB = 3 หน่วย และ $D\hat{E}F = 75^\circ$ แล้วรัศมีของวงกลมใหญ่เป็นเท่าใด

(1) 3 หน่วย

(2) 4 หน่วย

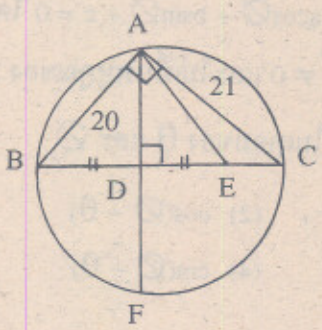
(3) 5 หน่วย

(4) 6 หน่วย

9. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 10 หน่วย สูง 6 หน่วย และมุมทั้งสามเป็นมุมแหลม รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งบรรจุในสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่เท่าใด

(1) 15 ตารางหน่วย (2) 20.5 ตารางหน่วย

(3) 25 ตารางหน่วย (4) 27.5 ตารางหน่วย

10. 

จากรูป BD = DE

รัศมีของวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เป็นเท่าใด

(1) 9.5

(2) 10

(3) 10.5

(4) 14.5

11. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสล้อมรอบวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (1, 2) ด้าน AB , BC และ AD มีสมการเป็น $3x - 4y - 10 = 0$, $4x + 3y - 25 = 0$ และ $ax + by + c = 0$ ตามลำดับ จะได้ $ab + bc + ca$ มีค่าเท่าใด (a, b, c ไม่มีตัวประกอบร่วม)

(1) 47 (2) 54 (3) 82 (4) 117

12. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ และ $A \neq B$ ถ้า $A^3 = B^3$ และ $A^2B = B^2A$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

(1) $A^2 + B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (2) $A^2 + B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

(3) $A^2 - B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน (4) $A^2 - B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

13. กำหนดให้ $\log_a b + 4\log_b a = 5$, $a^2 + b = 272$ และ $a \neq b$ ab มีค่าเท่าใด

(1) 789 (2) 1024 (3) 1235 (4) 1416

14. ถ้า $5\tan A = \tan(A + B)$ จะได้ $\frac{\sin(2A+B)}{\sin B}$ มีค่าเท่าใด

(1) $\frac{5}{3}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{3}$ (4) $\frac{3}{2}$

15. ถ้า $a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$ และ $a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0$ โดยที่ a, b, c ไม่เท่ากับ 0 และ $\varnothing - \theta \neq 0$ และไม่เป็นพหูคูณของ 2π แล้ว $\frac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ θ และ $\varnothing$

(1) $\sin(\varnothing - \theta)$ (2) $\cos(\varnothing - \theta)$

(3) $\tan(\varnothing - \theta)$ (4) $\cot(\varnothing - \theta)$

ตอนที่ 2 (ชนิดเติมคำตอบมี 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน)

1. กำหนดให้ สำหรับฟังก์ชัน h ใดๆ $h^n(x) = \underbrace{h(h(h(\ldots h(x))))\ldots)}_{n \text{ times}}$

ถ้า $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ และ $f^{-n}(x) = (f^{-1})^n(x)$ แล้ว $f^{-1997}(2540)$ มีค่าเท่าใด

2. จำนวนจริง a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 + px^2 + 3x - 10 = 0$

ถ้า $c - b = b - a > 0$ จะได้ p มีค่าเท่าใด

3. กำหนดให้ $A = \{ 3(xy + yz + zx) \mid x, y, z$ เป็นจำนวนจริงบวกที่น้อยกว่า 1 และ $x + y + z = 2 \}$ ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของ A มีค่าเท่าใด

4. จำนวนเต็ม $x \neq 0$ ที่ทำให้ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ มีค่าเท่าใด

5. ค่า x ซึ่งสอดคล้องสมการ

$$\sqrt{2ab + 2ax + 2bx - a^2 - b^2 - x^2} = \sqrt{ax - a^2} + \sqrt{bx - b^2}$$

เมื่อ $a > 0$, $b > 0$ มีค่าเท่าใด

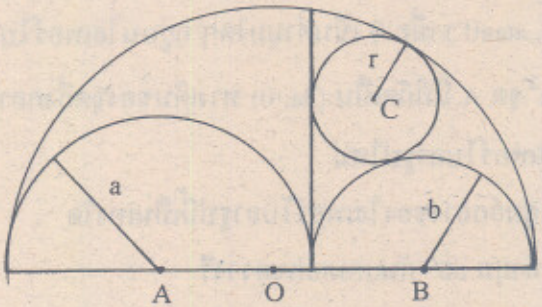
6. ถ้า $x = \sqrt{2} - 1$ แล้ว $1 + 6x + 3x^2 + x^6 - 2x^7 - 2x^8 + 2x^9 + x^{10}$ มีค่าเท่าใด

7. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $x + y + z = a$ และ $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$ แล้ว $y \leq ka$ ค่า k ที่น้อยที่สุดเป็นเท่าใด

8. กำหนดให้ r และ s เป็นเลขโดดในหลักสิบและหลักหน่วยของ $7^{14^{14}}$ จะได้ r และ s คือเลขใด

9. กำหนดให้ $m + (m + 1) + (m + 2) + \ldots + (m + k) = 1000$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็มบวก ค่า m ที่น้อยที่สุดเป็นเท่าใด และ k ที่สอดคล้องกับ m นั้นเป็นเท่าใด

10.



จากรูป A, O, B เป็นจุดศูนย์กลางของครึ่งวงกลม และ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม r มีค่าเท่าใดในเทอมของ a และ b

11. กำหนดให้ $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ และ A, B, C, D, E, F เป็นโคแฟคเตอร์ของสมาชิก a, b, c, d, e และ f ตามลำดับ ถ้า $\det P = k \neq 0$ แล้ว $DF - E^2$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ k และ a

12. กำหนดให้ $2\sin x\cos y = \cos^2 x - \cos^2 y$ และ $2\cos x\sin y = 1.5$ โดยที่ $0 \leq x \leq \pi$ และ $0 \leq y \leq \pi$ $x - y$ มีค่าเท่าใด

13. O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมรัศมี r A เป็นจุดภายในวงกลม OA = a

หน่วย $\overline{PQ}$ เป็นคอร์ดของวงกลมผ่านจุด A ถ้า $A\hat{O}P = 2\alpha$ และ $A\hat{O}Q = 2\beta$ จะได้ $\tan\alpha\tan\beta$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ r และ a

14. เส้นตรง $y = x + k$ $(k > 0)$ ตัดพาราโบลา $y = x^2$ ที่จุด A และ B ถ้า $A\hat{O}B = 120°$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด k มีค่าเท่าใด

15. วงกลม c_1 และ c_2 มีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 4$ และ $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ ตามลำดับ วงกลม c_3 มีศูนย์กลางที่จุด $P(x_0, y_0)$ รัศมี r และสัมผัสภายนอกวงกลม c_1 และ c_2 x_0 มีค่าเท่าใดในเทอมของ r

16. จุด $P(a\sec\theta, a\tan\theta)$ เมื่อ θ เป็นค่ามุมใดๆ อยู่บนไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = a^2$ จุด A มีพิกัดเป็น (3a, 0) ทางเดินของจุดกึ่งกลางของ $\overline{AP}$ ทำให้เกิดไฮเพอร์โบลารูปใหม่
พิกัดของจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลารูปนี้เป็นเท่าใด

17. เส้นตรง ℓ ทำมุม 60° กับแกนเอกของวงรี $3x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 7 = 0$ ที่จุดศูนย์กลางของวงรี และตัดวงรีที่จุด A และ B $\overline{AB}$ ยาวเท่าใด

18. กำหนดให้ $\log_8 9 = a$ และ $\log_2 5 = b$ จะได้ $\dfrac{5^{\log_{25}(2b+2)^2}}{\log 15}$ มีค่าเท่าใด

19. ผลคูณของรากทั้งหมดของสมการ $\sqrt[3]{2-\log x} + \sqrt[3]{1-2\log x} + \sqrt[3]{6+3\log x} = 0$ มีค่าเท่าใด

20. กำหนดให้ $p = 2^{x+2} - 3\cdot 4^x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง
ค่ามากที่สุดของ p เป็นเท่าใด

เฉลยข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์

การแข่งขันคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์โอลิมปิกแห่งประเทศไทย

ประจำปี พ.ศ. 2540 (สอบแข่งขันรอบที่ 1)

ตอนที่ 1

1. ตอบ (1)

แนวคิด $30! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots29\cdot30 = (2\cdot4\cdot6\cdot\ldots28\cdot30)\cdot(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{15}(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots15)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{15}(2\cdot4\cdot6\cdot\ldots12\cdot14)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots13\cdot15)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{15}\cdot2^{7}(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots7)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots13\cdot15)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{15}\cdot2^{7}\cdot(2\cdot4\cdot6)(1\cdot3\cdot5\cdot7)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots13\cdot15)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{15}\cdot2^{7}\cdot2^{3}\cdot(1\cdot2\cdot3)(1\cdot3\cdot5\cdot7)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots13\cdot15)(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$= 2^{26}(1\cdot3)(1\cdot3\cdot5\cdot7)\ldots(1\cdot3\cdot5\cdot\ldots29)$

$30! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots29\cdot30$

$= (5\cdot10\cdot15\cdot20\cdot25\cdot30)\cdot(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot\ldots29)$

$= 5^{6}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot\ldots29)$

$= 5^{7}(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6)(1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot11\cdot\ldots29)$

สรุป 30! มีตัวประกอบเป็นเลข 2 อยู่ 26 ตัว

30! มีตัวประกอบเป็นเลข 5 อยู่ 7 ตัว

ดังนั้น 30! มีตัวประกอบเป็นเลข 10 อยู่ 7 ตัว

สรุป $30! = a \times 10^{7}$ โดยที่ a ไม่มีตัวประกอบของ 5

หมายเหตุ กรณีทั่วไปของคำถามแบบนี้อ่านได้จาก **คณิตศาสตร์ปรนัย**

เล่มที่ 15 ซึ่งสามารถตอบได้ว่า 30! ลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว

100! ลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว

2541! ลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว

แม้แต่ 10000000! ก็ยังสามารถตอบได้ว่าลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว ตัวอย่างเช่น

30! ลงท้ายด้วย 0 เป็นจำนวนเท่ากับ $= \left[\frac{30}{5}\right]+\left[\frac{6}{5}\right] = 6 + 1 = 7$

จะได้ว่า 30! ลงท้ายด้วย 0 จำนวน 7 ตัว

2. ตอบ (1)

แนวคิด วิธีที่ 1. $(\frac{a}{b})^4 - (-\frac{b}{a})^4 = (\frac{a}{b})^4 - (\frac{b}{a})^4$

$$= \left[(\frac{a}{b})^2+(\frac{b}{a})^2\right]\left[(\frac{a}{b})^2-(\frac{b}{a})^2\right] = \left[(\frac{a}{b})^2+(\frac{b}{a})^2\right]\left[\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right]$$

เพราะว่า $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} + 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = 1$

$$(\frac{a}{b})^2 - 2 + (\frac{b}{a})^2 = 1$$

$$(\frac{a^2}{b})^2 + (\frac{b}{a})^2 = 3$$

$$(\frac{a}{b})^2 + 2 + (\frac{b}{a})^2 = 5$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2 = 5$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} = \sqrt{5}$$

สรุป $(\frac{a}{b})^4 - (-\frac{b}{a})^4 = [\,3\,][\,\sqrt{5}\,][\,1\,] = 3\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้น $r_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{a}{b})^4 - (-\frac{b}{a})^4\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}(3\sqrt{5}) = 3$

วิธีที่ 2. หาค่า $\frac{a}{b}$ ก่อนโดยการแทนค่า $x = \frac{a}{b}$ จะได้ $x > 0$

จาก $\frac{a}{b} = \frac{b}{a} + 1 \longrightarrow x = \frac{1}{x} + 1 \longrightarrow x^2 - x - 1 = 0$

$$\longrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{1-4(1)(-1)}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

และ $\frac{1}{x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ดังนั้น $r_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{a}{b})^4 - (-\frac{b}{a})^4\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[x^4 - (\frac{1}{x})^4\right]$

$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^4 - (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^4\right] = \frac{1}{16\sqrt{5}}\left[(1+\sqrt{5})^4 - (\sqrt{5}-1)^4\right]$

$= \frac{1}{16\sqrt{5}}\left[(1+2\sqrt{5}+5)^2 - (5-2\sqrt{5}+1)^2\right] = \frac{1}{16\sqrt{5}}\left[(6+2\sqrt{5})^2 - (6-2\sqrt{5})^2\right]$

$= \frac{1}{16\sqrt{5}}[(36 + 24\sqrt{5} + 20) - (36 - 24\sqrt{5} + 20)] = \frac{48\sqrt{5}}{16\sqrt{5}} = 3$

3. ตอบ (3)

แนวคิด แยกตัวประกอบ $2540 = 2\cdot2\cdot5\cdot127 = 2^2\cdot5^1\cdot127^1$

จำนวนเต็มบวกที่หาร 2540 จะเกิดจากการคูณของ 2, 5, 127 ดังนี้

ขั้นที่ 1. ตัวประกอบของ 2 เลือกได้ 3 แบบ คือ 2^0 , 2^1 , 2^2

ขั้นที่ 2. ตัวประกอบของ 5 เลือกได้ 2 แบบ คือ 5^0 , 5^1

ขั้นที่ 3. ตัวประกอบของ 127 เลือกได้ 2 แบบ คือ 127^0 , 127^1

สรุปตัวประกอบที่หาร 2540 ลงตัวมี (3) (2) (2) = 12 ตัว

หมายเหตุ กรณีทั่วไป $n = P_1^{m1}\cdot P_2^{m2}\cdot P_3^{m3}\cdot\ldots P_k^{mk}$

$P_1, P_2, \ldots P_k$ เป็นจำนวนเฉพาะ จำนวนตัวเลขจำนวนเต็มบวกที่หาร n ลงตัวมี $(m_1 + 1)(m_2 + 1) \ldots (m_k + 1)$ ตัว

4. ตอบ (4)

แนวคิด $(1 + x)(1 + \frac{x}{2})(1 + \frac{x}{3}) \ldots (1 + \frac{x}{y})$

$= \frac{(1+x)}{1}\cdot\frac{(2+x)}{2}\cdot\frac{(3+x)}{3}\cdots\frac{(y+x)}{y}$

$= \frac{(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(y+x)}{y!}$

$= \frac{(1\cdot2\cdot3\ldots x)(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(y+x)}{(1\cdot2\cdot3\ldots x)y!} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$

$$(1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x}) = \frac{(1+y)}{1}\cdot\frac{(2+y)}{2}\cdot\frac{(3+y)}{3}\cdot\ldots\frac{(x+y)}{x}$$

$$= \frac{(1+y)(2+y)(3+y)\ldots(x+y)}{x!}$$

$$= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\ldots y)(1+y)(2+y)(3+y)\ldots(x+y)}{(1\cdot 2\cdot 3\ldots y)x!} = \frac{(x+y)!}{x!y!}$$

เพราะฉะนั้นทุกค่า x , y จะได้

$$(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y}) = (1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x})$$

สรุป x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกใดก็ได้

การตัดตัวเลือก เมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$ จะได้ว่า

$(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y})$ จะเหลือพจน์ $(1+1) = 2$ เท่านั้น

และ $(1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x})$ จะเหลือพจน์ $(1+1) = 2$ เท่านั้น

ดังนั้นตัดตัวเลือก (1) และ (3) ทิ้งได้ ต่อไปเมื่อแทนค่า $x = 13$ และ $y = 13$ ก็จะได้เท่ากันอีก ดังนั้นต้องตัดตัวเลือก (2) ทิ้งได้

5. ตอบ (2)

แนวคิด กรณีทั่วไปขอให้นักเรียนจำเป็นสูตรได้เลยว่าพหุนาม

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

มีผลบวกของสัมประสิทธิ์เท่ากับ $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = f(1)$ เสมอ

จากโจทย์ให้ $f(x) = (1 + 2x - 2x^2)^{745}(1 - 2x + 2x^2)^{744}$

มีค่า $f(1) = (1 + 2 - 2)^{745}(1 - 2 + 2)^{744} = 1$

สรุปผลบวกของสัมประสิทธิ์ของ $(1 + 2x - 2x^2)^{745}(1 - 2x + 2x^2)^{744}$ คือ 1

6. ตอบ (3)

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = g(x) + h(x)$ ....(1)

$$f(-x) = g(-x) + h(-x)$$

$$f(-x) = g(x) - h(x) \qquad \ldots.(2)$$

(1) – (2) ; $f(x) - f(-x) = 2h(x)$

$$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $h(0) = \frac{f(0)-f(0)}{2} = 0$

ตัวเลือก (1) $e^{\sin x} = e^{\sin 0} = e^0 = 1 \neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก (1) ทิ้ง

ตัวเลือก (2) $(\sin x)e^{\sin x} = \sin 0 e^{\sin 0} = 0$

ตัวเลือก (3) $\frac{1}{2}(e^{\sin x} - e^{-\sin x}) = \frac{1}{2}(e^0 - e^0) = 0$

ตัวเลือก (4) $e^{\sin x} - e^{-\sin x} + x\tan x^2 = e^0 - e^0 + 0 = 0$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $h(1) = \frac{f(1)-f(-1)}{2}$

$$= \frac{(\cos 1 + \tan 1 + e^{\sin 1}) - (\cos 1 + \tan 1 + e^{\sin(-1)})}{2} = \frac{e^{\sin 1} - e^{\sin(-1)}}{2}$$

$$= \frac{e^{\sin 1} - e^{-\sin 1}}{2}$$

ตัวเลือก (2) $\sin 1\ e^{(\sin 1)^2} \neq \frac{e^{\sin 1} - e^{-\sin 1}}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก (2)

ตัวเลือก (3) ถูกต้อง

ตัวเลือก (4) $e^{\sin 1} - e^{-\sin 1} + \tan 1 \neq \frac{e^{\sin 1} - e^{-\sin 1}}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก (4)

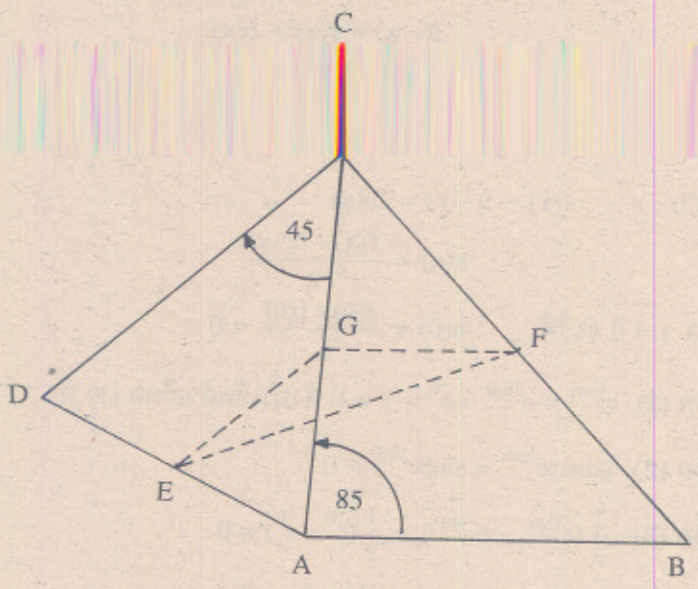
วิธีจริง ใช้การจัดรูป $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

$$= \frac{(x^2\cos x + \tan x^2 + e^{\sin x}) - (-x)^2\cos(-x) + \tan(-x)^2 + e^{\sin(-x)}}{2}$$

$$= \frac{x^2\cos x + \tan x^2 + e^{\sin x} - x^2\cos x - \tan x^2 - e^{-\sin x}}{2} = \frac{e^{\sin x} - e^{-\sin x}}{2}$$

7. ตอบ (3)

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของความยาวด้านและมุม ดังนั้นวาดรูปก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้



1. ลาก AB ยาว 2 นิ้ว ลาก AC ยาว 2 นิ้ว และ $B\hat{A}C = 85^\circ$
2. ลาก CD ยาว 2 นิ้ว และ $A\hat{C}D = 45^\circ$
3. แบ่งครึ่งด้าน AD, BC และ AC ที่จุด E, F, G ตามลำดับ
4. ลากเส้น EF และ FG วัดมุม $E\hat{F}G$ ได้ 25°

สรุปเลือกตัวเลือก (3) ดีกว่า

วิธีจริง G, F เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ BC

เพราะฉะนั้น AB ขนานกับ FG และ $FG = \frac{1}{2}AB$

$A\hat{G}F$ เป็นมุมในด้านเดียวกันของเส้น AG ที่ตัดกับเส้นขนาน AB และ GF

เพราะฉะนั้น $A\hat{G}F = 85^\circ$ ในทำนองเดียวกัน $A\hat{G}E = 45^\circ$

และ $EG = \frac{1}{2}CD$ ดังนั้น $E\hat{G}F = 45^\circ + 85^\circ = 130$

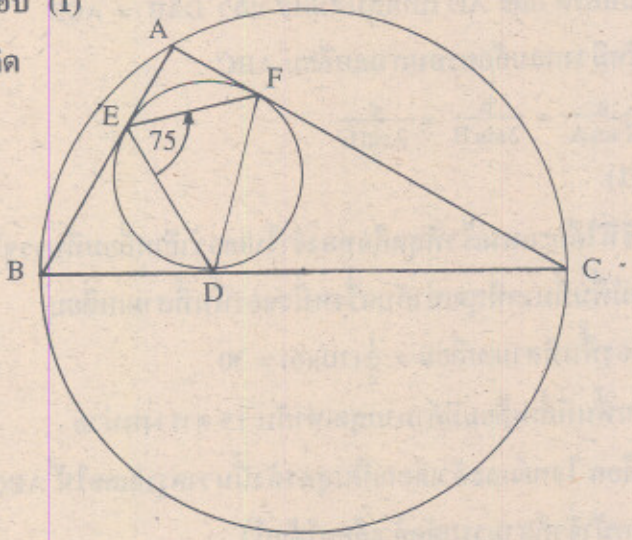
เพราะว่า $GF = \frac{1}{2}AB$ และ $EG = \frac{1}{2}CD$ และ $AB = CD$

เพราะฉะนั้น EG = FG ดังนั้น EGF เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

สรุป $E\hat{F}G = \frac{180 - E\hat{G}F}{2} = \frac{180-130}{2} = 25^\circ$

8. ตอบ (1)

แนวคิด



ลากเส้นตรง DF เพราะว่า CD เป็นเส้นสัมผัส

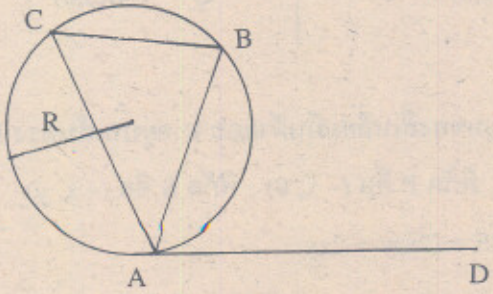
ดังนั้นมุม CDF = มุมภายในด้านตรงข้าม เพราะฉะนั้น CDF = DEF = 75°

เพราะว่า CD และ CF เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น DC = CF และ

CFD = CDF = 75° เพราะฉะนั้น $A\hat{C}B = 180 - 75 - 75 = 30^\circ$

รัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม $ABC = \frac{c}{2\sin C} = \frac{AB}{2\sin 30} = \frac{3}{2(\frac{1}{2})} = 3$

หมายเหตุ ความรู้ที่นักเรียนควรท่องไว้ใช้ในการสอบระดับนี้ คือ



ถ้า AB เป็นคอร์ด และ AD เป็นเส้นสัมผัส แล้ว $D\hat{A}B = A\hat{C}B$

ถ้า R เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

แล้ว $R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$

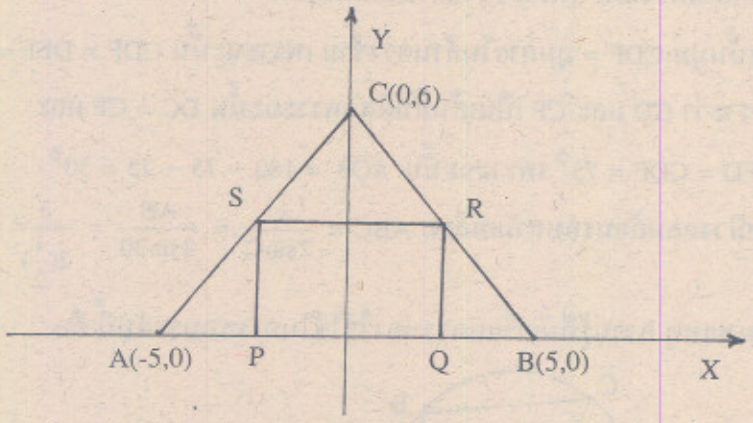
9. ตอบ (1)

แนวคิด วิธีที่ได้คะแนนเร็วที่สุดคือท่องจำไปเลยว่าสี่เหลี่ยมที่บรรจุในสามเหลี่ยมมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่สามเหลี่ยม

จากโจทย์ของพื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}(10)(6) = 30$

เพราะฉะนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมมีค่ามากสุดเท่ากับ 15 ตารางหน่วย

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นวาดรูปและให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว



ให้ R(x,y) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าและ R อยู่บนเส้นตรง BC

พิกัด Q คือ (x, 0) , พิกัด P คือ (– x, 0) , พิกัด S คือ (– x, y)

พื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS = (2x)y = 2xy

สมการเส้นตรง BC คือ $\frac{y-0}{x-5} = \frac{6-0}{0-5} \rightarrow -5y = 6x - 30$

$\rightarrow y = -\frac{6}{5}x + 6$

พื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS $= 2x(-\frac{6}{5}x + 6) = -\frac{12}{5}x^2 + 12x$

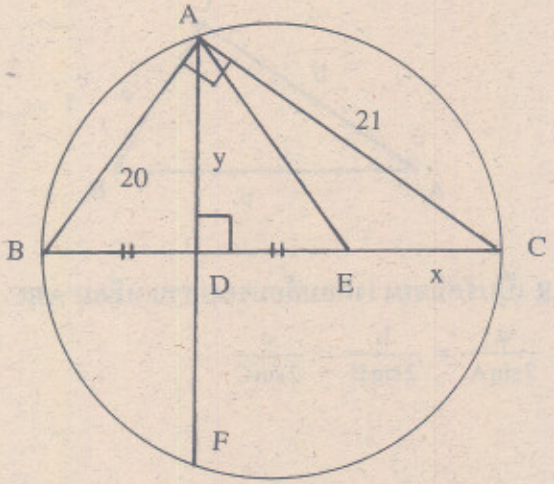
ให้ $f(x) = -\frac{12}{5}x^2 + 12x = -\frac{12}{5}(x^2 - 5x) = -\frac{12}{5}(x^2 - 5x + (2.5)^2) + \frac{12}{5}(2.5)^2$

$= -\frac{12}{5}(x - 2.5)^2 + \frac{12}{5}(2.5)^2 \leq \frac{12}{5}(2.5)^2 = 15$

ค่ามากสุดของ f(x) คือ 15 ดังนั้นตัดตัวเลือก (2) , (3) , (4) ทิ้งได้

10. ตอบ (4)

แนวคิด



เพราะว่า BÂC เป็นมุมฉาก เพราะฉะนั้น $BC^2 = 20^2 + 21^2 = 841$, BC = 29

เพราะว่า AD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ BE เพราะฉะนั้น AE = AB = 20

ให้ EC = x และ AD = y ดังนั้น $DE = \frac{BC-x}{2} = \frac{29-x}{2}$

ในสามเหลี่ยม ADE ; $AE^2 = AD^2 + DE^2$

$$20^2 = y^2 + (\frac{29-x}{2})^2 \qquad \text{....(1)}$$

ในสามเหลี่ยม ACD ; $AC^2 = AD^2 + DC^2$

$$21^2 = y^2 + (x + \frac{29-x}{2})^2 \quad \text{.....(2)}$$

(2) – (1) ; $21^2 - 20^2 = (x + \frac{29-x}{2})^2 - (\frac{29-x}{2})^2$

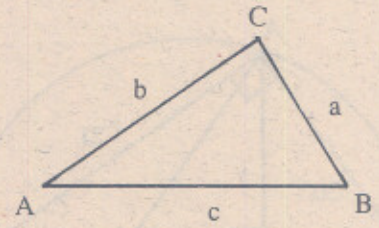
$$41 = (\frac{x+29}{2})^2 - (\frac{29-x}{2})^2$$

$$4(41) = (x + 29)^2 - (x - 29)^2 = (58)(2x)$$

$$x = \frac{41}{29}$$

เพราะฉะนั้น $EC = \frac{41}{29}$

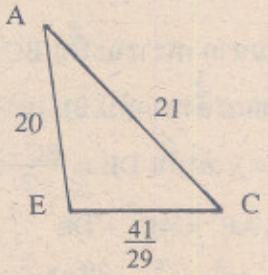
จากกรณีทั่วไป



จะได้ว่าเมื่อ R เป็นรัศมีของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

จากรูป



$$\cos A = \frac{(21)^2+(20)^2-(\frac{41}{29})^2}{2(21)(20)} = \frac{441+400-\frac{1681}{841}}{840} = \frac{840}{841}$$

$$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{1-(\frac{840}{841})^2} = \sqrt{\frac{1681}{(841)^2}} = \frac{41}{841}$$

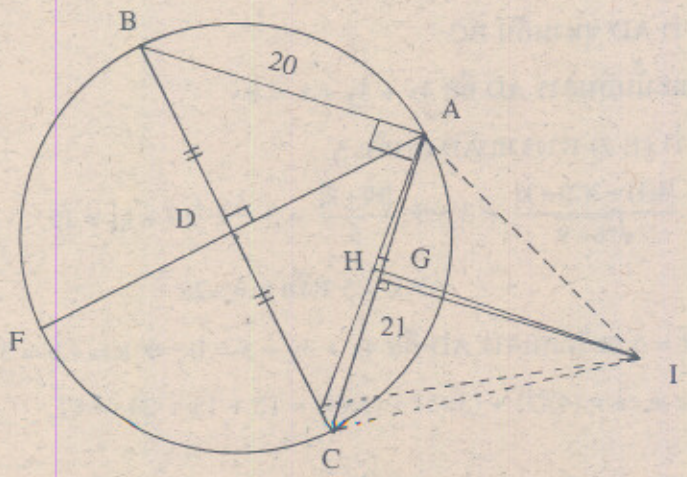
$$\text{สรุป } R = \frac{(\frac{41}{29})}{2\sin A} = \frac{(\frac{41}{29})}{2(\frac{41}{841})} = \frac{841}{2(29)} = \frac{29}{2} = 14.5$$

การตัดตัวเลือกโดยวิธีวาดรูป

1. ลาก AB และ AC ตั้งฉากกันโดยให้ AB = 20, AC = 21
2. ลาก AD ตั้งฉากกับ BC ที่ D
3. เขียนจุด E บน BC โดยให้ BD = DE ขณะนี้เราได้ Δ AEC แล้ว
4. แบ่งครึ่ง AC ที่จุด G และลากเส้น GI ตั้งฉากกับ AC
5. แบ่งครึ่ง AE ที่จุด E และลากเส้น HI ตั้งฉากกับ AE

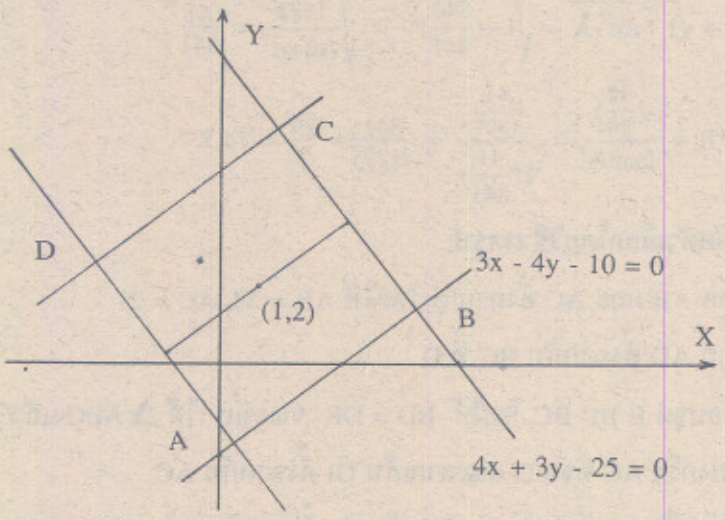
จะได้ว่า I เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม AEC

วัดระยะทาง GI ได้ประมาณ 14 หน่วย สรุปเลือกตัวเลือก (4) ดีกว่า



11. ตอบ (1)

แนวคิด วาดรูปเท่าที่ทำได้ก่อนเป็นวิธีที่ดีที่สุด



สมการ BC คือ $4x + 3y - 25 = 0$

ระยะทางจากจุด (1, 2) ไปยัง BC $= \frac{|4(1)+3(2)-25|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|4+6-25|}{5} = 3$

ดังนั้นระยะทางจาก (1, 2) มายัง AD เท่ากับ 3

เพราะว่า AD ขนานกับ BC

เพราะฉะนั้นสมการ AD คือ $4x + 3y + k = 0$

เพราะว่า (1, 2) ห่างจาก AD เท่ากับ 3

ดังนั้น $\frac{|4(1)+3(2)+k|}{\sqrt{16+9}} = 3 \rightarrow \frac{|10+k|}{5} = 3 \rightarrow |10 + k| = 15$

$\rightarrow k = 5$ หรือ $k = -25$

เลือก $k = 5$ จะได้สมการ AD คือ $4x + 3y + 5 = 0 \rightarrow a = 4, b = 3, c = 5$

$ab + bc + ca = (4)(3) + (3)(5) + (5)(4) = 12 + 15 + 20 = 47$

12. ตอบ (3)

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของมิติ ดังนั้นเลือก n = 2 ก็สามารถจำแนกตัวเลือกได้

เลือก $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A \neq B$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = B^3$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $A \neq B$, $A^3 = B^3$, $A^2B = B^2A$

แต่ $A^3 + B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$A^3 - B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ดังนั้นตัดตัวเลือก (2) และ (4) ทิ้งได้

วิธีจริง เลือกกรณี AB = BA เพื่อสะดวกในการหาคำตอบ

เพราะว่า $A \neq B$, $A^3 = B^3$ และ $A^2B = B^2A$

ดังนั้นเราพิจารณา $(A^2 - B^2)^3 = A^6 - 3(A^2)^2B^2 + 3(A^2)(B^2)^2 - B^6$

$= A^6 - 3A^4B^2 + 3A^2B^4 - B^6$

$= (A^3)^2 - 3(A^2B)^2 + 3A^2B^4 - B^6$ ....($\because A^2B = B^2A$)

$= (B^3)^2 - 3(B^2A)^2 + 3A^2B^4 - B^6$ ....($\because A^3 = B^3$)

$= B^6 - 3B^4A^2 + 3A^2B^4 - B^6$

$= -3B^4A^2 + 3B^4A^2$ ....($\because AB = BA$)

$= O$

เพราะฉะนั้น $\det((A^2 - B^2)^3) = 0$

$$(\det(A^2 - B^2))^3 = 0$$

$$\det(A^2 - B^2) = 0$$

สรุป $A^2 - B^2$ ต้องเป็นเมทริกซ์เอกฐาน

13. ตอบ (2)

แนวคิด จากสมการ $\log_a b + 4\log_b a = 5$ จะได้ $\frac{\ln(b)}{\ln(a)} + 4\frac{\ln(a)}{\ln(b)} = 5$

แทนค่า $b = 272 - a^2$ จะได้ $\frac{\ln(272-a^2)}{\ln(a)} + 4\frac{\ln(a)}{\ln(272-a^2)} - 5 = 0$

$$\frac{(\ln(272-a^2))^2 + 4(\ln(a))^2 - 5\ln(a)\ln(272-a^2)}{\ln(a)\ln(272-a^2)} = 0$$

$$\frac{[(\ln(272-a^2)) - \ln(a)][\ln(272-a^2) - 4\ln(a)]}{\ln(a)\ln(272-a^2)} = 0$$

เพราะฉะนั้น $(\ln(272-a^2) - \ln(a))(\ln(272 - a^2) - 4\ln(a)) = 0$

เพราะว่า $b \neq a$ ดังนั้น $272 - a^2 \neq a$ ทำให้ $\ln(272 - a^2) - \ln(a) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\ln(272 - a^2) - 4\ln(a) = 0$

$$\ln(272 - a^2) = 4\ln(a)$$

$$\ln(272 - a^2) = \ln(a^4)$$

$$272 - a^2 = a^4$$

$$a^4 + a^2 - 272 = 0$$

$$(a^2 + 17)(a^2 - 16) = 0$$

$a^2 + 17 \neq 0$ ดังนั้น $a^2 = 16$ เพราะว่า a ต้องมากกว่า 0

เพราะฉะนั้น $a = 4$ และ $b = 272 - a^2 = 272 - 16 = 256$

สรุป $ab = (4)(256) = 1024$

14. ตอบ (4)

แนวคิด คำถามแบบนี้สามารถใช้แนวคิดของคำว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของมุม A , B ดังนั้นเมื่อเราเลือก A , B ที่สอดคล้องเงื่อนไข $5\tan A = \tan(A + B)$ ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

จากสูตรที่โจทย์กำหนด $5\tan A = \tan(A + B)$

$$5\tan A = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$5\tan A(1 - \tan A\tan B) = \tan A + \tan B$

$5\tan A - 5\tan^2 A\tan B = \tan A + \tan B$

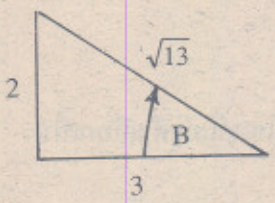
เลือก $\tan A = 1$ จะได้ $5 - 5\tan B = 1 + \tan B$

$$6\tan B = 4$$

$$\tan B = \frac{2}{3}$$

ขณะนี้จะเห็นว่า $\tan A = 1$ และ $\tan B = \frac{2}{3}$

ทำให้ $5\tan A = \tan(A + B)$ เป็นจริง



$$\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan A = 1 \rightarrow A = \frac{\pi}{4} \rightarrow 2A = \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \sin(2A + B) = \sin(\frac{\pi}{2} + B) = \cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

สรุป $\frac{\sin(2A+B)}{\sin B} = \frac{(\frac{3}{\sqrt{13}})}{(\frac{2}{\sqrt{13}})} = \frac{3}{2}$

ดังนั้นเรามีเหตุผลเพียงพอที่จะตัดตัวเลือก (1), (2) และ (3) ทิ้งได้

วิธีจริง ต้องจัดรูปต่อจาก $5\tan A - 5\tan^2 A\tan B = \tan A + \tan B$ ดังนี้

$$4\tan A - 5\tan^2 A\tan B - \tan B = 0$$

$$4\frac{\sin A}{\cos A} - 5\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\frac{\sin B}{\cos B} - \frac{\sin B}{\cos B} = 0$$

$$4\sin A\cos A\cos B - 5\sin^2 A\sin B - \sin B\cos^2 A = 0$$

เพราะว่า $\sin B \neq 0$ เพราะฉะนั้น $4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5\sin^2 A - \cos^2 A = 0$

$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5(1 - \cos^2 A) - \cos^2 A = 0$$

$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 4\cos^2 A = 0$$

$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 4\left(\frac{1+\cos 2A}{2}\right) = 0$$

$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 2 + 2\cos 2A = 0$$

$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} + 2\cos 2A = 3$$

$$2\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} + \cos 2A = \frac{3}{2}$$

$$\sin 2A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin B}\cos 2A = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin 2A\cos B + \sin B\cos 2A}{\sin B} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sin(2A+B)}{\sin B} = \frac{3}{2}$$

15. ตอบ (2)

แนวคิด คำถามแบบนี้สามารถใช้แนวคิดของคำว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a , b , c , $\varnothing$ และ θ

ดังนั้นเราเลือก $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0 \longrightarrow a\cos(\frac{\pi}{2}) + b\sin(\frac{\pi}{2}) + c = 0$

$$\longrightarrow a(0) + b(1) + c = 0 \longrightarrow b = -c$$

$a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0 \longrightarrow a\cos(0) + b\sin(0) + c = 0$

$$\rightarrow a(1) + b(0) + c = 0 \rightarrow a = -c$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - c^2 - c^2}{c^2 + c^2} = 0$

สรุปค่าของโจทย์ $\frac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ ต้องเท่ากับ 0 เมื่อ $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$

แทนค่า $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก (1) $\sin(\varnothing - \theta) = \sin(0 - \frac{\pi}{2}) = -1$

ตัวเลือก (2) $\cos(\varnothing - \theta) = \cos(0 - \frac{\pi}{2}) = 0$

ตัวเลือก (3) $\tan(\varnothing - \theta) = \tan(0 - \frac{\pi}{2}) = \infty$

ตัวเลือก (4) $\cot(\varnothing - \theta) = \cot(0 - \frac{\pi}{2}) = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปเลือก $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{4}$

$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0 \rightarrow a\cos(\frac{\pi}{4}) + b\sin(\frac{\pi}{4}) + c = 0$

$$\rightarrow a(\frac{1}{\sqrt{2}}) + b(\frac{1}{\sqrt{2}}) + c = 0$$

$$\rightarrow a + b = -\sqrt{2}\,c$$

$a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0 \rightarrow a\cos(0) + b\sin(0) + c = 0$

$$\rightarrow a(1) + b(0) + c = 0$$

$$\rightarrow a = -c$$

$$\rightarrow b = -\sqrt{2}\,c + c = (-\sqrt{2} + 1)c$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - c^2 - ((-\sqrt{2}+1)c)^2}{c^2 + ((-\sqrt{2}+1)c)^2}$

$$= \frac{2c^2 - c^2 - (2 - 2\sqrt{2} + 1)c^2}{c^2 + (2 - 2\sqrt{2} + 1)c^2} = \frac{2 - 1 - (2 - 2\sqrt{2} + 1)}{1 + (2 - 2\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{-2+2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\right)$$

$$= \frac{-2+\sqrt{2}+2}{4-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

สรุปค่าของโจทย์ $\frac{2c^2-a^2-b^2}{a^2+b^2}$ ต้องเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ เมื่อ $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{4}$

แทนค่า $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ในตัวเลือก 2. และ 4.

ตัวเลือก (2) $\cos(\varnothing - \theta) = \cos(0 - (\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ตัวเลือก (4) $\cot(\varnothing - \theta) = \cot(0 - (\frac{\pi}{4})) = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\varnothing - \theta \neq 0$ และไม่เป็นพหุคูณของ 2π

เพราะฉะนั้น $\sin(\varnothing - \theta) \neq 0$

ดังนั้น $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\phi & \sin\phi \end{vmatrix} = \cos\theta\sin\varnothing - \sin\theta\cos\varnothing = \sin(\varnothing - \theta) \neq 0$

$$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0 \quad \text{....(1)}$$

$$a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0 \quad \text{....(2)}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} -c & \sin\theta \\ -c & \sin\phi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\phi & \sin\phi \end{vmatrix}} = \frac{-c\sin\phi + c\sin\theta}{\sin(\phi-\theta)} = \frac{-c(\sin\phi - \sin\theta)}{\sin(\phi-\theta)}$$

$$a^2\sin^2(\varnothing - \theta) = c^2(\sin^2\varnothing - 2\sin\varnothing\sin\theta + \sin^2\theta) \quad \text{....(3)}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} \cos\theta & c \\ \cos\phi & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\phi & \sin\phi \end{vmatrix}} = \frac{-c\cos\theta + c\cos\phi}{\sin(\phi-\theta)} = \frac{-c(\cos\theta - \cos\phi)}{\sin(\phi-\theta)}$$

$$b^2\sin^2(\varnothing - \theta) = c^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\varnothing + \cos^2\varnothing) \quad \text{....(4)}$$

$(3) + (4)$; $a^2\sin^2(\varnothing - \theta) + b^2\sin^2(\varnothing - \theta)$

$= c^2(\sin^2\varnothing - 2\sin\varnothing\sin\theta + \sin^2\theta) + c^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta\cos\varnothing + \cos^2\varnothing)$

$= c^2(\sin^2\varnothing + \cos^2\varnothing + \sin^2\theta + \cos^2\theta - 2(\sin\varnothing\sin\theta + \cos\theta\cos\varnothing))$

$= c^2(1 + 1 - 2\cos(\varnothing - \theta))$

$= 2c^2(1 - \cos(\varnothing - \theta))$

$$a^2\sin^2(\varnothing - \theta) + b^2\sin^2(\varnothing - \theta) = 2c^2(1 - \cos(\varnothing - \theta))$$

$$(a^2 + b^2)\sin^2(\varnothing - \theta) = 2c^2(1 - \cos(\varnothing - \theta))$$

$$(a^2 + b^2)(1 - \cos^2(\varnothing - \theta)) = 2c^2(1 - \cos(\varnothing - \theta))$$

$$(a^2 + b^2)(1 - \cos(\varnothing - \theta))(1 + \cos(\varnothing - \theta)) = 2c^2(1 - \cos(\varnothing - \theta))$$

$$(a^2 + b^2)(1 + \cos(\varnothing - \theta)) = 2c^2$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{2c^2 - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$

$$= \frac{(a^2 + b^2)(1 + \cos(\phi - \theta)) - (a^2 + b^2)}{a^2 + b^2}$$

$$= 1 + \cos(\varnothing - \theta) - 1 = \cos(\varnothing - \theta)$$

ตอนที่ 2

1. ตอบ $\dfrac{2539}{2541}$

แนวคิด $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$

$$y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$y + 1 = \frac{1+x}{1-x} + 1 = \frac{(1+x)+(1-x)}{1-x} = \frac{2}{1-x}$$

$$1 - x = \frac{2}{y+1}$$

$$x = 1 - \frac{2}{y+1} = \frac{y+1-2}{y+1} = \frac{y-1}{y+1}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$

$$f^{-2}(x) = f^{-1}(1 - \frac{2}{x+1}) = 1 - \frac{2}{(1-\frac{2}{x+1})+1} = 1 - \frac{2(x+1)}{(x+1-2+x+1)}$$

$$= 1 + (x + 1) = 1 - \frac{2(x+1)}{2x} = 1 - 1 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x}$$

$$f^{-3}(x) = f^{-1}(f^{-2}(x)) = f^{-1}(-\frac{1}{x}) = 1 - \frac{2}{(-\frac{1}{x}+1)} = 1 - \frac{2x}{-1+x}$$

$$= \frac{(-1+x)-2x}{x-1} = \frac{-1-x}{x-1} = \frac{(-1)(1+x)}{x-1} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$f^{-4}(x) = f^{-1}(f^{-3}(x)) = f^{-1}(\frac{1+x}{1-x}) = 1 - \frac{2}{(\frac{1+x}{1-x}+1)} = 1 - \frac{2}{(\frac{1+x+1-x}{1-x})}$$

$$= 1 - (1 - x) = x$$

สรุป $f^{-4}(x) = x$ ดังนั้น f^{-4} เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

เพราะว่า $1997 = 4(499) + 1$ เพราะฉะนั้น $-1997 = (-4)(499) - 1$

ดังนั้น $f^{-1997}(x) = f^{(-4)(499)-1}(x) = f^{-1-4(999)}(x)$

$$= f^{-1}(f^{-4(999)}(x)) = f^{-1}(I^{999}(x)) = f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

สรุป $f^{-1997}(2540) = \frac{2540-1}{2540+1} = \frac{2539}{2541}$

2. ตอบ $p = 6$

แนวคิด เพราะว่า a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 + px^2 + 3x - 10 = 0$

เพราะฉะนั้น $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + px^2 + 3x - 10$

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = x^3 + px^2 + 3x - 10$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ $a + b + c = -p$ ....(1)

$ab + ac + bc = 3$ ....(2)

$$abc = 10 \qquad \text{....(3)}$$

เพราะว่า $c - b = b - a > 0$ เพราะฉะนั้น $a + c = 2b$

(1) ; $3b = -p$ และ $b = -\frac{p}{3}$

(2) ; $b(a + c) + ac = 3$

$$2b^2 + ac = 3$$

(3) ; $ac = \frac{10}{b}$

เพราะฉะนั้น $2b^2 + \frac{10}{b} = 3$

$$2b^2 - 3b + 10 = 3$$

$$2(-\frac{p}{3})^3 - 3(-\frac{p}{3}) + 10 = 0$$

$$2p^3 - 27p - 270 = 0$$

$$(p - 6)(2p^2 + 12p + 45) = 0$$

เพราะว่า $2p^2 + 12p + 45 > 0$ เพราะฉะนั้น $p - 6 = 0$, $p = 6$

หมายเหตุ $x^3 + 6x^2 + 3x - 10 = (x - 1)(x + 2)(x + 5), a = -5, b = -2, c = 1$

3. ตอบ 4

แนวคิด เพราะว่า $(x - y)^2 \geq 0 \rightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

ในทำนองเดียวกัน $y^2 + z^2 \geq 2yz$ และ $z^2 + x^2 \geq 2zx$

เพราะฉะนั้น $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 2(xy + yz + zx)$

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \qquad \text{....(1)}$$

เพราะว่า $x + y + z = 2 \rightarrow (x + y + z)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 4$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4 - 2(xy + xz + yz)$$

แทนค่าใน (1) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

$$4 - 2(xy + xz + yz) \geq xy + yz + zx$$

$$3(xy + yz + zx) \leq 4$$

สรุป $A = \{3(xy + yz + zx) \mid x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มที่น้อยกว่า 1 และ $x + y + z = 2\}$

มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดเท่ากับ 4

หมายเหตุ $3(xy + yz + zx) = 4$ เมื่อ $x = y = z = \frac{2}{3}$

4. ตอบ $x = 3$

แนวคิด หาค่า x ที่ทำให้ $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - (x^2 + x - 1)^2 = 0$

$$-x^3 + 2x^2 + 3x = 0$$

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$x = 0, -1, 3$$

หมายเหตุ ให้ลองแทนค่า $(x^2 + x - 1)^2$ ด้วย $(x^2 \pm x \pm 1)^2$

5. ตอบ $x = a + b$ และ $\frac{(a+b)+\sqrt{a^2+34ab+b^2}}{2}$

แนวคิด $(\sqrt{ax-a^2} + \sqrt{bx-b^2})^2 = (ax-a^2)+2\sqrt{(ax-a^2)(bx-b^2)}+(bx-b^2)$

ดังนั้น $2ab+2ax+2bx-a^2-b^2-x^2 = ax-a^2+2\sqrt{(ax-a^2)(bx-b^2)}+(bx-b^2)$

$$2ab + ax + bx - x^2 = 2\sqrt{(ax-a^2)(bx-b^2)}$$

$$(2ab + ax + bx - x^2)^2 = 4(ax - a^2)(bx - b^2)$$

$$4a^2b^2 + 4a^2bx + 4ab^2x - 2abx^2 + a^2x^2 - 2ax^3 + b^2x^2 - 2bx^3 + x^4$$

$$= 4abx^2 - 4ab^2x - 4a^2bx + 4a^2b^2$$

$8a^2bx + 8ab^2x - 6abx^2 + a^2x^2 - 2ax^3 + b^2x^2 - 2bx^3 + x^4 = 0$

เพราะว่า $x \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$8a^2b + 8ab^2 - 6abx + a^2x - 2ax^2 + b^2x - 2bx^2 + x^3 = 0$

$x^3 - 2ax^2 - 2bx^2 + a^2x + b^2x + 8a^2b + 8ab^2 - 6abx = 0$

$x^3 - ax^2 - bx^2 - ax^2 + a^2x + abx - bx^2 + abx + b^2x - 8abx + 8a^2b + 8ab^2 = 0$

$x^2(x - a - b) - ax(x - a - b) - bx(x - a - b) - 8ab(x - a - b) = 0$

$(x^2 - ax - bx - 8ab)(x - a - b) = 0$

$(x^2 - (a + b)x - 8ab)(x - (a + b)) = 0$

เพราะว่า $a > 0$, $b > 0$ ดังนั้น $x = a + b \neq 0$

เพราะฉะนั้น $x = a + b$ เป็นคำตอบของสมการ

จาก $x^2 - (a + b)x - 8ab = 0$

$$x = \frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4(1)(-8ab)}}{2} = \frac{(a+b) \pm \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}}{2}$$

เพราะว่า x ต้องมากกว่า 0 มิฉะนั้น $\sqrt{ax - a^2}$ จะหาค่าไม่ได้

ดังนั้น $x = \frac{(a+b) + \sqrt{a^2 + 34ab + b^2}}{2}$ เป็นคำตอบของสมการ

6. ตอบ 4.

แนวคิด **กำหนดให้** $p(x) = 1 + 6x + 3x^2 + x^6 - 2x^7 - 2x^8 + 2x^9 + x^{10}$

นำพหุนามที่มี $x = \sqrt{2} - 1$ เป็นคำตอบไปหารพหุนาม $p(x)$

โดยเลือกพหุนาม $(x - (-1 + \sqrt{2}))(x - (-1 - \sqrt{2}))$

$= ((x + 1) - \sqrt{2})((x + 1) + \sqrt{2}) = (x + 1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$

ให้ $q(x) = x^2 + 2x - 1$ ดังนั้น $q(\sqrt{2} - 1) = 0$ ต่อไปนำพหุนาม $x^2 + 2x - 1$

ไปหาร $p(x)$ จะได้ $p(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^9 - x^7 + 3x) + 4$

เพราะฉะนั้น $p(\sqrt{2} - 1) = 0 + 4 = 4$

หมายเหตุ การหาคำตอบข้อนี้เราใช้แนวคิดว่า ถ้า $x = a + \sqrt{b}$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ แล้ว $x = a - \sqrt{b}$ เป็นคำตอบของ $f(x) = 0$ ด้วย ซึ่งคล้ายกับ $a + bi$ และ $a - bi$ ต้องเป็นรากของสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

7. ตอบ $k = \frac{2}{3}$

แนวคิด ให้ Y เป็นค่าสูงสุดของ y ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x + y + z = a$$

และ $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$

เพราะฉะนั้น $x + z = a - Y$ เป็นค่าคงตัว

และ $x^2 + z^2 = \frac{a^2}{2} - Y^2$ เป็นค่าน้อยที่สุดของ $x^2 + z^2$

เพราะฉะนั้น $x = z = \frac{a - Y}{2}$

ดังนั้น $(\frac{a-Y}{2})^2 + (\frac{a-Y}{2})^2 = \frac{a^2}{2} - Y^2$

$$(a - Y)^2 + (a - Y)^2 = 2a^2 - 4Y^2$$

$$2(a^2 - 2aY + Y^2) = 2a^2 - 4Y^2$$

$$-2aY + Y^2 = -2Y^2$$

$$3Y^2 = 2aY$$

$$3Y^2 = 2aY$$

$$Y(3Y - 2a) = 0$$

$$Y = 0 , \frac{2}{3}a$$

เพราะว่า y เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะฉะนั้น $0 < y \leq \frac{2}{3}a$

สรุป $k = \frac{2}{3}$

หมายเหตุ เมื่อ $A + B = L$ เป็นค่าคงตัว $A^2 + B^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $A = B$

$$A^2 + B^2 = A^2 + (L - A)^2 = 2A^2 - 2LA + L^2 = 2(A^2 - LA + \frac{L^2}{4}) + \frac{L^2}{2}$$

$$A^2 + B^2 = 2(A - \frac{L}{2})^2 + \frac{L^2}{2}$$

เพราะฉะนั้น $A^2 + B^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $A = B = \frac{L}{2}$

8. ตอบ หลักหน่วย = 1, หลักสิบ = 0

แนวคิด $7^1 = 7 , 7^2 = 49 , 7^3 = 343 , 7^4 = 2401$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $(7^4)(7^4)(7^4)$ มีค่าเป็น 01

$(7^4)(7^4)(7^4)(7^2) = (..... 01)(49) = ... 49$

สรุปหลักหน่วยและหลักสิบของ 7^{14} คือ 49

เพราะว่า $7^{14} = ... 49$ เพราะฉะนั้น $(7^{14})^2 = (... 49)^2 = (... 01)$

ดังนั้น $\left[\left(7^{14}\right)^2\right]^7 = (... 01)^7 = (... 01)$

สรุปหลักหน่วยของ $(7^{14})^{14}$ คือ 1. และหลัก 10 ของ $(7^{14})^{14}$ คือ 0

9. ตอบ $m = 28, k = 24$

แนวคิด $m + (m + 1) + (m + 2) + ...+ (m + k) = 1000$

$$m(k + 1) + (1 + 2 + 3 + ... + k) = 1000$$

$$m(k + 1) + \frac{k}{2}(k + 1) = 1000$$

$$2m(k + 1) + k(k + 1) = 2000$$

$$(k + 1)(2m + k) = 2000$$

$$2m + k = \frac{2000}{k+1}$$

$$2m = \frac{2000}{k+1} - k$$

$$m = \frac{1000}{k+1} - \frac{k}{2} = \frac{2000 - k(k+1)}{2(k+1)}$$

เพราะว่า $44(45) = 1980$, $45(46) = 2070$ เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะค่า $k \leq 44$

ให้ $m(k) = \frac{2000 - k(k+1)}{2(k+1)}$, $k = 1, 2, 3, ... , 44$

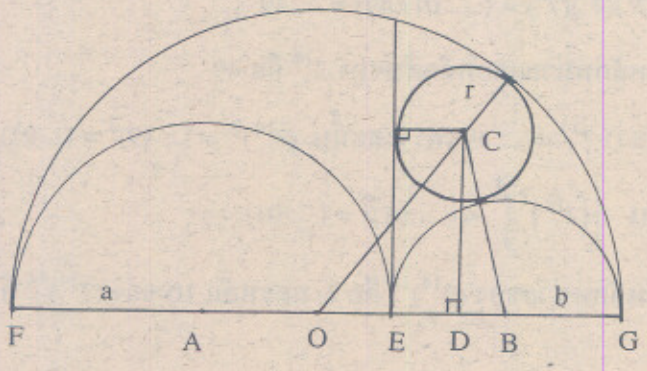
หรือ $m(k) = \frac{1000}{k+1} - \frac{k}{2}$, $k = 1, 2, 3, ... , 44$

k ที่ทำให้ m(k) เป็นจำนวนเต็มคือ $m(4) = 198$, $m(15) = 55$, $m(24) = 28$

สรุป m มีค่าน้อยสุดเท่ากับ 28 เมื่อ $k = 24$

10. ตอบ $r = \frac{ab}{a+b}$

แนวคิด



ลาก CD ตั้งฉาก AB จากรูป FG = 2a + 2b

$BC = b + r$, $ED = r$, $BD = b - r$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{(b+r)^2 - (b-r)^2} = \sqrt{4br}$$

รัศมีวงกลมใหญ่ = a + b , $OG = a + b$, $OC = a + b - r$

$$OD = OG - BD - BG = (a + b) - (b - r) - b = a + r - b$$

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ODC $OC^2 = OD^2 + CD^2$

$$(a + b - r)^2 = (a + r - b)^2 + 4br$$

$$(a + b - r)^2 - (a + r - b)^2 = 4br$$

$$[(a + b - r) + (a + r - b)]\,[(a + b - r) - (a + r - b)] = 4br$$

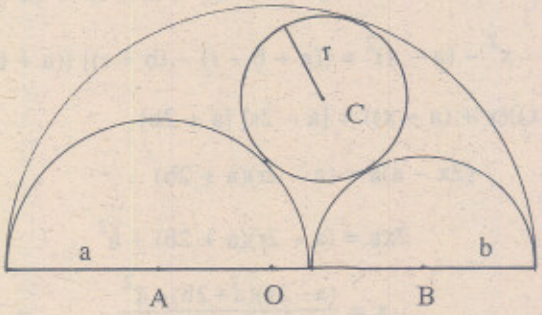
$$(2a)(2b - 2r) = 4br$$

$$ab - ar = br$$

$$(a + b)\,r = ab$$

$$r = \frac{ab}{a+b}$$

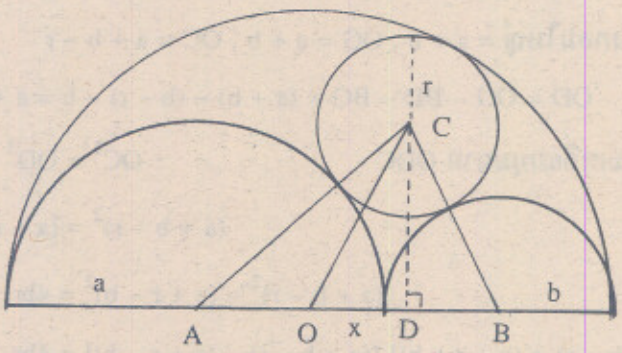
หมายเหตุ คำถามที่มีลักษณะใกล้เคียงกันคือ



จงหารัศมี r ในเทอมของ a และ b คำตอบ $r = \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$

olimpic40 – 34

ข้อพิสูจน์



$AC = a + r$, $BC = b + r$, $AO = (a + b) - a = b$

$OB = (a + b) - b = a$, $OC = a + b - r$, $OD = x$

ΔOCD ; $x^2 = OC^2 - CD^2 = OC^2 - (BC^2 - BD^2)$

$= (a + b - r)^2 - ((b + r)^2 - (OB - x)^2)$

$= (a + b - r)^2 - (b + r)^2 + (a - x)^2$

$x^2 - (a - x)^2 = [(a + b - r) - (b + r)]\ [(a + b - r) + (b + r)]$

$(x - (a - x))(x + (a - x)) = [a - 2r]\ [a + 2b]$

$(2x - a)a = (a - 2r)(a + 2b)$

$2xa = (a - 2r)(a + 2b) + a^2$

$$x = \frac{(a-2r)(a+2b)+a^2}{2a}$$

ΔADC ; $(AO + x)^2 + CD^2 = AC^2$

$$(b + x)^2 + (BC^2 - BD^2) = (a + r)^2$$

$$(b + x)^2 + [(b + r)^2 - (a - x)^2] = (a + r)^2$$

$$b^2 + 2bx + x^2 + b^2 + 2br + r^2 - a^2 + 2ax - x^2 = a^2 + 2ar + r^2$$

$$(2a + 2b)x = 2a^2 - 2b^2 - 2br + 2ar$$

$$x = \frac{a^2 - b^2 - br + ar}{a + b}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{(a-2r)(a+2b)+a^2}{2a} = \frac{a^2 - b^2 - br + ar}{a+b}$

$$(a + b)[(a - 2r)(a - 2b) + a^2] = 2a(a^2 - b^2 - br + ar)$$

$$2a^3 + 4a^2b - 2a^2r - 6abr + 2ab^2 - 4b^2r = 2a^3 - 2ab^2 - 2abr + 2a^2r$$

$$a^2r + abr + b^2r = a^2b + ab^2$$

$$r = \frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2}$$

11. ตอบ $DF - E^2 = ak$

แนวคิด $P = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$

$$k = \det P = a(df - e^2) - b(bf - ce) + c(be - cd)$$

$$D = (-1)^{2+2} \det\begin{pmatrix} a & c \\ c & f \end{pmatrix} = af - c^2$$

$$F = (-1)^{3+3} \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = ad - b^2$$

$$DF = (af - c^2)(ad - b^2) = afad - afb^2 - c^2ad + c^2b^2$$

$$= a^2fd - ab^2f - ac^2d + c^2b^2$$

$$E^2 = \left[(-1)^{2+3}\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & e \end{pmatrix}\right]^2 = (ae - bc)^2 = a^2e^2 - 2abce + b^2c^2$$

$$DF - E^2 = (a^2fd - ab^2f - ac^2d + c^2b^2) - (a^2e^2 - 2abce + b^2c^2)$$

$$= a^2fd - ab^2f - ac^2d + c^2b^2 - a^2e^2 + 2abce - b^2c^2$$

$$= a^2fd - ab^2f - ac^2d - a^2e^2 + 2abce$$

$$= a[afd - ae^2 - b^2f + bce + bce - c^2d]$$

$$= a[a(fd - e^2) - b(bf - ce) + c(be - cd)]$$

$$= a(\det P)$$

$$= ak$$

12. ตอบ $x - y = -\frac{\pi}{6}$

แนวคิด จาก $2\cos x\sin y = 1.5$

จะได้ $\sin y = \frac{1.5}{2\cos x} = \frac{3}{4\cos x}$ และ $\cos y = \sqrt{1-\left(\frac{3}{4\cos x}\right)^2}$

แทนค่าในสมการ $2\sin x\cos y = \cos^2 x - \cos^2 y$

$$2\sin x\sqrt{1-\sin^2 y} = \cos^2 x - (1 - \cos^2 y)$$

$$2\sqrt{1-\cos^2 x}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4\cos x}\right)^2} = \cos^2 x - (1 - (\frac{3}{4\cos x})^2)$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$4(1 - \cos^2 x)(1 - (\frac{3}{4\cos x})^2) = [\cos^2 x - (1 - (\frac{3}{4\cos x})^2)]^2$$

$$4(1 - \cos^2 x)(1 - (\frac{3}{4\cos x})^2) = \frac{4(1-\cos^2 x)(16\cos^2 x - 9)}{16\cos^2 x}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 x)(16\cos^2 x - 9)}{4\cos^2 x} = \frac{16\cos^2 x - 9 - 16\cos^4 x + 9\cos^2 x}{4\cos^2 x}$$

$$= \frac{25\cos^2 x - 9 - 16\cos^4 x}{4\cos^2 x} = \frac{25}{4} - \frac{9}{4\cos^2 x} - 4\cos^2 x$$

$$[\cos^2 x - (1 - (\frac{3}{4\cos x})^2)]^2 = [\cos^2 x - 1 + \frac{9}{16\cos^2 x}]^2$$

$$= [\cos^2 x - 1 + \frac{9}{16\cos^2 x}][\cos^2 x - 1 + \frac{9}{16\cos^2 x}]$$

$$= \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{9}{16} - \cos^2 x + 1 - \frac{9}{16\cos^2 x}$$

$$+ \frac{9}{16} - \frac{9}{16\cos^2 x} + \frac{81}{256\cos^4 x}$$

$$= \cos^4 x - 2\cos^2 x + \frac{17}{8} - \frac{9}{8\cos^2 x} + \frac{81}{256\cos^4 x}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{25}{4} - \frac{9}{4\cos^2 x} - 4\cos^2 x = \cos^4 x - 2\cos^2 x + \frac{17}{8} - \frac{9}{8\cos^2 x} + \frac{81}{256\cos^4 x}$$

$$\cos^4 x + 2\cos^2 x - \frac{23}{8} + \frac{9}{8\cos^2 x} + \frac{81}{256\cos^4 x} = 0$$

$$\cos^8 x + 2\cos^6 x - \frac{23}{8}\cos^4 x + \frac{9}{8}\cos^2 x + \frac{81}{256} = 0$$

$$256\cos^8 x + 512\cos^6 x - 736\cos^4 x + 288\cos^2 x + 81 = 0$$

$$[16\cos^4 x + 56\cos^2 x + 9][16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9] = 0$$

เพราะว่า $[16\cos^4 x + 56\cos^2 x + 9] \neq 0$

ดังนั้น $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$

$$[4\cos^2 x - 3]^2 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

กรณี $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin y = \frac{3}{4(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

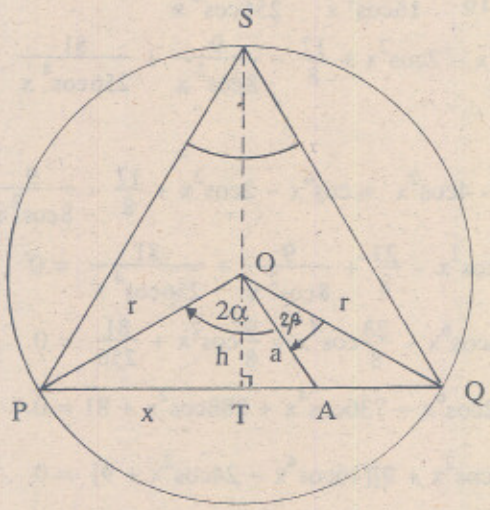
แต่ $0 \le y \le \pi$ ดังนั้น $\sin y \ge 0$ เพราะฉะนั้น $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ไม่ได้

กรณี $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \sin y = \frac{3}{4(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

นั้นคือ $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{3}$ เพราะฉะนั้น $x - y = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6}$

13. **ตอบ** $\tan\alpha\tan\beta = \frac{r-a}{r+a}$

แนวคิด ลากเส้น OT ตั้งฉากกับ PQ และ ต่อ TO ไปพบเส้นรอบวงที่ S



เพราะว่า OT ตั้งฉากกับ PQ

เพราะฉะนั้น PT = TQ และ $POT = TOQ = \frac{1}{2}(2\alpha + 2\beta) = \alpha + \beta$

เพราะว่ามุมที่เส้นรอบวง = $\frac{1}{2}$ มุมที่จุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น มุม $S = \alpha + \beta$

เพราะว่า r เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม PQS

เพราะฉะนั้น $\frac{PQ}{2\sin S} = r$

$$\frac{PT+TQ}{2\sin(\alpha+\beta)} = r$$

$$\frac{PT+PT}{\sin(\alpha+\beta)} = 2r$$

$$\frac{2PT}{\sin(\alpha+\beta)} = 2r$$

$$PT = r\sin(\alpha+\beta) \quad \text{....(1)}$$

$TOA = TOQ - AOQ = \alpha + \beta - 2\beta = \alpha - \beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos TOA = \frac{OT}{OA} = \frac{OT}{a}$

$$OT = a\cos(\alpha-\beta) \quad \text{....(2)}$$

ในสามเหลี่ยม POT $\tan(POT) = \frac{PT}{OT}$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{PT}{OT}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{r\sin(\alpha+\beta)}{a\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{r\sin(\alpha+\beta)}{a\cos(\alpha-\beta)}$$

เพราะว่า $\sin(\alpha+\beta) \neq 0$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{r}{a\cos(\alpha-\beta)}$$

$$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{r}{a}$$

$$\frac{1+\tan\alpha\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{r}{a}$$

$$a + a\tan\alpha\tan\beta = r - r\tan\alpha\tan\beta$$

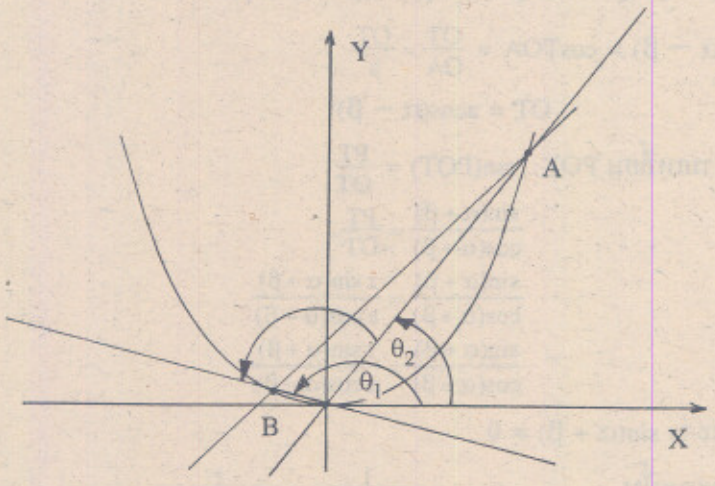
$$a\tan\alpha\tan\beta + r\tan\alpha\tan\beta = r - a$$

$$\tan\alpha\tan\beta(a + r) = r - a$$

$$\tan\alpha\tan\beta = \frac{r-a}{r+a}$$

14. ตอบ $k = \frac{44}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{115}$

แนวคิด



$$y = x^2$$

$$y = x + k \quad ; \ k > 0$$

$$x^2 = x + k \quad ; \ k > 0$$

$$x^2 - x - k = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-(4)(1)(-k)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}, \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}$$

$$x = \frac{1+\sqrt{1+4k}}{2} \quad ; \quad y = \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2}$$

$$x = \frac{1-\sqrt{1+4k}}{2} \quad ; \quad y = \frac{1+2k-\sqrt{1+4k}}{2}$$

ให้ $A(\frac{1+\sqrt{1+4k}}{2}, \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{2})$, $B(\frac{1-\sqrt{1+4k}}{2}, \frac{1+2k-\sqrt{1+4k}}{2})$

ความชัน $OA = \tan\theta_2 = \frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{1+\sqrt{1+4k}}$

ความชัน $OB = \tan\theta_1 = \frac{1+2k-\sqrt{1+4k}}{1-\sqrt{1+4k}}$

$$AOB = \theta_1 - \theta_2$$

$$120^\circ = \theta_1 - \theta_2$$

$$\tan 120^\circ = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{1+\sqrt{1+4k}} - \frac{1+2k-\sqrt{1+4k}}{1-\sqrt{1+4k}}}{1+(\frac{1+2k+\sqrt{1+4k}}{1+\sqrt{1+4k}})(\frac{1+2k-\sqrt{1+4k}}{1-\sqrt{1+4k}})}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{(1+2k+\sqrt{1+4k})(1-\sqrt{1+4k}) - (1+2k-\sqrt{1+4k})(1+\sqrt{1+4k})}{-4k+k^2}$$

$$-\sqrt{3} = \frac{-4k\sqrt{1+4k}}{-4k+k^2}$$

$$-\sqrt{3}(-4+k) = -4\sqrt{1+4k} \qquad \text{....(1)}$$

$$3(16 - 8k + k^2) = 16 + 64k$$

$$3k^2 - 88k + 32 = 0$$

$$k = \frac{88 \pm \sqrt{88^2 - 4(3)(32)}}{6} = \frac{44}{3} \pm \frac{4\sqrt{115}}{3}$$

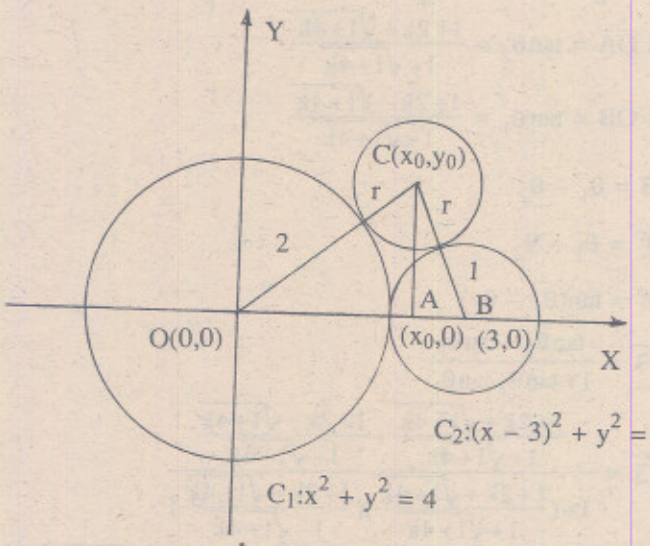
แทนค่า $k = \frac{44}{3} - \frac{4\sqrt{115}}{3}$ ในสมการ (1) จะพบว่าใช้ไม่ได้

เพราะฉะนั้น $k = \frac{44}{3} + \frac{4\sqrt{115}}{3}$ เท่านั้น

olimpic40 – 42

15. ตอบ $x_0 = 2 + \frac{r}{3}$

แนวคิด $C_1 : x^2 + y^2 = 4$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$



ΔOAC ; $AC^2 = OC^2 - OA^2$

$$y_0^2 = (r+2)^2 - x_0^2 \quad \text{....(1)}$$

ΔABC ; $AC^2 = BC^2 - AB^2$

$$y_0^2 = (r+1)^2 - (3 - x_0)^2 \quad \text{....(2)}$$

(1) = (2) ; $(r+2)^2 - x_0^2 = (r+1)^2 - (3 - x_0)^2$

$$(r+2)^2 - (r+1)^2 = x_0^2 - (3 - x_0)^2$$

$$((r+2) - (r+1))((r+2) + (r+1)) = (x_0 - (3 - x_0))(x_0 + (3 - x_0))$$

$2r + 3 = (2x_0 - 3)(3)$

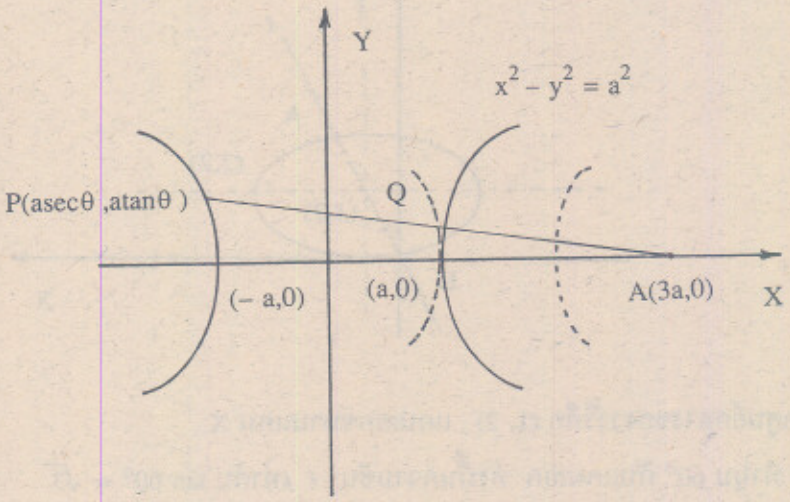
$2r + 3 = 6x_0 - 9$

$6x_0 = 2r + 12$

$x_0 = 2 + \frac{r}{3}$

16. ตอบ $(\frac{3a}{2}, 0)$

แนวคิด พิจารณากรณี $a > 0$



เมื่อ $P(a\sec\theta, a\tan\theta) = (-a, 0)$ จะได้จุดกึ่งกลาง $Q = (a, 0)$

$P(a\sec\theta, a\tan\theta) = (a, 0)$ จะได้จุดกึ่งกลาง $Q = (2a, 0)$

เพราะฉะนั้นพิกัดของจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลารูปใหม่คือ $(\frac{a+2a}{2}, 0)$

$= (\frac{3a}{2}, 0)$

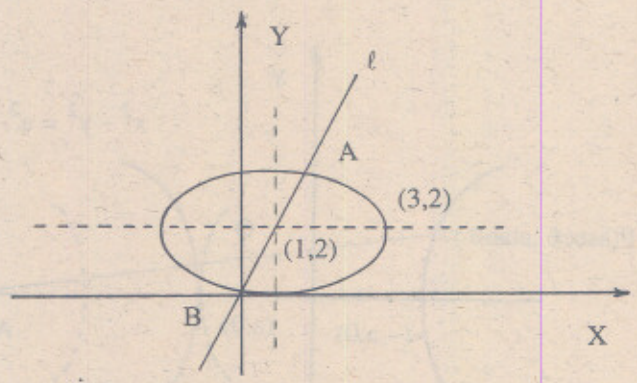
17. ตอบ $\frac{8}{\sqrt{5}}$

แนวคิด จัดรูปสมการวงรี $3x^2 + 4y^2 - 6x - 16y + 7 = 0$

$$3(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 4y + 4) = -7 + 3 + 16$$

$$3(x-1)^2 + 4(y-2)^2 = 12 \quad \ldots.(1)$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$



จุดศูนย์กลางของวงรีคือ (1, 2) , แกนเอกขนานแกน X

ℓ ทำมุม 60° กับแกนเอก ดังนั้นความชัน ℓ เท่ากับ $\tan 60° = \sqrt{3}$

สมการเส้นตรง ℓ ผ่านจุด (1, 2) และความชัน $\sqrt{3}$ มีสมการเป็น

$$y - 2 = \sqrt{3}(x - 1)$$

$$y = \sqrt{3}(x - 1) + 2$$

แทนค่าในสมการ (1) ; $3(x - 1)^2 + 4(\sqrt{3}(x - 1) + 2 - 2)^2 = 12$

$$15(x - 1)^2 = 12$$

$$(x-1)^2 = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$x = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$x = 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}$; $y = \sqrt{3}(1 + \frac{2}{\sqrt{5}} - 1) + 2 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2$

$x = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$; $y = \sqrt{3}(1 - \frac{2}{\sqrt{5}} - 1) + 2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2$

ให้ $A(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2)$, $B(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + 2)$

ระยะ $AB = \sqrt{\left[(1+\frac{2}{\sqrt{5}})-(1-\frac{2}{\sqrt{5}})\right]^2 + \left[(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+2)-(-\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+2)\right]^2}$

$= \sqrt{(\frac{4}{\sqrt{5}})^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\frac{16}{5}+\frac{48}{5}} = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

18. ตอบ $\frac{2}{\log 2 \log 15}$

แนวคิด $5^{\log_{25}(2b+2)^2} = 5^{2\log_{25}(2b+2)} = (25)^{\log_{25}(2b+2)} = 2b + 2$

$= 2\log_2 5 + 2 = \log_2 25 + \log_2 4 = \log_2 100$

เพราะฉะนั้น $\frac{5^{\log_{25}(2b+2)^2}}{\log 15} = \frac{\log_2 100}{\log 15} = \frac{\log 100}{\log 2 \log 15} = \frac{2}{\log 2 \log 15}$

หมายเหตุ โจทย์ข้อนี้หาค่าได้โดยไม่ต้องคำนวณค่า a

19. ตอบ $x = 100\sqrt{10}$

แนวคิด แทนค่า $k = \log x$

$$\sqrt[3]{2 - \log x} + \sqrt[3]{1 - 2\log x} + \sqrt[3]{6 + 3\log x} = 0$$

$$\sqrt[3]{2-k} + \sqrt[3]{1-2k} + \sqrt[3]{6+3k} = 0$$

$$\sqrt[3]{2-k} + \sqrt[3]{1-2k} = -\sqrt[3]{6+3k}$$

$(2-k) + 3(2-k)^{2/3}(1-2k)^{1/3} + 3(2-k)^{1/3}(1-2k)^{2/3} + (1-2k) = -(6+3k)$

$3(2-k)^{2/3}(1-2k)^{1/3} + 3(2-k)^{1/3}(1-2k)^{2/3} = -9$

$(2-k)^{1/3}(1-2k)^{1/3}[(2-k)^{1/3}+(1-2k)^{1/3}] = -3$

$(2-k)^{1/3}(1-2k)^{1/3}[-\sqrt[3]{6+3k}] = -3$

$(2-k)(1-2k)(6+3k) = 27$

$(k-2)(2k-1)(3k+6) = 27$

$6k^3 - 3k^2 - 24k + 12 = 27$

$6k^3 - 3k^2 - 24k - 15 = 0$

$2k^3 - k^2 - 8k - 5 = 0$

$(2k-5)(k+1)^2 = 0$

$k = 2.5$ หรือ -1

$\log x = 2.5$ หรือ -1

แต่ $\sqrt[3]{2-(-1)} + \sqrt[3]{1-2(-1)} + \sqrt[3]{6+3(-1)} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\log x = 2.5$ เท่านั้น

สรุป $x = 10^{2.5} = 100\sqrt{10}$ เท่านั้น

20. ตอบ $\frac{4}{3}$

แนวคิด ให้ $a = 2^x$ ดังนั้น $a > 0$

$P = 2^{x+2} - 3\cdot 4^x = 4\cdot 2^x - 3(2^2)^x = 4\cdot 2^x - 3\cdot(2^x)^2$

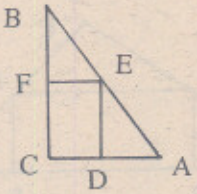
$= 4a - 3a^2 = -3(a^2 - \frac{4}{3}a) = -3(a^2 - \frac{4}{3}a + (\frac{4}{6})^2) + 3(\frac{4}{6})^2$

$= -3(a - \frac{4}{6})^2 + 3(\frac{2}{3})^2 = -3(a - \frac{2}{3})^2 + \frac{4}{3} \leq \frac{4}{3}$

ดังนั้น $P \leq \frac{4}{3}$

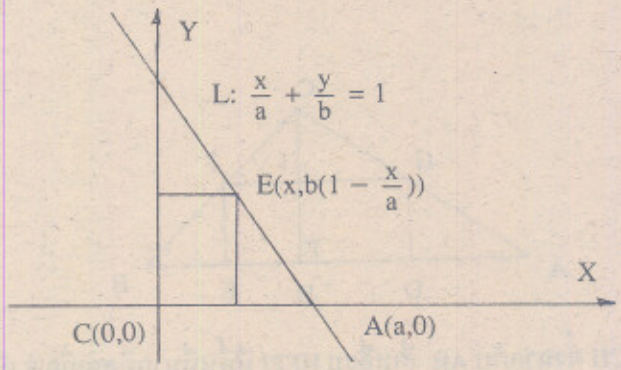
สรุป P มีค่ามากสุดเท่ากับ $\frac{4}{3}$ เมื่อ $2^x = \frac{2}{3}$

เคล็ดลับคณิตศาสตร์



ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมีมุม C เป็นมุมฉาก CDEF เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในสามเหลี่ยม ABC สี่เหลี่ยมผืนผ้า CDEF มีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับ ครึ่งหนึ่งของพื้นที่สามเหลี่ยม ABC เมื่อ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

ข้อพิสูจน์



พื้นที่สี่เหลี่ยม CDEF $= (CD)(DE) = xy = x(b(1 - \frac{x}{a})) = bx - \frac{b}{a}x^2$

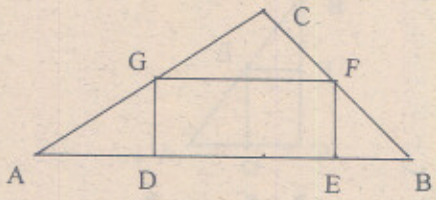
$$= -\frac{b}{a}(x^2 - ax) = -\frac{b}{a}(x^2 - ax + (\frac{a}{2})^2) + \frac{b}{a}(\frac{a}{2})^2$$

$$= -\frac{b}{a}(x - \frac{a}{2})^2 + \frac{b}{a}(\frac{a}{2})^2$$

$$\leq \frac{b}{a}(\frac{a}{2})^2 = \frac{1}{2}(\frac{ab}{2}) = \frac{1}{2}(\text{พื้นที่สามเหลี่ยม ABC})$$

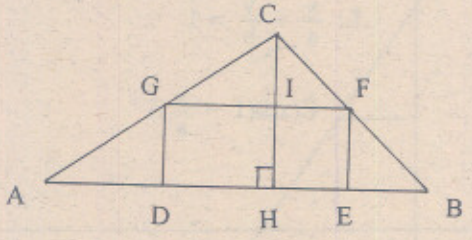
พื้นที่สี่เหลี่ยม CDEF มีค่ามากที่สุด $= \frac{1}{2}$(พื้นที่สามเหลี่ยม ABC)

เมื่อ $x = \frac{a}{2}$ และ $y = \frac{b}{2}$ นั้นคือ E เป็นจุดกึ่งกลางของ AB



ABC เป็นสามเหลี่ยม DEFG เป็นสี่เหลี่ยมที่บรรจุภายในสามเหลี่ยม ABC
พื้นที่สี่เหลี่ยม DEFG มีค่ามากที่สุดเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

ข้อพิสูจน์



ลากเส้น CH ตั้งฉากกับ AB สี่เหลี่ยม HEFI มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC เพราะฉะนั้น พื้นที่ HEFI = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ HBC

ลาก FI ต่อไปตัดด้าน AC ที่จุด G เพราะฉะนั้น FG ขนานกับ AB

เพราะว่า F เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC เพราะฉะนั้น G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC

เพราะฉะนั้นสี่เหลี่ยม DHIG เป็นสี่เหลี่ยมที่บรรจุในสามเหลี่ยม AHC

เพราะฉะนั้น พื้นที่ DHIG = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ AHC

สรุปสี่เหลี่ยม DEFG เป็นสี่เหลี่ยมที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุภายในสามเหลี่ยม ABC และ พื้นที่ DEFG = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ AHC + $\frac{1}{2}$ พื้นที่ AHC

= $\frac{1}{2}$(พื้นที่ AHC + พื้นที่ AHC) = $\frac{1}{2}$ พื้นที่ ABC

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปีการศึกษา 2540 สอบวันอาทิตย์ที่ 11 มกราคม 2541

ตอนที่ 1. (ข้อ 1–15 ข้อละ 2 คะแนน)

1. ถ้าให้ A, B, C เป็นเซตใด ๆ และ $\varnothing$ เป็นเซตว่างแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

   1. $C - (A \cup B) = (C - A) \cup (C - B)$
   2. ถ้า $A \cap B = A \cap C$ แล้ว $B = C$
   3. $A \subset C$, $B \subset C$ และ $(C - B) \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = C$
   4. $(B \cup A) \cap (\varnothing \cup A) \neq A$

2. ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 = xy + 1\}$ จำนวนสมาชิกของ $r \cap r^{-1}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 0 2. 2 3. 4 4. 6

3. วงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $V_1(1, 2)$ และ $V_2(7, 2)$ และความยาวครึ่งแกนโทเท่ากับ 2 หน่วย มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

   1. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$
   2. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
   3. $x^2 + y^2 - 16x - 9y + 32 = 0$
   4. $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 8 = 0$

4. ถ้า $\frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{1}{4}$ แล้ว ค่าของ $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{-55}{2}$ 2. $\frac{-17}{6}$ 3. $\frac{-13}{6}$ 4. $\frac{-1}{2}$

5. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = -\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
2. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

6. ให้ $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วยที่แตกต่างกัน และต่างก็ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\bar{i}+\bar{j}$ $\bar{u}+\bar{v}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$
2. $\sqrt{2}\bar{i}+\sqrt{2}\bar{j}$
3. $2\bar{i}+2\bar{j}$
4. $2\sqrt{2}\bar{i}+2\sqrt{2}\bar{j}$

7. ถ้า w_1, w_2, w_3 เป็นรากทั้งสามของสมการ $z^3 - 1 = 0$ โดยที่ w_2 และ w_3 อยู่ในควอดรันต์ที่ 2 และ 3 ตามลำดับแล้ว $w_1 + w_2 - w_3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. $-\sqrt{3}+2i$
4. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

8. นาย ก และ ข ร่วมกันผลิตผลิตภัณฑ์ทองเหลือง 2 ชนิด คือ ชนิด A และชนิด B โดยที่

(I) นาย ก หล่อผลิตภัณฑ์ชนิด A ใช้เวลาชิ้นละ 1 ชั่วโมง และผลิตภัณฑ์ชนิด B ใช้เวลาชิ้นละ 1.5 ชั่วโมง

(II) นาย ข ขัดเงาผลิตภัณฑ์ชนิด A ใช้เวลาชิ้นละ 2 ชั่วโมง และผลิตภัณฑ์ชนิด B ใช้เวลาชิ้นละ 1 ชั่วโมง

(III) เขาทั้งสองตกลงจะทำงานกันวันละไม่เกิน 8 ชั่วโมง และเพื่อไม่ให้สินค้าขาดตลาด เขาทั้งสองจะผลิตสินค้าแต่ละชนิดอย่างน้อย 1 ชิ้นต่อวัน

ถ้าผลิตภัณฑ์ชนิด A ได้กำไรชิ้นละ 600 บาท และชนิด B ได้กำไรชิ้นละ 700 บาท แล้วจากเงื่อนไขเหล่านี้เขาทั้งสองจะได้กำไรสูงสุดวันละเท่าไร

1. 3,400 บาท 2. 4,000 บาท 3. 4,500 บาท 4. 5,000 บาท

9. ค่าของ $\lim_{x\to -2} \frac{|3x+2|-4}{2-|x|}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -3 3. -4 4. หาค่าไม่ได้

10. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-3x-4} & ,0 \le x < 4 \\ a+\frac{3x}{8} & ,x \ge 4 \end{cases}$

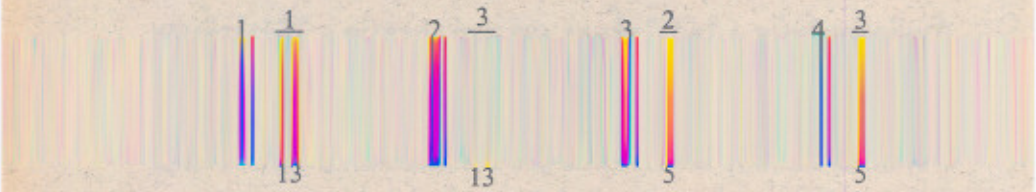
เมื่อ a เป็นค่าคงตัว ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 4$ แล้วค่าของ a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{5}{4}$

11. ถ้า $\int f(x)dx = \frac{2}{15}(15x^2+12x+8)\sqrt{(x-1)^3}+c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $f(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x^2\sqrt{x-1}$ 2. $5x^2\sqrt{x-1}$ 3. $7x^2\sqrt{x-1}$ 4. $9x^2\sqrt{x-1}$

12. ในงานเลี้ยงสังสรรค์รุ่นของคนกลุ่มหนึ่ง คนกลุ่มนี้มีบางคนรับประทานอาหารเจ เมื่อเลือกสั่งอาหาร ผู้รับประทานอาหารเจจะสั่งอาหารเจ 1 ชุด และผู้ที่ไม่รับประทานอาหารเจจะไม่สั่งอาหารเจ แต่จะสั่งสเต็กคนละหนึ่งชุดทุกคน ซึ่งอาจเป็นสเต็กหมูหรือสเต็กเนื้อ มีคนอยู่ 29 คน ที่ไม่เลือกสเต็กเนื้อ และมีคนอยู่ 35 คน ที่ไม่เลือกสเต็กหมู ถ้าจำนวนคนที่ต้องการสเต็กมีทั้งหมด 40 คน เมื่อเลือกผู้มาสังสรรค์งานนี้หนึ่งคนอย่างสุ่มขึ้นมากล่าวปราศรัย ความน่าจะเป็นที่ผู้ถูกเลือกคนนี้เป็นผู้รับประทานอาหารเจ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



13. นายปักษิณมีบุตร 6 คน เขาเลือกโรงเรียน 3 โรงเรียน เพื่อส่งบุตรเข้าเรียน โดยทุกโรงเรียนดังกล่าวต้องมีบุตรของเขาเข้าเรียนอย่างน้อย 1 คน ถ้าบุตรคนโตและบุตรคนสุดท้องจะต้องเรียนโรงเรียนเดียวกันแล้ว จำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกโรงเรียนเพื่อส่งบุตรเข้าเรียนของนาย ปักษิณ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 729 2. 243 3. 150 4. 50

14. การประมาณค่าของค่าคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในเรื่องความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ค่าในข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าน้อยที่สุด

1. $(\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i^2)$ 2. $\sum_i (y_i - x_i)^2$ 3. $\sum_i (y_i - \bar{y})^2$ 4. $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$

15. การแจกแจงจำนวนครอบครัว 40 ครอบครัวที่มีเครื่องรับโทรทัศน์มีดังนี้

จำนวนเครื่อง	จำนวนครอบครัว
1	14
2	12
3	8
4	4
5	2

ให้ สัมประสิทธิ์ของพิสัย = a

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ = b

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = c

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน = d

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $c < b < a < d$ 2. $b < d < a < c$

3. $a = b = c = d$ 4. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ตอนที่ 2. (ข้อ 16 – 25 ข้อละ 3 คะแนน)

16. ทฤษฎีบท ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $g(x) \neq 0$ ดังนั้นมีพหุนาม $q(x)$, $r(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ โดย $r(x) = 0$ หรือดีกรีของ $r(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $g(x)$ ถ้าเศษที่ได้จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $x - 1$ และ $x - 2$ คือ 2 และ 1 ตามลำดับแล้ว การหาร $p(x)$ ด้วย $x^2 - 3x + 2$ จะเหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x - 3$ 2. $-x + 3$ 3. 3 4. ข้อมูลที่ให้ไม่เพียงพอ

17. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

(1) เหตุ : 1. $p \leftrightarrow \sim q$

2. $r \vee (p \wedge q)$

ผล : $p \rightarrow r$

(2) เหตุ : 1. $p \wedge q$

2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

ผล : r

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (1) และ (2) สมเหตุสมผล 2. (1) เท่านั้นสมเหตุสมผล

3. (2) เท่านั้นสมเหตุสมผล 4. (1) และ (2) ไม่สมเหตุสมผล

18. ถ้า $r = \{(y , x) \in R \times R \mid y^4 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2 = 0\}$

แล้ว $R_r - D_r$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(1 , 1 + \sqrt{3}\,]$ 2. $(1 , 3]$ 3. $[-1, 1 - \sqrt{3}\,)$ 4. $\varnothing$

19. กำหนดให้ $3\log_7 a - 4\log_7 b = 28$ และ $5\log_7 a - 7\log_7 b = 49$

ค่าของ $(b^{7a} + 8\log_7 a)^{\frac{1}{14}}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{ab}$ 2. $\sqrt[7]{b}$ 3. $\sqrt{a}$ 4. $\sqrt[7]{ab}$

20. ให้ $A = \{ x \mid x \in [0, \pi] \text{ และ } 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^2 x = -\sec x \}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{12}$ 3. $\frac{17\pi}{4}$ 4. $\frac{17\pi}{12}$

21. กำหนดให้ f(n) คือผลบวก n พจน์แรกของลำดับ

0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3,.... จะได้ว่า f(1996) ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

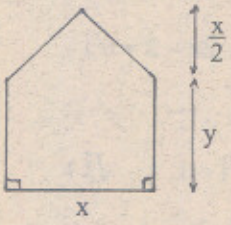
1. 664335 2. 662340 3. 442890 4. 441560

22. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{4\cdot 5}{3^4} + \ldots$

มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{7}{4}$ 4. $\frac{9}{4}$

23. หน้าต่างบานหนึ่งประกอบด้วยส่วนล่างเป็นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และส่วนบนเป็นส่วนของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีส่วนสูงเท่ากับครึ่งหนึ่งของฐาน (ดังรูป) โดยมีเส้นรอบรูปยาว 12 ฟุต เพื่อให้หน้าต่างนี้มีพื้นที่มากที่สุด ความยาวของฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\frac{12}{7}(2\sqrt{2} - 1)$
2. $\frac{12}{7}(2\sqrt{2} + 1)$
3. $\frac{12}{7}(\sqrt{2} - 1)$
4. $\frac{12}{7}(\sqrt{2} + 1)$

24. จากพยัญชนะในคำ "กรุงเทพมหานคร" เลือกมาจัดลำดับคราวละ 5 ตัว ให้ E คือเหตุการณ์ที่พยัญชนะ 5 ตัว ที่เรียงลำดับมี 2 ตัว เหมือนกัน P(E) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{11}$ 3. $\frac{4}{13}$ 4. $\frac{1}{28}$

25. ร้านขายขนมในเทศกาลตรุษจีนได้รวบรวมข้อมูลการจำหน่ายขนมไว้ดังนี้

	ปริมาณ (พันหน่วย)			ราคาต่อหน่วย		
รายการสินค้า	2537	2538	2539	2537	2538	2539
ขนมเทียนไส้เค็ม	2	3	4	3.00	3.50	4.00
ขนมเทียนไส้หวาน	2	2	4	3.00	3.50	4.00
ขนมเข่งธรรมดา	2	3.5	4	2.00	2.50	3.00
ขนมเข่งใส่กะทิ	2	1.5	4	2.00	3.00	4.00

พ.ศ. 2537 เป็นปี ฐาน พ.ศ. 2539 เป็นปีที่ต้องการหาเลขดัชนี โดยให้

I_1 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

I_2 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_3 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐานและปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_4 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $I_1 = I_2$ และ $I_3 \neq I_4$ 2. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 = I_4$
3. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 \neq I_4$ 4. $I_1 = I_2$ และ $I_3 = I_4$

ตอนที่ 3. (ข้อ 26 – 30 ข้อละ 4 คะแนน)

26. ให้ $A = \{ U \mid U \neq \varnothing , U \subset (-\infty , \infty)$ และประพจน์

$\forall x (x^4 - x^3 - x^2 + x = 0)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เมื่อ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ $\}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 7 4. 8

27. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n > 2$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\det A = 0$ แล้ว $\det(\text{adj}A) = 0$

(2) ถ้า $B = \text{adj}A$ แล้ว $\det(\text{adj}B) = (\det A)^{(n-1)^2}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
2. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

28. ถ้า $|z| = 1$ และ a, b เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $|az + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$
2. $|az + b| = |a| + |b|$
3. $|a\bar{z} + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$
4. $|a\bar{z} + b| = |a| + |b|$

29. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC $\cos B\hat{A}M$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A - 2\sin A \cos C}}$
2. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A + 2\sin A \cos C}}$
3. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C - 2\sin C \cos A}}$
4. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C + 2\sin C \cos A}}$

30. กำหนดให้ $\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \ldots$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4} + \ell n\frac{4}{5}$ 2. $\frac{1}{4} - \ell n\frac{4}{5}$ 3. $\frac{4}{5} + \ell n\frac{4}{5}$ 4. $\frac{4}{5} - \ell n\frac{4}{5}$

ตอนที่ 4 จงเขียนเฉพาะคำตอบ (ข้อละ 4 คะแนน)

31. จงหาคู่อันดับ (m , n) ของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด ซึ่ง $m^2 - n^2 = 72$

32. สำหรับจำนวนจริง z ใดๆ [z] หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ z ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$|x+3| - |x-1| = x+1 \quad \text{และ} \quad [x]^2 + [y]^2 = 5$$

จงหา [y] ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

33. ให้ A(2 , 1) , B(6 , 5) , C(9 , 3) และ $D(d_1 , d_2)$ เป็นจุด 4 จุด ในระนาบ XY ที่ทำให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

และให้ $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma x + 24y + \eta = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่ D จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ และความยาวแกนตามขวางเป็น 2 เท่าของระยะทางระหว่างจุด B และ C

η เท่ากับเท่าใด

34. ให้ $A = \{ x \mid x \in [0, \frac{3\pi}{2}] \text{ และ } \sin 2x + \cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \}$

จงเขียนเซต A แบบแจกแจงสมาชิก

35. จำนวนจริง a ซึ่งทำให้เมตริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{bmatrix}$

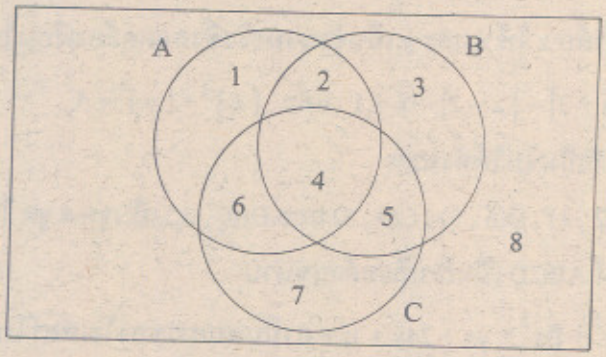
มีสมบัติว่า $\det(A^{10}) = 1$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

เฉลยข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปีการศึกษา 2540

ตอนที่ 1.

1. ตอบ 3.

แนวคิด 1. ผิด ตัวอย่างเช่น



$C - (A \cup B) = \{7\}$

$(C - A) \cup (C - B) = \{5, 7\} \cup \{6, 7\} = \{5, 6, 7\}$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$

$A \cap C = \varnothing = B \cap C$ แต่ $A \neq B$

4. ผิด เพราะว่า $\varnothing \cup A = A$, $A \subset A \cup B$

เพราะฉะนั้น $(A \cup B) \cap (\varnothing \cup A) = (A \cup B) \cap A = A$

3. ถูกต้องให้นักเรียนลองแสดงข้อพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

สมมติ $A \subset C, B \subset C$ และ $(C-B) \subset A$

เพราะฉะนั้น $A \cup B \subset C$ แน่นอน ....(1)

ให้ $x \in C$ ถ้า $x \in B$ แล้ว $x \in A \cup B$

ถ้า $x \notin B$ จะได้ว่า $x \in C-B$ ทำให้ $x \in A$ ดังนั้น $x \in A \cup B$ แน่นอน

สรุป $C \subset A \cup B$ ....(2)

จาก (1) และ (2) $A \cup B = C$

สมมติ $A \cup B = C$

เพราะฉะนั้น $A \subset A \cup B = C, B \subset A \cup B = C$

และ $C - B = (A \cup B) - B \subset A = (A \cup B) \cap B'$

$= (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A \cap B') \cup \varnothing = A \cap B' \subset A$ แน่นอน

2. ตอบ 2.

แนวคิด $(x, y) \in r \cap r^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in r$ และ $(x, y) \in r^{-1}$

$\leftrightarrow (x, y) \in r$ และ $(y, x) \in r$

$\leftrightarrow y^2 = xy + 1$ และ $x^2 = xy + 1$

การหาคำตอบของสมการ $y^2 = xy + 1$ ....(1)

$x^2 = xy + 1$ ....(2)

(1) – (2) ; $y^2 - x^2 = 0 \longrightarrow y^2 = x^2 \longrightarrow y = \pm x$

แทนค่า $y = x$ ในสมการ (1) ; $x^2 = x^2 + 1 \longrightarrow 0 = 1$ เป็นไปไม่ได้

แทนค่า $y = -x$ ในสมการ (1) ; $x^2 = -x^2 + 1 \longrightarrow 2x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

สรุป $r \cap r^{-1} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})\}$

3. ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า 1. และ 3. เป็นสมการวงกลม เพราะฉะนั้นตัด 1. , 3 ทิ้ง

เพราะว่าจุดยอด $V_1(1, 2)$, $V_2(7, 2)$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(\frac{1+7}{2}, \frac{2+2}{2}) = (4, 2)$

จุดยอดของวงรีแต่ละตัวเลือก คือ 2. $(4, 2)$, 4. $(4, -2)$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(4, 2)$ และ $2a = 7 - 1 = 6$, $a = 3$, $b = 2$

สมการวงรี คือ $$\frac{(x-4)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{x^2 - 8x + 16}{9} + \frac{y^2 - 4y + 4}{4} = 1$$

$$4(x^2 - 8x + 16) + 9(y^2 - 4y + 4) = 36$$

$$4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$$

4. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อนี้ฝึกสังเกตจะเห็นว่า $x = 0$ ได้ นั้นคือ $\frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{4}$

ดังนั้น $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2} = 0 - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

วิธีจริง แทนค่า $y = e^x \longrightarrow \frac{y^2}{(1+y)^2} = \frac{1}{4}$

$$4y^2 = (1 + y)^2 = 1 + 2y + y^2$$

$3y^2 - 2y - 1 = 0 \longrightarrow (3y + 1)(y - 1) = 0 \longrightarrow y = -\frac{1}{3}, 1$

แต่ $y = e^x > 0$ เพราะฉะนั้น $e^x = 1$, $x = 0$

จะได้ $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ เหมือนกัน

5. ตอบ 3.

แนวคิด (1) ผิด เพราะว่า $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} > \frac{\pi}{2}$$

และ $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ต้องผิดแน่

(2) ถูกต้อง $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$$

$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(15) = \cos(45 - 30) = \cos45\cos30 + \sin45\sin30$

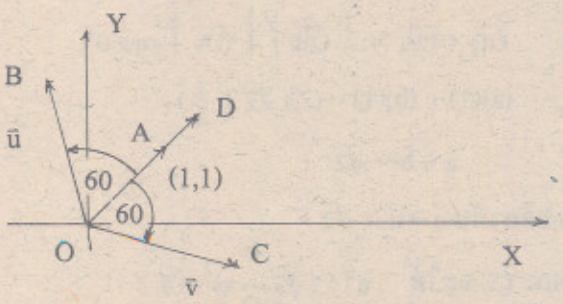
$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{12} = \arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

สรุป $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = -\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ถูกต้อง

6. ตอบ 2.

แนวคิด คำถามแบบนี้วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ก็จะได้คำตอบแล้ว



ขั้นตอนการวาดรูป 1. เขียน A(1, 1) จะได้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + \bar{j}$

2. ลาก OB และ OC ยาว 2 หน่วยโดยให้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C = 60^\circ$

3. ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OB}, \bar{v} = \overrightarrow{OC}$

4. ลาก $\overrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ และยาว 2 หน่วย

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OD}$ คือ $\bar{u} + \bar{v}$

จะได้ OCD เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า, $\left|\overrightarrow{OD}\right| = 2$

เพราะว่า 1. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right| = 1$ 2. $\left|\sqrt{2}i + \sqrt{2}j\right| = 2$

3. $\left|2\bar{i} + 2\bar{j}\right| = 2\sqrt{2}$ 4. $\left|2\sqrt{2}\bar{i} + 2\sqrt{2}\bar{j}\right| = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3., 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก โดยใช้ขนาดของเวกเตอร์ เพราะว่า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$

ดังนั้น $\left|\bar{u} + \bar{v}\right| < \left|\bar{u}\right| + \left|\bar{v}\right| = 2 + 2 = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ได้

วิธีจริง สมมติ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

$\left|\bar{u}\right| = 2 \rightarrow a^2 + b^2 = 4$ ....(1)

$\left|\bar{u}\right| = 2 \rightarrow c^2 + d^2 = 4$ ....(2)

$\overrightarrow{OA} = \bar{i} + \bar{j}$, $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{2}$

เพราะว่า $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \left|\overrightarrow{OB}\right| \left|\overrightarrow{OA}\right| \cos 60^\circ$

$(a)(1) + (b)(1) = (2)(\sqrt{2})(\frac{1}{2})$

$a + b = \sqrt{2}$ ....(3)

ในทำนองเดียวกัน $c + d = \sqrt{2}$ ....(4)

จาก (1) และ (3) จะได้ $a^2 + (\sqrt{2} - a)^2 = 4$

$$a^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,a + a^2 = 4$$

$$2a^2 - 2\sqrt{2}\,a - 2 = 0$$

$$a^2 - \sqrt{2}\,a - 1 = 0$$

$$a = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$, $d = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

สรุป $\bar{u} + \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j}) + (c\bar{i} + d\bar{j}) = (a + c)\,\bar{i} + (b + d)\,\bar{j} = \sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$

วิธีที่ 2 จากเงื่อนไขของโจทย์จะได้ว่า $\bar{u} + \bar{v}$ ต้องเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}$ และมีขนาดเท่ากับ 2.

เพราะฉะนั้น $\bar{u} + \bar{v} = 2\left(\frac{\bar{i} + \bar{j}}{|\bar{i} + \bar{j}|}\right) = \frac{2(\bar{i} + \bar{j})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$

7. ตอบ 2.

แนวคิด $z^3 = 1 \longrightarrow z^3 - 1 = 0 \longrightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$

$$\longrightarrow z = 1,\ \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2} = 1,\ -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

เพราะฉะนั้น $w_1 = 1$, $w_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $w_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$w_1 + w_2^2 - w_3 = 1 + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^2 - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1$$

8. ตอบ 2.

แนวคิด x = จำนวน ผลิตภัณฑ์ A y = จำนวน ผลิตภัณฑ์ B

p = กำไร = $600x + 700y$

จากเงื่อนไข (1) $\longrightarrow$ เวลาของนาย ก. เท่ากับ $x + 1.5\,y$

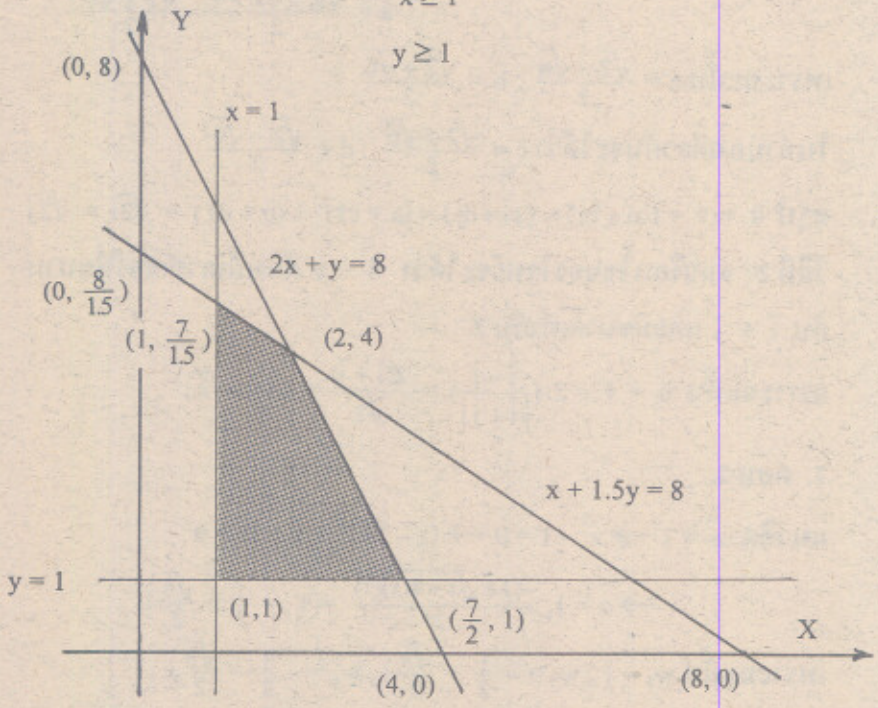
จากเงื่อนไข (2) $\longrightarrow$ เวลาของนาย ข. เท่ากับ $2x + y$

จากเงื่อนไข (3) $\longrightarrow$ $x + 1.5y \leq 8$

$2x + y \leq 8$

$x \geq 1$

$y \geq 1$



คำนวณค่า P ตามจุดมุมได้เป็น

(x, y)	P
(1,1)	1300
$(\frac{7}{2}, 1)$	$\frac{7}{2}(600) + 700 = 2800$
(2, 4)	2(600) + 4(700) = 4000
$(1, \frac{7}{1.5})$	3866.67

สรุปกำไรมากสุด = 4000 บาท เมื่อผลิต A 2 ชิ้น ผลิต B 4 ชิ้น

9. ตอบ 2.

แนวคิด $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-(3x+2)-4}{2-(-x)}$

$= \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3x-6}{2+x}$

$= \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3(x+2)}{2+x} \quad = -3$

เพราะว่าหาก limit หาค่าได้ก็ต้องเท่ากับ –3

เพราะฉะนั้นถึงขั้นตอนนี้เราต้องตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ทำนองเดียวกัน $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-(3x+2)-4}{2-(-x)} = -3$

สรุป $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = -3$

10. ตอบ 4.

แนวคิด f ต่อเนื่องที่ $x = 4$ เมื่อ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = f(4)$

$\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to 4^+} (a + \dfrac{3x}{8}) = a + \dfrac{3(4)}{8}$

การหาค่า $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-3x-4} = \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{(x-4)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(x+1)}$

$= \lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+2)(x+1)}$

$= \dfrac{5}{20}$

ดังนั้น $\dfrac{5}{20} = a + \dfrac{3(4)}{8} = a + \dfrac{3}{2}$

$a = \dfrac{5}{20} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5-30}{20} = -\dfrac{25}{20}$

$a = -\dfrac{5}{4}$

11. ตอบ 3.

แนวคิด $f(x) = \frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{15}(15x^2+12x+8)\sqrt{(x-1)^3}+c\right]$

$$= \frac{2}{15}\left[\frac{d}{dx}((15x^2+12x+8)(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[(15x^2+12x+8)\frac{d}{dx}(x-1)^{\frac{3}{2}}+(x-1)^{\frac{3}{2}}\frac{d}{dx}(15x^2+12x+8)\right]$$

$$= \frac{2}{15}\left[(15x^2+12x+8)\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}+(x-1)^{\frac{3}{2}}(30x+12)\right]$$

ข้อแนะนำ แทนที่เราจะจัดรูปไปหาตัวเลือก เรามาใช้วิธีแทนค่า x บางค่าแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น แทน $x = 2$ จะได้ว่า

$$f(2) = \frac{2}{15}\left[(60+24+8)(\frac{3}{2})(1)+(1)(60+12)\right] = \frac{2}{15}(138+72) = 28$$

1. $3x^2\sqrt{x-1} = 12$
2. $5x^2\sqrt{x-1} = 20$
3. $7x^2\sqrt{x-1} = 28$
4. $9x^2\sqrt{x-1} = 36$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

12. ตอบ 2.

แนวคิด J = เซตของผู้รับประทานอาหารเจ

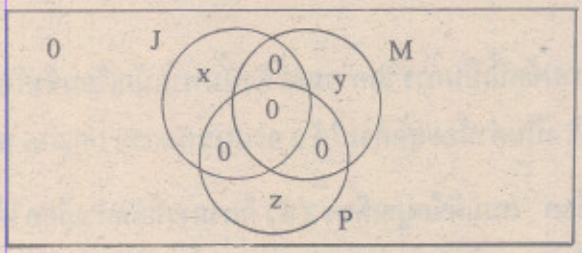
M = เซตของผู้รับประทานสเต็กเนื้อ

P = เซตของผู้รับประทานสเต็กหมู

เพราะว่า ผู้รับประทานอาหารเจจะสั่งอาหารเจ 1 ชุด และผู้ที่ไม่รับประทานอาหารเจจะไม่สั่งอาหารเจ แต่จะสั่งสเต็กคนละหนึ่งชุดทุกคน ซึ่งอาจเป็นสเต็กหมูหรือสเต็กเนื้อ

เพราะฉะนั้น $(J \cup M \cup P)' = \varnothing, J \cap M = \varnothing, J \cap P = \varnothing, M \cap P = \varnothing$

ให้ x, y, z เป็นจำนวนคนในบริเวณที่เหลือตามแผนภาพของเวนน์



จากเงื่อนไขของโจทย์

มีคนอยู่ 29 คน ที่ไม่เลือกสเต็กเนื้อ $\rightarrow x + z = 29$ ....(1)

มีคนอยู่ 35 คน ที่ไม่เลือกสเต็กหมู $\rightarrow x + y = 35$ ....(2)

จำนวนคนที่ต้องการสเต็กมีทั้งหมด 40 คน $\rightarrow y + z = 40$ ....(3)

(1) + (2) + (3) ; $2(x + y + z) = 104 \rightarrow x + y + z = 52$

(1) + (2) ; $2x + (y + z) = 64 \rightarrow 2x + (40) = 64 \rightarrow x = 12$

P(ผู้ถูกเลือกเป็นคนที่รับประทานอาหารเจ) $= \frac{x}{x+y+z} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

13. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ A, B, C, D, E, F เป็นบุตร 6 คน ของนายปักษิณ

เพราะว่า A และ F ต้องอยู่ด้วยกัน

เพราะฉะนั้นการนับเราจะพิจารณาเป็น 5 กลุ่ม คือ AF, B, C, D, E

เพราะว่าทุกโรงเรียนต้องมีบุตรนายปักษิณอย่างน้อย 1 คน

ดังนั้นการจัดลำดับทำได้ $= \left(\frac{5!}{2!2!1!2!}\right)(3!) + \left(\frac{5!}{3!1!1!2!}\right)(3!)$

$= \frac{(120)(6)}{4(2)} + \frac{(120)(6)}{6(2)} = 90 + 60 = 150$

หมายเหตุ $\frac{5!}{2!2!1!2!}$ มาจากมีของ 5 แบ่งเป็น 3 กอง ๆ ละ 2, 2, 1

$\left(\frac{5!}{2!2!1!2!}\right)(3!)$ มาจากต้องจัดเข้าโรงเรียนทั้ง 3 แห่ง จึงต้องคูณด้วย 3!

แนวคิด คำถามข้อนี้เป็นการวัดความจำ ดังนั้นหากนักเรียนจำคำตอบได้ว่า $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$ เป็นค่าน้อยสุดก็จะได้ 2 คะแนนสบายๆ (ค.016 หน้า 67)

การตัดตัวเลือก สมมติข้อมูลเพียง 2 ตัว ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่น ข้อมูลที่มาจาก $\hat{y} = 2x + 3$

x	y	$\hat{y}$
1	5	5
2	7	7

1. $\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i^2\right) = (5)(25 + 49) = (5)(74) = 370$

2. $\sum_i (y_i - x_i)^2 = (4)^2 + (5)^2 = 16 + 25 = 41$

3. $\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = (5 - 6)^2 + (7 - 6)^2 = 2$

4. $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = (5 - 5)^2 + (7 - 7)^2 = 0$

ดังนั้นต้องตัดตัวเลือก 1. , 2. , 3. ทิ้งได้

15. ตอบ 4.

แนวคิด a = สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{\max - \min}{\max + \min} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} = 0.6666$

b = สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{3-1}{3+1} = 0.5$

ดังนั้น b < a ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$$\bar{X} = \frac{(1)(14) + (2)(12) + (3)(8) + (4)(4) + (5)(2)}{40} = \frac{88}{40} = 2.2$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (M.D.)

$$= \frac{|1 - 2.2|(14) + |2 - 2.2|(12) + |3 - 2.2|(8) + |4 - 2.2|(4) + |5 - 2.2|(2)}{40}$$

$$= \frac{(0.8)(14)+(0.2)(12)+(0.8)(8)+(1.8)(4)+(2.8)(2)}{40} = \frac{32.8}{40} = 0.82$$

c = สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{M.D.}{\overline{X}} = \frac{0.82}{2.2} = 0.3727$

เพราะฉะนั้น $c < b < a$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ได้

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \overline{x})^2 f_i}{40}$$

$$= \frac{(0.8)^2(14)+(0.2)^2(12)+(0.8)^2(8)+(1.8)^2(4)+(2.8)^2(2)}{40} = \frac{43.2}{40} = 1.08$$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\overline{x}}$ เพราะฉะนั้น $d = \frac{\sqrt{1.08}}{2.2} = \frac{1.0392}{2.2} = 0.4723$

ดังนั้น $c < d < b < a$ สรุปไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

16. ตอบ 2.

แนวคิด สมมติเศษเหลือ คือ $ax + b$

เพราะว่า $\frac{p(x)}{x^2-3x+2} = q(x) + \frac{ax+b}{x^2-3x+2}$

เพราะฉะนั้น $p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (ax + b)$

เพราะว่า $x - 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2 เพราะฉะนั้น $p(1) = 2$

ดังนั้น $2 = p(1) = q(x)(0) + (a + b)$

$$a + b = 2 \quad \text{....(1)}$$

เพราะว่า $x - 2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น $p(2) = 1$

ดังนั้น $1 = p(2) = q(1)(0) + 2a + b$

$$2a + b = 1 \quad \text{....(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = -1$ และ $b = 3$ สรุปเศษเหลือ คือ $-x + 3$

การตัดตัวเลือก จากโจทย์ต้องได้ว่า $p(1) = 2$, $p(2) = 1$

สมมติเศษเหลือ คือ $x - 3$ เพราะฉะนั้น $\frac{p(x)}{x^2-3x+2} = q(x) + \frac{(x-3)}{x^2-3x+2}$

$$p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (x - 3)$$

ทำให้ $p(1) = q(1)(0) + (1 - 3) = -2$

ขัดแย้งกับโจทย์ที่กำหนดว่า $p(1) = 2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้ ต่อไปลองแทนค่า

$$\frac{p(x)}{x^2 - 3x + 2} = q(x) + \frac{(-x + 3)}{x^2 - 3x + 2} \rightarrow p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (-x + 3)$$

จะเห็นได้ว่า $p(1) = 2$ และ $p(2) = 1$

ดังนั้นเศษเหลือ คือ $-x + 3$ เลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

17. ตอบ 1.

แนวคิด (1) สมมติ $((p \leftrightarrow \sim q) \wedge (r \vee (p \wedge q))) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \leftrightarrow \sim q \equiv T$, $r \vee (p \wedge q) \equiv T$, $p \rightarrow r \equiv F$

ดังนั้น $P \equiv T$, $r \equiv F$ เพราะว่า $r \vee (p \wedge q) \equiv T$ เพราะฉะนั้น $p \wedge q \equiv T$

ดังนั้น $P \equiv T$ และ $q \equiv T$ ขัดแย้งกับ $p \leftrightarrow \sim q \equiv T$

ดังนั้น $((p \leftrightarrow \sim q) \wedge (r \vee (p \wedge q))) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นจริงเสมอ

สรุป (1) สมเหตุสมผล

(2) สมมติ $((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow r$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \wedge q \equiv T$, $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv T$, $r \equiv F$ เพราะฉะนั้น $P \equiv T$, $q \equiv T$

เกิดข้อขัดแย้งกับ $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv T \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv T \rightarrow F \equiv F$

ดังนั้น $((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))) \rightarrow r$ เป็นจริงเสมอ

สรุป (2) สมเหตุสมผล

18. ตอบ 1.

แนวคิด $r = \{(y, x) \in R \times R \mid y^4 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2 = 0\}$

พิจารณาสมการ $y^4 + x^2 + 2y^2 - 2x - 2 = 0$

$(y^4 + 2y^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1) = 4 \rightarrow (y^2 + 1)^2 + (x - 1)^2 = 4$

ดังนั้น $(y^2 + 1)^2 = 4 - (x - 1)^2$ หรือ $(x - 1)^2 = 4 - (y^2 + 1)^2$

เพราะว่า $(x - 1)^2 = 4 - (y^2 + 1)^2$ และ $(y^2 + 1)^2 \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(x - 1)^2 \leq 3 \rightarrow -\sqrt{3} \leq x - 1 \leq \sqrt{3} \rightarrow 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$

ดังนั้น $R_r = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}]$

เพราะว่า $(y^2 + 1)^2 = 4 - (x - 1)^2 \leq 4$

เพราะฉะนั้น $0 \leq (y^2 + 1)^2 \leq 4 \rightarrow 0 \leq y^2 + 1 \leq 2 \rightarrow y^2 \leq 1$

$\rightarrow -1 \leq y \leq 1 \rightarrow D_r = [-1, 1]$

สรุป $R_r - D_r = [1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}] - [-1, 1] = (1, 1 + \sqrt{3}]$

19. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ $x = \log_7 a$, $y = \log_7 b$

จาก $3\log_7 a - 4\log_7 b = 28$

จะได้ $3x - 4y = 28$ ....(1)

จาก $5\log_7 a - 7\log_7 b = 49$

จะได้ $5x - 7y = 49$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $x = 0$, $y = -7$

เพราะฉะนั้น $\log_7 a = 0$, $\log_7 b = -7$ ดังนั้น $a = 1$ และ $b = (-7)^7$

สรุป $(b^{7a} + 8\log_7 a)^{\frac{1}{14}} = (b^7 + 8\log_7 1)^{\frac{1}{14}} = b^{\frac{7}{14}} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$

20. ตอบ 4

แนวคิด $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^2 x = -\sec x$

$$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^2 x = \frac{-1}{\cos x}$$

$$3\sqrt{2}\cos x - 4\sqrt{2}\cos^3 x = -1$$

$$3\sqrt{2}\cos x - 4\sqrt{2}\cos^3 x + 1 = 0$$

แทนค่า $V = \cos x$ จะได้ $3\sqrt{2}V - 4\sqrt{2}V^3 + 1 = 0$

แทนค่า $V = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $3\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) - 4\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}})^3 + 1$

$$= -3 - 4\sqrt{2}(-\frac{1}{2\sqrt{2}}) + 1 = -3 + 2 + 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $V + \frac{1}{\sqrt{2}}$ หาร $3\sqrt{2}V - 4\sqrt{2}V^3 + 1$ ลงตัว

โดยการตั้งหารยาวจะได้

$$(V + \frac{1}{\sqrt{2}})(-4\sqrt{2}V^2 + 4V + \sqrt{2}) = 3\sqrt{2}V - 4\sqrt{2}V^3 + 1$$

เพราะฉะนั้น $3\sqrt{2}V - 4\sqrt{2}V^3 + 1 = 0$

$$(V + \frac{1}{\sqrt{2}})(-4\sqrt{2}V^2 + 4V + \sqrt{2}) = 0$$

$$-4\sqrt{2}V^2 + 4V + \sqrt{2} = 0$$

$$4V^2 - 2\sqrt{2}V - 1 = 0$$

$$V = -\frac{(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8+16}}{8} = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{24}}{8}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \pm 2\sqrt{6}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} \pm \frac{2\sqrt{6}}{8}$$

จาก $V = \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{2 \cdot 2}$

$= (\frac{1}{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4})$

$= \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{12})$

ดังนั้น $V = \cos(\frac{7\pi}{12})$ ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $\cos x = V = \frac{2\sqrt{2}}{8} \pm \frac{2\sqrt{6}}{8}$

$= (\frac{1}{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \cos(\frac{\pi}{3})\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{4})$

$= \cos(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{12})$

สรุป $x \in [0, \pi]$ จะได้

$\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{2\sqrt{6}}{8}, \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{2\sqrt{6}}{8} = \cos(\frac{3\pi}{4}), \cos(\frac{7\pi}{12}), \cos(\frac{\pi}{12})$

$x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$

$A = \{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\}$ มีผลบวก $= \frac{17\pi}{12}$

หมายเหตุ ถ้าจำได้ว่า $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ จะทำให้ง่ายขึ้น ดังนี้

$3\sqrt{2} - 4\sqrt{2}\cos^2 x = -\sec x$

$3\sqrt{2}\cos x - 4\sqrt{2}\cos^2 x = -1$

$3\cos x - 4\cos^3 x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$3\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$3x = \frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}$

สรุป $A = \{\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}\}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของสมาชิกใน A เท่ากับ $\frac{17\pi}{12}$

21. ตอบ 1.

แนวคิด

$$f(1996) = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{1994} + a_{1995} + a_{1996})$$

$$= 0 + (1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 2) + \ldots + (a_{1994} + a_{1995} + a_{1996})$$

$$= 0 + (1 + 1 + 1) + (2 + 2 + 2) + \ldots + (665 + 665 + 665)$$

↑ มาจาก $\frac{1995}{3}$

$$= 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 665) = 3(\tfrac{665}{2})(665 + 1) = 664335$$

22. ตอบ 4.

แนวคิด จาก $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{1-x}) = (2.1) + (3.2)\,x + (4.3)\,x^2 + (5.4)\,x^3 + \ldots$$

$$(1.2) + (2.3)\,x + (3.4)\,x^2 + (5.4)\,x^3 + \ldots = \frac{d^2}{dx^2}(\frac{1}{1-x})$$

$$\frac{(1\cdot 2)x + (2\cdot 3)x^2 + (3\cdot 4)x^3 + (5\cdot 4)x^4 + \ldots}{x} = \frac{d}{dx}(\frac{1}{(1-x)^2}) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

สรุป $(1 \cdot 2)\,x + (2 \cdot 3)\,x^2 + (3 \cdot 4)\,x^3 + (5 \cdot 4)\,x^4 + \ldots = \frac{2x}{(1-x)^3}$

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$ จะได้

$$\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{5\cdot 4}{3^4} + \ldots = \frac{2(\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{8}{27})} = \frac{(2)(27)}{(3)(8)} = \frac{9}{4}$$

การตัดตัวเลือก

ให้ $S = \frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{4\cdot 5}{3^4} + \ldots = \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{12}{27} + K$

เมื่อ K คือผลบวกส่วนที่เหลือ, ดังนั้น $K > 0$

เพราะฉะนั้น $S > \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{12}{27} = \frac{18+18+12}{27} \quad \frac{48}{27} > 1.77$

แต่ $\frac{3}{4} < 1.77$, $\frac{5}{4} < 1.77$, $\frac{7}{4} < 1.77$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

จริงๆ แล้วเราจะบวกทีละตัว แล้วตัดตัวเลือกทีละตัวก็ได้

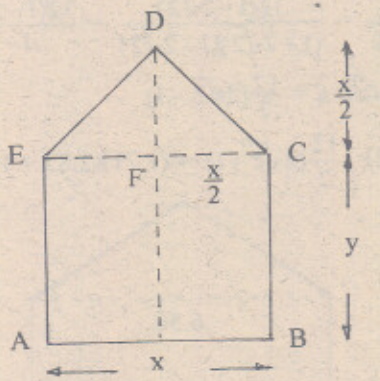
เช่น $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > \frac{3}{4}$ $\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} = \frac{4}{3} + \frac{12}{27} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1.777 > \frac{5}{4}$ และมากกว่า $\frac{7}{4}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

23. ตอบ 1.

แนวคิด



$DF = \frac{x}{2}$, $CF = \frac{x}{2}$ จะได้ $DC^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2} \longrightarrow DC = \frac{x}{\sqrt{2}}$

ความยาวเส้นรอบรูป ABCDE

$12 = AB + BC + CD + DE + EF = x + y + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + y = (1+\sqrt{2})x + 2y$

ดังนั้น $y = \frac{12-(1+\sqrt{2})x}{2}$

พื้นที่หน้าต่าง $= \text{พ.ท.}\square ABCD + \text{พ.ท.}\Delta CDE = xy + \frac{1}{2}(EC)(DF)$

$= xy + \frac{1}{2}(x)\frac{x}{2} \quad = x\left(\frac{12-(1+\sqrt{2})x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$

$= x\left(6 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x\right) + \frac{x^2}{4} = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{4}$

$= 6x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

ให้ $f(x) = 6x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = 6 - \frac{x}{2} - \frac{2x}{\sqrt{2}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}$

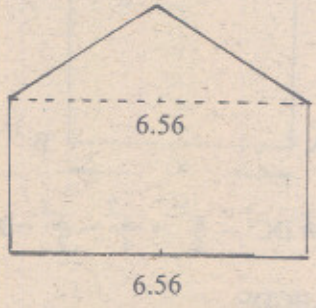
$f'(x) = 0 \leftrightarrow 6 - \frac{x}{2} - \frac{2x}{\sqrt{2}} = 0 \leftrightarrow 12 - x - 2\sqrt{2}x = 0$

$\leftrightarrow \quad x + 2\sqrt{2}x = 12 \leftrightarrow x(1+2\sqrt{2}) = 12$

$x = \frac{12}{1+2\sqrt{2}} = \frac{12(1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = \frac{12(1-2\sqrt{2})}{1-8} = \frac{12}{7}(2\sqrt{2}-1)$

สรุปพื้นที่มากสุดเมื่อ $x = \frac{12}{7}(2\sqrt{2}-1)$

การตัดตัวเลือก (2). $\frac{12}{7}(2\sqrt{2}+1) = (1.71)(2.83+1) = 6.56$



เส้นรอบรูปจะเกิน 12 ฟุตแน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก (2) ทิ้ง

24. ตอบ $\frac{2}{9}$

แนวคิด พยัญชนะในคำ "กรุงเทพมหานคร" คือ ก, ร, ง, ท, พ, ม, ห, น, ค, ร เนื่องจากมี ร. เรือ ให้เลือกใช้ได้ 2 ตัว ดังนั้นนักเรียนต้องมีข้อควรระวังในการเขียนแซมเบิลสเปซ เช่น

S = เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดในการจัดลำดับตัวอักษร 5 ตัว

= { กรงทพ, กงทพม, ... }

เพราะว่ามี ร. เรือ ซ้ำ 2 ตัว ดังนั้น "กรงทพ" มีโอกาสเกิดเป็น 2 เท่าของ "กงทพม"

เพราะฉะนั้นเราควรจำแนก ร. เรือ 2 ตัวนั้นเป็น $ร_1$, $ร_2$

ดังนั้น S ที่สมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดเท่ากันควรมีสมาชิกเป็นดังนี้

S = { $กร_1$งทพ, $กร_2$งทพ, กงทพม, ... }

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับ ${}^{10}P_5 = \frac{10!}{5!} = 6.7.8.9.10$

E = เหตุการณ์ที่พยัญชนะ 5 ตัวเรียงลำดับมี 2 ตัว เหมือนกัน

E = { $กร_1$ง$ทร_2$, $กร_2$ง$ทร_1$, $ร_1ร_2$กงท, $ร_2ร_1$กงท , ... }

การนับสมาชิกของ E

ขั้นที่ 1. เลือก ร. เรือ ทั้ง 2 ตัวมาก่อนทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 2. เลือก 3 ตัว จาก 8 ตัวที่เหลือทำได้ $\binom{8}{3}$

ขั้นที่ 3.. มีขุอง 5 สิ่งจัดลำดับได้ 5!

เพราะฉะนั้น $n(E) = (1)\binom{8}{3}5! = (\frac{8!}{5!3!})5! = 4.5.6.7.8$

สรุป $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = \frac{4\cdot5}{9\cdot10} = \frac{2}{9}$

25. ตอบ 4.

แนวคิด

I_1 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{oi}} \times 100 = \left(\frac{(4)(2)+(4)(2)+(3)(2)+(4)(2)}{(3)(2)+(3)(2)+(2)(2)+(2)(2)}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{30}{20}\right) \times 100 = 150$$

I_2 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{ni}} \times 100 = \left(\frac{(4)(4)+(4)(4)+(3)(4)+(4)(4)}{(3)(4)+(3)(4)+(2)(4)+(2)(4)}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{60}{40}\right) \times 100 = 150$$

หมายเหตุ ได้แค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

I_3 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐานและปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}\left(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\left(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2}\right)} \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(4)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(3)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(4)\left(\frac{2+4}{2}\right)}{(3)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(3)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(2)\left(\frac{2+4}{2}\right)+(2)\left(\frac{2+4}{2}\right)}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)(3)+(4)(3)+(3)(3)+(4)(3)}{(3)(3)+(3)(3)+(2)(3)+(2)(3)}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{45}{30}\right) \times 100 = 150$$

I_4 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}} \times 100 = \frac{4+4+3+4}{3+3+2+2} \times 100 = \frac{15}{10} \times 100 = 150$$

สรุปต้องตอบตัวเลือก 4.

26. ตอบ 3.

แนวคิด $x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$

$$x^3(x-1) - x(x-1) = 0$$

$$(x^3 - x)(x-1) = 0$$

$$x(x^2-1)(x-1) = 0$$

$$x = 0, 1, -1$$

$\forall x \in U [x^4 - x^3 - x^2 + x = 0]$ เป็นจริงทุกเซต $U \subset \{0, -1, 1\}$

เพราะฉะนั้น $A = \{U \mid U \subset \{0, -1, 1\} \text{ และ } U \neq \varnothing\} = P(\{0, -1, 1\}) - \{\varnothing\}$

สรุป $n(A) = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$

27. ตอบ 1.

แนวคิด (1) ถูก

โดยการใช้เหตุผล $(|A| = 0 \rightarrow |adjA| = 0) \equiv (|adjA| \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0)$

สมมติ $|adjA| \neq 0$ จากสูตร $(adjA) = |A|(A^{-1})$

ดังนั้น $\det(adjA) = \det(|A|A^{-1}) = |A|^n \det(A^{-1}) = |A|^{n-1}$

เพราะฉะนั้น $|A|^{n-1} \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0$

ดังนั้น $|adjA| \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0$ สมมูลกับ $|A| = 0 \rightarrow |adjA| = 0$

(2) ถูก เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}A$

$$\det(A^{-1}) = (\frac{1}{\det A})^n \det(\text{adj}A)$$

$$\det(\text{adj}A) = (\det A)^{n-1}$$

ในทำนองเดียวกัน $\det(\text{adj}B) = (\det B)^{n-1} = (\det[\text{adj}A])^{n-1}$

$$= [(\det A)^{n-1}]^{n-1} = (\det A)^{(n-1)^2}$$

28. ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นแทนค่า z, a, b, บางค่าก็จำแนกตัวเลือกได้แล้วเช่น เลือก $z = i$, $a = 4$, $b = 1$ จะได้ $|z| = 1$

1. $|az + b| = |4i + 1| = \sqrt{17}$, $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + i1| = \sqrt{17}$
2. $|az + b| = \sqrt{17}$, $|a| + |b| = 4 + 1 = 5 \neq \sqrt{17}$ →ตัดตัวเลือก 2.
3. $|a\bar{z} + b| = |4(-i) + 1| = \sqrt{17}$, $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + i| = \sqrt{17}$
4. $|a\bar{z} + b| = |-4i + 1| = \sqrt{17} \neq |a| + |b| = 5$ →ตัดตัวเลือก 4.

เลือก $z = i$, $a = 4$, $b = i$

1. $|az + b| = |4i + i| = 5$, $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + (-i)(i)| = |4 + 1| = 5$
3. $|a\bar{z} + b| = |4(-i) + i| = |-3i| = 3$

   $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + (-i)(i)| = |5| = 5 \neq 3$ → ตัดตัวเลือก 3.

การแสดงว่า $|az + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$

$$|az + b| = |\overline{az + b}|$$

$$= |\overline{az} + \bar{b}|$$

$$= |\overline{a}\,\overline{z} + \bar{b}|$$

เพราะว่า $|z| = 1$

เพราะฉะนั้น $|\overline{az}+\bar{b}| = |\overline{az}+\bar{b}||z|$

$$= |(\overline{az}+\bar{b})(z)|$$

$$= |\bar{a}\,\bar{z}z+\bar{b}\,z|$$

$$= |\bar{a}\,|z|+\bar{b}\,z|$$

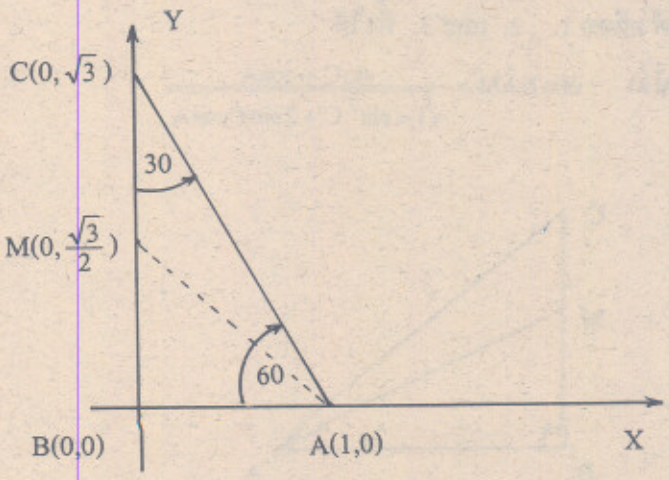
$$= |\bar{a}(1)+\bar{b}\,z|$$

$$= |\bar{a}+\bar{b}\,z|$$

สรุป $|az + b| = |\bar{a}+\bar{b}\,z|$

29. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของสามเหลี่ยมและมุม ดังนั้นใช้รูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ก็จะจำแนกตัวเลือกได้



$AM = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ $A = 60°$ $B = 90°$ $C = 30°$

จากรูป $\cos B\hat{A}M = \frac{AB}{AM} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}}{2})} = \frac{2}{\sqrt{7}} = 0.7559$

1. $\frac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1+\sin^2 A - 2\sin A\cos C}} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{1+\frac{3}{4}-2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{3}}{(\frac{1}{2})} = 2\sqrt{3} \neq \frac{2}{\sqrt{7}}$

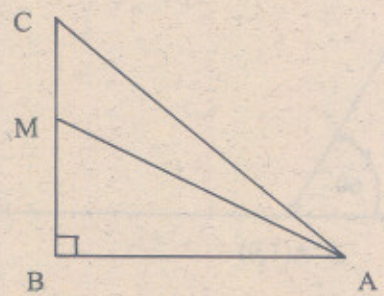
2. $\frac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1+\sin^2 A + 2\sin A\cos C}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{13}{4}}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \neq \frac{2}{7}$

3. $\frac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C - 2\sin C\cos A}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}} = 2 \neq \frac{2}{7}$

4. $\frac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C + 2\sin C\cos A}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \frac{2}{7}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

การพิสูจน์ว่า $\cos B\hat{A}M = \frac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C + 2\sin C\cos A}}$



$$\cos(BAM) = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + BM^2}} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2 + (\frac{BC}{2})^2}}$$

$$= \frac{2AB}{\sqrt{4AB^2 + BC^2}} = \frac{2AB}{\sqrt{3AB^2 + AB^2 + BC^2}} = \frac{2AB}{\sqrt{3AB^2 + AC^2}}$$

$$= \frac{(\frac{2AB}{AC})}{\sqrt{\frac{3AB^2}{AC^2} + 1}} = \frac{\frac{AB}{AC} + \frac{AB}{AC}}{\sqrt{1 + \frac{AB^2}{AC^2} + 2\frac{AB}{AC}\frac{AB}{AC}}} = \frac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C + 2\sin C \cos A}}$$

30. ตอบ 1.

แนวคิด $\frac{1}{2}\frac{1}{5^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{5^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n}{n+1})(\frac{1}{5^{n+1}})$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n+1})(\frac{1}{5^{n+1}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1})(\frac{1}{5^{n+1}}) \quad \ldots.(1)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x = -\ln(1-x) - x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\frac{1}{5^{n+1}} = -\ln(1 - \frac{1}{5}) - \frac{1}{5}$$

จาก (1) $\frac{1}{2}\frac{1}{5^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{5^3} + \frac{3}{4}\frac{1}{5^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} - \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n+1})(\frac{1}{5^{n+1}})$

$$= \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{5}} - (-\ln(1 - \frac{1}{5}) - \frac{1}{5}) = \frac{1}{20} + \ln(\frac{4}{5}) + \frac{1}{5} = \frac{1+4}{20} + \ln(\frac{4}{5})$$

$$= \frac{1}{4} + \ln(\frac{4}{5})$$

31. ตอบ $(m, n) = (19, 17), (11, 7), (9, 3)$

แนวคิด $m^2 - n^2 = 72$

$(m + n)(m - n) = 72$

เพราะว่า m, n เป็นจำนวนบวก เพราะฉะนั้น $m - n > 0$, $m > n$

แยกตัวประกอบ 72 ได้เป็น 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

เพราะว่า $m - n < m + n$ เพราะฉะนั้นเราจำแนกกรณีต่างๆ เป็น

กรณี 1. $m - n = 1$, $m + n = 72 \longrightarrow 2m = 73$ เป็นไปไม่ได้

กรณี 2. $m - n = 2$, $m + n = 36 \longrightarrow 2m = 38$, $m = 19$, $n = 17$

กรณี 3. $m - n = 3$, $m + n = 24 \longrightarrow 2m = 27$ เป็นไปไม่ได้

กรณี 4. $m - n = 4$, $m + n = 18 \longrightarrow 2m = 22 \longrightarrow m = 11, n = 7$

กรณี 5. $m - n = 6$, $m + n = 12 \longrightarrow 2m = 18 \longrightarrow m = 9, n = 3$

กรณี 6. $m - n = 8$, $m + n = 9 \longrightarrow 2m = 17$ เป็นไปไม่ได้

สรุป $(m , n) = (19, 17), (11, 7), (9, 3)$

32. ตอบ $[y] = 2, -2$

แนวคิด $x < -3$; $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$

$-(x + 3) - (-(x - 1)) = x + 1$

$x = -5$

$x = -3$; $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$

$0 - |-3 - 1| = -3 + 1$

$-4 = -2$

ดังนั้น $x = -3$ ไม่ได้

$-3 < x < 1$; $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$

$$(x+3)-(-(x-1))=x+1$$

$$x=-1$$

$x=1$;

$$|x+3|-|x-1|=x+1$$

$$|1+3|-|1-1|=1+1$$

$$4=2$$

ดังนั้น $x=1$ ไม่ได้

$1<x$;

$$|x+3|-|x-1|=x+1$$

$$x+3-x+1=x+1$$

$$x=3$$

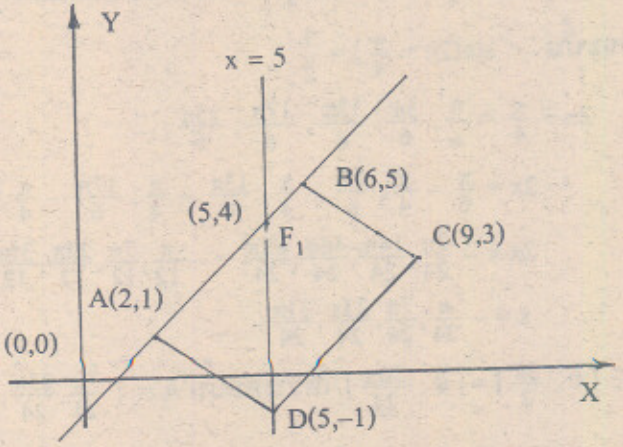
สรุปค่าที่เป็นไปได้ของ $x=-5,-1,3$

จาก $[x]^2+[y^2]=5$ จะได้ $[y]^2=5-[x]^2=-20,4,-4$

เพราะว่า $[y]^2\geq 0$ เพราะฉะนั้น $x=-1$, $[y]^2=4$ สรุป $[y]=2,-2$

33. ตอบ $n=-469$

แนวคิด



เพราะว่า $\overline{AB} = \overline{DC} \rightarrow \begin{bmatrix} 6-2 \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-d_1 \\ 3-d_2 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $d_1 = 5$ $d_2 = -$

เส้นตรง $x = 5$ ตัดกับ AB ที่จุด $(5, 4)$ เพราะฉะนั้นโฟกัส คือ $(5, 4)$

$c = 5$, $|BC| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, $2a = 2\sqrt{13}$, $a = \sqrt{13}$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 13 = 12$

$$\frac{(y+1)^2}{a^2} - \frac{(x-5)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(y+1)^2}{13} - \frac{(x-5)^2}{12} = 1$$

$$12(y+1)^2 - 13(x-5)^2 = (12)(13)$$

$$12y^2 + 24y + 12 - 13x^2 + 130x - 325 = 156$$

$$-13x^2 + 12y^2 + 130x + 24y - 469 = 0$$

สรุป $n = -469$

34. ตอบ $\{ \frac{7\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{31\pi}{24} \}$

แนวคิด $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right)$

$= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x \right) = \sqrt{2} \left(\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \right)$

เพราะฉะนั้น $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, \frac{25\pi}{6}, \ldots$$

$$2x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \frac{17\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, \ldots$$

$$2x = -\frac{2\pi}{24}, \frac{14\pi}{24}, \frac{46\pi}{24}, \frac{62\pi}{24} = -\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}, \frac{31\pi}{12}$$

$$x = -\frac{\pi}{24}, \frac{7\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{31\pi}{24}$$

แต่ $x \in [0, \frac{3\pi}{2}] = [0, \frac{36\pi}{24}]$ เพราะฉะนั้น $A = \{ \frac{7\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{31\pi}{24} \}$

35. ตอบ 4 ค่า คือ $a = 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $a \in [-2, -1]$

แนวคิด $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix} = (1)(a^3 - 1) - (1)(a^2 - 1) + (1)(1 - a)$

$= a^3 - 1 - a^2 + 1 + 1 - a = a^3 - a^2 - a + 1$

$= a^2(a - 1) - (a - 1) = (a - 1)(a^2 - 1) = (a - 1)^2(a + 1)$

$(\det A^{10}) = 1$

$(\det A)^{10} = 1$

ดังนั้น $\det A = 1$ หรือ $\det A = -1$

กรณี 1. $\det A = 1 \longrightarrow a^3 - a^2 - a + 1 = 1 \longrightarrow a^3 - a^2 - a = 0$

$a(a^2 - a - 1) = 0 \longrightarrow a = 0, \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = 0, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

กรณี 2. $\det A = -1 \longrightarrow a^3 - a^2 - a + 1 = 1 \longrightarrow a^3 - a^2 - a + 2 = 0$

พิจารณากราฟของเส้นโค้ง $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

จากตารางฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$

x	f(x)
–2	$-8 - 4 + 2 + 2 = -8$
–1	$-1 - 1 + 1 + 2 = 1$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ ตัดแกน X ครั้งเดียวเท่านั้น

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$

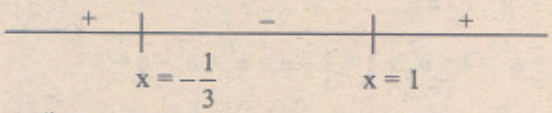
$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = -\frac{1}{3}, 1$

$f''(x) = 6x - 2 = 6(x - \frac{1}{3})$

$f''(1) = 4 > 0 \longrightarrow f(1) = 1$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0 \rightarrow f(-\frac{1}{3}) = \frac{59}{27}$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $(3x+1)(x-1)$ มีเครื่องหมายเป็น



เพราะฉะนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, -\frac{1}{3}], [1, \infty)$

$f(x)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-\frac{1}{3}, 1]$

เพราะว่า $f(-\frac{1}{3}) = 2.185 > 0$, $f(1) = 1 > 0$, $f(-1) = 1 > 0$

เพราะฉะนั้น $f(x) > 0$ ทุกค่า $x > -1$

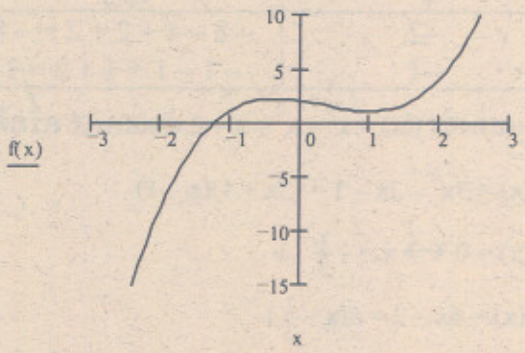
เพราะว่า $f(-2) = -8 < 0$ เพราะฉะนั้น $f(x) < 0$ ทุกค่า $x < -2$

สรุป $y = x^3 - x^2 - x + 2$ ตัดแกน X ที่เดียวบนช่วง $[-2, -1]$

เพราะฉะนั้น $a^3 - a^2 - a + 2 = 0$ มีรากตัวเดียวบนช่วง $[-2, -1]$

เพราะฉะนั้น $\det(A^{10}) = 1$ มีค่า a ได้ 4 ค่า

หมายเหตุ กราฟของ $y = x^3 - x^2 - x + 2$



ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย
ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์
ประจำปีการศึกษา 2539 สอบวันอาทิตย์ที่ 12 มกราคม 2540

ตอนที่ 1

1. ค่าของ $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{3}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -6x+4 & ,x<-2 \\ ax^2+bx & ,-2\le x\le 2 \\ 6x-4 & ,x>2 \end{cases}$

ถ้า f มีความต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$ แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. –1 2. 0 3. 1 4. 2

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x^2+2x} & ,x<0 \\ \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2} & ,x\ge 0 \end{cases}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. f มีความต่อเนื่องที่ $x=0$ และที่ $x=1$
   2. f มีความต่อเนื่องที่ $x=-2$ และที่ $x=0$
   3. f มีความต่อเนื่องที่ $x=-2$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$
   4. f มีความต่อเนื่องที่ $x=0$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x=1$

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$ ค่าของ $f(-2) + f'(-2) - f''(-2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. –3 2. –4 3. 4 4. 3

จงตอบคำถามข้อ 5–7 เมื่อกำหนดให้ $f(x) = a(x-x^2)$ และ

$$\int_0^1 f(x)dx = a \qquad \int_0^1 xf(x)dx = b$$

$\int_0^1 x^2 f(x)dx = c$ $\int_0^1 (x-b)^2 f(x)dx = d$

5. a + b เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{15}{2}$ 2. $\frac{13}{2}$ 3. $\frac{11}{2}$ 4. $\frac{9}{2}$

6. b + c เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{3}{5}$ 4. $\frac{4}{5}$

7. c + d เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{20}$ 2. $\frac{7}{20}$ 3. $\frac{3}{20}$ 4. $\frac{1}{20}$

8. ให้ ℓ เป็นเส้นสัมผัสของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ ที่จุด $P(-1, -2\sqrt{2})$ และ Q เป็นจุดซึ่งเส้นตรง ℓ ตัดกับแกน X ถ้า R เป็นจุดซึ่งอยู่บน ℓ และอยู่กึ่งกลางระหว่าง P และ Q แล้ววงกลมซึ่งมี R เป็นจุดศูนย์กลางและผ่านจุด (0, 0) มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. π 2. 2π 3. 3π 4. 4π

9. ให้ ℓ เป็นเส้นสัมผัสของพาราโบลา $(y-1)^2 = 4(x-2)$ ที่จุด $(3, -1)$ ระยะตัดแกน Y ของเส้นตรง ℓ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 2. 3 3. 2 4. 1

10. ให้ A และ B เป็นเมตริกซ์ขนาด 3×3 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง และ I เป็นเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 สมมติว่า $A^2(\text{adj } A^2) - BA = 2I$

และ $\det B = -(\det A)^2$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. ถ้า $\det A < 0$ แล้ว $\det A < -1$
2. ถ้า $\det A > 0$ แล้ว $\det(A^2) = \det(A^4)$
3. $\det(A^3) = \det A$ หรือ $(\det A)^2 = -2\det A$
4. $\det(A^2) - \det A - 6 = 0$ หรือ $\det(A^4) + \det(A^3) + \det(A^2) + \det A - 10 = 0$

11. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 ถ้า $A^2 = I$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. A^n เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n
2. $adjA = A^{-1}$ หรือ $adjA = -(A^{-1})$
3. $detA = det[C_{ij}(A)]$
4. มีเมตริกซ์ A ซึ่งมีสมบัติตามที่กล่าวเพียง 2 เมตริกซ์เท่านั้น

12. ให้จุด O, A และ B เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัด (0, 0), (1, 2) และ (3, 4) ตามลำดับ ถ้า P และ Q เป็นจุดที่มีคุณสมบัติว่า $\overline{OA} = \overline{OP} + \overline{OQ}$, $\overline{OP}$ ขนานกับ $\overline{OB}$ และ $\overline{OQ}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ แล้ว $\overline{OP} - \overline{OQ}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{41}{25}\bar{i} + \frac{38}{25}\bar{j}$
2. $\frac{35}{16}\bar{i} + \frac{36}{16}\bar{j}$
3. $\frac{38}{25}\bar{i} + \frac{41}{25}\bar{j}$
4. $\frac{36}{16}\bar{i} + \frac{35}{16}\bar{j}$

13. สมรักษ์ต้องการลงทุนซื้อหุ้นโดยมีหุ้นให้เลือก 5 บริษัท ซึ่งมีเงินปันผลดังนี้

หุ้นบริษัท	ก	ข	ค	ง	จ
เงินปันผล(เปอร์เซ็นต์)	4	11	9	22	4

ถ้าสมรักษ์เลือกซื้อหุ้นของ 3 บริษัทจาก 5 บริษัทดังกล่าว โดยใช้เงินลงทุนเท่าๆ กันทั้ง 3 บริษัท จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ค่าเฉลี่ยของเงินปันผลที่สมรักษ์ควรจะได้มีค่าเท่ากับ 10 %

(2) โอกาสที่สมรักษ์ได้รับเงินปันผลเกิน 10 % เท่ากับโอกาสที่เขาจะได้รับเงินปันผลน้อยกว่า 10 %

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
2. ข้อ (1) เท่านั้นที่เป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นที่เป็นจริง
4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

14. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ เป็นข้อมูล N ค่า โดยที่ N เป็นจำนวนคู่ และ $x_i = \frac{1}{i(i+1)}$

สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, N$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N+1})^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N})^2$

(2) $\sum_{i=1}^{N} \left| x_i - \frac{4}{N(N+4)} \right|$ มีค่าน้อยที่สุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
2. ข้อ (1) เท่านั้นที่เป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นที่เป็นจริง
4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

15. ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 4 คน อายุของบิดา มารดา และบุตรทั้ง 4 คน เป็น 62, 60, 37, 35, 33 และ 31 ปี ตามลำดับ จงหาว่าอีก 8 ปี ข้างหน้า ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างระหว่างค่าความแปรปรวน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุสมาชิกทุกคนในครอบครัวนี้ใกล้เคียงค่าใดมากที่สุด

1. 123.24
2. 118.73
3. 114.67
4. 111.38

16. กำหนดให้ตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
ความถี่	4	7	10	3	2	4

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลชุดนี้เป็นเท่าใด

1. 1.1835
2. 1.835
3. 5.45
4. 0.545

17. ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนกับค่าใช้จ่ายของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีเงินเดือนต่างๆ กัน โดยการสุ่มพนักงานของบริษัทนี้มา 5 คน แล้วสอบถามเกี่ยวกับเงินเดือนและค่าใช้จ่ายได้ผลดังตารางต่อไปนี้

พนักงานคนที่	1	2	3	4	5
เงินเดือน(x_i) (10,000 บาท)	1	2	3	4	5
ค่าใช้จ่าย(y_i) (10,000 บาท)	1	1	2	2	3

พบว่าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของเงินเดือนกับค่าใช้จ่ายมีกราฟเป็นเส้นตรง ถ้าพนักงานคนหนึ่งในบริษัทนี้มีเงินเดือน 80,000 บาท จงทำนายว่าเขาจะมีค่าใช้จ่ายประมาณเดือนละเท่าใด

1. 37,000 บาท 2. 40,000 บาท 3. 43,000 บาท 4. 53,000 บาท

18. เด็กชายนิดมีหนังสือการ์ตูน 7 เล่ม เด็กชายหน่อยมีหนังสือการ์ตูน 9 เล่ม เด็กทั้งสองต้องการแลกหนังสือกันคนละ 2 เล่ม จะมีวิธีแลกหนังสือทั้งสิ้นกี่วิธี

1. 63 2. 120 3. 756 4. 3024

19. ในระนาบหนึ่งเส้นตรงที่ขนานกันชุดหนึ่งมี 8 เส้นตัดกับเส้นตรงที่ขนานกันอีกชุดหนึ่งซึ่งมี n เส้น ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด 420 รูป จงหาว่า $P_{n,2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 20 3. 12 4. 6

20. อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งอัตราส่วนของผลบวกของ r พจน์แรกต่อผลบวกของ s พจน์แรกเท่ากับ $\frac{r^2}{s^2}$ อัตราส่วนของพจน์ที่ 7 ต่อพจน์ที่ 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{7}{20}$

21. รากของสมการ $x^3 - 36x^2 + Ax + B = 0$ เป็นสามพจน์ติดกันในอนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่ง ถ้าผลบวกของส่วนกลับของรากทั้งสามเท่ากับ 4 แล้ว ค่าสัมบูรณ์ของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 27 3. 36 4. 64

22. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ซึ่งหารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 15 3. 20 4. 35

23. กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 9 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, ... , 9 อย่างละ 1 ใบ สุ่มหยิบบัตรทีละ 1 ใบ n ครั้ง โดยที่ใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป และบัตรแต่ละใบมีโอกาสถูกหยิบเท่า ๆ กัน ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของ n จำนวนที่ปรากฏบนบัตรที่สุ่มได้ จะหารด้วย 10 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$
2. $1-\left(\frac{8}{9}\right)-\left(\frac{5}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)$
3. $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$
4. $1+\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$

24. กำหนด $f:[-\pi,\pi]\longrightarrow R$ โดย $f(x)=\lfloor 4.5\cos x\rfloor$
เมื่อ $\lfloor a\rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุด ที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a
เรนจ์ของ f มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 5 3. 10 4. 11

25. กำหนด $f:\{x\in R \mid 2x^2\le 7x-3\}\longrightarrow R$ โดย $f(x)=2^{-2x}$
ค่าต่ำสุดของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -2 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{64}$

26. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1) ถ้าจำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนบวก แล้วจำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนลบ
(2) ไม่มีจำนวนเต็มใดเลยซึ่งกำลังสองของจำนวนนั้น คือ 38765011492
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง 2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง 4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็ไม่เป็นจริง

27. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $|3-2x|=-x$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
1. A มีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งทั้งคู่เป็นจำนวนจริงลบ
2. A มีสมาชิก 2 ตัว ตัวหนึ่งเป็นจำนวนจริงบวก อีกตัวหนึ่งเป็นจำนวนจริงลบ
3. A มีสมาชิกเพียงตัวเดียว
4. A เป็นเซตว่าง

28. ให้ $A=\left\{\frac{y}{x}\mid \frac{x}{y}=\frac{2y}{x+y}\right\}$ เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง
จะได้ว่าจำนวนสมาชิกของ A เป็นไปดังข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. มากกว่า 2

29. สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ กำหนดให้

$$M(x, y) = \begin{cases} y & , x \le y \\ x & , y < x \end{cases} \quad \text{และ} \quad m(x, y) = \begin{cases} x & , x \le y \\ y & , y < x \end{cases}$$

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b < c < d$

$M(m(M(a, c), d), M(c, m(d, b)))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. a 2. b 3. c 4. d

30. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < b < c < d$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a+c}{b+d}$ (2) $a - c < b - d$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

31. ให้ $A = \{ x \in I \mid 2^x \cdot (4 - x) = 2x + 4 \}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 3 3. 5 4. 9

32. ให้ a, b และ c เป็นรากทั้งสามของสมการ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

$\frac{a^3 - b^3}{a - b} + \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{c^3 - a^3}{c - a}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –1 2. 1 3. 3 4. 5

33. ให้ $f : \{ 1, 2, 3, \dots \} \longrightarrow \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(I) $f(n) < f(n + 1)$ ทุก $n \in \{1, 2, 3, \dots \}$

(II) $f(2n) = f(n) + n$ ทุก $n \in \{1, 2, 3, \dots \}$

(III) ถ้า f(n) เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว n ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $f(1) = 0$

(2) $f(n + 1) = f(1) + n$ ทุก $n \in \{1, 2, 3, \dots \}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

34. ให้ $A = \{ z \mid z = \sin\theta + i\cos\theta \text{ และ } z^2 = \cos\theta + i\sin\theta \text{ เมื่อ } 0 \le \theta \le 2\pi \}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A = \varnothing$
2. A มีสมาชิกเพียงตัวเดียว
3. A มีสมาชิก 2 ตัว
4. A มีสมาชิก 3 ตัว

35. ให้เอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง

ข้อความ "จำนวนจริงบวกทุกจำนวนสามารถเขียนเป็นกำลังสองของจำนวนจริงบวกบางจำนวนได้" ตรงกับสัญลักษณ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x[x > 0 \wedge \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
2. $[\forall x[x > 0]] \wedge [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
3. $\forall x[x > 0 \rightarrow \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
4. $[\forall x[x > 0]] \rightarrow [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$

36. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง อาจารย์ผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ได้จัดกิจกรรมเพื่อเสริมสร้างความเข้าใจในเรื่องการอ้างเหตุผล โดยให้นักเรียน 1 คน จาก 3 คน คือ ด.ช. เก่ง ด.ช. เข้ม และ ด.ช. คม นำดอกทิวลิปไปวางไว้บนโต๊ะอาจารย์โดยไม่มีใครทราบว่าใครเป็นผู้วางดอกไม้ยกเว้นเด็ก 3 คนนี้

กติกามีอยู่ว่าคนที่ไม่ได้เป็นคนวางดอกไม้ ต้องไม่พูดเท็จ และคนที่วางดอกไม้อนุญาตให้พูดเท็จได้ อาจารย์ผู้สอนได้ทำการสืบสวนเด็กทั้งสามทีละคน และได้รับคำตอบจากเด็กทั้งสามคนดังนี้

ด.ช. เก่ง "ผมไม่ได้เป็นคนวางครับ เข้มชอบดอกทิวลิปมาก แต่คมไม่ชอบดอกทิวลิปเลยครับ"

ด.ช. เข้ม "ผมไม่ได้เป็นคนวางครับ ผมไม่เคยเห็นดอกไม้ชนิดนี้มาก่อนเลยและผมมาถึงโรงเรียนหลังจากเพื่อนๆ เข้าชั้นเรียนไปแล้วครับ"

ด.ช. คม "ผมไม่ได้เป็นคนวางครับ ผมเห็นเก่งและเข้มเดินถือดอกทิวลิปเข้าโรงเรียนมาเมื่อเช้านี้ก่อนที่คนอื่นๆ จะทยอยเข้าโรงเรียนมาครับ"

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ข้อมูลไม่พอที่จะสรุปได้ว่าใครเป็นผู้วางดอกไม้บนโต๊ะ
2. ด.ช. เก่ง เป็นคนวางดอกไม้บนโต๊ะ
3. ด.ช. เข้ม เป็นคนวางดอกไม้บนโต๊ะ
4. ด.ช. คม เป็นคนวางดอกไม้บนโต๊ะ

37. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\tan 61° - \tan 16° \tan 61° - \tan 16° < 1$

(2) $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(\frac{3}{4})$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

38. ให้ $A = \{ x \mid x \in [0, 2\pi] \text{ และ } \tan^4 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \sec^3 x \}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

39. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin y + \arccos x$ มีค่าอยู่ในช่วงใดในข้อต่อไปนี้

1. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
2. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

40. เซตคำตอบของสมการ $\arcsin x = \arccos(x - 1)$

มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

41. ให้ $B = \{ x \mid x \in [0, 2\pi] \text{ และ } 2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x \}$

ดังนั้น B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$

2. $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$

3. $[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4})$

4. $[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4})$

ตอนที่ 2

1. สามเหลี่ยมซึ่งมีจุดโฟกัสของวงรี $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$ และจุด A (2, 5) เป็นจุดยอดมีพื้นที่กี่ตารางหน่วย ?

2. ผลบวกของจำนวนเต็มห้าหลักทุกจำนวนซึ่งมีเลขโดดในหลักทั้งห้าเป็น 1, 2, 3, 4 และ 5 โดยตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำมีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

(I) $a\log_{24} 2 + b\log_{24} 3 = c$ และ

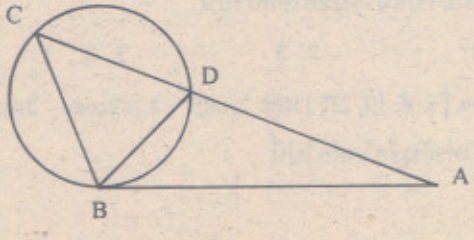
(II) $\log_c(a + b) = 3$

ค่าของ $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด

4. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติว่า $(x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1$ แล้ว $x + y$ เท่ากับเท่าใด

5. สมการ $x^4 - 10x^3 + bx^2 + cx + 130 = 0$ มีคำตอบทั้งสี่เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นจำนวนจริง ถ้าส่วนจริงและส่วนจินตภาพของทุกคำตอบเป็นจำนวนเต็มแล้ว $b - c$ เท่ากับเท่าใด ?

6. กำหนดให้ Δ BCD เป็นสามเหลี่ยมแนบในวงกลมที่จุด B ลากเส้นสัมผัสวงกลมไปพบกับ CD ที่ต่อออกไปที่จุด A ดังรูป ถ้า BC, CD และ BD ยาวเท่ากับ 2, $\sqrt{3}$ และ $\sqrt{2}$ หน่วย ตามลำดับแล้ว AB ยาวกี่หน่วย



เฉลยข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปีการศึกษา 2539

ตอนที่ 1

1. ตอบ 2.

แนวคิด $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3} = \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}\frac{(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt{x+2}+3)}$

$= \lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt[3]{x+1})(\sqrt{x+2}+3)}{(x+2)-9} = \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{x-7}$

$= \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt[3]{(x+1)})^3-2^3}$

$= \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt[3]{x+1}-2)((\sqrt[3]{x+1})^2+2\sqrt[3]{x+1}+4)}$

$= \lim_{x\to 7}\frac{-(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt[3]{x+1})^2+2\sqrt[3]{x+1}+4} = \frac{-\left(\sqrt{7+2}+3\right)}{\left(\sqrt[3]{7+1}\right)^2+2\sqrt[3]{7+1}+4}$

$= \frac{-6}{4+4+4} = -\frac{1}{2}$

การตัดตัวเลือก $x\to 7^+$ จะได้ $x>7$

$x+1>8$ $\qquad$ $x+2>9$

$\sqrt[3]{x+1}>2$ $\qquad$ $\sqrt{x+2}>3$

$-\sqrt[3]{x+1}<-2$ $\qquad$ $\sqrt{x+2}-3>0$

$2-\sqrt[3]{x+1}<0$

ดังนั้น $x\to 7^+$ จะทำให้ $\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}+3}<0$

เพราะว่าตัวเลือกเป็นค่าตัวเลขทุกตัว ดังนั้น ค่าลิมิตต้องหาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}<0$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

หาขีดจำกัด โดยการใช้กฎของโลปิตัล ถ้า $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ และ $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ และ

$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ แล้ว $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

จากโจทย์ให้ $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x+1} = 2 - (x+1)^{\frac{1}{3}}$ จะได้ $f'(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

และให้ $g(x) = \sqrt{x+2} - 3 = (x+2)^{\frac{1}{2}} - 3$ จะได้ $g'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to 7} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 7} \frac{\left[-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right]}{\left[\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}\right]} = -\frac{2}{3} \lim_{x\to 7} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8^2}} = -\frac{2}{3}\frac{(3)}{(4)} = -\frac{1}{2}$$

สรุป $\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3} = -\frac{1}{2}$

2. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ $x = -2$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2)$

$\lim_{x\to -2^-} (-6x+4) = a(-2)^2 + b(-2)$ ดังนั้น $(-6)(-2) + 4 = 4a - 2b$

$16 = 4a - 2b$

$2a - b = 8$ .....(1)

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} 6x - 4 = a(2^2) + b(2)$ ดังนั้น $8 = 4a + 2b$

$2a + b = 4$ .....(2)

(1) + (2) ; $4a = 12$ ดังนั้น $a = 3$ เพราะฉะนั้น $b = -2$

สรุป $a + b = 3 - 2 = 1$

3. ตอบ 4.

แนวคิด ข้อแนะนำในการพิจารณาว่า f ไม่ต่อเนื่อง

1. จุด $x = a$ ที่ทำให้ฟังก์ชันหาค่าไม่ได้
2. จุด $x = a$ ที่ $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้
3. จุดที่ตัวหารของ $f(x)$ เป็นศูนย์

จากสูตรฟังก์ชันของโจทย์พบว่า $x^2 + x - 2 = 0$ เมื่อ $x = 1$

ดังนั้น f หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 1$

สรุป f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

หมายเหตุ 1. ข้อสอบแบบนี้ขอให้พิจารณาความไม่ต่อเนื่องก่อนดีกว่า

2. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$
3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -2$ เพราะว่า $f(-2)$ หาค่าไม่ได้

จะเห็นได้ว่าการแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ จะต้องทำงานมากที่สุด

4. ตอบ 4.

แนวคิด $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+4}$

$$f'(x) = \frac{(x+4)(3)-(3x-2)(1)}{(x+4)^2} = \frac{14}{(x+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-28}{(x+4)^3}$$

$$f(-2) = \frac{3(-2)-2}{-2+4} = \frac{-8}{2} = -4$$

$$f'(-2) = \frac{14}{(-2+4)^2} = \frac{14}{4} = 3.5$$

$$f''(-2) = \frac{-28}{(-2+4)^3} = \frac{-28}{8} = \frac{-14}{4} = -3.5$$

สรุป $f(-2) + f'(-2) - f''(-2) = -4 + 3.5 - (-3.5) = -3$

5. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = a(x-x^2)$

$$1 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 a(x-x^2)dx = a\int_0^1 (x-x^2)dx = a\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$1 = a\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0\right] = a\left(\frac{1}{6}\right)$ เพราะฉะนั้น $a = 6$ ดังนั้น $f(x) = 6(x-x^2)$

$$b = \int_0^1 xf(x)dx = \int_0^1 6x(x-x^2)dx$$

$$b = \int_0^1 (6x^2 - 6x^3)dx = \left(2x^3 - \frac{6}{4}x^4\right)\Big|_0^1 = \left(2 - \frac{6}{4}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

สรุป $a + b = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

6. ตอบ 4.

แนวคิด $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 6(x-x^2)dx$

$$c = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)dx = \left(\frac{6x^4}{4} - \frac{6x}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{4} - \frac{6}{5} = \frac{6}{20} = \frac{13}{10}$$

เพราะฉะนั้น $b + c = \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

7. ตอบ 2.

แนวคิด $\int_0^1 (x-b)^2 f(x)dx = \int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 6(x-x^2)dx$

$$d = \frac{6}{4}\int_0^1 (2x-1)^2(x-x^2)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (4x^2-4x+1)(x-x^2)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (4x^3 - 4x^4 - 4x^2 + 4x^3 + x - x^2)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 (-4x^4 + 8x^3 - 5x^2 + x)dx = \frac{3}{2}(-\frac{4}{5}x^5 + 2x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^2}{2})\Big|_0^1$$

$$= \frac{3}{2}(-\frac{4}{5} + 2 - \frac{5}{3} + \frac{1}{2}) \quad = \frac{3}{2}(\frac{-24 + 60 - 50 + 15}{30}) = \frac{3}{2}(\frac{1}{30}) = \frac{1}{20}$$

สรุป $c + d = \frac{3}{10} + \frac{1}{20} = \frac{7}{20}$

8. ตอบ 2.

แนวคิด การหาสูตรความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งไฮเพอร์โบลา

จากสมการ $\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$ หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างจะได้ $\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{4} - x^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$

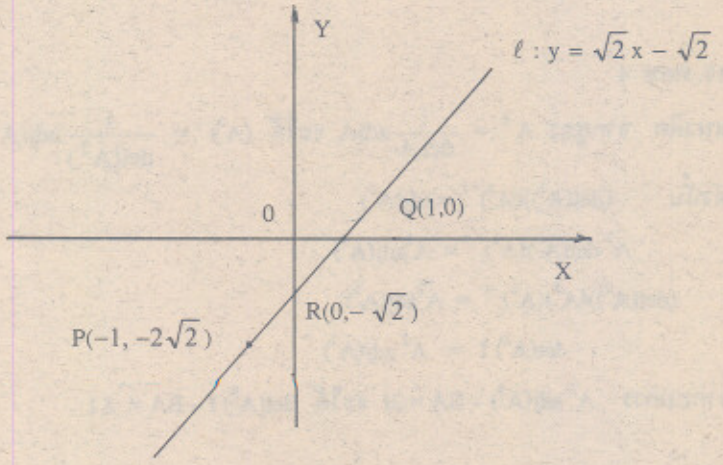
เพราะฉะนั้น $\frac{1}{4}\frac{dy^2}{dx} - \frac{dx^2}{dx} = 0$ หรือ $\frac{1}{4}(2y)\frac{dy}{dx} - 2x = 0$ สรุป $\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{y}$

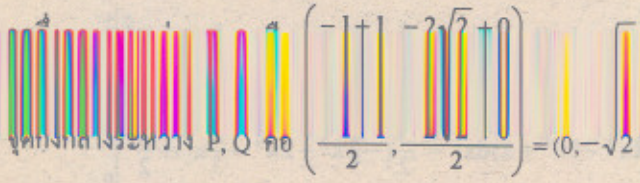
สรุปความชันเส้นสัมผัสไฮเพอร์โบลาที่จุด $P(-1, -2\sqrt{2})$ เท่ากับ $\frac{4(-1)}{-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y - y_0 = m(x - x_0)$ เพราะฉะนั้น $y + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}(x + 1)$

ดังนั้นสมการ ℓ คือ $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2}$

แทนค่า $y = 0$ จะได้ $x = 1$ ดังนั้นจุดตัดแกน X คือ $Q(1, 0)$





จุดกึ่งกลางระหว่าง P, Q คือ $\left(\frac{-1+1}{2}, \frac{-2\sqrt{2}+0}{2}\right) = (0, -\sqrt{2})$

ความยาว OR = $\sqrt{0^2+2} = \sqrt{2}$ ดังนั้นรัศมี $r = \sqrt{2}$

สรุปพื้นที่วงกลม $= \pi r^2 = 2\pi$

9. ตอบ 3.

แนวคิด ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งพาราโบลา $(y-1)^2 = 4(x-2)$ ที่จุด (x, y) มีค่าเท่ากับ $\frac{dy}{dx}$ ที่ได้จาก $\frac{d}{dx}(y-1)^2 = \frac{d}{dx}4(x-2)$

$$2(y-1)\frac{d}{dx}(y-1) = 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{y-1}$$

ที่จุด $(3, -1)$ ความชันของ ℓ เท่ากับ $\frac{2}{-1-1} = -1$

สมการเส้นตรง ℓ คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - (-1) = (-1)(x-3)$$

$$x + y - 2 = 0$$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 2$ สรุประยะตัดแกน Y ของเส้นตรง ℓ คือ 2

10. ตอบ 4

แนวคิด จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A$ จะได้ $(A^2)^{-1} = \frac{1}{\det(A^2)}\text{adj}(A^2)$

ดังนั้น $(\det(A^2))(A^2)^{-1} = \text{adj}(A^2)$

$$A^2\det(A^2)(A^2)^{-1} = A^2\text{adj}(A^2)$$

$$(\det(A^2))(A^2)(A^2)^{-1} = A^2\text{adj}(A^2)$$

$$\det(A^2)\,I = A^2\,\text{adj}(A^2)$$

จากสมการ $A^2\,\text{adj}(A^2) - BA = 2I$ จะได้ $\det(A^2)\,I - BA = 2I$

$-BA = 2I - \det(A^2)I$

$BA = (\det(A^2) - 2)I$

เพราะว่า I เป็นเมทริกซ์มิติ 3x3 เพราะฉะนั้น $\det(BA) = \det[(\det(A^2)-2)I]$

$\det B \det A = (\det(A^2) - 2)^3 \det I$

$\det B \det A = (\det(A^2) - 2)^3$

เพราะว่า $\det B = -(\det A)^2$ เพราะฉะนั้น $-(\det A)^2 \det A = ((\det A)^2 - 2)^3$

$(-\det A)^3 = ((\det A)^2 - 2)^3$

ดังนั้น $-\det A = (\det A)^2 - 2$

$(\det A)^2 + \det A - 2 = 0$

$(\det A + 2)(\det A - 1) = 0$

$\det A = -2$ หรือ $\det A = 1$

(1) ถูกต้อง

เพราะว่าถ้า $\det A < 0$ จะได้ว่า $\det A = -2$ ซึ่งน้อยกว่า -1

(2) ถูกต้อง

เพราะว่าถ้า $\det A > 0$ จะได้ว่า $\det A = 1$ ทำให้ $\det(A^2) = \det(A^4)$

(3) ถูกต้อง

เพราะว่าถ้า $\det A = 1$ ทำให้ $\det(A^3) = \det A$ จริง

และ $\det A = -2$ ทำให้ $(\det A)^2 = -2\det A$ จริง

(4) ผิด

เพราะว่า $\det A = 1$ ทำให้

$\det(A^2) - \det A - 6 = 1 - 1 - 6 = -6 \neq 0$

$\det(A^4) + \det(A^3) + \det(A^2) + \det(A) - 10 = 1 + 1 + 1 + 1 - 10 \neq 0$

และ $\det A = -2$ ทำให้

$\det(A^2) - \det A - 6 = 4 - 2 - 6 = -4 \neq 0$

$\det(A^4) + \det(A^3) + \det(A^2) + \det(A) - 10 = 16 - 8 + 4 - 2 - 10 = 0$

11. ตอบ 4

แนวคิด $A^2 = I$ จะได้ $\det(A^2) = \det I$ และ $(\det A)^2 = 1$

ดังนั้น $\det A \neq 0$ และ $\det A^n \neq 0$ ทุกค่า n เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

เพราะว่า $(\det A)^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $\det A = 1$ หรือ $\det A = -1$

จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{adj}A$ และ $\det A = 1 \rightarrow A^{-1} = \text{adj}A$

และ $\det A = -1 \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\text{adj}A \rightarrow \text{adj}(A) = -(A^{-1})$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2 . ถูกต้อง

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ 2×2 ใดๆ จะได้ $C_{ij}(A) = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$

$\det(C_{ij}(A)) = ad - bc$ สรุป $\det A = \det(\text{Cij}(A))$ เสมอ

ดังนั้นตัวเลือก 3. เป็นจริงเสมอโดยไม่จำเป็นต้องใช้เงื่อนไข $A^2 = I$

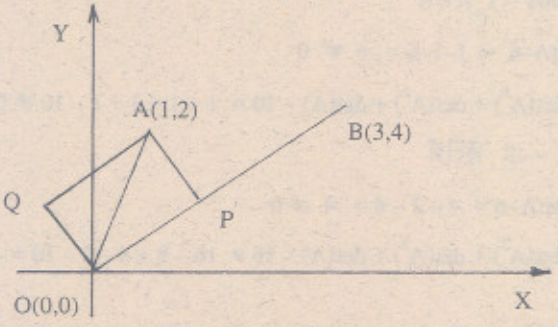
เลือก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

สรุปตัวเลือก 4. ผิด

หมายเหตุ คำถามข้อนี้หากนักเรียนอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนและเลือกตัวอย่างได้เร็วก็จะได้ว่าตัวเลือก 4. ผิดไม่ต้องไปเสียเวลาแสดงเหตุผลว่าตัวเลือก 1, 2 และ 3 ถูกต้อง

12. ตอบ 1

แนวคิด



เพราะว่า $\overline{OP}$ ขนานกับ $\overline{OB}$ เพราะฉะนั้น $\overline{OP} = k(3\bar{i}+4\bar{j})$

จาก $\overline{OA} = \overline{OP}+\overline{OQ}$ จะได้ $\overline{OB}\bullet\overline{OA} = \overline{OB}\bullet(\overline{OP}+\overline{OQ})$

$$(3\bar{i}+4\bar{j})(i+2\bar{j}) = \overline{OB}\bullet\overline{OP}+\overline{OB}\bullet\overline{OQ}$$

$$= (3\bar{i}+4\bar{j})(k(3\bar{i}+4j))+0 \qquad (\because \overline{OB}\perp\overline{OQ})$$

$$3+8 = k\,(9+16)$$

$$k = \frac{11}{25}$$

ดังนั้น $\overline{OP} = \frac{11}{25}(3\bar{i}+4\bar{j}) = \frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j}$

จาก $\overline{OA} = \overline{OP}+\overline{OQ}$ จะได้ $\overline{OQ} = \overline{OA}-\overline{OP}$

$$= (\bar{i}+2\bar{j})-(\frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j}) = -\frac{8}{25}i+\frac{6}{25}\bar{j}$$

สรุป $\overline{OP}-\overline{OQ} = \left(\frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j}\right)-\left(\frac{-8}{25}\bar{i}+\frac{6}{25}\bar{j}\right) = \frac{41}{25}\bar{i}+\frac{38}{25}\bar{j}$

การหาคำตอบโดยวิธีวาดรูป

เพราะว่า $\overline{OP}$ ขนานกับ $\overline{OB}$ และ $\overline{OB}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OQ}$

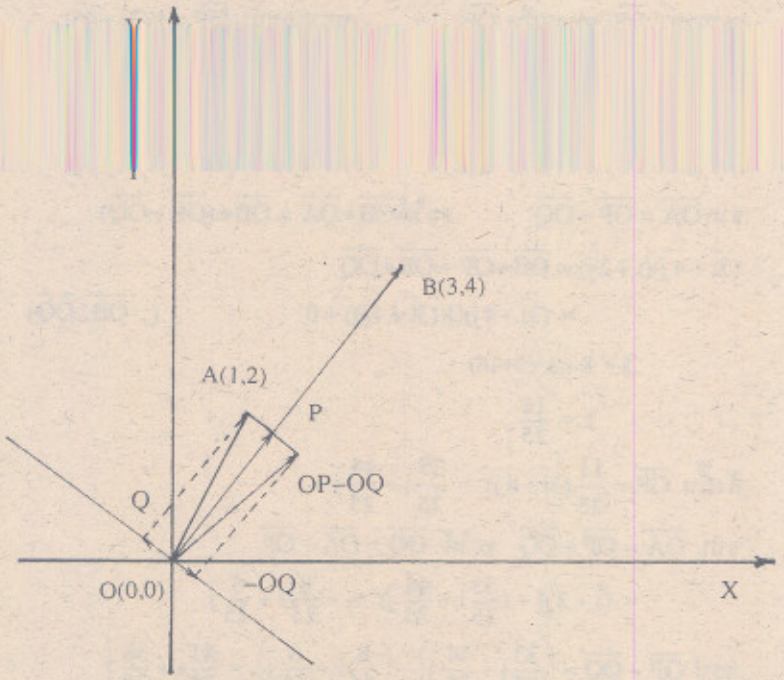
เพราะฉะนั้น $\overline{OP}$ ตั้งฉากกับ $\overline{OQ}$

เพราะว่า $\overline{OA} = \overline{OP}+\overline{OQ}$ เพราะฉะนั้น $\overline{OA}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากโดยมีด้านประกอบมุมฉากเป็น $\overline{OQ}$ และ $\overline{OP}$

ขั้นตอนการวาดรูป

1. ลากเส้นตรง L_1 ผ่านเวกเตอร์ $\overline{OB}$
2. ลากเส้นตรง L_2 ตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ และผ่านจุด O
3. จากปลายเวกเตอร์ $\overline{OA}$ ลากเส้นมาตั้งฉากกับ $\overline{OB}$ จะได้พิกัดของจุด P
4. จากปลายเวกเตอร์ $\overline{OA}$ ลากเส้นมาตั้งฉากกับ L_2 จะได้พิกัดของจุด Q
5. ลากเวกเตอร์ $-\overline{OQ}$
6. เส้นทแยงมุม $\overline{OD}$ คือเวกเตอร์ $\overline{OP}-\overline{OQ}$

การหาคำตอบโดยวิธีวาดรูป



วัดพิกัด D ได้เป็น (1.6, 1.5) สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

หมายเหตุ สัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ในตัวเลือก 2. และ 4. มีค่าเกิน 2

ดังนั้นตัดทิ้งได้เลย แต่ $\frac{41}{25} = 1.64$, $\frac{38}{25} = 1.52$

13. ตอบ 2.

แนวคิด จำนวนวิธีในการเลือก 3 บริษัทจาก 5 บริษัท ทำได้ $\frac{5}{3} = 10$ วิธี จำแนกเป็นกรณีต่างๆ ดังนี้

บริษัท	ปันผล	ผลรวม	ค่าเฉลี่ย
ก , ข , ค	4 , 11 , 9	24	8
ก , ข , ง	4 , 11 , 22	37	37/3
ก , ข , จ	4 , 11 , 4	20	20/3
ก , ค , ง	4 , 9 , 22	35	35/5

ก , ค , จ	4 , 9 , 4	17	17/3
ก , ง , จ	4 , 22 , 4	30	10
ข , ค , ง	11 , 9 , 22	42	14
ข , ค , จ	11 , 9 , 4	24	8
ข , ง , จ	11 , 22 , 4	37	37/3
ค , ง , จ	9 , 22 , 4	35	35/3

ความหมายของคำว่า "ค่าเฉลี่ยของเงินเป็นผลเฉลี่ย" มีค่าเท่ากับ

$\frac{8+\frac{37}{3}+\frac{20}{3}+\frac{35}{3}+\frac{17}{3}+10+14+8+\frac{37}{3}+\frac{35}{3}}{10}=10$ สรุปข้อความ (ก.) ถูกต้อง

เพราะว่าจำนวนวิธีที่ได้รับเงินปันผลเกิน 10 % มี 5 วิธี

และจำนวนวิธีที่จะได้รับเงินปันผลน้อยกว่า 10 % มี 4 วิธี

ดังนั้นข้อความ (2) เป็นเท็จ

14. ตอบ 2.

แนวคิด $\sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right]$

$= (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(1-\frac{1}{N+1}) = 1-\frac{1}{N+1} = \frac{N+1-1}{N+1} = \frac{N}{N+1}$

ดังนั้น $\overline{X}$ ของ $X_1, X_2, \ldots, X_N$ เท่ากับ $\frac{(\frac{N}{N+1})}{N} = \frac{1}{N+1}$

จากคุณสมบัติของ $\overline{X}$ พบว่า $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{N}(x_i-k)^2$ ทุกค่า k

สรุป $\sum_{i=1}^{N}(x_i-\frac{1}{N+1})^2 \le \sum_{i=1}^{N}(x_i-\frac{1}{N})^2$ เสมอ

ข้อความ (1) เป็นจริง

N เป็นเลขคู่ ให้ $N = 2k$, k เป็นจำนวนเต็ม $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}$

มัธยฐาน $= \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(k+2)+k}{k(k+1)(k+2)}\right]$

$= \frac{2(k+1)}{2k(k+1)(k+2)}$

$= \frac{4}{4k(k+2)}$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{2k+2}{k(k+1)(k+2)}\right]$

$= \frac{1}{k(k+2)}$

$= \frac{4}{(2k)(2k+4)} = \frac{4}{N(N+4)}$

จากคุณสมบัติของมัธยฐาน $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right| \le \sum_{i=1}^{N}|x_i - k|, \forall k \in R$

อย่างไรก็ตามข้อความ " $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ มีค่าน้อยที่สุด"

ถือว่าเป็นประโยคเปิดซึ่ง N อาจเป็น 2, 4, 6, 8, ...ก็ได้

ดังนั้น สรุปข้อความ (2) ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จไม่ได้

หมายเหตุ U เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่

$\forall N \in U\ [\ \sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ เป็นค่าน้อยที่สุด] มีค่าความเป็นเท็จ

เพราะว่า เมื่อ $N = 2$ จะได้ $\sum_{i=1}^{2}\left|x_i - \frac{4}{2(2+4)}\right| = \sum_{i=1}^{2}\left|\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{3}\right|$

$= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\sum_{i=1}^{2}\left|x_i - \frac{4}{2(2+4)}\right| = \frac{1}{3}$ ไม่เป็นค่าน้อยที่สุด เพราะว่ามี $0 < \frac{1}{3}$ อีก

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right| \ge 0$

เพราะฉะนั้น $-4000 < \sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$

สรุป $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ ไม่ใช่ค่าน้อยสุด ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

15. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อมูลของอายุ 8 ปีข้างหน้าคือ 70, 68, 45, 43, 41, 39

ค่าเฉลี่ย $\overline{X} = \frac{70+68+45+43+41+39}{6} = \frac{306}{6} = 51$

ค่าความแปรปรวน $= \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x})^2}{6} =$

$$\frac{1}{6}\left[(70-51)^2 + (68-51)^2 + (45-51)^2 + (43-51)^2 + (41-51)^2 + (39-51)^2\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[361+289+36+64+100+144\right] = \frac{994}{6} = 165.667$$

$$\left|\text{ค่าเฉลี่ย-ความแปรปรวน}\right| = \left|51 - 165.67\right| = 114.67$$

16. ตอบ –

แนวคิด

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
30 – 39	4	4
40 – 49	7	11 $\leftarrow Q_1$
50 – 59	10	21
60 – 69	3	24 $\leftarrow Q_2$
70 – 79	2	26
80 – 89	4	30

$N = 30 \quad \frac{N}{4} = 7.5, \frac{3N}{4} = 22.5$

$$Q_1 = L + \left[\frac{\frac{N}{4} - \sum f_L}{f_r}\right] I = 39.5 + \left[\frac{7.5-4}{7}\right](10) \quad = 39.5 + 5 = 44.5$$

$$Q_3 = L + \left[\frac{\frac{3N}{4} - \sum f_L}{fr}\right] I = 59.5 + \left[\frac{22.5-21}{3}\right](10) = 59.5 + 5 = 64.5$$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{64.5 - 44.5}{64.5 + 44.5} = \frac{20}{109} = 0.1835$

การตัดตัวเลือก ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังนี้ $0 < x < y$

จะได้ว่า $0 < y - x < y + x$ ดังนั้น $0 < \frac{y-x}{y+x} < 1$ เสมอ

เพราะว่า $0 < Q_1 < Q_3$ เพราะฉะนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} < 1$ เสมอ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกไม่สามารถแก้ปัญหา เรื่องข้อสอบไม่มีตัวเลือกที่ถูกต้องได้ ดังนั้นเราเลือกข้อ 4. ก็ไม่แน่ว่าจะได้คะแนนหรือไม่

17. ตอบ 3.

แนวคิด

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	1	1	1
2	2	1	4	2
3	3	2	9	6
4	4	2	16	8
5	5	3	25	15
	15	9	55	32

สูตรความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง $y = mx + c$ หาค่า m, c จากสมการปกติ

$$m\sum x + nc = \sum y \quad \text{....(1)}$$

$$m\sum x^2 + c\sum x = \sum xy \quad \text{....(2)}$$

(1); $15m + 5c = 9$ ....(3)

(2); $55m + 15c = 32$ ....(4)

3(3); $45m + 15c = 27$ ....(5)

(4) – (5) $10m = 5$ เพราะฉะนั้น $m = \frac{1}{2}$

จาก (3); $5c = 9 - 15m = 9 - 15(\frac{1}{2}) = 9 - 7.5 = 1.5$ เพราะฉะนั้น $c = 0.3 = \frac{3}{10}$

ดังนั้น $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{10}$

เมื่อเงินเดือน = 80,000 บาท จะได้ $x = 8$ ดังนั้น $y = \frac{1}{2}(8) + \frac{3}{10} = 4.3$

สรุปรายจ่าย = 43,000 บาท

18. ตอบ 3.

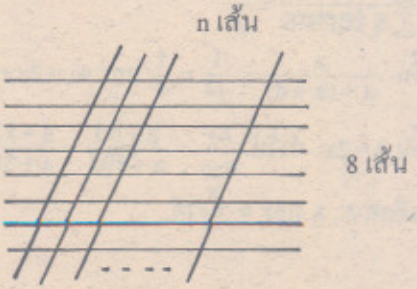
แนวคิด **ขั้นที่ 1** เด็กชายนิดเลือก 2 เล่ม จาก 7 เล่มทำได้ $\binom{7}{2} = 21$

ขั้นที่ 2 เด็กชายหน่อยเลือก 2 เล่ม จาก 9 เล่ม ทำได้ $\binom{9}{2} = 36$

สรุปจะมีวิธีแลกหนังสือ = (21) (36) = 756 วิธี

19. ตอบ 1.

แนวคิด



สี่เหลี่ยมด้านขนานเกิดจากเส้นขนานที่ละ 2 คู่ ตัดกันทำได้ $\binom{8}{2}\binom{n}{2}$ วิธี

ดังนั้น $\binom{8}{2}\binom{n}{2} = 420 \Rightarrow \frac{8!}{6!2!}\binom{n}{2} = 420 \Rightarrow \binom{n}{2} = \frac{420}{28} = 15 = \binom{6}{2}$

ดังนั้น $n = 6$ สรุป $P_{n,2} = P_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

20. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ a เป็นพจน์แรก, d เป็นผลต่างร่วม

ผลบวก r พจน์แรก $= \frac{r}{2}(2a + (r-1)d)$ ผลบวก s พจน์แรก $= \frac{s}{2}(2a + (s-1)d)$

เพราะว่า $\frac{\frac{r}{2}(2a + (r-1)d)}{\frac{s}{2}(2a + (s-1)d)} = \frac{r^2}{s^2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{2a + (r-1)d}{2a + (s-1)d} = \frac{r}{s}$

$$2as + rds - ds = 2ar + rds - dr$$

$$2as - 2ar = ds - dr$$

$$2a(s - r) = d(s - r)$$

$s - r \neq 0$; เพราะฉะนั้น $d = 2a$ สรุป $\frac{a_7}{a_{20}} = \frac{a + 6d}{a + 19d} = \frac{a + 12a}{a + 19a} = \frac{13a}{39a} = \frac{1}{3}$

การตัดตัวเลือก ให้ลำดับเลขคณิตคือ a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของตัว r และ s แทนค่า $r = 1$; ผลบวก 1 พจน์แรก คือ a แทนค่า $s = 2$; ผลบวก 2 พจน์แรก คือ a+ (a+d)

เพราะว่า $\frac{\sum r \text{ terms}}{\sum s \text{ terms}} = \frac{r^2}{s^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{a + (a + d)} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ และ $4a = 2a + d$

เพราะฉะนั้น $d = 2a$ ทำให้ $\frac{a_7}{a_{20}} = \frac{a + 6d}{a + 19d} = \frac{a + 12a}{a + 38a} = \frac{13a}{39a} = \frac{1}{3}$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

21. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ a, ar, ar^2 เป็นรากของสมการ $x^3 - 36x^2 + Ax + B = 0$

ดังนั้น $(x - a)(x - ar)(x - ar^2) = x^3 - 36x^2 + Ax + B$ ....(1)

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $(-1)^3 a^3 r^3 = B$

$$-a^3r^3 = B \quad \text{....(2)}$$

สัมประสิทธิ์ x^2 ทางซ้ายมือของสมการ (1) คือ $-a - ar - ar^2$

เพราะฉะนั้น $-a - ar - ar^2 = -36$

$$a + ar + ar^2 = 36$$

$$a(1 + r + r^2) = 36 \quad \text{....(3)}$$

เพราะว่าผลบวกของส่วนกลับของรากทั้งสามตัวเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} = 4$

$$\frac{r^2 + r + 1}{ar^2} = 4$$

$$r^2 + r + 1 = 4ar^2$$

แทนค่าในสมการ (3) จะได้ $a(4ar^2) = 36$

$$a^2r^2 = 9$$

$$ar = 3 \text{ หรือ } -3$$

$$a^3r^3 = 27 \text{ หรือ } -27$$

จาก (2) ; $|B| = |-a^3r^3| = 27$

22. ตอบ 4.

แนวคิด $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$A = \{x \in U \mid 2 \mid x\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ $\quad n(A) = 50$

$B = \{x \in U \mid 5 \mid x\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$ $\quad n(B) = 20$

$C = \{x \in U \mid 9 \mid x\} = \{9, 18, 27, \ldots, 99\}$ $\quad n(C) = 11$

$A \cap B = \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 5 \mid x\} = \{x \in U \mid 10 \mid x\} = \{10, 20, \ldots, 100\}$

$n(A \cap B) = 10$

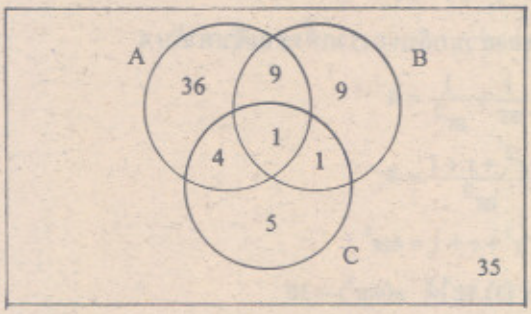
$A \cap C = \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 9 \mid x\} = \{x \in U \mid 18 \mid x\} = \{18, 36, \ldots, 90\}$

$B \cap C = \{x \in \cup \mid 5 \mid x \text{ และ } 9 \mid x\} = \{x \in \cup \mid 45 \mid x\} = \{45, 90\}$

$A \cap B \cap C = \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 5 \mid x \text{ และ } 9 \mid x\} = \{x \in U \mid 90 \mid x\} = \{90\}$

$n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 2$, $n(A \cap B \cap C) = 1$

แผนภาพของเวนน์แสดงสมาชิกแต่ละส่วน



ดังนั้น $n(A \cup B \cup C) = 65$

$P = \{x \in U \mid 2 \nmid x \text{ และ } 3 \nmid x \text{ และ } 9 \nmid x\}$

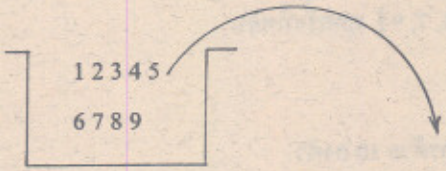
$= \{x \in U \mid x \in A' \text{ และ } x \in B' \text{ และ } x \in C'\} = A' \cap B' \cap C' = (A \cup B \cup C)'$

$n(P) = n(\cup) - n(A \cup B \cup C) = 100 - 65 = 35$

การตัดตัวเลือก ตัวเลขตั้งแต่ 1 – 100 ที่หารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัว คือ 1, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 67, 69, 71, 73, 77, 79, 83, 87, 89, 91, 93, 97 ดังนั้นหากทำโดยการแจงตัวเลขจาก 1, 3, 7, ...ก็ตัดตัวเลือกทิ้งไปได้เรื่อยๆ จนถึงตัวเลข 57 ก็ได้คำตอบเป็นตัวเลือก 4.

23. ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือกแบบที่ 1



หยิบที่ละ 1 ใบแล้ว
คืนก่อนหยิบครั้งถัดไป
ทำแบบนี้ n ครั้ง

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n ดังนั้นแทนค่า $n = 1$

จะเห็นว่า P(ตัวเลขนั้นหารด้วย 10 ลงตัว) = 0

ต่อไปแทนค่า $n = 1$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $1-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{8}{9}\neq 0$ **ตัวเลือก 2.** $1-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=0$

ตัวเลือก 3. $1-\frac{8}{9}+\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}\neq 0$ **ตัวเลือก 4.** $1+\frac{8}{9}-\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้เหตุผลว่าความน่าจะเป็นต้องเป็นเลขบวกเสมอ ดังนั้นหากแทนค่า n บางค่าแล้วค่าในตัวเลือกเป็นเลขลบ ก็จะตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

เช่น $n = 1$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 เหตุการณ์ที่จะได้ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว เป็นเหตุการณ์ที่ตรงกันข้ามกับ (เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัว หรือ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5)

A = เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขคี่ทุกครั้งของการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ทุกครั้ง

$P(A) = \left(\frac{5}{9}\right)^n$

B = เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้เลข 5 ทุกครั้งจากการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$P(B) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้เลขจาก $\{1, 3, 7, 9\}$ ทุกครั้งที่หยิบ

$P(A \cap B) = \left(\frac{4}{9}\right)^n$

E = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว

E' = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ไม่ลงตัว

= เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัวหรือเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5

$= A \cup B$

$P(E') = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$

$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$

วิธีจริงแบบที่ 2. เหตุการณ์ที่ผลคูณของตัวเลขจะหารด้วย 10 ลงตัว คือเหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อย 1 ตัว และได้เลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

ให้ X = เหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อยหนึ่งตัว

Y = เหตุการณ์ที่ได้เลขคู่อย่างน้อยหนึ่งตัว

$P(\text{ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว}) = P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y)$

$= \left(1 - P(X')\right) + \left(1 + P(Y')\right) - \left(1 - P((X \cup Y)')\right)$

$= 1 - P(X') + 1 - P(Y') - 1 + P\left((X' \cap Y')\right)$

$= 1 - P(X') - P(Y') + P(X' \cap Y')$

$P(X') = P(\text{ไม่ได้เลข 5 เลยแม้แต่ตัวเดียว}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$P(Y') = P(\text{ ไม่ได้เลขคู่เลยแม้แต่ตัวเดียว}) = \left(\frac{5}{9}\right)^n$

$P(X' \cap Y') = P(\text{ไม่ได้เลขคู่และไม่ได้เลข 5}) = \left(\frac{4}{9}\right)^n$

สรุป $P(\text{ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว}) = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$

24. ตอบ 3.

แนวคิด $-\pi \le x \le \pi$

$-1 \le \cos x \le 1$

$-4.5 \le 4.5\cos x \le 4.5$

ดังนั้น $\{4.5\cos x \mid -\pi \le x \le \pi\} = [-4.5, 4.5]$

เพราะฉะนั้น $\{\lfloor 4.5\cos x \rfloor \mid -\pi \le x \le \pi\} = \{-5, -4, -3, \ldots, 4\}$

เพราะว่า $n(\{-5, -4, -3, \ldots, 4\}) = 10$

เพราะฉะนั้น $n(R_f) = 10$

การตัดตัวเลือกคำนวณค่าบางค่าแล้วค่อย ๆ ตัดตัวเลือก

$f(0) = \lfloor 4.5\cos o \rfloor = \lfloor 4.5 \rfloor = 4 \quad f(\pi) = \lfloor 4.5\cos\pi \rfloor = \lfloor -4.5 \rfloor = -5$

$f(\frac{\pi}{2}) = \lfloor 4.5\cos\frac{\pi}{2} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0 \quad f(\frac{\pi}{3}) = \lfloor 4.5\cos\frac{\pi}{3} \rfloor = \lfloor \frac{4.5}{2} \rfloor = 2$

ดังนั้น $n(R_f) > 3$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$f(\frac{2\pi}{3}) = \lfloor 4.5\cos\frac{2\pi}{3} \rfloor = \lfloor \frac{4.5}{-2} \rfloor = \lfloor -2.25 \rfloor = -3$

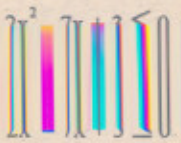
$f(\frac{\pi}{6}) = \lfloor 4.5\cos\frac{\pi}{6} \rfloor = \lfloor 4.5(\frac{\sqrt{3}}{2}) \rfloor = \lfloor 3.89 \rfloor = 3$

ดังนั้น $n(R_f) > 5$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

25. ตอบ 4.

แนวคิด $D_f = \{x \in R \mid 2x^2 \le 7x - 3\}$

$2x^2 \le 7x - 3$



$(2x-1)(x-3) \leq 0$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

สรุป $D_f = [\frac{1}{2}, 3]$

เพราะว่า $f(x) = 2^{-2x} = (2^{-2})^x = (\frac{1}{4})^x$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{2}, 3]$

ดังนั้น $f(x) \geq f(3)$ ทุกค่า $x \in [\frac{1}{2}, 3]$ สรุปค่าต่ำสุดของ f คือ $f(3) = 2^{-2(3)} = \frac{1}{64}$

การตัดตัวเลือกเพราะว่า $f(x) = 2^{-2x} = (2^{-2})^x = (\frac{1}{4})^x > 0$

เพราะฉะนั้น – 64, – 2 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ f ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปสมมติ $f(x) = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

$$2^{-2x} = 2^{-6}$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

และ $3 \in D_f$ และ $\frac{1}{64} < \frac{1}{2}$ ดังนั้นค่าต่ำสุดของ f เท่ากับ $\frac{1}{64}$

26. ตอบ 3.

แนวคิดพิจารณาข้อความ (1) จำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนบวก มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนลบ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ถ้า จำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนมาก แล้ว จำนวนจริงทุกตัวเป็นจำนวนลบ มีค่าความจริงเป็นจริง

พิจารณาข้อความ(2)

การหารากที่ 2 โดยการตั้งหาร

$$
\begin{array}{rl}
 & 1\ 9\ 6\ 8\ 8\ 8.3 \\
1 & \overline{)\ 387665011492.00} \\
 & \underline{1} \\
29 & 287 \\
 & \underline{261} \\
386 & 2665 \\
 & \underline{2316} \\
3928 & 34901 \\
 & \underline{31424} \\
39368 & 347714 \\
 & \underline{314944} \\
393768 & 3277092 \\
 & \underline{3150144} \\
3937763 & 12694800 \\
 & \underline{11813289} \\
 & \\
\end{array}
$$

สรุป $\sqrt{38765011492}$ = 1968888.3 เพราะฉะนั้นข้อความ (2) เป็นจริง

การใช้เหตุผลที่เกี่ยวกับระบบจำนวนเต็ม

เพราะว่า $0^2 = 0, 1^2=1, 2^2=4, 3^2=9, 4^2=16, 5^2=25, 6^2=36, 7^2=49, 8^2=64, 9^2=81$

เพราะฉะนั้น $(....\square)^2$ จะไม่มีหลักหน่วยเป็น 2 แน่นอน สรุปข้อความ (2) เป็นจริง

27. ตอบ 4.

แนวคิด $|3 - 2x| = -x$

$$|3 - 2x|^2 = (-x)^2$$

$$9 - 12x + 4x^2 = x^2$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 1, 3$$

เพราะว่า $|3-2x| \geq 0$ เสมอ เพราะฉะนั้น $x \neq 1$ และ $x \neq 3$

สรุป $A = \{x \mid |3-2x| = -x\} = \varnothing$

28. ตอบ 3.

แนวคิด $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x+y}$ จะได้ $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{2y}$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2}$$

$$2\frac{y}{x} = \frac{x}{y} + 1$$

ให้ $V = \frac{y}{x}$ จะได้ $2V = \frac{1}{v} + 1$

$$2V^2 = 1 + V$$

$$2V^2 - V - 1 = 0$$

$$(2V + 1)(V - 1) = 0$$

$$V = -\frac{1}{2}, 1$$

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, 1$$

สรุป $A = \left\{\frac{y}{x} \middle| \frac{x}{y} = \frac{2y}{x+y}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x และ y ให้ $x = 1$ จะได้ $\frac{1}{y} = \frac{2y}{1+y}$

$$1 + y = 2y^2$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$(2y + 1)(y - 1) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}, 1$$

ดังนั้น $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, 1$ เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2}, 1 \in A$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

29. ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นสมมติ a, b, c, d เป็น 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับดีกว่า $a = 1 < b = 2 < c = 3 < d = 4$

$m(d, b) = m(4, 2) = 2$ $\quad M\big(c, m(d, b)\big) = m(3, 2) = 3$

$M(a, c) = M(1, 3) = 3$ $\quad m\big(M(a, c), d\big) = m(3, 4) = 3$

$M\big(m(M(a, c), d), M(c, m, (d, b))\big) = M(3, 3) = 3 = c$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $M(x, y) = Max(x, y)$ = ค่ามากสุดระหว่าง x, y

$m(x, y) = Min(x, y)$ = ค่าต่ำสุดระหว่าง x, y

เมื่อ $a < b < c < d$

$M\big(m(M(a, c)\, d,)\, , M(c, m(d, b))\big) = M(m(c, d)\, , M(c, b)) = M(c, c) = c$

30. ตอบ 1.

แนวคิด ในขณะที่นักเรียนกำลังทำข้อสอบขอแนะนำให้ทำข้อความ 2 ก่อนดีกว่าโดยการเลือก $0 < a = 1 < b = 2 < c = 3 < d = 4$ จะเห็นว่า $a - c = -2 < -8 = b - d$

ดังนั้นข้อความ (2) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ข้อความ (1) เป็นจริงแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ $\quad 0 < a < b < c < d$

จาก $b < c$ $\quad 0 < a + b < a + c$ $\quad$ ....(1)

จาก $b < c$ $\quad 0 < b + d < c + d$

$$0 < \frac{1}{c+d} < \frac{1}{b+d} \qquad \text{....(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\quad \frac{a+b}{c+d} < \frac{a+c}{b+d}$

31. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาสมการ $2^x(4-x) = 2x+4$

$$2^x = \frac{2(x+2)}{4-x} \rightarrow 2^x = -\frac{2(x+2)}{x-4}$$

เพราะว่า $2^x \geq 0$ เพราะฉะนั้น $-\frac{2(x+2)}{x-4} \geq 0$

$$\frac{x+2}{x-4} \leq 0 \rightarrow -2 \leq x < 4$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in I \mid 2^x(4-x) = 2x+4\} \subset \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

เพราะว่า $x = 0$; $2^0(4-0) = 4 = 2(0)+4$, $0 \in A$

$x = 1$; $2^1(4-1) = 6 = 2(1)+4$, $1 \in A$

$x = 2$; $2^2(4-2) = 8 = 2(2)+4$, $2 \in A$

$x = 3$; $2^3(4-3) = 8 \neq 2(3)+4$, $3 \notin A$

แต่ $x = -2$; $2^{-2}(4-(-2)) \neq 2(-2)+4$, $-2 \notin A$

$x = -1$; $2^{-1}(4-(-1)) \neq 2(-1)+4$, $-1 \notin A$

สรุป $A = \{x \in I \mid 2^x(4-x) = 2x+4\} = \{0, 1, 2\}$ ผลบวกของสมาชิกใน A คือ 3

32. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $a^3 - a^2 - a - 1 = 0$ และ $b^3 - b^2 - b - 1 = 0$

$$a^3 = a^2 + a + 1 \text{ และ } b^3 = b^2 + b + 1$$

$a^3 - b^3 = (a^2 + a + 1) - (b^2 + b + 1) = (a^2 - b^2) + (a - b) = (a - b)(a + b + 1)$

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a + b + 1$$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{b^3 - c^3}{b - c} = b + c + 1$ และ $\frac{c^3 - a^3}{c - a} = c + a + 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{a^3 - b^3}{a - b} + \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{c^3 - a^3}{c - a}$

$= (a + b + 1) + (b + c + 1) + (c + a + 1) = 2(a + b + c) + 3$

เพราะว่า $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - x^2 - x - 1$

$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc = x^3 - x^2 - x - 1$

เพราะฉะนั้น $a + b + c = 1$ สรุป $2(a + b + c) + 3 = 5$

เพราะฉะนั้น $\frac{a^3 - b^3}{a - b} + \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{c^3 - a^3}{c - a} = 5$

หมายเหตุ เพราะว่า $(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$

จะได้ $abc = -C$, $a + b + c = -A$, $ab + ac + bc = B$

เพราะฉะนั้นเมื่อ a, b, c เป็นรากของสมการ $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$

จะได้ว่า $abc = 1$, $a + b + c = 1$, และ $ab + ac + bc = -1$

เพราะฉะนั้น $(a + b + c)^2 = 1$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) = 1$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2(-1) = 1$

$a^2 + b^2 + c^2 = 3$

สรุป $\frac{a^3 - b^3}{a - b} + \frac{b^3 - c^3}{b - c} + \frac{c^3 - a^3}{c - a} = (a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2) + (c^2 + ac + a^2)$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ac) = 2\,(3) + (-1) = 5$

33. ตอบ 2.

แนวคิด (1) ผิด เพราะว่า $f(2) = f(2(1)) = f(1) + 1$

และ $f(4) = f(2(2)) = f(2) + 2 = (f(1) + 1) + 2 = f(1) + 3$ ดังนั้น $f(4) = f(1) + 3$

ถ้า $f(1) = 0$ แล้ว $f(4) = 3$ จะเกิดข้อขัดแย้งกับเงื่อนไขข้อ III ที่กล่าวว่า

"ถ้า $f(n)$ เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว n ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ"

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ

"ถ้า n ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $f(n)$ ต้องไม่เป็นจำนวนเฉพาะ"

สรุป $f(1) \neq 0$

(2) ถูกต้อง เพราะว่า $f(n) < f(n+1)$ ทุกค่า $n \in \{1, 2, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น $f(n) < f(n+1) < f(n+2) < f(n+3) < \ldots < f(n+n) = f(2n)$

ดังนั้น $\{f(n), f(n+1), f(n+2), \ldots, f(2n)\}$ มีสมาชิก $n+1$ ตัว

ให้ $X = \{f(n), f(n+1), f(n+2), \ldots, f(2n)\}$

$n(X) = n+1$ และ X เป็นสับเซตของเซตจำนวนเต็ม

ค่าสูงสุดของสมาชิกใน X คือ $f(n)$, ค่าต่ำสุดของสมาชิกใน X เท่ากับ $f(2n)$

เพราะว่า $f(2n) = f(n) + n$ เพราะฉะนั้น $f(2n) - f(n) = n$

เพราะว่า $f(n) < f(n+1) < f(n+2) < f(n+3) < \ldots < f(n+n) = f(2n)$

เพราะฉะนั้น $f(n+1) = f(n) + 1$

$f(n+2) = f(n+1) + 1$

$f(n+(n-1)) = f(2n-1) + 1$

นั่นคือ $f(n+1) = f(n) + 1 = (f(n-1)+1) + 1 = f(n-1) + 2 = (f(n-2)+1) + 2$

$= f(n-2) + 3 = f(1) + n$

สรุป (2) ถูกต้อง

34. ตอบ 4.

แนวคิด $A = \{z \mid z = \sin\theta + i\cos\theta$ และ $z^2 = \cos\theta + i\sin\theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi\}$

$$z = \sin\theta + i\cos\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$z^2 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]^2 = \cos(\pi - 2\theta) + i\sin(\pi - 2\theta)$$

$$= -\cos 2\theta + i\sin 2\theta$$

เพราะฉะนั้น $-\cos 2\theta + i\sin 2\theta = z^2 = \cos\theta + i\sin\theta$

ดังนั้น $-\cos 2\theta = \cos\theta$ และ $\sin 2\theta = \sin\theta$

สรุป $A = \{z \mid z = \sin\theta + i\cos\theta, -\cos 2\theta = \cos\theta, \sin 2\theta = \sin\theta\}$

พิจารณา $-\cos 2\theta = \cos\theta$

$$-(2\cos^2\theta - 1) = \cos\theta$$

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

$$(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, -1 \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi$$

พิจารณา $\sin 2\theta = \sin\theta$

$$\sin 2\theta - \sin\theta = 0$$

$$2\sin\theta\cos\theta - \sin\theta = 0$$

$$\sin\theta(2\cos\theta - 1) = 0$$

$$\sin\theta = 0 \text{ หรือ } \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \theta = 0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

ดังนั้น $A = \left\{ z \mid z = \sin\theta + i\cos\theta, \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi \right\}$

$$= \left\{ \sin\pi + i\cos\pi, \sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{5\pi}{3} + i\cos\frac{5\pi}{3} \right\}$$

$$= \left\{ -i, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right\}$$

สรุป A มีสมาชิก 3 ตัว

35. ตอบ 3.

การตัดตัวเลือก ใช้ค่าความจริงในการตัดตัวเลือก **โจทย์** "จำนวนจริงบวกทุกจำนวนสามารถเขียนเป็นกำลังสองของจำนวนจริงบวกบางจำนวนได้" มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวเลือก 1. $\forall x [x > 0 \wedge \exists y [y > 0 \wedge x = y^2]]$

เป็นเท็จเพราะว่า $x = -4$ ทำให้ $-4 > 0$ เป็นเท็จ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ตัวเลือก 2. เพราะว่า $[\forall x [x > 0]]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\{\forall x [x > 0]\} \wedge [\exists y [y > 0 \wedge x = y^2]]$ เป็นเท็จ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ตัวเลือก 3. และ 4 มีลักษณะคล้ายกันแต่เมื่อสังเกตให้ดีจะพบว่า

$[\exists y\,[\,y>0 \wedge x=y^2]]$ เป็นประโยคเปิด

ดังนั้น $[\forall x\,[\,x>0\,]] \rightarrow [\exists y\,[\,y>0 \wedge x=y^2]]$

จึงสรุปค่าความจริงไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

36. ตอบ 3.

แนวคิด ให้พิจารณาความเป็นไปได้และข้อขัดแย้งเช่น

(เก่งพูดจริง, เข้มพูดจริง, คมพูดจริง) แล้วดูว่ามีข้อขัดแย้งหรือไม่

(เก่งพูดจริง, เข้มพูดจริง, คมพูดเท็จ) แล้วดูว่ามีข้อขัดแย้งหรือไม่

:

(เก่งพูดเท็จ, เข้มพูดเท็จ, คมพูดเท็จ) แล้วมีข้อขัดแย้งหรือไม่ ทั้ง 8 กรณี

ถ้าพบกรณีที่เป็นไปได้ ซึ่งไม่เกิดข้อขัดแย้งก็จะสามารถสรุปคำตอบได้

กรณี 1 (เก่งพูดจริง, เข้มพูดจริง, คมพูดจริง)

เป็นไปไม่ได้ เพราะว่าทุกคนบอกว่าไม่ได้วางดอกไม้

แต่โจทย์กำหนดว่ามี 1 คน ในสามคนนี้วางดอกไม้ ดังนั้นกรณี 1 ตัดทิ้งได้

กรณี 2 (เก่งพูดจริง, เข้มพูดจริง, คมพูดเท็จ)

ดังนั้นเก่งและเข้มต้องพูดขัดแย้งกัน เพราะว่าเก่งพูดว่า "เข้มชอบดอกทิวลิปมาก"

แสดงว่าเข้มต้องเคยเห็นดอกทิวลิปมาก่อน

เพราะว่า เข้มพูดว่า "ผมไม่เคยเห็นดอกไม้ชนิดนี้มาก่อน"

สรุปกรณี 2. เก่งพูดจริง, เข้มพูดจริง เป็นไปไม่ได้

ต่อไปลองพิจารณากรณี เก่งพูดจริง, เข้มพูดเท็จ, คมพูดจริง

จะเป็นกรณีที่สมเหตุสมผลที่สุด

สมมติเก่งพูดจริง และเข้มพูดเท็จ และคมพูดจริง

เก่งพูดว่าผมไม่ได้เป็นคนวาง, เข้มชอบทิวลิปมาก, คมไม่ชอบทิวลิป

ดังนั้น เก่งไม่ได้วางดอกไม้ เป็นจริง ....(1)

เข้มชอบทิวลิปมาก เป็นจริง ....(2)

คมไม่ชอบทิวลิป เป็นจริง ....(3)

เพราะว่าเข้มพูดเท็จ ดังนั้น

เข้มไม่ได้วางดอกไม้, เข้มไม่เคยเห็นดอกทิวลิป, เข้มมาถึงโรงเรียนหลังเพื่อนๆ เป็นเท็จ

นั้นคือ เข้มไม่ได้วางดอกไม้เป็นเท็จได้

เข้มไม่เคยเห็นดอกทิวลิป เป็นเท็จได้ .....ไม่ขัดแย้งกับ (2)

เข้มมาถึงโรงเรียนหลังเพื่อนๆ เป็นเท็จได้ .....ไม่ขัดแย้งกับ (4)

เพราะว่าคมพูดจริง ดังนั้น

คมไม่ได้วางดอกไม้ เป็นจริง

เก่งและเข้มเดินเข้าโรงเรียนพร้อมกันเป็นจริง ....(4)

เก่งและเข้มคนใดคนหนึ่งต้องถือดอกไม้ เป็นจริง

นอกจากนั้นกรณีต่างๆ ยังสอดคล้องกับกติกาที่ว่า

คนที่ไม่ได้วางดอกไม้ ต้องไม่พูดเท็จ และคนที่วางดอกไม้อนุญาติให้พูดเท็จได้

สรุปเข้มต้องเป็นคนวางดอกไม้

37. ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (1) $\tan 45^\circ = \tan(61^\circ - 16^\circ)$

$$1 = \frac{\tan 61^\circ - \tan 16^\circ}{1 + \tan 16^\circ \tan 61^\circ}$$

$$1 + \tan 16^\circ \tan 61^\circ = \tan 61^\circ - \tan 16^\circ$$

ดังนั้น $\tan 61^\circ - \tan 16^\circ \tan 61^\circ - \tan 16^\circ = 1 < 1$ สรุปข้อความ (1) เป็นเท็จ

หมายเหตุ ทำได้แค่นี้ก็ควรตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (2) จากสูตร $2\arctan x = \arctan(\frac{2x}{1-x^2})$

จะได้ $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(\frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2}) = \arctan(\frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{8}{9})}) = \arctan\frac{3}{4}$

สรุปตัวเลือก (2) เป็นจริง

38. ตอบ 4.

แนวคิด

$$\tan^4 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \sec^3 x$$

$$\tan^4 x + \sec^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$(\sec^2 - 1)^2 + \sec^3 x = 1$$

$$\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1 + \sec^3 x = 1$$

$$\sec^4 x + \sec^3 x - 2\sec^2 x = 0$$

$$\sec^2 x\,(\sec^2 x + \sec x - 2) = 0$$

$$\sec^2 x\,(\sec x + 2)(\sec x - 1) = 0$$

เพราะว่าเรนจ์ของ sec คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ เพราะฉะนั้น $\sec^2 x \neq 0$

ทำให้ $(\sec x + 2)(\sec x - 1) = 0 \rightarrow$ $\sec x = -2, 1$

$\cos x = -\frac{1}{2}, 1$

$x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, 2\pi$

เพราะว่า tanx, cosx, sinx, secx หาค่าได้ทุกค่า $x = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, 2\pi$

เพราะฉะนั้น $A = \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 0, 2\pi\}$ สรุป $n(A) = 4$

39. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin(x+y) = \frac{3\pi}{2} - \arccos(x-y)$$

เพราะว่า $\sin(\frac{3\pi}{2} - A) = -\cos A$

เพราะฉะนั้น $\sin(\arcsin(x+y)) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \arccos(x-y))$

$$x + y = -\cos(\arccos(x-y))$$
$$= -(x-y) = -x + y$$
$$x = -x$$
$$x = 0$$

ดังนั้น $\arcsin(0+y) + \arccos(0-y) = \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin y + \arccos(-y) = \frac{3\pi}{2}$$

เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin y \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \arccos(-y) \le \pi$

เพราะฉะนั้น $\arcsin y = \frac{\pi}{2}$ และ $\arccos(-y) = \pi$

สรุป $\arcsin y + \arccos x = \frac{\pi}{2} + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin k \le \frac{\pi}{2}$ และ $0 \le \arccos t \le \pi$

ดังนั้น $\arcsin k + \arccos t = \frac{3\pi}{2}$ ก็ต่อเมื่อ $\arcsin k = \frac{\pi}{2}$ และ $\arccos t = \pi$

ก็ต่อเมื่อ $k = 1$ และ $t = -1$

เพราะฉะนั้น $\frac{\arcsin(x+y)}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\arccos(x-y)}{\pi} = \frac{3\pi}{2}$ ก็ต่อเมื่อ

$$x + y = 1 \quad \text{....(1)}$$

$$x - y = -1 \quad \text{....(2)}$$

(1) + (2) ; $2x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ และ $y = 1$

สรุป $\arcsin y + \arccos x = \arcsin 1 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

40. ตอบ 1.

แนวคิด $\arcsin x = \arccos(x-1)$

เพราะว่า $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$ เพราะฉะนั้น $\arccos\sqrt{1-x^2} = \arccos(x-1)$

เพราะว่า arccos เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 เพราะฉะนั้น $\sqrt{1-x^2} = x-1 \rightarrow$

$1-x^2 = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0, 1$

ถ้า $x = 0$; $\arcsin 0 = 0$, $\arccos(0-1) = \arccos(-1) = \pi \neq \arcsin 0$ ดังนั้น $x = 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = 1$; $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ และ $\arccos(1-1) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $x = 1$ ได้ สรุป $A = \{x \mid \arcsin x = \arccos(x-1)\} = \{1\}$, $n(A) = 1$

41. ตอบ 2.

แนวคิด เซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใดให้ใช้การนำสมาชิกในเซตของตัวเลือกขึ้นมาแทนค่า โดยเลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้ และคิดเลขได้ง่าย เช่น $x = 30.01°$ และใช้การประมาณค่าเพื่อดูว่า $30.01° \in B$ หรือไม่

$2\sin 2x - 1 = 2\sin 2(30.01°) - 1 = 2\sin 60.02° - 1 \approx 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$

$2\cos x - 2\sin x = 2\cos 31.01° - 2\sin 31.01° \approx 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2(\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - 1 = 0.7$

ดังนั้น $30.01° \notin B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

คำแนะนำ เปลี่ยนเรเดียนเป็นองศาอาจทำให้นักเรียนคิดเลขง่ายขึ้น

1. $[45°, 120°) \cup (150°, 240°)$
2. $(30°, 120°) \cup (150°, 240°)$
3. $[45°, 120°) \cup (150°, 225°]$
4. $(30°, 120°) \cup (150°, 225°]$

ต่อไปเลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 4. เช่นเลือก $x = 225.01°$

$2\sin 2x - 1 = 2\sin 2(225.01°) - 1 = 2\sin(450.02°) - 1$

$= 2\sin(360° + 90.02°) - 1 = 2\sin(90.02°) - 1 \approx 2(1) - 1 = 1$

$2\cos(225.01°) - 2\sin(225.01°) = 2\cos(180° + 45.01°) - 2\sin(180° - 45.01°)$

$= -2\cos(45.01°) - 2\sin(45.01°) \approx -2(\frac{1}{\sqrt{2}}) - 2(\frac{1}{\sqrt{2}}) < 0$

ดังนั้น $2\sin 2(225.01°) - 1 > 2\cos(225.01°) - 2\sin(225.01°)$

เพราะฉะนั้น $225.01 \in B$ แต่ $225.01 \notin (30°, 120°) \cup (150°, 225°]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ใช้การแก้อสมการ $2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x$

$$2(2\sin x\cos x) - 1 > 2\cos x - 2\sin x$$

$$4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 > 0$$

$$2\sin x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) > 0$$

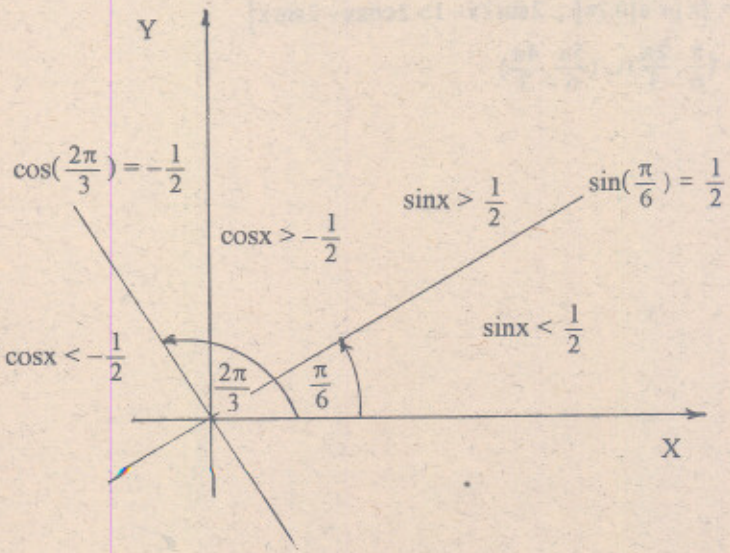
$$(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) > 0$$

จำแนกกรณีต่างๆ ออกเป็น 2 กรณี คือ 1. $(2\sin x - 1) > 0$ และ $(2\cos x + 1) > 0$

และ 2. $(2\sin x - 1) < 0$ และ $(2\cos x + 1) < 0$

กรณีที่ 1 $2\sin x - 1 > 0$ และ $2\cos x + 1 > 0$

$$\sin x > \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad \cos x > \frac{1}{2}$$



ดูจากกราฟ $\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \sin x > \frac{1}{2}\right\} = (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$

$$\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \cos x > -\frac{1}{2}\right\} = [0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi]$$

เพราะฉะนั้น $\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \sin x > \frac{1}{2}, \cos x > -\frac{1}{2}\right\}$

$$= (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}) \cap ([0, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)) = (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$$

หมายเหตุ ทำมาได้แค่นี้ก็ควรจะตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

กรณีที่ 2 $2\sin x - 1 < 0$ และ $2\cos x + 1 < 0$

$$\sin x < \frac{1}{2} \text{ และ } \cos x < -\frac{1}{2}$$

$$\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \sin x < \frac{1}{2}\right\} = [0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi]$$

$$\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \cos x < -\frac{1}{2}\right\} = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\left\{x \in [0,2\pi] \,\middle|\, \sin x < \frac{1}{2}, \cos x < -\frac{1}{2}\right\} = ([0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5\pi}{6}, 2\pi]) \cap (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$$

$$= (\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$$

สรุป $B = \left\{x \,\middle|\, x \in [0,2\pi] \text{ , } 2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x\right\}$

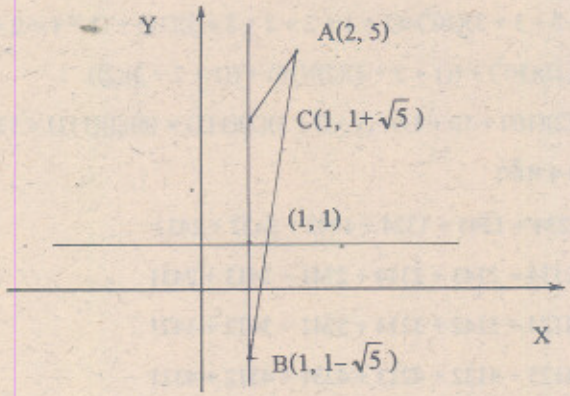
$$= (\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}) \cup (\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3})$$

ตอนที่ 2

1. ตอบ พ.ท. $\Delta ABC = \sqrt{5}$ ตารางหน่วย

แนวคิด วงรี $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{9}=1$

มีแกนเอกขนานแกน X, $a = 3$, $b = 2$, จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (1, 1)



แกนเอก

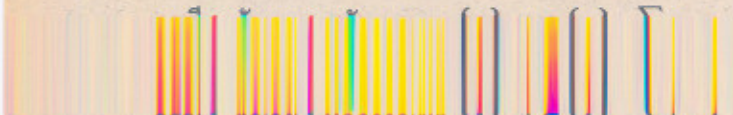
$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$, $c = \sqrt{5}$ ดังนั้นโฟกัสวงรี คือ $B(1,1+\sqrt{5}), C(1,1+\sqrt{5})$

ΔABC มีความยาวฐาน $BC = (1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}$ มีความสูง = ระยะจาก A มาตั้งฉากกับแนว BC $= 1$ สรุปพื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}\times(2\sqrt{5})\times(1) = \sqrt{5}$

2. ตอบ 3999960

แนวคิด ตัวอย่างของเลขโดดห้าหลักที่หลักทั้งห้าเป็น 1, 2, 3, 4, 5 โดยตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำ เช่น 12345, 23451, 54321, ...

วิธีที่ 1 การหาคำตอบข้อนี้จะขอแนะนำการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปหายาก **(หมายเหตุ** การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปหายากหาอ่านได้จากคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 15 ที่มีชื่อว่า **เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์)**



กรณี 1. ตัวเลข 1 หลักจากเซต $\{1\}$, $A \in \{1\}$ $\sum A = 1$

กรณี 2. ตัวเลข 2 หลักจาก $\{1, 2\}$, $A, B \in \{1, 2\}$ และ A, B ไม่ซ้ำ

$\sum AB = 12 + 21 = (1 + 2)(10) + (1 + 2) = (1 + 2)(10 + 1) = (3)(11) = 33$

กรณี 3. ตัวเลข 3 หลัก $A, B, C \in \{1, 2, 3\}$ และ A, B, C ไม่ซ้ำ

$\sum ABC = 123 + 132 + 213 + 231 + 312 + 321$

$= (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3)(10^2) + (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3)(10) + (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3)$

$= ((1 + 2 + 3)(2))(10^2) + ((1 + 2 + 3)(2))(10) + ((1 + 2 + 3)(2))$

$= ((1 + 2 + 3)(2)(100 + 10 + 1) = (1 + 2 + 3)(2)(111) = (6)(2)(111) = 1332$

กรณี 4. ตัวเลข 4 หลัก

$$\begin{aligned}\sum ABCD = {} & 1234 + 1243 + 1324 + 1342 + 1423 + 1432 \\ & + 2134 + 2143 + 2314 + 2341 + 2413 + 2431 \\ & + 3124 + 3142 + 3214 + 3241 + 3412 + 3421 \\ & + 4123 + 4132 + 4213 + 4231 + 4312 + 4321\end{aligned}$$

$= (1(6) + 2(6) + 3(6) + 4(6))(10^3) + (1(6) - 2(6) + 3(6) + 4(6))(10^2)$

$+ (1(6) + 2(6) + 3(6) + 4(6)(10^2) + (1(6) + 2(6) + 3(6) + 4(6))$

$= \left[1(6) + 2(6) + 3(6) + 4(6)\right]\left[10^3 + 10^2 + 10 + 1\right]$

$= \left[(1 + 2 + 3 + 4)(6)\right]\left[1000 + 100 + 10 + 1\right]$

$= (1 + 2 + 3 + 4)(6)(1111) = (10)(6)(1111) = 66660$

แนวคิดข้างต้นสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

$\sum ABC = (1 + 2 + 3)(2)(111)$

↑ ↑ ↑ เลข 1 จำนวนหลักเท่ากับจำนวนสมาชิกของ $\{1, 2, 3\}$

ได้มาจาก $(3 - 1)!$

ได้มาจากผลบวกของสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3\}$

$\sum ABCD = (1 + 2 + 3 + 4)\ (6)\ (1111)$

เลข 1 จำนวนหลักเท่ากับจำนวนสมาชิกของ $\{1,2,3,4\}$

ได้มาจาก $(4 - 1)!$

ได้มาจากผลบวกของสมาชิกในเซต $\{1, 2, 3, 4\}$

$\sum ABCDE = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(5 - 1)!(11111)$

$_{A,B,C,D,E} = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(24)(11111) = (15)(24)(11111) = 3999960$

สรุปผลบวกของจำนวนเต็ม 5 หลักทุกจำนวน ซึ่งมีเลขโดด ๆ ในหลักทั้งห้าเป็น 1, 2, 3, 4, 5 โดยตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันมีค่า = 3999960

วิธีที่ 2 ใช้หลักการนับจำนวนวิธี

หลักที่ 5	หลักที่ 4	หลักที่ 3	หลักที่ 2	หลักที่ 1
10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

การคำนวณสัมประสิทธิ์ของ 10^4 ของตัวเลขทุกตัว

ขั้นที่ 1 หลักที่ 4 เลือกตัวเลขได้ 5 ชนิดจาก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ขั้นที่ 2 ตัวเลขในหลักอื่นที่เหลือจะจัดลำดับได้ 4! วิธี ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ 10^4 คือ

$(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(4!) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)(4!) = (15)(24) = 360$

การคำนวณสัมประสิทธิ์ของ 10^3 ของตัวเลขทุกตัว

ขั้นที่ 1 หลักที่ 3 เลือกตัวเลขได้ 5 ชนิด จาก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

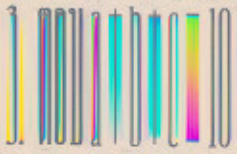
ขั้นที่ 2 ตัวเลขในหลักอื่นจัดลำดับได้ต่างกัน 4! วิธี

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ 10^3 คือ $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)(4!) = 360$

ในทำนองเดียวกันสัมประสิทธิ์ของ 10^2, 10^1 และ 10^0 คือ $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)\ (4!)$

สรุป $\sum ABCDE = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)\ (4!)\ (10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1)$

$= (15)(24)(11111) = 3999960$



แนวคิด (I) $a\log_{24}2 + b\log_{24}3 = c$

$$\log_{24}2^a + \log_{24}3^b = \log_{24}24^c$$

$$\log_{24}(2^a 3^b) = \log_{24}24^c$$

$$2^a 3^b = 24^c = ((8)(3))^c$$

$$2^a 3^b = 2^{3c} 3^c$$

$$\frac{2^a}{2^{3c}} = \frac{3^c}{3^b}$$

$$2^{a-3c} = 3^{c-b} \longrightarrow a - 3c = 0 = c - b \longrightarrow a = 3c,\ b = c$$

(II) $\log_c(a+b) = 3 \longrightarrow \log_c(a+b) = \log_c c^3 \longrightarrow a + b = c^3$

$\longrightarrow 3c + c = c^3 \longrightarrow 4c = c^3$

$c \neq 0$ และ $c > 0 \longrightarrow c = 2$

เพราะฉะนั้น $a = 6,\ b = 2$ สรุป $a + b + c = 10$

4. ตอบ $x + y = 0$

แนวคิด โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร x, y

แทนค่า $y = 0$ จะได้ $(x + \sqrt{x^2+1})(0 + \sqrt{0^2+1}) = 1$

$$x + \sqrt{x^2+1} = 1 \qquad \ldots.(1)$$

$$(x + \sqrt{x^2+1})^2 = 1$$

$$x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1 = 1$$

$$2x^2 + 2x = 0$$

$x^2 + x = 0 \longrightarrow x(x+1) = 0 \longrightarrow x = 0$ หรือ $x = -1$

แทนค่า $x = -1$ ในสมการ (1) ; $-1 + \sqrt{(-1)^2+1} = 1$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x = 0$ เท่านั้น สรุป $x + y = 0$

เทคนิคการจัดรูปทางพีชคณิตทำได้ดังนี้

แบบที่ 1 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$

$$(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = x-\sqrt{x^2+1}$$

$$(x^2-(x^2+1))(y+\sqrt{y^2+1}) = x-\sqrt{x^2+1}$$

$$-(y+\sqrt{y^2+1}) = x-\sqrt{x^2+1}$$

$$-y-\sqrt{y^2+1} = x-\sqrt{x^2+1} \quad \text{....(1)}$$

ในทำนองเดียวกัน $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})(y-\sqrt{y^2+1}) = y-\sqrt{y^2+1}$

จะได้ $-(x+\sqrt{x^2+1}) = y-\sqrt{y^2+1}$

หรือ $y-\sqrt{y^2+1} = -x-\sqrt{x^2+1}$ ....(2)

(1) – (2) ; $-2y = 2x \longrightarrow -y = x \longrightarrow x + y = 0$

แบบที่ 2 $(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1}) = 1$

$$x+\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}} \cdot \frac{y-\sqrt{y^2+1}}{y-\sqrt{y^2+1}} = \frac{y-\sqrt{y^2+1}}{y^2-(y^2+1)}$$

$$x+\sqrt{x^2+1} = -y+\sqrt{y^2+1}$$

เพราะฉะนั้น $x = -y$ และ $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{y^2+1}$ สรุป $x + y = 0$

5. ตอบ 229 หรือ 165

แนวคิด ถ้า a, b, c, d เป็นรากของสมการ $x^4 + px^3 + qx^2 + rx + t = 0$

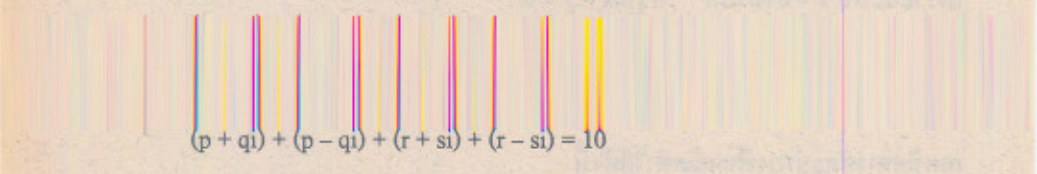
แล้ว $abcd = t$, $a + b + c + d = p$

หมายเหตุ เพื่อง่ายต่อการคำนวณนักเรียนต้องสมมติว่า b และ c เป็นจำนวนจริง

สมมติ $p + qi$, $p - qi$, $r + si$, $r - si$ เป็นรากของ $x^4 - 10x^3 + bx^2 + cx + 130 = 0$

เพราะฉะนั้น $(p + qi)(p - qi)(r + si)(r - si) = 130$

$$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = 130$$



$(p + qi) + (p - qi) + (r + si) + (r - si) = 10$

$2p + 2r = 10 \longrightarrow p + r = 5$

เพราะว่าคำตอบทั้งสี่ตัวเป็นจำนวนเชิงซ้อนที่มิใช่จำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $q \neq 0$ และ $s \neq 0$ เพราะว่า p, q, r และ s เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้นเราต้องจำแนกค่าต่าง ๆ ของ p, q, r, s ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$(p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = 130 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13$ และ $p + r = 5$

ต่อไปใช้เหตุผลว่า 130 มีตัวประกอบเป็น 1, 2, 5, 10, 13, 26, 65, 130 และทำการจำแนกค่า $p^2 + q^2$ เป็น 8 กรณี

กรณี 1 $p^2 + q^2 = 1$ และ $r^2 + s^2 = 130$

$p^2 = 1,$	$q^2 = 0$	$r^2 = 9,$	$s^2 = 121$
$p^2 = 1,$	$q^2 = 0$	$r^2 = 49,$	$s^2 = 81$
$p^2 = 0,$	$q^2 = 1$	$r^2 = 121,$	$s^2 = 9$
$p^2 = 0,$	$q^2 = 1$	$r^2 = 81,$	$s^2 = 49$

ทุกกรณีไม่สามารถหา $p + r = 5$ ได้ สรุป $p^2 + q^2 = 1$ ไม่ได้

กรณี 2 $p^2 + q^2 = 2$ และ $r^2 + s^2 = 65$

$p^2 = 1,$	$q^2 = 1$	$r^2 = 1,$	$s^2 = 64$
		$r^2 = 49,$	$s^2 = 16$
		$r^2 = 16,$	$s^2 = 49$
		$r^2 = 64,$	$s^2 = 1$

กรณีที่ $p + r = 5$ ได้คือ $p = 1, q = 1, r = 4, s = 7$

กรณี 3 $p^2 + q^2 = 5$ และ $r^2 + s^2 = 26$

$p^2 = 1,$	$q^2 = 4$	$r^2 = 1,$	$s^2 = 25$
$p^2 = 4,$	$q^2 = 1$	$r^2 = 25,$	$s^2 = 1$

ทุกกรณีไม่มีกรณีที่ทำให้ $p + r = 5$ ได้เลย เพราะฉะนั้น $p^2 + q^2 \neq 5$

กรณี 4 $p^2 + q^2 = 10$ และ $r^2 + s^2 = 13$

$p^2 = 1$, $q^2 = 9$ $r^2 = 4$, $s^2 = 9$

$p^2 = 9$, $q^2 = 1$ $r^2 = 9$, $s^2 = 4$

เลือก $p = 2, r = 3$ จะได้ $p + r = 5$ สรุปมีกรณีที่เป็นไปได้ คือ $p = 2, q = 3, r = 3, s = 2$

กรณี 5 $p^2 + q^2 = 13$ และ $r^2 + s^2 = 10$ จะได้ผลเหมือนกับกรณี 4

กรณี 6 $p^2 + q^2 = 26$ จะได้ผลเหมือนกับกรณี 3

กรณี 7 $p^2 + q^2 = 65$ จะได้ผลเหมือนกับกรณี 2

กรณี 8 $p^2 + q^2 = 130$ จะได้ผลเหมือนกับกรณี 1

สรุปมีคำตอบได้ 2 กรณี คือ $p = 1, q = 1, r = 4, s = 7$ และ $p = 2, q = 3, r = 3, s = 2$

กรณี $p = 1, q = 1, r = 4, s = 7$ จะได้

$$x^4 - 10x^3 + bx^2 + cx + 130 = (x - (1 + i))(x - (1 - i))(x - (4 + 7i))(x - (4 - 7i))$$
$$= (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 8x + 65)$$
$$= x^4 - 10x^3 + 83x^2 - 146x + 130$$

ดังนั้น $b = 83, c = -146$ และ $b - c = 229$

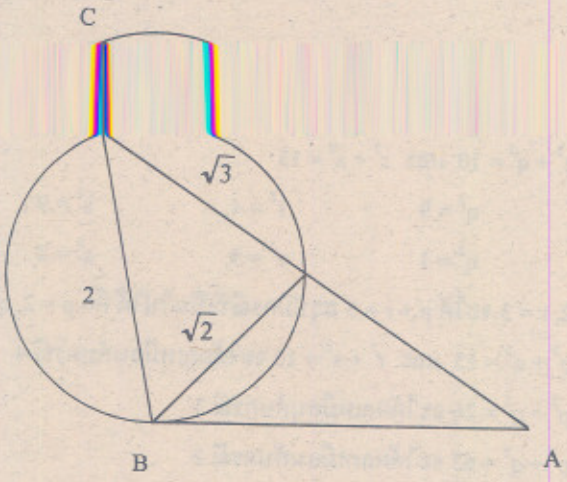
กรณี $p = 2, q = 3, r = 3, s = 2$ จะได้

$$x^4 - 10x^3 + bx^2 + cx + 130 = (x - (2 + 3i))(x - (2 - 3i))(x - (3 + 2i))(x - (3 - 2i))$$
$$= (x^2 - 6x + 10)(x^2 - 4x + 13)$$
$$= x^4 - 10x^3 + 47x^2 - 118x + 130$$

ดังนั้น $b = 47, c = -118$ และ $b - c = 165$

6. ตอบ $AB = \sqrt{6}$

แนวคิด เพราะว่า AB เป็นเส้นสัมผัส และ BD เป็นคอร์ด และ BCD เป็นมุมที่รองรับคอร์ด BD ดังนั้น BCD= ABD



สามเหลี่ยม ABD และ ABC คล้ายกันด้วยเหตุผล

(1) BAD และ BAC เป็นมุมร่วม

(2) ABD และ BCD

เพราะฉะนั้น $\frac{AC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{AD}$

$$\frac{\sqrt{3}+AD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{AD}$$

เพราะว่า $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{AD}$ เพราะฉะนั้น $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะว่า $\frac{\sqrt{3}+AD}{AB} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$$\frac{\sqrt{3}}{AB} + \frac{AD}{AB} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{AB} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{AB} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2-1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

สรุป $AB = \sqrt{6}$

เคล็ดลับคณิตศาสตร์

x , y และ z เป็นจำนวนจริงบวก $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

ข้อพิสูจน์ กำหนดให้ x , y และ z เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะว่า $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0$

$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$

$x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \geq 0$

เพราะว่า $x + y + z > 0$ เพราะฉะนั้น

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)) \geq 0$

เพราะว่า

$(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = x^3 + xy^2 + xz^2 + yx^2 + y^3 + yz^2 + zx^2 + zy^2 + z^3$

และ

$(x + y + z)(xy + yz + zx) = x^2y + xyz + zx^2 + xy^2 + y^2z + xyz + xyz + yz^2 + z^2x$

เพราะฉะนั้น $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

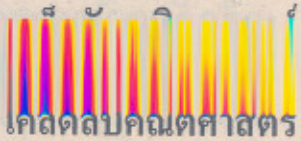
ดังนั้น $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$

สรุป $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$

ตัวอย่างของอสมการที่ได้จากการประยุกต์สูตรนี้เช่น

1. $x^6 + y^6 + z^6 \geq 3x^2y^2z^2$
2. $x + y + z \geq 3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}\sqrt[3]{z} = 3\sqrt[3]{xyx}$
3. $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyx}$

กรณีทั่วไปของข้อสามคือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ≥ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต เสมอ



ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ มีด้านตรงข้ามมุม A , B , C ยาว a , b , c ตามลำดับ $s = \frac{a+b+c}{2}$ จะได้ว่า พื้นที่สามเหลี่ยม ABC

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

และ ABC มีพื้นที่มากที่สุดเมื่อ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ข้อพิสูจน์ $s = \frac{a+b+c}{2}$, $s-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}$

เพราะว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่สาม

เพราะฉะนั้น $s-a>0$ ในทำนองเดียวกัน $s-b>0$ และ $s-c>0$

ดังนั้น $\sqrt[3]{s-a}>0$, $\sqrt[3]{s-b}>0$, $\sqrt[3]{s-c}>0$

เพราะว่า ถ้า $x, y, z>0$ แล้ว $x^3+y^3+z^3 \ge 3xyx$ ...(*)

เพราะฉะนั้น

$$(\sqrt[3]{s-a})^3+(\sqrt[3]{s-b})^3+(\sqrt[3]{s-c})^3 \ge 3(\sqrt[3]{s-a})(\sqrt[3]{s-b})(\sqrt[3]{s-c})$$

$$s-a+s-b+s-c \ge 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$3s-(a+b+c) \ge 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$3s-2s \ge 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s \ge 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s^3 \ge 27(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$s^4 \ge 27s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$27s(s-a)(s-b)(s-c) \le s^4$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \le \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

หมายเหตุ เมื่อ $a=b=c$ จะได้ว่า $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$

ข้อสอบแข่งขันคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

ของสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์

ประจำปีการศึกษา 2538 สอบวันอาทิตย์ที่ 14 มกราคม 2539

ตอนที่ 1

1. ให้ $f(x) = \frac{3}{x}$, $f^2(x) = (f \circ f)(x)$ และ $f^n(x) = ((f \circ f^{n-1})(x)$, n เป็นจำนวนนับโดยที่ $n > 2$ แล้ว $f^{101}(x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. x 2. $\frac{3}{x}$ 3. $3^{101}x$ 4. $\frac{3^{101}}{x}$

2. ถ้า $f(x) = \frac{5x-7}{x-3}$ แล้ว $f^{-1}(9)$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

   1. $(-\infty, -10]$ 2. $(-10, 8]$ 3. $(8, 50]$ 4. $(50, \infty)$

3. พื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรงสามเส้นที่มีสมการ $x + y + 1 = 0$, $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 16 2. 18 3. 20 4. 22

4. กำหนดให้ $L(x, y) = 2x + 6y + 412$

   และ x, y สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้ $y \leq 15$

   $x + y \geq 10$

   $y - x \leq 5$

   $5x - y \leq 45$

   แล้ว $L(x, y)$ มีค่าน้อยสุดอยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงคู่ใดต่อไปนี้

   1. $y = 15$ และ $y - x = 5$ 2. $y = 15$ และ $5x - y = 45$
   3. $x + y = 10$ และ $y - x = 5$ 4. $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

5. กำหนดให้ $\vec{u} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$

(2) $5\vec{u} + 2\vec{v} = 29\vec{i}$

(3) $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เป็นจริงเพียงข้อความเดียว
2. เป็นจริงเพียงสองข้อความ
3. เป็นจริงทั้งสามข้อความ
4. เป็นเท็จทั้งสามข้อความ

6. กำหนดให้จุด A(0, 1) , B(3, 2) และ C(2, 3) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $A\hat{B}C = 60^\circ$ (2) $A\hat{C}B = 90^\circ$

(3) พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC = 2 ตารางหน่วย

(4) เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ABC = $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$ หน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) และ (3) เท่านั้นเป็นจริง
3. ข้อ (2) (3) และ (4) เท่านั้นเป็นจริง
4. ทั้งสี่ข้อความต่างก็เป็นจริง

7. ถ้า x เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $x + \frac{1}{x} = \sqrt{3}$ แล้ว $x^{2538} + \frac{1}{x^{2538}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. –2
2. –1
3. 0
4. $\sqrt{3}$

8. ใน Δ ABC ถ้าอัตราส่วน cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12 แล้ว sinA : sinB : sinC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 : 9 : 2
2. 3 : 2 : 1
3. 9 : 7 : 5
4. 6 : 5 : 4

9. arcsin(cos(arcsinx)) + arccos(sin(arccosx)) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. $\frac{\pi}{2}$
4. $\frac{\pi}{4}$

10. ในการส่งผลไม้ชนิดหนึ่งเป็นสินค้าออก บรรจุในลัง มีการควบคุมคุณภาพของสินค้าโดยสุ่มหยิบ 3 ผลจากแต่ละลังขึ้นมาตรวจ ถ้าทั้ง 3 ผลอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานผลไม้ลังนั้นก็จะถูกส่งเป็นสินค้าออก ถ้าไม่เป็นเช่นนั้น ผลไม้ลังนั้นจะไม่ถูกส่งเป็นสินค้าออก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลไม้ลังหนึ่งซึ่งมีผลไม้ 120 ผล ในจำนวนนี้มีผลไม้ต่ำกว่าเกณฑ์มาตรฐาน 10 ผล จะถูกส่งเป็นสินค้าออก

1. $(\frac{11}{12})^3$ 2. $(\frac{1}{12})^3$ 3. $\frac{10,791}{14,042}$ 4. $\frac{10,791}{14,400}$

11. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 24 หลอด ในจำนวนนี้เป็นหลอดเสีย 4 หลอด ถ้าชายคนหนึ่งสุ่มหยิบหลอดไฟจากกล่องใบนี้ 10 หลอด จากนั้นชายคนที่สองจึงหยิบหลอดไฟที่เหลือทั้ง 14 หลอด มีกี่วิธีที่หลอดเสียทั้ง 4 หลอดจะอยู่ที่ชายคนเดียวกัน

1. 2 วิธี 2. 2^4 วิธี 3. $\binom{10}{4}+\binom{14}{4}$ วิธี 4. $\binom{20}{6}+\binom{20}{10}$ วิธี

12. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน 5 ลูก 1 ครั้ง จะมีกี่วิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นเพียงสองหน้าโดยที่ 2 ลูก ขึ้นหน้าหนึ่ง และอีก 3 ลูก ขึ้นอีกหน้าหนึ่ง

1. 10 วิธี 2. 15 วิธี 3. 150 วิธี 4. 300 วิธี

13. ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีเขียว 6 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงใบนี้ครั้งละ 1 ลูก 4 ครั้ง โดยใส่ลูกแก้วคืนถุงก่อนหยิบครั้งต่อไปทุกครั้ง จงหาความน่าเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีเขียวเพียงครั้งเดียว

1. 0.0384 2. 0.0864 3. 0.1536 4. 0.3456

14. กล่องใบหนึ่งมีเหรียญอยู่ 3 ชนิด ชนิดที่ 1 มี 3 เหรียญ แต่ละเหรียญมีหน้าหัวทั้ง 2 ด้าน ชนิดที่ 2 มี 4 เหรียญ แต่ละเหรียญมีหน้าก้อยทั้ง 2 ด้าน

ชนิดที่ 3 มี 2 เหรียญแต่ละเหรียญเป็นเหรียญปกติมาตรฐาน คือมีหน้าหัว

และหน้าก้อยอย่างละ ด้าน และโอกาสขึ้นหน้าหัวและหน้าก้อยเท่ากัน ถ้าสุ่มหยิบเหรียญจากกล่องใบนี้ 1 เหรียญ แล้วโยนเหรียญนั้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว

1. $\frac{4}{9}$ 2. $\frac{5}{9}$ 3. $\frac{4}{18}$ 4. $\frac{5}{18}$

15. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน n ลูก 1 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) n_j ลูก เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = n$

1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n\ 6!\ n!}$ 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6!\ n!}$

3. $\frac{n!}{6^n\ 6!\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$ 4. $\frac{n!}{6^n\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

16. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าดังนี้ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ค่ามัธยฐาน เมื่อ n เป็นเลขคู่ คือ $3(2^{-\frac{n}{2}-2})$

(2) ค่ากึ่งกลางพิสัย คือ $\frac{2^n+2}{2^{n+2}}$

(3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ $\frac{2^n-1}{n^2\cdot 2^n}$

(4) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต คือ $2^{-(\frac{n+1}{2})}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เป็นจริงเพียงข้อความเดียว 2. เป็นจริงเพียงสองข้อความ
3. เป็นจริงเพียงสามข้อความ 4. เป็นจริงทั้งสี่ข้อความ

17. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 15 จำนวนดังนี้ 412, 319, 408, 443, 385, 424, 379, 516, 449, 430, 334, 326, 444, 468, 431 ถ้าจำนวนที่เป็นเลขคู่มีความคลาด

เคลื่อน ±9 และจำนวนที่เป็นเลขคี่มีความคลาดเคลื่อน ±7 แล้ว ผลต่างของค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่อาจเป็นไปได้มากที่สุดกับน้อยที่สุดมีค่าเท่าไร

1. 16 2. 4 3. 18 4. 18.6

18. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุคนงานในโรงงานทำขนมแห่งหนึ่งเท่ากับ 20 ปี ต่อมามีคนงานใหม่มาเพิ่มอีก 5 คน ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุคนงานเพิ่มเป็น 25 ปีและผลรวมอายุคนงานของโรงงานนี้เพิ่มขึ้นอีก 150 ปี อยากทราบว่าในปัจจุบันโรงงานนี้มีคนงานทั้งหมดกี่คน

1. 8 2. 10 3. 12 4. 15

19. ให้ $x_1, x_2, x_3, ..., x_9$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งมีสมบัติดังนี้

$\sum_{i=1}^{9} (x_i - 10)^2 = 45$ และ $\sum_{i=1}^{9} (x_i - 11)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

ความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

20. นักเรียนห้องหนึ่งมี 60 คน เป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน ในการสอบวิชาภาษาไทย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนหญิงเป็น 3 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชาย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนหญิงและของคะแนนนักเรียนชายเท่ากับ 5 และ 4 ตามลำดับ ความแปรปรวนรวมมีค่าอยู่ระหว่าง 16 และ 25 คะแนน คะแนนแต่ละกลุ่มมีการแจกแจงแบบปกติ ให้ x_1, x_2, x_3 แทนคะแนนที่เป็นตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ที่ 95 ของคะแนนนักเรียนหญิง ของคะแนนนักเรียนชายและของคะแนนนักเรียนทั้งห้องตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x_1 < x_2 < x_3$ 2. $x_1 < x_3 < x_2$ 3. $x_2 < x_3 < x_1$ 4. $x_3 < x_2 < x_1$

21. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้าให้สัมประสิทธิ์ของพิสัยของข้อมูลชุดหนึ่งเท่ากับ 0 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้จะมีค่าเท่ากับค่ากึ่งกลางพิสัย

(2) ถ้าให้สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลชุดหนึ่งเท่ากับ $\frac{1}{3}$ และส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 1 แล้ว 50 % ของจำนวนข้อมูลจะมีค่าอยู่ระหว่าง 2 กับ 4

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

22. จากตารางแสดงดัชนีราคาผู้บริโภคในแต่ละปี ดังนี้

ปี	ดัชนีราคาผู้บริโภค
2533	90
2534	119
2535	125
2536	140
2537	160

ถ้าในปี 2533 นาย ก. ได้รับเงินเดือนๆ ละ 4,500 บาท แล้ว จงหาว่าในปี 2537 นาย ก. จะต้องได้รับเงินเดือนมากกว่าปี 2535 เดือนละเท่าไรจึงจะทำให้ฐานะความเป็นอยู่ของเขาดีเท่ากับปี 2533

1. 8,000 บาท
2. 6,250 บาท
3. 3,500 บาท
4. 1,750 บาท

23. ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านเพื่อนเรียนใน พ.ศ. 2537 และ พ.ศ. 2538

รายการสินค้า	ราคาต่อโหล	
	พ.ศ. 2537	พ.ศ. 2538
ปากกา	108	121
น้ำหมึก	180	216
ยาลบหมึก	240	300
ดินสอ	48	60

จากข้อมูลในตาราง ถ้าเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของน้ำหมึกและยาลบหมึกจากโหลเป็นขวด โดยมีราคาต่อหน่วยเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบใช้มวลรวม (เมื่อใช้ปี พ.ศ. 2537 เป็นปีฐาน) เมื่อราคาของน้ำหมึกและยาลบหมึกคือราคาต่อขวดจะมีค่าเท่ากับข้อใด

1. 117.27 % 2. 118.54 % 3. 121 % 4. 121.41 %

24. กำหนดให้ A, B, C, D และ E เป็นรูปแบบของประพจน์ ถ้า A และ B ต่างก็มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงข้อใดต่อไป

1. $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$ 2. $(E \vee D) \leftrightarrow (A \vee \sim C)$
3. $(A \vee \sim E) \leftrightarrow (E \vee \sim D \vee B)$ 4. $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge E)$

25. ให้ A แทนข้อความ “สมาชิกของ X ทุกตัวเป็นสมาชิกของ Y”

B แทนข้อความ “มีสมาชิกบางตัวของ X เป็นสมาชิกของ Y”

E แทนข้อความ "ไม่มีสมาชิกของ X ตัวใดเลยเป็นสมาชิกของ Y"

O แทนข้อความ "มีสมาชิกบางตัวของ X ไม่ใช่สมาชิกของ Y"

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) A และ E อาจเป็นเท็จทั้งคู่

(2) I และ O อาจเป็นจริงทั้งคู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้น
2. ข้อ (2) เท่านั้น
3. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2)
4. ไม่ใช่ทั้งข้อ (1) และข้อ (2)

26. ถ้า z_1 และ z_2 ต่างก็เป็นรากของสมการ $z^2 + (i-2)z + (3-i) = 0$

ถ้า w สอดคล้องสมการ $z_1w = 3 + i$ และ $z_2w = -5i$ แล้วค่าของ w คือ

1. $2 - i$
2. $-2 + i$
3. $-\frac{5}{2} - \frac{5}{2}i$
4. $\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$

27. ผลบวกของค่า x ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ $2^{\frac{-2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+\cdots} = 0$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1, -\frac{2}{3})$
2. $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
3. $(\frac{2}{3}, 1)$
4. $(1, 3)$

28. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $2^{x+y} + i(x-y) = 3 + 2i$ แล้ว $4^x + 4^y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{4}$
2. 6
3. 12
4. $\frac{51}{4}$

29. ให้ $a_n = e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})}$ และ $b_n = \log_{\frac{1}{3}}(a_n)$ ทุก $n \in N$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

30. ให้ $a_0 = 1$ และสำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $a_n = 3^{2n-1}\, a_{n-1}$

ถ้า $\log_{\frac{1}{3}} a_0 + \log_{\frac{1}{3}} a_1 + \ldots + \log_{\frac{1}{3}} a_n = -91$ แล้ว n อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [1, 7) 2. [7, 12) 3. [12, 13) 4. [13, 14)

31. ให้ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{\frac{1}{2}} a)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
3. มี $x \in R$ ที่ $\sec x = a$
4. ไม่มี $x \in R$ ที่ $e^x = a$

32. ให้ $P(x) = x^3 - x + 3$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ไม่ว่า a จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม 3 หาร P(a) ลงตัวเสมอ

(2) มีจำนวนเต็ม a ซึ่งทำให้ 3 หาร P(a) ลงตัว

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง 2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง 4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

33. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 1} [\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}] = -1$

(2) $\lim_{x \to -2^-} \frac{|x^2 - 4| + |x+2|}{x^2 - 3x - 10} = \frac{5}{7}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

34. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

และ $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(2) g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

35. ให้ $y = 3^{\ln(x^2+1)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ คือข้อใด

1. $\frac{2x\,3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
2. $\frac{3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
3. $\frac{2x(\ln 3)\,3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
4. $\frac{2x\,3^{\ln(x^2+1)}}{(x^2+1)\ln 3}$

36. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx = \pi$

(2) $\int_{0}^{1} (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\,dx = \frac{1}{3}$

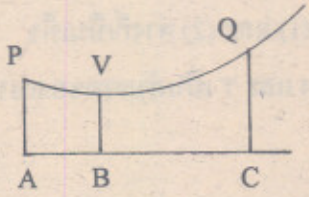
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

37. ถ้าวงกลมผ่านจุด A(2, –2) และ B(3, 4) มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ แล้วสมการของวงกลมคือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2x - 11)^2 + (2y + 7)^2 = 58$
2. $(2x + 7)^2 + (2y - 11)^2 = 346$
3. $(10x - 7)^2 + (10y - 13)^2 = 1258$
4. $(3x - 5)^2 + (3y - 1)^2 = 50$

38. จากรูป ABC เป็นสะพานซึ่งมีลักษณะเป็นเส้นตรง PVQ เป็นสายเคเบิลซึ่งมีลักษณะเป็นพาราโบลา โดยมี V เป็นจุดยอด



$|PA| = 100$ ฟุต $|VB| = 25$ ฟุต

$|AB| = 700$ ฟุต $|BC| = 900$ ฟุต

แล้ว $|QC|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 125 ฟุต
2. 130 ฟุต
3. $\frac{7900}{49}$ ฟุต
4. $\frac{8300}{49}$ ฟุต

39. วงโคจรรอบดาวเคราะห์ E ของดวงจันทร์ M ดวงหนึ่งเป็นรูปวงรี จุดศูนย์กลางของ E อยู่ที่ตำแหน่งของโฟกัสของวงรี ถ้าระยะที่ M อยู่ใกล้ผิว E มากที่สุดมีค่าเป็น 3,000 ไมล์ และระยะที่ M อยู่ห่างจากผิว E มากที่สุดมีค่าเป็น 24,000 ไมล์ E มีรัศมีเท่ากับ 4,000 ไมล์ ถ้า M อยู่ที่จุดปลายของคอร์ดซึ่งตั้งฉากกับแกนเอกของวงรีที่จุดศูนย์กลางของ E แล้ว M อยู่ห่างจากผิว E เป็นระยะทางกี่ไมล์

1. 5,200 ไมล์
2. 11,200 ไมล์
3. 6,200 ไมล์
4. 7,200 ไมล์

40. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันจาก X ไป Y และ $A \subset X$, $B \subset Y$

ให้ $f(A) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ โดยที่ } x \in A\}$

และ $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $A \subset f^{-1}(f(A))$ (2) $f^{-1}(f(A)) \subset A$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้ง (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้ง (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

41. กำหนดให้ X เป็นเซตซึ่งไม่ใช่เซตว่าง และ T เป็นสับเซตของเพาเวอร์เซตของ X โดยมีคุณสมบัติดังนี้

(1) $x \in T$

(2) $\phi \in T$

(3) ถ้า $G_1, G_2, ..., G_n \in T$ จะได้ว่า $G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_n \in T$

(4) ถ้า $\{G_i \mid i \in J\} \subset T$ แล้ว $\bigcup_{i \in J} G_i \in T$

$(x \in \bigcup_{i \in J} G_i$ ก็ต่อเมื่อมี $j \in J$ โดยที่ $x \in G_j)$

เรียก (X, T) ว่า ปริภูมิโทโพโลยี

ให้ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ T ในข้อใดที่ (X, T) <u>ไม่ใช่</u>ปริภูมิโทโพโลยี

1. $\{\phi, \{1\}, X\}$
2. $\{\phi, \{1, 2\}, X\}$
3. $\{\phi, \{1\}, \{2\}. \{1, 2\}, X\}$
4. $\{\phi, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2\}, X\}$

ตอนที่ 2

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 6 & 12 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$

ถ้า $AX = B$ แล้ว $x + y + z$ มีค่าเท่าใด

2. นักเรียนคนหนึ่งเรียนวิชาต่างๆ สี่วิชาคือ ประวัติศาสตร์ ภาษาอังกฤษ คณิตศาสตร์และเคมี เขาพยากรณ์คะแนนสอบไล่ในวิชาต่างๆ ของเขาได้จากสูตรต่อไปนี้

วิชา	คะแนน
ประวัติศาสตร์	$40 + 7t$
ภาษาอังกฤษ	$40 + 6t$
คณิตศาสตร์	$30 + 4t$
เคมี	$50 + 3t$

เมื่อ t เป็นจำนวนชั่วโมงที่เขาใช้ในการทำความเข้าใจและทบทวนวิชาต่างๆ เหล่านั้นนอกห้องเรียน

นักเรียนผู้นี้ต้องการใช้เวลาศึกษานอกห้องเรียน 30 ชั่วโมง เขาจำเป็นต้องใช้เวลาศึกษาคณิตศาสตร์ถึง 2 เท่าของเวลาที่ใช้ในการศึกษาประวัติศาสตร์ และเขาต้องการใช้เวลาศึกษาประวัติศาสตร์และภาษาอังกฤษรวมกัน 3 ชั่วโมงเป็นอย่างน้อยเนื่องจากเขาตั้งใจจะเป็นนักวิทยาศาสตร์เขาจึงคิดว่าควรจะใช้เวลาไม่น้อยกว่า 18 ชั่วโมงในการศึกษา

ควรจะใช้เวลา 6 ชั่วโมง นักศึกษาผู้นี้จะต้องแบ่งเวลาศึกษาอย่างไรเขาจึงจะได้คะแนนรวมมากที่สุด

3. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+1}+a}{x-2} & , x<2 \\ b & , x=2 \\ \frac{cx}{x-1} & , x>2 \end{cases}$

และ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ แล้ว abc มีค่าเท่าใด

4. ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชันไม่เท่ากับศูนย์ซึ่งสัมผัสกับเส้นโค้ง 2 เส้น คือ $f(x) = x^2$ และ $g(x) = x^3$ แล้ว เส้นตรง L มีความชันเท่ากับเท่าใด

5. ถ้า α และ β เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$ และ $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$

แล้ว $\alpha + \beta$ มีค่าเท่าใด

6. กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะบวกและสมการ

$5x^2 - px + q = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะ จงเขียนคู่ลำดับ (p, q) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

เฉลยข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทยในพระบรมราชูปถัมภ์ ประจำปีการศึกษา 2538

ตอนที่ 1

1. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \frac{3}{x}$ และ $f^2(x) = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\frac{3}{x}) = \frac{3}{(\frac{3}{x})} = x$

$f^3(x) = (f \circ f^2)(x) = f(f^2(x)) = f(x) = \frac{3}{x}$

$f^4(x) = (f \circ f^3)(x) = f(f^3(x)) = f(\frac{3}{x}) = x$

สรุป $f^n(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & ; n = 1,3,5,7,\cdots \\ x & ; n = 2,4,6,8,\ldots \end{cases}$ เพราะฉะนั้น $f^{101}(x) = \frac{3}{x}$

2. ตอบ 2.

แนวคิด $f(x) = \frac{5x-7}{x-3}$

เพราะว่า $x = f^{-1}(9) \leftrightarrow f(x) = 9$ เพราะฉะนั้นเราหาค่า x ในการแก้สมการ

$9 = \frac{5x-7}{x-3} \rightarrow 9x - 27 = 5x - 7 \rightarrow 4x = 20 \rightarrow x = 5$

สรุป $f^{-1}(9) = 5 \in (-10, 8]$

หมายเหตุ การหาสูตร $f^{-1}(x)$ จาก $y = f(x) = \frac{5x-7}{x-3}$

$$y(x-3) = 5x-7$$

$$xy - 5x = 3y - 7$$

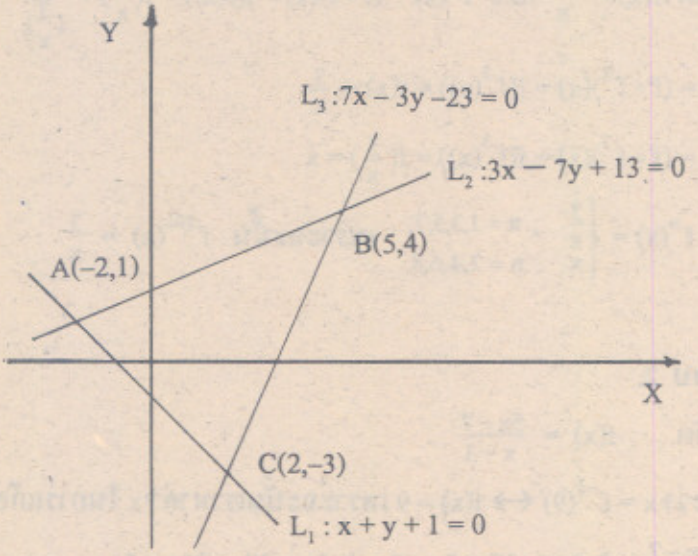
$$x(y-5) = 3y - 7$$

$$x = \frac{3y-7}{y-5}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{3x-7}{x-5}$ สรุป $f^{-1}(9) = \frac{3(9)-7}{9-5} = \frac{20}{4} = 5$

3. ตอบ 3.

แนวคิด



จุดตัด L_1 และ L_2 ได้จากการแก้สมการ $x + y + 1 = 0$ ....(1)

$3x - 7y + 13 = 0$ ....(2)

ได้จุดตัดเป็น A(−2 , 1)

จุดตัด L_2 และ L_3 ได้จากการแก้สมการ $3x - 7y + 13 = 0$ ....(2)

$7x - 3y - 23 = 0$ ....(3)

ได้จุดตัดเป็น B(5, 4)

จุดตัด L_1 และ L_3 ได้จากการแก้สมการ $x + y + 1 = 0$ ....(1)

$7x - 3y - 23 = 0$ ....(3)

ได้จุดตัดเป็น $C(2, -3)$

การหาพื้นที่ Δ ABC วิธีที่ 1

ความยาว $AB = \sqrt{(5+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

ความสูงจากจุด C มายังแนว AB = ระยะทางจากจุด C ไปยังเส้นตรง L_2

h = ระยะทางจาก $(2, -3)$ ไปยัง $L_2 : 3x - 7y + 13 = 0$

$$= \frac{|3(2) - 7(-3) + 13|}{\sqrt{3^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{58}}$$

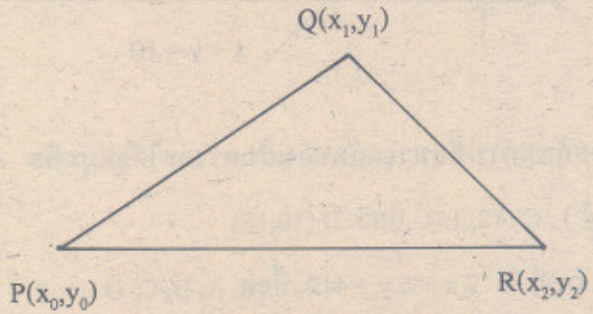
พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}(AB)(h) = \frac{1}{2}(\sqrt{58})(\frac{40}{\sqrt{58}}) = 20$

วิธีที่ 2 วาดรูปโดยใช้สเกล 1 cm / หน่วยเขียนเส้นตรง L_1, L_2 และ L_3 โดยไม่ต้อง คำนวณหาจุดตัด เมื่อได้จุดตัดแล้ววัดระยะทาง AB และความสูงด้วยไม้บรรทัดได้ $AB = 7.6$ และ $h = 5.3$

ดังนั้นพื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}(7.6)(5.3) = 20.14$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งดีกว่า

วิธีที่ 3 ขอแนะสูตรพื้นที่ Δ เมื่อรู้จุด 3 จุด



พื้นที่ $\Delta POR = \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{bmatrix} \right|$

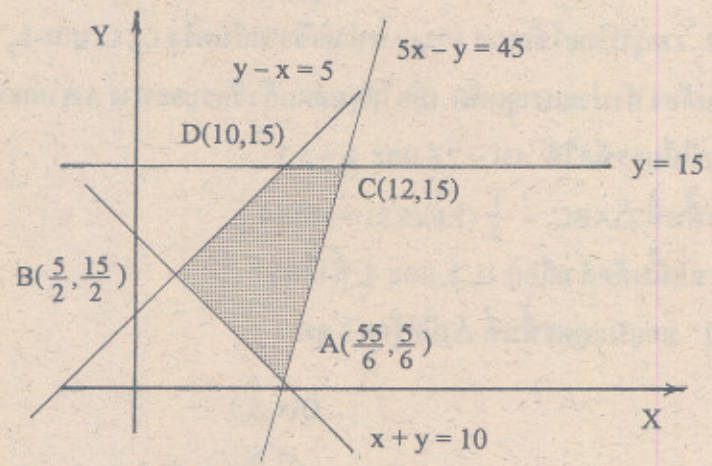
เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\Delta ABC = \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ 2-(-2) & -3-1 \end{bmatrix} \right|$

$$= \left| \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(-28-12) \right| = 20$$

4. ตอบ 4.

แนวคิด เขียนกราฟและหาจุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลย



โดยการแก้สมการเพื่อหาจุดตัดของเส้นตรงจะได้จุดมุมคือ $A\left(\frac{55}{6}, \frac{5}{6}\right)$, $B\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$, $C(12, 15)$ และ $D(10,15)$

หาค่า $L(x,y) = 2x + 6y + 412$ ที่จุด A, B, C, D

(x , y)	2x + 6y	L = 2x + 6y + 412
A $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$	$\frac{140}{6}$	435.33
B $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$	50	462
C (12 , 15)	114	526
D (10 , 15)	110	522

เพราะฉะนั้น L มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 435.3 เมื่อ $x = \frac{55}{6}$ และ $y = \frac{5}{6}$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

การตัดตัวเลือก หาจุดตัดของเส้นตรงแต่ละตัวเลือกแล้วดูค่า L

ตัวเลือก	จุดตัด	2x + 6y
1.	D (10 , 15)	110
2.	C (12 , 15)	114
3.	B $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$	50
4.	A $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$	23.3

เพราะว่า 412 เป็นค่าคงตัว เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะค่า 2x + 6y ก็พอ

สรุป L มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

5. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (1) $\bar{u} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$

$|\bar{u} + \bar{v}| = |(5\bar{i} - 2\bar{j}) + (2\bar{i} + 5\bar{j})| = |7\bar{i} + 3\bar{j}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$|\bar{u} - \bar{v}| = |(5\bar{i} - 2\bar{j}) - (2\bar{i} + 5\bar{j})| = |3\bar{i} - 7\bar{j}| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

สรุปข้อความ (1) ถูกต้อง ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

พิจารณาข้อความ (2) $5\bar{u}+2\bar{v} = 5(5\bar{i}-2\bar{j})+2(2\bar{i}+5\bar{j})$

$= 25\bar{i}-10\bar{j}+4\bar{i}+10\bar{j} = 29\bar{i}$

สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

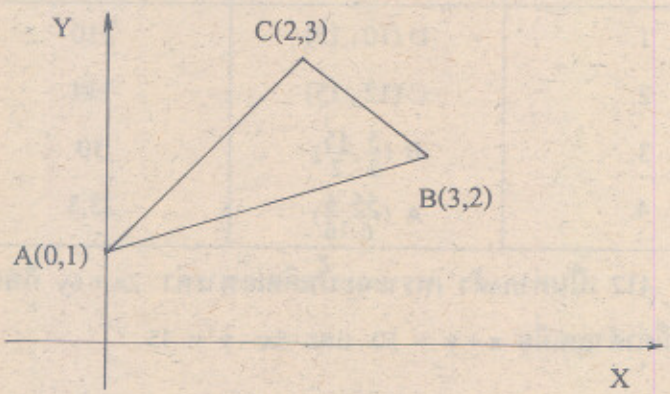
พิจารณาข้อความ (3) เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = (5\bar{i}-2\bar{j})\cdot(2\bar{i}+5\bar{j})$

$= (5)(2)+(-2)(5) = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ สรุปข้อความ (3) ถูกต้อง

6. ตอบ 3.

แนวคิด



วาดรูปโดยใช้สเกล 1 เซนติเมตร/หน่วย แล้ววัดมุม $A\hat{B}C = 63^\circ$

ดังนั้นข้อความ (1) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

ต่อไปวัดมุม $A\hat{C}B$ จะเห็นว่าใกล้เคียง 90° ดังนั้นต้องคำนวณต่อ

$\overrightarrow{AC} = (2-0)\bar{i}+(3-1)\bar{j} = 2\bar{i}+2\bar{j}$, $\overrightarrow{BC} = (2-3)\bar{i}+(3-2)\bar{j} = -\bar{i}+\bar{j}$

ดังนั้น $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ นั่นคือ $A\hat{C}B = 90^\circ$ สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง

$|\overline{AC}| = |2\bar{i}+2\bar{j}| = \sqrt{8}$ และ $|\overline{BC}| = |\bar{i}+\bar{j}| = \sqrt{2}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{10}$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times |\overline{AC}| \times |\overline{BC}| = \frac{1}{2}(\sqrt{8})(\sqrt{2}) = 2$

ดังนั้นข้อความ (3) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ความยาวเส้นรอบรูป $ABC = |AB|+|AC|+|BC| = \sqrt{10}+\sqrt{8}+\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}\sqrt{5}+3\sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{5}+3)$

ดังนั้นข้อความ (4) ถูกต้อง

7. ตอบ 1.

แนวคิด $x+\frac{1}{x} = \sqrt{3}$

$x^2+1 = \sqrt{3}x$

$x^2-\sqrt{3}x+1 = 0$

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{3-4(1)(1)}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\pm\frac{1}{2}i$$

เปลี่ยน x เป็นพิกัดเชิงขั้วได้เป็น $x = \cos\frac{\pi}{6}\pm i\sin\frac{\pi}{6}$

เมื่อ $x = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ จะได้ว่า $x^{2538} = (\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})^{2538}$

$= \cos\frac{2538\pi}{6}+i\sin\frac{2538\pi}{6} = \cos(423\pi)+i\sin(423\pi) = -1$

และ $\frac{1}{x^{2538}} = x^{-2538} = -1$ สรุป $x^{2538}+\frac{1}{x^{2538}} = -1-1 = -2$

หมายเหตุ เมื่อ $x = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ จะได้ $x^{2538}+\frac{1}{x^{2538}} = -2$ เหมือนกัน

แต่ในการสอบจริงไม่จำเป็นต้องคิดเพราะเมื่อได้คำตอบ –2 ก็เลือกตัวเลือก 1. ได้แล้วหากมีตัวเลือกอื่นๆ ถูกอีกก็แสดงว่าข้อสอบไม่สมบูรณ์

8. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามและตัวเลือกแบบนี้ใช้เหตุผลการตัดตัวเลือกจะได้คำตอบเร็วกว่าจากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$ ค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $\sin A = ka$, $\sin B = kb$, $\sin C = kc$

และ $\sin A : \sin B : \sin C = ka : kb : kc$

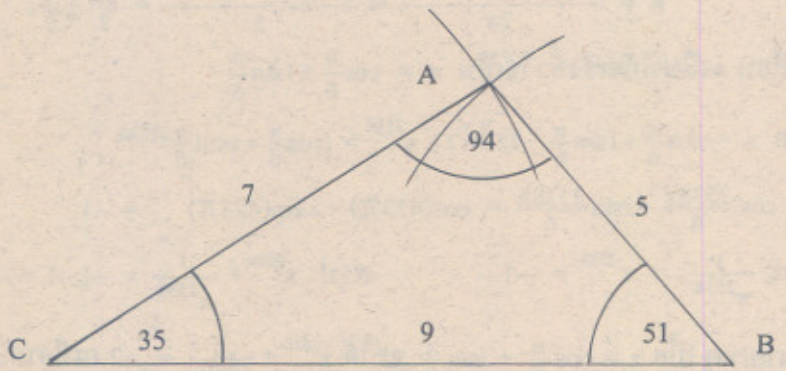
สรุป $\sin A : \sin B : \sin C = a:b:c$

โดยการใช้เหตุผลว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเมื่อรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่ 3

ดังนั้น 12 : 9 : 2 ไม่เป็นอัตราส่วนของ a:b:c ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน $1+2 > 3$ ดังนั้นตัดเลือก 2. ทิ้งได้

ต่อไปลองวาดรูปที่มีอัตราส่วนของด้านเป็น 9: 7 : 5 และ 6 : 5 : 4 และวัดมุมโดยประมาณ

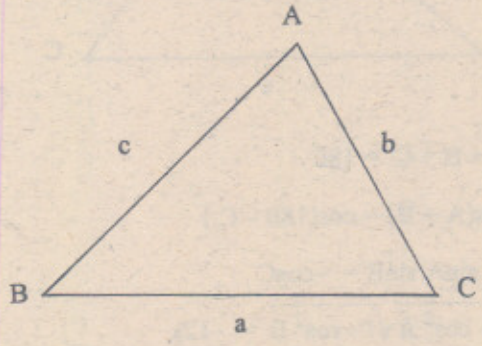


เพราะว่า $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ เพราะฉะนั้น $\cos A > 0$

แต่อัตราส่วน 9 : 7 : 5 ทำให้ $\hat{A} > 90^\circ$ ดังนั้น $\cos A < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกแบบที่ 2



$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ และ $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

เพราะว่า $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc})}{(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac})} = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2} = \frac{2b}{9a} \quad ...(1)$$

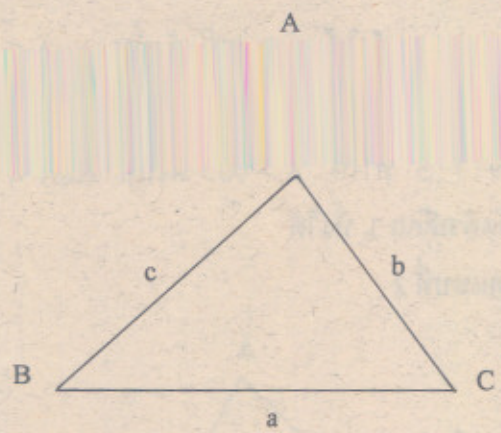
ทำมาได้แค่จะใช้แทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกก็ได้ เช่น $a : b : c = 3 : 2 : 1$ ได้หรือไม่ ลองแทนค่า $c = k$, $b = 2k$ และ $a = 3k$ ในสมการ (1) จะได้

$$\frac{(2k)^2+(k)^2-(3k)^2}{(3k)^2+(k)^2-(2k)^2} = \frac{-4k^2}{6k^2} = -\frac{2}{3} \neq \frac{2(2k)}{9(3k)}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากโจทย์ $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$

ให้ $\cos A = 2k$, $\cos B = 9k$ และ $\cos C = 12k$



เพราะว่า $A + B + C = 180$

$$\cos(A + B) = \cos(180 - C)$$

$$\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C$$

$$(2k)(9k) - \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B} = -12k$$

$$-\sqrt{1-4k^2}\sqrt{1-81k^2} = -12k - 18k^2$$

$$(1-4k^2)(1-81k^2) = (-12k - 18k^2)^2$$

$$1 - 85k^2 + 324k^4 = 144k^2 + 432k^3 + 324k^4$$

$$432k^3 + 229k^2 - 1 = 0 \qquad \text{....(*)}$$

หมายเหตุ การแยกตัวประกอบตรงนี้จะยากมาก อย่างไรก็ตามจะได้

$$(16k-1)(27k^2 + 16k + 1) = 0$$

$$k = \frac{1}{16} \text{ หรือ } k = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(27)(1)}}{2(27)}$$

แต่ $k = \frac{-8 \pm \sqrt{37}}{27} < 0$ และ $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$

เพราะฉะนั้น $\cos A > 0, \cos B > 0, \cos C > 0$

นั้นคือ $k > 0$ เพราะฉะนั้น $k = \frac{1}{16}$ ค่าเดียวเท่านั้น

สรุป $\cos A = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \rightarrow \sin A = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \sqrt{\frac{63}{64}}$

$$\cos B = \frac{9}{16} \rightarrow \sin B = \sqrt{1-\frac{81}{256}} = \sqrt{\frac{175}{256}}$$

$$\cos C = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow \sin C = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

เพราะฉะนั้น $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{\frac{63}{64}} : \sqrt{\frac{175}{256}} : \sqrt{\frac{7}{16}}$

$= \sqrt{\frac{252}{256}} : \sqrt{\frac{175}{256}} : \sqrt{\frac{112}{256}} = \sqrt{252} : \sqrt{175} : \sqrt{112} = 6\sqrt{7} : 5\sqrt{7} : 4\sqrt{7} = 6 : 5 : 4$

9. ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า $x = 0$ ก็ได้คำตอบ

$\arcsin 0 = 0 \longrightarrow \cos(\arcsin 0) = \cos 0 = 1$

$\longrightarrow \arcsin(\cos(\arcsin 0)) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin(\arccos 0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\longrightarrow \arccos(\sin(\arccos 0)) = \arccos 1 = 0$

สรุป $\arcsin(\cos(\arcsin 0)) + \arccos(\sin(\arccos 0)) = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\arcsin(\cos(\arcsin x)) = \arccos(\cos(\arccos\sqrt{1-x^2}))$

$= \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

$\arccos(\sin(\arccos x)) = \arccos(\sin(\arcsin\sqrt{1-x^2}))$

$= \arccos(\sqrt{1-x^2})$

$\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x))$

$= \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + \arccos(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$

หมายเหตุ สูตรตรีโกณมิติสำคัญที่ใช้คือ

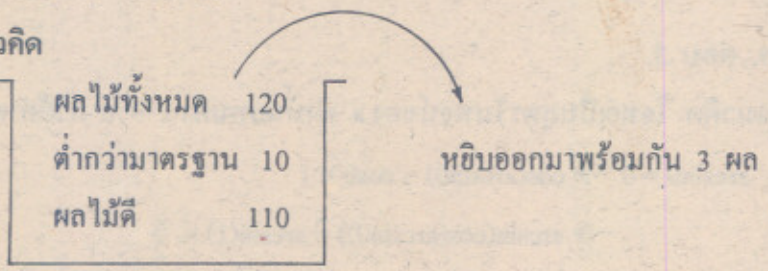
$\sin(\arcsin k) = k$ $\quad\quad$ $\cos(\arccos k) = k$

$\arcsin k = \arccos(\sqrt{1-k^2})$ $\quad\quad$ $\arccos k = \arcsin(\sqrt{1-k^2})$

$\arcsin k + \arccos k = \frac{\pi}{2}$

10. ตอบ 1. หรือ 3.

แนวคิด



หยิบออกมาตรวจสอบ 3 ผล เราควรคิดแบบหยิบออกมา **พร้อมกัน** 3 ผล

ไม้ทั้งหมด 120 ผล หยิบออกมา 3 ผล ทำได้ $\binom{120}{3} = \frac{120!}{3!117!} = 280840$

จำนวนวิธีที่หยิบได้ผลไม้ในเกณฑ์มาตรฐาน $= \binom{110}{3} = \frac{110!}{3!107!} = 15820$

ความน่าจะเป็นที่ได้ผลไม้ทั้งสามผลที่หยิบได้อยู่ในเกณฑ์มาตรฐาน

$$= \frac{\binom{110}{3}}{\binom{120}{3}} = \frac{215820}{280840} = \frac{10791}{14042}$$

หมายเหตุ ในการหยิบที่ละ 1 ผล แล้วคืนก่อนหยิบครั้งถัดไปทำแบบนี้

สามครั้ง จะได้ความน่าจะเป็น $= (\frac{110}{120})(\frac{110}{120})(\frac{110}{120}) = (\frac{11}{12})^3$

11. ตอบ 4.

แนวคิด การนับจำนวนวิธีจำแนกเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หลอดเสียทั้ง 4 หลอดอยู่ที่ชายคนที่ 1

ต้องเลือกหลอดดีอีก 6 หลอดจาก 20 หลอด ให้ชายคนที่ 1 ทำได้ $\binom{20}{6}$ วิธี

กรณีที่ 2 หลอดเสียทั้ง 4 หลอดอยู่ที่ชายคนที่ 2

ต้องเลือกหลอดดีอีก 10 หลอดจาก 20 หลอด ให้ชายคนที่ 1 ทำได้ $\binom{20}{10}$ วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{20}{6} + \binom{20}{10}$ วิธี

12. ตอบ 4.

แนวคิด ตัวอย่างของแต้มลูกเต๋าที่ต้องการ เช่น (1, 1, 2, 2, 2) , (3, 2, 3, 2, 2) , (4, 5, 4, 5,4), ... การนับจำนวนวิธีจำแนกเป็นขั้นตอนดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกแต้มที่จะขึ้นสำหรับสองลูกแรกทำได้ 6 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือก 2 ลูก จาก 5 ลูก ให้ขึ้นแต้มหนึ่งทำได้ $\binom{5}{2}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 สามลูกที่เหลือให้ขึ้นแต้มเดียวกันที่ไม่ใช้แต้มในขั้นตอนที่ 1 เลือกได้ 5 วิธี

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด $= (6)\binom{5}{2}(5) = 6(10)(5) = 300$ วิธี

การนับจำนวนวิธีที่ 2

ขั้นตอนที่ 1 เลือกแต้ม 2 ชนิดที่ต่างกันทำได้ $\binom{6}{2} = 15$ วิธี สมมติเป็น x, y

ขั้นตอนที่ 2 นำ xxyyy หรือ xxxyy มาจัดลำดับได้ $\frac{5!}{2!3!} + \frac{5!}{3!2!} = 20$ วิธี

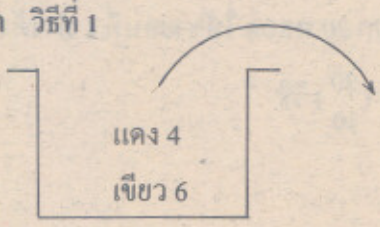
สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด = (15)(20) = 300 วิธี

การตัดตัวเลือก เขียนเหตุการณ์ให้ได้ 16 ตัว ก็ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เช่น (1, 1, 2, 2, 2), (1, 1, 3, 3, 3), ..., (6, 6, 5, 5, 5)

13. ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1



หยิบออกมาทีละ 1 ลูกแล้วคืน

ทำแบบนี้ซ้ำกัน 4 ครั้ง

$S = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i$ เป็นลูกแก้วที่หยิบได้ $\}$

ตัวอย่างสมาชิกของ S เช่น (ด, ด, ด, ข) , (ด, ด, ข, ข) , ...

E = เหตุการณ์ที่ได้เขียวเพียงครั้งเดียว = {(ข, ด, ด, ด) , (ด, ด, ข, ด) , ...}

ในการหยิบแต่ละครั้ง $P(\text{ได้แดง}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ $P(\text{ได้เขียว}) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

$P(\text{ได้แดง 3 และเขียว 1}) = (\frac{2}{5})^3(\frac{3}{5})^1 = \frac{24}{625}$

จำนวนวิธีที่จะได้แดง 3 และเขียว 1 $= \frac{4!}{3!1!} = 4$

สรุป $P(\text{ได้แดง 3 และเขียว 1}) = \frac{24}{625} + \frac{24}{625} + ... + \frac{24}{625} = \frac{24(4)}{625} = 0.1536$

วิธีที่ 2 $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_i$ เป็นลูกแก้วที่หยิบได้ , $i = 1, 2, 3, 4 \}$

ตัวอย่างสมาชิกของ S เช่น $(ด_1, ด_1, ด_1, ด_1)$, $(ข_3, ข_3, ข_3, ข_4)$, $(ด_1, ด_2, ข_1, ข_2)$,

$(ด_4, ด_3, ข_4, ข_1)$, ... จะเห็นได้ว่า n(S) = (10)(10)(10)(10) = 10000

E = เหตุการณ์ที่ได้เขียวครั้งเดียว

$= \{(x, y, z, w) \in S \mid x, y, z, w$ เป็นสีเขียวลูกเดียวเท่านั้น $\}$

$= \{(ข_1, ค_1, ค_2, ค_3), (ข_1, ค_2, ค_4, ค_4), \ldots\}$

$n(E) =$ ข ค ค ค

$(6)(4)(4)(4) = 4^3 \cdot 6 = 384$

จัดลำดับได้ $\frac{4!}{3!1!} = 4$

$n(E) = 4(384) = 1536$ สรุป $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1536}{10000} = 0.1536$

14. ตอบ 1.

แนวคิด ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่หนึ่งและโยนแล้วได้หัว

B = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่สองและโยนแล้วได้หัว

C = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่สามและโยนแล้วได้หัว

E = เหตุการณ์ที่โยนแล้วได้หัว

เพราะฉะนั้น $E = A \cup B \cup C$ และ $A \cap B = \varnothing, B \cap C = \varnothing, A \cap C = \varnothing$

ดังนั้น $P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

เพราะว่าเหรียญชนิดที่สองไม่มีด้านหัว เพราะฉะนั้น $P(B) = 0$

ดังนั้น $P(E) = P(A) + P(C)$

เพราะว่าจำนวนเหรียญทั้งหมด $= (3)+(4)+(2) = 9$ และมีเหรียญชนิดหนึ่งจำนวน 3 เหรียญ และเป็นหัวทั้งสองด้าน เพราะฉะนั้น $P(A) = (\frac{3}{9})(\frac{1}{1}) = \frac{1}{3}$

หมายเหตุ ขอให้นักเรียนสังเกตว่าเมื่อทำมาได้แค่นี้ก็มีเหตุผลเพียงพอที่จะตัดตัวเลือกได้ เพราะว่า $P(E) = P(A) + P(C) \geq P(A) \geq \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$

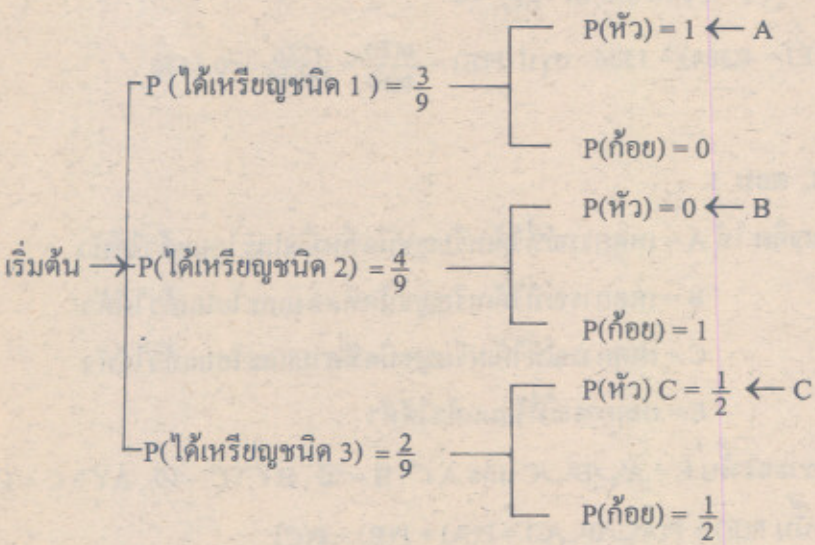
$P(C) = (\frac{2}{9})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{9}$

↑ └ มาจากแต่ละเหรียญโอกาสขึ้นหัว = $\frac{1}{2}$

มีเหรียญชนิดที่สาม 2 จาก 9

สรุป $P(E) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

การคำนวณแบบที่ 2 ใช้แผนภูมิต้นไม้แสดงค่าของความน่าจะเป็น



$P(\text{ได้หัว}) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$= (\frac{3}{9})(1) + (\frac{4}{9})(0) + (\frac{2}{9})(\frac{1}{2}) = \frac{3}{9} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

15. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ $n , n_1 , n_2 , n_3 , n_4, n_5 , n_6$

ดังนั้นแทนค่าบางค่าก็สามารถคัดตัวเลือกทิ้งได้

แทนค่า $n = 1, n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{6}$

แทนค่า $n, n_1, n_2, \ldots, n_6$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 6!1!} = \frac{1}{6\cdot 6!} \neq \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 \cdot 1!} = \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 3. $\frac{n!}{6^n 6!n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 \cdot 6!1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{6\cdot 6!} \neq \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 4. $\frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $n = 2, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

P(โยนลูกเต๋าสองลูกแล้วได้แต้ม 1 และ 2 อย่างละลูก) $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ตัวเลือก 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!1!0!0!0!0!}{6^2 \cdot 2!} = \frac{1}{72} \neq \frac{1}{18}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง จำนวนวิธีที่โยนลูกเต๋า n ลูกแล้วได้แต้ม 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 เท่ากับ $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ เท่ากับการจัดลำดับของ n สิ่ง ที่มีการซ้ำกันเป็น 1 , 2 ,.....,6 เป็น $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก มีผล 6 วิธี การโยนลูกเต๋า n ลูก มีผล 6^n วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 , 2 , 3 ,.....,6 เป็น $n_1, n_2, \ldots, n_6$

$$= \left(\frac{\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}}{6!}\right)$$

$$= \frac{n!}{6^n n_1! n_2! n_3! n_4! n_5! n_6!}$$

16. ตอบ 3.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกและข้อความเป็นสูตรขึ้นอยู่กับค่าของ n

แทนค่า $n = 2$ จะได้ข้อมูลเป็น $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

มัธยฐาน $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 3(2^{-\frac{2}{2}-2})$

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{\max + \min}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} = \frac{2^2+2}{2^{2+2}}$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{3}{16} = \frac{2^2-1}{2^2 \cdot 2^2}$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = 2$

ดังนั้นข้อความ (3) ผิด ทำให้ต้องเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง n เป็นเลขคู่ จะได้จำนวนเทอมเป็นเลขคู่และ $\frac{n}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

มัธยฐาน $= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} + \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2+1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\right] = \frac{3}{2^{\frac{n}{2}+2}} = 3(2^{-\frac{n}{2}-2})$

ดังนั้นข้อความ (1) ถูกต้อง

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n+2}{2^{n+2}}$ ดังนั้นข้อความ (2) ถูกต้อง

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt[n]{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})(\frac{1}{8})....(\frac{1}{2^n})} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{1+2+3+...+n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}(n+1)}}}$

$$= \left[2^{-\frac{n}{2}(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{1}{2}(n+1)}$$

ดังนั้นข้อความ (4) ถูกต้อง

17. ตอบ 2.

แนวคิด $\frac{412+319+.....+468+431}{15} = \frac{6168}{15} = 411.2$ ดังนั้น $\sum X = 6168$

จำนวนเลขคู่มี 9 ตัว , จำนวนเลขคี่มี 6 ตัว

กรณีที่ $\bar{x}$ ตัวใหม่มีค่ามากสุด เกิดจากข้อมูลเลขคู่ทั้ง 9 ตัวถูกบวกเพิ่ม 9 และข้อมูล เลขคี่ทั้ง 6 ตัวถูกบวกเพิ่ม 7

ผลบวกของข้อมูลใหม่ $= \sum X_{(เก่า)} + 9(9) + 6(7) = 6168 + 81 + 42 = 6291$

$$\bar{x}_{มาก} = \frac{6291}{15} = 419.4$$

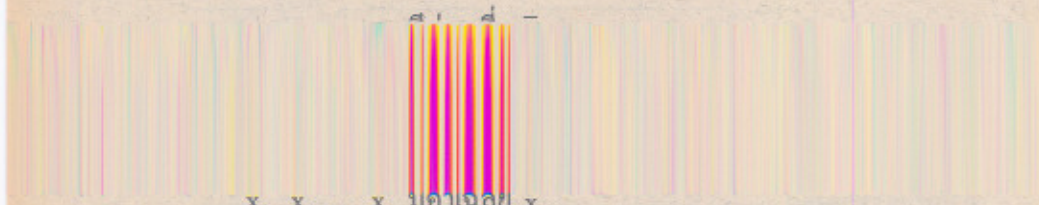
กรณี $\bar{x}$ ตัวใหม่มีค่าน้อยสุด เกิดจากข้อมูลเลขคู่ทั้ง 9 ตัวมีค่าลดลงตัวละ 9 และข้อมูลเลขคี่ทุกตัวลดลงตัวละ 7

ผลบวกของข้อมูลใหม่ $= \sum X_{(เก่า)} - 9(9) - 6(7) = 6168 - 81 - 42 = 6045$

$$\bar{x}_{น้อย} = \frac{6045}{15} = 403$$

สรุปผลต่าง $\bar{x}_{มาก} - \bar{x}_{น้อย} = 419.4 - 403 = 16.4$

หมายเหตุ เราสามารถคำนวณ $\bar{x}_{มาก} - \bar{x}_{น้อย}$ ได้โดยไม่จำเป็นต้องหา $\bar{x}$ และ $\sum X_{(เก่า)}$ ก็ได้ โดยใช้เหตุผลดังนี้



$x_1, x_2, \ldots x_m$ มีค่าเฉลี่ย $\bar{x}$

$x_1, x_2, \ldots x_m$ มีค่าคลาดเคลื่อนแต่ละตัวเป็น $\pm k$

ค่าเฉลี่ยของ $x_1 \pm k, x_2 \pm k, \ldots, x_m \pm k$ มีค่าระหว่าง $\bar{x} \pm k$

	จำนวน	ค่าเฉลี่ย	ค่าเฉลี่ยมากที่สุดที่เป็นไปได้	ค่าเฉลี่ยน้อยที่สุดที่เป็นไปได้
เลขคู่	9	$\bar{E}$	$\bar{E}+9$	$\bar{E}-9$
เลขคี่	6	$\bar{O}$	$\bar{O}+7$	$\bar{O}-7$
รวม	15	$\bar{x}_I$	$\bar{x}_{มาก}$	$\bar{x}_{น้อย}$

$\bar{x}_{มาก}$ ค่ามากสุดที่เป็นไปได้ $= \dfrac{9(\bar{E}+9)+6(\bar{O}+7)}{15}$

$\bar{x}_{น้อย}$ ค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ $= \dfrac{9(\bar{E}-9)+6(\bar{O}-7)}{15}$

$$\bar{x}_{มาก} - \bar{x}_{น้อย} = \left[\frac{9(\bar{E}+9)+6(\bar{O}+7)}{15} - \frac{9(\bar{E}-9)+6(\bar{O}-7)}{15}\right]$$

$$= \frac{1}{15}[81+42+81+42] = \frac{246}{15} = 16.4$$

สรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ดังนี้ $N = n_1 + n_2 + \ldots n_k$

$$\bar{x} = [(\sum X)_{กลุ่ม\ 1} + (\sum X)_{กลุ่ม\ 2} + \ldots + (\sum X)_{กลุ่ม\ k}]/N$$

	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	กลุ่ม 3		กลุ่ม k
จำนวนข้อมูล	n_1	n_2	n_3	...	n_k
ค่าคลาดเคลื่อน	$\pm e_1$	$\pm e_2$	$\pm e_3$		$\pm e_k$

จะได้ว่า $\bar{x} = \dfrac{N\bar{X} + n_1(\pm e_1) + n_2(\pm e_2) + \ldots + n_k(\pm e_k)}{N}$

ผลต่าง $\bar{x}_{มาก} - \bar{x}_{น้อย} = \dfrac{2(n_1e_1 + n_2e_2 + \ldots + n_ke_k)}{N}$

ดังเช่นข้อสอบข้อนี้ $n_1 = 9, e_1 = 9, n_2 = 6, e_2 = 7$

$$\bar{x}_{\text{มาก}} - \bar{x}_{\text{น้อย}} = \frac{2[(9)(9)+(6)(7)]}{15} = \frac{2(81+42)}{15} = 16.4$$

18. ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูลคนงานเก่าจำนวน n คน

$$\bar{x}_{\text{เก่า}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \rightarrow 20 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 20n \quad \ldots(1)$$

คนงานเพิ่มอีก 5 คน คือ $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}, x_{n+5}$

$$\bar{x}_{\text{ใหม่}} = \frac{\sum_{i=1}^{n+5} x_i}{n+5} \rightarrow 25 = \frac{\sum_{i=1}^{n+5} x_i}{n+5} \rightarrow \sum_{i=1}^{n+5} x_i = 25n + 125 \quad \ldots(2)$$

เพราะว่าผลรวมอายุคนงานเพิ่มขึ้นอีก 150 ปี

เพราะฉะนั้น $150 = \sum_{i=1}^{n+5} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = (25n + 125) - (20n) = 5n + 125$

$5n = 25 \rightarrow n = 5$ สรุป ปัจจุบันมีคนงานทั้งหมด $= 5 + 5 = 10$ คน

วิธีที่ 2 จากข้อมูลของโจทย์สรุปเป็นตารางดังนี้

	จำนวน	ค่าเฉลี่ย	ผลบวกข้อมูล
กลุ่มเก่า	n	20	20n
กลุ่มใหม่	5	$\frac{150}{5} = 30$	150
รวมทั้งหมด	n + 5	25	20n + 150

เพราะว่า $\bar{x}_{รวม} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} \rightarrow 25 = \frac{(n)(20)+(5)(30)}{n+5}$

$\rightarrow 25n + 125 = 20n + 150 \rightarrow 5n = 25 \rightarrow n = 5$

สรุปได้ว่าคนงานทั้งหมดในปัจจุบัน = 10 คน

19. ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $\sum_{i=1}^{9}(x_i - 11)^2$ มีค่าน้อยสุด เพราะฉะนั้น $\bar{x} = 11$

$$\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{9}(x_i - 11)^2 = \sum_{i=1}^{9}[(x_i - 10) - 1]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{9}[(x_i - 10)^2 - 2(x_i - 10) + 1] = \sum_{i=1}^{9}((x_i - 10)^2 - 2x_i + 21)$$

$$= \sum_{i=1}^{9}(x_i - 10)^2 - 2\sum_{i=1}^{9}x_i + 9(21) = 45 - 2(9\bar{x}) - 171$$

$$= 45 - 2(99) + 189 = 36$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - \bar{x})^2}{9} = \frac{36}{9} = 4$$

สรุป ความแปรปรวน = 4

20. ตอบ 3.

แนวคิด ให้ค่าเฉลี่ยคะแนนนักเรียนชาย = k ,

ค่าเฉลี่ยคะแนนนักเรียนหญิง = k , s^2 = ความแปรปรวนรวมทั้งหมด

จากข้อมูลของโจทย์สรุปเป็นตารางดังนี้

นักเรียน	จำนวน	ค่าเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ชาย	30	k	4
หญิง	30	3k	5
รวม	60		s

คำถามแบบนี้จัดว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ k ดังนั้นสมมุติ k = 1 ก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว ให้ z เป็นค่าที่ตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 95 ของคะแนนมาตรฐาน

หญิง ; $z = \frac{x_1 - \bar{x}_F}{S_F} = \frac{x_1 - 3k}{5} = \frac{x_1 - 3}{5} \longrightarrow x_1 = 3 + 5z$

ชาย ; $z = \frac{x_2 - \bar{x}_M}{s_M} = \frac{x_2 - k}{4} = \frac{x_2 - 1}{4} \longrightarrow x_2 = 1 + 4z$

รวม ; $z = \frac{x_3 - \bar{x}_{Total}}{s_{Total}} \longrightarrow \bar{x}_{Total} = \frac{(30)(k) + (30)(3k)}{30 + 30} = \frac{120k}{60} = 2k = 2$

$z = \frac{x_3 - 2}{s} \longrightarrow x_3 = 2 + sz$

เพราะว่า $4 < s < 5 \longrightarrow 4z < sz < 5z$

เพราะฉะนั้น $1 + 4z < 2 + sz$ และ $2 + sz < 3 + 5z$

นั้นคือ $x_2 < x_3$ และ $x_3 < x_1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ ความหมายของคำว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ k ดังนั้นหากเราสมมุติ k = 1 , 2 , 10.....ก็จะได้ผลเหมือนกัน

วิธีจริง จะได้ $x_1 = 3k + 5z$, $x_2 = k + 4z$, $x_3 = 2k + sz$

$4 < s < 5 \longrightarrow 4z < sz < 5z$

$k + 4z < 2k + sz < 3k + 5z$

สรุป $x_2 < x_3 < x_1$

21. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (1) ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}} = 0$ จะได้ $x_{max} - x_{min} = 0$

เพราะฉะนั้น $x_{max} = x_{min}$ ดังนั้นข้อมูลต้องมีค่าเท่ากันทุกตัวเป็น

$x, x, x, x, \ldots, x$ ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับค่ากึ่งกลางพิสัย

พิจารณาข้อความ(2) ถูกต้องแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่าสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{1}{3} \rightarrow 3Q_3 - 3Q_1 = Q_3 + Q_1 \rightarrow 2Q_3 - 4Q_1 = 0$

$$Q_3 - 2Q_1 = 0 \qquad \ldots.(1)$$

เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ 1 เพราะฉะนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 1$

$$Q_3 - Q_1 = 2 \qquad \ldots.(2)$$

$(2) - (1)$; $Q_1 = 2$ ดังนั้น $Q_3 = 4$

เพราะว่าข้อมูลระหว่าง Q_1 และ Q_3 มี 50% ของทั้งหมด

เพราะฉะนั้น 50% ของจำนวนข้อมูลมีค่าระหว่าง 2 กับ 4

22. ตอบ 4.

แนวคิด I_{2533} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2533 I_{2535} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2535

I_{2537} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2537

ฐานของตัวเลขเงินเดือนที่ใช้ต้องเป็นของปี 2533 นาย ก. ได้เงินเดือน 4,500

เพื่อให้เงินของปี 2535 มีค่าเท่ากับ 4,500 ในปี 2533 ต้องคิดจากสูตร

$$\frac{I_{2535}}{I_{2533}} \times \text{รายได้ปี } 2533 = \frac{125}{90} \times 4500 = 6250$$

เพื่อให้เงินของปี 2537 มีค่าเท่ากับเงิน 4,500 ในปี 2533 ต้องคิดจากสูตร

$$\frac{I_{2537}}{I_{2533}} \times \text{รายได้ปี } 2533 = \frac{160}{90} \times 4500 = 8000$$

สรุปในปี 2537 นาย ก. จะต้องได้รับเงินมากกว่าปี 2535 เท่ากับ 8000 – 6250 = 1750 จึงจะทำให้ฐานะความเป็นอยู่ของเขาดีเท่าปี 2533

23. ตอบ 1.

แนวคิด ดัชนีราคาแบบใช้มวลรวม ในโจทย์ข้อนี้ต้องหมายถึง **ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม** จึงจะได้คำตอบที่มีในตัวเลือก ตารางราคาสินค้าเมื่อเปลี่ยนหน่วยน้ำหมึกและยาลบหมึกเป็นขวด

สินค้า	ราคาสินค้า	
	2537	2538
ปากกา(โหล)	108	121
น้ำหมึก(ขวด)	$\frac{180}{12} = 15$	$\frac{216}{12} = 18$
ยาลบหมึก(ขวด)	$\frac{240}{12} = 20$	$\frac{300}{12} = 25$
ดินสอ(โหล)	48	60
ผลรวม	191	224

$$\text{ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม} = \frac{\sum_{i=1}^{4} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{4} P_{oi}} \times 100$$

$$= \frac{121+18+15+60}{108+15+20+48} \times 100 = \frac{224}{191} \times 100 = 117.27\%$$

24. ตอบ 3.

แนวคิด A = T , B = T จะได้ $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$

$= [(C \rightarrow T) \wedge (\sim T \rightarrow \sim T)] \vee E = [T \wedge T] \vee E = T$

สรุป $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$ เป็นจริง

พิจารณาตัวเลือกที่สรุปค่าความจริงได้ง่ายเช่น $A \vee \sim E = T \vee \sim E = T$

$E \vee \sim D \vee B = E \vee \sim D \vee T = T$

สรุป $(A \vee \sim E) \leftrightarrow (E \vee \sim D \vee B) = T \leftrightarrow T = T$ ดังนั้นเลือก 3. เป็นคำตอบได้

หมายเหตุ 1. $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D) = (T \wedge T) \rightarrow (C \vee D) = T \rightarrow (C \vee D)$

มีค่าความจริงเปลี่ยนตาม $C \vee D$

2. $(E \vee D) \leftrightarrow (A \vee \sim C) = (E \vee D) \leftrightarrow (T \vee \sim C) = (E \vee D) \leftrightarrow T$

มีค่าความจริงเปลี่ยนตาม $E \vee D$

3. $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge E) = (T \wedge C) \rightarrow (T \wedge E) = C \rightarrow E$

มีค่าความจริงเปลี่ยนตาม C และ E

25. ตอบ 3.

แนวคิด ข้อความ A คือ $X \subset Y$ ข้อความ I คือ $X \cap Y \neq \varnothing$

ข้อความ E คือ $X \cap Y = \varnothing$ ข้อความ O คือ $X - Y \neq \varnothing$

พิจารณาข้อความ(1)

A และ E อาจเป็นเท็จทั้งคู่ $X \subset Y$ และ $X \cap Y = \varnothing$

เป็นไปได้ตัวอย่างเช่น $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1\}$

จะได้ว่า $X \subset Y$ เป็นเท็จและ $X \cap Y = \varnothing$ เป็นเท็จ

สรุป (1) ถูกต้อง ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

พิจารณาข้อความ(2)

I และ O อาจเป็นจริงทั้งคู่ $X \cap Y \neq \varnothing$ และ $X - Y \neq \varnothing$

เป็นไปได้ตัวอย่างเช่น $X = \{1, 2\}$, $Y = \{1, 3\}$

$X \cap Y = \{1\} \neq \varnothing$ $\quad X - Y = \{2\} \neq \varnothing$ สรุป (2) ถูกต้อง

26. ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $(x - A)(x - B) = x^2 - (A + B)x + AB$

เพราะฉะนั้นสมการ $x^2 + px + q = 0$ จะมีผลบวกราก $= -p$ และผลคูณของ

รากเท่ากับ q ดังนั้นเมื่อ z_1, z_2 เป็นรากของสมการ $z^2 + (i - 2)z + (3 - i) = 0$

จะได้ว่า $z_1 + z_2 = -(i - 2) = 2 - i$ และ $z_1 z_2 = 3 - i$

เพราะว่า $z_1 w = 3 + i$ และ $z_2 w = -5i$

เพราะฉะนั้น $z_1 w + z_2 w = (3 + i) + (-5i)$

$$w(z_1 + z_2) = 3 - 4i$$

$$w(2 - i) = 3 - 4i$$

$$w = \frac{3 - 4i}{2 - i} = \frac{3 - 4i}{2 - i}\,\frac{2 + i}{2 + i} = \frac{10 - 5i}{5} = 2 - i$$

27. ตอบ 2.

แนวคิด $1 + x^2 + x^4 + \ldots$ เป็นผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a = 1, r = x^2$

ดังนั้น $1 + x^2 + x^4 + \ldots\ldots = \frac{a}{1 - r} = \frac{1}{1 - x^2}$ เมื่อ $|x^2| < 1$

จะเห็นได้ว่า $|x^2| < 1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $2^{-\frac{2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+.....} = 0$

$$2^{-\frac{2}{3x}} = 2^{1+x^2+x^4+.....}$$

$$-\frac{2}{3x} = 1 + x^2 + x^4 + ...$$

$$-\frac{2}{3x} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$(2x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}, -2$$

เพราะว่า $|x^2| < 1$ เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ เท่านั้น สรุป $x = -\frac{1}{2} \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

28. ตอบ 4.

แนวคิด $2^{x+y} + i(x - y) = 3 + 2i$ เพราะว่าส่วนจริงต้องเท่ากันและส่วนจินตภาพต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้น $2^{x+y} = 3$ และ $x - y = 2$

แทนค่า $x = 2 + y$ จะได้ $2^{2+y+y} = 3 \rightarrow 2^{2+2y} = 3 \rightarrow 2^2 \cdot 2^{2y} = 3$

$$\rightarrow (2^2)^y = \frac{3}{4} \quad \rightarrow 4^y = \frac{3}{4}$$

แทนค่า $y = x - 2$ จะได้ $2^{x+x-2} = 3 \rightarrow 2^{2x} \cdot 2^{-2} = 3 \rightarrow \frac{4^x}{4} = 3$

สรุป $4^x + 4^y = \frac{3}{4} + 12 = \frac{51}{4}$

หมายเหตุ การตัดตัวเลือกข้อสอบข้อนี้ต้องอาศัยความโชคดีบ้างเช่น หากเราได้ค่า $4^x = 12$ ก่อนก็สามารถตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้ โดยยังไม่ต้องคำนวณ 4^y เพราะว่า $4^y > 0$ ดังนั้น $4^x + 4^y > 12$

เพราะฉะนั้น $4^x + 4^y > \frac{17}{4}$, 6, 12 ทำให้ตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

จะเห็นได้ว่าการตัดตัวเลือกด้วยเหตุผลแบบนี้ จะใช้เวลาน้อยกว่าการคำนวณ 4^y และ $4^x + 4^y$ แน่นอน

29. ตอบ 2.

แนวคิด

เพราะว่า $a_n = e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})} = e^{\ln(3^{-n})^{\frac{1}{2}}} = (3^{-n})^{\frac{1}{2}} = (3^{-\frac{1}{2}})^n = (\frac{1}{\sqrt{3}})^n$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{3}})^n = \frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})}{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $b_n = \log_{\frac{1}{3}}(a_n)$ และ $a_n = (3^{-1})^{\frac{n}{2}} = (\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}} = \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

30. ตอบ 1.

แนวคิด $a_0 = 1$

$$a_1 = 3^1 a_0$$

$$a_2 = 3^3 a_1$$

$$a_3 = 3^5 a_2$$

$$\vdots$$

$$a_n = 3^{2n-1} a_{n-1}$$

$$a_0a_1a_2a_3 \ldots a_n = 1 \cdot 3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^5 \cdot \ldots a^{2n-1}\, a_0a_1a_2 \ldots a_{n-1}$$

$$a_n = 3^{1+3+5+\ldots+(2n-1)} = 3^{\frac{n}{2}(1+(2n-1))} = 3^{n^2}$$

เพราะว่า $\log_{\frac{1}{3}} k = \frac{\log_3 k}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 k}{-1} = -\log_3 k$ เพราะฉะนั้น

$$-91 = \log_{\frac{1}{3}} a_0 + \log_{\frac{1}{3}} a_1 + \ldots \log_{\frac{1}{3}} a_n$$

$$-91 = -\log_3 a_0 - \log_3 a_1 - \ldots - \log_3 a_n$$

$$91 = \log_3 a_0 + \log_3 a_1 + \ldots \log_3 a_n = \log_3 a_0a_1a_2 \ldots a_n$$

$$= \log_3(3^0 \cdot 3^1 \cdot 3^4 \cdot 3^9 \cdot \ldots 3^{n^2}) = \log_3 3^{(1+4+9+\ldots+n^2)}$$

$$= 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$546 = n(n + 1)(2n + 1)$ .....(1)

$= n(2n^2 + 3n + 1) = 2n^3 + 3n^2 + n$

$2n^3 + 3n^2 + n - 546 = 0$ .....(2)

การแยกตัวประกอบตรงนี้ เป็นเรื่องยากเราจะใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกดังนี้ เพราะว่า n เป็นจำนวนเต็ม n = 1, 2, 3 ,.... ดังนั้นเราคำนวณค่าของ $n(n + 1)(2n + 1)$ ว่ามีค่าเท่ากับ 546 เมื่อ n เท่ากับเท่าไร ดีกว่าที่จะแยกตัวประกอบสมการ (2)

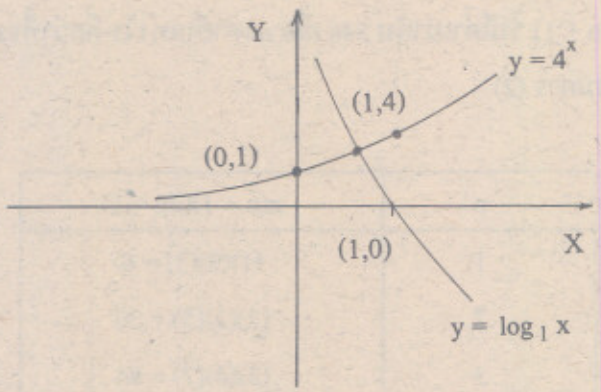
n	$n(n + 1)(2n + 1)$
1	(1)(2)(3) = 6
2	(2)(3)(5) = 30
3	(3)(4)(7) = 84
4	(4)(5)(9) = 180
5	(5)(6)(11) = 330
6	(6)(7)(13) = 546

สรุป $n = 6 \in [1 , 7)$

หมายเหตุ การหาค่า n อาจทำโดยแยกตัวประกอบ 546 ออกเป็น $546 = 2.3.7.13 = n(n+1)(2n + 1)$ เลือก n = 6 จะได้ $n + 1 = 7 , 2n + 1 = 13$ จะเป็นการหาค่า n ที่เร็วที่สุด

31. ตอบ 1.

แนวคิด $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ หาค่า a โดยการจัดรูปทางพีชคณิตจะยากมาก การหาค่า a ที่ทำให้ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ให้พิจารณาจากจุดตัดของ $y = 4^x$ และ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$



การพิจารณาค่า a ให้ดูจากตารางคำนวณดังนี้

x	$y = 4^x$	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
0	1	$+\infty$
$\frac{1}{4}$	$4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$	2
$\frac{1}{2}$	2	1
1	4	0

เพราะฉะนั้นรากของสมการ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ มีค่าระหว่าง $\frac{1}{4}$ กับ $\frac{1}{2}$

สรุป $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ของนักเรียนจะแสดงตัวเลือกอื่นๆผิดดังต่อไปนี้

เพราะว่า $(\frac{1}{2})^2 < a < \frac{1}{2}$ และ $\log_{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^2 > \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$

$$2 > \log_{\frac{1}{2}} a > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{\frac{1}{2}} a)^n$ ไม่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

เพราะว่าเรนจ์ของ sec คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ และ $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นต้องไม่มี x ที่ทำให้ $\sec x = a$

เพราะว่า $f(x) = e^x$ มีเรนจ์ $= (0, \infty)$ และ $a \in (0, \infty)$

เพราะฉะนั้นต้องมี $x \in R$ ที่ทำให้ $e^x = a$

การตัดตัวเลือก จะเห็นได้ว่าการทำโจทย์ข้อนี้เหตุผลการหาค่า a ต้องใช้กราฟ และการไขว้กันของกราฟบนช่วง $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ จึงจะ ได้ว่า $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

หากนักเรียนอ่านตัวเลือกทุกข้อก่อนก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. และตัวเลือก 3. มีลักษณะขัดแย้งกัน กล่าวคือ

ตัวเลือก 3. จริง $\rightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty] \rightarrow |a| \geq 1$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ ไม่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$\rightarrow$ ตัวเลือก 1. ไม่เป็นจริง

ในทางกลับกัน ตัวเลือก 1. จริง $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$\rightarrow |a| < 1 \rightarrow a \notin (-\infty, -1] \cup [1, \infty] \rightarrow$ ไม่มี $x \in R$ ที่ $\sec x = a$

$\rightarrow$ ตัวเลือก 3. ไม่เป็นจริง

ดังนั้นหากจะเดาคำตอบก็ต้องเป็น 2 ตัวนี้แน่นอน

ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเรามาฝึกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กันอีก จากโจทย์จะเห็นว่ามีการกล่าวถึง $\log_{\frac{1}{2}} a$ ดังนั้น $a > 0$ แน่นอน ดังนั้น a อยู่ในเรนจ์ของ e^x

ดังนั้นต้องมี $x \in R$ ที่ $e^x = a$ แน่นอน

ตัวเลือก 4. จึงผิดตัดทิ้งได้ด้วยเหตุผล $a > 0$

คำแนะนำ ข้อสอบที่ชอบถามว่าตัวเลือกใดถูกหรือผิด ควรจะอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วจึงเลือกตัวเลือกที่ง่ายมาพิจารณา

32. ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $P(x) = x^3 - x + 3 = x(x^2 - 1) + 3 = x(x + 1)(x - 1) + 3$

$$P(x) = (x - 1)(x)(x + 1) + 3$$

เพราะว่า 3 หาร $(x - 1)(x)(x + 1)$ ลงตัวทุกค่า x ที่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น 3 หาร $(x - 1)(x)(x + 1) + 3$ ลงตัวทุกจำนวนเต็ม x

สรุปข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

หมายเหตุ การแสดงว่า 3 หาร $(x - 1)(x)(x + 1)$ ลงตัวทุกจำนวนเต็ม x

กรณี 1 3 หาร x ลงตัว จะได้ว่า 3 หาร $(x - 1)(x)(x + 1)$ ลงตัว

กรณี 2 3 หาร x เหลือเศษ 1 จะได้ว่า 3 หาร x – 1 ลงตัว

ดังนั้น 3 หาร (x – 1)(x)(x + 1) ลงตัว

กรณี 3 3 หาร x เหลือเศษ 2 จะได้ว่า 3 หาร x + 1 ลงตัว

ดังนั้น 3 หาร (x – 1)(x)(x + 1) ลงตัว

สรุป 3 หาร (x – 1)(x)(x + 1) ลงตัวทุกค่า x

33. ตอบ 2.

แนวคิด (1) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right]$

$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2(x-2)+1}{(x-2)(x-1)}\right] \quad = \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-x^2+1}{(x-2)(x-1)}\right]$

$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2-x-1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}\right] = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right) = \frac{1-1-1}{1-2} = 1$

ดังนั้นข้อความ (1) เป็นเท็จ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

(2). $x \longrightarrow -2^-$ ดังนั้นเราพิจารณาเมื่อ $x < -2$

$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2|\,|x+2|$

$= (-(x-2))(-(x+2)) = (x-2)(x+2) = x^2-4$

$|x+2| = -(x+2)$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{|x^2-4|+|x+2|}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to -2^-}\frac{(x^2-4)-(x+2)}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-x-6}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to -2^-}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to -2^-}\frac{x-3}{x-5}$$

$= \frac{-2-3}{-2-5} = \frac{5}{7}$ ดังนั้นข้อความ (2) ถูกต้อง

34. ตอบ 3.

แนวคิด พิจารณาข้อความ(1) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\frac{dx}{dx} - x\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x(\frac{1}{2})(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ ทุกค่า x สรุป f เป็นฟังชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ข้อความ (1) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ(2) $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$; $x > 0$

$$g(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{3}}$$

$$g'(x) = 2(-\tfrac{1}{2})x^{-\frac{3}{2}} - 3(-\tfrac{1}{3})x^{-\frac{4}{3}} = -x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{4}{3}}$$

$$g''(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}$$

การหาค่าวิกฤต $g'(x) = 0 \rightarrow -x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} = 0 \rightarrow x^{-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$x \neq 0$; $x^{-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} = 1 \rightarrow x^{\frac{1}{6}} = 1 \rightarrow x = 1$

$$g'(1) = \frac{3}{2}(1)^{-\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(1)^{-\frac{7}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6} > 0$$

เพราะฉะนั้น g(1) เป็นค่าต่ำสุดสัมพันธ์ สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง

35. ตอบ 3.

แนวคิด $y = 3^{\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\ln 3}$ $(\because A^{\log_C B} = B^{\log_C A}$ เสมอ)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1)^{\ln 3} = (\ln 3)(x^2+1)^{(\ln 3)-1}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\ln 3)(x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x) \qquad ...(*)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(\ln 3)(x^2+1)^{\ln 3}}{x^2+1} = \frac{2x(\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$$

จากสมการ (*) $\frac{dy}{dx} = (\ln 3)(x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x)$ เราสามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว แทนค่า $x = 0$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แต่สูตรในตัวเลือก 2. ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{3^{\ln(0+1)}}{0+1} = 1 \neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง ในทำนองเดียวกันแทน $x = 1$ จะตัดตัวเลือก 1. และ 4. ได้

หมายเหตุ การแสดงว่า $A^{\log_C B} = B^{\log_C A}$

เพราะว่า $\log_C A \log_C B = \log_C B \log_C A$

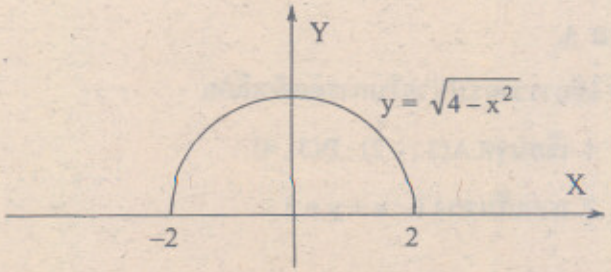
เพราะฉะนั้น $\log_C B^{\log_C A} = \log_C A^{\log_C B}$

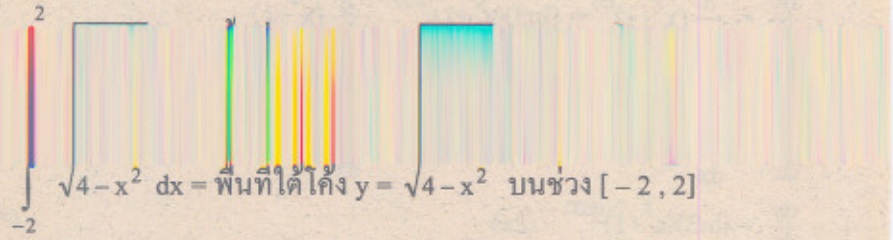
เพราะว่า $\log_C$ เป็นฟังก์ชั่น 1 – 1 เพราะฉะนั้น $B^{\log_C A} = A^{\log_C B}$

36. ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (1) $y = \sqrt{4-x^2} \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 4$ มีกราฟเป็นวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลาง (0 , 0)

เพราะฉะนั้น $y = \sqrt{4-x^2}$ เป็นครึ่งวงกลมรัศมี 2 เหนือแกน X





$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\ dx$ = พื้นที่ใต้โค้ง $y = \sqrt{4-x^2}$ บนช่วง $[-2, 2]$

$= \text{พื้นที่ครึ่งวงกลมรัศมี } 2 = \frac{1}{2}(\pi 2^2) = 2\pi$

ดังนั้นข้อความ (1) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

พิจารณาข้อความ (2)

$$\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\ dx = \int_0^1 1dx + \int_0^1 (\sqrt{x^4-2x^2}+1)dx$$

เพราะว่า $\int_0^1 1dx = (x]_0^1 = 1$ และ $\int_0^1 (\sqrt{x^4-2x^2}+1)dx > 0$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\ dx > 1$ สรุปข้อความ (2) ผิด

หมายเหตุ $\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\ dx = \int_0^1 (1+\sqrt{(x^2-1)^2})\ dx$

$$= \int_0^1 (1+|x^2-1|)\ dx = \int_0^1 (1+(-(x^2-1))dx \quad (\because x^2-1<0)$$

$$= \int_0^1 (2-x^2)\ dx = (2x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \neq \frac{1}{3}$$

สรุปข้อความ (2) ผิด

37. ตอบ 3.

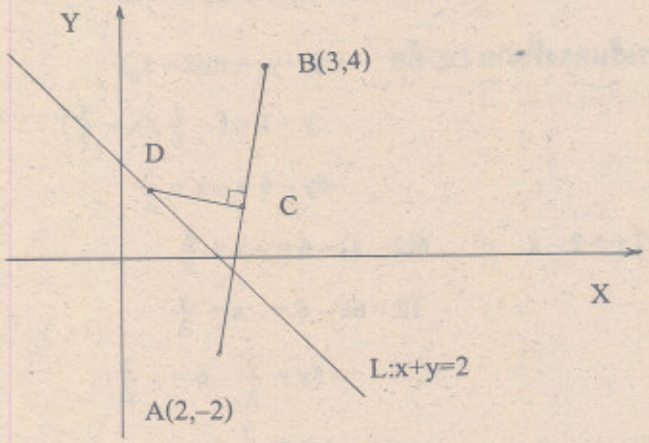
แนวคิด ใช้การวาดรูปช่วยในการตัดตัวเลือก

1. เขียนจุด A(2 , – 2) , B(3 , 4)

2. ลากเส้นตรง L : x + y = 2

3. แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C

4. ลากเส้น CD ตั้งฉากกับ L ที่จุด D



เพราะว่า DC แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB

เพราะฉะนั้น D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

วัดพิกัด D ได้เป็น (0.7 , 1.3) จากตัวเลือกทั้ง 4 จะได้

ตัวเลือก	จุดศูนย์กลาง
1.	$(\frac{11}{2},-\frac{7}{2})$
2.	$(-\frac{7}{2},\frac{11}{2})$
3.	$(\frac{7}{10},\frac{13}{10})$
4.	$(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 หาจุดกึ่งกลางของ A B ได้เป็น $\left(\frac{2+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{4-(-2)}{3-2} = 6$

เพราะว่า DC $\perp$ AB เพราะฉะนั้นความชัน DC เท่ากับ $-\frac{1}{6}$

สมการเส้นตรงที่ผ่าน DC คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 1 = (-\tfrac{1}{6})(x - \tfrac{5}{2})$$

$$6y - 6 = -x + \tfrac{5}{2} \qquad \ldots(1)$$

แทนค่า $y = 2 - x$ $\quad 6(2-x) - 6 = -x + \frac{5}{2}$

$$12 - 6x - 6 = -x + \tfrac{5}{2}$$

$$-5x = \tfrac{5}{2} - 6 = -\tfrac{7}{2}$$

$$x = \tfrac{7}{10}$$

เพราะว่า $y = 2 - x$ เพราะฉะนั้น $y = 2 - \frac{7}{2} = \frac{13}{10}$ สรุปพิกัด $D(\frac{7}{10}, \frac{13}{10})$

หมายเหตุ ทำมาได้แค่นี้ หากตัดตัวเลือกก็จะทำได้เหมือนกับเหตุผลจากการวาดรูปเหมือนกัน รัศมีวงกลม = ความยาว DA

$$= \sqrt{(\tfrac{7}{10} - 2)^2 + (\tfrac{13}{10} + 2)^2} = \sqrt{(-\tfrac{14}{10})^2 + (\tfrac{33}{10})^2} = \sqrt{\tfrac{196 + 1089}{100}} = \sqrt{\tfrac{1285}{100}}$$

สมการวงกลมคือ $(x - \frac{7}{10})^2 + (y - \frac{13}{10})^2 = \frac{1285}{100}$

$$(10x - 7)^2 + (10y - 13)^2 = 1285$$

วิธีจริง แบบที่ 2 สมมุติพิกัด D คือ (h , k) เพราะว่า AD = BD เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{(h-3)^2 + (k-4)^2} = \sqrt{(h-2)^2 + (k+2)^2}$$

$$(h-3)^2 + (k-4)^2 = (h-2)^2 + (k+2)^2$$

$$h - 6h + 9 + k^2 - 8k + 16 = h^2 - 4h + 4 + k^2 - 4k + 4$$

$$-2h - 12k = -17$$

$$2h + 12k = 17 \quad \ldots.(1)$$

เพราะว่า (h , k) อยู่บนเส้นตรง L : x + y = 2 เพราะฉะนั้น h + k = 2 หรือ

$$2h + 2k = 4 \quad \ldots.(2)$$

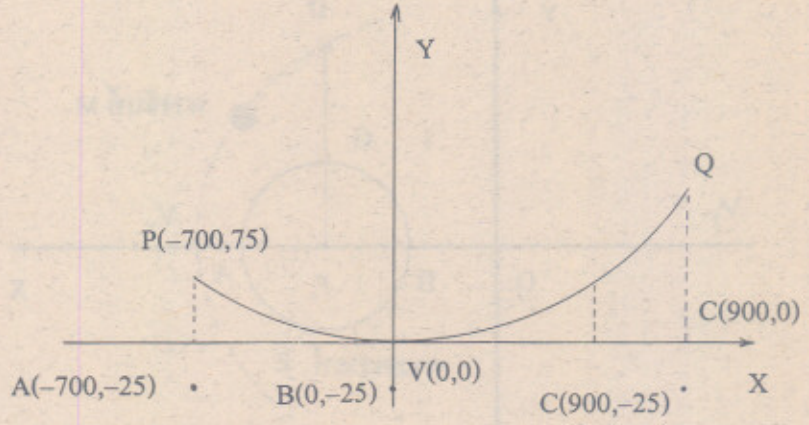
(1) – (2) ; $10k = 13$

$$k = \frac{13}{10} \text{ และ } h = \frac{7}{10}$$

ในทำนองเดียวกับแบบที่ 1 ก็จะได้ตัวเลือก 3. เหมือนกัน

38. ตอบ 4.

แนวคิด ให้แกน Y ทับ VB และ V เป็นจุดกำเนิดจะได้พิกัดของจุดต่างๆ เป็น



สมมติพาราโบลาคือ $y = ax^2$ เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด P(–700 , 75)

ดังนั้น $75 = a(-700)^2 \rightarrow a = \frac{3}{19600}$

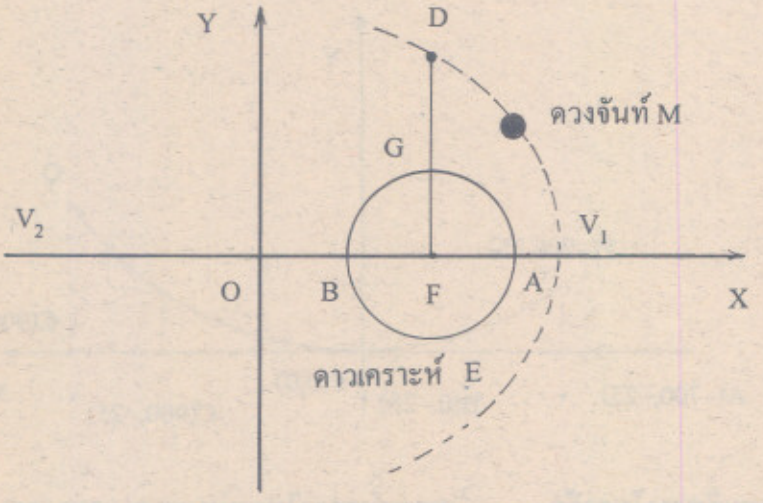
เมื่อ $x = 900$ จะได้ $y = (\frac{3}{19600})(900)^2$

ดังนั้นพิกัด Q คือ $(900 , (\frac{3}{19600})(900)^2)$

สรุป $|QC| = 25 + (\frac{3}{19600})(900)^2 = \frac{7300}{49}$

39. ตอบ 4.

แนวคิด โจทย์ข้อนี้ต้องสมมติว่าดาวเคราะห์ E เป็นทรงกลม มิฉะนั้นจะสรุปไม่ได้ว่าจุดใกล้สุดระหว่างดาวเคราะห์ E กับดวงจันทร์ M อยู่ในแนวแกนเอก ให้แกน X ทับแกนเอกและแกน Y ทับแกนโท จะได้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงรี ให้ D เป็นจุดบนวงรี และ DF ตั้งฉากกับแกนเอกและ DF F ตัดวงกลมที่จุด G



ให้ V_1, V_2 เป็นจุดยอดของวงรี , F เป็นโฟกัสของวารีและเป็นจุดศูนย์กลาง ของดาวเคราะห์ E ให้ A เป็นจุดบนดาวเคราะห์ E ที่อยู่ใกล้ดวงจันทร์ M มากที่สุด เพราะฉะนั้น $|AV_1| = 3000$

ให้ B เป็นจุดบนดาวเคราะห์ E ที่ห่างจาก V_2 เท่ากับ 24000

AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของดาวเคราะห์ E เพราะฉะนั้น $|AB| = 8000$

และ $|BF| = |FA| = 4000$

เพราะว่าความยาวแกนเอกเท่ากับ $|V_1 V_2| = 2a$ เพราะฉะนั้น

$2a = |V_1V_2| = |V_2B| + |BA| + |AV_1| = 24000 + 8000 + 3000 = 35000$

$a = 17500$

ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงรีจะได้ว่า

C = ระยะทางจากจุดศูนย์กลางวงรีไปยังจุดโฟกัส $= |OF|$

$= |OV_1 - AV_1 - FA| = |OV_1| - |AV_1| - |FA| = a - 3000 - 4000$

$= 17500 - 7000 = 10500$

$b^2 = a^2 - c^2$

$= 17500^2 - 10500^2 = (17500 + 10500)(17500 - 10500)$

$= (28000)(7000)$

$b = 14000$

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\frac{x^2}{(17500)^2} + \frac{y^2}{(14000)^2} = 1$$

ที่ตำแหน่งของจุด F คือ (c , 0) = (10500 , 0) จะได้

$$\frac{(10500)^2}{(17500)^2} + \frac{y^2}{(14000)^2} = 1$$

$y^2 = (14000)^2[1 - (\frac{10500}{17500})^2] = (14000)^2(1 - 0.36) = (14000)^2(0.64)$

$y = (14000)(0.8) = 11200$

สรุป D ห่างจากผิวดาวเคราะห์ E = DF – GF = 11200 – 4000 = 7200 ไมล์

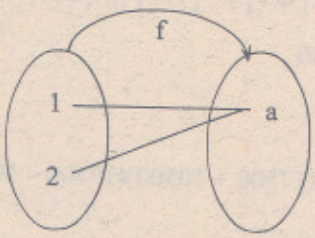
40. ตอบ 1.

แนวคิด พิจารณาข้อความ (1) ถูกต้องแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

ให้ $x \in A$ จะได้ $f(x) \in f(A)$ เพราะฉะนั้น $x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(A))$

นั้นคือ $x \in f^{-1}(f(A))$ สรุป $A \subset f^{-1}(f(A))$

พิจารณาข้อความ(2) ผิด ตัวอย่างเช่น



$X = \{1 , 2\}$ $Y = \{a\}$ $f = \{(1 , a) , (2 , a)\}$

$A = \{1\}$ $f(A) = \{a\}$ แต่ $f(1) = a$ และ $f(2) = a$

ดังนั้น $f^{-1}(\{a\}) = \{1 , 2\}$ นั้นคือ $f^{-1}(f(A)) = \{1 , 2\} \not\subset \{1\}$

สรุป $f^{-1}(f(A)) \not\subset A$

41. ตอบ 4.

แนวคิด คำถามแบบนี้ให้อ่านตัวเลือกทุกตัวดูก่อนว่าเราควรจะเลือกเซตที่ง่ายขึ้นมาแสดงว่าไม่เป็นปริภูมิโทโพโลยี โดยพิสูจน์ว่าขาดคุณสมบัติข้อใด ก่อนอื่นข้อให้สังเกตว่า $\varnothing$, X อยู่ในทุกตัวเลือก ดังนั้นเงื่อนไข (1) , (2) ของทุกตัวเลือกเป็นจริงแน่นอน

ต่อไปลองตรวจสอบเงื่อนไขการปูเนียนพบว่า

$$\{1,2\} \in \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, X\}$$

$$\{2,3\} \in \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, X\}$$

แต่ $\{1,2\} \cup \{2,3\} = \{1,2,3\} \notin \{\varnothing, \{1,2\}, \{2,3\}, \{2\}, X\}$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ไม่เป็นปริภูมิโทโพโลยีแน่นอน

ตอนที่ 2

1. ตอบ $x + y + z = 3$

แนวคิด วิธีที่ 1. ใช้กฎของคราเมอร์ $\det(A) = -40 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 8 & 0 \\ 20 & 12 & 2 \\ 12 & 5 & 7 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{12(84-10) - 8(140-24) + 0}{-40} = \frac{888-928}{296-336} = \frac{-40}{-40} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 12 & 0 \\ 6 & 20 & 2 \\ 0 & 12 & 7 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{4(140-24) - 12(42-0) + 0}{-40} = \frac{464-504}{-40} = \frac{-40}{-40} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 12 & 20 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix}}{-40} = \frac{-40}{-40} = 1$$

สรุป $x + y + z = 1 + 1 + 1 = 3$

วิธีที่ 2 หา A^{-1} ได้เป็น $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\text{adj}(A) = \frac{1}{\det A}[\text{cof}(A)]^T$

$$= \frac{1}{-40}\begin{bmatrix} 134 & -42 & 30 \\ -56 & 28 & -20 \\ 16 & -8 & 0 \end{bmatrix}^T = \frac{-1}{40}\begin{bmatrix} 134 & -56 & 16 \\ -42 & 28 & -8 \\ 30 & -20 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $AX = B$ เพราะฉะนั้น $X = A^{-1}B$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} 134 & -56 & 16 \\ -42 & 28 & -8 \\ 30 & -20 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} = -\frac{1}{40}\begin{bmatrix} -40 \\ -40 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

สรุป $x + y + z = 3$

วิธีที่ 3 ใช้การแปลงแถว $[A : B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 8 & 0 & 12 \\ 6 & 12 & 2 & 20 \\ 0 & 5 & 7 & 12 \end{array}\right]$

4 หารแถว 1, 2 หารแถว 2 $= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 1 & 10 \\ 0 & 5 & 7 & 12 \end{array}\right]$

แถว 3 ถูกลบทิ้งด้วย 3 เท่าของแถว 1 $= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 & 12 \end{array}\right]$

ดังนั้น $x + 2y = 3 \longrightarrow x = 3 - 2y$ และ $z = 1$

$5y + 72 = 12 \longrightarrow y = \frac{1}{5}(12 - 7z)$

เพราะฉะนั้น $y = 1$ และ $x = 1$ สรุป $x + y + z = 3$

2. ตอบ ประวัติศาสตร์ 6 ชั่วโมง, ภาษาอังกฤษ 6 ชั่วโมง,คณิตศาสตร์ 12 ชั่วโมง และเคมี 6 ชั่วโมง

แนวคิด สมมติตัวแปร

H = จำนวนเวลาที่ศึกษาวิชาประวัติศาสตร์นอกห้องเรียน

E = จำนวนเวลาที่ศึกษาวิชาภาษาอังกฤษนอกห้องเรียน

M = จำนวนเวลาที่ศึกษาวิชาคณิตศาสตร์นอกห้องเรียน

C = จำนวนเวลาที่ศึกษาวิชาเคมีนอกห้องเรียน

เพราะว่านักเรียนผู้นี้ต้องการศึกษานอกห้องเรียน 30 ชั่วโมง

เพราะฉะนั้น $H + E + M + C = 30$

เพราะว่าเขามีความจำเป็นต้องใช้เวลาศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ถึง 2 เท่าของเวลาที่ใช้ศึกษาประวัติศาสตร์ เพราะฉะนั้น $M \geq 2H$

เพราะว่าเขาต้องการใช้เวลาศึกษาประวัติศาสตร์และภาษาอังกฤษรวมกัน 3 ชั่วโมงเป็นอย่างน้อย เพราะฉะนั้น $H + E \geq 3$

เพราะว่าเขาควรใช้เวลาไม่น้อยกว่า 18 ชั่วโมงในการศึกษาคณิตศาสตร์และเคมี เพราะฉะนั้น $M + C \geq 18$

เพราะว่าเขาต้องการศึกษาเคมีอย่างน้อย 6 ชั่วโมง เพราะฉะนั้น $C \geq 6$

ให้ L(H, E, M, C) เป็นคะแนนรวมที่จะได้

$$L(H, E, M, C) = (40 + 7H) + (40 + 6E) + (30 + 4M) + (50 + 3C)$$

$$= 160 + 7H + 6E + 4M + 3C$$

ปัญหาขณะนี้เป็นการหาค่าสูงสุดของ L ;

$$L(H, E, M, C) = 160 + 7H + 6E + 4M + 3C$$

$M \geq 2H \qquad H + E \geq 3$

$M + C \geq 18 \qquad C \geq 6$

เนื่องจากมีตัวแปร 4 ตัว ดังนั้นเราไม่สามารถวาดรูปหาจุดตัดได้ จึงต้องพิจารณาโดยใช้เหตุผลดังนี้ เพราะว่าสัมประสิทธิ์ H มีค่ามากที่สุด เพราะฉะนั้นเราควรเลือก H ให้มากที่สุด และสอดคล้องเงื่อนไข

จากเงื่อนไข $C \geq 6$ และ $M + C \geq 18 \rightarrow M \geq 12$

$M \geq 12$ และ $M \geq 2H \rightarrow 12 \geq 2H \rightarrow H \geq 6$

เพราะฉะนั้นเลือก $H = 6$

ต่อไปพยายามเลือกค่ามากที่สุดของ E ให้ได้ $H + E + M + C = 30$

$C \geq 6 \qquad H + E + M \leq 24$

$H = 6 \; ; \; 6 + E + M \leq 24 \qquad E + M \leq 18$

เพราะว่า $M \geq 12$ เพราะฉะนั้น $E \leq 6$ สรุปเลือก $E = 6$

ต่อเลือก M ให้มากที่สุดเท่าที่จะทำได้

เพราะว่า $H + E + M + C = 30$, $C = 6$ เพราะฉะนั้น

$L(H = 6, E = 6, M = 12, C = 6) = 160 + 7(6) + 6(6) + 4(12) + 3(6)$

$= 160 + 42 + 36 + 48 + 18 = 304$ เป็นค่ามากที่สุด

3. ตอบ $abc = -\frac{8}{3}$

แนวคิด เพราะว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 2^+} f(x)$, $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ หาค่าได้และ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = b$

ดังนั้น $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} f(x)\ \dfrac{\sqrt{2x^2+1}+a}{x-2} = b$

การหาค่า a เพราะว่า $\lim_{x\to 2^-} (x-2) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}+a}{(x-2)} \lim_{x\to 2^-} (x-2) = (b)\,(0)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}+a}{(x-2)}(x-2) = 0 \longrightarrow \lim_{x\to 2^-} \sqrt{2x^2+1} + a = 0$$

$$\longrightarrow \sqrt{2(2^2)+1} + a = 0 \longrightarrow a = -3$$

การหาค่า b เพราะว่า $\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = b$ เพราะฉะนั้น

$$b = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}+a}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}\,\frac{\sqrt{2x^2+1}+3}{\sqrt{2x^2+1}+3} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2x^2+1)-9}{(x-2)(\sqrt{2x^2+1}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x^2-4)}{(x-2)(\sqrt{2x^2+1}+3)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}+3}$$

$$= \frac{2(2+2)}{\sqrt{8+1}+3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

การหาค่า c เพราะว่า $\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = b$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{4}{3} = \lim_{x\to 2^+} \dfrac{cx}{x-1} = \dfrac{2c}{2-1}$

$$c = \frac{2}{3}$$

สรุป $abc = (-3)(\frac{4}{3})(\frac{2}{3}) = -\frac{8}{3}$

4. ตอบ ความชัน L เท่ากับ $\frac{64}{27}$

แนวคิด $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2x$

$g(x) = x^3$ $g'(x) = 3x^2$

ให้ L สัมผัสเส้นโค้ง $f(x) = x^2$ ที่จุด (a, b) ดังนั้น $b = f(a) = a^2$

ให้ L สัมผัสเส้นโค้ง $g(x) = x^3$ ที่จุด (c, d) ดังนั้น $d = g(c) = c^3$

ความชันเส้นโค้ง $f(x) = x^2$ ที่จุด (a, b) มีค่าเท่ากับ $f'(a) = 2a$

ความชันเส้นโค้ง $g(x) = x^3$ ที่จุด (c , d) มีค่าเท่ากับ $g'(a) = 3c^2$

เพราะว่า $f'(a)$ และ $g'(c)$ เป็นความชันของเส้นตรง L เส้นเดียวกัน

เพราะฉะนั้น $f'(a) = g'(c)$

$$2a = 3c^2$$

เพราะว่า L ผ่านจุด (a, b), (c, d)

เพราะฉะนั้นความชัน L เท่ากับ $\frac{d-b}{c-a}$ ดังนั้น $2a = 3c^2 = \frac{d-b}{c-a}$

สรุปขณะนี้เรามีสมการ $b = a^2$

$$d = c^2$$

$$2a = 3c^2$$

$$2a = \frac{d-b}{c-a}$$

$$3c^2 = \frac{d-b}{c-a}$$

เลือกแทนค่า $a = \frac{3}{2}c^2$

$b = a^2 = \frac{9}{4}c^4$

$d = c^3$

จากสมการ $3c^2 = \frac{d-b}{c-a}$

$$3c^2(c-a) = d-b$$

$$3c^2(c-\frac{3}{2}c^2) = c^3 - \frac{9}{4}c^4$$

$$3c^3 - \frac{9}{4}c^4 = c^3 - \frac{9}{4}c^4$$

$$\frac{9}{4}c^4 - 2c^3 = 0$$

$$9c^4 - 8c^3 = 0$$

$$c^3(9c-8) = 0$$

$$c = 0, \frac{8}{9}$$

ถ้า $c = 0$ จะได้ L ผ่านจุด $(0, 0)$ และความชันเป็น 0 ซึ่งคือแกน X

ดังนั้นเราเลือกกรณี $c \neq 0$ เพราะฉะนั้น ความชัน L เท่ากับ $3c^2 = 3(\frac{8}{9})^2$

$= 3(\frac{64}{81}) = \frac{64}{27}$

5. ตอบ $\alpha + \beta = 2$

แนวคิด $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$

$$(\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1) + 2\alpha - 2 - 14 = 0$$

$$(\alpha-1)^3 + 2(\alpha-1) - 14 = 0 \quad \text{....(1)}$$

$$\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$$

$$(\beta^3 - 3\beta^2 + 3\beta - 1) + 2\beta - 2 + 14 = 0$$

$$(\beta-1)^3 + 2(\beta-1) + 14 = 0 \quad \text{....(2)}$$

(1) + (2) ; $(\alpha-1)^3+(\beta-1)^3+2(\alpha-1)+2(\beta-1)=0$

แทนค่า $x=\alpha-1$, $y=\beta-1$ จะได้ $x^3+y^3+2x+2y=0$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)+2(x+y)=0$$

$$(x+y)[x^2+y^2-xy+2]=0$$

เพราะฉะนั้น $x+y=0$ หรือ $x^2+y^2-xy+2=0$

ดังนั้น $(\alpha-1)+(\beta-1)=0\rightarrow \alpha+\beta-2=0\rightarrow \alpha+\beta=2$

หมายเหตุ เนื่องจากเป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบเมื่อเราได้ $\alpha+\beta=2$ ก็ต้องตอบไปก่อน

ถึงแม้ว่าจะมีคำตอบอื่นๆอีกเราก็ยังได้คะแนนจาก $\alpha+\beta=2$

การแสดงว่า $x^2+y^2-xy+2\neq 0$

สมมติว่า $x^2+y^2-xy+2=0$

$$x^2+(-y)x+(y^2+2)=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{y\pm\sqrt{y^2-4(1)(y^2+2)}}{2}=\frac{y\pm\sqrt{-3y^2-8}}{2}$$

เพราะว่า $-3y^2-8<0$ เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $\alpha-1$ ไม่เป็นจำนวนจริง นั้นคือ α ไม่เป็นจำนวนจริง ขัดแย้งกับ α ต้องเป็นจำนวนจริงตามที่โจทย์กำหนด

สรุป $x^2+y^2-xy+2\neq 0$ และ $x+y=0$ เท่านั้น

6. ตอบ $(p , q) = (7 , 2) , (11 , 2)$

แนวคิด จากสมการ $5x^2 - px + q = 0$ มีรากเป็นจำนวนตรรกยะจะได้ว่า

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-p) \pm \sqrt{(-p)^2 - 4(5)(q)}}{2(5)}$$

$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 20q}}{10}$ ต้องเป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\sqrt{p^2 - 20q}$ ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

นั้นคือต้องมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $p^2 - 20q = k^2$

การหาค่า p , q โดยการแจงกรณี

p	q	p^2-20q
2	2	–36
3	2	–31
5	2	–15
7	2	$9 = 3^2$
11	2	$81 = 9^2$

ค่า (p , q) ที่เป็นไปได้ คือ $(7 , 2)$ และ $(11 , 2)$

การหาค่า p , q ทั้งหมดที่เป็นไปได้โดยใช้การพิสูจน์

เพราะว่า $p = 2$ ทำให้ $p^2 - 20q = 4 - 20q < 0$ ทุกค่า q

เพราะฉะนั้น $p = 2$ ไม่ได้ แต่ p เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น $p \geq 3$ และ p เป็นเลขคี่

เพราะว่า p เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น p^2 เป็นเลขคี่และ $p^2 - 20q$ ต้องเป็นเลขคี่

เพราะว่า $k^2 = p^2 - 20q$ เพราะฉะนั้น k^2 เป็นเลขคี่

ให้ $p = 2n + 1$, n เป็นจำนวนเต็มบวก

$k = 2m + 1$, m เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น $20q = p^2 - k^2 = (2n + 1)^2 - (2m + 1)^2$

$= [(2n + 1) - (2m + 1)] [(2n + 1) + (2m + 1)]$

$= (2n - 2m) (2n + 2m + 2) = 4(n - m)(n + m + 1)$

$5q = (n - m)(n + m + 1)$

เพราะว่า $(n - m)(n + m + 1) = (n - m)(n - m + 1 + 2m)$

$= (n - m)(n - m + 1) + (n - m)(2m)$

และ $(n - m)(2m)$ เป็นเลขคู่ และ $(n - m)(n - m + 1)$ เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $(n - m)(n + m + 1)$ เป็นเลขคู่ นั้นคือ $5q$ เป็นเลขคู่

สรุป $q = 2$ ค่าเดียวเท่านั้น

จากสมการ $k^2 = p^2 - 20q$ จะได้ $k^2 = p^2 - 40$, $40 = p^2 - k^2$

$40 = (p - k)(p + k)$

$(2)(2)(2)(5) = (p - k)(p + k)$

เพราะว่า k, p เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $k - p$ และ $k + p$ เป็นเลขคู่

$p - k$	$p + k$	p
2	20	11
4	10	7
10	4	7
20	2	11

สรุป $p = 7$ หรือ 11 เท่านั้น

เพราะฉะนั้นค่า (p, q) ที่เป็นไปได้คือ (7, 2) และ (11, 2)

การเฉลย คณิตศาสตร์ ก 2541 ด้วย MATHCAD

โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เป็นโปรแกรมที่มีประโยชน์มากในการคำนวณทั้งระดับ ม. ปลาย และ ระดับอุดมศึกษา ท่านผู้อ่านสามารถเรียนรู้วิธีใช้งานได้จาก **คู่มือ MATHCAD** เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นความสามารถบางประการของ MATHCAD ที่นำมาช่วยในการหาคำตอบของข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ ก. 2541

10. กำหนดให้ $f(x) = \frac{\sqrt{2-x}}{x}$ และ $g(x) = x$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(fog)(1) = 1$
2. $(fog)(2) = 0$
3. $(gof)(1) = 1$
4. $(gof)(2) = 2$

การคำนวณของ MATHCAD

$$f(x) := \frac{\sqrt{2 - x}}{x} \qquad g(x) := x$$

$$f(g(1)) = 1 \qquad f(g(2)) = 0$$

$$g(f(1)) = 1 \qquad g(f(2)) = 0$$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 4.

15. ข้อใดต่อไปนี้คือค่าของ $\log 144 - 2\log 3 + \log 25 - \log 4$

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

การคำนวณของ MATHCAD

$$\log(144) - 2\cdot\log(3) + \log(25) - \log(4) = 2$$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 2.

20. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 3 4. 4

การคำนวณของ MATHCAD

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} \qquad (3)$$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 3.

24. ถ้า F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x) เมื่อ $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$ แล้ว F(2) – F(–1) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 0.25 3. – 0.25 4. – 0.50

การคำนวณของ MATHCAD

$$\int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

คำนวณได้เป็น $\frac{1}{12} \cdot x^3 \cdot (x - 2)$

$$F(x) := \frac{1}{12} \cdot x^3 \cdot (x - 2)$$

$$F(2) - F(-1) = -0.25$$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 3.

42. ค่าของ $\left[\frac{3^{4n+3} + 3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 5 3. 7 4. 9

การคำนวณของ MATHCAD ทำการจัดรูปได้เป็น

$$\left(\frac{3^{4\cdot n+3}+3^{4\cdot n+2}}{3^{2\cdot n+2}\cdot 4}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\left[\frac{\left[36\cdot\left(3^{n}\right)^{4}\right]}{3^{2\cdot n+2}\cdot 4}\right]^{\frac{1}{n}}$$

$$\left[\left(3^{n}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{n}}$$

9

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 4.

44. ค่า x ที่สอดคล้องสมการ $\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x-5}=1$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [4.5, 5.5) 2. [5.5, 6.5) 3. [6.5, 7.5) 4. [7.5, 8.5)

การคำนวณของ MATHCAD สามารถหารากสมการได้

$x := 10$

$\text{root}\left(\sqrt{3\cdot x+4}-\sqrt{3\cdot x-5}-1, x\right)=7$

รากสมการคือ x = 7 เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 3.

3. กำหนดให้ $a=\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, $b=\frac{1}{2+\sqrt{3}}$, $\sqrt{3}=1.732$ ค่าของ $7a^2+11ab-7b^2$ เท่ากับเท่าใด (คำตอบให้ใช้ทศนิยม 2 ตำแหน่ง)

การคำนวณของ MATHCAD ทำการจัดรูปได้เป็น

คำนวณโดยตรง

$$a := \frac{1}{2-\sqrt{3}} \qquad b := \frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$7\cdot a^2+11\cdot a\cdot b-7\cdot b^2=107.995$$

ทำโดยการจัดรูปทีละขั้นตอน

$$7\cdot\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^2+11\cdot\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-7\cdot\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$7\cdot\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^2+(11)-7\cdot\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$7\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2+(11)-7\cdot\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^2$$

$$7\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^2+(11)-7\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

$$7\cdot\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)+(11)-7\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)^2$$

$$7\cdot\left(7+4\cdot\sqrt{3}\right)+(11)-7\cdot\left(7-4\cdot\sqrt{3}\right)$$

$$11+56\cdot\sqrt{3}$$

$$11+56\cdot\sqrt{3}=107.995$$

สรุป $7a^2+11ab-7b^2=107.995$

ความสามารถของ MATHCAD มีมากกว่านี้ หาอ่านได้ในหนังสือ **คู่มือ MATHCAD** เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย