คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18
เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

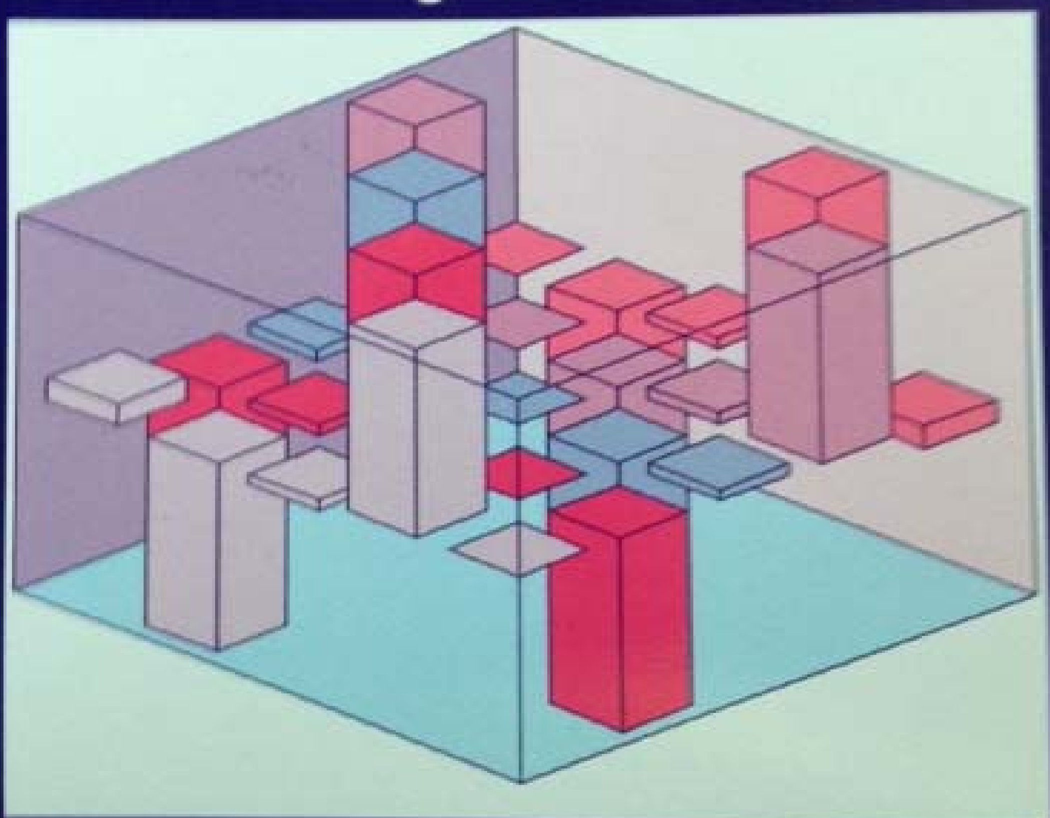
มพ์ครั้งที่ ๒

รวมปัญหา

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

และ

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18

รวมปัญหา
อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
และ
สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

รองศาสตราจารย์ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18

รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

ผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ 1 กันยายน พ.ศ. 2541

พิมพ์ครั้งที่ 2 มกราคม พ.ศ. 2543

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18 -- พิมพ์ครั้งที่ 2 --กรุงเทพฯ :

โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

272 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ -- ข้อสอบ และ เฉลย I. ชื่อเรื่อง

510.76

ISBN 974 – 333 – 249 – 9

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 2554433 , 2187000 โทรสาร 2554441

สยามสแควร์ โทร. 2189888 , 2516141 โทรสาร 2549495

email: cubook@chula.ac.th

http://www.cubook.chula.ac.th

พิมพ์ที่โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 218-3563-4 , 215-3612

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18 นี้ได้รวบรวมปัญหาต่างๆ ที่สามารถแสดงข้อพิสูจน์ด้วยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น

การพิสูจน์ว่า $\sqrt{n} \le \sqrt[n]{n!}$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

การพิสูจน์ว่า 11 หาร $n^{11} - n$ ลงตัว ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานสำคัญของการเรียนรู้และใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ ดังนั้นปัญหาต่างๆ ที่รวบรวมไว้ในหนังสือเล่มนี้จะช่วยให้นักเรียนและนักศึกษาได้ฝึกหัดแสดงการพิสูจน์ สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนและนักศึกษาจะได้ฝึกหัดนำความรู้มาแก้ปัญหาที่น่าสนใจ สำหรับปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก ผู้เขียนได้นำเสนอแนวทางในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์โดยการ เปลี่ยนระดับของปัญหานั้นให้ง่ายลงและค่อยๆ เพิ่มระดับความยากจนกระทั่งเราอาจจะได้รูปแบบทั่วไปของการแก้ปัญหานั้น บทความเรื่อง การหาสูตรของ a_n เมื่อกำหนด $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ และการหาสูตรของผลบวก $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ เป็นส่วนหนึ่งที่ได้จากการพิสูจน์ที่เกี่ยวข้องกับอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จึงได้รวบรวมไว้เป็นเพื่อเป็นประโยชน์แก่ผู้อ่าน ในการพิมพ์ครั้งที่ 2 ได้ทำการปรับปรุงวิธีทำบางข้อให้ดีขึ้น และแก้ไขคำผิดที่ต่างๆ เท่าที่พบ และ ได้เพิ่มเติมภาคผนวกที่ 1. ซึ่งเป็นคำถามคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ สำหรับผู้ที่สนใจปัญหาคณิตศาสตร์ขอแนะนำให้อ่าน **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19** ซึ่งรวบรวมปัญหาคณิตศาสตร์และเฉลยในลักษณะของการแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

1. $x^3 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษเท่าใด
2. $x^{100} + x^{90} + x^{80} + \ldots + x^{20} + x^{10} + 1$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษเท่าใด
3. $x^{2541} - 1$ หารด้วย $x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด
4. $x^{1000} + 1$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษเท่าใด
5. x^{2541} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษเท่าใด
6. x^{1998} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษเท่าใด
7. $x^{2500} + x^{2000} + x^{1500} + x^{1000} + x^{500} + 1$ หารด้วย $x^{13} - 1$ เหลือเศษเท่าใด
8. $x^6 + 1$ หาร x^{2540} เหลือเศษเท่าใด
9. $x^8 + 1$ หาร x^n เหลือเศษเท่าใด
10. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ หาร $x^{2541} + x^{541} + x + 1$ เหลือเศษเท่าใด
11. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ หาร $x^{1951} - 1$ เหลือเศษเท่าใด
12. $x^4 - 1$ หาร $(x + 1)^{25}$ เหลือเศษเท่าใด
13. จงแสดงว่า $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x^2 + x + 1$ หาร
    $x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \ldots + x^{2222} + x^{1111} + 1$ ลงตัว
14. จงแสดงว่า $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x^2 + x + 1$ หาร
    $x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \ldots + x^{2222} + x^{1111} + 1$ ลงตัว

สารบัญ

	หน้า
อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์	1 – 134
สารพันปัญหาคณิตศาสตร์	135 – 194
ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก	
การหาคำตอบของสมการ $(z-1)^n = z^n$	195 – 202
27 หาร 111,111,111,111,111,111,111 ลงตัวหรือไม่	203 – 208
การหาสูตรของ a_n เมื่อกำหนด $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$	209 – 228
การหาสูตรของผลบวก $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$	229 – 334
ภาคผนวกที่ 1.	
สารพันปัญหาคณิตศาสตร์	235 – 266

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

จากหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

1. จงแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}$
2. จงแสดงว่า $\log n < n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. จงแสดงว่า 35 หาร $3^{6n} - 2^{6n}$ ลงตัวทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก
4. จงแสดงว่า $11^{10} - 1$ หารด้วย 100 ลงตัว
5. $x^2 + x + 1$ หาร $x^{2545} + x^{2002} + 1$ เหลือเศษเท่าใด
6. จงแสดงว่า $e^x < \frac{1}{1-x}$ ทุกค่า $x < 1$
7. $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x ; x \in (0, \infty)$ จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
8. $a, b, c, d \in R$ จงแสดงว่า $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
9. $a, b, c, x, y, z \in R$

   จงแสดงว่า $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$
10. $a, b, c, d \in R$

    จงแสดงว่า $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
11. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in R$

    จงแสดงว่า $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$
12. $x^2 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เศษเหลือเท่าใด
13. จงแสดงว่า $x^{100} + x^{50} + 1$ หารด้วย $x^2 + x + 1$ ลงตัว

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
MATHEMATICAL INDUCTION

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานที่สำคัญในการพิสูจน์ทฤษฎีบทและสูตรต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่นการแสดงว่า

(1) $3^n \geq 1 + 2^n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\leq$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

(3) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

(4) 5 หาร $n^5 - n$ ลงตัว ทุกจำนวนเต็มบวก n

ผลของทฤษฎีบทและสูตรต่างๆ ที่สามารถพิสูจน์ได้จากอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ทำให้เราสามารถนำไปประยุกต์ในเรื่องต่างๆ ได้อีกมากเช่น

(1) การแสดงว่า $\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

(2) การแสดงว่า สามเหลี่ยมที่มีเส้นรอบรูปยาวเท่ากันสามเหลี่ยมด้านเท่าจะมีพื้นที่มากที่สุด

หลักการของอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มีหลายรูปแบบเช่น

แบบที่ 1

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

สำหรับ $n \in N$ และ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของ n

ถ้า (1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า $n \in N$

ตัวอย่างของข้อความในพจน์ของ n เช่น

$P(n):\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$

$P(n):\ 3^n \geq 1 + 2n$

$P(n):$ 3 หาร $(n-1)\,n(n+1)$ ลงตัว

$P(n):\ (1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$

$P(n):\ (1)(2)+(2)(3)+(3)(4)+\ldots+n(n+1) = \frac{1}{3}\,n(n+1)(n+2)$

แบบที่ 2

สำหรับ $n \in N$ และ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของ n และ $m \geq 1$

ถ้า (1) $P(m)$ เป็นจริง

(2) $k \geq m$, ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า $n = m, m+1, m+2, \ldots$

แบบที่ 3

สำหรับ $n \in N$ และ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของ n

ถ้า (1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริงทุกค่า $k \leq n$ แล้ว $P(n+1)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

แบบที่ 4

สำหรับ $n \in N$ $P(n)$ เป็นข้อความในพจน์ของ n

ถ้า (1) $P(1)$ เป็นจริง

(2) ถ้า $P(k)$ เป็นจริงทุกค่า $k < n$ แล้ว $P(n)$ เป็นจริง

แล้ว $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

การพิสูจน์ทฤษฎีบทและสูตรต่างๆ ด้วยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์อาจจำแนกเทคนิคการแสดงข้อพิสูจน์ออกเป็น 3 แบบที่สำคัญคือ

1. การจัดรูปแบบทางพีชคณิตจากซ้ายไปขวา หรือจัดรูปเข้ามาหากันตรงกลาง เช่นการพิสูจน์ว่า

   (1) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$

   (2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$

   (3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$

   (4) $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

2. การจัดรูปแบบทางพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก เช่นการพิสูจน์ว่า

   (1) $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว

   (2) $a + b$ หาร $a^{2n-1} - b^{2n-1}$ ลงตัว

   (3) $a - b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว

   (4) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n - 1)^2 < \frac{n^3}{3}$

3. ต้องใช้เหตุผลเฉพาะในแต่ละกรณี เช่น

   (1) การพิสูจน์ว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\leq$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

   (2) การพิสูจน์ว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

   (3) การพิสูจน์ว่า $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ต่างๆ ต่อไปนี้ได้พยายามจำแนกกลุ่มของปัญหาให้ใกล้เคียงกันและเลือกใช้คำถามแบบง่ายไปหายาก

ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

กำหนด $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

1. จงแสดงว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2. จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

3. จงแสดงว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\dfrac{n}{2}(n+1))^2$

4. จงแสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$

5. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง
   จงแสดงว่า $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

6. จงแสดงว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

7. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก
   จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยเรขาคณิตน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

8. จงแสดงว่า $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n-2) = \dfrac{n}{2}(3n-1)$

9. จงแสดงว่า $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \dfrac{1}{4}(5^n - 1)$

10. จงแสดงว่า $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

11. จงแสดงว่า $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}(n+1)(n+2)$

12. จงแสดงว่า $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

13. จงแสดงว่า $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$

14. จงแสดงว่า $(1 - \dfrac{1}{2})(1 - \dfrac{1}{3})(1 - \dfrac{1}{4}) \ldots (1 - \dfrac{1}{n+1}) = \dfrac{1}{n+1}$

15. จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 < \dfrac{n^3}{3}$

16. จงแสดงว่า $\dfrac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

17. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

18. จงแสดงว่า $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(-1)^n n^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$

19. จงแสดงว่า

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{6}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

20. จงแสดงว่า

$$(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(2n-1)(2n)=2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)(2n-1))$$

21. จงแสดงว่า $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

22. จงแสดงว่า

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

23. ให้ p เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า

$$(1\cdot 2\cdot 3\ldots p)+(2\cdot 3\cdot 4\ldots(p+1))+(3\cdot 4\cdot 5\ldots(p+2))+\ldots$$
$$+(n(n+1)\ldots(n+p-1))=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

24. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$
$$=\frac{1}{3}[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}],\quad n\geq 4$$

25. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n}]$$

26. จงแสดงว่า

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})=\frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}]$$

27. จงแสดงว่า $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}}=\frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$

28. จงแสดงว่า $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

29. จงแสดงว่า $1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

30. จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

31. จงแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n\right|_{x=c}=0$ ทุกค่า $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$

32. จงแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x-c)^n]\right|_{x=c}=0$ ทุกค่า $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$

33. จงแสดงว่า $2 \mid n(n+1)$

34. จงแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(n+2)$

35. จงแสดงว่า $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$

36. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก

    จงแสดงว่า $m \mid n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$

37. จงแสดงว่า $3 \mid (n^3-n)$

38. จงแสดงว่า $5 \mid (n^5-n)$

39. จงแสดงว่า $7 \mid (n^7-n)$

40. จงแสดงว่า $11 \mid (n^{11}-n)$

41. จงแสดงว่า $3 \mid n(n^2+2)$

42. จงแสดงว่า $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$

43. จงแสดงว่า $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

44. จงแสดงว่า $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกจำนวนเฉพาะ p และ $r=1, 2, \ldots, p-1$

45. กำหนด p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่า $p \mid n^p - n$

46. จงแสดงว่า $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$

47. จงแสดงว่า $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$

48. จงแสดงว่า $20 \mid (11^{2n} - 1)$

49. จงแสดงว่า $8 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)$

50. จงแสดงว่า $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$

51. จงแสดงว่า $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว

52. จงแสดงว่า $a - b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว

53. จงแสดงว่า $a + b$ หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว

54. k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จงแสดงว่า $\frac{n}{2}(n+1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k)$

55. จงแสดงว่าทุกจำนวนจริง $a \geq 2$; $a^n > n$

56. จงแสดงว่า $3^n \geq 1 + 2n$

57. m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $1 + \frac{n}{m} \leq (1 + \frac{1}{m})^n$

58. ให้ m เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$, $n \leq m$

59. จงแสดงว่า $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$

60. จงแสดงว่า $n! > (\frac{n}{e})^n$

61. จงแสดงว่า $n! < n(\frac{n}{e})^n$, $n \geq 7$

62. จงแสดงว่า $(\frac{n}{e})^n < n! < n(\frac{n}{e})^n$, $n = 7, 8, \ldots$

63. จงแสดงว่า $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

64. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = (n)a_{n-1}$ การแสดงว่า $a_n = n!$

65. กำหนดให้ $a_n = -n\, a_{n-1} + n!$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \begin{cases} n! & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$

66. กำหนดให้ $a_n = 2\, a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

67. กำหนดให้ $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, $a_1 = 3$ จงแสดงว่า $a_n = (2)^{2^n} - 1$

68. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$, $a_0 = 1$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}(n-1)n + 1$

69. กำหนดให้ $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

จงแสดงว่า $a_n = 2^{n+1} - 1$

70. กำหนดให้ $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n(n-3)}$ และ $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_{2n} = \dfrac{1-2n}{(2n)!}$

71. กำหนดให้ $a_1 = \frac{7}{6}$ และ $(2n+1)(2n)a_n - 7a_{n-1} = 0$

จงแสดงว่า $a_n = \dfrac{7^n}{(2n+1)!}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

72. กำหนดให้ $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ และ $na_n + 2a_{n-2} = 0$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

จงแสดงว่า $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

73. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

จงแสดงว่า $a_n = -\frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

74. กำหนดให้ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ และ $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

75. กำหนดให้ $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + n$

จงแสดงว่า $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

76. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$, $a_0 = 3$

จงแสดงว่า $a_n = 2\binom{n+1}{3} + 3$, $n = 2, 3, \ldots$

77. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} - 2$, $a_0 = 0$

จงแสดงว่า $a_n = -3^n + 1$

78. $a_n = a_{n-1} + 3n^2$, $a_0 = 0$

จงแสดงว่า $a_n = 6\binom{n+2}{3} - 3\binom{n+1}{2}$

79. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$

จงแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

80. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 1$

จงแสดงว่า $a_n = 2^n - 1$

81. จงแสดงว่า

$$1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(n-1)) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

82. จงหาผลบวกของ $1+(1+3)+(1+3+5) + \ldots + (1+3+5+\ldots+(1+2(n-1))$

83. จงหาค่าของ $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{77777\ldots7}_{n-\text{terms}}$

84. จงแสดงว่า $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777777\ldots7}_{n-\text{terms}} = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

85. จงหาค่าของ $0.3 + 0.33 + 0.333 + \ldots + \underbrace{0.333333\ldots3}_{n-\text{terms}}$

86. $S_1, S_2, S_3, \ldots$ เป็นลำดับของเซต $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \ldots$

จงหาผลบวกของสมาชิกในเซต S_n

87. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $\sum_{k=1}^{n} a_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

จงแสดงว่า $a_k = k$ ทุกค่า k

88. จงแสดงว่า $2^n < n!$ $n \geq 4$

89. จงแสดงว่า $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$

90. จงแสดงว่า $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$ ทุกค่า $n \in N$

91. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$

92. จงแสดงว่า $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

93. จงแสดงว่า $3 \mid 4^n + 2$ ทุกค่า $n \in N$

94. จงแสดงว่า $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

95. จงแสดงว่า $24 \mid 713(9^{3n-2}) + 15$ ทุกค่า $n \in N$

96. จงแสดงว่า $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

97. กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก

จงแสดงว่า $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m \leq n^{m+1}$ ทุกค่า $n \in N$

98. จงแสดงว่า $9 \mid (2)10^n + (3)10^{n-1} + 4$ ทุกค่า $n \in N$

99. จงแสดงว่า $n^n \geq n!$ ทุกค่า $n \in N$

100. จงแสดงว่า $11 \mid (8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9$ ทุกค่า $n \in N$

101. จงแสดงว่า $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$

102. จงแสดงว่า $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

103. จงแสดงว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

104. จงแสดงว่า $6 \mid n(n^2 + 5)$

105. จงแสดงว่า ห.ร.ม. ของ $(3n + 4, 2n + 3) = 1$ ทุกค่า n

106. จงแสดงว่า $1 + n < 2^n$ ทุกค่า $n \geq 2$

107. จงพิสูจน์ว่า $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ มีสับเซตทั้งหมดเท่ากับ 2^n เซต

108. จงแสดงว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$

109. จงแสดงว่า $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

110. จงแสดงว่า $(x-a)^2 + (x-b)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

111. จงแสดงว่า $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b+c}{3}$

112. จงแสดงว่า $(x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \ldots + (x-a_n)^2$
มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$

113. จงแสดงว่า $n^3 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq 10$

114. จงแสดงว่า $n^4 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq 16$

115. จงแสดงว่า $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า n

116. จงแสดงว่า $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า n

117. กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $m!n! < (m+n)!$ ทุกค่า n

118. จงแสดงว่า $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า n

119. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า n

120. จงแสดงว่า $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ของปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. การแสดงว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{(1)(1+1)}{2} = 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

ดังนั้น
$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k + 1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k + 1)$$
$$= (k + 1)[\frac{k}{2} + 1]$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$
$$= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$

2. การแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{(1)}{6}(1 + 1)(2\,(1) + 1) = 1^2$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 = \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1)$$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)^2$ จะได้

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k + 1)^2 &= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2 \\ &= (k + 1)[\frac{k(2k+1)}{6} + (k + 1)] \\ &= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + k + 6k + 6) \\ &= \frac{(k+1)}{6}(2k^2 + 7k + 6) \\ &= \frac{(k+1)}{6}(2k+ 3)(k + 2) \\ &= \frac{(k+1)}{6}((k + 1) + 1)(2\,(k + 1) + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$; $n \in N$

3. การแสดงว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(\frac{1}{2}(1+1))^2 = 1^3$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = (\frac{k}{2}(k+1))^2$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k+1)^3$ จะได้

$$
\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= (\frac{k}{2}(k+1))^2 + (k+1)^3 \\
&= (k+1)^2[\frac{k^2}{4} + (k+1)] \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4) \\
&= \frac{(k+1)^2}{4}(k+2)^2 \\
&= [\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}]^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n+1))^2 \; ; n \in N$

4. การแสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1 \; ; n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n+1)! - 1$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1(1!) = 1 = (1+1)! - 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + \ldots + k(k!) = (k + 1)! - 1$

เพราะว่า $1(1!) + 2(2!) + \ldots + k(k!) + (k + 1)((k + 1)!)$

$$= [(k + 1)! - 1] + (k + 1)((k + 1)!)$$

$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$$

$$= (k + 2)(k + 1)! - 1$$

$$= [(k + 1) + 1]! - 1$$

ดังนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$ เป็นจริงทุกค่า n

หมายเหตุ การแสดงข้อพิสูจน์โดยการจัดรูปแบบทางพีชคณิต

$1 + 1(1!) = 2!$

$2! + 2(2!) = 3!$

$3! + 3(3!) = 4!$

$4! + 4(4!) = 5!$

$$\begin{aligned}(1 + 1(1!)) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) &= 2 + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!)\\ &= 3! + 3(3!) + \ldots + n(n!)\\ &\;\vdots\\ &= n! + n(n!)\\ &= (n + 1)!\end{aligned}$$

สรุป $1(1!) + 2(2!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

5. กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง ; $n \in N$

การแสดงว่า $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $|x_1| \leq |x_1|$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$

เพราะว่า $|a + b|^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\leq |a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2$$

$$= (|a| + |b|)^2$$

เพราะฉะนั้น $|a + b| \leq |a| + |b|$

ดังนั้น $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{k+1}| = |(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1})|$

$$\leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}|$$

$$\leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}|$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ เป็นจริงทุกค่า n

6. การแสดงว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$, $n = 1, 2, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $(\cos x + i \sin x)^1 = \cos x + i \sin x$

เพราะฉะนั้น P(1) จริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i \sin x)^k = (\cos kx + i \sin kx)$

เพราะว่า $(\cos x + i \sin x)^{k+1}$

$= (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)^k$

$= (\cos x + i \sin x)(\cos kx + i \sin kx)$

$= \cos x\cos kx + i \cos x\sin kx + i \sin x\cos kx - \sin x\sin kx$

$= (\cos x\cos kx - \sin x\sin kx) + i(\cos x\sin kx + \sin x\cos kx)$

$= \cos(x + kx) + i \sin(x + kx)$

$= \cos(k + 1)x + i \sin(k + 1)x$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ กล่าวว่า

ถ้า $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

7. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

การแสดงว่าค่าเฉลี่ยเรขาคณิตน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $0 \le (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$

$$2\sqrt{x}\sqrt{y} \le x + y$$

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a_1a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$ นั้นคือ P(2) เป็นจริง

(2) สมมติ P(n) เป็นจริง เพราะฉะนั้นเราต้องแสดงว่า P(n + 1) เป็นจริง

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ เป็นจำนวนจริงบวก

และ $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} \ge \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$

ให้ $A_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$

และ $A_{n+1} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$

เพราะฉะนั้น $A_{n+1} = \frac{nA_n+a_{n+1}}{n+1}$

เพราะว่า $a_{n+1} \ge A_n$

เพราะฉะนั้นต้องมีจำนวนจริง $b \ge 0$ ที่ทำให้

$$a_{n+1} = A_n + b$$

$$A_{n+1} = \frac{nA_n + A_n + b}{n+1}$$

$$= A_n + \frac{b}{n+1}$$

$$(A_{n+1})^{n+1} = (A_n + \frac{b}{n+1})^{n+1}$$

$$= (A_n)^{n+1} + \binom{n+1}{1}(A_n)^n(\frac{b}{n+1}) + \binom{n+1}{2}(A_n)^{n-1}(\frac{b}{n+1})^2 + (\frac{b}{n+1})^{n+1} + ..$$

$$\ge (A_n)^{n+1} + (n+1)(A_n)^n(\frac{b}{n+1})$$

$$= (A_n)^{n+1} + (A_n)^n b$$

$= (A_n)^n (A_n + b)$

$= (A_n)^n a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^n a_{n+1}$

เพราะว่า P(n) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$

$$A_n \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(A_n)^n \geq a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$(A_n)^n a_{n+1} \geq a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$$

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq a_1 a_2 \ldots a_{n+1}$$

$$A_{n+1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

สรุป P(n + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจริงทุกค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$

8. การแสดงว่า $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(3(1) - 1) = 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริงแล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$$

บวกทั้ง 2 ข้างด้วย (3(k + 1) – 2) จะได้

$$1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1) + (3(k + 1) - 2)$$

$$= \frac{k}{2}(3k - 1) + 3k + 1$$

$$= \frac{3k^2 - k + 6k + 1}{2}$$

$$= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2}$$

$$= \frac{(k+1)}{2}(3k + 2)$$

$$= \frac{(k+1)(3(k+1) - 1)}{2}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$; $n \in N$

9. การแสดงว่า $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{4}(5^1 - 1) = \frac{4}{4} = 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{k-1} = \frac{1}{4}(5^k - 1)$$

บวกด้วย 5^k ทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{k-1} + 5^k &= \frac{1}{4}(5^k - 1) + 5^k \\ &= \frac{1}{4}(5^k - 1 + 4\,5^k) \\ &= \frac{1}{4}(5 \cdot 5^k - 1) \\ &= \frac{1}{4}(5^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$; $n \in N$

10. การแสดงว่า $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $(1)^2(2(1)^2 - 1) = 1 = 1^3$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริงด้วย

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$$

บวกด้วย $(2(k+1) - 1)^3$ ทั้งสองข้างจะได้

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2k-1)^3 + (2(k+1)-1)^3 = k^2(2k^2-1) + (2(k+1)-1)^3$$

$$= k^2(2k^2-1) + (2k+1)^3$$

$$= 2k^4 - k^2 + (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1)$$

$$= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1$$

$$= (2k^4 + 4k^3 + k^2) + (4k^3 + 8k^2 + 2k) + (2k^2 + 4k + 1)$$

$$= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1)$$

$$= (k+1)^2(2(k+1)^2 - 1)$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$; $n \in N$

11. การแสดงว่า $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot2 = 2 = \frac{1}{3}(1)(1+1)(1+2)$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + k(k+1) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$

ดังนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)(\frac{1}{3}k + 1)$$

$$= \frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3)$$
$$= \frac{1}{3}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$; $n \in N$

หมายเหตุ โดยใช้สูตรผลบวก

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$
$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1)$$
$$= \frac{n}{2}(n+1)(\frac{2n+1}{3} + 1)$$
$$= \frac{n}{2}(n+1)(\frac{2n+4}{3})$$
$$= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

12. การแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ จริง

เพราะว่า $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

บวกด้วย $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{k+1}(k+\frac{k}{k+2})$$

$$=\frac{k}{k+1}(\frac{k^2+2k+1}{k+2})$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$; $n\in N$

13. การแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$; $n\in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{(3(1)-2)(3(1)+1)}=\frac{1}{(1)(4)}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$$

บวกทั้งสองข้างด้วย $\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$ จะได้

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$$

$$=\frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$=\frac{1}{3k+1}\quad(k+\frac{1}{3k+4})$$

$$=\frac{1}{3k+1}\quad(\frac{3k^2+4k+1}{3k+4})$$

$$=\frac{1}{3k+1}\quad\frac{(3k+1)(k+1)}{3k+4}$$

$$=\frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$; $n\in N$

14. การแสดงว่า $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}$; $n\in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{k+1})=\frac{1}{k+1}$$

คูณทั้งสองข้างด้วย $(1-\frac{1}{(k+1)+1})$ จะได้

$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{k+1})(1-\frac{1}{(k+1)+1})\\ &=(\frac{1}{k+1})(1-\frac{1}{(k+1)+1})\\ &=(\frac{1}{k+1})(\frac{k+2-1}{(k+1)+1})\\ &=\frac{1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

ดังนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{n+1}$; $n \in N$

15. การแสดงว่า $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2<\frac{n^3}{3}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1-1)^2=0^2=0<\frac{1^3}{3}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}$ ซึ่งจะ

ทำให้ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k-1)^2 + k^2 < \frac{k^3}{3} + k^2$

$$= \frac{k^3 + 3k^2}{3}$$

$$< \frac{k^3 + 3k^2}{3} + k + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{k^3 + 3k^2 + 6k + 3}{3}$$

$$= \frac{(k+1)^3}{3}$$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (k-1)^2 + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}$

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$; $n \in N$

16. การแสดงว่า $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} < 1 = 1^2$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\frac{k^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2$

พิจารณาจากสมการ

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{k^3}{3} + (k+1)^2$

$$= \frac{k^3}{3} + k^2 + 2k + 1$$

$$= \frac{k^3 + 3k^2 + 6k + 3}{3}$$

$$= \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3} + \frac{3k}{3} + \frac{2}{3}$$

$$> \frac{k^3 + 3k^2 + 3k + 1}{3}$$

$$= \frac{(k+1)^3}{3}$$

ดังนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$; $n \in N$

17. การแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$

ดังนั้น

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$; $n \in N$

18. การแสดงว่า $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(-1)^n n^2=(-1)^n\ \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in N$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(-1)^n n^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $-1^2=-1=(-1)^1\frac{(1)(1+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(-1)^2k^2=(-1)^k\ \frac{k(k+1)}{2}$

เพราะว่า $-1^2+2^2-3^2+4^2+\ldots+(-1)^k k^2+(-1)^{k+1}(k+1)^2$

$$=(-1)^k\ \frac{k(k+1)}{2}+(-1)^{k+1}(k+1)^2$$

$$=(-1)^{k+1}[-\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)^2]$$

$$= (-1)^{k+1}\left[\frac{-k^2 - k + 2k^2 + 4k + 2}{2}\right]$$

$$= (-1)^{k+1}\left[\frac{k^2 + 3k + 2}{2}\right]$$

$$= (-1)^{k+1}\ \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$; $n \in N$

19. การแสดงว่า

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{(1)(3+7)}{2(1+1)(1+2)} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} = \frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)}$$

ดังนั้น

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{k+4}{k(k+1)(k+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(3k+7)}{2} + \frac{k+5}{k+3}\right]$$

$$= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(3k+7)(k+3)+2(k+5)}{2(k+3)}\right]$$

$$= \frac{3k^3+16k^2+21k+2k+10}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{3k^3+16k^2+23k+10}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(3k+10)(k^2+2k+1)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(k+1)^2(3k+10)}{2(k+2)(k+3)(k+1)}$$

$$= \frac{(k+1)(3(k+1)+7)}{2(k+2)(k+3)}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

$$\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}\ ;\ n \in N$$

20. การแสดงว่า

$(n+1)(n+2)(n+3)\ \ldots\ (2n-1)(2n) = 2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ (2n-3)(2n-1))$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$(n+1)(n+2)(n+3)\ \ldots\ (2n-1)(2n) = 2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot\ \ldots\ (2n-3)(2n-1))$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(2) = 2^1(1)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $(k+1)(k+2)(k+3) \ldots (2k-1)(2k) = 2^k(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2k-3)(2k-1))$

เพราะว่า $(k+2)(k+3)(k+4) \ldots (2(k+1)-1)(2(k+1))$

$$= (k+2)(k+3)(k+4) \ldots (2k)(2k+1)(2k+2)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\ldots(2k)(2k+1)(2k+2)}{(k+1)}$$

$$= \frac{2^k(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+2)}{(k+1)}$$

$$= 2^{k+1}(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2k-3)(2k-1)(2k+1))$$

สรุป P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

$(n+1)(n+2)(n+3) \ldots (2n-1)(2n) = 2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$

เป็นจริงทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ โดยการจัดรูปแบบพีชคณิต

ให้ $x = (n+1)(n+2)(n+3) \ldots (2n-1)(2n)$

$y = 2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$

เพราะว่า $n!\, x = (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n)\,(n+1)(n+2) \ldots (2n-1)(2n) = (2n)!$

และ $n!\, y = (1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n)(2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$

$$= 2^n\,(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n)(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$$

$$= (2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots 2n)(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$$

$$= (2n)!$$

เพราะฉะนั้น $n!\, x = n!\, y$

สรุป $x = y$

เพราะฉะนั้น $(n+1)(n+2) \ldots (2n) = 2^n(1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$

21. การแสดงว่า $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$; $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot2 = 2 = \dfrac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + k(k+1) = \dfrac{k(k+1)(k+2)}{3}$

เพราะว่า $1\cdot2 + 2\cdot3 + \ldots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= (k+1)(k+2)[\frac{k}{3} + 1]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$; $n \in N$

หมายเหตุ $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \ldots + n(n+1) = \sum\limits_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum\limits_{i=1}^{n}(i^2+1)$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{n}{2}(n+1)$$

$$= n(n+1)[\frac{(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}]$$

$$= n(n+1)\left(\frac{2n+1+3}{6}\right)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

22. การแสดงว่า

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 = \frac{(1)(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

เพราะว่า

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4}+1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\ ;\ n \in N$$

หมายเหตุ $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

$$= \sum_{i=1}^{n}(i^3 + 3i^2 + 2i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= [\frac{n(n+1)}{2}]^2 + 3(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)) + (\frac{n}{2}(n+1))$$

$$= n(n+1)[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{(2n+1)}{2} + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n^2 + n + 4n + 2 + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + 5n + 6)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

23. ให้ p เป็นจำนวนเต็มบวก การแสดงว่า

$$(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p+1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p+2)) + \ldots$$
$$..+ (n(n+1)\ldots(n+p-1)) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p+1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p+2)) + \ldots$$
$$..+ (n(n+1)\ldots(n+p-1)) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot2\cdot3 \ldots p = \frac{(1)(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1)(1+p)}{p+1}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น

$(1\cdot2\cdot3\ldots p)+(2\cdot3\cdot4\ldots(p+1))+(3\cdot4\cdot5\ldots(p+2))+\ldots$

$$..+(k(k+1)\ldots(k+p-1))=\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}$$

เพราะว่า

$(1\cdot2\cdot3\ldots p)+(2\cdot3\cdot4\ldots(p+1))+\ldots+(k(k+1)\ldots(k+p-1))$

$$+((k+1)(k+2)\ldots(k+1+p-1))$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}+((k+1)(k+2)\ldots(k+1+p-1))$$

$$=(k+1)(k+2)\ldots(k+p)[\frac{k}{p+1}+1]$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)(k+p+1)}{p+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(1\cdot2\cdot3\ldots p)+(2\cdot3\cdot4\ldots(p+1))+(3\cdot4\cdot5\ldots(p+2))+\ldots$

$$..+(n(n+1)\ldots(n+p-1))=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

24. การแสดงว่า

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$=\frac{1}{3}[\frac{1}{6}-\frac{1}{(n-2)(n-1)n}],\ n\geq4$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

(1) การแสดงว่า P(4) จริง

เพราะว่า $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(4-2)(4-1)(4)}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{24}\right] = \frac{1}{24} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$

เพราะฉะนั้น P(4) จริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะว่า

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(k-3)(k-2)(k-1)k} + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(k-2)(k-1)k}\right] + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(k-2)(k-1)k} + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{18} - \left[\frac{k+1-3}{3(k-2)(k-1)k(k+1)}\right]$$

$$= \frac{1}{18} - \frac{k-2}{3(k-2)(k-1)k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(k-1)k(k+1)}\right]$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

หมายเหตุ ผลที่ได้คือ $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{18}$

โดยการจัดรูปพีชคณิต

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{\frac{1}{3}}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\frac{1}{3}}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}$$

$$\frac{3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}$$

$$\frac{3}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}$$

$$\vdots$$

$$\frac{3}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

ดังนั้น $\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{3}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$

$$= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

สรุป $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}\right]$$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$
$$= \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\frac{5}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$$
$$= \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$$

และเมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\frac{p}{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p+1)} = \frac{1}{k(k+1)\ldots(k+p)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)\ldots(k+p+1)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}]$$

$$= \frac{1}{4}[\frac{1}{4!} - \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}]$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \ldots + \frac{1}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{5}[\frac{1}{5!} - \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}]$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots p} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot\ldots(p+1)} + \ldots + \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)\ldots n}$$

$$= \frac{1}{p-1}[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)\ldots n}]$$

นอกจากนั้นจะได้ว่า

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{4(4!)}$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{5(5!)}$$

กรณีทั่วไปเมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)(n-p+3)\ldots n} = \frac{1}{(p-1)((p-1)!)}$$

25. การแสดงว่า

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}]\,;\ n \geq 3$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n}\right]$$

(1) การแสดงว่า P(3) จริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(3-1)3}]=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{6}]=\frac{1}{2}[\frac{2}{6}]=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$

เพราะฉะนั้น P(3) จริง

(2) สมมติ P(k) จริง

เพราะว่า $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(k-2)(k-1)k}+\frac{1}{(k-1)(k)(k+1)}$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(k-1)k}]+[\frac{1}{(k-1)(k)(k+1)}]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(k-1)k}+\frac{1}{(k-1)(k)(k+1)}$$

$$=\frac{1}{4}-[\frac{k+1-2}{2(k-1)k(k+1)}]$$

$$=\frac{1}{4}-[\frac{k-1}{2(k-1)(k)(k+1)}]$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2k(k+1)}$$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{k(k+1)}]$$

สรุป P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า ; $n\geq3$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n}]$

หมายเหตุ $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-2)(n-1)n}=\lim_{n\to\infty}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n-1)n})]=\frac{1}{4}$

โดยการจัดรูปพีชคณิต

เพราะว่า $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(\frac{1}{2})}{k(k+1)}-\frac{(\frac{1}{2})}{(k+1)(k+2)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$\frac{2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3}$$

$$\frac{2}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4}$$

$$\frac{2}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}$

สรุป $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}]$

26. การแสดงว่า

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}]$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}]$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{1+1}}}] = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^4}]$

$$= \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^2}][1+\frac{1}{3^2}]$$

$$= \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3}][1+\frac{1}{3}][1+\frac{1}{3^2}]$$

$$= \frac{3}{2}(\frac{2}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})$$

$$= (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})$$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^k}}) = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}}]$

เพราะว่า $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^k}})(1+\frac{1}{3^{2^{k+1}}})$

$$= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}})(1+\frac{1}{3^{2^{k+1}}})$$

$$= \frac{3}{2}[1-(\frac{1}{3^{2^{k+1}}})^2)$$

$$= \frac{3}{2}[1-\frac{1}{(3^{2^{k+1}})^2}]$$

$$= \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{k+2}}}]$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

$$(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}]$$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3}) = (1-\frac{1}{9})$

$$(1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9}) = (1-\frac{1}{81})$$

$$(1-\frac{1}{81})(1+\frac{1}{81}) = (1-\frac{1}{81^2}) = (1-\frac{1}{3^8})$$

เพราะฉะนั้น $(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})$

$$= (1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= (1-\frac{1}{81})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= (1-\frac{1}{3^8})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= \ldots$$

$$= (1-\frac{1}{3^{2^n}})(1+\frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= 1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}$$

สรุป $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}[1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}]$

27. การแสดงว่า

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

$$\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2+2x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2^{1+1}}{1-x^{2^{1+1}}} = \frac{1}{x-1}+\frac{4}{1-x^4}$$

$$= \frac{-(1+x)(1+x^2)+4}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{-1-x^2-x-x^3+4}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{-(x^3+x^2+x-3)}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 3}{(1+x)(1+x^2)}$$

สรุป P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$

เพราะว่า $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$

$$= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}\right) + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$$

$$= \frac{1}{x-1} + 2^{k+1}\left[\frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{1}{1+x^{2^{k+1}}}\right]$$

$$= \frac{1}{x-1} + 2^{k+1}\left[\frac{2}{1-(x^{2^{k+1}})^2}\right]$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{(k+1)+1}}{1-x^{2^{(k+1)+1}}}$$

สรุป P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$

28. การแสดงว่า $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, n = 1, 2, 3,...

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{a(1-r^1)}{1-r} = a$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} = \dfrac{a(1-r^k)}{1-r}$

เพราะว่า $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{k-1} + ar^k = \dfrac{a(1-r^k)}{1-r} + ar^k$

$$= \frac{a(1-r^k) + ar^k(1+r)}{1-r}$$

$$= \frac{a - ar^k + ar^k - ar^{k+1}}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

วิธีที่ 2 $s = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

$$rs = ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^n$$

$$s - rs = a - ar^n$$

$$(1-r)s = a(1-r^n)$$

$$s = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

สรุป $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

29. การแสดงว่า $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1-x^{1+1}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} = 1+x$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1+x+x^2+\ldots+x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$

เพราะว่า $1+x+x^2+\ldots+x^k+x^{k+1} = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}+x^{k+1}$

$$= \frac{1-x^{k+1}+x^{k+1}[1-x]}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{k+1}+x^{k+1}-x^{(k+1)+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{(k+1)+1}}{1-x}$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

หมายเหตุ โดยใช้ผลของ $a+ar+ar^2+\ldots+ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ว่า $1+x+x^2+\ldots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ เหมือนกัน

30. การแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{dx}{dx} = 1 = 1!$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{d^k}{dx^k}(x^k) = k!$

เพราะว่า $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1})$

$$= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}(x^{k+1})\right)$$

$$= \frac{d^k}{dx^k}((k+1)\,x^k)$$

$$= (k+1)\,\frac{d^k}{dx^k}(x^k)$$

$$= (k+1)(k!)$$

$$= (k+1)!$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

1. $\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n = n!$
2. n เป็นจำนวนเต็มบวก

   ถ้า $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}((x-a)^n)$ แล้ว $f^{(k)}(a) = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = n!$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า

$$(x+c)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}c + \binom{n}{2}x^{n-2}c^2 + \ldots + \binom{n}{n}c^n$$

เพราะว่า $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}\right) = 0$, $\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-2}\right) = 0$, … , $\frac{d^n}{dx^n}\left(c^n\right) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x + c)^n = \frac{d^n}{dx^n}\binom{n}{0}x^n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

นอกจากนั้นเรายังได้ว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x - c)^n = n!$ เหมือนกัน

31. การแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}(x - c)^n\right|_{x = c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

ข้อพิสูจน์ เมื่อ $k \in \{1, 2, \ldots, n - 1\}$ จะได้ว่า $k \neq 0, n - k \neq 0$

$$(x - c)^n = (x - c)^k(x - c)^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x - c)^n = (x - c)^k \frac{d^k}{dx^k}(x - c)^{n-k} + (x - c)^{n-k}\frac{d^k}{dx^k}(x - c)^k$$

$$= (x - c)^k \frac{d^k}{dx^k}(x - c)^{n-k} + (x - c)^{n-k}(k!)$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^k}{dx^k}(x - c)^n\right|_{x = c} = (0) + (0)(k!) = 0$

เพราะว่า $\frac{d^0}{dx^0}(x - c)^n = (x - c)^n$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^0}{dx^0}(x-c)^n\right|_{x = c} = 0$

32. การแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x - c)^n]\right|_{x = c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

ข้อพิสูจน์ $k = 0$

$$\frac{d^0}{dx^0}(q(x)(x-c)^n) = q(x)(x-c)^n$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^0}{dx^0}[q(x)(x-c)^n]\right|_{x = c} = 0$

เมื่อ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ เพราะฉะนั้น $k \neq 0, n-k \neq 0$

$$q(x)(x-c)^n = q(x)(x-c)^k(x-c)^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x-c)^n]$$

$$= [q(x)(x-c)^k]\left(\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k}\right)+((x-c)^{n-k})\left[\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^k)\right]$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x-c)^n]\right|_{x=c}$

$$= q(c)\,(0)^k\left[\left(\left.\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k}\right)\right|_{x=c}\right] + [(0)^{n-k}]\left[\left.\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x-c)^k]\right|_{x=c}\right.$$

$= 0 + 0$

$= 0$

33. การแสดงว่า $2 \mid n(n+1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 2 หาร $n(n+1)$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1+1) = 2$ หารด้วย 2 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น 2 หาร $k(k+1)$ ลงตัว

เพราะว่า $(k+1)((k+1)+1) = (k+1)(k+2) = k(k+1) + 2(k+1)$

และ 2 หาร $k(k+1)$ ลงตัว และ 2 หาร $2(k+1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 2 หาร $(k+1)((k+1)+1)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น 2 หาร $n(n + 1)$ ลงตัวทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ การใช้เหตุผลที่ง่ายกว่านี้คือ $n(n + 1)$ เป็นจำนวนคู่เสมอ ดังนั้น 2 หาร $n(n + 1)$ ลงตัวแน่นอนทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

34. การแสดงว่า $3 \mid n(n + 1)(n + 2)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ 3 หาร $n(n + 1)(n + 2)$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1+1)(1+2) = 6$ หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น 3 หาร $k(k + 1)(k + 2)$ ลงตัว

เพราะว่า $(k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)$

$$= (k + 1)(k + 2)(k + 3)$$

$$= k(k + 1)(k + 2) + 3(k + 1)(k + 2)$$

และ 3 หาร $k(k + 1)(k + 2)$ ลงตัว และ 3 หาร $3(k + 1)(k + 2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ ลงตัว

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น 3 หาร $n(n + 1)(n + 2)$ ลงตัวทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

35. การแสดงว่า $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ 4 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1+1)(1+2)(1+3) = (1)(2)(3)(4) = 24$ หารด้วย 4 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น 4 หาร $k(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

จากสมการ $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)((k+1)+3)$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$= k(k+1)(k+2)(k+3) + 4(k+1)(k+2)(k+3)$$

เพราะว่า 4 หาร $k(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

และ 4 หาร $4(k+1)(k+2)(k+3)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 4 หาร $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)((k+1)+3)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น 4 หาร $n(n+1)(n+2)(n+3)$ ลงตัวทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

36. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก

การแสดงว่า $m \mid n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

m หาร $n(n+1)(n+2))\ldots(n+m-1)$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1+1)(1+2)\ldots(1+m+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ หารด้วย m ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)$ หารด้วย m ลงตัว

เพราะว่า $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)\ldots((k+1)+m-1)$

$= (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+m)$

$= (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k-1+m)(k+m)$

$= (k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+m-1)(k+m)$

$= (k+m)(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+m-1)$

$= k(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+m-1)+ m(k+1)(k+2)(k+3)\ldots(k+m-1)$

เพราะว่า m หาร $k(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)$ ลงตัว

และ m หาร $m(k+1)(k+2)\ldots(k+m-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น m หาร $(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)\ldots((k+1)+m-1)$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $m \mid n(n+1)(n+2)\ldots(n-m+1)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

37. การแสดงว่า $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3 \mid (n^3 - n)$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1^3 - 1 = 0$ หารด้วย 3 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ จริง

เพราะฉะนั้น $3 \mid (k^3 - k)$

เพราะว่า $(k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1$

$= (k^3 - k) + 3(k^2 + k)$

และ $3 \mid (k^3 - k)$

เพราะฉะนั้น $3 \mid ((k^3 - k) + 3(k^2 + k))$

นั้นคือ $3 \mid (k^3 - k)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุป $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ 3 หารผลคูณของจำนวนเต็มบวกสามตัวเรียงกันได้เสมอ

เพราะว่า $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n + 1)(n - 1) = (n - 1)\,n(n + 1)$

เพราะฉะนั้น n, $n - 1$ หรือ $n + 1$ ต้องมีตัวใดตัวหนึ่งที่หารด้วย 3 ลงตัว

สรุป $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

38. การแสดงว่า $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $5 \mid (n^5 - n)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1^5 - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $5 \mid (1^5 - 1)$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $5 \mid (k^5 - k)$

เพราะว่า $(k + 1)^5 - (k + 1) = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - k - 1$

$= (k^5 - k) + 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$

เพราะฉะนั้น $5 \mid ((k+1)^5 - (k+1))$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

การแสดงข้อพิสูจน์แบบที่ 2

$$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$$
$$= n(n+1)(n-1)(n^2+1)$$
$$= (n-1)\,n(n+1)(n^2+1)$$

กรณีที่ 1 เมื่อหลักหน่วยของ n เป็น 0, 1, 4, 5, 6 หรือ 9

จะได้ว่า 5 หาร $(n-1)\,n(n+1)$ ลงตัว

ทำให้ 5 หาร $n^5 - n$ ลงตัว

กรณีที่ 2 เมื่อหลักหน่วยของ n เป็น 2, 3, 7 หรือ 8

จะได้ว่าหลักหน่วยของ n^2 เป็น 4 หรือ 9

ดังนั้นหลักหน่วยของ $n^2 + 1$ ต้องเป็น 5 หรือ 0

นั่นคือ 5 หาร $n^2 + 1$ ลงตัว

สรุป $5 \mid n^5 - n$

การแสดงข้อพิสูจน์แบบที่ 3

$$n^5 - n = (n-1)(n+1)(n^2+1)$$

5 หาร n เหลือเศษ $0 \rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

5 หาร n เหลือเศษ $1 \rightarrow 5 \mid (n-1) \rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

5 หาร n เหลือเศษ $2 \rightarrow 5 \mid (n^2+1) \rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

5 หาร n เหลือเศษ $3 \rightarrow 5 \mid (n^2+1) \rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

5 หาร n เหลือเศษ 4 $\rightarrow 5 \mid (n + 1) \rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

สรุป $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

39. การแสดงว่า $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $7 \mid (n^7 - n)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1^7 - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $7 \mid (1^7 - 1)$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $7 \mid (k^7 - k)$

เพราะว่า

$$(k + 1)^7 - (k + 1) = k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1 - k - 1$$

$$= (k^7 - k) + 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$$

เพราะฉะนั้น $7 \mid ((k + 1)^7 - (k + 1))$

นั่นคือ P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

การแสดงข้อพิสูจน์แบบที่ 2

$$n^7 - n = n(n^6 - 1) = n(n^3 - 1)(n^3 + 1)$$

$$= n(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$= (n - 1)\, n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$$

จำแนกกรณีตามเศษเหลือจากการหาร n ด้วย 7

1. 7 หาร n ลงตัว $\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$
2. 7 หาร n เหลือเศษ 1 $\rightarrow 7 \mid (n-1) \rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$
3. 7 หาร n เหลือเศษ 2 $\rightarrow n = 7k + 2,\ k \in I^+$

$$\rightarrow n^2 + n + 1 = 49k^2 + 28k + 4 + 7k + 2 + 1$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^2 + n + 1)$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$$

4. 7 หาร n เหลือเศษ 3 $\rightarrow n = 7k + 3$

$$\rightarrow n^2 - n + 1 = 49k^2 + 42k + 9 - 7k - 3 + 1$$

$$= 49k^2 + 35k + 7$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^2 - n + 1)$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$$

5. 7 หาร n เหลือเศษ 4 $\rightarrow n = 7k + 4$

$$\rightarrow n^2 + n + 1 = 49k^2 + 56k + 16 + 7k + 4 + 1$$

$$= 49k^2 + 63k + 21$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^2 + n + 1)$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$$

6. 7 หาร n เหลือเศษ 5 $\rightarrow n = 7k + 5$

$$\rightarrow n^2 - n + 1 = 49k^2 + 70k + 25 - 7k - 5 + 1$$

$$= 49k^2 + 63k + 21$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^2 - n + 1)$$

$$\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$$

7. 7 หาร n เหลือเศษ 6 $\rightarrow 7 \mid (n+1)$

$\rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

สรุป $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

40. การแสดงว่า $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $11 \mid (n^{11} - n)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1^{11} - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $11 \mid (1^{11} - 1)$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $11 \mid (k^{11} - k)$

เพราะว่า $(k+1)^{11} - (k+1) =$

$$\binom{11}{0}k^{11} + \binom{11}{1}k^{10} + \binom{11}{2}k^{9} + \binom{11}{3}k^{8} + \binom{11}{4}k^{7} + \binom{11}{5}k^{6} + \binom{11}{6}k^{5}$$

$$+ \binom{11}{7}k^{4} + \binom{11}{8}k^{3} + \binom{11}{9}k^{2} + \binom{11}{10}k + \binom{11}{11} - k - 1$$

$$= \binom{11}{0}k^{11} + \binom{11}{1}k^{10} + \binom{11}{2}k^{9} + \binom{11}{3}k^{8} + \binom{11}{4}k^{7} + \binom{11}{5}k^{6} + \binom{11}{6}k^{5}$$

$$+ \binom{11}{7}k^{4} + \binom{11}{8}k^{3} + \binom{11}{9}k^{2} + 10k$$

$$= (k^{11} - k) + [\binom{11}{1}k^{10} + \binom{11}{2}k^{9} + \binom{11}{3}k^{8} + \binom{11}{4}k^{7} + \binom{11}{5}k^{6} + \binom{11}{6}k^{5}$$

$$+ \binom{11}{7}k^{4} + \binom{11}{8}k^{3} + \binom{11}{9}k^{2} + 11k\,]$$

$$= (k^{11} - k) + [11k^{10} + 55k^{9} + 165k^{8} + 330k^{7} + 462k^{6} + 462k^{5} + 330k^{4}$$

$$+ 165k^{3} + 55k^{2} + 11k]$$

เพราะฉะนั้น

$(k + 1)^{11} - (k + 1) = (k^{11} - k) + 11(k^{10} + 5k^9 + \ldots + 5k^2 + k)$

ดังนั้น 11 หาร $(k + 1)^{11} - (k + 1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$

41. การแสดงว่า $3 \mid n(n^2 + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $3 \mid n(n^2 + 2)$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1^2 + 2) = 3$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (1)(1^2 + 2)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $3 \mid k(k^2 + 2)$

เพราะว่า $(k + 1)((k + 1)^2 + 2) = k((k + 1)^2 + 2)+((k + 1)^2 + 2)$

$$= k(k^2 + 2k + 1 + 2) + (k^2 + 2k + 1 + 2)$$

$$= k(k^2 + 2) + k(2k + 1) + (k^2 + 2k + 3)$$

$$= k(k^2 + 2) + 2k^2 + k + k^2 + 2k + 3$$

$$= k(k^2 + 2) + 3k^2 + 3k + 3$$

$$= k(k^2 + 2) + 3(k^2 + k + 1)$$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (k(k^2 + 2) + 3(k^2 + k + 1))$

ดังนั้น $3 \mid (k+1)((k+1)^2+2)$ นั่นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $3 \mid n(n^2+n)$ ทุกค่า $n \in N$

42. การแสดงว่า $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(2(1)-1)((2(1)-1)^2-1) = (1)(0) = 0$

เพราะฉะนั้น $24 \mid (2(1)-1)((2(1)-1)^2-1)$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $24 \mid (2k-1)((2k-1)^2-1)$

$$
\begin{aligned}
(2k-1)((2k-1)^2-1) &= (2k-1)(4k^2-4k) \\
&= 8k^3-8k^2-4k^2+4k \\
&= 8k^3-12k^2+4k \\
&= 4k(2k^2-3k+1) \\
&= 4k(2k-1)(k-1)
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $(2(k+1)-1)((2(k+1)-1)^2-1)$

$$
\begin{aligned}
&= (2k+2-1)((2k+2-1)^2-1) \\
&= (2k+1)((2k+1)^2-1) \\
&= (2k+1)(4k^2+4k+1-1) \\
&= (2k+1)(4k^2+4k)
\end{aligned}
$$

$= 4k(2k + 1)(k + 1)$

$$\begin{aligned} 4k(2k + 1)(k + 1) &= 4k(2k - 1 + 2)(k - 1 + 2) \\ &= 4k[(2k - 1) + 2][(k - 1) + 2] \\ &= 4k[(2k - 1)(k - 1) + 2(2k - 1) + 2(k - 1) + 4] \\ &= 4k(2k - 1)(k - 1) + 4k[4k - 2 + 2k - 2 + 4] \\ &= 4k(2k - 1)(k - 1) + 4k(6k) \\ &= 4k(2k - 1)(k - 1) + 24k^2 \end{aligned}$$

เพราะว่า $24 \mid 4k(2k - 1)(k - 1)$

เพราะฉะนั้น $24 \mid [(2(k+1) - 1)((2(k+1)^2 - 1)]$

นั้นคือ P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $24 \mid (2n - 1)((2n - 1)^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $24 \mid (2n - 1)((2n - 1)^2 - 1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

เทียบเท่ากับ $24 \mid m(m^2 - 1)$ เมื่อ m เป็นเลขคี่ , $m = 1, 2, 3, \dots$

43. การแสดงว่า $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $6 \mid n(n+1)(2n+1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1)(1 + 1)(2(1) + 1) = 6$ และ $6 \mid 6$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $6 \mid k(k + 1)(2k + 1)$

เพราะว่า $(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)$

$$= (k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= (k^2+3k+2)(2k+3)$$

$$= 2k^3+3k^2+6k^2+9k+4k+6$$

$$= 2k^3+9k^2+13k+6$$

$$= (2k^3+3k^2+k)+6k^2+12k+6$$

$$= k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2$$

เพราะฉะนั้น $6 \mid (k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ ทุกค่า $n \in N$

44. การแสดงว่า $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกจำนวนเฉพาะ p และ $r = 1, 2, \ldots, p-1$

ข้อพิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ

$$\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(p-1)\cdot p!}{(p-r)!} \quad \text{เป็นจำนวนเต็ม}$$

เพราะว่า $r \neq 0$ และ $r \neq p$ เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเต็มใดในตัวประกอบของ $(p-r)!$ ที่จะไปหาร p ได้ลงตัว

เพราะฉะนั้น p หาร $\binom{p}{r}$ ลงตัวเสมอ

45. กำหนด p เป็นจำนวนเฉพาะ

การแสดงว่า $p \mid n^p - n$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

ข้อพิสูจน์ ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ $P(n)$ แทนข้อความ $p \mid n^p - n$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1^p - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $p \mid 1^p - 1$ เสมอ

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $k \mid k^p - k$

เพราะว่า $(k+1)^p - (k+1) = \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} k^{p-r} - k - 1$

$$= k^p + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r} + 1 - k - 1$$

$$= (k^p - k) + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r}$$

และ $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกค่า $r = 1, 2, 3, \dots, p-1$

เพราะฉะนั้น $p \mid ((k^p - k) + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r}$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $p \mid n^p - n$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ ทฤษฎีบท Fermat Theorem กล่าวว่า $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

อ่านว่า **a^{p-1} ลงรอยกับ 1 มอดุโล p** เมื่อ ห.ร.ม. ของ a และ p เป็น 1

เพราะฉะนั้น p หาร $a^{p-1} - 1$ ลงตัว

ผลที่ได้ตามมาคือ p หาร $a(a^{p-1} - 1)$ ลงตัว

46. การแสดงว่า $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $35 \mid (3^{6n} - 2^{6n})$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3^{6(1)} - 2^{6(1)} = 3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665 = (19)(35)$

เพราะฉะนั้น $35 \mid (3^{6(1)} - 2^{6(1)})$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $35 \mid (3^{6k} - 2^{6k})$ ดังนั้น $3^{6k} - 2^{6k} = m(35)$, $m \in I$

เพราะว่า $3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)} = 3^{6k}\,3^6 - 2^{6k}\,2^6$

$$= 3^{6k}\,3^6 - 3^6\,2^{6k} - 2^{6k}\,2^6 + 3^6\,2^{6k}$$

$$= 3^6(3^{6k} - 2^{6k}) - 2^{6k}(2^6 - 3^6)$$

$$= 3^6(3^{6k} - 2^{6k}) + 2^{6k}(665)$$

$$= 35[3^6 m + 2^{6k}(19)]$$

ดังนั้น $35 \mid (3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)})$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $35 \mid 3^{6n} - 2^{6n}$ ทุกค่า $n \in N$

47. การแสดงว่า $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2^{4(1)+1} - 2 = 30$

เพราะฉะนั้น $30 \mid (2^{4(1)+1} - 2)$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $30 \mid (2^{4k+1} - 2)$

เพราะว่า $2^{4(k+1)+1} - 2 = 2^{4k+1+4} - 2$

$= 2^{4k+1}2^4 - 2$

$= 2^4(2^{4k+1} - 2) + 2^4(2) - 2$

$= 16(2^{4k+1} - 2) + 30$

เพราะฉะนั้น $30 \mid (16(2^{4k+1} - 2) + 30)$

ดังนั้น $30 \mid (2^{4(k+1)+1} - 2)$ นั้นคือ P(k + 1) จริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$ ทุกค่า $n \in N$

48. การแสดงว่า $20 \mid (11^{2n} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $20 \mid (11^{2n} - 1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $11^{2(1)} - 1 = 11^2 - 1 = 121 - 1 = 120$ หารด้วย 20 ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $20 \mid (11^{2k} - 1)$ หรือ $11^{2k} - 1 = 20(m), m \in I$

เพราะว่า $11^{2(k+1)} - 1 = 11^{2k+2} - 1$

$= 11^{2k}\, 11^2 - 1$

$= 11^2(11^{2k} - 1) + 11^2 - 1$

$= (121)(11^{2k} - 1) + 120$

$= (121)(20m) + 120$

เพราะฉะนั้น $20 \mid (11^{2(k+1)} - 1)$ ดังนั้น P(k+1) จริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $20 \mid (11^{2n} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

49. การแสดงว่า $8 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $8 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(0)(1)(1+1)(1+2) = 0$ หารด้วย 8 ลงตัว

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $8 \mid (k-1)k(k+1)(k+2)$

ดังนั้น $(k-1)k(k+1)(k+2) = 8m$ m เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$

$= k(k+1)(k+2)(k+3)$

$= k(k+1)(k+2)(k-1+4)$

$= [k(k+1)(k+2)(k-1)] + 4k(k+1)(k+2)$

และ $2 \mid k(k+1)(k+2)$

ดังนั้น $k(k+1)(k+2) = 2p$ p เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $((k+1)-1)(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)$

$= 8m + 8p$ ซึ่งหารด้วย 8 ลงตัว

ดังนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $8 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $8 \mid (n-1)n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$ หมายความว่าผลคูณของจำนวนเต็มบวก 4 ตัวที่เรียงกันต้องหารด้วย 8 ลงตัว

50. การแสดงว่า $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $120 \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1^5 - 5(1^3) + 4(1) = 1 - 5 + 4 = 0$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $120 \mid (k^5 - 5k^3 + 4k)$

นั่นคือ $k^5 - 5k^3 + 4k = 120m$, $m \in I^+$

เพราะว่า $(k+1)^5 - 5(k+1)^3 + 4(k+1)$

$= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1 - 5(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 4k + 4$

$= (k^5 - 5k^3 + 4k) + 5[k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k - 3k^2 - 3k]$

$= 120m + 5[k^4 + 2k^3 - k^2 - 2k]$

$= 120m + 5k(k^3 + 2k^2 - k - 2)$

$= 120m + 5k(k+1)(k-1)(k+2)$

เพราะว่า $(k-1)k(k+1)(k+2)$

เป็นจำนวนเต็มที่มีค่าเรียงกัน 4 ตัว

ดังนั้น $4!$ หาร $(k-1)k(k+1)(k+2)$ ลงตัว

มีผลทำให้ได้ว่า $5!$ หาร $5(k-1)k(k+1)(k+2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 120 หาร $120m + 5(k-1)k(k+1)(k+2)$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $120 \mid n^5 - 5n^3 + 4n$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ การแสดงว่า $5!$ หาร $n^5 - 5n^3 + 4n$ ลงตัวทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

ข้อพิสูจน์ แบบที่ 2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ

ให้ $f(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$

เพราะว่า $f(0) = 0, f(1) = 0, f(-1) = 0, f(-2) = 0, f(2) = 0$

เพราะฉะนั้น $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

เพราะว่า $5 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

$8 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

$3 \mid n(n+1)(n+2)$

และ 5, 8, 3 ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $(5)(8)(3) \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

สรุป $120 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

นั้นคือ $5! \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ ทุกค่า $n \in N$

51. การแสดงว่า $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^2 - b^2$ ลงตัว

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $a + b$ หาร $a^{2k} - b^{2k}$ ลงตัว

เพราะว่า $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} = a^2 a^{2k} - b^2 b^{2k}$

$$= a^2 a^{2k} - a^2 b^{2k} + a^2 b^{2k} - b^2 b^{2k}$$

$$= a^2(a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k}(a^2 - b^2)$$

และ $a + b$ หาร $a^{2k} - b^{2k}$ ลงตัว , $a + b$ หาร $(a^2 - b^2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)}$ ลงตัว

ดังนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$$

เมื่อ n เป็นเลขคู่

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2} b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$$

เราสามารถแสดงได้ใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิต เมื่อ

พจน์แรก $= a^{n-1}$ อัตราส่วนร่วม $= -\frac{b}{a}$

ดังนั้น $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}$

$$= \frac{(a^{n-1})[1-(-\frac{b}{a})^n]}{1-(-\frac{b}{a})} \qquad (\because n \text{ เป็นเลขคู่ } \therefore (-\frac{b}{a})^n = \frac{b^n}{a^n})$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a+b}$$

52. การแสดงว่า $a-b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $a-b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $a-b$ หาร $a-b$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $a-b$ หาร $a^k - b^k$ ลงตัว

เพราะว่า $a^{k+1} - b^{k+1} = a\ a^k - b^k b$

$$= a\,a^k - a\,b^k + a\,b^k - b^k b$$

$$= a(a^k - b^k) + b^k(a-b)$$

และ $a-b$ หาร $a^k - b^k$, $a-b$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $a-b$ หาร $a^{k+1} - b^{k+1}$ ลงตัว

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a-b$ หาร $a^n - b^n$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ 1. $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$

2. โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตจะได้ว่า

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1} = \frac{a^{n-1}(1-(\frac{b}{a})^n)}{1-(\frac{b}{a})}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a-b}$$

53. การแสดงว่า $a + b$ หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a + b$ หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1} = a + b$

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $a + b$ หาร $a^{2k-1} + b^{2k-1}$ ลงตัว

เพราะว่า $a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} = a^{2k+1} + b^{2k+1}$

$$= a^2 a^{2k-1} + b^2 b^{2k-1}$$

$$= a^2 a^{2k-1} + a^2 b^{2k-1} - a^2 b^{2k-1} + b^2 b^{2k-1}$$

$$= a^2(a^{2k-1} + b^{2k-1}) - b^{2k-1}(a^2 - b^2)$$

และ $a + b$ หาร $a^2 - b^2$ ลงตัว , $a + b$ หาร $a^{2k-1} + b^{2k-1}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1}$ ลงตัว

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a + b$ หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

$$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$$

เพราะว่า $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \ldots + b^{n-1}$

เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น a^{n-1}, อัตราส่วนร่วมเป็น $(-\frac{b}{a})$

เพราะฉะนั้น $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}$

$$= \frac{(a^{n-1})(1-(-\frac{b}{a})^n)}{1-(-\frac{b}{a})} \qquad (\because \text{ n เป็นเลขคี่ } \therefore (-\frac{b}{a})^n = -\frac{b^n}{a^n})$$

$$= \frac{a^n + b^n}{a+b}$$

54. การแสดงว่า $\frac{n}{2}(n + 1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k)$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

ข้อพิสูจน์ ให้ $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k$, k เป็นเลขคี่

กรณีที่ 1 n เป็นเลขคู่

$$S_k = [1^k + n^k] + [2^k + (n-1)^k] + [3^k + (n-2)^k] + \ldots + [(\frac{n}{2})^k + (\frac{n}{2} + 1)^k]$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^k + b^k)$ เมื่อ k เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $(1 + n) \mid (1^k + n^k)$

$$(2 + (1 - 1)) \mid (2^k + (n - 1)^k)$$

$$(3 + (n - 2)) \mid (3^k + (n - 2)^k)$$

$$\left(\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right) \,\middle|\, \left(\frac{n}{2}\right) + \left(\frac{n}{2} + 1\right)^k$$

นั่นคือ $(1 + n) \mid (1^k + n^k)$

$$(1 + n) \mid (2^k + (n - 1)^k)$$

$$\vdots$$

$$(1 + n) \mid (\frac{n}{2})^k + (\frac{n}{2} + 1)^k$$

สรุป $(1 + n) \mid (1^k + n^k) + (2^k + (n - 1)^k) + \ldots + ((\frac{n}{2})^k + (\frac{n}{2} + 1)^k)$

เพราะฉะนั้น $(1 + n) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k)$

เพราะว่า $S_k = [1^k + (n - 1)^k] + [2^k + (n - 2)^k] + [3^k + (n - 3)^k] +$

$$\ldots + [(\frac{n}{2} - 1)^k + (\frac{n}{2} + 1)^k] + (\frac{n}{2})^k + n^k$$

และ $(1 + (n - 1)) \mid (1^k + (n - 1)^k)$

$$(2 + (n - 2)) \mid (2^k + (n - 2)^k)$$

$$(3 + (n - 3)) \mid (3^k + (n - 3)^k)$$

$$\vdots$$

$$((\frac{n}{2} - 1) + (\frac{n}{2} + 1) \mid ((\frac{n}{2} - 1) + (\frac{n}{2} + 1)^k)$$

$$\frac{n}{2} \mid (\frac{n}{2})^k$$

$(\frac{n}{2}) \mid n^k$ $\quad$ ($\because$ n เป็นเลขคู่)

เพราะฉะนั้น $n \mid (1^k + (n - 1)^k)$

$$n \mid (2^k + (n - 2)^k)$$

$$n \mid (3^k + (n - 3)^k)$$

$$\vdots$$

$$n \mid ((\frac{n}{2} - 1)^k + (\frac{n}{2} + 1)^k)$$

$$\frac{n}{2} \mid (\frac{n}{2})^k$$
$$\frac{n}{2} \mid n^k$$

และ
$$\frac{n}{2} \mid (1^k + (n-1)^k)$$
$$\frac{n}{2} \mid (2^k + (n-2)^k)$$
$$\vdots$$
$$\frac{n}{2} \mid (\frac{n}{2} - 1)^k + (\frac{n}{2} + 1)^k$$
$$\frac{n}{2} \mid (\frac{n}{2})^k$$
$$\frac{n}{2} \mid n^k$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{n}{2} \mid (1^k + (n-1)^k) + (2^k + (n-2)^k) + (3^k + (n-3)^k) + (\frac{n}{2} - 1)^k + (\frac{n}{2} + 1)^k + (\frac{n}{2})^k + n^k$$

$$\frac{n}{2} \mid 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$$

ขณะนี้เราได้ว่า $(n+1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$

และ $\frac{n}{2} \mid (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$

เพราะว่า $n + 1$ และ $\frac{n}{2}$ ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}(n+1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k)$

หมายเหตุ จากหนังสือ ค. 011 หน้า

เพราะว่า $(-2)(\frac{n}{2}) + (1)(n+1) = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}, n + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ดังนั้น $\frac{n}{2}$, $n+1$ ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$$

$$= (1^k + n^k) + (2^k + (n-1)^k) + (3^k + (n-2)^k) + \ldots.$$

$$\ldots + (\frac{n-1}{2})^k + (\frac{n+3}{2})^k + (\frac{n+1}{2})^k$$

เพราะว่า $(1 + n) \mid (1^k + n^k)$

$$(1+n) = (2 + (n-1) \mid (2^k + (n-1)^k)$$

$$(1+n) = (3 + (n-2) \mid (3^k + (n-2)^k)$$

$$\vdots$$

$$(1+n) = (\frac{n-1}{2}) + (\frac{n+3}{2})) \mid (\frac{n-1}{2})^k + (\frac{n+3}{2})^k$$

$$(1+n) \mid (\frac{n+1}{2})^k$$

เพราะฉะนั้น $(1 + n) \mid S_k$

เพราะว่า $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$

$$= (1^k + (n-1)^k) + (2^k + (n-2)^k) + (3^k + (n-3)^k) + \ldots$$

$$\ldots + [(\frac{n-1}{2})^k + (\frac{n+1}{2})^k] + n^k$$

และ $(n = (1 + (n-1)) \mid (1^k + (n-1)^k)$

$$(n = (2 + (n-2)) \mid (2^k + (n-2)^k)$$

$$(n = (3 + (n-3)) \mid (3^k + (n-3)^k)$$

$$\vdots$$

$$(n = (\frac{n-1}{2}) + (\frac{n+1}{2})) \mid (\frac{n-1}{2})^k + (\frac{n+1}{2})^k$$

$$n \mid n^k$$

เพราะฉะนั้น $n \mid S_k$

เพราะว่า $(\frac{n+1}{2})$, n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

ดังนั้น $\frac{n+1}{2}$, n ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $\frac{(n+1)}{2}n \mid S_k$

สรุปจากกรณี 1 และ 2 จะได้ว่า $(\frac{n}{2}(n+1)) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k)$

55. การแสดงว่า ทุกจำนวนจริง $a \geq 2$; $a^n > n$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ กำหนด $a \geq 2$ และ P(n) แทนข้อความ $a^n > n$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a \geq 2$

เพราะฉะนั้น $a^1 \geq 1$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $a^k > k$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k a \\ &> ka \\ &\geq k(2) && (\because a \geq 2) \\ &= k(1+1) \\ &> k(1+\frac{1}{k}) && (\because k \geq 1, 1 \geq \frac{1}{k}) \\ &= k+1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a^{k+1} > k+1$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น ทุกจำนวนจริง $a \geq 2$ $a^n > n$ ทุกค่า $n \in N$

56. จงแสดงว่า $3^n \geq 1 + 2n$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $3^n \geq 1 + 2n$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3^1 = 3 \geq 1 + 2(1)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $3^k \geq 1 + 2k$

จากสมการ

$$
\begin{aligned}
3^{k+1} &= 3^k 3 \\
&\geq (1 + 2k)(3) \\
&= 3 + 6k \\
&> 3 + 2k \qquad (\because 6k > 2k) \\
&= 3 + 2k \\
&= 1 + 2k + 2 \\
&= 1 + 2(k+1)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $3^{k+1} \geq 1 + 2(k+1)$

ดังนั้น P(k+ 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้นสรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$3^n \geq 1 + 2n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$ ทุกค่า $n \in N$

57. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก

การแสดงว่า $1 + \frac{n}{m} \leq (1 + \frac{1}{m})^n$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + \frac{n}{m} \leq (1 + \frac{1}{m})^n$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1 + \frac{1}{m} \leq (1 + \frac{1}{m})^1$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{m})^k \geq 1 + \frac{k}{m}$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}(1 + \frac{1}{m})^{k+1} &= (1 + \frac{1}{m})(1 + \frac{1}{m})^k \\ &\geq (1 + \frac{1}{m})(1 + \frac{k}{m}) \\ &= 1 + \frac{k}{m} + \frac{1}{m} + \frac{k}{m^2} \\ &= 1 + \frac{k+1}{m} + \frac{k}{m^2} \\ &> 1 + \frac{k+1}{m}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1 + \frac{k+1}{m} < (1 + \frac{1}{m})^{k+1}$

นั้นคือ $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

สรุป $1 + \frac{n}{m} < (1 + \frac{1}{m})^n$ ทุกค่า $n \in N$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ การแสดงว่า $(1 + \frac{n}{m}) < (1 + \frac{1}{m})^n$

สามารถใช้กระจายทวินามในการแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ จากสูตร

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + b^n$$

ดังนั้น

$$(1+\frac{1}{m})^n = 1+\binom{n}{1}(\frac{1}{m})^1+\binom{n}{2}(\frac{1}{m})^2+\dots+(\frac{1}{m})^n$$

$$> 1+\binom{n}{1}(\frac{1}{m})$$

$$= 1+\frac{n}{m}$$

สรุป $(1+\frac{1}{m})^n > 1+\frac{n}{m}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \dots,$ และ $m > 0$

58. ให้ m เป็นจำนวนจริงบวก

การแสดงว่า $(1+\frac{1}{m})^n < 1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}$, $n \le m$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(1+\frac{1}{m})^n < 1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ จริง

เพราะว่า $(1+\frac{1}{m})^1 = 1+\frac{1}{m} < 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $(1+\frac{1}{m})^k < 1+\frac{k}{m}+\frac{k^2}{m^2}$

$$(1+\frac{1}{m})^{k+1} = (1+\frac{1}{m})(1+\frac{1}{m})^k$$

$$< (1+\frac{1}{m})(1+\frac{k}{m}+\frac{k^2}{m^2})$$

$$= 1+\frac{k}{m}+\frac{k^2}{m^2}+\frac{1}{m}+\frac{k}{m^2}+\frac{k^2}{m^3}$$

$$= 1+\frac{k+1}{m}+\frac{k^2+k}{m^2}+\frac{k^2}{m^3}$$

เพราะว่า $k \leq m$

เพราะฉะนั้น $k^2 \leq (k+1)m$

และ $\frac{k^2}{m} \leq (k+1)$

เพราะฉะนั้น $\frac{k^2}{m^3} \leq \frac{(k+1)}{m^2}$

$$
\begin{aligned}
(1+\frac{1}{m})^{k+1} &= 1+\frac{k+1}{m}+\frac{k^2+k}{m^2}+\frac{k^2}{m^3} \\
&\leq 1+\frac{k+1}{m}+\frac{k^2+k}{m^2}+\frac{k+1}{m^2} \\
&\leq 1+\frac{k+1}{m}+\frac{k^2+2k+1}{m^2} \\
&\leq 1+\frac{k+1}{m}+\frac{(k+1)^2}{m^2}
\end{aligned}
$$

$$(1+\frac{1}{m})^{k+1} \leq 1+\frac{k+1}{m}+\frac{(k+1)^2}{m^2}$$

ดังนั้น $(1+\frac{1}{m})^{k+1} < 1+\frac{k+1}{m}+\frac{(k+1)^2}{m^2}$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(1+\frac{1}{m})^n < 1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า $n \in N$ และ $n \leq m$

59. การแสดงว่า $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq 3$ ทุกค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $1+\frac{n}{m} \leq ((1+\frac{1}{m})^n$ และ

$(1+\frac{1}{m})^n < 1+\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $n \leq m$

แทนค่า $n = m$ จะได้

$$1 + \frac{n}{n} \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{m^2}$$

$$2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 1 + 1 + 1$$

$$2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 3$$

หมายเหตุ $n = 2, 3, 4, \ldots$ จะได้ $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

นอกจากนั้น $2 < \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

และเมื่อหาค่าลิมิตแท้จริงจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.71828$

60. การแสดงว่า $n! > (\frac{n}{e})^n$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n! > (\frac{n}{e})^n$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็น จริง

เพราะว่า $1 > \frac{1}{e} = (\frac{1}{e})^1$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพระฉะนั้น $k! > (\frac{k}{e})^k$

เพราะว่า $(1 + \frac{1}{k+1})^{k+1} > (1 + \frac{1}{k})^k$

และ $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$

เพราะฉะนั้น $e > (1 + \frac{1}{k})^k$

$$\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k} > 1$$

เพราะว่า $(k+1)! = (k+1)k!$

$$> (k+1)(\frac{k}{e})^k$$

$$= (\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{k^k e}{(k+1)^k})$$

$$= (\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k})$$

$$> (\frac{k+1}{e})^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(\frac{n}{e})^n < n!$ ทุกค่า $n \in N$

61.การแสดงว่า $n! < n(\frac{n}{e})^n, \quad n \geq 7$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n! < n(\frac{n}{e})^n$

(1) การแสดงว่า $P(7)$ เป็น จริง

เพราะว่า $\ln(6!) = \ln(720) = 6.58$

$$\ln(\frac{7}{e})^7 = 7(\ln 7 - \ln e) = 7(\ln 7 - 1) = 6.62$$

เพราะฉะนั้น $\ln(6!) < \ln(\frac{7}{e})^7$

$$6! < (\frac{7}{e})^7$$

$$7! < 7(\frac{7}{e})^7$$

สรุป $P(7)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^{n}$ และ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e$

เพราะฉะนั้น $(1+\frac{1}{n})^{n+1} > e$

และ $\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} < 1$

$$
\begin{aligned}
(k+1)! &= (k+1)(k!) \\
&< (k+1)(k(\frac{k}{e})^{k}) \\
&= (k+1)\frac{(k+1)^{k+1}k^{k+1}e}{e^{k+1}(k+1)^{k+1}} \\
&= (k+1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}\frac{k^{k+1}e}{(k+1)^{k+1}} \\
&= (k+1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^{k+1}}) \\
&< (k+1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $n! < n(\frac{n}{e})^{n},\ n \geq 7$

62. การแสดงว่า $(\frac{n}{e})^{n} < n! < n(\frac{n}{e})^{n},\ n = 7, 8, \ldots$

ข้อพิสูจน์ จากข้อ 60. $n! > (\frac{n}{e})^{n}$

จากข้อ 61. $n! < n(\frac{n}{e})^{n},\ n \geq 7$

เพระฉะนั้น $(\frac{n}{e})^{n} < n! < n(\frac{n}{e})^{n},\ n = 7, 8, \ldots$

63. การแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{3(2)+1}} = \frac{1}{\sqrt{7}} = 0.38$ และ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8} = 0.375$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{3(2)+1}}$

ดังนั้น P(2) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2k-1)}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$

และ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2k-1)}{2k}\cdot\frac{2(k+1)+1)}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot(\frac{2(k+1)+1}{2(k+1)})$

$$= \frac{2k+3}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}$$

เพราะว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2k-1)}{2k}\cdot\frac{(2k+1)}{2(k+1)} < \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}$

และ $[\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}]^2 = \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2(3k+1)}$

$$= \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4}$$

$$= \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+4}$$

$$= \frac{1}{(3k+4)+4}$$

$$< \frac{1}{3k+4}$$

$$= \frac{1}{3(k+1)+1}$$

เพราะฉะนั้น $\quad \dfrac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$

สรุป $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot \ldots \dfrac{(2k-1)}{2k}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+2} < \dfrac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot \ldots \dfrac{(2n-1)}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เพราะว่า $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3(1)+1}}$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot \ldots \dfrac{(2n-1)}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า $n \in N$

64. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = (n)a_{n-1}$ การแสดงว่า $a_n = n!$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\quad a_n = n!$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 1 = 1!$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\quad a_k = k!$

เพราะว่า $\quad a_{k+1} = (k+1)\,a_{(k+1)-1} = (k+1)\,a_k$

$\qquad\qquad = (k+1)k!$

$\qquad\qquad = (k+1)!$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = n!$ ทุกค่า $n \in N$

65. กำหนดให้ $a_n = -n\,a_{n-1} + n!$, $a_0 = 1$ การแสดงว่า $a_n = \begin{cases} n! & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_{2n} = (2n)!$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (-1)a_0 + 1 = 0$

เพราะว่า $a_2 = -2a_1 + 2! = 2$

เพราะฉะนั้น $a_2 = 2!$ เป็นจริง

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $a_{2k} = (2k)!$

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2}$$

$$a_{2k+1} = -(2k+1)a_{2k} + (2k+1)!$$

$$= -(2k+1)(2k)! + (2k+1)!$$

$$= 0$$

$$a_{2k+1} = -(2k+2)a_{2k+1} + (2k+2)!$$

$$= (2k+2)!$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = (2n)!$ ทุกค่า $n \in N$

เพราะว่า $a_{2n+1} = -(2n+1)a_{2n} + (2n+1)!$

$$= -(2n+1)(2n)! + (2n+1)! = 0$$

เพราะฉะนั้น $a_{2n+1} = 0$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

สรุป $a_n = \begin{cases} n! & , n = 2, 4, 6, \ldots \\ 0 & , n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$

66. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$

การแสดงว่า $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2a_0 + (-1)^1 = 2(2) - 1 = 3 = \frac{5}{3}(2^1) + \frac{1}{3}(-1)^1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $a_k = \frac{5}{3}(2^k) + \frac{1}{3}(-1)^k$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + (-1)^{k+1} \\
&= 2\left(\frac{5}{3}(2^k) + \frac{1}{3}(-1)^k\right) + (-1)^{k+1} \\
&= \frac{5}{3}(2^{k+1}) + \frac{2}{3}(-1)^k + (-1)^{k+1} \\
&= \frac{5}{3}(2^{k+1}) - \frac{2}{3}(-1)(-1)^k + (-1)^{k+1} \\
&= \frac{5}{3}(2^{k+1}) - \frac{2}{3}(-1)^{k+1} + (-1)^{k+1} \\
&= \frac{5}{3}(2^{k+1}) + \frac{1}{3}(-1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$ ทุกค่า $n \in N$

67. กำหนดให้ $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, $a_1 = 3$

การแสดงว่า $a_n = (2)^{2^n} - 1$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a^n = (2)^{2^n} - 1$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(2)^{2^1} - 1 = 4 - 1 = 3 = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $a_k = (2)^{2^k} - 1$

เพราะว่า $a_{k+1} = a_k(a_k + 2)$

$= (a_k)^2 + 2a_k$

$= ((2)^{2^k} - 1)^2 + 2(2)^{2^k} - 1$

$= (2)^{2^k}(2)^{2^k} - 2(2)^{2^k} + 1 + (2)^{2^k+1} - 2$

$= (2)^{2^{k+1}} - 1$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = (2)^{2^n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$

68. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$, $a_0 = 1$

การแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}(n-1)n + 1$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \frac{3}{2}(n-1)n + 1$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = a_0 + 3(1-1) = a_0 = 1$ และ $\frac{3}{2}(1-1)(1) + ! = 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{3}{2}(k-1)k + 1$

เพราะว่า $a_{k+1} = a_{(k+1)-1} + 3((k+1)-1)$

$$= a_k + 3k$$

$$= \frac{3}{2}(k-1)k + 1 + 3k$$

$$= \frac{3}{2}(k-1)k + 3k + 1$$

$$= 3k(\frac{k-1}{2} + 1) + 1$$

$$= 3k(\frac{k+1}{2}) + 1$$

$$= \frac{3}{2}k(k+1) + 1$$

$$= \frac{3}{2}[(k+1)-1](k+1) + 1$$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{3}{2}(n-1)n + 1$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $a_n = \frac{3}{2}(n-1)n + 1$

$$= \frac{3}{2}\frac{(n-2)!(n-1)n}{(n-2)!} + 1$$

$$= 3(\frac{n!}{2!(n-2)!}) + 1$$

$$= 3\binom{n}{2} + 1$$

หมายเหตุ แนวคิดในการหาสูตร a_n เมื่อ $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$

$a_1 = a_0 + 3(0)$

$a_2 = a_1 + 3(1)$

$a_3 = a_2 + 3(2)$

$\vdots$

$$a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1} + 3(0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1))$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) \\ &= 1 + 3(\frac{n-1}{2}(1 + (n-1))) \\ &= 1 + 3\frac{(n-1)n}{2} \\ &= 1 + 3\binom{n}{2} \end{aligned}$$

69. กำหนดให้ $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

การแสดงว่า $a_n = 2^{n+1} - 1$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = 2^{n+1} - 1$

(1) การแสดงว่า P(3) เป็นจริง

เพราะว่า $3a_2 - 2a_1 = 3(7) - 2(3) = 15 = 2^4 - 1 = a_3$

เพราะฉะนั้น P(3) เป็นจริง

(2) สมมติ P(i) เป็นจริง ทุกค่า i. , $i = 1, 2, 3, \ldots, k$

เพราะฉะนั้น $a_k = 2^{n+1} - 1$

เพราะว่า $a_{k+1} = 3a_{(k+1)-1} - 2a_{(k+1)-2}$

$$\begin{aligned} &= 3a_k - 2a_{k-1} \\ &= 3(2^{k+1} - 1) - 2(2^{k-1+1} - 1) \\ &= 3(2 \cdot 2^k - 1) - 2(2^k - 1) \\ &= 6 \cdot 2^k - 3 - 2 \cdot 2^k + 2 \\ &= 4 \cdot 2^k - 1 \\ &= 2^2 \cdot 2^k - 1 \end{aligned}$$

$= 2^{k+2} - 1$

$= 2^{(k+1)+1} - 1$

ดังนั้น $a_{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = 2^{n+1} - 1$ ทุกค่า $n \in N$

70. กำหนดให้ $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{n(n-3)}$ และ $a_0 = 1$

การแสดงว่า $a_{2n} = \dfrac{1-2n}{(2n)!}$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_{2n} = \dfrac{1-2n}{(2n)!}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_2 = \dfrac{a_0}{(1)(1-3)} = \dfrac{1}{-2}$ และ $\dfrac{1-2(1)}{(2(1))!} = \dfrac{-1}{2}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_{2k} = \dfrac{1-2k}{(2k)!}$

เพราะว่า $a_{2(k+1)} = a_{2k+2}$

$$= \frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+2-3)}$$

$$= \frac{1}{(2k+2)(2k+2-3)} \cdot \frac{(1-2k)}{(2k)!}$$

$$= \frac{1-2k}{(2(k+1))(2k-1)(2k)!}$$

$$= \frac{-1}{(2(k+1))(2k)!}$$

$$= \frac{-1(2k+1)}{(2k+2)(2k+1)(2k)!}$$
$$= \frac{-1-2k}{(2k+2)!}$$
$$= \frac{1-2-2k}{(2(k+1))!}$$
$$= \frac{1-2(k+1)}{(2(k+1))!}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = \frac{1-2n}{(2n)!}$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ แนวคิดในการหาสูตร a_{2n} ทำได้ดังนี้

จาก $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)}$

จะได้ $n(n-3)a_n = a_{n-2}$

แทนค่า $n = 2, 4, 6, 8, \ldots, 2k$ จะได้

$$(2)(-1)a_2 = a_0$$
$$(4)(1)a_4 = a_2$$
$$(6)(3)a_6 = a_4$$
$$\vdots$$
$$(2k)(2k-3)a_{2k} = a_{2k-2}$$

เพราะฉะนั้น

$$[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2k)][(-1)1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-3)]a_2a_4a_6\ldots a_{2k} = a_0a_2a_4 \ldots a_{2k-2}$$

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2k))(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-3))\, a_{2k} = -a_0$$

$$(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots (2k-2)\cdot(2k))(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2k-3))\, a_{2k} = -1$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots (2k-3)(2k-2)(2k-1)(2k)a_{2k} = (-1)(2k-1)$$

$$(2k)!\, a_{2k} = 1 - 2k$$

เพราะฉะนั้น $$a_{2k} = \frac{1-2k}{(2k)!}$$

71. กำหนดให้ $a_1 = \frac{7}{6}$ และ $(2n+1)(2n)a_n - 7a_{n-1} = 0$

การแสดงว่า $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{7^1}{(2(1)+1)!} = \frac{7}{6} = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{7^k}{(2k+1)!}$

เพราะว่า $(2(k+1)+1)(2(k+1))\, a_{k+1} - 7a_{k+1-1} = 0$

$$(2(k+1)+1)(2(k+1))\, a_{k+1} = 7a_k$$

$$= 7\left(\frac{1^k}{(2k+1)!}\right)$$

$$= \frac{7^{k+1}}{(2k+1)!}$$

$$a_{k+1} = \frac{7^{k+1}}{(2(k+1)+1)(2(k+1)(2k+1)!}$$

$$= \frac{7^{k+1}}{[2(k+1)+1]!}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \dfrac{7^n}{(2n+1)!}$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ การหาสูตร a_n อาจทำได้โดยการจัดรูป ดังนี้

จาก $(2n+1)(2n)a_n - 7a_{n-1} = 0$

จะได้ $(2n+1)(2n)a_n = 7a_{n-1}$

แทนค่า n = 2, 3, ... จะได้

$$(3)(2)a_1 = 7 \qquad (\because a_1 = \frac{7}{6})$$

$$(5)(4)a_2 = 7a_1$$

$$(7)(6)a_3 = 7a_2$$

$$\vdots$$

$$(2n+1)(2n)a_n = 7a_{n-1}$$

เพราะฉะนั้น

$$((2n+1)(2n)\ldots 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)a_1a_2\ldots a_n = 7^n a_1a_2\ldots a_{n-1}$$

$$(2n+1)!\, a_n = 7^n$$

$$a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$$

72. กำหนดให้ $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ และ $na_n + 2a_{n-2} = 0$, n = 2, 3, 4, ...

การแสดงว่า $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ n = 1, 2, 3, ...

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2a_2 + 2a_{2-2} = 0$

$$a_2 = -a_0 = -1$$

และ $\qquad \dfrac{(-1)^1}{1!} = -1$

เพราะฉะนั้น $\quad a_{2(1)} = \dfrac{(-1)^1}{1!}$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $\qquad a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k!}$

$$2(k+1)a_{2(k+1)} - 2a_{2(k+1)-2} = 0$$

$$(k+1)a_{2(k+1)} = -a_{2k}$$

$$= -\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

$$a_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)(k!)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$ ทุกค่า $n \in N$

73. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

การแสดงว่า $a_n = -\dfrac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \dfrac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\quad \dfrac{1}{2}(3^1 + (-1)^1) = 1 = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(1), P(2), … P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{1}{2}(3^k + (-1)^k)$ และ

$a_{k-1} = \frac{1}{2}(3^{k-1} + (-1)^{k-1})$

และ

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + 3a_{k-1} \\
&= 2(\frac{1}{2}(3^k + (-1)^k)) + 3(\frac{1}{2}(3^{k-1} + (-1)^{k-1})) \\
&= 3^k + (-1)^k + \frac{1}{2}(3^k) + (-1)^{k-1}\frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}(3^k) + (-1)^k(1 + (-1)^{-1}(\frac{3}{2})) \\
&= \frac{3^{k+1}}{2} + (-1)^k(1 - \frac{3}{2}) \\
&= \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} + (-1)^{k+1})
\end{aligned}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ แนวคิดในการหาสูตร $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$ จากเงื่อนไข

$a_1 = 1$, $a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

มีขั้นตอนการทำงานดังนี้

ให้ $a_n = \propto^n$

ดังนั้น $\propto^n = 2\propto^{n-1} + 3\propto^{n-2}$

และ $\propto^2 = 2\propto + 3$

$\propto^n - 2\propto - 3 = 0$

$(\propto -3)(\propto +1)=0$

$\propto = 3, -1$

เพราะฉะนั้น $a_n = c_1 3^n + c_2(-1)^n$

เป็นสูตรที่สอดคล้องเงื่อนไขของ $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

เงื่อนไขที่จะใช้ในการหาค่าตัว c_1, c_2 คือ

$a_0 = 1, a_1 = 1$

$a_0 = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 + c_2 = 1$

$a_1 = 1 \quad \rightarrow \quad 3c_1 - c_2 = 1$

เพราะฉะนั้น $c_1 = \frac{1}{2}$ และ $c_2 = \frac{1}{2}$

สรุป $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$

74. กำหนดให้ $a_0 = 1, a_1 = 1$ และ $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$

การแสดงว่า $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{2}{5}(4^1) + \frac{3}{5}(-1)^1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1 = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{2}{5}(4^k) + \frac{3}{5}(-1)^k$

$a_{k-1} = \frac{2}{5}(4^{k-1}) + \frac{3}{5}(-1)^{k-1}$

เพราะว่า $a_{k+1} = 3a_k + 4a_{k-1}$

$$= 3[\frac{2}{5}(4^k) + \frac{3}{5}(-1)^k] + 4[\frac{2}{5}(4^{k-1}) + \frac{3}{5}(-1)^{k-1}]$$

$$= \frac{6}{5}(4^k) + \frac{8}{5}(4^{k-1}) + \frac{9}{5}(-1)^k + \frac{12}{5}(-1)^{k-1}$$

$$= \frac{6}{5}(4^k) + \frac{8}{5}(\frac{1}{4})(4^k) + (\frac{9}{5} - \frac{12}{5})(-1)^k$$

$$= (\frac{6}{5} + \frac{2}{5})\,4^k - \frac{3}{5}(-1)^k$$

$$= (\frac{8}{5})\,4^k + (\frac{3}{5})(-1)^{k+1}$$

$$= (\frac{2}{5})(4^{k+1}) + (\frac{3}{5})(-1)^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ แนวทางในการหาสูตร a_n

ให้ $\propto^n = a_n$ เพราะว่า $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$

เพราะฉะนั้น $\propto^n = 3\propto^{n-1} + 4\propto^{n-2}$

$$\propto^2 = 3\propto + 4$$

$$\propto^n - 3\propto - 4 = 0$$

$$(\propto - 4)(\propto + 1) = 0$$

$$\propto = 4, -1$$

ข้อควรจำ ในขั้นตอนนี้เราต้องเลือก a_n เป็นผลบวกของเลขยกกำลัง

เลือก ให้ $a_n = c_1 4^n + c_2(-1)^n$

เพราะว่า $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$

เพราะฉะนั้น $c_1 + c_2 = 1$

$$4c_1 - c_2 = 1$$

ดังนั้น $c_1 = \frac{2}{5}$ และ $c_2 = \frac{3}{5}$

สรุป $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

75. กำหนดให้ $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + n$

การแสดงว่า $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 + \frac{1}{2}(1)(1+1) = 2 = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $a_k = 1 + \frac{1}{2}k(k+1)$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{(k+1)-1} + (k+1) \\
&= a_k + (k+1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) \\
&= 1 + (k+1)(\frac{k}{2} + 1) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}(k+1)[(k+1)+1]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ จาก $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + n$

เรามีแนวทางในการหาสูตร a_n ดังนี้

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 4$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

บวกทั้งสองข้างเข้าด้วยกันจะได้

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + (a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1}) + (2 + 3 + \ldots + n)$$

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 2 + (2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) \\ &= 1 + \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned}$$

76. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$, $a_0 = 3$

การแสดงว่า $a_n = 2\binom{n+1}{3} + 3$, $n = 2, 3, \ldots$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + i(i-1)) \\ \sum_{i=1}^{n} a_i &= \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} + \sum_{i=1}^{n} i(i-1) \\ a_n &= \sum_{i=1}^{n} i(i-1) + a_0 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (i^2 - i) + 3 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i + 3$$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) - \frac{n}{2}(n + 1) + 3$$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1 - 3) + 3$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6} + 3$$

$$= 2\left(\frac{(n-1)(n)(n+1)}{3!}\right) + 3$$

$$= 2\binom{n+1}{3} + 3$$

77. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} - 2$, $a_0 = 0$ การแสดงว่า $a_n = -3^n + 1$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = -3^n + 1$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 3a_0 - 2 = -2 = -3^1 + 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = -3^k + 1$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_{(k+1)-1} - 2 \\ &= 3a_k - 2 \\ &= 3(-3^k + 1) - 2 \\ &= -3^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = -3^n + 1$ ทุกค่า $n \in N$

78. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3n^2$, $a_0 = 0$

การแสดงว่า $a_n = 6\binom{n+2}{3} - 3\binom{n+1}{2}$

วิธีทำ $a_0 = 0$, $a_i = a_{i-1} + 3i^2$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (a_{i-1} + 3i^2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} + 3\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$a_n = a_0 + 3(\frac{n}{6})(n+1)(2n+1)$$

$$= 0 + \frac{n}{2}(n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)((n+2) - \frac{3}{2})$$

$$= n(n+1)(n+2) - \frac{3n(n+1)}{2}$$

$$= 6(\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}) - 3(\frac{n(n+1)}{2!})$$

$$= 6\binom{n+2}{3} - 3\binom{n+1}{2}$$

79. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$

การแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = 3(2^n) - n - 2$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2a_0 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 3(2^1) - 1 - 2 = 6 - 1 - 2 = 3$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = 3(2^k) - k - 2$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + (k+1) \\
&= 2[3(2^k) - k - 2] + (k+1) \\
&= 3(2^{k+1}) - 2k - 4 + k + 1 \\
&= 3(2^{k+1}) - (k+1) - 2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = 3(2^n) - n - 2$ ทุกค่า $n \in N$

80. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 1$

การแสดงว่า $a_n = 2^n - 1$

วิธีทำ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $a_n = 2^n - 1$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 = a_1$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = 2^k - 1$

เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_{k+1-1} + 1 \\
&= 2a_k + 1 \\
&= 2(2^k - 1) + 1 \\
&= 2^{k+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = 2^n - 1$ ทุกค่า $n \in N$

81. การแสดงว่า

$$1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(n-1)) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(n-1)) = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 = \frac{1}{6}(1+1)(2(1)+1)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(k-1))$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$$

$$1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(k-1))$$
$$+(1+3+5+\ldots+(1+2(k))$$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)+(1+3+5+\ldots+(1+2k)$$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)+\frac{(k+1)}{2}(1+1+2k)$$

$$= \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

$$= (k+1)[\frac{k}{6}(2k+1)+(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)}{6}(k(2k+1)+6(k+1))$$

$$= \frac{k+1}{6}(2k^2+k+6k+6)$$

$$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= (\frac{k+1}{6})(k + 2)(2k + 3)$$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1+(1+3)+(1+3+5)+\ldots+(1+3+5+\ldots+(1+2(n-1))$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) \qquad \text{ทุกค่า } n \in N$$

82. การหาผลบวกของ

$$1+(1+3)+(1+3+5) + \ldots + (1+3+5+\ldots+ (1+2(n-1))$$

วิธีทำ เพราะว่า $1 + 3 + 5 + \ldots + 1 + (2(n-1))$

$$= \frac{n}{2}(1 + 1 + 2(n-1)) = n^2$$

เพราะฉะนั้น $1+(1+3)+(1+3+5) + \ldots + (1+3+5+\ldots+ (1+2(n-1))$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$$

$$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

83. จงหาค่าของ $\underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 77777\ldots7}_{n - \text{terms}}$

วิธีทำ $\underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 77777\ldots7}_{n - \text{terms}}$

$$= \frac{7}{9}\underbrace{(9 + 99 + 999 + \ldots + 999999\ldots9}_{n - \text{terms}}$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots + (100\ldots0-1)]$$

$$= \frac{7}{9}[10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n - n]$$

$$= \frac{7}{9}[\frac{10(1-10^n)}{1-10} - n]$$

$$= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$$

84. การแสดงว่า $\underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 777777\ldots7}_{n-\text{terms}} = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ

$$\underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 777777\ldots7}_{n-\text{terms}} = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{70}{81}(10^1 - 1) - \frac{7}{9} = \frac{70}{9} - \frac{7}{9} = \frac{63}{9} = 7$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติว่า P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $\underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 777777\ldots7}_{k-\text{terms}} = \frac{70}{81}(10^k - 1) - \frac{7k}{9}$

เพราะว่า $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777777\ldots7}_{(k+1)-\text{terms}}$

$$= \underbrace{7 + 77 + 777 + \ldots + 777777\ldots7}_{k-\text{terms}} + \underbrace{777777\ldots7}_{(k+1)-\text{terms}}$$

$$= \frac{70}{81}(10^k - 1) - \frac{7k}{9} + \underbrace{777777\ldots7}_{(k+1)-\text{terms}}$$

เพราะว่า $\underbrace{777777...7}_{(k+1)-\text{terms}} = 7(\underbrace{111111...1}_{(k+1)-\text{terms}})$

$$= \frac{7}{9}(\underbrace{999999...9}_{(k+1)-\text{terms}})$$

$$= \frac{7}{9}(10^{k+1} - 1)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{70}{81}(10^k - 1) - \frac{7k}{9} + \underbrace{777777...7}_{(k+1)-\text{terms}}$

$$= \frac{70}{81}(10^k - 1) - \frac{7k}{9} + \frac{7}{9}(10^{k+1} - 1)$$

$$= \frac{70}{81}(10^k - 1) - \frac{7k}{9} + \frac{70}{81}(10^k \cdot 9) - \frac{7}{9}$$

$$= \frac{70}{81}(10^k - 1 + 9 \cdot 10^k) - \frac{7}{9}(k + 1)$$

$$= \frac{70}{81}(10^{k+1} - 1) - \frac{7(k+1)}{9}$$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $7 + 77 + 777 + \ldots + \underbrace{777777...7}_{k-\text{terms}} = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

85. จงหาค่าของ $0.3 + 0.33 + 0.333 + \ldots + \underbrace{0.333333...3}_{n-\text{terms}}$

วิธีทำ $0.3 + 0.33 + 0.333 + \ldots + \underbrace{0.333333...3}_{n-\text{terms}}$

$$= 3[0.1 + 0.11 + 0.111 + \ldots + \underbrace{0.111111\ldots1}_{n-\text{terms}}]$$

$$= \frac{3}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots + \underbrace{0.999999\ldots9}_{n-\text{terms}}]$$

$$= \frac{3}{9}[(1-0.1) + (1-0.01) + (1-0.001) + \ldots + (1-0.000\ldots1)]$$

$$= \frac{1}{3}[n - 10^{-1} - 10^{-2} - 10^{-3} - \ldots - 10^{-n}]$$

$$= \frac{n}{3} - \frac{1}{3}[(0.1)^1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \ldots + (0.1)^n]$$

$$= \frac{n}{3} - \frac{1}{3}[\frac{(0.1)(1-(0.1)^n)}{1-0.1}]$$

$$= \frac{n}{3} - \frac{1}{27}(1 - \frac{1}{10^n})$$

86. $S_1, S_2, S_3, \ldots$ เป็นลำดับของเซต $\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \ldots$

การหาผลบวกของสมาชิกในเซต S_n

วิธีทำ จำนวนสมาชิกของ $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_k$

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + k$$

$$= \frac{k}{2}(k+1)$$

ดังนั้นสมาชิกตัวแรกของ S_{k+1} คือ $\frac{k}{2}(k+1)+1$

และสมาชิกตัวสุดท้ายของ S_{k+1} คือ $\frac{k}{2}(k+1)+k+1$

$$S_{k+1} = \{\frac{k}{2}(k+1)+1, \frac{k}{2}(k+1)+2, \ldots, \frac{k}{2}(k+1)+(k+1)\}$$

ผลบวกของสมาชิกใน $S_{k+1} = \frac{\#\text{of}-\text{terms}}{2}$ (เทอมแรก + เทอมหลัง)

$$= \frac{k+1}{2}[\frac{k}{2}(k+1)+1+\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)]$$

$$= \frac{(k+1)}{2}\left[\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + k + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)}{2}(k^2 + 2k + 2)$$

$$= \frac{(k+1)}{2}((k+1)^2 + 1)$$

แทนค่า $k + 1$ ด้วย n

จะได้ว่าผลบวกของสมการใน S_n คือ $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$

87. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $\sum_{k=1}^{n} a_k{}^3 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$

การแสดงว่า $a_k = k$ ทุกค่า k

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

ถ้า $\sum_{k=1}^{n} a_k{}^3 = (\sum_{k=1}^{n} a_k)^2$ แล้ว $a_k = k$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\sum_{k=1}^{1} a_k{}^3 = (\sum_{k=1}^{1} a_k)^2$

$$a_1{}^3 = a_1{}^2$$

และ $a_1{}^2 \neq 0$ ดังนั้น $a_1 = 1$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(n)$ เป็นจริง

นั้นคือ $a_k = k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

การแสดงว่า $P(n + 1)$ เป็นจริง เพียงแต่แสดงว่า $a_{n+1} = n + 1$

จากเงื่อนไข $\sum_{k=1}^{n+1} a_k{}^3 = (\sum_{k=1}^{n+1} a_k)^2$

จะได้ $a_1{}^3 + a_2{}^3 + \ldots + a_n{}^3 + a_{n+1}{}^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1})^2$

$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + {a_{n+1}}^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n + a_{n+1})^2$

$$(\frac{n}{2}(n+1))^2 + {a_{n+1}}^3 = (\frac{n}{2}(n+1) + a_{n+1})^2$$

$$= (\frac{n}{2}(n+1))^2 + n(n+1)a_{n+1} + a_{2n+1}$$

$${a_{n+1}}^3 + {a_{n+1}}^2 - n(n+1)\, a_{n+1} = 0$$

เพราะว่า $a_{n+1} \neq 0$; $a_{2n+1} - a_{n+1} - n(n+1) = 0$

$$(a_{n+1} - (n+1))(a_{n+1} + n) = 0$$

$$a_{n+1} = n + 1\, , -n$$

เพราะว่า $a_{n+1} > 0$ ดังนั้น $a_{n+1} = n + 1$

สรุป $a_k = k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, n, n+1$

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\sum\limits_{k=1}^{n} {a_k}^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} a_k)^2 \leftrightarrow a_k = k\, , k = 1, 2, \ldots, n$

88. การแสดงว่า $2^n < n!$ ทุกค่า $n \geq 4$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $2^n < n!$

(1) การแสดงว่า P(4) เป็นจริง

เพราะว่า $2^4 = 16 < 24 = 4!$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริงดังนั้น $2^k < k!$

เพราะว่า $2^{k+1} < 2\, 2^k < 2\, k! < (k+1)\, k! = (k+1)!$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า $n \geq 4$

เพราะฉะนั้น $2^n < n!$ ทุกค่า $n \geq 4$

89. การแสดงว่า $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(2)! < 2^2(1!)^2$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $(2k)! < 2^{2k}(k!)^2$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}(2(k+1))! &= (2k+2)! \\ &= (2k)!(2k+1)(2k+2) \\ &< (2k)!(2k+2)(2k+2) \\ &< 2^{2k}(k!)^2(2k+2)(2k+2) \\ &= 2^{2k+2}(k!)^2(k+1)(k+1) \\ &= 2^{2(k+1)}((k+1)!)^2\end{aligned}$$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$

90. การแสดงว่า $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $7^2 - 48 - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $2304 \mid 7^{2k} - 48k - 1$

เพราะว่า $7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1 = (49)7^{2k} - 48k - 48 - 1$

$= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 49(48k) - 48k$

$= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 48(48k)$

$= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 2304k$

เพราะฉะนั้น $2304 \mid 7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $2304 \mid 7^{2n} - 48n - 1$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

ปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เพิ่มเติม

1. จงแสดงว่า $3^n > 2^n + 20$ ทุกค่า $n \geq 3$
2. จงแสดงว่า $n + 5 < 2^n$ ทุกค่า $n \geq 4$
3. จงแสดงว่า $3n \leq 3^n$ ทุกค่า $n \geq 1$
4. จงแสดงว่า $\log n < n$ ทุกค่า $n \geq 1$

   แนะนำ $k + 1 \leq 10k$
5. จงแสดงว่า $\ln(n+1) < n$ ทุกค่า $n \geq 1$
6. จงแสดงว่า $|\sin nx| \leq |\sin x| n$ ทุกค่า $n \geq 1$
7. จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม m บางที่ทำให้ $(n+1)^2 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq m$
8. จงแสดงว่ามีจำนวนเต็ม m บางที่ทำให้ $(n^2+1)^2 \leq 4^n$ ทุกค่า $n \geq m$

91. การแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} \leq 2-1$ เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{k}-1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq 2\sqrt{k}-1+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}$$

เพราะว่า $4(k^2+k) < 4k^2+4k+1$

$$4(k^2+k) < (2k+1)^2$$

$$2\sqrt{k^2+k} < 2k+1$$

$$2\sqrt{k}\ \sqrt{k+1} < 2k+1$$

$$2\sqrt{k}\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+1 < 2k+2-\sqrt{k+1}$$

$$2\sqrt{k}\ \sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+1 < 2(k+1)-\sqrt{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1}-\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}-1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1}-1$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n}-1$ ทุกค่า $n \in N$

92. การแสดงว่า $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $9^2 - 80 - 1 = 0$ และ $6400 \mid 0$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $6400 \mid (9^{2k} - 80k - 1)$

$$\begin{aligned} 9^{2(k+1)} - 80(k+1) - 1 &= (81)9^{2k} - 80k - 81 \\ &= (80)(9^{2k} - 1) + 9^{2k} - 80k - 1 \\ &= (80)(81^{k} - 1) + 9^{2k} - 80k - 1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $(81 - 1)$ หาร $(81^k - 1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 6400 หาร $(80)(81^k - 1)$ ลงตัว

สรุป $6400 \mid 9^{2(k+1)} - 80(k+1) - 1$

นั้นคือ P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

93. การแสดงว่า $3 \mid 4^n + 2$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $3 \mid 4^n + 2$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $4 + 2 = 6$ และ $3 \mid 6$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $3 \mid 4^k + 2$

$4^{k+1} + 2 = 4\,4^k + 2$

$= 4(4^k + 2) - 6$

เพราะฉะนั้น 3 หาร $4^{k+1} + 2$ ลงตัว

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $3 \mid 4^n + 2$ ทุกค่า $n \in N$

94. การแสดงว่า $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(4^{2+1} + 3^{1+2}) = 64 + 27 = 91 = 13(7)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $13 \mid (4^{2k+1} + 3^{k+2})$

$$4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} = 16\,(4^{2k+1}) + 3(3^{k+2}) = 16\,(4^{2k+1}) + 3(3^{k+2})$$

$$= 16\,(4^{2k+1} + 3^{k+2}) - 13(3^{k+2})$$

เพราะฉะนั้น $13 \mid 4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2}$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

95. การแสดงว่า $24 \mid 713(9^{3n-2}) + 15$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $24 \mid 713(9^{3n-2}) + 15$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $713(9^{3k-2}) + 15 = 713(9) + 15 = 6432 = 268(24)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพระฉะนั้น $24 \mid 713(9^{3k-2}) + 15$

$$
\begin{aligned}
713(9^{3(k+1)-2}) + 15 &= 713\,(9^3\,(9^{3k-2})) + 15 \\
&= 9^3\,(713(9^{3k-2}) + 15) - 15(9^3 - 1\,) \\
&= 729(713(9^{3k-2}) + 15) - 24(255)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $24 \mid 713(9^{3(k+1)-2}) + 15$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $24 \mid 713(9^{3n-2}) + 15$ ทุกค่า $n \in N$

96. การแสดงว่า $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$

(1) การแสดงว่า P(7) เป็นจริง

เพราะว่า $16 + 9 - 1 = 24$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $24 \mid (16^k + 9^{3k-2} - 1)$

$$16^{k+1} + 9^{3(k+1)-2} - 1 = 16(16^k + 9^3(9^{3k-2}) - 1$$
$$= 16(16^k + 729(9^{3k-2}) - 1$$
$$= 16(16^k + 9^{3k-2} - 1) - 16(9^{3k-2}) + 729(9^{3k-2}) + 15$$
$$= 16(16^k + 9^{3k-2} - 1) + 713(9^{3k-2}) + 15$$

เพราะว่า $24 \mid 713(9^{3k-2}) + 15$ และ $24 \mid (16^k + 9^{3k-2} - 1)$

เพราะฉะนั้น $24 \mid 16^{k+1} + 9^{3(k+1)-2} - 1$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

97. กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก

การแสดงว่า $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m \leq n^{m+1}$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m \leq n^{m+1}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 \leq 1^{1+1}$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + k^m \leq k^{m+1}$

$$1^m + 2^m + 3^m + \ldots + k^m + (k+1)^m \leq k^{m+1} + (k+1)^m$$
$$= k^{m+1} + k^m + mk^{m-1} + \ldots + 1$$
$$\leq k^{m+1} + (m+1)k^m + \frac{m(m+1)}{2}k^{m-1} + \ldots + 1$$
$$= (k+1)^{m+1}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + n^m \le n^{m+1}$ ทุกค่า $n \in N$

98. การแสดงว่า $9 \mid (2)10^n + (3)10^{n-1} + 4$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $9 \mid (2)10^n + (3)10^{n-1} + 4$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $(2)10^1 + (3)10^{1-1} + 4 = 20 + 3 + 4 = 27$

ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $9 \mid (2)10^k + (3)10^{k-1} + 4$

$$(2)10^{k+1} + (3)10^{k+1-1} + 4 = 10(2)10^k + 10(3)10^{k-1} + 4$$

$$= 10[(2)10^k + 10(3)10^{k-1} + 4] - 36$$

เพราะฉะนั้น $9 \mid (2)10^{k+1} + (3)10^{k+1-1} + 4$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $9 \mid (2)10^n + (3)10^{n-1} + 4$ ทุกค่า $n \in N$

99. การแสดงว่า $n^n \ge n!$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^n \ge n!$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $1^1 \ge 1!$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $k^k \geq k!$

เพราะว่า $(k+1)^{k+1} = (k+1)(k+1)^k \geq (k+1)k^k$

$$\geq (k+1)k!$$

$$= (k+1)!$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $n^n \geq n!$ ทุกค่า $n \in N$

100. การแสดงว่า $11 \mid (8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $11 \mid (8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(8)10^2 + (6)10^{2-1} + 9 = 800 + 60 + 9 = 869 = 79(11)$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $11 \mid (8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9$

$$(8)10^{2(k+1)} + (6)10^{2(k+1)-1} + 9 = 100(8)10^{2k} + 100(6)10^{2k-1} + 9$$

$$= 100(8)10^{2k} + 100(6)10^{2k-1} + 9$$

$$= 100[(8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9] - 900 + 9$$

$$= 100[(8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9] - 891$$

$$= 100[(8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9] - 81(11)$$

เพราะฉะนั้น $11 \mid (8)10^{2(k+1)} + (6)10^{2(k+1)-1} + 9$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $11 \mid (8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9$ ทุกค่า $n \in N$

101. การแสดงว่า $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $4^n > n^4$

(1) การแสดงว่า P(5) เป็นจริง

เพราะว่า $4^5 = 1024 > 625 = 5^4$ เพราะฉะนั้น P(5) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $4^k > k^4$

$$
\begin{aligned}
4^{k+1} &= 4\,4^k > 4(k^4) \\
&= k^4 + k^4 + k^4 + k^4 \\
&> k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
&= (k+1)^4
\end{aligned}
$$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$

102. การแสดงว่า $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2^{2-1} + 3^{2-1} = 5$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $5 \mid (2^{2k-1} + 3^{2k-1})$

$$2^{2(k+1)-1} + 3^{2(k+1)-1} = (4)2^{2k-1} + (9)3^{2k-1}$$

$$= (4)[2^{2k-1} + 3^{2k-1}] + (5)3^{2k-1}$$

เพราะฉะนั้น $5 \mid 2^{2(k+1)-1} + 3^{2(k+1)-1}$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

103. การแสดงว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$

(3) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3^{2+1} + 2^{1+2} = 27 + 8 = 35$

ดังนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

ดังนั้น $7 \mid (3^{2k+1} + 2^{k+2})$

$$3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2} = 9(3^{2k+1}) + 2(2^{k+2}) = 9[(3^{2k+1}) + (2^{k+2})] - 7(2^{k+2})$$

เพราะฉะนั้น $7 \mid 3^{2(k+1)+1} + 2^{k+1+2}$

ดังนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

104. การแสดงว่า $6 \mid n(n^2+5)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $6 \mid n(n^2+5)$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $(1)(1+5) = 6$ เพราะฉะนั้น P(1) จริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ $6 \mid (k)(k^2+5)$

เพราะว่า $(k+1)((k+1)^2+5) = (k+1)(k^2+2k+1+5)$

$$= (k+1)(k^2+2k+6)$$

$$= (k+1)(k^2+2k) + 6(k+1)$$

$$= k(k^2+2k) + (k^2+2k) + 6(k+1)$$

$$= k(k^2+5) - 5k + 2k^2 + k^2 + 2k + 6(k+1)$$

$$= k(k^2+5) + 3k^2 - 3k + 6(k+1)$$

$$= k(k^2+5) + 3(k^2-k) + 6(k+1)$$

$$= k(k^2+5) + 3k(k-1) + 6(k+1)$$

เพราะว่า $6 \mid k(k^2+5)$ และ $2 \mid k(k-1) \rightarrow 6 \mid 3k(k-1)$

เพราะฉะนั้น $6 \mid k(k^2+5) + 3k(k-1) + 6(k-1)$

สรุป $6 \mid (k+1)((k+1)^2+5)$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $6 \mid n(n^2+5)$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

105. การแสดงว่า ห.ร.ม. ของ $(3n + 4, 2n + 3) = 1$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

วิธีทำ เพราะว่า $3(2n + 3) - 2(3n + 4) = 1$

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. ของ $3n + 4$ และ $2n + 3$ คือ 1 ตัวอย่างเช่น

n	$3n + 4$	$2n + 3$	ห.ร.ม. $(3n + 4, 2n + 3)$
1	7	5	1
2	10	7	1
3	13	9	1

106. การแสดงว่า $1 + n < 2^n$ ทุกค่า $n \geq 2$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + n < 2^n$

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $1 + 2 < 2^2$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง ดังนั้น $1 + k < 2^k$

เพราะว่า $1 + (k + 1) < 1 + 2^k$

$$< 2^k + 2^k$$

$$= 2(2^k)$$

$$= 2^{k+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1 + n < 2^n$ ทุกค่า $n \geq 2$

107. การแสดงว่า $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ มีสับเซตทั้งหมดเท่ากับ 2^n เซต

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ

$\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ มีสับเซตทั้งหมดเท่ากับ 2^n เซต

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $\{1\}$ มีสับเซต 2 เซต คือ $\varnothing$ และ A

เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^k เซต

ให้ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k}$ เป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$

เพราะว่า

$A_1 \cup \{k+1\}, A_2 \cup \{k+1\}, A_3 \cup \{k+1\}, \ldots, A_{2k} \cup \{k+1\}$

และ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2k}$

เพราะฉะนั้น $\{1, 2, 3, \ldots, k, k+1\}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^{k+1} เซต

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพระฉะนั้น $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ มีสับเซตทั้งหมดเท่ากับ 2^n เซต

หมายเหตุ ผลจากข้อนี้คือเซตที่มีสมาชิก n ตัวมีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต
นั้นคือ ถ้า $n(A) = n$ แล้ว $n(P(A)) = 2^n$

108. การแสดงว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ

$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $0^4 < \frac{1^5}{4}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (k-1)^4 < \frac{k^5}{5}$

เพราะว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (k-1)^4 + k^4 < \frac{k^5}{5} + k^4$

$$= \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4)$$

$$\leq \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 5k^2 + 1)$$

$$= \frac{(k+1)^5}{5}$$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพระฉะนั้น $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

109. การแสดงว่า $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $\frac{1^5}{5} < 1^4$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\frac{k^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4$

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^5}{5} &= \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&= \frac{k^5}{5} + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&\leq 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 5) \\
&= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1) \\
&\leq 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\
&= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + k^4 + (k+1)^4
\end{aligned}$$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

110. การแสดงว่า $(x-a)^2 + (x-b)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

ข้อพิสูจน์ **วิธีที่ 1** ให้ K เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$(X-a)^2 - (x-a)^2 = (k^2 - 2aX + a^2) - (x^2 - 2ax + a^2)$

$= X^2 - x^2 - 2a(X-x)$

$[(K-a)^2 + (K-b)^2] - [(x-a)^2 + (x-b)^2]$

$= [K^2 - x^2 - 2a\,(K-x)] + [K^2 - x^2 - 2b(K-x)]$

$= 2(K^2 - x^2) - 2(a+b)(K-x)$

แทนค่า $x = \frac{a+b}{2}$ จะได้ว่า $a + b = 2x$

เพราะฉะนั้น $[(K-a)^2 + (K-b)^2] = 2(K^2 - x^2) - 2(2x)(X-x)$

$= 2K^2 - 2x^2 - 4xK + 4x^2 = 2k^2 - 4Kx + 2x^2$

$= 2(K-x)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(K-a)^2 + (K-b)^2 \geq (x-a)^2 - (x-b)^2$

และ $(K-a)^2 + (K-b)^2 = (x-a)^2 - (x-b)^2$ ก็ต่อเมื่อ $K = x$

สรุป $(x-a)^2 - (x-b)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

วิธีที่ 2 โดยการใช้ความรู้ทางแคลคูลัส

ให้ $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2$

$f'(x) = 2(x-a) + 2(x-b)$

$f'(x) = 0 \leftrightarrow 2(x-a) + 2(x-b) = 0$

$2x = a + b$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

เพราะว่า $y = f(x)$ เป็นรูปพาราโบลาหงาย

เพราะฉะนั้น $f(x)$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

สรุป $(x-a)^2 - (x-b)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

วิธีที่ 3 $(x-a)^2 - (x-b)^2 = x^2 - 2ax + a^2 + x^2 - 2bx + b^2$

$$= 2[x^2 - (a+b)x + (\frac{a+b}{2})^2] - 2(\frac{a+b}{2})^2 + a^2 + b^2$$

$$= 2[x - (\frac{a+b}{2})]^2 - \frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) + a^2 + b^2$$

$$= 2[x - (\frac{a+b}{2})]^2 + \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= 2[x - (\frac{a+b}{2})]^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2$$

$$\geq \frac{1}{2}(a-b)^2$$

$(x-a)^2 - (x-b)^2 = \frac{1}{2}(a-b)^2$ เมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

เพราะฉะนั้น $(x-a)^2 - (x-b)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b}{2}$

111. การแสดงว่า $(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{a+b+c}{3}$

วิธีทำ ให้ K เป็นจำนวนจริงใด ๆ และเลือก $x = \frac{a+b+c}{3}$

$[(K-a)^2 + (K-b)^2 + (K-c)^2] - [(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2]$

$= [(K-a)^2 - (x-a)^2] + [(K-b)^2 - (x-b)^2] + [(K-c)^2 - (x-c)^2]$

$= (K^2 - x^2) - 2a(K-x) + (K^2 - x^2) - 2b(K-x) + (K^2 - x^2) - 2c(K-x)$

$= 3(K^2 - x^2) - 2(a + b + c)(K - x)$

$= 3(K^2 - x^2) - 2(3x)(K - x)$ $\quad = 3K^2 - 3x^2 - 6Kx + 6x^2$

$= 3K^2 - 6Kx + 3x^2$ $\quad = 3(K - x)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \dfrac{a + b + c}{3}$ เป็นค่าที่ทำให้

$(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

112. การแสดงว่า $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$

มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

วิธีทำ ให้ K เป็นจำนวนจริงใดๆ ให้ $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

เพราะว่า

$[(K - a_1)^2 + (K - b_2)^2 + \dots + (K - a_n)^2] - [(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2]$

$= n(K^2 - x^2) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(K - x)$

$= n(K^2 - x^2) - 2(nx)(K - x)$ $\quad = n[K^2 - x^2 - 2Kx + 2x^2]$

$= n[K^2 - 2Kx + x^2]$ $\quad = n(K - x)^2$

≥ 0

สรุป $(x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ มีค่าน้อยที่สุด

เมื่อ $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

หมายเหตุ ในวิชาสถิติ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นข้อมูล ค่าความแปรปรวน =

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

113. การแสดงว่า $n^3 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 10$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^3 \le 2^n$

(1) การแสดงว่า $P(10)$ เป็นจริง

เพราะว่า $10^3 = 1000 \le 1024 = 2^{10}$

เพราะฉะนั้น $P(10)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง , $k \ge 10$

สมมติ $P(k)$ เป็นจริง, $k \ge 10$ เพราะฉะนั้น $k^3 \le 2^k$

$(k + 1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$\le 2^k + 3k^2 + 3k + 1$

$\le 2^k + 3k^2 + 3k^2 + 3k^2$

$\le 2^k + 9k^2$

$\le 2^k + k^3$ (เพราะว่า $k \ge 10$)

$\le 2^k + 2^k$

$\le 2^{k+1}$

เพราะฉะนั้น $P(k + 1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า $n \ge 10$

เพราะฉะนั้น $n^3 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 10$

114. การแสดงว่า $n^4 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 16$

ข้อพิสูจน์ ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $n^4 \le 2^n$

(1) การแสดงว่า $P(16)$ เป็นจริง

เพราะว่า $16^4 = 2^{16}$

เพราะฉะนั้น $P(16)$ เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า $P(k)$ เป็นจริง แล้ว $P(k+1)$ เป็นจริง , $k \ge 16$

สมมติ P(k) เป็นจริง, $k \geq 16$ เพราะฉะนั้น $k^4 \leq 2^k$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
&\leq 2^k + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
&\leq 2^k + 4k^3 + 6k^3 + 4k^3 + k^3 \\
&\leq 2^k + 15k^3 \\
&\leq 2^k + k^4 && \text{(เพราะว่า } k \geq 16\text{)} \\
&\leq 2^k + 2^k \\
&\leq 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า $n \geq 10$

เพราะฉะนั้น $n^4 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq 16$

115. การแสดงว่า $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $3 \mid (7^n + 2)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3 \mid (7 + 2)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $3 \mid (7^k + 2)$

$7^{k+1} + 2 = 7\ 7^k + 2 = 7(7^k + 2) - 7(2) + 2 = 7(7^k + 2) - 12$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (7^{k+1} + 2)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า

เพราะฉะนั้น $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า n

116. การแสดงว่า $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $4 \mid (5^n + 3)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $4 \mid (5 + 3)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $4 \mid (5^k + 3)$

$5^{k+1} + 3 = 5\,5^k + 3 = 5(5^k + 3) - 15 + 3 = 5(5^k + 3) - 12$

เพราะฉะนั้น $4 \mid (5^{k+1} + 3)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า

เพราะฉะนั้น $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า n

117. กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก การแสดงว่า $m!n! < (m + n)!$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $m!n! < (m + n)!$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $m!1! = m! < (m + 1)!$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $m!k! = m! < (m + k)!$

$m!(k + 1)! = m!k!(k+1) \leq (m + k)!(k+1) \leq (m + k)!(m + k+1) = (m + k+1)!$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า

เพราะฉะนั้น $m!n! < (m+n)!$ ทุกค่า n

118. การแสดงว่า $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1^3 + 2^3 + 3^3) = 36$ เพราะฉะนั้น $9 \mid (1^3 + 2^3 + 3^3)$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริงเพราะฉะนั้น $9 \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 - k^3$$

$$\begin{aligned}(k+3)^3 - k^3 &= [k+3-k][(k+3)^2 + (k+3)k + k^2] \\ &= [3][k^2 + 6k + 9 + k^2 + 3k + k^2] \\ &= [3][3k^2 + 9k + 9] \quad = \quad [9][k^2 + 3k + 3]\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + [9][k^2 + 3k + 3]$$

เพราะฉะนั้น $9 \mid ((k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า n

119. การแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$

$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

เพราะว่า $k(k+1) \geq k$

$$\sqrt{k(k+1)}+1 \geq k+1$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{k+1} \geq 1$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{k+1}+\frac{1}{k+1} \geq 1$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}}+\frac{1}{k+1} \geq 1$$

$$\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า n

120. การแสดงว่า $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$ ทุกค่า n

ข้อพิสูจน์ ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots.+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1^2} \leq 2-\frac{1}{1}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{k^2}\leq 2-\frac{1}{k}$

และ $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$

เพราะว่า $-k-1\leq -k$

$$-k^2-k-1\leq -k^2-k$$

$$-k^2-2k-1+k\leq -k^2-k$$

$$-(k+1)^2+k\leq -k(k+1)$$

$$\frac{-(k+1)^2+k}{k(k+1)^2}\leq -\frac{1}{k+1}$$

$$-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq -\frac{1}{k+1}$$

$$2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k+1}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\leq 2-\frac{1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

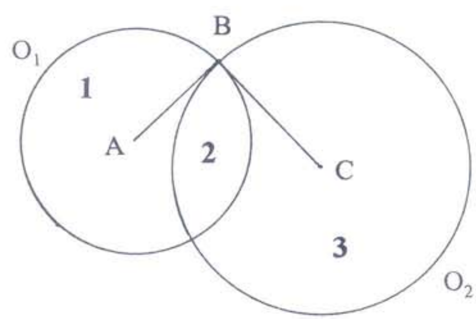
สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+....+\frac{1}{n^2}\leq 2-\frac{1}{n}$ ทุกค่า n

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

คำถามต่างๆ เหล่านี้จะช่วยทำให้นักเรียนมีความสามารถในการประยุกต์เนื้อหาทางคณิตศาสตร์หลายๆ เรื่องพร้อมกันเพื่อใช้ในการหาคำตอบแต่ละข้อ

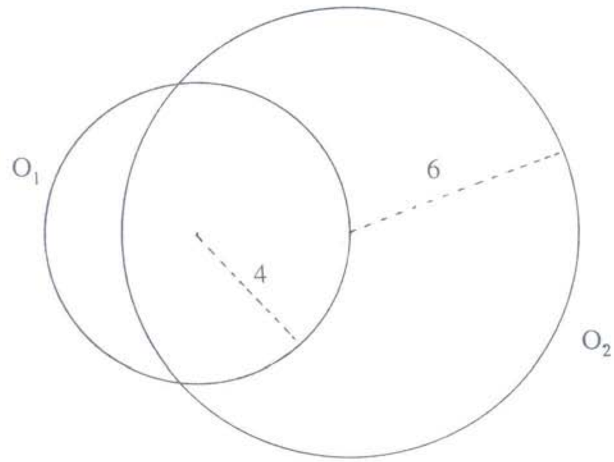
1. จำนวนรากที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ของสมการ $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ มีกี่ตัว
2. วงกลม O_1 มีรัศมี 15 เซนติเมตร, วงกลม O_2 มีรัศมี 20 เซนติเมตร ตัดกันดังภาพทำให้ $A\hat{B}C = 90°$



ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างพื้นที่ส่วนที่ 1 และ 3 เท่ากับเท่าใด

3. O_1 เป็นวงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร

O_2 เป็นวงกลมรัศมี 6 เซนติเมตร และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนวงกลม O_1 ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพื้นที่ซึ่งอยู่นอกส่วนที่ซ้อนกันเท่ากับเท่าใด



4. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$A = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว$\}$

$B = \{x \in U \mid 3$ หาร x ลงตัว$\}$

$\left| n(A - B) - n(B - A) \right|$ เท่ากับเท่าใด

5. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

6. จำนวนเต็มบวก 3 แยกเป็นผลบวกย่อยของจำนวนเต็มบวกได้ 4 วิธี คือ

$3, 2 + 1, 1 + 2$ และ $1 + 1 + 1$

จำนวนเต็มบวก 5 แยกเป็นผลบวกย่อยได้กี่วิธี

7. กำหนดให้ $A = \{1, -2, 3, 4, -6\}$ เป็นเซตของสัมประสิทธิ์ของสมการ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ถ้าสัมประสิทธิ์ทุกตัวของสมการมีค่าไม่เท่ากันแล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกหรือผิด เพราะอะไร

1. $x = 0$ เป็นรากสมการ
2. $x = 1$ เป็นรากของสมการ
3. ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง
4. ผลบวกของรากทุกตัวของสมการเท่ากับ -2

8.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{f(x) \mid f(x) = ax^2 + bx + c \,;\, a, b, c \in A\}$$

$$C = \{f \in B \mid f(x) = 0 \text{ มีรากเป็นจำนวนจริง}\}$$

จำนวนสมาชิกของ C เท่ากับเท่าใด

8.2 ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ถ้าความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC และความยาวเส้นรอบรูปของหกเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เท่ากัน

แล้วอัตราส่วนพื้นที่สามเหลี่ยม ABC : พื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เท่ากับเท่าใด

9. $A = \{ x + \frac{1}{x} \mid x > 0\}$ ขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A เท่ากับเท่าใด

10. กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก

จงหาขอบเขตล่างค่ามากสุดของ

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd}$$

11. จำนวนเต็มบวก $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

12. ถ้า $f(x) = x^2 + x + 1$ แล้ว $f(x)$ หาร $f(x^3)$ เหลือเศษเท่าใด

13. ถ้า $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

แล้ว $f(x)$ หาร $f(x^5)$ เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

14. จงหาค่าของ $(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \ldots (3^{2^n} + 1)$

15. a, b, c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า

ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ แล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

17. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$a_1x + a_2y = a_3$$

$$a_4x + a_5y = a_6$$

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_6$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมไม่เท่ากับศูนย์

18. $A = \{(x, y) \mid x, y$ เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 - 3y^2 = 17\}$

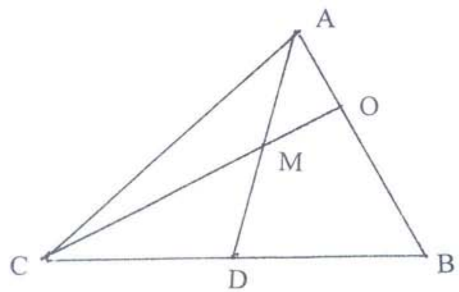
จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด

19. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า

ถ้า a : b : c เป็นอัตราส่วนความยาวด้านของสามเหลี่ยม

แล้ว $\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c}$ เป็นอัตราส่วนความยาวด้านของสามเหลี่ยม

20. จงพิสูจน์ว่า



AD เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC และ AM = MD

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า AO : OB = 1 : 2

21. จงหาผลเฉลยของสมการ $(6x+28)^{\frac{1}{3}} - (6x-28)^{\frac{1}{3}} = 2$

22. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า O เป็นวงกลมบรรจุอยู่ในสามเหลี่ยม ABC P เป็นจุดบนวงกลม O

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $PA^2 + PB^2 + PC^2$ เป็นค่าคงตัว

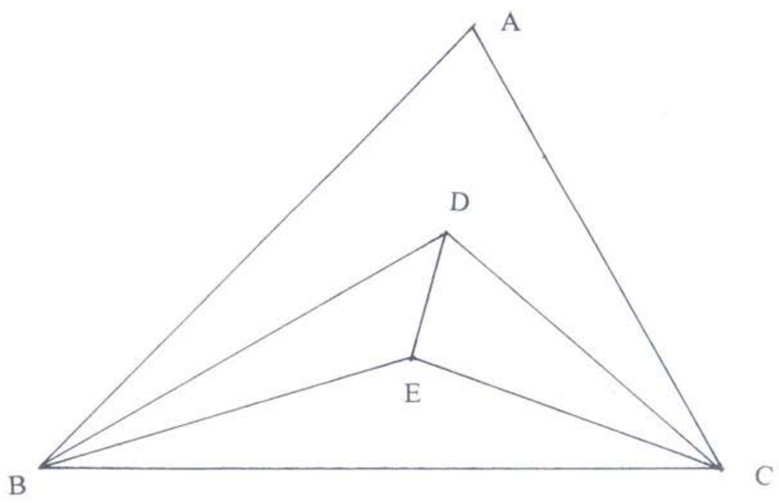
23. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า

$2^y - 1$ หาร $2^x + 1$ ไม่ลงตัว ทุกค่าจำนวนเต็มบวก x และ y

24. ในระบบฐาน B

ถ้าจำนวน $(11111)_B$ เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ แล้วค่า B เท่ากับเท่าใด

25. จงพิสูจน์ว่า



BD, BE แบ่งมุม ABC เป็นสามส่วนเท่ากัน

DC, EC แบ่งมุม ACB เป็นสามส่วนเท่ากัน

จงแสดงว่า $B\hat{D}E = E\hat{D}C$

26. จงหาค่า a ที่ทำให้ $x^2 - x + a$ หาร $x^{13} + x + 90$ ลงตัว

27. จงหาจำนวนเต็ม m เมื่อ n เป็นเลขคี่ที่ทำให้

$m^2 = n(n + 2)(n + 4)(n + 6)$

28. จงแสดงว่า $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)$

29. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $2n + 1$ หาร $n^4 + n^2$ ลงตัว

30. เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม จำนวนเต็มในรูปแบบ $\frac{n^4 + n^2}{2n + 1}$ เท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม ABC

จงหาขอบเขตบนค่ามากสุดของ $\sin A + \sin B + \sin C$

32. จงแสดงว่า

8640 หาร $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ ลงตัวทุกค่า x ที่เป็นจำนวนเต็ม

33. จงหาผลคูณของ $3^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \cdot 27^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots (3^n)^{\frac{1}{3^n}} \ldots$

34. จงแสดงว่า ทุกจำนวนเต็มบวก n

$n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ ไม่เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

35. จงหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x^2 - y^2 = 1000$

36. x และ y เป็นจำนวนจริงบวก อัตราส่วนใดมีค่ามากกว่าระหว่าง

$\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ และ $\frac{x^2 - y^2}{x - y}$ โดยแสดงข้อพิสูจน์

37. ค่าของ $\frac{(4 + \sqrt{15})^{\frac{3}{2}} + (4 - \sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6 + \sqrt{35})^{\frac{3}{2}} - (6 - \sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ เท่ากับเท่าใด

38. จงหาผลบวกของ $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ เมื่อ $x < 1$

39. จงแสดงว่าทุกจำนวนเต็มบวก n

$(x - 1)^2$ หาร $x^{n+1} - n(x - 1) - x$ ลงตัว

40.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & & 5 & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 \\ & & & \vdots & & & \end{array}$$

ผลบวกของชั้นที่ 1 เท่ากับ 1

ผลบวกของชั้นที่ 2 เท่ากับ 8

ผลบวกของชั้นที่ 3 เท่ากับ 27

ผลบวกของชั้นที่ 100 เท่ากับเท่าใด

41. บทนิยาม จำนวนเต็มบวก x เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

ถ้ามีจำนวนเต็มบวก y ที่ทำให้ $x = y^2$

บทนิยาม m เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ถ้ามี n ที่ทำให้ $m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

ให้ A = { m | m เป็นจำนวนสามเหลี่ยมและเป็นกำลังสองสัมบูรณ์}

จงแสดงว่า A เป็นเซตอนันต์

42. A = {(x, y, z) | x, y, z เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$x + y + z = 6,$$

$$xy + yz + zx = 11$$

$$xyz = 6\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ $a + b + c = 0$ และ $x + y + z = 0$

จงแสดงว่า $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{x^3 + y^3 + z^3} = \frac{abc}{xyz}$

44. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC

$AP = 4$, $BP = 5$, $CP = 3$ ความยาวด้าน AC เท่ากับเท่าใด

45. ค่าใดมากกว่ากัน $\sqrt[8]{8!}$ และ $\sqrt[9]{9!}$

46. ลำดับ $a_1, a_2, \ldots$ กำหนดโดย

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $5 \mid a_{5n}$ ทุกค่า $n = 1, 2, \ldots$

47. จงแสดงว่า 31 หาร $2^{100} - 1$ ลงตัว

48. จงแสดงว่า $20^{15} - 1$ หารด้วย 11 ลงตัว

49. จงแสดงว่า $20^{15} - 1$ หารด้วย 31 ลงตัว

50. จงแสดงว่า 61 หาร $20^{15} - 1$ ลงตัว

51. ตัวเลขที่หลักหน่วยของ 1999^{100} เท่ากับเท่าใด

52. ตัวเลขที่ 2 หลักสุดท้ายของ 17^{17} เท่ากับเท่าใด

53. ตัวเลขที่ 2 หลักสุดท้ายของ 2543^{100} เท่ากับเท่าใด

54. ตัวเลขที่ 3 หลักสุดท้ายของ 2545^{2002} เท่ากับเท่าใด

โจทย์และแนวคิดสารพันปัญหาคณิตศาสตร์

1. จำนวนรากที่มีค่าน้อยกว่าศูนย์ของสมการ $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$ มีกี่ตัว

1. **ตอบ 1.**

แนวคิด $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$

$$x^4 - 4x^2 + 4 = 5x^3 + 7x$$

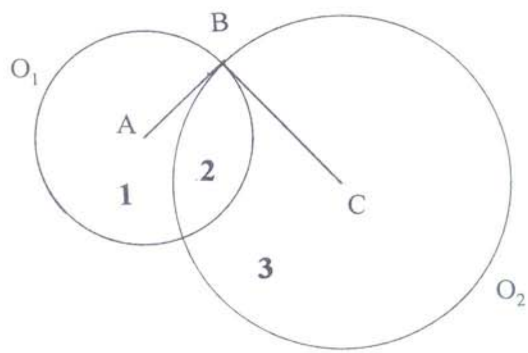
$$(x^2 - 2)^2 = x(5x^2 + 7)$$

เพราะว่า $(x^2 - 2)^2 \geq 0$ และ $5x^2 + 7 \geq 0$

เพราะฉะนั้น $(x^2 - 2)^2 = x(5x^2 + 7)$ ก็ต่อเมื่อ $x > 0$

สรุปไม่มี $x < 0$ ที่ทำให้ $x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$

2. วงกลม O_1 มีรัศมี 15 เซนติเมตร, วงกลม O_2 มีรัศมี 20 เซนติเมตร ตัดกันดังภาพทำให้ $A\hat{B}C = 90°$



ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างพื้นที่ส่วนที่ 1 และ 3 เท่ากับเท่าใด

2. ตอบ 175π

แนวคิด ให้ x = พื้นที่ส่วนที่ 1

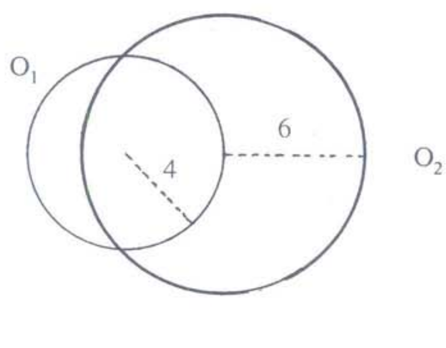
y = พื้นที่ส่วนที่ 2

z = พื้นที่ส่วนที่ 3

$$
\begin{aligned}
|\text{พื้นที่ส่วนที่ 1} - \text{พื้นที่ส่วนที่ 3}| &= |x - z| \\
&= |x + y - y - z| \\
&= |(x + y) - (y + z)| \\
&= |\text{พื้นที่วงกลม } O_2 - \text{พื้นที่วงกลม } O_1| \\
&= |\pi 20^2 - \pi 15^2| \\
&= |400\pi - 225\pi| \\
&= 175\pi
\end{aligned}
$$

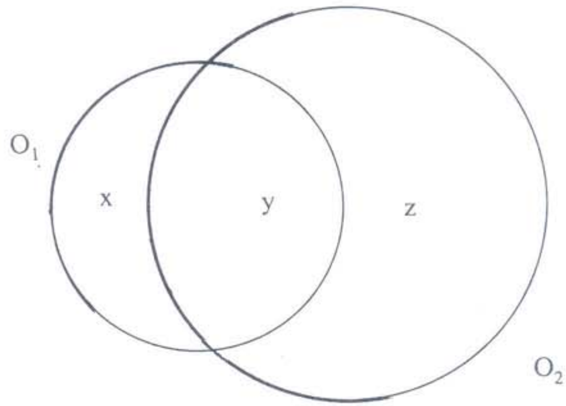
3. O_1 เป็นวงกลมรัศมี 4 เซนติเมตร

O_2 เป็นวงกลมรัศมี 6 เซนติเมตร และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนวงกลม O_1 ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพื้นที่ซึ่งอยู่นอกส่วนที่ซ้อนกันเท่ากับเท่าใด



3. ตอบ 20π

แนวคิด



ค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของพื้นที่ซึ่งอยู่นอกส่วนที่ซ้อนกัน = $|x - z|$

$$= |(x + y) - (z + y)|$$

$$= |\text{พื้นที่วงกลม } O_1 - \text{พื้นที่วงกลม } O_2|$$

$$= |\pi 4^2 - \pi 6^2|$$

$$= |16\pi - 36\pi|$$

$$= 20\pi$$

4. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$A = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$B = \{x \in U \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$|n(A - B) - n(B - A)|$ เท่ากับเท่าใด

4. ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 98, 100\}$, $n(A) = 50$

$B = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 96, 99\}$, $n(B) = 33$

$A \cap B = \{x \in U \mid$ 2 หาร x ลงตัว และ 3 หาร x ลงตัว$\}$

$= \{x \in U \mid$ 6 หาร x ลงตัว$\}$

$= \{6, 12, 18, \ldots, 90, 96\}$

$n(A \cap B) = 16$

เพราะฉะนั้น $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 50 - 16 = 34$

$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 33 - 16 = 17$

สรุป $\left| n(A - B) - n(B - A) \right| = \left| 34 - 17 \right| = 17$

วิธีลัด เพราะว่า $\left| n(A - B) - n(B - A) \right|$

$= \left| n(A - B) + n(A \cap B) - n(A \cap B) - n(B - A) \right|$

$= \left| (n(A - B) + n(A \cap B)) - (n(B - A) + n(A \cap B)) \right|$

$= \left| n(A) - n(B) \right|$

$= \left| 50 - 33 \right| = 17$

จะเห็นได้ว่าเราสามารถหาค่าได้โดยไม่ต้องรู้ค่า $n(A \cap B)$

5. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = (n + 1)! - 1$

5. ข้อพิสูจน์ $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + (n - 1)[(n - 1)!] + n(n!)$

$= 2(1!) - (1!) + 3(2!) - 2! + 4(3!) - 3! + \ldots$

$+ n(n - 1)! - (n - 1)! + (n + 1)(n!) - n!$

$= 2(1!) + 3(2!) + 4(3!) + 5(4!) \ldots + n(n - 1)! + (n + 1)(n!)$

$- 1! - 2! - 3! - \ldots - (n - 1)! - n!$

$= 2! + 3! + 4! + 5! \ldots + n! + (n + 1)! - 1! - 2! - 3! - \ldots - (n - 1)! - n!$

$= (n + 1)! - 1!$

6. จำนวนเต็มบวก 3 แยกเป็นผลบวกย่อยของจำนวนเต็มบวกได้ 4 วิธี คือ

3, 2 + 1, 1 + 2 และ 1 + 1 + 1

จำนวนเต็มบวก 5 แยกเป็นผลบวกย่อยได้กี่วิธี

6. ตอบ 16 วิธี

แนวคิด จำนวนเต็มบวก 5 แยกเป็นผลบวกย่อยได้ดังนี้

1 + 1 + 1 + 1 + 1

1 + 1 + 1 + 2 , 1 + 1 + 2 + 1 , 1 + 2 + 1 + 1 , 2 + 1 + 1 + 1

1 + 2 + 2 , 2 + 1 + 2 , 2 + 2 + 1

2 + 3 , 3 + 2

1 + 1 + 3 , 1 + 3 + 1 , 3 + 1 + 1

1 + 4 , 4 + 1

5

รวมวิธีทั้งหมด 16 วิธี

หมายเหตุ การนับจำนวนวิธีขณะนี้ถือว่าลำดับของตัวเลข 1 + 2 + 2, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 2 มีลำดับที่ของการบวกต่างกัน ซึ่งหากพิจารณาเป็นลำดับ $a_1 + a_2 + a_3 = 5$

$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 2$

$a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 1$

$a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2$

จะเห็นชัดเจนมากขึ้นว่าแตกต่างกัน คำถามที่รัดกุมขึ้นในลักษณะของลำดับคือมีลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ กี่ลำดับที่ทำให้ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 5$ ซึ่งคำตอบคือ 16 ลำดับ

ต่อไปเราจะพิจารณาการคำนวณเพื่อให้เห็นเป็นกรณีทั่วไป

เพราะว่า $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

หรือ 1 □ 1 □ 1 □ 1 □ 1 = 5

เพราะฉะนั้นในช่องสี่เหลี่ยมเราอาจใส่เครื่องหมาย + หรือ , ก็ได้ ซึ่งจะทำให้เกิดลำดับของตัวเลขที่มีผลบวกเท่ากับ 5 ตัวอย่างเช่น

$1, 1 + 1, 1 + 1 = 1, 2, 2$

$1 + 1, 1 + 1, 1 = 2, 2, 1$

$1 + 1 + 1, 1 + 1 = 3, 2$

$1 + 1, 1 + 1 + 1 = 2, 3$

เพราะฉะนั้นการนับจำนวนของลำดับ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ที่มีผลบวกเป็น 5 จะเท่ากับจำนวนวิธีที่เราจะแทนเครื่องหมายในช่อง □ ด้วย + หรือ , ซึ่งจะได้ $2^4 = 16$ วิธี

ตัวอย่าง จงหาจำนวนของลำดับจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ ที่ทำให้ $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 4$

ตอบ 8

แนวคิด 1 □ 1 □ 1 □ 1 = 4

ในช่อง □ อาจเป็น + หรือ ,

เพราะฉะนั้นจำนวนลำดับที่แตกต่างกันมีทั้งหมด $2^3 = 8$ วิธี

มีดังนี้ $1 + 1 + 1 + 1,\ 1 + 1 + 2,\ 1 + 2 + 1,\ 2 + 1 + 1,\ 1 + 3,\ 3 + 1,\ 2 + 2,\ 4$

สรุปสำหรับกรณีทั่วไป จำนวนของลำดับจำนวนเต็มบวก $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ที่ทำให้ $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ มีทั้งหมดเท่ากับ 2^{n-1}

7. กำหนดให้ $A = \{1, -2, 3, 4, -6\}$ เป็นเซตสัมประสิทธิ์ของสมการ

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad \ldots(1)$$

ถ้าสัมประสิทธิ์ทุกตัวของสมการมีค่าไม่เท่ากันแล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x = 0$ เป็นรากสมการ
2. $x = 1$ เป็นรากของสมการ
3. ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง
4. ผลบวกของรากทุกตัวของสมการเท่ากับ -2

แนวคิด

ให้ $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

เพราะว่า $f(1) = a + b + c + d + e$

และ a, b, c, d และ e ต่างกันทุกตัว

เพราะฉะนั้น $f(1)$= ผลบวกของสมาชิกใน A

$$= 1 - 2 + 3 + 4 - 6$$

$$= 0$$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นรากของสมการ $f(x) = 0$

สรุปตัวเลือก 2 ถูกต้อง

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านจะแสดงว่าตัวเลือกอื่นๆ ผิดดังนี้

1. เพราะว่า $f(0) = e$ และ ไม่มี 0 อยู่ในเซต A

เพราะฉะนั้น $f(0) \neq 0$

ดังนั้น $x = 0$ ไม่เป็นรากของสมการ

3. ผิดเพราะว่า $x = 1$ เป็นรากของสมการ

4. สมมติ $f(x) = (x - p)(x - q)(x - r)(x - s) = 0$

   จะได้ p, q, r, s เป็นรากของสมการ

   และสัมประสิทธิ์ของ x^3 เท่ากับ $-(p + q + r + s)$

   ดังนั้น $-(p + q + r + s) \;=\; b$

   $-(-2) \;=\; b$ เพราะฉะนั้น $b = 2$

แต่ $2 \notin A$ เพราะฉะนั้น ผลบวกของรากสมการ เท่ากับ -2 ไม่ได้

8.1 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{f(x) \mid f(x) = ax^2 + bx + c \; ; a, b, c \in A\}$$

$$C = \{f \in B \mid f(x) = 0 \text{ มีรากเป็นจำนวนจริง}\}$$

จำนวนสมาชิกของ C เท่ากับเท่าใด

8.1 ตอบ 4

แนวคิด

$$f(x) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

มีรากเป็นจำนวนจริง ก็ต่อเมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

$$b^2 \geq 4ac$$

การพิจารณากรณีที่ $b^2 \geq 4ac$

1. $b = 1$ ไม่มี a, c ที่ทำให้ $b^2 \geq 4ac$

2. $b = 2$ มี $a = 1$ และ $c = 1$ เท่านั้นที่ทำให้ $b^2 \geq 4ac$

3. $b = 3$

$$9 \geq 4ac$$

$$\frac{9}{4} \geq ac$$

$$2.25 \geq ac$$

มีได้ 3 วิธี คือ $a = 1, c = 1$

$a = 1, c = 2$

$a = 2, c = 1$

4. $b = 4$

$$4^2 \geq 4ac$$

$$4 \geq ac$$

4.1 $a = 1$, c เลือกได้ 4 วิธี

4.2 $a = 2$, c เลือกได้ 2 วิธี

4.3 $a = 3$, c เลือกได้ 1 วิธี

4.4 $a = 4$, c เลือกได้ 1 วิธี

สรุปกรณี 4 มีได้ 8 วิธี

5. $b = 5$

$$5^2 \geq 4ac$$

$$25 \geq 4ac$$

$$6.25 \geq ac$$

5.1 $a = 1$, c เลือกได้ 5 วิธี

5.2 $a = 2$, c เลือกได้ 3 วิธี

5.3 $a = 3$, c เลือกได้ 2 วิธี

5.4 $a = 4$, c เลือกได้ 1 วิธี

5.5 $a = 5$, c เลือกได้ 1 วิธี

สรุปกรณี 5 มีได้ 12 วิธี

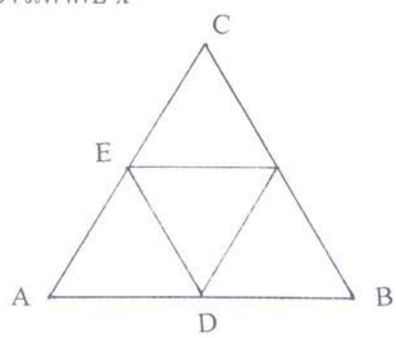
จากทั้ง 5 กรณีจะได้กรณีที่ $b^2 \geq 4ac$ ทั้งหมด = 0 + 1 + 3 + 8 + 12 = 24 วิธี

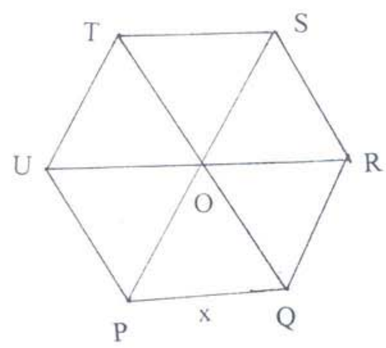
เพราะฉะนั้น n(C) = 24

8.2 ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ถ้าความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC และความยาวเส้นรอบรูปของหกเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เท่ากัน แล้วอัตราส่วนพื้นที่สามเหลี่ยม ABC : พื้นที่หกเหลี่ยมด้านเท่า PQRSTU เท่ากับเท่าใด

8.2 ตอบ 2: 3

แนวคิด ให้ PQ ยาวเท่ากับ x





เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปหกเหลี่ยม PQRSTU เท่ากับ 6x

เพราะว่า 3AB = 6x

เพราะฉะนั้น AB = 2x

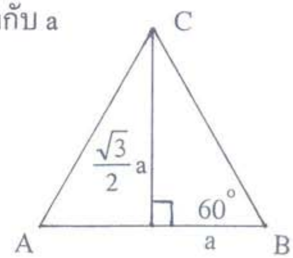
ลากเส้น PS, QT และ RU ตัดกันที่จุด O

เพราะว่า PQRSTU เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า

เพราะฉะนั้น OPQ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า และ

พื้นที่หกเหลี่ยม PQRSTU = 6 พ.ท. Δ OPQ

เพราะว่าสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีความยาวด้านเท่ากับ a



มีพื้นที่ $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$= a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ Δ ABC $= (2x)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2$

และพื้นที่หกเหลี่ยม PQRSTU = 6 พื้นที่ Δ OPQ

$$= 6 \cdot (x^2 \frac{\sqrt{3}}{4})$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

ดังนั้นพื้นที่ Δ ABC : พื้นที่หกเหลี่ยม PQRSTU

$$= \sqrt{3}x^2 : \frac{3\sqrt{3}}{2} x^2$$

$$= 2 : 3$$

9. $A = \{ x + \frac{1}{x} \mid x > 0\}$ ขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A เท่ากับเท่าใด

9. ตอบ 2

แนวคิด เพราะว่า $(x-1)^2 \geq 0$

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0$$

$$x^2 + 1 \geq 2x$$

และ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{x} \geq 2$

สรุป 2 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A

ข้อสังเกต คำถามและแนวคิดข้างต้นจะทำให้ประยุกต์คำถามได้มากเช่น

1. กำหนด $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $x > 0$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ เท่ากับเท่าใด
2. กำหนด $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$; $x \neq 0$ ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$ เท่ากับเท่าใด
3. กำหนด $A = \{ x + 1 + \frac{1}{x} \mid x > 0\}$

   ขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซต A เท่ากับเท่าใด

10. กำหนดให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก

จงหาขอบเขตล่างค่ามากสุดของ

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd}$$

10. ตอบ 81

แนวคิด เพราะว่า $\frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$

$$= x + \frac{1}{x} + 1$$

และ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ทุกค่า $x > 0$

เพราะฉะนั้น $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$ ทุกค่า $x > 0$

สรุป $\frac{x^2+x+1}{x} \geq 3$ ทุกค่า $x > 0$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ว่า $\frac{a^2+a+1}{a} \geq 3$, $\frac{b^2+b+1}{b} \geq 3$, $\frac{c^2+c+1}{c} \geq 3$, $\frac{d^2+d+1}{d} \geq 3$

เพราะฉะนั้น $\frac{a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd} \geq 81$

เพราะว่ามีค่า a = 1, b = 1, c = 1 และ d = 1 ที่ทำให้

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd} = \frac{(1+1+1)(1+1+1)(1+1+1)(1+1+1)}{(1)(1)(1)(1)} = 81$$

เพราะฉะนั้น 81 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ

$$\frac{(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)(d^2+d+1)}{abcd}$$

เมื่อ $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ และ $d > 0$

หมายเหตุ ในกรณีทั่วไปจะได้ว่า

1. $\frac{(a_1^2+1)(a_2^2+1)...(a_n^2+1)^2}{a_1a_2...a_n}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับ 2^n
2. $\frac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)...(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2...a_n}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับ 3^n

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

11. จำนวนเต็มบวก $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

11. ตอบ 1

แนวคิด ให้ $a = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$

$b = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$

และ $x = a+b$

ดังนั้น $x^3 = (a+b)^3$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$= (2+\sqrt{5}) + (2-\sqrt{5}) + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\ x$$

$$= 4 + 3\sqrt[3]{2^2-5}\ x$$

$$= 4 + 3(-1)\,x$$

$$= 4 - 3x$$

หรือ $x^3 + 3x - 4 = 0$

เพราะว่า $x = 1$ ทำให้ $x^3 + 3x - 4 = 1 + 3 - 4 = 0$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x^3 + 3x - 4$ ลงตัว

และ $x^3 + 3x - 4 = (x-1)(x^2 + x + 4)$

เพราะว่า $x^2 + x + 4 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{15}{4} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $x^3 + 3x - 4 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ เท่านั้น

สรุป $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = 1$

12. ถ้า $f(x) = x^2 + x + 1$ แล้ว $f(x)$ หาร $f(x^3)$ เหลือเศษเท่าใด

12. ตอบ 3

แนวคิด $f(x) = x^2 + x + 1$

$$f(x^3) = x^6 + x^3 + 1$$

$$= (x^6 - 1) + (x^3 - 1) + 2 + 1$$

$$= (x^6 - 1) + (x^3 - 1) + 3$$

เพราะว่า $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$

เพราะฉะนั้น $x^3 - 1$ หาร $(x^6 - 1) + (x^3 - 1)$ ลงตัว

เพราะว่า $(x-1)f(x) = (x-1)(x^2+x+1) = (x^3-1)$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ หาร x^3-1 ลงตัว

ดังนั้น $f(x)$ หาร $(x^6-1)+(x^3-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $f(x)$ หาร $f(x^3)$ เหลือเศษ 3

การหาเศษเหลือของ $f(x^3)$ หารด้วย $f(x)$ โดยการตั้งหารยาวจะได้ว่า

$$f(x^3) = (x^4-x^3+2x-2)f(x)+3$$

นั่นคือ $f(x)$ หาร $f(x^3)$ เหลือเศษ 3

13. ถ้า $f(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$

แล้ว $f(x)$ หาร $f(x^5)$ เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

13. ตอบ 5

แนวคิด $f(x) = x^4+x^3+x^2+x+1$

$(x-1)f(x) = (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^5-1$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ หาร x^5-1 ลงตัว

โดยการแทนค่า x ด้วย x^5 ใน $f(x)$ จะได้

$$\begin{aligned} f(x^5) &= x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1 \\ &= (x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)+4+1 \end{aligned}$$

เพราะว่า $x^{20}-1 = (x^{10}-1)(x^{10}+1) = (x^5-1)(x^5+1)(x^{10}+1)$

$x^{15}-1 = (x^5-1)(x^{10}+x^5+1)$

$x^{10}-1 = (x^5-1)(x^5+1)$

เพราะฉะนั้น x^5-1 หาร $(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)$ ลงตัว

เพราะว่า $f(x)$ หาร x^5-1 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $f(x)$ หาร $(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)$ ลงตัว

เพราะว่า $f(x^5) = (x^{20} - 1) + (x^{15} - 1) + (x^{10} - 1) + (x^5 - 1) + 5$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ หาร $f(x^5)$ เหลือเศษ 5

14. จงหาค่าของ $(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1)$

14. ตอบ $\frac{1}{2}(3^{2^{n+1}} - 1)$

แนวคิด $(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1)$

$$= \frac{(3^{2^0} - 1)}{(3^{2^0} - 1)}(3^{2^0} + 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{2^1} - 1)(3^{2^1} + 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{2^2} - 1)(3^{2^2} + 1) \dots (3^{2^n} + 1)$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{2}(3^{2^n} - 1)(3^{2^n} + 1)$$

$$= \frac{1}{2}(3^{2^{n+1}} - 1)$$

15. a, b, c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม ABC จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ แล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

15. ข้อพิสูจน์

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2) = 0$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$$

เพราะฉะนั้น $a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0$

นั่นคือ $a = b = c$ เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

16. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3} = \frac{199}{242}$

16. ตอบ $n = 10$

แนวคิด
$$\frac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3} = \frac{199}{242}$$
$$\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3} + 1 = \frac{199}{242} + 1$$
$$\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3} + 1 = \frac{199+242}{242}$$
$$\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n)^3}{2^3+4^3+\ldots+(2n)^3} = \frac{441}{242}$$

เพราะว่า $1^3+2^3+\ldots+(2n)^3 = [\frac{2n}{2}(2n+1)]^2 = n^2(2n+1)^2$

และ $2^3+4^3+\ldots+(2n)^3 = 2^3(1^3+2^3+\ldots+n^3)$
$$= 8(\frac{n}{2}(n+1))^2 = 2n^2(n+1)^2$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{n^2(2n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} = \frac{441}{242}$$
$$\frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{441}{121} = \frac{(21)^2}{(11)^2}$$
$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{21}{11}$$
$$n = 10$$

17. จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$a_1x + a_2y = a_3$$
$$a_4x + a_5y = a_6$$

เมื่อ $a_1, a_2, \ldots, a_6$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีผลต่างร่วมไม่เท่ากับศูนย์

17. ตอบ $x = -1$, $y = 2$

แนวคิด ให้ a เป็นพจน์แรก และ d เป็นผลต่างร่วม จะได้

$$ax + (a + d)y = a + 2d \quad \text{............... (1)}$$

$$(a + 3d)x + (a + 4d)y = a + 5d \quad \text{............... (2)}$$

$(2) - (1)$;

$$3dx + 3dy = 3d$$

$$x + y = 1$$

$$y = 1 - x$$

แทนค่าในสมการ (1) $\quad ax + (a + d)(1 - x) = a + 2d$

$$ax + a - ax + d - dx = a + 2d$$

$$-dx = d$$

เพราะว่า $d \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\quad x = -1$

ดังนั้น $y = 2$

18. $A = \{(x, y) \mid x, y$ เป็นจำนวนเต็มและ $x^2 - 3y^2 = 17\}$

จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด

18. ตอบ 0

แนวคิด

กรณีที่ 1 3 หาร x ลงตัว

เพราะว่า $3 \mid x^2$ และ $3 \mid 3y^2$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (x^2 - 3y^2)$

แต่ $17 = x^2 - 3y^2$

เพราะฉะนั้น $3 \mid 17$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น กรณีที่ 1 เป็นไปไม่ได้

สรุปกรณีที่ 1 ไม่มี x ที่ทำให้ $x^2 - 3y^2 = 17$

กรณีที่ 2 3 หาร x เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้น $x = 3n + 1$

$$(3n + 1)^2 - 3y^2 = 17$$

$$9n^2 + 6n + 1 - 3y^2 = 17$$

$$9n^2 + 6n - 3y^2 = 16$$

$$3(3n^2 + 2n - y^2) = 16$$

$$3n^2 + 2n - y^2 = \frac{16}{3}$$

แต่ $3n^2 + 2n - y^2$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม

สรุปกรณีที่ 2 ไม่มี x ที่ทำให้ $x^2 - 3y^2 = 17$

กรณีที่ 3 3 หาร n เหลือเศษ 2

เพราะฉะนั้น $x = 3n + 2$

$$(3n + 2)^2 - 3y^2 = 17$$

$$9n^2 + 12n + 4 - 3y^2 = 17$$

$$9n^2 + 12n - 3y^2 = 13$$

$$3(3n^2 + 4n - y^2) = 13$$

$$3n^2 + 4n - y^2 = \frac{13}{3}$$

แต่ $3n^2 + 4n - y^2$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้นในกรณีที่ 3 ไม่มี x ที่ทำให้ $x^2 - 3y^2 = 17$

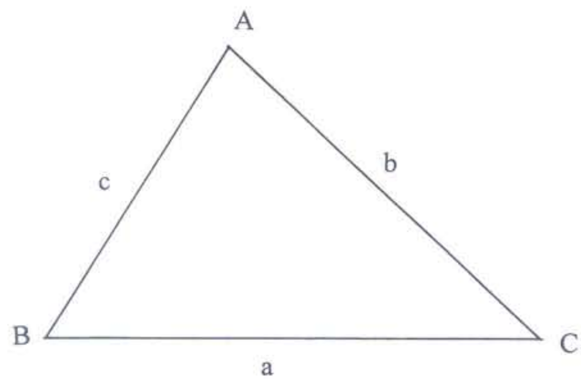
สรุป $A = \varnothing$

19. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า

ถ้า a : b : c เป็นอัตราส่วนความยาวด้านของสามเหลี่ยม

แล้ว $\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c}$ เป็นอัตราส่วนความยาวด้านของสามเหลี่ยม

ข้อพิสูจน์ ให้ a, b, c เป็นความยาวของด้าน BC, AC และ AB ตามลำดับ



เพราะว่า a, b , c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยม และ ผลบวกของ 2 ด้านต้องยาวกว่าด้านที่ 3

เพราะฉะนั้น $a < b + c$

เพราะว่า $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = b + 2\sqrt{b}\sqrt{c} + c$

เพราะฉะนั้น $a < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$

$$(\sqrt{a})^2 < (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$$

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

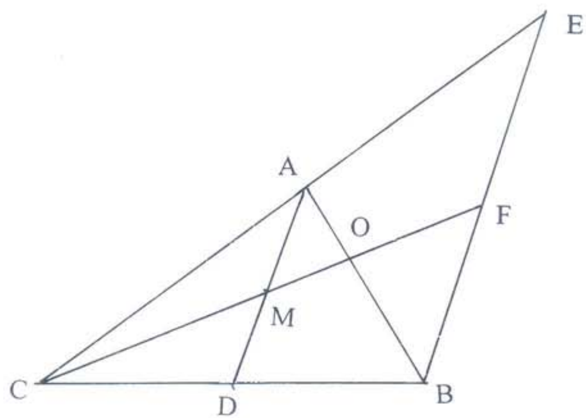
ในทำนองเดียวกัน $\sqrt{b} < \sqrt{a} + \sqrt{c}$ และ $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

สรุป $\sqrt{a} : \sqrt{b} : \sqrt{c}$ เป็นอัตราส่วนสามเหลี่ยม

20. AD เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC และ AM = MD

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า AO : OB = 1 : 2

20. ข้อพิสูจน์



1. ลาก BE ขนานกับ AD

2. ต่อเส้น CA ไปยัง E

3. ต่อเส้น CO ไปตัด BE ที่ F

เพราะว่า AD ขนานกับ BE และ CD = DB

เพราะฉะนั้น CA = AE

เพราะว่า AM ขนานกับ EF และ AC = AE

เพราะฉะนั้น EF = 2AM

เพราะว่า MD ขนานกับ BF และ CD = DB

เพราะฉะนั้น BF = 2MD

ดังนั้น BF = FE

สรุป AB และ CF เป็นเส้นมัธยฐานของ BCE

เพราะฉะนั้น AO : OB = 1 : 2

21. จงหาผลเฉลยของสมการ $(6x + 28)^{\frac{1}{3}} - (6x - 28)^{\frac{1}{3}} = 2$

21. ตอบ $x = 6$ และ $x = -6$

แนวคิด เพราะว่าถ้า $a + b + c = 0$ แล้ว $a^3 + B^3 + c^3 = 3abc$

ให้

$$a = (6x + 28)^{\frac{1}{3}}$$

$$b = -(6x - 28)^{\frac{1}{3}}$$

$$c = -2$$

ดังนั้น $a + b + c = (6x + 28)^{\frac{1}{3}} - (6x - 28)^{\frac{1}{3}} - 2 = 0$

เพราะฉะนั้น $a^3 + B^3 + c^3 = 3abc$

$$(6x + 28) - (6x - 28) - 8 = 3((6x + 28)(6x - 28)\,8)^{\frac{1}{3}}$$

$$48 = 6(36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}}$$

$$8 = (36x^2 - 784)^{\frac{1}{3}}$$

$$512 = 36x^2 - 784$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

ตรวจสอบคำตอบโดยการแทนค่า

$x = 6 \longrightarrow (36 + 28)^{\frac{1}{3}} - (36 - 28)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{3}} = 4 - 2 = 2$

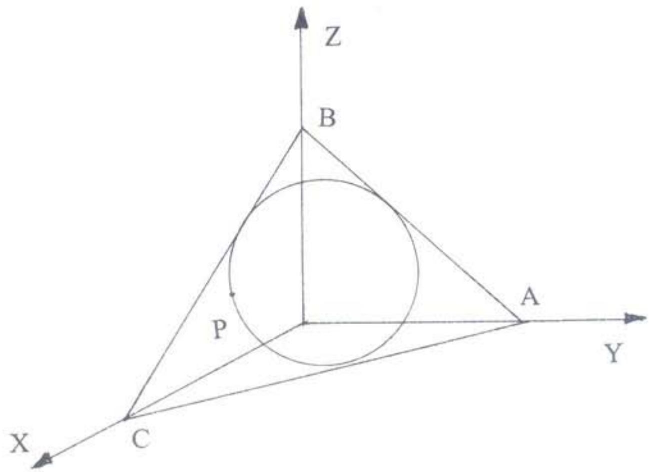
$x = -6 \longrightarrow (-36 + 28)^{\frac{1}{3}} - (-36 - 28)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{1}{3}} - (-64)^{\frac{1}{3}} = -2 + 4 = 2$

สรุป $x = 6$ และ $x = -6$ เป็นคำตอบของสมการ

22. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า O เป็นวงกลมบรรจุอยู่ในสามเหลี่ยม ABC P เป็นจุดบนวงกลม O

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $PA^2 + PB^2 + PC^2$ เป็นค่าคงตัว

22. ข้อพิสูจน์



โดยการใช้สเกลที่เหมาะสมให้พิกัด A, B, C เป็น A(1, 0, 0) , B(0, 1, 0) , C(0, 0, 1) สมการระนาบที่ผ่านจุด ABC คือ $x + y + z = 1$

วงกลมสัมผัสใน Δ ABC เกิดจากทรงกลม $x^2 + y^2 + z^2 = k$

ตัดกับระนาบ $x + y + z = 1$

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดบนวงกลม

$$PA^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$$

$$PB^2 = x^2 + (y-1)^2 + z^2$$

$$PC^2 = x^2 + y^2 + (z-1)^2$$

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$= x^2 - 2^x + 1 + y^2 - 2^y + 1 + z^2 - 2z + 1 + 2k$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 3 + 2k$$

$$= k - 2(1) + 3 + 2k$$

$$= 3k + 1$$

23. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า

$2^y - 1$ หาร $2^x + 1$ ไม่ลงตัว ทุกค่าจำนวนเต็มบวก x และ y

ข้อพิสูจน์ ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณา $2^x + 1$ ในระบบฐานสอง

จะได้ $2^x + 1 = 10000\ldots0 + 1 \qquad = 100\ldots001$

x ตัว x + 1 หลัก

$2^y - 1 = 100\ldots0 - 1 \qquad = 111\ldots1$

y ตัว y หลัก

โดยการตั้งหารยาว

00000000 จำนวน x ตัว

111 …y ตัว… 1)1000..... 001| 1

111….1

100...001

111…y ตัว ..1 หาร 100…x ตัว001 ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ เศษเหลือมีจำนวน 1 เท่ากับตัวหาร คือ 111…1 y หลัก

แต่เศษเหลือจากการลบของวิธีหารยาวทุกขั้นตอนมี 1 เพียง 2 ตัวเท่านั้น

และ $y > 2$

เพราะฉะนั้นไม่มีกรณีที่เศษเหลือจากการหารในแต่ละขั้นตอนจะเท่ากับ

111…1 y หลัก

ดังนั้น 111…1 y หลัก หาร 10000 …001 x + 1 หลัก ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น $2^y - 1$ หาร $2^x + 1$ ไม่ลงตัว

24. ในระบบฐาน B

ถ้าจำนวน $(11111)_B$ เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ แล้วค่า B เท่ากับเท่าใด

24. ตอบ $B = 3$

แนวคิด

บทนิยาม x เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ก็ต่อเมื่อมี y ที่ทำให้ $x = y^2$

เพราะว่า $(11111)_B = B^4 + B^3 + B^2 + B + 1$

และ $B > 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}(B^2 + \frac{B}{2})^2 &= B^4 + B^3 + \frac{B^2}{4} \\ &\le B^4 + B^3 + B^2 + B + 1\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}(B^2 + \frac{B}{2} + 1)^2 &= (B^2 + \frac{B}{2})^2 + 2(B^2 + B) + 1 \\ &= B^4 + B^3 + \frac{B^2}{4} + 2B^2 + 2B + 1 \\ &= B^4 + B^3 + B^2 + B + 1 + (\frac{5B^2}{4} + B) \\ &\ge B^4 + B^3 + B^2 + B + 1\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}(B^2 + \frac{B}{2})^2 &\le B^4 + B^3 + B^2 + B + 1 \\ &\le (B^2 + \frac{B}{2} + 1)^2\end{aligned}$$

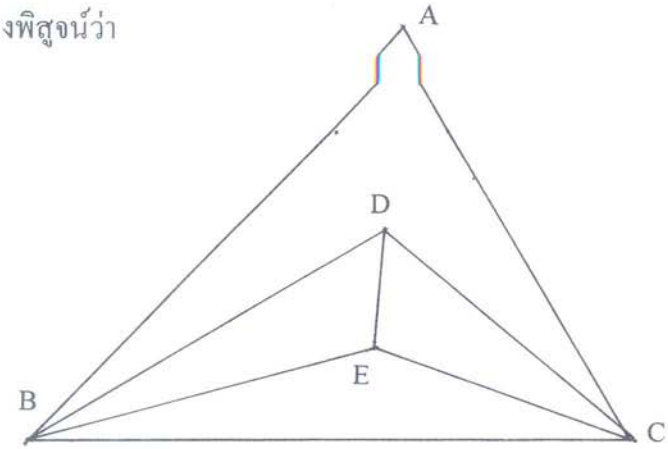
เลือก $(B^2 + \frac{B}{2} + \frac{1}{2})^2 = B^4 + B^3 + B^2 + B + 1$

ทำการกระจายและแยกตัวประกอบจะได้ $(B - 3)(B + 1) = 0$

เลือก $B = 3$

เพราะฉะนั้น $(11111)_3 = [(102)_3]^2$

25. จงพิสูจน์ว่า



BD, BE แบ่งมุม ABC เป็นสามส่วนเท่ากัน

DC, EC แบ่งมุม ACB เป็นสามส่วนเท่ากัน

จงแสดงว่า $B\hat{D}E = E\hat{D}C$

ข้อพิสูจน์

เพราะว่า BE แบ่งครึ่งมุม DBC

CE แบ่งครึ่งมุม DCB

เพราะฉะนั้น E เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมสัมผัสในของสามเหลี่ยม BCD

เพราะว่า BD และ CD เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

เพราะฉะนั้น $B\hat{D}E = E\hat{D}C$

26. จงหาค่า a ที่ทำให้ $x^2 - x + a$ หาร $x^{13} + x + 90$ ลงตัว

26. ตอบ $a = 2$

แนวคิด $f(x) = x^2 - x + a$ $\qquad g(x) = x^{13} + x + 90$

$f(0) = a$ $\qquad g(0) = 90$

$f(1) = a$ $\qquad g(1) = 92$

ถ้า $f(x)$ หาร $g(x)$ ลงตัว

แล้ว $f(0)$ หาร $g(0)$ ลงตัว และ $f(1)$ หาร $g(1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น a ต้องหาร 90 และ 92 ลงตัว

เพราะว่า $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$

$92 = 2 \cdot 41$

เพราะฉะนั้น $a = 2, -2, 1$ หรือ -1

เพราะว่า $f(-1)$ หาร $g(-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $f(-1) = a + 2$ ต้องหาร $g(-1) = 88$ ลงตัว

ดังนั้น $a \neq -2$, $a \neq 1$

เพราะว่า $f(-2)$ หาร $g(-2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $f(-2) = a + 6$ ต้องหาร $g(-2) = -8104$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $a \neq -1$

สรุป $a = 2$ เท่านั้น

หมายเหตุ โดยการตั้งหารยาวจะได้ว่า $\dfrac{x^{13}+x+90}{x^2-x+2}$

$= x^{11} + x^{10} - x^9 - 3x^8 - x^7 + 5x^6 + 7x^5 - 3x^4 - 17x^3 - 11x^2 + 23x + 45$

27. จงหาจำนวนเต็ม m เมื่อ n เป็นเลขคี่ที่ทำให้ $m^2 = n(n+2)(n+4)(n+6)$

27. ตอบ $m = 3, -3$ และ $n = -3$

แนวคิด $n(n+2)(n+4)(n+6) = m^2$

$(n^2+2n)(n^2+10n+24) = m^2$

$n^4 + 10n^3 + 24n^2 + 2n^3 + 20n^2 + 48n = m^2$

$$n^4 + 12n^3 + 44n^2 + 48n + 16 = m^2 + 16$$

$$(n^2 + 6n + 4)^2 = m^2 + 4^2$$

จากทฤษฎีบทของพีทากอรัส จะได้ว่าอัตราส่วนของจำนวนเต็มบวกที่ทำให้เกิดสามเหลี่ยมมุมฉากคือ 3 : 4 : 5 , 5 : 12 : 13 , 7 : 24 : 25 , ...

เพราะฉะนั้น $(n^2 + 6n + 4)^2 = 5^2$ และ $m^2 = 9$

$n^2 + 6n + 4 = -5$ หรือ $n^2 + 6n + 4 = 5$

$n^2 + 6n + 9 = 0$ หรือ $n^2 + 6n - 1 = 0$

$(n + 3)^2 = 0$ หรือ $n^2 + 6n - 1 = 0$

สรุป $m = 3$ หรือ -3 และ $n = -3$

28. จงแสดงว่า $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)$

28. ข้อพิสูจน์ เพราะว่า 1, 3, 5, 7,..., 2n – 1 มีจำนวนข้อมูลเท่ากับ n ตัว

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{1}{n}(1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1)$

$= \frac{1}{n}[(1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2n) - (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n)]$

$= \frac{1}{n}[\frac{2n}{2}(2n + 1) - 2(1 + 2 + \ldots + n)]$

$= \frac{1}{n}[n(2n + 1) - 2(\frac{n}{2}(n + 1))] = \frac{1}{n}[2n^2 + n - n^2 - n]$

$= n$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 1))^{\frac{1}{n}}$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิต > ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น $n > (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n - 1))^{\frac{1}{n}}$

สรุป $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n - 1)$

29. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $2n+1$ หาร n^4+n^2 ลงตัว

29.ตอบ $n = 2$

แนวคิด $$\frac{n^4+n^2}{2n+1} = \frac{n^2(n^2+1)}{2n+1} = \frac{n^2}{4}\left(\frac{4n^2+4}{2n+1}\right)$$
$$= \left(\frac{n}{2}\right)^2\left(2n-1+\frac{5}{2n+1}\right)$$

เพราะว่า $(1)(2n+1)-2n = 1$

เพราะฉะนั้น n และ $2n+1$ ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

เพราะฉะนั้น $\frac{n^4+n^2}{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

ก็ต่อเมื่อ $\frac{n}{2}$ และ $\frac{5}{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม

ก็ต่อเมื่อ n เป็นเลขคู่ และ $2n+1 = \pm 5, \pm 1$

สรุปค่า n ที่ใช้ได้คือ $n = 2$

หมายเหตุ $n = 0, -1$ ทำให้ $2n+1$ หาร n^4+n^2 ลงตัว

30. เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มในรูปแบบ $\frac{n^4+n^2}{2n+1}$ มีค่าเท่าใด

30.ตอบ 4

แนวคิด เพราะว่า $\frac{n^4+n^2}{2n+1}$ เป็นจำนวนเต็ม เมื่อ $n = 2$ เท่านั้น

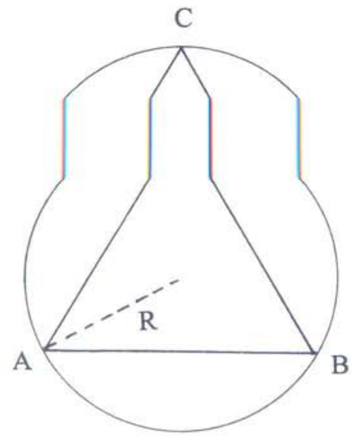
เพราะฉะนั้น $\frac{2^4+2^2}{2(2)+1} = \frac{20}{5} = 4$

31. กำหนดให้ $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ เป็นมุมภายในสามเหลี่ยม ABC

จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\sin A + \sin B + \sin C$

31.ตอบ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

แนวคิด



จากอัตราส่วน $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

เมื่อ R เป็นรัศมีวงกลมที่ล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC

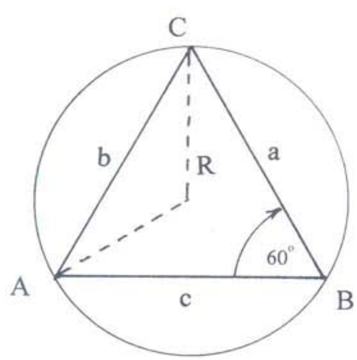
ดังนั้น $2R \sin A = a$

$2R \sin B = b$

$2R \sin C = c$

$2R(\sin A + \sin B + \sin C) = a + b + c$

เพราะว่าสามเหลี่ยมที่บรรจุอยู่ในวงกลมเดียวกันสามเหลี่ยมด้านเท่าจะเป็นสามเหลี่ยมที่มีเส้นรอบรูปยาวที่สุด



$$a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120^\circ$$
$$= 3R^2$$
$$a = R\sqrt{3}$$

ดังนั้น $a + b + c = 3\sqrt{3}\,R$

เพราะว่า ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ เพราะฉะนั้น $a + b + c \le 3\sqrt{3}\,R$

ดังนั้น $2R\,(\sin A + \sin B + \sin C) \le 3\sqrt{3}\,R$

$$\sin A + \sin B + \sin C \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

เพราะว่ามี $A = B = C = 60^\circ$ ทำให้

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 60^\circ + \sin 60^\circ + \sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

สรุป $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $\sin A + \sin B + \sin C$

32. จงแสดงว่า

8640 หาร $x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$ ลงตัวทุกค่า x ที่เป็นจำนวนเต็ม

32. ข้อพิสูจน์ ให้ $f(x) = x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3$

$$x^9 - 6x^7 + 9x^5 - 4x^3 = x^3(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 4)$$
$$= x^3(x-2)(x+2)(x-1)^2(x+1)^2$$

เพราะฉะนั้น f(x) อาจเขียนเป็น 3 รูปแบบ

รูปแบบที่ 1 $f(x) = [(x-1)\,x(x+1)][(x-2)(x-1)\,x][x(x+1)(x+2)]$

รูปแบบที่ 2 $f(x) = [(x-2)(x-1)\,x\,(x+1)(x+2)][(x-1)\,x][x(x+1)]$

รูปแบบที่ 3 $f(x) = [(x-2)(x-1)x(x+1)][(x-1)x(x+1)(x+2)]x$

พิจารณารูปแบบที่ 1

เพราะว่าจำนวนเต็มใดๆ ต้องอยู่ในรูปแบบ $3n$, $3n+1$ หรือ $3n+2$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (x-1)x(x+1)$

$3 \mid (x-2)(x-1)x$

$3 \mid x(x+1)(x+2)$

ดังนั้น $3^3 \mid f(x)$

พิจารณารูปแบบที่ 2

เพราะว่าจำนวนเต็มใดๆ ต้องอยู่ในรูป $5n+1$, $5n+2$, $5n+3$, $5n+4$ หรือ $5n$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

เพราะฉะนั้น $5 \mid (x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)$

พิจารณารูปแบบที่ 3

เพราะว่า $2^3 \mid (x-2)(x-1)x(x+1)$

และ $2^3 \mid (x-1)x(x+1)(x+2)$

เพราะฉะนั้น $2^6 \mid f(x)$

จากทั้ง 3 รูปแบบพบว่า $3^3 \mid f(x)$, $5 \mid f(x)$, $2^6 \mid f(x)$

และ 2, 3, 5 เป็นจำนวนเฉพาะ เพราะฉะนั้น $2^6 \cdot 3^3 \cdot 5 \mid f(x)$

สรุป $8640 \mid f(x)$

33. จงหาผลคูณของ $3^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \cdot 27^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots (3^n)^{\frac{1}{3^n}} \ldots$

33. ตอบ $\sqrt[4]{27}$

แนวคิด $N = 3^{\frac{1}{3}} \cdot 9^{\frac{1}{9}} \cdot 27^{\frac{1}{27}} \cdot \ldots (3^n)^{\frac{1}{3^n}} \ldots$

$$= 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{9}} \cdot 3^{\frac{3}{27}} \cdot \ldots\ 3^{\frac{n}{3^n}} \ldots$$

$$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots}$$

ให้ $M = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \ldots$

$$\frac{M}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{27} + \frac{3}{81} + \ldots$$

$$M - \frac{M}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots \quad = \frac{(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})}$$

$$\frac{2M}{3} = \frac{1}{2}$$

$$M = \frac{3}{4}$$

$$N = 3^M = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{27}$$

34. จงแสดงว่า ทุกจำนวนเต็มบวก n $\quad n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ ไม่เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

34. ข้อพิสูจน์

วิธีที่ 1. $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1$

$$= n^2(n^2 + 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1)$$

$$= n^2(n + 1)^2 + (n + 1)^2$$

$$= (n^2 + 1)(n + 1)^2$$

เพราะว่าไม่มีจำนวนเต็มบวก m ใดๆ ที่ทำให้ $m^2 = n^2 + 1$

เพราะฉะนั้น $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ ไม่เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

วิธีที่ 2. $(n^2 + n)^2 = n^4 + 2n^3 + n^2$

$$< n^2 + 2n^3 + n^2 + (n + 1)^2$$

$$< n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1$$

$$= n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$$

และ $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 < n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1$

$$= (n^2 + n + 1)^2$$

เพราะฉะนั้น $(n^2 + n)^2 < n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$

$$< (n^2 + n + 1)^2$$

เพราะว่าระหว่าง k^2 และ $(k + 1)^2$ จะไม่มี m^2 ที่ทำให้ $k^2 < m^2 < (k + 1)^2$

เพราะฉะนั้นไม่มี m ที่ทำให้ $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1 = m^2$

35. จงหาผลเฉลยที่เป็นจำนวนเต็มบวกของสมการ $x^2 - y^2 = 1000$

35. ตอบ $(x , y) = (35 , 15) , (55 , 45) , (127 , 123) , (251 , 249)$

แนวคิด $x^2 - y^2 = 1000$

$$(x + y)(x - y) = 2^3 5^3$$

เพราะว่า $0 < y < x$ เพราะฉะนั้น $x - y < x + y$

จำแนกกรณีต่างๆ ได้ตามตารางต่อไปนี้

x + y	**x − y**	**x**	**y**
40	25	–	–
50	20	35	15
100	10	55	45
200	5	–	–
250	4	127	123
500	2	251	249
1000	1	–	-

เพราะฉะนั้นคำตอบที่เป็นไปได้คือ

$(x , y) = (35 , 15) , (55 , 45) , (127 , 123) , (251 , 249)$

36. x และ y เป็นจำนวนจริงบวก อัตราส่วนใดมีค่ามากกว่าระหว่าง

$\frac{x^2+y^2}{x+y}$ และ $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

36. ข้อพิสูจน์ $x^2+y^2<(x+y)^2$

$$x^2+y^2<(x+y)^2\ \frac{(x-y)}{(x-y)}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}<\frac{(x+y)(x-y)}{x-y}$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y}<\frac{x^2-y^2}{x-y}$$

37. ค่าของ $\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$ เท่ากับเท่าใด

37. ตอบ $\frac{7}{13}$

แนวคิด $\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$

เอา $2^{\frac{3}{2}}$ คูณบนและล่าง

$$\frac{(4+\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(4-\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(6+\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}-(6-\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}=\frac{(8+2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}+(8-2\sqrt{15})^{\frac{3}{2}}}{(12+2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}+(12-2\sqrt{35})^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{((\sqrt{5}+\sqrt{3})^2)^{\frac{3}{2}}+((\sqrt{5}-\sqrt{3})^2)^{\frac{3}{2}}}{((\sqrt{7}+\sqrt{5})^2)^{\frac{3}{2}}-((\sqrt{7}-\sqrt{5})^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3-(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}$$

$$=\frac{10\sqrt{5}+18\sqrt{5}}{42\sqrt{5}+10\sqrt{5}}$$

$$=\frac{28}{52}$$

$$=\frac{7}{13}$$

38. จงหาผลบวกของ $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

38. ตอบ $\dfrac{1}{(1-x)^2}$

แนวคิด วิธีที่ 1 $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

วิธีที่ 2 $s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

$$xs = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots$$

$$s - xs = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

$$(1-x)s = \frac{1}{1-x}$$

$$s = \frac{1}{(1-x)^2}$$

เพราะฉะนั้น $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

39. จงแสดงว่าทุกจำนวนเต็มบวก n

$(x-1)^2$ หาร $x^{n+1} - n(x-1) - x$ ลงตัว

ข้อพิสูจน์

$$\begin{aligned}
x^{n+1} - n(x-1) - x &= x^{n+1} - x - n(x-1) \\
&= x(x^n - 1) - n(x-1) \\
&= x(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) - n(x-1) \\
&= (x-1)[x(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) - n]
\end{aligned}$$

เพราะว่า $(1)(1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1) - n = n - n = 0$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $(x(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1) - n)$ ลงตัว

สรุป $(x-1)^2$ หาร $x^{n+1} - n(x-1) - x$ ลงตัว

40.

1

3 5

7 9 11

13 15 17 19

ผลบวกของชั้นที่ 1 เท่ากับ 1

ผลบวกของชั้นที่ 2 เท่ากับ 8

ผลบวกของชั้นที่ 3 เท่ากับ 27

ผลบวกของชั้นที่ 100 เท่ากับเท่าใด

40. ตอบ 100^3

แนวคิด

1

2

3

:

ชั้นที่ $n-2$ มี $n-2$ ตัว

ชั้นที่ $n-1$ มี $n-1$ ตัว

$$1+2+3+\ldots+(n-1)$$
$$=\frac{(n-1)}{2}(n-1+1)$$
$$=\frac{n}{2}(n-1)$$

ตัวแรกของชั้นที่ n ตัวสุดท้ายของชั้นที่ n

มีตัวเลข n ตัว

ตัวที่	1	2	3	4	5	…	$\frac{n}{2}(n-1)$
ค่าตัวเลข	1	3	5	7	9	…	$2(\frac{n}{2}(n-1))-1$

สรุปตัวเลขตัวแรกของชั้นที่ n เท่ากับ $[2(\frac{n}{2}(n-1))-1]+2$

$= n(n-1)-1+2$

$= n(n-1)+1$

ในชั้นที่ n

ตัวที่	1	2	3	… n
ค่าตัวเลข	$n(n-1)+1$	$n(n-1)+3$	$n(n-1)+5$	… $n(n-1)+1+2(n-1)$

ผลบวกของตัวเลขในแถวที่ n

$= \frac{\text{จำนวนพจน์}}{2}$ (พจน์แรก + พจน์สุดท้าย)

$= \frac{n}{2}[n(n-1)+1+n(n-1)+1+2(n-1)]$

$= \frac{n}{2}[n^2-n+1+n^2-n+1+2n-2]$

$= \frac{2n^3}{2}$

$= n^3$

เพราะฉะนั้นผลบวกในชั้นที่ 100 เท่ากับ 100^3

วิธีที่ 2

จำนวนตัวเลขในชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ n

$$= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

จำนวนตัวเลขในชั้นที่ 1 ถึงชั้นที่ n – 1

$$= \frac{(n-1)n}{2}$$

ผลบวกในชั้นที่ n

= ผลบวก (1 + 3 + 5 + … + ตัวสุดท้ายของชั้นที่ n)

– ผลบวก(1 + 3 + … + ตัวสุดท้ายของชั้นที่ n – 1)

ผลบวก(1 + 3 + 5 + … + ตัวสุดท้ายของชั้นที่ n)

$$= 1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + [\frac{n}{2}(n+1) - 1]\,(2))$$

$$= 1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + n(n+1) - 2)$$

$$= 1 + 3 + 5 + \ldots + (n(n+1) - 1)$$

$$= \frac{\text{จำนวนพจน์}}{2} \quad (\text{พจน์แรก} + \text{พจน์สุดท้าย})$$

$$= \frac{(\frac{n}{2}(n+1))}{2}(1 + (n(n+1) - 1))$$

$$= \frac{n}{4}(n+1)(n(n+1))$$

ในทำนองเดียวกัน

ผลบวก(1 + 3 + 5 + … + ตัวสุดท้ายของชั้นที่ n – 1)

$$= \frac{n-1}{4}(n)(n-1)(n)$$

สรุปผลบวกในชั้นที่ n

$$= \frac{n}{4}(n+1)(n(n+1)) - \frac{(n-1)n(n-1)n}{4}$$

$$= \frac{n^2}{4}\left[(n+1)^2 - (n-1)^2\right]$$

$$= \frac{n^2}{4}\left(((n+1)-(n-1))((n+1)+(n-1))\right)$$

$$= \frac{n^2}{4}(2)(2n)$$

$$= n^3$$

41. บทนิยาม จำนวนเต็มบวก x เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

ถ้ามีจำนวนเต็มบวก y ที่ทำให้ $x = y^2$

บทนิยาม m เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

ถ้ามี n ที่ทำให้ $m = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

ให้ $A = \{ m \mid$ m เป็นจำนวนสามเหลี่ยมและเป็นกำลังสองสัมบูรณ์$\}$

จงแสดงว่า A เป็นเซตอนันต์

ข้อพิสูจน์

ที่มาของจำนวนสามเหลี่ยม	ผลบวก
1	1
1 2 3	6
1 2 3 4 5 6	21

1

2 3

4 5 6 55

7 8 9 10

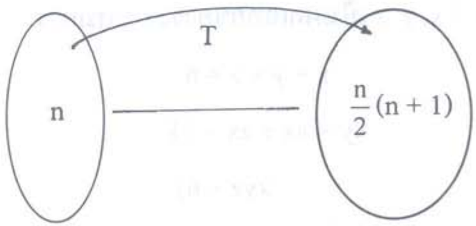
1

2 3

4 5 6 120

7 8 9 10

11 12 13 14 15



$T(n) = \frac{n}{2}(n+1)$ เป็นจำนวนสามเหลี่ยม

สมมติ $T(n) = \frac{n}{2}(n+1)$ เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น มี k ที่ทำให้ $T(n) = k^2$

พิจารณา

$$T(4n(n+1)) = \frac{4n(n+1)}{2}(4n(n+1)+1)$$

$$= 2n(n+1)(4n^2+4n+1)$$

$$= 4\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)(2n+1)^2$$

$$= (2k\,(2n+1))^2$$

สรุป ถ้า T(n) เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

แล้ว T(4n (n + 1)) เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

T(1) = 1 เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

$T(4(1)(1+1)) = T(8) = \frac{8}{2}(8+1) = 4.9 = 6^2$

$T(4(8)(8+1)) = T(32(9)) = T(288) = \frac{288}{2}(288+1) = 41616 = 204^2$

T(1), T(8), T(288), … เป็นกำลังสองสัมบูรณ์

สรุป $\{ n \in I^+ \mid$ T(n) เป็นกำลังสองสัมบูรณ์ $\}$ เป็นเซตอนันต์

42. A = {(x, y, z) | x, y, z เป็นผลเฉลยของระบบสมการ

$$x + y + z = 6$$

$$xy + yz + zx = 11$$

$$xyz = 6\}$$

จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

42. ตอบ 6.

แนวคิด พิจารณาสมการ $(a - r_1)(a - r_2)(a - r_3) = 0$

$$a^3 - (r_1 + r_2 + r_3)\,a^2 + (r_1r_2 + r_2r_3 + r_1r_3)\,a - r_1r_2r_3 = 0$$

เพราะฉะนั้น $a^3 - (x + y + z)\,a^2 + (xy + yz + zx)\,a - xyz = 0$

จะได้ $(a - x)(a - y)(a - z) = 0$

สรุป x , y, z เป็นรากของสมการ

$$a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = 0$$

$(a-1)(a-2)(a-3)=0$

ดังนั้นค่าของ x, y, z เป็นการจับคู่ระหว่างตัวแปร x, y, z กับตัวเลข 1, 2, 3 ซึ่งทำได้ 6 วิธี

สรุป $n(A)=6$

หมายเหตุ $A=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$

43. กำหนดให้ $a+b+c=0$ และ $x+y+z=0$

จงแสดงว่า $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{abc}{xyz}$

ข้อพิสูจน์

เพราะว่า $a+b+c=0$

เพราะฉะนั้น $a^3+b^3+c^3=3abc$

ในทำนองเดียวกัน $x^3+y^3+z^3=3xyz$

สรุป $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{x^3+y^3+z^3}=\dfrac{abc}{xyz}$

หมายเหตุ $a+b+c=0$

$$a+b=-c$$

$$(a+b)^3=(-c)^3$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3=0$$

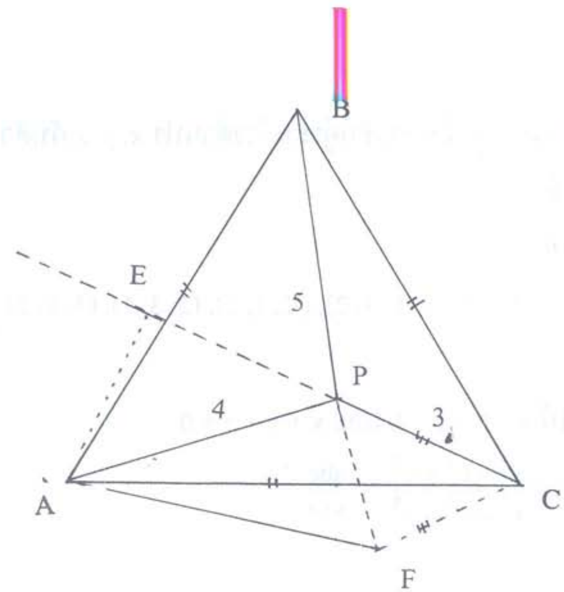
$$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc$$

44. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า P เป็นจุดภายในสามเหลี่ยม ABC

$AP=4, BP=5, CP=3$ ความยาวด้าน AC เท่ากับเท่าใด

44. ตอบ $\sqrt{25+12\sqrt{3}}$

แนวคิด



1. สร้างสามเหลี่ยมด้านเท่า PCF และ P, F อยู่คนละข้างของ AC
2. ลาก AE ตั้งฉากกับ PC

   เพราะว่า $P\hat{C}B = 60^\circ - P\hat{C}A = A\hat{C}F$

   $AC = BC$ และ $CP = FC$

เพราะฉะนั้น Δ PCB , Δ FCA เหมือนกันทุกประการ

ดังนั้น $AF = 5$ ผลที่ตามมาคือ $AF : AP : PF = 5 : 4 : 3$

เพราะฉะนั้น Δ APF เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $A\hat{P}F = 90^\circ$

$$\begin{aligned} A\hat{P}E &= 180^\circ - C\hat{P}F - F\hat{P}A \\ &= 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ \\ &= 30^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น $E\hat{A}P = 60^\circ$

เพราะว่า $AP = 4$

เพราะฉะนั้น $AE = 2$ และ $EP = 2\sqrt{3}$

สรุป $AC^2 = AE^2 + EC^2$

$= 2^2 + (2\sqrt{3} + 3)^2$

$= 4 + 12 + 12\sqrt{3} + 9$

$= 25 + 12\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{25+12\sqrt{3}}$

45. ค่าใดมากกว่ากัน $\sqrt[8]{8!}$ และ $\sqrt[9]{9!}$

45. ตอบ $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$

แนวคิด

วิธีที่ 1. $8! < 9^8$

$(8!)^8\, 8! < (8!)^8\, 9^8$

$(8!)^9 < (8! \cdot 9)^8$

$(8!)^9 < (9!)^8$

$(8!)^{\frac{9}{72}} < (9!)^{\frac{8}{72}}$

$(8!)^{\frac{1}{8}} < (9!)^{\frac{1}{9}}$

$\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$

วิธีที่ 2 กรณีทั่วไป

$1 < n + 1$

$2 < n + 1$

.

.

$n < n + 1$

เพราะฉะนั้น

$$n! < (n+1)^n$$

$$(n!)^n\, n! < (n!)^n (n+1)^n$$

$$(n!)^{n+1} < ((n+1)!)^n$$

$$(n!)^{\frac{n+1}{n(n+1)}} < ((n+1)!)^{\frac{n}{(n+1)n}}$$

$$(n!)^{\frac{1}{n}} < ((n+1)!)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

เมื่อ $n = 8$ จะได้ $\sqrt[8]{8!} < \sqrt[9]{9!}$

46. ลำดับ $a_1, a_2, \ldots$ กำหนดโดย

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,,\ n \geq 3$$

จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $5 \mid a_{5n}$ ทุกค่า $n = 1, 2, \ldots$

ข้อพิสูจน์ $a_1 = 1$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 5$$

เพราะฉะนั้น $5 \mid a_5$

เพราะว่า $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$$= a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-3} + a_{n-4}$$

$$= a_{n-3} + a_{n-4} + 2a_{n-4} + 2a_{n-5} + a_{n-4}$$

$$= a_{n-4} + a_{n-5} + 4a_{n-4} + 2a_{n-5}$$

$$= 5a_{n-4} + 3a_{n-5}$$

การแสดงข้อพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

P(n) แทนข้อความ $5 \mid a_{5n}$

1. P(1) จริง เพราะว่า $5 \mid a_5$

2. สมมติ P(k) จริง

ดังนั้น $5 \mid a_{5k}$

เพราะว่า $a_{5(k+1)} = a_{5k+5}$

$= 5a_{5k+1} + 3a_{5k}$

และ $5 \mid (5a_{5k+1} + 3a_{5k})$ เพราะฉะนั้น $5 \mid a_{5(k+1)}$

สรุป P(k + 1) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น P(n) เป็นจริงทุกค่า n สรุป $5 \mid a_{5n}$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, …

47. จงแสดงว่า 31 หาร $2^{100} - 1$ ลงตัว

47. วิธีทำ $31 = 32 - 1 = 2^5 - 1$

$2^{100} - 1 = (2^5)^{20} - 1$

เพราะว่า $x^{20} - 1 = (x - 1)(x^{19} + x^{18} + x^{17} + \ldots + 1)$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x^{20} - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $2^5 - 1$ หาร $(2^5)^{20} - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $2^5 - 1$ หาร $x^{100} - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 31 หาร $x^{100} - 1$ ลงตัว

48. จงแสดงว่า $20^{15} - 1$ หารด้วย 11 ลงตัว

วิธีทำ $20^{15} - 9^{15}$ หารด้วย $20 - 9$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $20^{15} - 9^{15}$ หารด้วย 11 ลงตัว

$$
\begin{aligned}
20^{15} - 1 &= 20^{15} - 9^{15} + 9^{15} - 1 \\
&= 20^{15} - 9^{15} + (3^2)^{15} - 1 \\
&= 20^{15} - 9^{15} + 3^{30} - 1 \\
&= 20^{15} - 9^{15} + (3^5)^6 - 1 \\
3^5 &= 243 \\
3^5 - 1 &= 242 \text{ หารด้วย 11 ลงตัว}
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $3^5 - 1$ หาร $(3^5)^6 - 1$ ลงตัว เพราะฉะนั้น 11 หาร $(3^5)^6 - 1$ ลงตัว

สรุป 11 หาร $20^{15} - 1$ ลงตัว

หมายเหตุ $x - y$ หาร $x^n - y^n$ ลงตัวเสมอ พิสูจน์โดยง่ายดังนี้

$$
\begin{aligned}
&(x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + y^{n-1}) \\
&= x^n + x^{n-1}y + x^{n-2}y^2 + \ldots + xy^{n-1} - x^{n-1}y - x^{n-2}y^2 - \ldots - xy^{n-1} - y^n \\
&= x^n - y^n
\end{aligned}
$$

49. จงแสดงว่า $20^{15} - 1$ หารด้วย 31 ลงตัว

วิธีทำ
$$
\begin{aligned}
20^{15} - 1 &= 20^{15} - 144^{15} + 144^{15} + 81^{30} - 81^{30} - 1 \\
&= (20^{15} - 144^{15}) + (12^{30} + 81^{30}) - (81^{30} + 1) \qquad \ldots(1)
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $20^{15} - 144^{15}$ หารด้วย $20 - 144$ ลงตัว

และ $20 - 144 = -124$ หารด้วย 31 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 31 หาร $20^{15} - 144^{15}$ ลงตัว ...(2)

$$
\begin{aligned}
12^{30} + 81^{30} &= (12 + 81)(12^{29} - 12^{28}(81) + 12^{27}(81)^2 - \ldots + 81^{29}) \\
&= (93)(12^{29} - 12^{28}(81) + \ldots + 81^{29})
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น 31 หาร $12^{30} + 81^{30}$ ลงตัว ...(3)

$$81^{30}+1 = (3^4)^{30}+1 = 3^{120}+1 = (3^5)^{24}+1$$
$$= (3^5)^{24}+5^{24}-5^{24}+1$$
$$= (3^5)^{24}+5^{24}-(5^3)^8+1$$
$$= (3^5)^{24}+5^{24}-((5^3)^8-1)$$

เพราะว่า (3^5+5) หาร $(3^5)^{24}+5^{24}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(3^5+5) = 243+5 = 248 = 31(8)$ หาร $(3^5)^{24}+5^{24}$ ลงตัว

นั้นคือ 31 หาร $(3^5)^{24}+5^{24}$ ลงตัว เพราะว่า 5^3-1 หาร $((5^3)^8-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $5^3-1 = 125-1 = 124 = 31(4)$ หาร $((5^3)^8-1)$ ลงตัว

นั้นคือ 31 หาร $((5^3)^8-1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 31 หาร $(3^5)^{24}+5^{24}-((5^3)^8-1) = 81^{30}+1$ ...(4)

จาก (1),(2),(3) และ (4) สรุปได้ว่า 31 หาร $20^{15}-1$ ลงตัว

วิธีที่ 2 $20^{15}-1 = 4^{15}5^{15}-1$

$$= 4^{15}5^{15}-4^{15}+4^{15}-1 = 4^{15}(5^{15}-1)+2^{30}-1$$
$$= {}^{15}((5^3)^5-1)+(2^5)^6-1 = 4^{15}((125)^5-1)+(32)^6-1$$
$$= 4^{15}(125-1)(125^4+125^3+...+1)+(32-1)(32^5+32^4+..+1)$$
$$= 4^{15}(124)(125^4+125^3+...+1)+(31)(32^5+32^4+..+1)$$
$$= 31(4^{15}(4)(125^4+125^3+...+1)+(32^5+32^4+..+1))$$

สรุป 31 หาร $20^{15}-1$ ลงตัว

หมายเหตุ $(x+y)(x^{2n-1}-x^{2n-2}y+x^{2n-3}y^2-\ldots+y^{2n-1})$

$$= x^{2n}-x^{2n-1}y+x^{2n-2}y^2-\ldots+xy^{2n-1}$$
$$+x^{2n-1}y-x^{2n-2}y^2-\ldots+xy^{2n-1}+y^{2n}$$
$$= x^{2n}+y^{2n}$$

เพราะฉะนั้น $(x+y)$ หาร $x^{2n}+y^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

50. จงแสดงว่า 61 หาร $20^{15} - 1$ ลงตัว

50. วิธีทำ $20^{15} - 81^{15} = (20 - 81)(20^{14} + 20^{13}81 + 20^{12}81^{2} + \ldots + 20 \cdot 81^{13} + 81^{14})$

$$= (-61)(20^{14} + 20^{13} \cdot 81 + \ldots + 81^{14})$$

เพราะฉะนั้น $61 \mid 20^{15} - 81^{15}$ เพราะว่า $81^{15} = (3^{4})^{15} = 3^{60} = (3^{10})^{6} = (59049)^{6}$

และ $59049^{6} - 1 = (59049 - 1)(59049^{5} + 59049^{4} + \ldots + 1)$

$$= (59048)(59049^{5} + 59049^{4} + \ldots + 1)$$

$$= (968)(61)(59049^{5} + 59049^{4} + \ldots + 1)$$

เพราะฉะนั้น $61 \mid 81^{5} - 1$ เพราะว่า $20^{15} - 1 = 20^{15} - 81^{15} + 81^{15} - 1$

และ $61 \mid (20^{15} - 81^{15})$ และ $61 \mid (81^{15} - 1)$ เพราะฉะนั้น $61 \mid (20^{15} - 1)$

51. การหาหลักหน่วยของ 1999^{100}

วิธีทำ $1999^{100} = (2000 - 1)^{100}$

$$= 2000^{100} - 100(2000^{99}) + \ldots. - (100)2000 + 1$$

เพราะฉะนั้น 1999^{100} มีหลักหน่วยเป็นเลข 1

52. การหา 2 หลักสุดท้ายของ 17^{17}

วิธีทำ $17^{16} = (17^{2})^{8} = 289^{8} = (300 - 11)^{8}$

$$= 300^{8} - 8(300^{7})(11) + \ldots - 8(300)(11^{7}) + 11^{8}$$

เพราะว่า 100 หาร $300^{8} - 8(300^{7})(11) + \ldots - 8(300)(11^{7})$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น

เศษจากการหาร 17^{16} ด้วย 100 เท่ากับเศษจากการหาร 11^{8} ด้วย 100

$11^{8} = 121^{4} = (100 + 21)^{4} = 100^{4} + 3(100^{3})(21) + \ldots + 4(100)(21^{3}) + 21^{4}$

เพราะว่า 100 หาร $100^{4} + 3(100^{3})(21) + \ldots + 4(100)(21^{3})$ ลงตัว

เพราะฉะนั้นเศษจากการหาร 11^{8} ด้วย 100 = เศษจากการหาร 21^{4} ด้วย 100

$21^4 = (441)(441) = (400+41)(400+41) = (400)(400) + 2(400)(41) + 1681$

เพราะฉะนั้น 100 หาร 21^4 เหลือเศษ 81 สรุป 100 หาร 17^{16} เหลือเศษ 81

เพราะฉะนั้น $17^{16} = 100k + 81$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกบางค่า

เพราะว่า $17^{17} = 17(100k + 81) = 1700k+1377 = 1700k+1300+77$

เพราะฉะนั้น 2 หลักสุดท้ายของ 17^{17} คือ 77

หมายเหตุ $17^{17} = 827240261886336764177$

53. การหา 2 หลักสุดท้ายของ 2543^{100}

วิธีทำ $2543^{100} = (2500 + 43)^{100}$

$$= 2540^{100} + 100(2540^{99})(3) + ...+ 100(2540)(3)^{99} + 3^{100}$$

เพราะว่า $100 \mid (2540^{100} + 100(2540^{99}) + ...+ 100(2540)(3)^{99})$

เพราะฉะนั้น เศษจากการหาร 2543^{100} ด้วย 100 เท่ากับเศษจากการหาร 3^{100} ด้วย 100

$3^{100} = (3^2)^{50} = 9^{50} = (10-1)^{50} = 10^{50} - 50(10)^{49} + ... - 50(10)^{49} + 1$

เพราะว่า $100 \mid (10^{50} - 50(10)^{49} + ... - 50(10)^{49})$

เพราะฉะนั้นเศษจากการหาร 3^{100} ด้วย 100 เท่ากับ 1

สรุป 2543^{100} มี 2 หลักสุดท้ายเท่ากับ 01

54. การหา 3 หลักสุดท้ายของ 2545^{2002}

วิธีทำ $(2545)^{2000} = (2540 + 5)^{2000}$

$$= 2540^{2000} + 2000(2540^{1999})(5) + ... + 2000(2545)5^{1999} + 5^{2000}$$

เพราะว่า $1000 \mid (2540^{2000} + 2000(2540^{1999})(5) + ... + 2000(2545)5^{1999})$

เพราะฉะนั้นเศษที่หาร 2545^{2000} ด้วย 1000 = เศษที่หาร 5^{2000} ด้วย 1000

$5^{2000} = (5^4)^{500} = 625^{500}$

$= (620 + 5)^{500} = 620^{500} + 500(620^{499})(5) + \ldots + 500(620)5^{499} + 5^{500}$

เพราะว่า $1000 \mid (620^{500} + 500(620^{499})(5) + \ldots + 500(620)5^{499})$

เพราะฉะนั้นเศษที่ได้จากหาร 5^{2000} ด้วย 1000 = เศษที่หาร 5^{500} ด้วย 1000

$5^{500} = (5^5)^{100} = 3125^{100} = (3120 + 5)^{100}$

$= 3120^{100} + 100(3120^{99})(5) + \ldots + 100(3120)5^{99} + 5^{100}$

เพราะว่า $1000 \mid (3120^{100} + 100(3120^{99})(5) + \ldots + 100(3120)5^{99})$

เพราะฉะนั้นเศษที่ได้จากหาร 5^{500} ด้วย 1000 = เศษที่หาร 5^{100} ด้วย 1000

$5^{100} = (5^5)^{20} = 3125^{20} = (3120+5)^{20}$

$= 3120^{20} + 20(3120^{19})(5) + \ldots + 20(3120)5^{19} + 5^{20}$

เพราะฉะนั้นเศษที่ได้จากหาร 5^{100} ด้วย 1000 = เศษที่หาร 5^{20} ด้วย 1000

$5^{20} = 25^{10} = (20 + 5)^{10} = 2010 + 10(20^9)(5) + \ldots + 10(20)5^9 + 5^{10}$

เพราะฉะนั้นเศษที่ได้จากการหาร 5^{20} ด้วย 1000 = เศษที่หาร 5^{10} ด้วย 1000

$5^{10} = 5^5 5^5 = (3125)(3125)$

$= (3100 + 25)(3100 + 25) = (3100)(3100) + 2(25)(3100) + 625$

เพราะฉะนั้นเศษจากการหาร 5^{10} ด้วย 1000 เท่ากับ 625

ขณะนี้เราสรุปได้ว่า 1000 หาร 2545^{2000} เหลือเศษ 625

นั่นคือ $2545^{2000} = 1000k + 625$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกบางค่า

เพราะว่า $2545^2 = (2500 + 45)^2 = (2500)(2500) + 2(45)(2500) + 2025$

เพราะฉะนั้น 1000 หาร 2545^2 เหลือเศษ 25

นั่นคือ $2545^2 = 1000m + 25$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกบางค่า

เพราะฉะนั้น $2545^{2002} = (2545)^{2000}(2545)^2 = (1000k + 625)(1000m + 25)$

$= (1000k)(1000m) + (1000k)(25) + (625)(1000m) + 15625$

สรุป 1000 หาร 2545^{2002} เหลือเศษ 625

ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

การหาคำตอบของสมการ $(z-1)^n = z^n$

ขอให้ทดลองทำแบบฝึกหัดต่อไปนี้และพยายามสรุปการหาคำตอบในรูปแบบกรณีทั่วไป

1. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^2 = z^2$
2. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^3 = z^3$
3. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^4 = z^4$
4. จงแสดงว่า $(z-1)^{2n} = z^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
   มีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งตัวเสมอ
5. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $(z-1)^{2n} = z^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$
   มีรากเป็นจำนวนจริง เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ $z = \frac{1}{2}$
6. จงแสดงว่า $(z-1)^3 = z^3$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง
7. จงแสดงว่า $(z-1)^5 = z^5$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง
8. จงแสดงว่า $(z-1)^7 = z^7$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง
9. จงแสดงว่า $\{z \in R \mid (z-1)^{2n+1} = z^{2n+1} ; n = 0, 1, 2, \dots\} = \varnothing$
10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(z-1)^n = z^n$

เฉลยการแก้ปัญหาปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

1. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^2 = z^2$

วิธีทำ $\quad (z-1)^2 = z^2$

$$z^2 - 2z + 1 = z^2$$

$$z = \frac{1}{2}$$

2. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^3 = z^3$

วิธีทำ $\quad (z-1)^3 = z^3$

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = z^3$$

$$3z^2 - 3z + 1 = 0$$

$$z = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{-3}}{6}$$

$$= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

$$= \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{3}\, i$$

3. จงหาผลเฉลยของสมการ $(z-1)^4 = z^4$

วิธีทำ $\quad (z-1)^4 = z^4$

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^4 = 1$$

เพราะว่า $\frac{z-1}{z} \neq 1$ และ $1 = \cos 0 + i \sin 0$

เพราะฉะนั้น $\quad \left(\frac{z-1}{z}\right)^4 = \cos(0 + 2k\pi) + i \sin(0 + 2k\pi)$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \qquad , k = 1, 2, 3$$

$$\frac{z-1}{z} = \cos(\frac{2k\pi}{4}) + i\sin(\frac{2k\pi}{4}) \qquad ; k = 1, 2, 3$$

ให้ $w = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$

เพราะฉะนั้น $\frac{z-1}{z} = w^{2k}$

$$z - 1 = zw^{2k}$$

$$(w^{2k} - 1)z = -1$$

$$z = \frac{-1}{w^{2k} - 1}$$

$$= \frac{-1}{\cos(\frac{k\pi}{2}) + i\sin(\frac{k\pi}{2}) - 1}$$

สรุป $\{z \mid (z-1)^4 = z^4\} = \{\frac{-1}{-1 + \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}} \mid k = 1, 2, 3\}$

4. จงแสดงว่า $(z-1)^{2n} = z^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

มีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งตัวเสมอ

วิธีทำ $(z-1)^{2n} = z^{2n}$

$$(\frac{z-1}{z})^{2n} = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \; ; k = 1, 2, 3, \ldots, 2n-1$$

$$\frac{z-1}{z} = \cos(\frac{2k\pi}{2n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{2n})$$

เลือก $k = n$ จะได้ $\frac{z-1}{z} = \cos\pi = -1$

$$z - 1 = -z$$

$$z = \frac{1}{2}$$

5. จงแสดงข้อพิสูจน์ว่า $(z-1)^{2n} = z^{2n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$

มีรากเป็นจำนวนจริง เพียงตัวเดียวเท่านั้น คือ $z = \frac{1}{2}$

วิธีทำ จาก $(\frac{z-1}{z}) = \cos(\frac{2k\pi}{2n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{2n})$

$$= \cos(\frac{k\pi}{n}) + i\sin(\frac{k\pi}{n}) \quad , k = 1, 2, 3, \dots, 2n-1$$

z เป็นจำนวนจริง $\leftrightarrow$ $\frac{z-1}{z}$ เป็นจำนวนจริง

$$\leftrightarrow \frac{z-1}{z} = \cos\pi$$

$$\leftrightarrow \frac{z-1}{z} = -1$$

$$\leftrightarrow z = \frac{1}{2}$$

สรุป $\{ z \in R \mid (z-1)^{2n} = z^{2n} ; n = 1, 2, 3, \dots \} = \{ \frac{1}{2} \}$

6. จงแสดงว่า $(z-1)^3 = z^3$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

วิธีทำ จากข้อ 2. $(z-1)^3 = z^3$

$$z = \frac{1}{2} \pm 2\sqrt{3}i$$

เพราะฉะนั้นสมการ $(z-1)^3 = z^3$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

7. จงแสดงว่า $(z-1)^5 = z^5$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

วิธีทำ $(z-1)^5 = z^5$

$$(\frac{z-1}{z})^5 = 1$$

$$= \cos 0 + i\sin 0$$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \quad , k = 1, 2, 3, 4$$

$$\frac{z-1}{z} = \cos(\frac{2k\pi}{5}) + i\sin(\frac{2k\pi}{5})$$

แทนค่า $a = \cos(\frac{2k\pi}{5})$

$$\frac{z-1}{z} = a + i\sqrt{1-a^2}$$

$$1 - \frac{1}{z} = a + i\sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{1}{z} = 1 - a - i\sqrt{1-a^2}$$

$$z = \frac{1}{1-a-i\sqrt{1-a^2}}$$

$$= \frac{(1-a)+i\sqrt{1-a^2}}{(1-a)^2+(1-a^2)}$$

$$= \frac{1-a+i\sqrt{1-a^2}}{2-2a}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}i$$

เพราะว่า $(\cos\frac{2k\pi}{5})^2 \neq 1$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, 4$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)} \neq 0$ ทุกค่า k

นั้นคือ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}i$ ไม่เป็นจำนวนจริงทุกค่า k

สรุป $(z-1)^5 = z^5$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

8. จงแสดงว่า $(z-1)^7 = z^7$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

วิธีทำ $(z-1)^7 = z^7$

$$(\frac{z-1}{z})^7 = 1$$

$$= \cos 0 + i \sin 0$$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \qquad , k = 1, 2, 3, \dots , 6$$

$$\frac{z-1}{z} = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$$

แทนค่า $a = \cos\left(\frac{2k\pi}{7}\right)$

$$\frac{z-1}{z} = a + i\sqrt{1-a^2}$$

$$1 - \frac{1}{z} = a + i\sqrt{1-a^2}$$

$$\frac{1}{z} = 1 - a - i\sqrt{1-a^2}$$

$$z = \frac{1}{1-a-i\sqrt{1-a^2}}$$

$$= \frac{(1-a)+i\sqrt{1-a^2}}{(1-a)^2+(1-a^2)}$$

$$= \frac{1-a+i\sqrt{1-a^2}}{2-2a}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}i$$

เพราะว่า $(\cos\frac{2k\pi}{7})^2 \neq 1$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots , 6$

เพราะฉะนั้น $\frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)} \neq 0$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots , 6$

นั่นคือ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}i$ ไม่เป็นจำนวนจริงทุกค่า $k = 1, 2, 3, \dots , 6$

สรุป $(z-1)^7 = z^7$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

9. จงแสดงว่า $\{ z \in R \mid (z-1)^{2n+1} = z^{2n+1} ; n = 0, 1, 2, \dots \} = \varnothing$

ข้อพิสูจน์ $(z-1)^{2n+1} = z^{2n+1}$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{z-1}{z}\right)^{2n+1} &= 1 \\
&= \cos 0 + i\sin 0 \\
&= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \qquad ; k = 1, 2, \ldots, 2n \\
\frac{z-1}{z} &= \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) ; \ k = 1, 2, \ldots, 2n
\end{aligned}
$$

ให้ $a = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right)$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) = \sqrt{1-a^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{z-1}{z} &= a + i\sqrt{1-a^2} \\
1 - \frac{1}{z} &= a + i\sqrt{1-a^2} \\
\frac{1}{z} &= 1 - a - i\sqrt{1-a^2} \\
z &= \frac{1}{(1-a) - i\sqrt{1-a^2}} \\
&= \frac{1}{(1-a) - i\sqrt{1-a^2}} \cdot \frac{(1-a) + i\sqrt{1-a^2}}{(1-a) + i\sqrt{1-a^2}} \\
&= \frac{(1-a) + i\sqrt{1-a^2}}{(1-a)^2 + (1-a^2)} \\
&= \frac{(1-a) + i\sqrt{1-a^2}}{1 - 2a + a^2 + 1 - a^2} \\
&= \frac{(1-a) + i\sqrt{1-a^2}}{2-2a} \quad = \quad \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}
\end{aligned}
$$

z เป็นจำนวนจริง $\leftrightarrow$ $\sqrt{1-a^2} = 0$ และ $1 - a \neq 0$

$\leftrightarrow$ $a = -1$

เพราะว่า $a = \cos\left(\frac{2k\pi}{2n+1}\right) \neq -1$ ทุกค่า $k = 1, 2, \ldots, 2n$

เพราะฉะนั้น ไม่มีค่า k ที่ทำให้ $a = -1$

สรุป $\{z \in R \mid (z-1)^{2n+1} = z^{2n+1} \,;\, n = 1, 2, 3, \ldots\} = \varnothing$

10. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(z-1)^n = z^n$

ข้อพิสูจน์ $(z-1)^n = z^n$

$$\left(\frac{z-1}{z}\right)^n = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$$= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \qquad ; k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\frac{z-1}{z} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad ; k = 1, 2, \ldots, n-1$$

ให้ $a = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$

ดังนั้น $\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \sqrt{1-a^2}$

$$\frac{z-1}{z} = a + i\sqrt{1-a^2}$$

$$z = \frac{1}{(1-a) - i\sqrt{1-a^2}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{2(1-a)}i$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2}}{2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}i$$

สรุป $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)^2}}{2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)}i \qquad ; k = 1, 2, \ldots, n-1$

ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

27 หาร 111,111,111,111,111,111,111,111,111 ลงตัวหรือไม่

กำหนดให้ $k \in \{0,1,2,\dots,9\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$x = kkk,kkk,kkk,\dots,kkk$ เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวน 3^n หลัก

ถ้าจะถามว่า 3^n หาร x ลงตัวหรือไม่

ตัวอย่างเช่น 3 หาร 111 ลงตัวหรือไม่

3 หาร 333 ลงตัวหรือไม่

3 หาร 777 ลงตัวหรือไม่

9 หาร 222,222,222 ลงตัวหรือไม่

9 หาร 555,555,555 ลงตัวหรือไม่

27 หาร 111,111,111,... ,111 ลงตัวหรือไม่

คำตอบก็คงจะมีลงตัวกับไม่ลงตัว แต่หากเรารู้แน่นอนว่าลงตัวจะแสดงการพิสูจน์ได้อย่างไรคำถามแบบนี้เราก็สามารถทดลองทำกับปัญหาจากง่ายไปสุดท้ายเราก็จะเห็นแนวทางในการพิสูจน์กรณีทั่วไป

แบบฝึกหัดแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

1. จงแสดงว่า 3 หาร 222 ลงตัว
2. จงแสดงว่า 9 หาร 222,222,222 ลงตัว
3. จงแสดงว่า 777,777,777 หารด้วย 9 ลงตัว
4. $a_i \in \{1,2,3,\dots,9\}$ และ $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก $n+1$ หลัก

จงแสดงว่า

3 หาร $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ 3 หาร $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ลงตัว

5. จงแสดงว่า 111111111 หารด้วย 9 ลงตัว
6. จงแสดงว่า 555555555 หารด้วย 9 ลงตัว
7. การแสดงว่า 555,555,555,555,555,555,555,555,555 หารด้วย 27 ลงตัว
8. จงแสดงว่า จำนวนเต็มบวกที่ประกอบด้วยเลข 1 จำนวน 3^n หลัก หารด้วย 3^n ลงตัวเสมอ
9. กำหนดให้ $k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก $x = kkk,kkk,kkk,\ldots,kkk$ เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวน 3^n หลัก จงแสดงว่า x หารด้วย 3^n ลงตัวเสมอ

เฉลยแบบฝึกหัดแก้ปัญหาจากง่ายไปยาก

1. การแสดงว่า 3 หาร 222 ลงตัว

วิธีทำ แบบที่ 1 222 หาร ด้วย 3 เท่ากับ 74

เพราะฉะนั้น 3 หาร 222 ลงตัว

แบบที่ 2

$$\begin{aligned} 222 &= 2(111) \\ &= 2(100 + 10 + 1) \\ &= 2(10^2 + 10 + 1) \\ &= 2(99 + 1 + 9 + 1 + 1) \\ &= 2(99 + 9 + 3) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น 3 หาร 222 ลงตัว

ในทำนองเดียวกันจะเห็นว่า 111,222,333,... ,999 หารด้วย 3 ลงตัวเสมอ

2. การแสดงว่า 9 หาร 222,222,222 ลงตัว

วิธีทำ 222,222,222 = 2(111,111,111)

$= 2(100,000,000 + 10,000,000 + \dots + 100 + 10 + 1)$

$= 2[(99,999,999 + 1) + (9,999,999 + 1) + \dots + (99 + 1) + (9 + 1) + 1]$

$= 2[99,999,999 + 9,999,999 + \dots + 99 + 9 + 9]$

เพราะฉะนั้น 9 หาร 222,222,222 ลงตัว

3. การแสดงว่า 777,777,777 หารด้วย 9 ลงตัว

วิธีทำ $777,777,777 = 7(111,111,111)$

$= 7(10^8 + 10^7 + 10^6 + \dots + 10^1 + 1)$

$= 7[(99,999,999+1) + (9,999,999+1) + (999,999+1) + \dots + (9+1) + 1]$

$= 7[99,999,999 + 9,999,999 + \dots. + 99 + 9 + 9]$

เพราะฉะนั้น 9 หาร 777,777,777 ลงตัว

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า เมื่อ $k \in \{1,2,3,\dots,9\}$

9 หาร kkk,kkk,kkk ลงตัวเสมอ

4. $a_i \in \{1,2,3,\dots,9\}$ และ $a_na_{n-1}\dots a_1a_0$ เป็นจำนวนเต็มบวก n หลัก

การแสดงว่า

3 หาร $a_na_{n-1}\dots a_1a_0$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ 3 หาร $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ลงตัว

วิธีทำ สมมติ 3 หาร $a_na_{n-1}\dots a_1a_0$ ลงตัว

$a_na_{n-1}\dots a_1a_0 = a_n10^n + a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_110^1 + a_0$

$= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1)$

$+ a_0 + (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$

$= a_n(99999\dots999) + a_{n-1}(99999\dots99) + \dots + a_1(9)$

$+ (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0)$

เพราะฉะนั้น $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$

$= a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 - a_n(99999\ldots999) - a_{n-1}(99999\ldots99) - \ldots - a_1(9)$

เพราะว่า 3 หาร $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ลงตัว

สมมติ 3 หาร $a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ ลงตัว

เพราะว่า $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$

$= a_n(99999\ldots999) + a_{n-1}(99999\ldots99) + \ldots + a_1(9)$

$+ (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0)$

เพราะว่า 3 หาร $a_n(99999\ldots999) + a_{n-1}(99999\ldots99) + \ldots + a_1(9)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3 หาร $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ ลงตัว

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน

9 หาร $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ ลงตัว $\leftrightarrow$ 3 หาร $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$ ลงตัว

5. การแสดงว่า 111111111 หารด้วย 9 ลงตัว

วิธีทำ 111111111 = (111)(1001001)

เพราะว่า 3 หาร 111 ลงตัว

3 หาร 1001001 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 9 หาร 111,111,111 ลงตัว

6. การแสดงว่า 555555555 หารด้วย 9 ลงตัว

วิธีทำ 555555555 = 5(111,111,111)

และ 9 หาร 111,111,111 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 9 หาร 555,555,555 ลงตัว

7. การแสดงว่า 555,555,555,555,555,555,555,555,555 หารด้วย 27 ลงตัว

วิธีทำ 555,555,555,555,555,555,555,555,555

= 5(111,111,111,111,111,111,111,111,111,111)

= 5(111,111,111)(100,000,001,000,000,001)

เพราะว่า 3 หาร 100,000,001,000,000,001 ลงตัว

9 หาร 111,111,111 ลงตัว

เพราะฉะนั้น 27 หาร 555,555,555,555,555,555,555,555,555 ลงตัว

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน

27 หาร kkk,kkk,kkk,kkk,kkk,kkk,kkk,kkk,kkk ลงตัว

ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots ,9$

8. การแสดงว่า จำนวนเต็มบวกที่ประกอบด้วยเลข 1 จำนวน 3^n หลักหารด้วย 3^n ลงตัวเสมอ

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ

3^n หารจำนวนเต็มบวก 111,111,… ,111(จำนวน 3^n หลัก) ลงตัว

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า 111 = 3(37)

เพราะฉะนั้น 3 หาร 111 ลงตัว

ดังนั้น P(1) จริง

(2) สมมติ P(n) เป็นจริง

ดังนั้น 3^n หาร 111,111,111,… ,111 (จำนวน 3^n หลัก) ลงตัว

เพราะว่า 111,111,111,… ,111(จำนวน 3^{n+1} หลัก)

$= 111,111,111,\ldots,111$ (จำนวน $3^n + 3^n + 3^n$ หลัก)

$= \underbrace{111,111,\ldots,111}_{3^n \text{ หลัก}}\underbrace{,111,111,\ldots,111}_{3^n \text{ หลัก}}\underbrace{,111,111,\ldots,111}_{3^n \text{ หลัก}}$

$= \underbrace{(111,111,\ldots,111)}_{3^n \text{ หลัก}}\,(1\underbrace{00\ldots0}_{3^n \text{ หลัก}}1\underbrace{00\ldots0}_{3^n \text{ หลัก}}1)$

เพราะว่า ผลบวกของตัวเลขใน (100…0100 … 01) เท่ากับ 3

เพราะฉะนั้น 3 หาร (100 … 0 1 00 … 01) ลงตัว

ดังนั้น 3^{n+1} หาร (111,111,… ,111)(100 …0 1 00 … 01) ลงตัว

เพราะฉะนั้น P(n + 1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น

3^n หารจำนวนเต็มบวก 111,111,… ,111(จำนวน 3^n หลัก) ลงตัว

9. กำหนดให้ $k \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   x = kkk,kkk,kkk,… ,kkk เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวน 3^n หลัก

   การแสดงว่า x หารด้วย 3^n ลงตัวเสมอ

วิธีทำ kkk,kkk,… ,kkk (จำนวน 3^n หลัก)

= k (111,111,…,111) (จำนวน 3^n หลัก)

เพราะว่า 3^n หาร (111,111,…,111)(จำนวน 3^n หลัก) ลงตัว

เพราะฉะนั้น 3^n หาร kkk,kkk,…,kkk (จำนวน 3^n หลัก) ลงตัว

การหาสูตรของ a_n
เมื่อกำหนด a_n ในพจน์ของ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$

จากตัวอย่างของปัญหา

$a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1}$ จงพิสูจน์ว่า $a_n = 2^{n-1}$

$a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + n$ จงแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

$a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ และ $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

เราสามารถแสดงข้อพิสูจน์ได้โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์แต่ปัญหาที่น่าสนใจก็คือเราจะรู้ได้อย่างไรว่าควรจะกำหนด a_n เป็นอะไรในเทอมของ n เช่น

1. กำหนด $a_n = a_{n-1}$ และ $a_0 = 4$ จงหาสูตรของ a_n

วิธีทำ กำหนด $a_n = a_{n-1}$ และ $a_0 = 4$

จะได้ว่า $a_n = 4$ ทุกค่า $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

2. กำหนด $a_n = 4a_{n-1}$, $a_0 = 1$ จงหาสูตรของ a_n

วิธีทำ กำหนด $a_n = a_{n-1}$ และ $a_0 = 1$

จะได้ว่า $a_0, a_1, a_2, a_4, \dots = 1, 4, 16, 64, \dots.$ เป็นลำดับเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น $a_n = 4^{n-1}$

หรือปัญหาอื่นๆ เช่น

$a_0 = 2$, $a_1 = 3$ และ $a_n = 3a_{n-2}$ แล้ว $a_n = ?$ (n)

$a_0 = 1$, $a_1 = -2$ และ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ แล้ว $a_n = ?$ (n)

การหาสูตรของ a_n เมื่อกำหนด a_n ในพจน์ของ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ และ n มีแนวทางดังนี้

การหาสูตร a_n เราจะพิจารณาสูตรของ a_n ออกเป็น 2 ส่วน คือ

$$a_n = \text{ส่วนของ } (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + \text{ส่วนที่เป็นฟังก์ชันของ } n$$
$$= F(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + f(n)$$

ตัวอย่างเช่น

	ส่วนของ$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$	**ส่วนของ n**
$a_n = 2a_{n-1}$	$2a_{n-1}$	0
$a_n = 1 + a_{n-1} - 6a_{n-2}$	$a_{n-1} - 6a_{n-2}$	1
$a_n = a_{n-1} + 2^n + 1$	a_{n-1}	$2^n + 1$

สูตรของ a_n จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือ $a_n = a_n^c + a_n^p$

โดยที่ a_n^c ได้มาจากสูตรคำตอบที่สอดคล้องเงื่อนไขเฉพาะของ

$$a_n = \text{ส่วนของ } (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

และ a_n^p ได้มาจากสูตรคำตอบที่สอดคล้องเงื่อนไขของ

$$a_n = \text{ส่วนของ } (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) + \text{ส่วนที่เป็นฟังก์ชันของ } n$$

การหาค่า a_n^c เราจะสมมติ $a_n^c = \alpha^n$

แล้วแทนค่าไปในเงื่อนไข $a_n = \text{ส่วนของ } (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$

แล้วแก้สมการเพื่อดูว่า α เป็นอะไรได้บ้าง

ตัวอย่าง 1. $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$, $a_0 = 1, a_1 = 2$

สมมติ $a_n^c = \alpha^n$

ดังนั้น
$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + 6\alpha^{n-2}$$
$$\alpha^2 = \alpha + 6$$
$$\alpha^2 - \alpha - 6 = 0$$
$$(\alpha + 2)(\alpha - 3) = 0$$
$$\alpha = -2, 3$$

เพราะฉะนั้น $a_n^c = (-2)^n$ หรือ $a_n^c = 3^n$

จะเห็นได้ว่า $a_n^c = A(-2)^n + B(3^n)$ สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = a_{n-1} - 6a_{n-2}$

แต่ A, B จะมีค่าเท่าใดนั้นต้องสอดคล้องเงื่อนไข $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$ ด้วย

$a_0 = 1: \quad 1 = A + B \qquad \ldots(1)$

$a_1 = 2: \quad 2 = -2A + 3B \qquad \ldots(2)$

$2(1); \quad 2 = 2A + 2B \qquad \ldots(3)$

$(2) + (3); \quad 4 = 5B$

$$B = \frac{4}{5}$$

$$A = \frac{1}{5}$$

$$a_n^c = \frac{1}{5}(-2)^n + (\frac{4}{5})(3^n)$$

สรุป $\quad a_n = a_n^c = (\frac{1}{5})(-2)^n + (\frac{4}{5})(3^n)$

สอดคล้องเงื่อนไข $a_0 = 1, a_1 = 2$

หมายเหตุ ในกรณีที่ไม่มีส่วนของฟังก์ชันของ n ให้คิดเฉพาะ a_n^c เท่านั้น

ตัวอย่าง 2. กำหนด $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 1, a_0 = 1, a_1 = 2$

จะได้ว่า $a_n = a_n^c + a_n^p$ โดยที่ $a_n^c = A(-2)^n + B(3^n)$

แต่การหาค่า A และ B ต้องคิดพร้อมกับการหาค่าคงตัวในสูตรของ a_n^p

การหาสูตรของ a_n^p ต้องสร้างฟังก์ชันเลียนแบบส่วนที่เป็นฟังก์ชันในพจน์ของ n ในสูตรของ a_n

เพราะว่า $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 1$, เพราะฉะนั้น $f(n) = 1$

ดังนั้นสมมติ $a_n^p = C$

เพราะฉะนั้น $a_n = a_n^c + a_n^p = A(-2)^n + B(3)^n + C$

การหาค่า A, B, C

$a_0 = 1 :$ $\qquad A + B + C = 1$ ...(1)

$a_1 = 2 :$ $\qquad -2A + 3B + C = 2$ ...(2)

$a_2 = a_1 + 6a_0 + 1 = 2 + 6 + 1 = 9$

$\qquad 4A + 9B + C = 9$ ...(3)

(2) − (1) ; $\qquad -3A + 2B = 1$ ...(4)

(3) − (1) ; $\qquad 3A + 8B = 8$ ...(5)

(4) + (5) ; $\qquad 10B = 9$

$$B = \frac{9}{10}$$

(4) ; $A = -\frac{1}{3}(1-2B) = -\frac{1}{3}(1-\frac{18}{10}) = -\frac{1}{3}(-\frac{18}{10}) = \frac{8}{30}$

(1) ; $C = 1 - A - B = 1 - \frac{8}{30} - \frac{9}{10} = \frac{30-8-27}{30} = -\frac{5}{30}$

สรุป $\quad a_n = (\frac{8}{30})(-2)^n + (\frac{9}{10})3^n - \frac{5}{30}$

สำหรับกรณีทั่วๆ ไป จากเงื่อนไข $a_n = F(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) + f(n)$

การสร้างฟังก์ชันเลียนแบบ f(n) มีแนวคิดดังนี้

1. ถ้า f(n) เป็นพหุนาม แล้ว $a_n{}^p$ ต้องเป็นพหุนาม
2. ถ้า f(n) เป็นเลขยกกำลัง แล้ว $a_n{}^p$ ต้องเป็นเลขยกกำลัง

ตัวอย่างเช่น

f(n)	การสมมติ $a_n{}^p$
1	A
3n	A + Bn
$5n^2$	$A + Bn + Cn^2$
$4 + n + 2n^2$	$A + Bn + Cn^2$
4^n	$A(4^n)$
$n + 4^n$	$A + Bn + C(4)^n$

แบบฝึกหัด

จงหาสูตร a_n เมื่อกำหนด a_n ในพจน์ของ $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$

1. กำหนด $a_n = 4a_{n-2}$ และ $a_0 = 1$, $a_1 = 4$
2. กำหนด $a_n = 9a_{n-2}$, $a_0 = 2, a_1 = 3$
3. กำหนด $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$
4. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ และ $a_1 = 1$
5. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$, $a_0 = 3$
6. กำหนด $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2, a_2 = 3$
7. กำหนด $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$
8. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$
9. กำหนด $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$ และ $a_0 = 1, a_1 = 1$
10. กำหนด $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$; $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$
11. กำหนด $a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + n$
12. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$, $a_0 = 1$
13. กำหนด $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \sqrt{2^{n+1} - 1}$
14. กำหนด $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

    จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$
15. กำหนด $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + n$
16. กำหนด $a_{n+1} + 3a_n = 8n + 6$ และ $a_0 = 2$

17. กำหนด $2(n+1)a_{n+1} = -a_n$ และ $a_0 = 1$ (ดูวิธีทำที่หน้า 234)
18. กำหนด $(n+3)a_n = -a_{n-1}$ และ $a_0 = 1$ (ดูวิธีทำที่หน้า 234)

เฉลยแบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $a_n = 4a_{n-2}$ และ $a_0 = 1$, $a_1 = 4$ จงหาสูตรของ a_n

วิธีทำ สมมติ $a_n = \propto^n$

$$a_n = 4a_{n-2}$$

$$\propto^n = 4\propto^{n-2}$$

$$\propto^2 = 4$$

$$\propto = \pm 2$$

เพราะฉะนั้น $a_n = A(2^n) + B(-2)^n$

จะได้ว่า $a_n = A(2^n) + B(-2)^n$

สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = 4a_{n-2}$

เพราะว่า $a_0 = 1$

เพราะฉะนั้น $1 = A + B$ …(1)

เพราะว่า $a_1 = 4$

เพราะฉะนั้น $4 = 2A - 2B$

$2 = A - B$ …(2)

(1) + (2) ; $3 = 2A$

$$A = \frac{3}{2}$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} a_n &= (\frac{3}{2})(2)^n + (-\frac{1}{2})(-2)^n \\ &= 3(2^{n-1}) + (-1)(-1)^n(2)^{n-1} \\ &= [3 + (-1)^{n+1}]\, 2^{n-1} \end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $a_n = 9a_{n-2}$, $a_0 = 2, a_1 = 3$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ สมมติ $\quad a_n = \propto^n$

เพราะว่า $\quad a_n = 9a_{n-2}$

เพราะฉะนั้น $\quad \propto^n = 9\propto^{n-2}$

$$\propto^2 = 9$$

$$\propto = \pm 3$$

เลือกให้ $\quad a_n = c_1 3^n + c_2(-3)^n$

จะได้ว่า a_n สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = 9a_{n-2}$

เพราะว่า $a_0 = 2$, $a_1 = 3$

เพราะฉะนั้น $\quad c_1 + c_2 = 2$

$$3c_1 - 3c_2 = 3$$

จะได้ $c_1 = \frac{3}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$

สรุป $a_n = \frac{3}{2}(3^n) + \frac{1}{2}(-3)^n$

3. กำหนดให้ $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ สมมติ $\quad a_n = \propto^n$

จาก $\quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$

$$\begin{aligned}
\propto^n &= 5\propto^{n-1} - 6\propto^{n-2} \\
\propto^2 &= 5\propto - 6 \\
\propto^2 - 5\propto + 6 &= 0 \\
(\propto - 2)(\propto - 3) &= 0 \\
\propto &= 2, 3
\end{aligned}$$

เลือก $a_n = A(2^n) + B(3^n)$

เพราะว่า $a_0 = 1,$ $A + B = 1$

$a_1 = -2,$ $2A + 3B = -2$

เพราะฉะนั้น $A = 5, B = -4$

สรุป $a_n = 5(2^n) - 4(3^n)$

4. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + 1$ และ $a_1 = 1$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ เราพิจารณาส่วนของ $a_n = 2a_{n-1}$

เลือก $a_n = \propto^n$

เพราะฉะนั้น $\propto^n = 2\propto^{n-1}$

$\propto = 2$

ดังนั้น $a_n^c = c_1 2^n$

ต่อไปเพราะว่าส่วนที่เป็น $f(n)$ คือ 1

ดังนั้นเลือกให้ $a_n^p = B$

เพราะว่า $a_n = 2a_{n-1} + 1$

เพราะฉะนั้น $B = 2B + 1$

$B = -1$

สรุป $a_n = a_n^c + a_n^p$

$= c_1 2^n - 1$

เพราะว่า $a_1 = 1$ เพราะฉะนั้น $1 = c_1 2^1 - 1$

$c_1 = 1$

สรุป $a_n = 2^n - 1$

5. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + 2n^2$, $a_0 = 3$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ สมมติ $a_n = a_n^{\,c} + a_n^{\,p}$

การหา $a_n^{\,c}$ สมมติ $a_n^{\,c} = \propto^n$

เพราะว่า $a_n = 2a_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\propto^n = 2\propto^{n-1}$

$\propto = 2$

ดังนั้น $a_n^{\,c} = A(2^n)$

การหา $a_n^{\,p}$

เพราะว่า $f(n) = 2n^2$

เพราะฉะนั้นเลือก $a_n^{\,p} = Bn^2 + Cn + D$

ดังนั้น $a_n = a_n^{\,c} + a_n^{\,p}$

$= A(2^n) + Bn^2 + Cn + D$

$a_0 = 3;$ $A + D = 3$ ...(1)

$a_1 = 2a_0 + 2 = 8$

$2A + B + C + D = 8$ ...(2)

$a_2 = 2a_1 + 8 = 24$

$4A + 4B + 2C + D = 24$ ...(3)

$a_3 = 2a_2 + 18 = 48 + 18 = 64$

$8A + 9B + 3C + D = 64$ ...(4)

โดยการแก้สมการ (1) – (4) จะได้ $A = 15, B = -2, C = -8, D = -12$

สรุป $a_n = 15(2^n) - 2n^2 - 8n - 12$

6. กำหนดให้ $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ จงหาสูตร a_n

ข้อพิสูจน์ สมมติ $a_n = \propto^n$

ดังนั้น $\propto^{n+2} = 3\propto^{n+1} - 2\propto^n$

$$\propto^2 = 3\propto - 2$$

$$\propto^2 - 3\propto + 2 = 0$$

$$(\propto - 2)(\propto - 1) = 0$$

$$\propto = 2, 1$$

ดังนั้น $a_n = A2^n + B1^n$ สอดคล้องเงื่อนไข $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

เพราะว่า $a_1 = 2$ และ $a_2 = 3$ เพราะฉะนั้น

$$2A + B = 2$$

$$4A + B = 3$$

$$2A = 1$$

$$A = \frac{1}{2}, B = 1$$

สรุป $a_n = \frac{1}{2}(2^n) + 1 = 2^{n-1} + 1$

7. กำหนดให้ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ จงหาสูตรของ a_n

วิธีทำ ให้ $a_n = \propto^n$

เพราะว่า $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

เพราะฉะนั้น $\propto^n = \propto^{n-1} + 2\propto^{n-2}$

$$\propto^2 = \propto + 2$$

$$\propto^2 - \propto - 2 = 0$$

$$(\propto - 2)(\propto + 1) = 0$$

$\propto = 2, -1$

เพราะฉะนั้น $a_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$ สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

เพราะว่า $a_0 = 1, a_1 = 1$

เพราะฉะนั้น $c_1 + c_2 = 1$

$2c_1 - c_2 = 1$

$c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$

สรุป $a_n = \frac{2}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

8. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n, a_0 = 2$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ ให้ $a_n = a_n{}^c + a_n{}^p$

การหา $a_n{}^c$ จาก $a_n = 2a_{n-1}$

สมมติ $a_n = \propto^n$

ดังนั้น $\propto^n = 2\propto^{n-1}$

$\propto = 2$

เพราะฉะนั้น $a_n{}^c = A2^n$

การหา $a_n{}^p$

สมมติ $a_n{}^p = B(-1)^n$

ดังนั้น $a_0 = a_0{}^c + a_0{}^p$

$2 = A2^0 + B(-1)^0$

$A + B = 2 \quad \ldots(1)$

$a_1 = 2a_0 + (-1)^1 = 2(2) - 1 = 3$

$a_1 = a_1{}^c + a_1{}^p$

$$3 = A(2^1) + B(-1)^1$$

$$2A - B = 3 \qquad \ldots(2)$$

จาก (1) , (2) ; $\quad 3A = 5$

$$A = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{1}{3}$$

สรุป $\quad a_n = a_n^{\ c} + a_n^{\ p} = (\frac{5}{3})(2^n) + (\frac{1}{3})(-1)^n$

9. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3$ และ $a_0 = 1, a_1 = 1$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ $\quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3, a_0 = 1, a_1 = 1$

สมมติ $\quad a_n = a_n^{\ c} + a_n^{\ p}$

ให้ $\quad a_n^{\ c} = \propto^n$

จากเงื่อนไข $\quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

$$\propto^n = 3\propto^{n-1} - 2\propto^{n-2}$$

$$\propto^2 = 3\propto - 2$$

$$\propto^2 - 3\propto + 2 = 0$$

$$(\propto - 2)(\propto - 1) = 0$$

$$\propto = 2, 1$$

ดังนั้นเลือกให้ $\quad a_n^{\ c} = A(2^n) + B(1)$

$$= A(2^n) + B$$

เพราะว่า $f(n) = 3$ และ $a_n^{\ c}$ มีพจน์ของค่าคงตัวแล้ว

เพราะฉะนั้นสมมติ $a_n^{\ p} = Cn$

สรุปเราควรเลือก $a_n = a_n^{\ p} + a_n^{\ c} = A(2^n) + B + Cn$

การหาค่า A, B, C

$a_0 = 1;\qquad A + B = 1 \qquad \ldots(1)$

$a_1 = 1;\qquad 2A + B + C = 1 \qquad \ldots(2)$

$a_2 = 3a_1 - 2a_0 + 3 = 3 - 2 + 3 = 4$

$4A + B + 2C = 4 \qquad \ldots(3)$

$(2) - (1);\qquad A + C = 0$

$(3) - (1);\qquad 2A + C = 3$

เพราะฉะนั้น $A = 3, C = -3, B = -2$

สรุป $a_n = 3(2^n) - 2 - 3n$

10. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$; $a_0 = 1$ และ $a_1 = 2$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ ให้ $a_n = a_n^c + a_n^p$

การหา a_n^c

สมมติ $a_n^c = \propto^n$

จากเงื่อนไข $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$

จะได้ $\propto^n = \propto^{n-1} + 2\propto^{n-2}$

$\propto^2 = \propto + 2$

$\propto^2 - \propto - 2 = 0$

$(\propto - 2)(\propto + 1) = 0$

$\propto = 2, -1$

เพราะฉะนั้น $a_n^c = A(2^n) + B(-1)^n$

การหา a_n^p

เพราะว่าค่าคงตัวของ $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ คือ 1

เพราะฉะนั้นต้องสมมติ $a_n{}^p = C$

ดังนั้น $a_n = a_n{}^c + a_n{}^p = a2^n + B(-1)^n + C$

เพราะว่า $a_0 = 1$

เพราะฉะนั้น $a2^0 + B(-1)^0 + C = 1$

$$A + B + C = 1 \qquad \ldots(1)$$

เพราะว่า $a_0 = 2$

เพราะฉะนั้น $2 = A2^1 + B(-1)^1 + C$

$$2A - B + C = 2 \qquad \ldots(2)$$

เพราะว่า $a_2 = a_1 + 2a_0 + 1$

$$= 2 + 2(1) + 1$$

$$= 5$$

เพราะฉะนั้น $5 = A2^2 + B(-1)^2 + C$

$$4A + B + C = 5 \qquad \ldots(3)$$

(3) – (1) ; $3A = 4$

$$A = \frac{4}{3}$$

(1) + (2) ; $3A + 2C = 3$

$$4 + 2C = 3$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

(1) ; $B = 1 - A - C = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{6-8+3}{6} = \frac{1}{6}$

สรุป $a_n = (\frac{4}{3})(2^n) + (\frac{1}{6})(-1)^n - \frac{1}{2}$

11. กำหนด $a_0 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + n$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ ให้ $a_n = a_n^c + a_n^p$

การหา a_n^c จากเงื่อนไข $a_n = 2a_{n-1}$

สมมติ $a_n^c = \propto^n$

ดังนั้น $\propto^n = 2\propto^{n-1}$

$\propto = 2$

ดังนั้น $a_n^c = A(2^n)$

การหา a_n^p สมมติ $a_n^p = Bn + C$

ดังนั้น $a_n = A2^n + Bn + C$

จาก $a_0 = a_0^c + a_0^p$

$1 = A(2^0) + B(0) + C$

$A + C = 1$ ...(1)

เพราะว่า $a_1 = 2a_0 + 1 = 3$

เพราะฉะนั้น $3 = 2A + B + C$ ...(2)

เพราะว่า $a_2 = 2a_1 + 2 = 8$

เพราะฉะนั้น $8 = 4A + 2B + C$ ...(3)

2(2) ; $6 = 4A + 2B + 2C$ ...(4)

(3) – (4) ; $2 = -C$

เพราะฉะนั้น $A = 3$, $B = -1$

สรุป $a_n = 3(2^n) - n - 2$

12. กำหนด $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$, $a_0 = 1$ จงหาสูตร a_n

วิธีทำ $a_n = a_n^{\,c} + a_n^{\,p}$

$a_n^{\,c}$ เป็นคำตอบที่มาจากเงื่อนไข $a_n = 2a_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $a_n^{\,c} = c_1 2^n$

สมมติ $a_n^{\,p} = An + B$

เพราะว่า $a_n = 2a_{n-1} + n + 1$

เพราะฉะนั้น

$An + B = 2(A(n-1) + B) + n + 1$

$= 2An - 2A + 2B + n + 1$

$-An - B + 2A = n - 1$

เพราะฉะนั้น $A = -1$ และ $-B + 2A = -1$ ดังนั้น $B = 3$

เพราะฉะนั้น $a_n = a_n^{\,c} + a_n^{\,p}$

$= c_1 2^n - n - 3$

เพราะว่า $a_0 = 1$

เพราะฉะนั้น $1 = c_1 - 0 - 3$

$c_1 = 4$

สรุป $a_n = 4(2^n) - n - 3 = 2^{n+2} - n - 3$

13. กำหนด $a_n^{\,2} = 2a^2_{\,n-1} + 1$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \sqrt{2^{n+1} - 1}$

วิธีทำ แทนค่า $b_n = a_n^{\,2}$ จะได้ $b_0 = 1$

ดังนั้น $b_n = 2b_{n-1} + 1$

เพราะฉะนั้น $b_n = b_n^{\,c} + b_n^{\,p}$

$$= A(2^n) + B$$

$b_0 = 1$; $\quad A + B = 1$ ...(1)

$b_1 = a_1^2 = 2a_0^2 + 1 = 3$

$2A + B = 3$ ...(2)

เพราะฉะนั้น $A = 2, B = -1$

ดังนั้น $b_n = 2(2^n) - 1 = 2^{n+1} - 1$

$$a_n^2 = 2^{n+1} - 1$$

$$a_n = \sqrt{2^{n+1} - 1}$$

14. กำหนดให้ $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2$ และ $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

วิธีทำ ให้ P(n) แทนข้อความ $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(1^2) - \frac{1}{2}(1) + 1 = 1 = a_1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(1), P(2), ... , P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 1$

$$a_{k-1} = \frac{1}{2}(k-1)^2 - \frac{1}{2}(k-1) + 1$$

$$a_{k-2} = \frac{1}{2}(k-2)^2 - \frac{1}{2}(k-1) + 1$$

เพราะว่า $a_{k+1} = 3a_{(k+1)-1} - 3a_{(k+1)-2} + a_{(k+1)-3}$

$= 3a_k - 3a_{k-1} + a_{k-2}$

$$= \left(\frac{3}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 3\right) - \left(\frac{3}{2}(k-1)^2 - \frac{3}{2}(k-1) + 3\right) + \left(\frac{1}{2}(k-2)^2 - \frac{1}{2}(k-2) + 1\right)$$

$$= \frac{3}{2}(k^2 - k + 2) - \frac{3}{2}((k-1)^2 - (k-1) + 2) + \frac{1}{2}((k-2)^2 - (k-2) + 2)$$

$$= \frac{3}{2}[k^2 - k + 2 - (k-1)^2 + (k-1) - 2] + \frac{1}{2}(k^2 - 4k + 4 - k + 2 + 2)$$

$$= \frac{3}{2}(k^2 - k + 2 - k^2 + 2k - 1 + k - 1 - 2) + \frac{1}{2}(k^2 - 5k + 8)$$

$$= \frac{3}{2}(2k - 2) + \frac{1}{2}(k^2 - 5k + 8)$$

$$= 3k - 3 + \frac{1}{2}(k^2 - 5k + 8)$$

$$= \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1$$

$$= \frac{1}{2}(k^2 + 2k + 1) - \frac{1}{2}(k+1) + 1$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)^2 - \frac{1}{2}(k+1) + 1$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$ ทุกค่า n

หมายเหตุ ในการหาสูตร a_n สามารถทำได้ดังนี้ ให้ $a_n = \propto^n$

เพราะว่า $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

เพราะฉะนั้น $\propto^n = 3\propto^{n-1} - 3\propto^{n-2} + \propto^{n-3}$

$$\propto^3 = 3\propto^2 - 3\propto + 1$$

$$\propto^3 - 3\propto^2 + 3\propto - 1 = 0$$

$$(\propto - 1)^3 = 0$$

$\propto = 1$ ซ้ำกัน 3 ครั้ง

เลือก $a_n = c_0(1)^n + c_1 n(1)^n + c_2 n^2(1)^n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$

ข้อควรจำ เพราะว่า 1 เป็นรากซ้ำกัน 3 ครั้ง

เพราะฉะนั้นต้องเลือก a_n เป็นพหุนามดีกรี 2 ในเทอมของ n

ลองแทนค่ากลับจะได้ว่า $a_n = c_0 + c_1n + c_2n^2$

สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} + a_{n-3}$

เพราะว่า $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, และ $a_2 = 2$

เพราะฉะนั้น $\quad c_0 = 1$

$$c_0 + c_1 + c_2 = 1$$

$$c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 2$$

ดังนั้น $c_0 = 1$, $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$

สรุป $\quad a_n = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1$

15. กำหนด $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1} + n$ **จงหาสูตร** a_n

วิธีทำ พิจารณาเฉพาะเงื่อนไข $a_n = a_{n-1}$ จะได้ว่า $a_n^c = A(1)^n = A$ สอดคล้องเงื่อนไข $a_n = a_{n-1}$

เพราะว่า $a_n^c = A$ เป็นค่าคงตัวซึ่งเป็นพหุนามระดับขั้น 0

และ $f(n) = n$ เป็นพหุนามระดับขั้น 1 ในพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นเราควรสมมติ a_n^p เป็นพหุนามระดับขั้น 2

ให้ $\quad a_n^p = B_2n^2 + B_1n + B_0$

จากเงื่อนไข $a_n = a_{n-1} + n$ จะได้

$$B_2n^2 + B_1n + B_0 = B_2(n-1)^2 + B_1(n-1) + B_0 + n$$

$$= B_2n^2 - 2B_2n + B_2 + B_1n - B_1 + B_0 + n$$

เพราะฉะนั้น $\quad B_0 = B_2 - B_1 + B_0$

$$B_1 = 2B_2 + B_1 + 1$$

ดังนั้น $B_2 = \frac{1}{2}, B_1 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นเลือก $a_n = a_n^c + a_n^p = A + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + B_0$

เพราะว่า $a_1 = 2$ เพราะฉะนั้น $2 = A + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + B_0$

$$A + B_0 = 1$$

เพราะว่า $a_n = a_n^c + a_n^p = A + B_2n^2 + B_1n + B_0 = A + B_0 + B_2n^2 + B_1n$

สรุป $a_n = 1 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$

16. การหาสูตร a_n เมื่อกำหนด $a_{n+1} + 3a_n = 8n + 6$ และ $a_0 = 2$

วิธีทำ $a_n = a_n^c + a_n^p$

สมมติ $a_n^c = \propto^n$ แทนค่าในเงื่อนไข $a_{n+1} + 3a_n = 0$

เพราะฉะนั้น $\propto^{n+1} = -3\propto^n$

$$\propto = -3$$

เพราะฉะนั้น $a_n^c = A(-3)^n$

สมมติ $a_n^p = Bn + C$ เพราะว่า $a_{n+1} + 3a_n = 8n + 6$

เพราะฉะนั้น $B(n+1) + C + 3Bn + 3C = 8n + 6$

$$4Bn + (B + 4C) = 8n + 6$$

เพราะฉะนั้น $4B = 8$ และ $B + 4C = 6$ ดังนั้น $B = 2$ และ $C = 1$

เพราะฉะนั้น $a_n^p = 2n + 1$ เพราะว่า $a_n = a_n^c + a_n^p = A(-3)^n + 2n + 1$

เพระว่า $a_0 = 2$ เพระฉะนั้น $2 = A + 0 + 1$ ดังนั้น $A = 1$

สรุป $a_n = (-3)^n + 2n + 1$

การหาสูตรผลบวกของ $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$

จากการที่เราทราบว่า

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$$

แต่ยังไม่รู้ว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = ?$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = ?$$

$$\vdots$$

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = ?$$

ดังนั้นเราต้องมาดูแนวทางในการหาผลบวกของ $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ ในรูปแบบของกรณีทั่วไป

การหาสูตรผลบวก $1 + 2 + 3 + \ldots + n$

ให้ $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1$$

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1)$$

$$= n(n + 1)$$

$$S = \frac{n}{2}(n + 1)$$

สรุป $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n + 1)$

การหาผลบวก $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

จากสูตร $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ จะได้

$$1^3 \qquad\qquad = 1$$

$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3\ 1^2 + 3\ 1 + 1$$

$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3\ 2^2 + 3\ 2 + 1$$

$$4^3 = (3 + 1)^3 = 3^3 + 3\ 3^2 + 3\ 3 + 1$$

$$\vdots$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3\ n^2 + 3\ n + 1$$

ดังนั้น $(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + (n + 1)^3)$

$$= (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$$+ 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$$

เพราะฉะนั้น $3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

$$= (n + 1)^3 - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (n + 1)$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 3(\frac{n}{2}(n + 1)) - (n + 1)$$

$$= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2}{2}$$

$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$

$$= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}$$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$

การหาสูตรผลบวก $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

จากสูตร $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$

$$1^4 = 1$$

$$2^4 = (1 + 1)^4 = 1^4 + 4\,1^3 + 6\,1^2 + 4\,1 + 1$$

$$3^4 = (2 + 1)^4 = 2^4 + 4\,2^3 + 6\,2^2 + 4\,2 + 1$$

$$4^4 = (3 + 1)^4 = 3^4 + 4\,3^3 + 6\,3^2 + 4\,3 + 1$$

$$\vdots$$

$$(n + 1)^4 = \qquad n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

เพราะฉะนั้นนำแต่ละข้างบวกกัน

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + (n + 1)^4$$

$$= (1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) + 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$$

$$+ 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$$

เพราะฉะนั้น $4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3)$

$$= (n + 1)^4 - 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$$

$$- 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (n + 1)$$

$$= (n + 1)^4 - 6(\frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)) - 4(\frac{n}{2}(n + 1)) - (n + 1)$$

$$= (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - (2n^3 + 3n^2 + n) - 2n^2 - 2n - n - 1$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n^2 + 2n + 1)$$

$$= (n(n + 1))^2$$

สรุป $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$

การหาสูตรผลบวก $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถหาค่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4$ ได้ดังนี้

จากสูตร $(x + 1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

จะได้ $(n + 1)^5 = 5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4) + 10(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots n^3)$

$+ 10(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 5(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n + 1$

ดังนั้น $5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4)$

$= (n + 1)^5 - 10(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) - 10(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2)$

$- 5(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (n + 1)$

$= (n + 1)^5 - 10(\frac{n(n+1)}{2})^2 - 10(\frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)) - 5(\frac{n}{2}(n + 1)) - (n + 1)$

$= (n + 1)^5 - \frac{5}{2}(n(n + 1))^2 - \frac{5}{3}(n(n + 1)(2n + 1) - \frac{5}{2}n(n + 1) - (n + 1)$

เพราะฉะนั้น $30(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4)$

$= 6(n + 1)^5 - 15(n^3 + 2n^2 + n) - 10(2n^3 + 3n^2 + n) - 15(n^2 + n) - 6(n + 1)$

$= 6(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) - 15(n^3 + 2n^2 + n)$

$- 10(2n^3 + 3n^2 + n) - 15(n^2 + n) - 6(n + 1)$

$= n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$

สรุป $1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

การหาสูตรผลบวก $1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5$

จากสูตร $(x + 1)^6 = x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$

จะได้ $(n + 1)^6 = 6(1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5) + 15(1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4)$

$+ 20(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 15(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2)$

$+ 6(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (n + 1)$

เพราะฉะนั้น $6(1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5)$

$= (n+1)^6 - 15(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) - 20(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$

$\quad - 15(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) - (n+1)$

$= (n+1)^6 - 15\left(\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\right) - 20\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$

$- 15\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right) - 6\left(\frac{n}{2}(n+1)\right) - (n+1)$

$= \dots$

$= \frac{1}{2}n^2(2n^2 + 2n - 1)(n+1)^2$

สรุป $1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(2n^2 + 2n - 1)(n+1)^2$

แบบฝึกหัด จงแสดงว่า

1. $\sum_{i=1}^{n} i^6 = \frac{1}{42}n(2n+1)(n+1)(3n^4 + 6n^3 - 3n + 1)$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^7 = \frac{1}{24}n^2(3n^4 + 6n^3 - n^2 - 4n + 2)(n+1)^2$

3. $\sum_{i=1}^{n} i^8 = \frac{1}{90}n(2n+1)(n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3)$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^9 = \frac{1}{20}n^2(n^2 + n - 1)(2n^4 + 4n^3 - n^2 - 3n + 3)(n+1)^2$

5. $\sum_{i=1}^{n} i^{10} =$

$\frac{1}{66}n(2n+1)(n+1)(n^2 + n - 1)(3n^6 + 9n^5 + 2n^4 - 11n^3 + 3n^2 + 10 - 5)$

6. $\sum_{i=1}^{n} i^{11} =$

$\frac{1}{24}n^2(2n^8 + 18n^7 + 4n^6 - 16n^5 - 5n^4 + 26n^3 - 3n^2 - 20n + 10)(n+1)^2$

เทคนิคการหาสูตร a_n เพิ่มเติม

17. กำหนด $2(n+1)a_{n+1} = -a_n$ และ $a_0 = 1$

แนวคิด จากสูตร $2(n+1)a_{n+1} = -a_n$

จะได้ว่า
$$
\begin{aligned}
n = 0 &\quad (2)(1)a_1 = -a_0 \\
n = 1 &\quad (2)(2)a_2 = -a_1 \\
n = 2 &\quad (2)(3)a_3 = -a_2 \\
&\quad \vdots \\
n = n-1 &\quad (2)(n)a_n = -a_{n-1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $(2^n)(1)(2)(3)\ldots(n)a_1a_2a_3a_4\ldots a_n = (-1)^n a_0a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}$

ดังนั้น $(2^n)n!\, a_n = (-1)^n a_0 = (-1)^n(1)$ สรุป $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n\, n!}$

18. กำหนด $(n+3)a_n = -a_{n-1}$ และ $a_0 = 1$

แนวคิด จากสูตร $(n+3)a_n = -a_{n-1}$

จะได้ว่า
$$
\begin{aligned}
n = 1 &\quad (4)a_1 = -a_0 \\
n = 2 &\quad (5)a_2 = -a_1 \\
n = 3 &\quad (6)a_3 = -a_2 \\
&\quad \vdots \\
n = n &\quad (n+3)a_n = -a_{n-1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $(4)(5)(6)\ldots(n+3)a_1a_2a_3a_4\ldots a_n = (-1)^n a_0a_1a_2a_3\ldots a_{n-1}$

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
(4)(5)(6)\ldots(n+3)a_n &= (-1)^n a_0 \\
(1)(2)(3)(4)(5)(6)\ldots(n+3)a_n &= 3!(-1)^n a_0 \\
(n+3)!a_n &= (-1)^n 3!
\end{aligned}
$$

สรุป $a_n = \dfrac{(-1)^n 3!}{(n+3)!}$

ภาคผนวกที่ 1.

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

1. 2^{100} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก (ห้ามใช้ log และ การกระจายทวินาม)
2. จงแสดงว่า $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$; ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. จงแสดงว่า $9 \mid (4^n - 3n - 1)$; ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
4. จงแสดงว่า $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$; $n = 2, 3, 4, \ldots$
5. จงแสดงว่า $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$
6. กำหนดให้ $x + \frac{1}{x} = 2\cos\theta$ จงแสดงว่า $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$
7. จงแสดงว่า $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
8. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ a เป็นจำนวนเต็มบวก

   จงแสดงว่า $(a)(a + 1)(a + 2)\ldots(a + n - 1) > (a(a + n - 1))^{\frac{n}{2}}$
9. จงแสดงว่า ค่าใดต่อไปนี้มีค่ามากกว่ากันระหว่าง 9^{30} และ $30!$
10. จงแสดงว่า ค่าใดเป็นค่ามากสุดระหว่าง 100^{300} และ $300!$
11. จงแสดงว่า ค่าใดเป็นค่ามากสุดระหว่าง 25^{100} กับ $100!$
12. จงแสดงว่า $(n + 1)^n \leq n^{n+1}$; ทุกค่า $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$
13. จงแสดงว่า 2000^{1999} กับ 1999^{2000} ค่าใดเป็นค่ามากที่สุด
14. จงแสดงว่า ค่าใดมีค่ามากสุดระหว่าง 1000^{1000} กับ 1001^{999}
15. จงแสดงว่า ค่าใดมากที่สุดระหว่าง $(1.000001)^{1000000}$ และ 2
16. จงแสดงว่า ค่าใดมีค่ามากกว่าระหว่าง $9^{2000} + 10^{2000}$ และ 11^{2000}
17. จงแสดงว่า ค่าใดเป็นค่ามากสุด $99^{2543} + 100^{2543}$ และ 101^{2543}
18. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $9^n + 10^n < 11^n$

19. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $99^n + 100^n < 101^n$

20. ค่าใดมีค่ามากกว่าระหว่าง

$999^n + 1000^n$ และ 1001^n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 500$

21. จากข้อสังเกตของ $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{50}{24}$

จงแสดงว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{100}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

22. จงแสดงว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2000}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

23. จงแสดงว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ทุกค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$

24. จงแสดงว่า ทุกจำนวนเต็มบวก N ต้องมีจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > N$$

25. จงแสดงว่า $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

26. จงหาค่ามากสุดของ $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

27. จงแสดงว่า $n! < (\frac{n+1}{2})^n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

28. จงแสดงว่า ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = k$

แล้ว $a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n$ มีค่ามากที่สุด เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n$

29. จงแสดงว่า $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n$

30. จงแสดงว่า $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+..+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2a_3 \ldots a_n}$

31. จงแสดงว่า ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = s$

แล้ว $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \leq 1 + s + \frac{s^2}{2!}+\frac{s^3}{3!}+\ldots+\frac{s^n}{n!}$

32. จงหาค่าของ $\sqrt{2}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[8]{8}.\sqrt[16]{16}.\sqrt[32]{32}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}\cdots$

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์

1. แนวคิด $2^{10} = 1024$

$$1000 < 1024$$

$$10^3 < 2^{10}$$

$$(10^3)^{10} < (2^{10})^{10}$$

$$10^{30} < 2^{100}$$

เพราะฉะนั้นจำนวนหลักของ 2^{100} ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 31 หลัก

เพราะว่า $1024 < 1025$

$$\frac{1024}{1000} < \frac{1025}{1000} = \frac{41}{40}$$

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{10} < \left(\frac{41}{40}\right)^{10}$$

$$= \frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}\cdot\frac{41}{40}$$

เพราะว่า $(n+1)(n-1) = n^2 - 1 < (n)(n)$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{41}{40} < \frac{40}{39} < \frac{39}{38} < \frac{38}{37} < \frac{37}{36} < \frac{36}{35} < \frac{35}{34} < \frac{34}{33} < \frac{33}{32} < \frac{32}{31}$

ดังนั้น

$$\left(\frac{1024}{1000}\right)^{10} < \frac{41}{40}\cdot\frac{40}{39}\cdot\frac{39}{38}\cdot\frac{38}{37}\cdot\frac{37}{36}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{35}{34}\cdot\frac{34}{33}\cdot\frac{33}{32}\cdot\frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10$$

เพราะฉะนั้น $(1024)^{10} < (1000)^{10}\cdot(10)$

$$(2^{10})^{10} < (10^3)^{10}(10)$$

$$2^{100} < 10^{31}$$

ดังนั้น $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$

สรุป 2^{100} เป็นจำนวนเต็ม 31 หลัก

2. แนวคิด

แบบที่ 1 $2^{4n+3} + 5^{n+2} = 2^{3}(2^{4})^{n} + 5^{2}(5^{n})$

$= 8(16^{n}) + 25(5^{n})$

$= 8(16^{n} - 5^{n}) + 8(5^{n}) + 25(5^{n})$

$= 8(16 - 5)(16^{n-1} + 16^{n-2}(5) + \ldots + 5^{n-1}) + 33(5^{n})$

$= 8(11)\,(16^{n-1} + 16^{n-2}(5) + \ldots + 5^{n-1}) + 3(11)(5^{n})$

$= 11(8(16^{n-1} + 16^{n-2}(5) + \ldots + 5^{n-1}) + 3(5^{n}))$

สรุป $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

หมายเหตุ $a^{n} - b^{n} = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^{2} + \ldots + b^{n-1})$

แบบที่ 2 ให้ $P(n)$ แทนข้อความ $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$

(1) การแสดงว่า $P(1)$ เป็นจริง

เพราะว่า $2^{4(1)+3} + 5^{1+2} = 2^{7} + 5^{3} = 128 + 125 = 253$

และ 11 หาร 253 ลงตัว เพราะฉะนั้น $P(1)$ เป็นจริง

(2) สมมติ $P(k)$ เป็นจริง

ดังนั้น $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$

เพราะว่า $2^{4(k+1)+3} + 5^{(k+1)+2} = 2^{4k+3}\cdot 2^{4} + 5^{k+2}\cdot 5^{1}$

$= 16(2^{4k+3}) + 5(5^{k+2})$

$= 11(2^{4k+3}) + 5(2^{4k+3} + 5^{k+2})$

และ $11 \mid (2^{4k+3} + 5^{k+2})$ เพราะฉะนั้น $11 \mid (11(2^{4k+3}) + (2^{4k+3} + 5^{k+2}))$

สรุป $P(k+1)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้นโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

สรุป $11 \mid (2^{4n+3} + 5^{n+2})$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. **ข้อพิสูจน์** P(n) แทนข้อความ $9 \mid (4^n - 3n - 1)$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $4^1 - 3(1) - 1 = 0$ และ $9 \mid 0$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $9 \mid (4^k - 3k - 1)$ ดังนั้น มี m ที่ทำให้ $4^k - 3k - 1 = 9m$

$$\begin{aligned}
4^{k+1} - 3(k+1) - 1 &= 4^k(4) - 3k - 3 - 1 \\
&= 4(4^k - 3k - 1) + 4(3k + 1) - 3k - 4 \\
&= 4(4^k - 3k - 1) + 9k \\
&= 4(9m) + 9k \\
&= 9(4m + k)
\end{aligned}$$

สรุป $9 \mid (4^k - 3k - 1)$ เพราะฉะนั้น P(k+1) จริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

4. **ข้อพิสูจน์** ให้ P(n) แทนข้อความ $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{k+k} > \frac{1}{2}$ ...(1)

เพราะว่า $\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \frac{1}{(k+1)+3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \ldots + \frac{1}{2k+2}$$

$$= \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \ldots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

จาก (1) ; $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{2k} > \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{(k+1)+1} + \frac{1}{(k+1)+2} + \frac{1}{(k+1)+3} + \ldots + \frac{1}{(k+1)+(k+1)}$

$$> \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2}$$

$$= \frac{1}{2} - [\frac{(2k+1)(2k+2)-(k+1)(2k+2)-(k+1)(2k+1)}{(k+1)(2k+1)(2k+2)}]$$

$$= \frac{1}{2} - [\frac{-2k^2-2k-1}{(k+1)(2k+1)(2k+2)}]$$

$$= \frac{1}{2} + [\frac{1+2k+2k^2}{(k+1)(2k+1)(2k+2)}]$$

$$> \frac{1}{2}$$

สรุปโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$

หมายเหตุ โดยการจัดรูปพีชคณิต เมื่อ $n \geq 2$

จะได้ว่า

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n}$$

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n+(n-1)} > \frac{1}{n+n}$$

$$\frac{1}{n+n} \geq \frac{1}{n+n}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > n(\frac{1}{n+n})$$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2}$$

5. **ข้อพิสูจน์**

ให้ P(n) แทนข้อความ $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2\sqrt{1+1} - 2 = 2(1.414) - 2 = 0.814 < 1$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}} \quad > \quad 2\sqrt{k+1}-2$

ดังนั้น $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad > \quad (2\sqrt{k+1}-2)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$$= \frac{2(k+1)-2\sqrt{k+1}+1}{\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{2k+3-2\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}$$

เพราะว่า $\sqrt{4k^2+12k+9} \quad > \quad \sqrt{4k^2+12k+8}$

$$\sqrt{(2k+3)^2} \quad > \quad 2\sqrt{k^2+3k+2}$$

$$2k+3 \quad > \quad 2\sqrt{k+1}\,\sqrt{k+2}$$

$$(2k+3)-2\sqrt{k+1} \quad > \quad 2\sqrt{k+1}\,\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1}$$

$$\frac{(2k+3)-2k+1}{\sqrt{k+1}} \quad > \quad 2\sqrt{k+1}-2$$

เพราะฉะนั้น $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad > \quad 2\sqrt{(k+1)+1}-2$

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1}-2$

หมายเหตุ $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}) > \lim_{n\to\infty}(2\sqrt{n+1}-2) = \infty$

สรุป อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

6. แนวคิด วิธีที่ 1 เพราะว่า $x+\frac{1}{x} = 2\cos\theta$

เพราะฉะนั้น $x^2-(2\cos\theta)x+1 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = \dfrac{2\cos\theta \pm \sqrt{4\cos^2\theta - 4}}{2} = \cos\theta \pm \sqrt{\cos^2\theta - 1}$

$= \cos\theta \pm \sqrt{-\sin^2\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$

หมายเหตุ จำนวนเชิงซ้อน $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$

เมื่อ $x = \cos\theta + i\sin\theta$ จะได้ $x^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

และ $\dfrac{1}{x^n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$

เพราะฉะนั้น $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

วิธีที่ 2 การแสดงโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ให้ P(n) แทนข้อความ $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta$

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $x + \dfrac{1}{x} = 2\cos\theta$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(1) , P(2) , P(3) , ... , P(n – 1) เป็นจริง

เพราะว่า $(x^{n-1} + \dfrac{1}{x^{n-1}})(x + \dfrac{1}{x}) = (2\cos(n-1)\theta)(2\cos\theta)$

$x^n + x^{n-2} + \dfrac{1}{x^{n-2}} + \dfrac{1}{x^n} = 4\cos((n-1)\theta)\cos\theta$

เพราะฉะนั้น $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 4\cos((n-1)\theta)\cos\theta - (x^{n-2} + \dfrac{1}{x^{n-2}})$

$= 4\cos((n-1)\theta)\cos\theta - 2\cos((n-2)\theta)$

$= 2[2\cos((n-1)\theta)\cos\theta] - 2\cos((n-2)\theta)$

$= 2[2\cos(n-2)\theta + \cos n\theta] - 2\cos((n-2)\theta)$

$= 2\cos n\theta$ เพราะฉะนั้น P(n) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) เป็นจริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $x^n + \dfrac{1}{x^n} = 2\cos n\theta \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots$

7. **ข้อพิสูจน์** กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ k เป็นจำนวนเต็ม , $1 \leq k \leq n$

เพราะว่า $(n-k)(k-1) \geq 0$

$$nk - n - k^2 + k \geq 0$$

$$nk - k^2 + k \geq n$$

$$k(n-k+1) \geq n$$

เพราะฉะนั้น $k(n-k+1) \geq n$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, n$

เพราะว่า $(n!)^2 = (1\cdot2\cdot3\cdots n)(1\cdot2\cdot3\cdots n)$

$$= [(1)(n)][(2)(n-1)][(3)(n-2)]\ldots[(n-1)2][n(1)]$$

$$= n\cdot n\cdot n\ldots n\cdot n$$

เพราะฉะนั้น $(n!)^2 \geq n^n$

ดังนั้น $(n!)^{\frac{2}{2n}} \geq n^{\frac{2}{2n}}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{n!} \geq \sqrt{n}$

8. **ข้อพิสูจน์** ให้ k เป็นจำนวนเต็มและ $1 \leq k \leq n$

$$(a+k-1)(a+n-k) = a^2 + an + a + (k-1)(n-k)$$

$$\geq a^2 + an - a$$

$$= a(a+n-1)$$

เพราะฉะนั้น $[(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)]^2$

$= [(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)][(a+n-1)\ldots(a+2)(a+1)a]$

$= [a(a+n-1)][(a+1)(a+n-2)][(a+2)(a+n-3)]\ldots[(a+n-1)(a)]$

$\geq [a(a+n-1)[a(a+n-1)][a(a+n-1)]\ldots[a(a+n-1)]$

$= (a(a+n-1))^n$

สรุป $(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \geq (a(a+n-1))^{\frac{n}{2}}$

และอสมการจะเท่ากัน เมื่อ $n = 1, 2$ เท่านั้น

ข้อสังเกต เมื่อเราแทนค่า $a = 1$ จะได้ $(1)(2)(3)\ldots(n) \geq n^{\frac{n}{2}}$

นั่นคือ $(n!)^2 \geq n^n$

9. แนวคิด เพราะว่า $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) > \left(\sqrt{a(a+n-1)}\right)^n$

ทุกค่า n และ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น

$$1\cdot2\cdot3\cdots10 > \left(\sqrt{(1)(10)}\right)^{10} > 3^{10} = 9^5$$

$$11\cdot12\cdot13\cdots30 > \left(\sqrt{(11)(30)}\right)^{20} = 330^{10} > 243^{10} = (3^5)^{10} = 3^{50} = 9^{25}$$

เพราะฉะนั้น $30! > 9^{30}$

10. แนวคิด เมื่อ n และ a เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะได้ว่า

$$(a)(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) \geq (a(a+n-1))^{\frac{n}{2}}$$

เพราะฉะนั้น $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots25 > ((1)(25))^{\frac{25}{2}} = 5^{25}$

$$26\cdot27\cdot28\cdots50 > ((26)(50))^{\frac{25}{2}} > 35^{25}$$

$$51\cdot52\cdot53\cdots100 > ((51)(100))^{\frac{50}{2}} > ((49)(100))^{25} = 70^{50}$$

$$101\cdot102\cdot103\cdots200 > ((101)(200))^{\frac{100}{2}} > ((100)^{50}(200^{50})) = 10^{200}\cdot2^{50}$$

$$201\cdot202\cdot203\cdots300 > ((201)(300))^{\frac{100}{2}} > ((200)^{50}(300^{50})) = 10^{200}\cdot2^{50}\cdot3^{50}$$

ดังนั้น $300! > (5^{25})(35^{25})(70^{50})(10^{200}\cdot2^{50})(10^{200}\cdot2^{50}\cdot3^{50})$

$$= 5^{50}\cdot7^{25}\cdot5^{50}\cdot14^{50}\cdot10^{400}\cdot2^{100}\cdot3^{50}$$

$$= 10^{500}\cdot7^{25}\cdot14^{50}\cdot3^{50}$$

$$= 10^{500}\cdot 21^{25}\cdot 42^{25}\cdot 14^{25}$$

$$> 10^{500}\cdot 20^{25}\cdot 40^{25}\cdot 14^{25}$$

$$= 10^{550}\cdot 2^{25}\cdot 4^{25}\cdot 14^{25}$$

$$= 10^{550}\cdot 112^{25}$$

$$= 10^{550}\cdot 10^{50}\cdot (1.12)^{25}$$

$$= 10^{600}\cdot (1.12)^{25}$$

$$> 10^{600}$$

$$= 100^{300}$$

สรุป $300! > 100^{300}$

11.แนวคิด เพราะว่า $a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1) > (\sqrt{a(a+n-1)})^n$

เมื่อ a, n เป็นจำนวนเต็มบวก

เพราะฉะนั้น $1\cdot 2\cdot 3\cdots 25 > (\sqrt{25})^{25} = 5^{25}$

$$26\cdot 27\cdots 50 > (\sqrt{(26)(50)})^{25}$$

$$> (\sqrt{(25)(49)})^{25} = 35^{25}$$

$$51\cdot 52\cdot 53\cdots 100 > (\sqrt{(51)(100)})^{50}$$

$$> (\sqrt{(49)(100)})^{50} = 70^{50}$$

เพราะฉะนั้น $100! > (5^{25})(35^{25})(70)^{50}$

$$= 5^{100}\cdot 7^{25}\cdot 14^{50}$$

$$= 5^{100}\cdot 7^{75}\cdot 2^{50}$$

$$= 5^{100}\cdot 7^{75}\cdot 4^{25}$$

$$= 5^{100}\cdot 343^{25}\cdot 4^{25}$$

$$= 5^{100} \cdot 1372^{25}$$

$$> 5^{100} \cdot 625^{25}$$

$$= 5^{100} \cdot 5^{100}$$

$$= 25^{100}$$

สรุป $100! > 25^{100}$

12. ข้อพิสูจน์ กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$

เพราะว่า
$$\frac{n}{1} \leq n$$
$$\frac{n-1}{2} < n$$
$$\frac{n-2}{3} < n$$
$$\vdots$$
$$\frac{n-(k+1)}{k} < n$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{n(n-1)}{2!} < n^2$$
$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} < n^3$$

ในทำนองเดียวกัน
$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k+1))}{k!} < n^k$$

เพราะฉะนั้น $\binom{n}{k} < n^k$ ทุกค่า $k = 1, 2, \ldots, n$

$$(n+1)^n = \binom{n}{0}n^n + \binom{n}{1}n^{n-1} + \binom{n}{2}n^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-2}n^2 + \binom{n}{n-1}n + \binom{n}{n}$$
$$= n^n + \left(\frac{n(n-1)}{2!}\right)n^{n-1} + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right)n^{n-2}$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\right)n^{n-3} + \ldots + \left(\frac{n(n-1)}{2!}\right)n^2 + n + 1$$

เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
(n+1)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}n^{n-k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}n^{n-k}\right) + \binom{n}{n-1}n + \binom{n}{n} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n}{k}n^{n-k}\right) + (n^2+1) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-2} n^n\right) + (n^2+1) \\
&\leq (n-1)n^n + n^n \quad (\because\ n^2+1 < n^n \text{ ทุกค่า } n \geq 3) \\
&= n^{n+1}
\end{aligned}
$$

สรุป $(n+1)^n < n^{n+1}$ เมื่อ $n = 3, 4, 5, \ldots$

ข้อสังเกต 1. ผลจาก $(n+1)^n < n^{n+1}$ จะได้ว่า $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$

2. ให้ $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ เพราะฉะนั้นลำดับ $a_n = n^{\frac{1}{n}}$ เป็นลำดับลดลง

และ $a_n > 0$ ทุกค่า $n = 3, 4, 5, \ldots$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 0$

13.แนวคิด เพราะว่า $(n+1)^{\frac{1}{n+1}} < n^{\frac{1}{n}}$ ทุกค่า $n \geq 3$

เพราะฉะนั้น $2000^{\frac{1}{2000}} < 1999^{\frac{1}{1999}}$

$$\left(2000^{\frac{1}{2000}}\right)^{(1999)(2000)} < \left(1999^{\frac{1}{1999}}\right)^{(1999)(2000)}$$

สรุป $2000^{1999} < 1999^{2000}$

14.แนวคิด เพราะว่า $\frac{(1001)^{999}}{1000^{1000}} = \left(\frac{1001}{1000}\right)^{1000} \cdot \frac{1}{1001}$

$$= \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000}\left(\frac{1}{1001}\right)$$

$$< (3)\left(\frac{1}{1001}\right) \qquad \text{(จากข้อ 59 หน้า 7)}$$

$$< 1$$

เพราะฉะนั้น $(1001)^{999} < 1000^{1000}$

15.แนวคิด เพราะว่า

$$(1+\frac{1}{n})^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}(1)^{n-1}(\frac{1}{n}) + \binom{n}{2}(1)^{n-2}(\frac{1}{n})^2 + \ldots + (\frac{1}{n^n})$$

$$> \binom{n}{0}1^n + 1$$

$$= 2$$

เพราะฉะนั้น $(1.000001)^{1,000,000} = (1+\frac{1}{1000000})^{1000000} > 2$

16.แนวคิด $\frac{11^{2000}-9^{2000}}{10^{2000}} = \frac{(10+1)^{2000}-(10-1)^{2000}}{10^{2000}}$

$$= \frac{2\left[\binom{2000}{1}10^{1999} + \binom{2000}{3}10^{1997} + \binom{2000}{5}10^{1995} + \ldots\right]}{10^{2000}}$$

$$> \frac{2\left[\binom{2000}{1}10^{1999}\right]}{10^{2000}}$$

$$= \frac{2\left[(2000)10^{1999}\right]}{10^{2000}}$$

$$> 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{11^{2000}-9^{2000}}{10^{2000}} > 1$ ดังนั้น $11^{2000}-9^{2000} > 10^{2000}$

สรุป $11^{2000} > 9^{2000}+10^{2000}$

หมายเหตุ จากการกระจายทวินาม

$$(x+1)^n = \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}x+1$$

$$(x-1)^n = \binom{n}{0}x^n-\binom{n}{1}x^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}x+(-1)^n$$

จะได้ $(x+1)^n+(x-1)^n = 2\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{3}x^{n-3}+\ldots\right]$

17.แนวคิด

$$\begin{aligned}
\frac{101^{2543}-99^{2543}}{100^{2543}} &= \frac{(100+1)^{2543}-(10-1)^{2543}}{100^{2543}} \\
&= \frac{2\left[\binom{2543}{1}100^{2542}+\binom{2543}{3}10^{2540}+\ldots\right]}{100^{2543}} \\
&\geq \frac{2(2543)100^{2542}}{10^{2543}} \\
&\geq \frac{2(100)(100^{2542})}{10^{2543}} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{101^{2543}-99^{2543}}{10^{2543}} > 1$$

$$101^{2543}-99^{2543} > 100^{2543}$$

สรุป $99^{2543}+100^{2543} < 100^{2543}$

18.แนวคิด $\dfrac{11^n - 9^n}{10^n} = \dfrac{(10+1)^n - (10-1)^n}{10^n}$

$$= \frac{2\left[\binom{n}{1}10^{n-1} + \binom{n}{3}10^{n-3} + \binom{n}{5}10^{n-5} + \ldots + (1-(-1)^n)\right]}{10^n}$$

$$= 2\left[\frac{n}{10} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,10^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!\,10^5} + \ldots\right]$$

$$\geq 2\left[\frac{n}{10} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,10^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!\,10^5}\right]$$

เมื่อ $n \geq 5$ จะได้ว่า $2(\frac{n}{10}) \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{11^n - 9^n}{10^n} > 1$

$$11^n - 9^n > 10^n$$

สรุป $9^n + 10^n < 11^n$ เมื่อ $n \geq 5$

เมื่อ $n = 4$

$$2\left[\frac{4}{10} + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!\,10^3} + \frac{4(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)}{5!\,10^5} + 0 + 0 + \ldots + 0\right]$$

$$= 2\left[\frac{4}{10} + \frac{4(4-1)(4-2)}{3!\,10^3}\right]$$

$$= 2\left(\frac{2400}{6000} + \frac{24}{6000}\right)$$

$$= \frac{4848}{6000}$$

$$< 1$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{11^n - 9^n}{10^n} < 1$ เมื่อ $n = 4$

ในทำนองเดียวกัน $\dfrac{11^n - 9^n}{10^n} < 1$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, 4$

สรุป $9^n + 10^n < 11^n$ เมื่อ $n \geq 5$

$9^n + 10^n > 11^n$ เมื่อ $n \leq 4$

19.แนวคิด $\frac{101^n - 99^n}{100^n} = \frac{(100+1)^n - (10-1)^n}{100^n}$

$$= 2\frac{\left[\binom{n}{1}100^{n-1} + \binom{n}{3}100^{n-3} + \binom{n}{5}100^{n-5} + \ldots + (1-(-1)^n)\right]}{100^n}$$

$$= 2\left[\frac{n}{100} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,100^3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!\,100^5} + \ldots\right]$$

กรณีที่ 1 $n \geq 50$ จะได้ว่า $2(\frac{n}{100}) > 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{101^n - 99^n}{100^n} > 1$

ดังนั้น $101^n > 99^n + 100^n$

กรณีที่ 2 $n = 49$ จะได้

$$\frac{101^n - 99^n}{100^n} = 2(\frac{49}{100} + \frac{49(48)(47)}{3!(100)^3} + \ldots)$$

$$> 2(\frac{49}{100} + \frac{49(48)(47)}{3!(100)^3})$$

$$= 2[\frac{49}{100} + \frac{18424}{100^3}]$$

$$> 2(\frac{49}{100} + \frac{100^2}{100^3})$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{101^{49} - 99^{49}}{100^{49}} > 1$

$$101^{49} > 99^{49} + 100^{49}$$

กรณีที่ 3 $n \leq 48$

$$2\left[\frac{48}{100} + \frac{48\cdot 47\cdot 46}{3!\,100^3} + \frac{48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{5!\,100^5} + \ldots\right]$$

$$< 2\left[\frac{48}{100} + \frac{1}{3!}(\frac{48}{100})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{48}{100})^5 + \frac{1}{7!}(\frac{48}{100})^7 + \ldots\right]$$

$$< 2\left[\frac{48}{100} + \frac{1}{6}(\frac{48}{100})^3 + \frac{1}{6^2}(\frac{48}{100})^5 + \ldots\right]$$

48

$$= 2\left[\frac{100}{1-\frac{1}{6}\left(\frac{48}{100}\right)^2}\right]$$

$$= 2\left(\frac{300}{601}\right)$$

$$< 1$$

ดังนั้น $\quad \dfrac{101^n - 99^n}{100^n} < 1$

$$101^n < 99^n + 100^n$$

สรุป $\quad 101^n > 99^n + 100^n \quad$ เมื่อ $n \geq 49$

$\quad 101^n < 99^n + 100^n \quad$ เมื่อ $n \leq 48$

20.แนวคิด

$$1001^n - 999^n = (1000+1)^n - (1000-1)^n$$

$$= 2\left[\binom{n}{1}1000^{n-1} + \binom{n}{3}1000^{n-3} + \binom{n}{5}1000^{n-5} + \ldots\right]$$

$$= 2\left[n(1000^{n-1}) + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right)1000^{n-3} + \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\right)1000^{n-5} + \ldots\right]$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{1001^n - 999^n}{1000^n} \geq 2\frac{1}{1000^n}\left[n(1000^{n-1}) + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\right)1000^{n-3} + \left(\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}\right)1000^{n-5} + \ldots\right]$$

$$= 2\left[\frac{n}{1000} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6(1000^3)} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120(1000^5)}\right]$$

$$> 2\left[\frac{500}{1000}\right]$$

$$= 1$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1001^n - 999^n}{1000^n} > 1$ เมื่อ $n \geq 500$

$1001^n - 999^n > 1000^n$ เมื่อ $n \geq 500$

สรุป $999^n + 1000^n < 1001^n$ เมื่อ $n \geq 500$

21.แนวคิด หาค่า m ที่ทำให้ $2^m \leq 10 < 2^{m+1}$

เพราะว่า $2^3 \leq 10 < 2^4$ เพราะฉะนั้นเลือก $m = 3$

ให้ $P = (1)(3)(5)(7)(9)$ และ $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}$

$2^{3-1}PS = 2^2(1)(3)(5)(7)(9)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10})$

$= 2^2(1)(3)(5)(7)(9)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10})$

เพราะว่า $2^2(1)(3)(5)(7)(9)(\frac{1}{k})$ เป็นจำนวนเต็ม ทุกค่า k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และ 9 กับ 10

แต่ $2^2(1)(3)(5)(7)(9)(\frac{1}{8}) = \frac{(1)(3)(5)(7)(9)}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น 2^2PS ไม่เป็นจำนวนเต็ม

และ $2^2P = 2^2(1)(3)(5)(7)(9)$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{10}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

22.แนวคิด $1024 < 2000 < 2048$

$2^{10} < 2000 < 2^{11}$

ให้ $P = (1)(3)(5)(7)\ldots(1999)$

และ $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2000}$

$2^9PS = 2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2000})$

$$= \sum_{k=1}^{2000} \left(2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\tfrac{1}{k})\right)$$

กรณีที่ 1 k เป็นเลขคี่ 1, 3, 5, 7, …, 1997, 1999

จะได้ว่า $2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\frac{1}{k})$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 k เป็นเลขคู่ และ $k \neq 2^{10}$ และ $2 \leq k \leq n$

ให้ r เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ 2^r หาร k ลงตัว ดังนั้น $r \leq 9$

เพราะฉะนั้นต้องมีเลขคี่ s โดยที่ $1 \leq s < n$ ที่ทำให้ $k = 2^r s$

เพราะฉะนั้น $2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\frac{1}{k}) = 2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\frac{1}{2^r s})$

เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 $k = 2^{10}$

จะได้ว่า $2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\frac{1}{2^{10}})$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

สรุปจากทั้งสามกรณีจะได้ว่า $\sum_{k=1}^{2000} [2^9(1)(3)(5)(7)\ldots(1999)(\frac{1}{k})]$

ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น 2^9PS ไม่เป็นจำนวนเต็ม

แต่ 2^9P เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น S ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2000}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

23.แนวคิด กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n \geq 2$

$$\begin{aligned} 2 &\leq n \\ \log_2 2 &\leq \log_2 n \\ 1 &\leq \log_2 n \end{aligned}$$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\log_2 n$

ดังนั้น $m \leq \log_2 n < m+1$

$2^m \leq n < 2^{m+1}$

ให้ $P = (1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)q$

เมื่อ q เป็นเลขคี่ที่ใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ n

และ $S = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$

$$2^{m-1}PS = 2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)q\,(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})$$

$$= \sum_{k=1}^{n}[(2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)q)(\frac{1}{k})]$$

กรณีที่ 1 k เป็นเลขคี่ $1 \leq k \leq n$ จะได้ว่า

$2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)(q)(\frac{1}{k})$ เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 2 k เป็นเลขคู่ , $2 \leq k \leq n$ และ $k \neq 2^m$

ให้ r เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ 2^r หาร k ลงตัว

เพราะฉะนั้น $2^r \leq k \leq n$

ดังนั้น $r \leq m-1$ และ 2^r หาร 2^{m-1} ลงตัว

ให้ s เป็นเลขคี่ที่ทำให้ $k = 2^r s$

เพราะฉะนั้น

$$2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)q(\frac{1}{k}) = 2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)(q)(\frac{1}{2^r s})$$

เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 $k = 2^m$

จะได้ว่า $(2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)(q)(\frac{1}{k}))(\frac{1}{2^m})$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

สรุปจากทั้ง 3 กรณีจะได้ว่า

$$2^{m-1}PS = \sum_{k=1}^{n}[(2^{m-1}(1)(3)(5)(7)\ldots(q-2)q)(\tfrac{1}{k})]$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $2^{m-1}P$ เป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น S ไม่เป็นจำนวนเต็ม

สรุป $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

24. ข้อพิสูจน์ ให้ N เป็นจำนวนเต็มบวก

เลือก $n = 2^{2N}$

เพราะว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{2N}}$

$$\begin{aligned}
&= 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}) \\
&\quad+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{16}) \\
&\quad+(\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{32}) \\
&\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad+\ldots \\
&\quad+(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\frac{1}{2^{2N-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^{2N}}) \\
&= 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2(2)})+(\frac{1}{4+1}+\frac{1}{4+2}+\ldots+\frac{1}{2(4)}) \\
&\quad+(\frac{1}{8+1}+\frac{1}{8+2}+\ldots+\frac{1}{2(8)}) \\
&\quad+(\frac{1}{16+1}+\frac{1}{16+2}+\ldots+\frac{1}{2(16)}) \\
&\quad+\ldots \\
&\quad+(\frac{1}{2^{2N-1}+1}+\frac{1}{2^{2N-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2(2^{2N-1})}) \\
&> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2} \text{ (จำนวน 2N เทอม)} \\
&> 1+\frac{1}{2}(2N) \\
&> N
\end{aligned}$$

สรุป ทุกจำนวนเต็มบวก N จะมีจำนวนเต็มบวก $n = 2^{2N}$ ที่ทำให้

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > N$$

หมายเหตุ ผลจากการพิสูจน์ข้างต้นจะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

เป็นอนุกรมอนันต์ที่มีค่ามากกว่า N ทุกค่า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออก

นั่นคือ $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}) = \infty$

25. ข้อพิสูจน์ ให้ $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

สมมติ e เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้นต้องมีจำนวนเต็มบวก m และ k ที่ทำให้

$$e = \frac{k}{m}$$

ให้ $S_m = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}$

และ $R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

ดังนั้น $e = S_m + R_m$

เพราะว่า $e = \frac{k}{m}$

ดังนั้น $(m!)e = (m!)\frac{k}{m} = (m-1)!k$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $e = S_m + R_m$

เพราะฉะนั้น $(m!)e = (m!)S_m + (m!)R_m$ เป็นจำนวนเต็ม ...(1)

$$(m!)S_m = m!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!}) \quad \text{เป็นจำนวนเต็ม}$$

$$(m!)R_m = m!(1 + \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \ldots)$$

$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \ldots$$

เพราะว่า $m \geq 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{m+k} < \frac{1}{2}$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น $m!R_m < \frac{1}{2} + \frac{1}{(2)(2)} + \frac{1}{(2)(2)(2)} + \ldots$

เพราะว่า $\frac{1}{2} + \frac{1}{(2)(2)} + \frac{1}{(2)(2)(2)} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีผลบวกเท่า

กับ $\dfrac{(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}} = 1$ เพราะฉะนั้น $0 < m!R_m < 1$

ดังนั้น $m!R_m$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะว่า $(m!)S_m$ เป็นจำนวนเต็ม , $(m!)R_m$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(m!)S_m + (m!)R_m$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม เกิดข้อขัดแย้งกับ ...(1)

เพราะฉะนั้น e ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

หมายเหตุ ค่าของ e สามารถหาได้จากลิมิต $\lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$

หรือ $\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ ซึ่งค่าประมาณของ $e = 2.718281$

26.แนวคิด $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 = (1-x)^4(1-x)(1+x)(1+2x)^2$

$$= (1-x)^4(1-x^2)(1+2x)^2$$

เพราะว่า $(1-x)^4 \geq 0$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

$(1+2x)^2 \geq 0$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$

และ $1-x^2 \geq 0$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$

เพราะฉะนั้นเราสนใจกรณีที่ $-1 < x < 1$ เท่านั้นในการหาค่ามากสุด

ของ $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$

กำหนดค่า x ในช่วง $-1 < x < 1$

ให้ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1-x$, $a_6 = 1+x$, $a_7 = a_8 = 1+2x$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\leq$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เพราะฉะนั้น

$$\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$$

$$\sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2} \leq \frac{5(1-x)+(1+x)+2(1+2x)}{8}$$

$$\sqrt[8]{(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2} \leq 1$$

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \leq 1$$

เพราะว่า $\sqrt[8]{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8}{8}$

เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7 = a_8$

เพราะฉะนั้น $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 = 1$ เมื่อ $1-x = 1+x = 1+2x$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ทำให้ $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 = 1$ เป็นค่ามากที่สุด

หมายเหตุ พิสูจน์ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\leq$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตอยู่ที่ข้อ 7 หน้า 17

27.แนวคิด กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ให้ $a_1 = 1$

$a_2 = 2$

$a_3 = 3$

$\vdots$

$a_n = n$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\leq$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{a_1a_2a_3\ldots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$

$$\sqrt[n]{1.2.3\ldots n} \le \frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

$$\sqrt[n]{n!} \le \frac{n}{2}(n+1)\frac{1}{n}$$

$$\sqrt[n]{n!} \le \frac{n+1}{2}$$

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

สรุป $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

28.แนวคิด กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

และ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = k$ กำหนดให้ $A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\le$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n \le A^n$$

เพราะว่า $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n$

เพราะฉะนั้น $a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n = A^n$ เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n$

สรุป $a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_n$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right)^n = \left(\frac{k}{n}\right)^n$

เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \ldots = a_n = \frac{k}{n}$

29.แนวคิด กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

ให้ $x_1 = \frac{a_1}{a_2}, x_2 = \frac{a_2}{a_3}, x_3 = \frac{a_3}{a_4}, \ldots, x_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_n}, x_n = \frac{a_n}{a_1}$

เพราะฉะนั้น $x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n = 1$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\le$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

$$\sqrt[n]{1} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$1 \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

$$n \le x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

$$n \le \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

สรุป $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \ge n$

30.แนวคิด กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

ให้ $x_1 = \frac{1}{a_1}$, $x_2 = \frac{1}{a_2}$, $x_3 = \frac{1}{a_3}$, ... , $x_n = \frac{1}{a_n}$

เพราะฉะนั้น $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\le$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \ldots x_n} \le \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{a_3} \cdots \frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$$

หมายเหตุเมื่อ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

AM = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$

GM = ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต = $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$

HM = ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิก = $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+..+\dfrac{1}{a_n}}$

จะได้ว่า HM $\le$ GM $\le$ AM

และ HM = GM = AM เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_n$

31.แนวคิด กำหนดให้ $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , ... , a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

และ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n = s$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\le$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n)}$

$$\le \frac{(1+a_1)+(1+a_2)+(1+a_3)+...+(1+a_n)}{n}$$

$$\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n)} \le \frac{n+(a_1+a_2+a_3+...+a_n)}{n}$$

$$\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n)} \le \frac{n+s}{n}$$

$$\sqrt[n]{(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n)} \le 1+\frac{s}{n}$$

$$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \le (1+\frac{s}{n})^n$$

$$= 1+\binom{n}{1}(\frac{s}{n})+\binom{n}{2}(\frac{s}{n})^2+\binom{n}{3}(\frac{s}{n})^3+...+\binom{n}{n}(\frac{s}{n})^n$$

เมื่อ $1 \le m \le n$

จะได้ว่าสัมประสิทธิ์ของ s^m คือ $\binom{n}{m}\dfrac{1}{n^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}\dfrac{1}{n^m}$

เพราะว่า

$$1.2.3.4...(n-m).\underbrace{n.n.n....n}_{m\text{ ตัว}} \ge 1.2.3.4...(n-m)(n-m+1)(n-m+2)...n$$

เพราะฉะนั้น $(n-m)!n^m \ge n!$

ดังนั้น $\dfrac{n!}{n^m(n-m)!} \le 1$

เพราะฉะนั้น $\binom{n}{m}\dfrac{1}{n^m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}\dfrac{1}{n^m} = \dfrac{n!}{n^m(n-m)!}\dfrac{1}{m!} \le \dfrac{1}{m!}$

เพราะฉะนั้น $1+\binom{n}{1}(\frac{s}{n})+\binom{n}{2}(\frac{s}{n})^2+\binom{n}{3}(\frac{s}{n})^3+...+\binom{n}{n}(\frac{s}{n})^n$

$\le 1+s+\dfrac{s^2}{2!}+\dfrac{s^3}{3!}+...+\dfrac{s^n}{n!}$

สรุป $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)...(1+a_n) \le 1+s+\dfrac{s^2}{2!}+\dfrac{s^3}{3!}+...+\dfrac{s^n}{n!}$

32.แนวคิด $\sqrt{2}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[8]{8}.\sqrt[16]{16}.\sqrt[32]{32}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}\cdots$

$= 2^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{2}{4}}.2^{\frac{3}{8}}.2^{\frac{4}{16}}2^{\frac{5}{32}}....2^{\frac{n}{2^n}}....$

$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+...+\frac{n}{2^n}+....}$

ให้ $A = \dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+\dfrac{5}{32}+...+\dfrac{n}{2^n}+\dfrac{n+1}{2^{n+1}}+....$ ...(1)

$2A = 1+1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{8}+\dfrac{5}{16}+\dfrac{6}{32}+...+\dfrac{n}{2^{n-1}}+\dfrac{n+1}{2^n}+....$ ...(2)

(2) – (1) ; $A = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+...+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}}+....$

$= \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}.\sqrt[4]{4}.\sqrt[8]{8}.\sqrt[16]{16}.\sqrt[32]{32}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}\cdots = 2^A = 2^2 = 4$

หมายเหตุ จากแนวคิดข้างต้นทำให้สามารถหาค่า

$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{9}+\dfrac{3}{27}+\dfrac{4}{81}+\dfrac{5}{243}+...+\dfrac{n}{3^n}+\dfrac{n+1}{3^{n+1}}+....$

$\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{16}+\dfrac{3}{64}+\dfrac{4}{256}+\dfrac{5}{1024}+...+\dfrac{n}{4^n}+\dfrac{n+1}{4^{n+1}}+....$

กรณีทั่วไปเราจะหาค่าของ

$$\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\frac{4}{k^4}+\frac{5}{k^5}+\ldots+\frac{n}{k^n}+\frac{n+1}{k^{n+1}}+\ldots. \qquad ; k>0$$

ให้ $$A=\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\frac{4}{k^4}+\frac{5}{k^5}+\ldots+\frac{n}{k^n}+\frac{n+1}{k^{n+1}}+\ldots. \qquad \ldots(1)$$

$$kA=1+\frac{2}{k}+\frac{3}{k^2}+\frac{4}{k^3}+\frac{5}{k^4}+\ldots+\frac{n}{k^{n-1}}+\frac{n+1}{k^n}+\ldots. \qquad \ldots(2)$$

(2) – (1) ;

$$(k-1)A = 1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^4}+\ldots+\frac{1}{k^{n-1}}+\frac{1}{k^n}+\ldots. = \frac{1}{1-\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{k}{k-1}$$

$$A = \frac{k}{(k-1)^2}$$

สรุป $$\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\frac{4}{k^4}+\frac{5}{k^5}+\ldots+\frac{n}{k^n}+\ldots.=\frac{k}{(k-1)^2}$$

หรือ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{k^n}=\frac{k}{(k-1)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\frac{n+1}{3^{n+1}}+\ldots. = \frac{3}{(3-1)^2}=\frac{3}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4^n}=\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{3}{64}+\frac{4}{256}+\frac{5}{1024}+\ldots+\frac{n}{4^n}+\frac{n+1}{4^{n+1}}+\ldots. = \frac{4}{(4-1)^2}=\frac{4}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}=\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+\frac{5}{3125}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\frac{n+1}{5^{n+1}}+\ldots. = \frac{5}{(5-1)^2}=\frac{5}{16}$$

จากสูตรของผลบวกข้างต้นเราสามารถหาผลคูณ

$$\sqrt[3]{3}.\sqrt[9]{9}.\sqrt[27]{27}.\sqrt[81]{81}.\sqrt[243]{243}\cdots\sqrt[3^n]{3^n}\cdots$$

$$= 3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{2}{9}}.3^{\frac{3}{27}}.3^{\frac{4}{81}}3^{\frac{5}{243}}....3^{\frac{n}{3^n}}....$$

$$= 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\frac{5}{243}+\ldots+\frac{n}{3^n}+\ldots}$$

$$= 3^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[4]{4}\,.\sqrt[16]{16}\,.\sqrt[64]{64}\,.\sqrt[256]{256}\,.\sqrt[1024]{1024}\ldots\sqrt[4^n]{4^n}\ldots$$

$$= 4^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{2}{16}}.4^{\frac{3}{64}}.4^{\frac{4}{256}}4^{\frac{5}{1024}}\ldots.4^{\frac{n}{4^n}}\ldots.$$

$$= 4^{\frac{1}{4}+\frac{2}{16}+\frac{3}{64}+\frac{4}{256}+\frac{5}{1024}+\ldots+\frac{n}{4^n}+\ldots..}$$

$$= 4^{\frac{4}{9}}$$

$$\sqrt[5]{5}\,.\sqrt[25]{25}\,.\sqrt[125]{125}\,.\sqrt[625]{625}\,.\sqrt[3125]{3125}\ldots\sqrt[5^n]{5^n}\ldots$$

$$= 5^{\frac{1}{5}}.5^{\frac{2}{25}}.5^{\frac{3}{125}}.5^{\frac{4}{625}}5^{\frac{5}{3125}}\ldots.5^{\frac{n}{5^n}}\ldots.$$

$$= 5^{\frac{1}{5}+\frac{2}{25}+\frac{3}{125}+\frac{4}{625}+\frac{5}{3125}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots..}$$

$$= 5^{\frac{5}{16}}$$

กรณีทั่วไปเมื่อ $k = 2, 3, 4, 5, \ldots$

$$\sqrt[k]{k}\,.\sqrt[k^2]{k^2}\,.\sqrt[k^3]{k^3}\,.\sqrt[k^4]{k^4}\,.\sqrt[k^5]{k^5}\ldots\sqrt[k^n]{k^n}\ldots$$

$$= k^{\frac{1}{k}}.k^{\frac{2}{k^2}}.k^{\frac{3}{k^3}}.k^{\frac{4}{k^4}}k^{\frac{5}{k^5}}\ldots.k^{\frac{n}{k^n}}\ldots.$$

$$= k^{\frac{1}{k}+\frac{2}{k^2}+\frac{3}{k^3}+\frac{4}{k^4}+\frac{5}{k^5}+\ldots+\frac{n}{k^n}+\ldots..}$$

$$= k^{\frac{k}{(k-1)^2}}$$

ตัวอย่างเช่น $k = 10$ จะได้

$$\sqrt[10]{10}\,.\,\sqrt[100]{100}\,.\,\sqrt[1000]{1000}\,.\,\sqrt[10000]{10000}\,.\,\sqrt[100000]{100000}\cdots\sqrt[10^n]{10^n}\cdots$$

$$= 10^{\frac{10}{(10-1)^2}}$$

$$= 10^{\frac{10}{81}}$$

เมื่อเรานำเรื่อง log เข้ามาช่วยในคำถาม คำตอบที่ได้ก็จะเป็นเศษส่วน ตัวอย่างเช่น

1. $\log_2(\sqrt{2}\,.\,\sqrt[4]{4}\,.\,\sqrt[8]{8}\,.\,\sqrt[16]{16}\,.\,\sqrt[32]{32}\cdots\sqrt[2^n]{2^n}\cdots)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ $\log_2(4) = 2$

2. $\log_3(\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[9]{9}\,.\,\sqrt[27]{27}\,.\,\sqrt[81]{81}\,.\,\sqrt[243]{243}\cdots\sqrt[3^n]{3^n}\cdots)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ $\log_3(3^{\frac{3}{4}}) = \frac{3}{4}$

3. $\log(\sqrt[10]{10}\,.\,\sqrt[100]{100}\,.\,\sqrt[1000]{1000}\,..\cdots\sqrt[10^n]{10^n}\cdots)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ $\log(10^{\frac{10}{81}}) = \frac{10}{81}$

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18

รวมปัญหา

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
และสารพันปัญหาคณิตศาสตร์

เหมาะสำหรับครู นักเรียน และ ผู้สนใจปัญหาคณิตศาสตร์ ภายในเล่มประกอบ ด้วยปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่พิสูจน์ได้ด้วยการใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ต่าง ๆ เช่น

การหาสามหลักสุดท้ายของ 2545^{2002}

การแสดงว่า $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

การพิสูจน์ว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $\le$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

การหาผลคูณ $\sqrt[2]{5} \cdot \sqrt[2]{25} \cdot \sqrt[12]{125} \cdot \sqrt[62]{625} \dots, \sqrt[5^n]{5^n} \dots$

การหาสูตรผลบวก $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \dots$

การพิสูจน์ว่า 11 หาร $(n^{11} - n)$ ลงตัว ทุกจำนวนเต็มบวก n

การแสดงว่า $2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 3$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

การแสดงว่า $\sqrt{n} \le \sqrt[n]{n!}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ศาลาพระเกี้ยว โทร. 2554433,2187000 โทรสาร 2554441
สยามสแควร์ โทร. 2189888,2516141 โทรสาร 2549495
e-mail:cubook@chula.ac.th
http://www.cubook.chula.ac.th