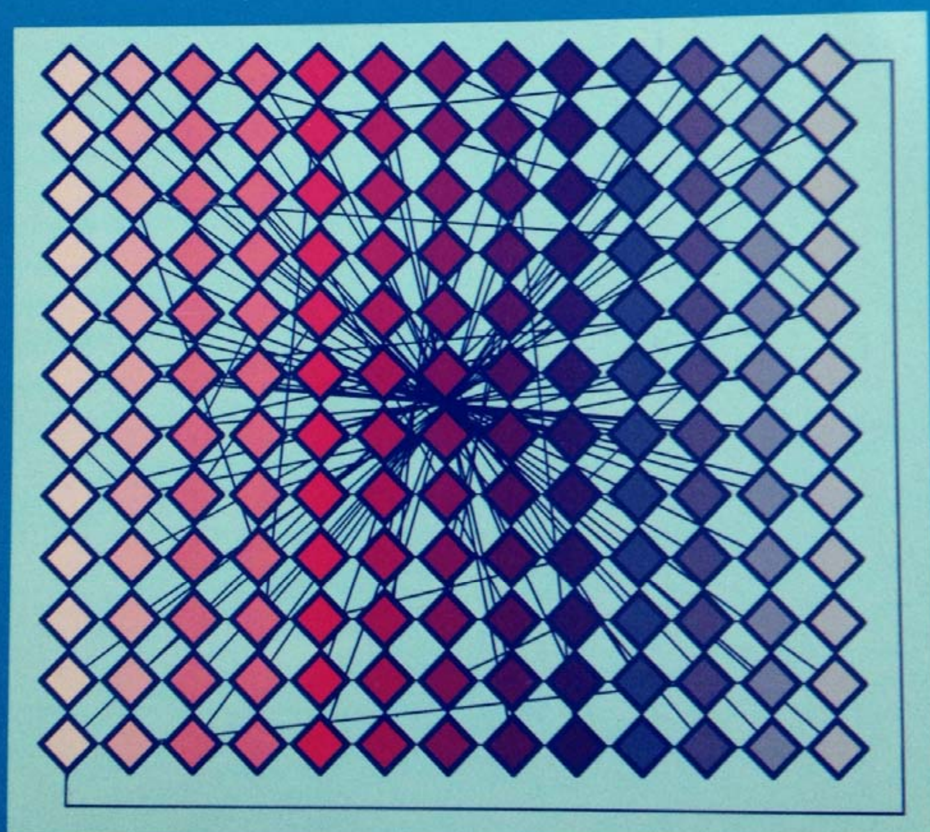
คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
และ
ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก



M

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
และ
ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
และ
ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ และ ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

ผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม พ.ศ. 2542

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19 -- กรุงเทพฯ :

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2542.

264 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง.

510

ISBN 974 - 332 - 595 - 6

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330

สาขาศาลาพระเกี้ยว โทร. 255-4433 โทรสาร 255-4441

สาขาสยามสแควร์ โทร. 251-6141 โทรสาร 254-9495

email: cubook@chula.ac.th

http://www.cubook.chula.ac.th

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 218-3563-4, 215-3612

คำนำ

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19 นี้จัดแบ่งเนื้อหาออกเป็น 2 ส่วน โดยในส่วนของ สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ได้รวบรวมคำถามต่างๆ มากมายเกิน 170 ข้อ และได้จัดคำถามที่มีลักษณะใกล้เคียงกันออกเป็น 7 ชุด และในส่วนของ ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก ได้รวบรวมคำถามจากข้อสอบที่นักเรียนอาจเคยเห็นแล้วในข้อสอบแข่งขัน เช่นข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิก ข้อสอบ ENTRANCE ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์ฯ โดยผู้เขียนได้ทำการปรับระดับคำถามให้เป็นไปในลักษณะจากง่ายไปยากและเลือกใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับปัญหานั้นๆ

สำหรับเล่มนี้ผมขอแนะนำผลงานสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ของ เก่ง วิบูลย์ธัญญ์ ซึ่งเป็นผลงานที่ดีมาก และได้พิมพ์ลงวารสารคณิตศาสตร์ฯ "มุมปรัศนา" ตั้งแต่ พ.ศ.2537 ขณะที่เป็นนักเรียนระดับ ม.ปลาย จากโรงเรียนพนัสพิทยาคาร จ.ชลบุรี จนถึงปัจจุบัน พ.ศ. 2542 นี้ เป็นนิสิตระดับชั้นปีที่ 4 ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้คงจะมีประโยชน์อย่างมากที่จะทำให้นักเรียนได้มีโจทย์คณิตศาสตร์ฝึกหัดทำมากขึ้นเพื่อที่นักเรียนจะมีทักษะและความสามารถในการแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่ดีต่อไป

พบกันใหม่เล่มต่อไป

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่
คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

****

รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ โดยคัดเลือกข้อสอบที่สามารถทำได้ทั้งสองแบบ คือโดยการใช้วิธีจริง และ วิธีการตัดตัวเลือก เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการหาคำตอบโดยวิธีจริงตามหลักสูตร และได้ฝึกหัดใช้ข้อสังเกต หรือใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็กๆ น้อยๆ ช่วยในการตัดตัวเลือก ภายในเล่มประกอบด้วยข้อสอบมากกว่า 400 ข้อที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก

เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบต่างๆ มากมายเช่น

- โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
- เซตคำตอบเป็นตัวเลือกใด
- วาดรูปวัดระยะทาง
- โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
- ความชัน บวก หรือ ลบ
- ฯลฯ

****

สารบัญ

MATHCAD กับการเฉลยข้อสอบ

คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

8. $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5-2\sqrt{6}$ 2. $-5+2\sqrt{6}$ 3. $5-2\sqrt{6}$ 4. $5+2\sqrt{6}$

แนวคิด MATHCAD สามารถจัดรูปแบบพีชคณิตได้

$$\frac{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$$

$$5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้นตอบ 4.

10. ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่งมิใช่เอกฐาน และถ้า $\begin{bmatrix}60 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$

แล้ว A^{-1} คือ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}9 & -18\\ -12 & 6\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}12 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}12 & 20\\ 30 & 8\end{bmatrix}$

แนวคิด MATHCAD สามารถหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ได้

$$\left[\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}60 & 20\\ 30 & 40\end{bmatrix}^{-1}\right]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}12 & 4\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นตอบ 3.

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
ชุดที่ 1

1. จงแสดงว่า $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} > (1+\frac{1}{n})^{n}$
2. จงแสดงว่า ถ้า $m > n$ แล้ว $(1+\frac{1}{m})^{m} > (1+\frac{1}{n})^{n}$
3. จงแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}$
4. จงแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$
5. จงแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$
6. จงแสดงว่า $\frac{1}{100\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$
7. จงแสดงว่า $\log n < n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
8. จงแสดงว่า $3^{6n} - 2^{6n}$ หารด้วย 35 ลงตัวทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก
9. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มคู่

   จงแสดงว่า $\frac{n}{2}$ และ $n+1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
10. จงแสดงว่า $11^{10} - 1$ หารด้วย 100 ลงตัว
11. จงแสดงว่า $11^{11} - 1$ หารด้วย 20 ไม่ลงตัว
12. จงแสดงว่า $11^{2n} - 1$ หารด้วย 20 ลงตัวทุกค่า $n = 1, 2, \ldots$
13. $x^2 + x + 1$ หาร $x^{2545} + x^{2002} + 1$ เหลือเศษเท่าใด
14. จงแสดงว่า $(1+2+3+\ldots+n)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}) \geqslant n^2$
15. จงแสดงว่า $e^x < \frac{1}{1-x}$ ทุกค่า $x < 1$

16. จงแสดงว่า $\ell n(\frac{x+1}{x}) < \frac{1}{x} < \ell n(\frac{x}{x-1})$; $x > 1$

17. $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$; $x \in (0, \infty)$ จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

18. $C_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ และ $C_2 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$

$A = \{ac + bd \mid (a, b) \in C_1, (c, d) \in C_2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A เท่ากับเท่าใด

19. $a, b, c, d \in R$ จงแสดงว่า $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

20. $a, b, c, x, y, z \in R$

จงแสดงว่า $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

21. $a, b, c, d, x, y, z, w \in R$

จงแสดงว่า $(ax + by + cz + dw)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)$

22. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in R$ และ $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n \in R$

จงแสดงว่า $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

23. $C_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$

$C_2 = \{(a, b, c) \mid a^2 + b^2 + c^2 = 16\}$

$A = \{ax + by + cz \mid (x, y, z) \in C_1, (a, b, c) \in C_2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A เท่ากับเท่าใด

24. $C_1 = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4\}$

$C_2 = \{(a, b, c, d) \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25\}$

$A = \{ax + by + cz + dw \mid (x, y, z, w) \in C_1, (a, b, c, d) \in C_2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดและขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A เท่ากับเท่าใด

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 1

1. แนวคิด จากสูตรการกระจายทวินาม

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n})^n &= 1 + \binom{n}{1}(\frac{1}{n}) + \binom{n}{2}(\frac{1}{n})^2 + \binom{n}{3}(\frac{1}{n})^3 + \ldots + \binom{n}{n}(\frac{1}{n})^n \\
&= 1 + 1 + \frac{(n-1)n}{2!}(\frac{1}{n})^2 + \frac{(n-2)(n-1)n}{3!}(\frac{1}{n})^3 + \ldots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \frac{1}{n^n} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \ldots + \\
&\quad + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\begin{aligned}
(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} &= 1 + \binom{n+1}{1}(\frac{1}{n+1}) + \binom{n+1}{2}(\frac{1}{n+1})^2 \\
&\quad + \binom{n+1}{3}(\frac{1}{n+1})^3 + \ldots + \binom{n+1}{n}(\frac{1}{n+1})^n + (\frac{1}{n+1})^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{n(n+1)}{2!}(\frac{1}{n+1})^2 + \frac{(n-1)n(n+1)}{3!}(\frac{1}{n+1})^3 + \ldots \\
&\quad + (\frac{1}{n+1})^{n-1} + (\frac{1}{n+1})^{n+1} \\
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1}) + \ldots + (\frac{1}{n+1})^{n+1}
\end{aligned}$$

เพราะว่า

$$1 \geq 1$$

$$1 \geq 1$$

$$\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) \geq \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})$$

$$\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) \geq \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\ldots(1-\frac{n-1}{n+1}) \geq \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$(\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $$(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1+\frac{1}{n})^{n}$$

2. แนวคิด เมื่อ $m > n$ แล้ว $m = n + k$ หรือ $n = m - k$

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{m})^{m} &> (1+\frac{1}{m-1})^{m-1}\\ &> (1+\frac{1}{m-2})^{m-2}\\ &> (1+\frac{1}{m-3})^{m-3}\\ &\vdots\\ &> (1+\frac{1}{m-k})^{m-k}\\ &= (1+\frac{1}{n})^{n}\end{aligned}$$

สรุป $(1+\frac{1}{m})^{m} > (1+\frac{1}{n})^{n}$

3. แนวคิด ให้ $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$

$$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{9998}{9999}$$

เพราะว่า $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$, … , $\frac{9997}{9998} < \frac{9998}{9999}$

หมายเหตุ เพราะว่า $n^2 - 1 < n^2$ เพราะฉะนั้น $(n + 1)(n - 1) < n^2$

ดังนั้น $\frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1}$ และ $\frac{9999}{1000} < 1$

เพราะฉะนั้น $A < B$ ผลที่ได้ตามมาคือ $A^2 < AB$

$$\text{เพราะว่า } AB = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{9998}{9999}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\ldots\frac{9998}{9999}\cdot\frac{9999}{10000}$$
$$= \frac{1}{10000}$$

เพราะฉะนั้น $A^2 < \frac{1}{10000}$

$A < \frac{1}{100}$

สรุป $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000} < \frac{1}{100}$

4. แนวคิด ให้ $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n}$

$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}$

เพราะว่า $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, $\frac{5}{6} < \frac{6}{7}$, … , $\frac{2(n-1)}{2n} < \frac{2n}{2n+1}$

เพราะฉะนั้น $A < B$ และ $A^2 < AB$

เพราะว่า $AB = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\ldots\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)\ldots\left(\frac{2(n-1)}{2n-1}\right) = \frac{1}{2n}$

เพราะฉะนั้น $A^2 < AB = \frac{1}{2n}$

$A < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

สรุป $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

หมายเหตุ เพราะว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{(2n-1)}{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

5. แนวคิด $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n}$

$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2(n-1)}{2n-1}$

$2A = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n-1)}{2n}$

เพราะว่า $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$, $\frac{4}{5} < \frac{5}{6}$, … , $\frac{2(n-1)}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n}$

เพราะฉะนั้น $2A > B$ ทำให้ได้ว่า $2A^2 > AB$

$2A^2 > \frac{1}{2n}$

$A^2 > \frac{1}{4n}$

$A > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

สรุป $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{(2n-1)}{2n} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$

หมายเหตุ เพราะว่า $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} < \frac{1}{\sqrt{2n}}$

6. แนวคิด ให้ $A = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$

$B = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{9998}{9999}$

$2A = \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$

เพราะว่า $4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1$

$(2n)(2(n+1)) < (2n+1)^2$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2n}{2n+1} < \dfrac{2n+1}{2(n+1)}$

ดังนั้น $\dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{5} < \dfrac{5}{6}$, $\dfrac{6}{7} < \dfrac{7}{8}$, ... , $\dfrac{9998}{9999} < \dfrac{9999}{10000}$

เพราะฉะนั้น $B < 2A$ และ $AB < 2A^2$

เพราะว่า $AB = (\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{9999}{10000})(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \dfrac{9998}{9999})$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{9998}{9999} \cdot \frac{9999}{10000}$$

$$= \frac{1}{10000}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{10000} < 2A^2$ นั่นคือ $\dfrac{1}{100\sqrt{2}} < A$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{100\sqrt{2}} < \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \dfrac{9999}{10000}$

7. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ $\log n < n$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $\log(1) = 0 < 1$ เพราะฉะนั้น P(1) จริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k+1) เป็นจริงด้วย

สมมติ P(k) เป็นจริงเพราะฉะนั้น $\log(k) < k$

เพราะว่า $\log(k+1) < \log(k+k)$

$$< \log(10k)$$

$$= \log(10) + \log(k) < 1 + k$$

เพราะฉะนั้น P(k+1) เป็นจริง

สรุปโดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $\log n < n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

8. แนวคิด ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\begin{aligned} 3^{6n} - 2^{6n} &= (3^3)^{2n} - (2^3)^{2n} \\ &= (27)^{2n} - (8)^{2n} \end{aligned}$$

เพราะว่า $(a + b)$ หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัวเสมอทุกจำนวนเต็มบวก a , b และ n

เพราะฉะนั้น $(27 + 8) \mid ((27)^{2n} - (8)^{2n})$

$$35 \mid (3^{6n} - 2^{6n})$$

สรุป 35 หาร $3^{6n} - 2^{6n}$ ลงตัวทุกจำนวนเต็มบวก n

9. แนวคิด จากทฤษฎีบทในหนังสือ ค.011

m , n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม a,b ที่ทำให้ $am+bn = 1$

เพราะว่า $(-2)(\frac{n}{2}) + (1)(n + 1) = -n + n + 1 = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}$, $n + 1$ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

10. แนวคิด เพราะว่า
$$\begin{aligned} 11^{10} - 1 &= 11^{10} - 1^{10} \\ &= (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \ldots + 11^2 + 11 + 1) \\ &= (10)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \ldots + 11^2 + 11 + 1) \end{aligned}$$

และหลักหน่วยของ 11^9 , 11^8 , 11^7 , … , $11^2 + 11 + 1$ ต่างก็เป็นเลขหนึ่งทุกตัว

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $11^9 + 11^8 + 11^7 + \ldots + 11^2 + 11 + 1$ ต้องเป็นเลข 0

ดังนั้น 10 หาร $11^9 + 11^8 + 11^7 + \ldots + 11^2 + 11 + 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 100 หาร $(10)(11^9 + 11^8 + 11^7 + \ldots + 11^2 + 11 + 1)$ ลงตัว

สรุป $100 \mid (11^{10} - 1)$

11.แนวคิด $11^{11} - 1 = 11^{11} - 11^{11}$

$$= (11-1)(11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$$

$$= (10)(11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$$

20 หาร $(10)(11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$ ลงตัว

$\Leftrightarrow$ 2 หาร $(11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$ ลงตัว

เพราะว่า $11^{10}, 11^{9}, 11^{8}, \ldots, 11^{2}, 11, 1$ เป็นเลขคี่ทุกตัว

เพราะฉะนั้น $11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1$ เป็นเลขคี่

ดังนั้น 2 จึงหาร $11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1$ ไม่ลงตัว

สรุป 20 หาร $(10)(11^{10} + 11^{9} + 11^{8} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$ ไม่ลงตัว

นั่นคือ 20 หาร $11^{11} - 1$ ไม่ลงตัว

12.แนวคิด

$$11^{2n} - 1 = 11^{2n} - 1^{2n}$$

$$= (11-1)(11^{2n-1} + 11^{2n-2} + 11^{2n-3} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$$

$$= (10)(11^{2n-1} + 11^{2n-2} + 11^{2n-3} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$$

เพราะว่า $11^{2n-1}, 11^{2n-2}, 11^{2n-3}, \ldots, 11^{2}, 11, 1$ เป็นเลขคี่ทุกตัว

และมีจำนวนพจน์เป็นเลขคู่ (2n)

เพราะฉะนั้น $11^{2n-1} + 11^{2n-2} + 11^{2n-3} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1$ เป็นเลขคู่

ดังนั้น 20 หาร $(10)(11^{2n-1} + 11^{2n-2} + 11^{2n-3} + \ldots + 11^{2} + 11 + 1)$ ลงตัว

สรุป $20 \mid (11^{2n}-1)$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

13.แนวคิด $\dfrac{x^{2545}+x^{2002}+1}{x^{2}+x+1} = \dfrac{(x^{2545}+x^{2002}+1)(x-1)}{(x^{2}+x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x^{2546}-x^{2545}+x^{2003}-x^{2002}+x-1}{x^{3}-1}$

$(x^3-1)(x^{2543}+x^{2540}+\ldots+x^3+1)$

$= (x^{2546}+x^{2543}+\ldots+x^6+x^3)-(x^{2543}+x^{2540}+\ldots+x^3+1)$

$= x^{2546}-1$

$(x^3-1)(x^{2542}+x^{2539}+\ldots+x^2)$

$= (x^{2545}+x^{2542}+\ldots+x^5)-(x^{2542}+x^{2539}+\ldots+x^2)$

$= x^{2545}-x^2$

$(x^3-1)(x^{2000}+x^{1997}+x^{1994}+\ldots+x^5+x^2)$

$= x^{2003}+x^{2000}+\ldots+x^8+x^5-(x^{2000}+x^{1997}+\ldots+x^5+x^2)$

$= x^{2003}-x^2$

$(x^3-1)(x^{1999}+x^{1996}+x^{1993}+\ldots+x^4+x)$

$= (x^{2002}+x^{1999}+\ldots+x^7+x^4)-(x^{1999}+x^{1996}+\ldots+x^4+x)$

$= x^{2002}-x$

เพราะว่า $x^{2546}-x^{2545}+x^{2003}-x^{2002}+x-1$

$= (x^{2546}-1)-(x^{2545}-x^2)+(x^{2003}-x^2)-(x^{2002}-x)$

$= (x^3-1)(x^{2543}+x^{2540}+\ldots+x^3+1)+(x^3-1)(x^{2542}+x^{2539}+\ldots+x^2)$
$+(x^3-1)(x^{2000}+x^{1997}+\ldots+x^5+x^2)+(x^3-1)(x^{1999}+x^{1996}+\ldots+x^4+x)$

$= (x^3-1)[(x^{2543}+x^{2540}+\ldots+x^3+1)+(x^{2542}+x^{2539}+\ldots+x^2)$
$+(x^{2000}+x^{1997}+\ldots+x^5+x^2)+(x^{1999}+x^{1996}+\ldots+x^4+x)]$

เพราะฉะนั้น $\frac{x^{2545}+x^{2002}+1}{x^2+x+1}$

$$= \frac{x^{2546}-x^{2545}+x^{2003}-x^{2002}+x-1}{x^3-1}$$

$$= (x^{2543}+x^{2540}+\ldots+x^3+1)+(x^{2542}+x^{2539}+\ldots+x^2)$$

$$+(x^{2000}+x^{1997}+\ldots+x^5+x^2)+(x^{1999}+x^{1996}+\ldots+x^4+x)$$

สรุป x^2+x+1 หาร $x^{2545}+x^{2002}+1$ ลงตัว

14.แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ

$$(1+2+3+\ldots+n)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})\geqslant n^2$$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง

เพราะว่า $(1)(1)\geqslant 1$

เพราะฉะนั้น P(1) จริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) จริง แล้ว P(k + 1) จริง

สมมติ P(k) จริง เพราะฉะนั้น

$$(1+2+3+\ldots+k)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k})\geqslant k^2$$

เพราะว่า $(1+2+3+\ldots+k+(k+1))(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1})$

$$= (1+2+3+\ldots+k)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k})$$

$$+(1+2+3+\ldots+k)(\frac{1}{k+1})+(k+1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k})$$

$$+(k+1)(\frac{1}{k+1})$$

$$\geqslant k^2+(1+2+3+\ldots+k)(\frac{1}{k+1})+(k+1)(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k})+1$$

$$= k^2+(\frac{1}{k+1}+\frac{2}{k+1}+\frac{3}{k+1}+\ldots+\frac{k}{k+1})$$

$$+((k+1)+\frac{k+1}{2}+\frac{k+1}{3}+\ldots+\frac{k+1}{k})+1$$

$$= k^2 + ((k+1) + \frac{1}{k+1}) + (\frac{2}{k+1} + \frac{k+1}{2}) + (\frac{3}{k+1} + \frac{k+1}{3}) + \ldots$$

$$+ (\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k}) + 1$$

$$\geqslant k^2 + 2 + 2 + 2 + \ldots 2 + 1 \qquad (\text{เพราะว่า } x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \text{ ทุกค่า } x > 0)$$

$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

เพราะฉะนั้น $P(k+1)$ จริง

เพราะฉะนั้นโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า $P(n)$ เป็นจริงทุกค่า n

หมายเหตุ โดยการใช้ผลของข้อ 22 สามารถแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

$$[1^2 + \sqrt{2}^{\,2} + \sqrt{3}^{\,2} + \ldots + \sqrt{n}^{\,2}]\,[1^2 + (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + \ldots + (\frac{1}{\sqrt{n}})^2]$$

$$\geqslant [(1)(1) + (\sqrt{2})(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (\sqrt{3})(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \ldots + (\sqrt{n})(\frac{1}{\sqrt{n}})]^2$$

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + n)(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) \geqslant n^2$$

15.แนวคิด เพราะว่า $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$

เพราะฉะนั้น $\quad e^x > 1 + x \qquad$ ทุกค่า $x > -1$

$$e^{-x} < \frac{1}{1+x} \qquad ; x > -1$$

แทนค่า $x = -x$ จะได้ $\quad e^{-(-x)} < \frac{1}{1+(-x)}$

$$e^x < \frac{1}{1-x} \qquad ; x < 1$$

สรุป $\quad e^x < \frac{1}{1-x} \qquad$ ทุกค่า $x < 1$

หมายเหตุ ในวิชา CALCULUS นักเรียนจะพบข้อพิสูจน์ว่า

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

16.แนวคิด $e^x < \dfrac{1}{1-x}$ ทุกค่า $x < 1$

$x > 1$ $\dfrac{1}{x} < 1$

$$e^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$$

$$e^{\frac{1}{x}} < \frac{x}{x-1}$$

$$\ell n(e^{\frac{1}{x}}) < \ell n(\frac{x}{x-1})$$

$$\frac{1}{x} < \ell n(\frac{x}{x-1}) \qquad ; x > 1$$

$$e^x > 1 + x$$

$$e^{\frac{1}{x}} > 1 + \frac{1}{x}$$

$$e^{\frac{1}{x}} > \frac{x+1}{x}$$

$$\ell n(e^{\frac{1}{x}}) > \ell n(\frac{x+1}{x})$$

$$\frac{1}{x} > \ell n(\frac{x+1}{x})$$

สรุป $\ell n(\dfrac{x+1}{x}) < \dfrac{1}{x} < \ell n(\dfrac{x}{x-1})$ $; x > 1$

17.แนวคิด $x \in (0, \infty)$

เพราะว่า $\dfrac{1}{x} < \ell n(\dfrac{x}{x-1})$ เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{x+1} < \ell n(\dfrac{x+1}{x})$

และ $\ell n(\dfrac{x+1}{x}) - \dfrac{1}{x+1} > 0$

$$F(x) = \ell n(f(x))$$

$$= \ell n(1+\frac{1}{x})x$$

$$= x\,\ell n\,(1+\frac{1}{x})$$

$$= x\,\ell n\,(\frac{x+1}{x})$$

$$= x(\ell n(x+1)-\ell n(x))$$

เพราะว่า $\frac{d}{dx}\ln U = \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}$ เพราะฉะนั้น

$$F'(x) = [\ell n(x+1)-\ell n(x)] + x\,[\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}]$$

$$= \ell n(\frac{x+1}{x}) + x(\frac{x-(x+1)}{x(x+1)})$$

$$= \ell n(\frac{x+1}{x}) - \frac{1}{x+1}$$

$$> 0$$

เพราะฉะนั้น F(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น $e^{F(x)}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

สรุป $F(x) = e^{\ell n(f(x))} = e^{F(x)} = e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = (1+\frac{1}{x})^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

18.แนวคิด $(ad-bc)^2 \geqslant 0$

$$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geqslant 0$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 \geqslant 2abcd$$

$(a\,,b) \in C_1\,, a^2+b^2 = 1$ และ $(c\,,d) \in C_2\,, c^2+d^2 = 4$

$$(ac+bd)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$$

$$= (a^2+b^2)(c^2+d^2) \quad = (1)(4)$$

เพราะฉะนั้น $-2 \leq ac+bd \leq 2$

เพราะว่า $(-1\,,0),(1\,,0) \in C_1$ และ $(2\,,0) \in C_2$ เพราะฉะนั้น $-2\,,2 \in A$

สรุป ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A คือ –2

ขอบเขตบนค่ามากสุดของ A คือ 2

หมายเหตุ ดูแนวคิดอีกแบบได้ที่ข้อ 23

19.แนวคิด วิธีที่ 1. $(ac + bd)^2 = a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2$

เพราะว่า $(ad - bd)^2 \geq 0$

$$a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0$$

$$a^2d^2 + b^2c^2 \geq 2abcd$$

เพราะฉะนั้น $a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$

$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

สรุป $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

วิธีที่ 2. สมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง หรือมีราก เป็นจำนวนจริงค่าเดียว ก็ต่อเมื่อ $B^2 - 4AC \geq 0$

เพราะว่า $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 \geq 0$

เพราะฉะนั้นสมการ $(ax + b)^2 + (cx + d)^2 = 0$

มีรากเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียวหรือไม่มีค่ารากเป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น $0 = (ax + b)^2 + (cx + d)^2$

$$0 = (a^2 + c^2)x^2 + 2(ab + cd)x + b^2 + d^2$$

เพราะว่า $A = a^2 + c^2$

$$B = 2(ab + cd)$$

$$C = b^2 + d^2$$

เพราะฉะนั้น $B^2 - 4AC \geq 0$

$$B^2 \geq 4AC$$

$$(2(ab + cd))^2 \geq 4(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$$

สรุป $(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน ให้ $a_1 = a, a_2 = b, b_1 = c, b_2 = d$

จะได้ว่า $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$

20.แนวคิด $(bx - ay)^2 \geq 0$

$$b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 \geq 0$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 \geq 2abxy$$

ในทำนองเดียวกัน $a^2z^2 + c^2x^2 \geq 2axcz$

$$b^2z^2 + c^2y^2 \geq 2bycz$$

เพราะฉะนั้น $(ax + by + cz)^2$

$$= a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2axby + 2axcz + 2\,bycz$$

$$\leq a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + (b^2x^2 + a^2y^2) + (a^2z^2 + c^2x^2) + (b^2z^2 + c^2y^2)$$

$$= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

สรุป $(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$

21.แนวคิด $[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)] - [(ax + by + cz + dw)^2]$

$= [a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + a^2w^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + b^2w^2 + c^2x^2 + c^2y^2 +$

$c^2z^2 + c^2w^2 + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 + d^2w^2] - [a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + d^2w^2 +$

$2axby + 2axcz + 2axdw + 2bycz + 2\,bydw + 2czdw]$

$= [a^2y^2 + a^2z^2 + a^2w^2 + b^2x^2 + b^2z^2 + b^2w^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2w^2 + d^2x^2$

$+ d^2y^2 + d^2z^2] - [2axby + 2axcz + 2axdw + 2bycz + 2\,bydw + 2czdw]$

$= [a^2y^2 - 2axby + b^2x^2] + [a^2z^2 - 2axcz + c^2x^2] + [a^2w^2 - 2axdw + d^2x^2]$

$+ [b^2z^2 - 2bycz + c^2y^2] + [b^2w^2 - 2\,bydw + d^2y^2] + [c^2w^2 - 2czdw + d^2z^2]$

$= [ay - bx]^2 + [az - cx]^2 + [bz - cy]^2 + [bw - dy]^2 + [cw - dz]^2$

$\geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) \geqslant (ax + by + cz + dw)^2$

22.แนวคิด $\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geq 0$

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 x^2 + 2a_i b_i x + b_i^2) \geq 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)x^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 0$$

ให้ $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

ดังนั้น $Ax^2 + Bx + C \geq 0$

เพราะฉะนั้น $B^2 - 4AC \leq 0$

$$B^2 \leq 4AC$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} 2a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

สรุป $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

23.แนวคิด $(x, y, z) \in C_1, (a, b, c) \in C_2$

$(ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (9)(16)$

เพระฉะนั้น $-12 \leq ax + by + cz \leq 12$

เพราะว่า $(-4, 0, 0), (4, 0, 0) \in C_2$ และ $(3, 0, 0) \in C_1$

เพราะฉะนั้น $-12, 12 \in A$

สรุป ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A เท่ากับ 12

ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A เท่ากับ –12

24.แนวคิด $C_1 = \{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4\}$

$C_2 = \{(a, b, c, d) \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 25\}$

$A = \{ax + by + cz + dw \mid (x, y, z, w) \in C_1, (a, b, c, d) \in C_2\}$

$(x, y, z, w) \in C_1, (a, b, c, d) \in C_2$

$(ax + by + cz + dw)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + w^2) = (25)(4)$

เพระฉะนั้น $-10 \leq ax + by + cz + dw \leq 10$

เพราะว่า $(-5, 0, 0, 0), (5, 0, 0, 0) \in C_2$ และ $(2, 0, 0, 0) \in C_1$

เพราะฉะนั้น $-10, 10 \in A$

สรุป ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A เท่ากับ 10

ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ A เท่ากับ –10

****

5^{100} = *7888609052 2101180541 1728565282 7862296732 0643510902 3004770278 9306640625*

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
ชุดที่ 2

1. $x + 2$ หาร $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ เหลือเศษเท่าใด

2. $x - 1$ หาร $x^{100} + x^{50} + 1$ เหลือเศษเท่าใด

3. $x - 1$ หาร $x^{2n} + x^n + 1$ เหลือเศษเท่าใด

4. $x - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษเท่าใด

5. $x^2 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษเท่าใด

6. $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n

   ถ้า $x - 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 ,

   $x - 2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2 ,

   $x - 3$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 3

   แล้ว $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่าใด

7. $x^2 + 9$ หาร $x^9 + 2$ เหลือเศษเท่าใด

8. $x^2 - 1$ หาร $x^{100} + x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด

9. $x^2 + 1$ หาร $x^{111} + 1$ เหลือเศษเท่าใด

10. จงแสดงว่า $x^{10} + x^5 + 1$ หารด้วย $x^2 + x + 1$ ลงตัว

11. จงแสดงว่า $x^{100} + x^{50} + 1$ หารด้วย $x^2 + x + 1$ ลงตัว

12. จงหาผลหารของ $x^{10} + x^5 + 1$ ด้วย $x^2 + x + 1$

13. $x^3 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษเท่าใด

14. $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n

ถ้า $x-1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2

และ $x-2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1

แล้ว $(x-1)(x-2)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

15. $x^{100}+x^{90}+x^{80}+\ldots+x^{20}+x^{10}+1$ หารด้วย x^4-1 เหลือเศษเท่าใด

16. $x^{2541}-1$ หารด้วย x^2+1 เหลือเศษเท่าใด

17. $x^{1000}+1$ หารด้วย x^3-1 เหลือเศษเท่าใด

18. x^{2541} หารด้วย x^4-1 เหลือเศษเท่าใด

19. x^{1998} หารด้วย x^4-1 เหลือเศษเท่าใด

20. x^n หารด้วย x^4-1 เหลือเศษเท่าใด

●♦●♦●■▲▼▽△●■▲▼▽△●◆■▲▼●♦●♦●

ปัญหาเพิ่มเติม(หน้ากระดาษที่ว่างให้เต็ม)

1. จงพิสูจน์ว่า $(m-1)^2 \mid m^{m-1}-1$ ทุกจำนวนเต็ม $m > 1$

2. ถ้า $x^2+y^2=1$ แล้วค่ามากที่สุดของ xy เท่ากับเท่าใด

3. ถ้า $x^2+y^2=1$ แล้วค่ามากที่สุดของ $x+y$ เท่ากับเท่าใด

4. ถ้า $x^2+y^2=4$

   แล้วค่ามากที่สุดของ $x+y+2xy$ เท่ากับเท่าใด

1. เฉลยที่หน้า 86   2. เฉลยที่หน้า 54   3. เฉลยที่หน้า 36   4. เฉลยที่หน้า 56

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 2

1. แนวคิด จากทฤษฎีบทของการหารจาก ค.011

เมื่อ $f(x)$ เป็นพหุนาม $x - c$ หาร $f(x)$ จะเหลือเศษ $f(c)$

ดังนั้นเมื่อ $f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

$$
\begin{aligned}
f(-2) &= (-2)^4 + 4(-2)^3 + 3(-2)^2 + 2(-2) + 1 \\
&= 16 - 32 + 12 - 4 + 1 \\
&= -7
\end{aligned}
$$

สรุป $x + 2$ หาร $x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ เหลือเศษ -7

2. แนวคิด $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$

$$f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x^{100} + x^2 + 1$ เหลือเศษ 3

3. แนวคิด $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$

$$f(1) = 1 + 1 + 1$$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x^{2n} + x^n + 1$ เหลือเศษ 3

4. แนวคิด **วิธีที่ 1.** ให้ $f(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

เพราะว่า $x - a$ หาร $f(x)$ จะเหลือเศษ $f(a)$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ $f(1) = 6$

สรุป $x - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษ 6

วิธีที่ 2. $x - 1$ หาร x^k เหลือเศษ 1 ทุกจำนวนเต็ม k

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

เหลือเศษ $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6$

วิธีที่ 3. $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

$$= (x - 1) + (x^3 - 1) + (x^9 - 1) + (x^{27} - 1) + (x^{81} - 1) + (x^{243} - 1) + 6$$

เพราะว่า $x - 1$ หาร $x^k - 1$ ลงตัวทุกจำนวนเต็ม k

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษ 6

5. แนวคิด

วิธีที่ 1. $x^2 - 1$ หาร x^k เหลือเศษ x^r เมื่อ r เป็นเศษที่ได้จากการหาร k ด้วย 2

เพราะฉะนั้น $x^2 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษ

$$= x + x + x + x + x + x$$

$$= 6x$$

วิธีที่ 2. สมมติ $\dfrac{x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}}{x^2 - 1} = q(x) + \dfrac{ax + b}{x^2 - 1}$

ดังนั้น $ax + b = (x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}) - q(x)(x^2 - 1)$

$x = 1;\quad a + b = 6$

$x = -1;\quad -a + b = -6$

เพราะฉะนั้น $b = 0$

และ $a = 6$

สรุปเศษเหลือเท่ากับ $6x$

วิธีที่ 3. ใช้การจัดรูปแบบพีชคณิต $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$

$$= 6x + (x^3 - x) + (x^9 - x) + (x^{27} - x) + (x^{81} - x) + (x^{243} - x)$$

$$= 6x + x(x^2 - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^{26} - 1) + x(x^{80} - 1) + x(x^{242} - 1)$$

$$= 6x + x(x^2 - 1) + x[(x^2)^4 - 1] + x[(x^2)^{13} - 1] + x[(x^2)^{40} - 1] + x[(x^2)^{121} - 1]$$

เพราะว่า $x^2 - 1$ หาร $(x^2)^k - 1$ ลงตัวทุกจำนวนเต็มบวก k

เพราะฉะนั้น $x^2 - 1$ หาร $(x^2)^4 - 1$, $(x^2)^{13} - 1$, $(x^2)^{40} - 1$, $(x^2)^{121} - 1$ ลงตัว

สรุป $x^2 - 1$ หาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ เหลือเศษ 6x

6. แนวคิด ให้ $\dfrac{p(x)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = q(x) + \dfrac{ax^2 + bx + c}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

ดังนั้น $p(x) = q(x)(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$

$x - 1$ หาร p(x) เหลือเศษ 1 $\rightarrow$ $p(1) = 1$

$\rightarrow$ $a + b + c = 1$ ...(1)

$x - 2$ หาร p(x) เหลือเศษ 2 $\rightarrow$ $p(2) = 2$

$\rightarrow 4a + 2b + c = 2$ ...(2)

$(x - 3)$ หาร p(x) เหลือเศษ 3 $\rightarrow$ $p(3) = 3$

$\rightarrow 9a + 3b + c = 3$ ...(3)

จาก (1) , (2) , (3) จะได้ $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$

สรุป $(x-1)(x-2)(x-3)$ หาร p(x) เหลือเศษ x

7. แนวคิด สมมติ r(x) เป็นเศษที่เหลือจากการหาร $x^9 + 2$ ด้วย $x^2 + 9$

เพราะฉะนั้น $r(x) = ax + b$, ให้ $f(x) = x^9 + 2 + (ax + b)$

ดังนั้น $x^2 + 9$ หาร $(x^9 + 2) + (ax + b)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(x + 3i)(x - 3i)$ หาร $(x^9 + 2) + (ax + b)$ ลงตัว

$x - 3i$ หาร $f(x)$ ลงตัว และ , $x + 3i$ หาร $f(x)$ ลงตัว

ดังนั้น $f(3i) = 0$

$$(3i)^9 + 2 + 3ai + b = 0$$

$$3^9 i + 2 + 3ai + b = 0$$

$$(2 + b) + (3^9 + 3a)i = 0$$

$$2 + b = 0$$

$$3^9 + 3a = 0$$

เพราะฉะนั้น $b = -2 , a = -3^8$

สรุปเศษเหลือคือ $r(x) = -3^8 x - 2 = -6561x - 2$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหารพหุนาม ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n $q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี m และ $m < n$ จะต้องมีพหุนาม $a(x)$ และ $r(x)$ ที่ทำให้ $p(x) = a(x)q(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x)$ เป็นพหุนามที่มีดีกรีน้อยกว่า m

ตัวอย่างเช่น $p(x) = x^3 + 4$

$q(x) = x^2 + x + 1$

จะได้ว่า $x^3 + 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) + 3$

หรือ $p(x) = x^4 + x + 1$

$q(x) = x^2 + 1$

จะได้ว่า $x^4 + x + 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x + 2)$

8. แนวคิด วิธีที่ 1 สมมติเศษเหลือคือ $r(x) = ax + b$

เพราะฉะนั้น $x^{100} + x^2 + 1 = q(x)(x^2 - 1) + r(x)$

$x^{100} + x^2 + 1 = q(x)(x^2 - 1) + (ax + b)$

แทนค่า $x = 1$ $3 = a + b$ ...(1)

แทนค่า $x = -1$ $3 = -a + b$ ...(2)

เพราะฉะนั้น $b = 3$ และ $a = 0$ สรุป $r(x) = 3$

เพราะฉะนั้น $x^{100} + x^2 + 1$ หารด้วย $x^2 - 1$ เหลือเศษ 3

วิธีที่ 2 $x^{100} + x^2 + 1 = x^{100} - 1 + x^2 - 1 + 3$

$= (x^2 - 1)(x^{98} + x^{96} + x^{94} + \ldots + x^2 + 1) + (x^2 - 1) + 3$

เพราะฉะนั้น $x^2 - 1$ หาร $x^{100} + x^2 + 1$ เหลือเศษ 3

9. แนวคิด

ให้ $r(x) = ax + b$ เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร $x^{111} + 1$ ด้วย $x^2 + 1$

เพราะฉะนั้น $x^{111} + 1 = q(x)(x^2 + 1) + r(x)$

$(x^{111} + 1) - r(x) = q(x)(x^2 + 1)$

ให้ $f(x) = (x^{111} + 1) - r(x)$

$= q(x)(x^2 + 1)$

เพราะฉะนั้น $f(i) = 0$ และ $f(-i) = 0$

$f(i) = 0 \rightarrow (i^{111} + 1) - r(i) = 0$

$(i^{4(27)} \cdot i^3 + 1) - r(i) = 0$

$i^3 + 1 - r(i) = 0$

$$-i + 1 - r(i) = 0$$

$$-i + 1 - (ai + b) = 0$$

$$(1 - b) - (1 + a)i = 0$$

$$1 - b = 0$$

$$1 + a = 0$$

เพราะฉะนั้น $b = 1 , a = -1$

สรุปเศษเหลือคือ $r(x) = -x + 1$

10.แนวคิด ให้ $f(x) = x^{10} + x^5 + 1$

เพราะว่ารากของ $x^2 + x + 1 = 0$ คือ

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} \pm i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$x = \cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}$$

$$x^{10} = \cos\frac{20\pi}{3} + i\sin\frac{20\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = x$$

$$x^5 = \cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = x^2$$

ดังนั้น $x^{10} + x^5 + 1 = x + x^2 + 1 = 0$

สรุป $f(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 0$

ในทำนองเดียวกัน $f(\cos\frac{2\pi}{3} - i\sin\frac{2\pi}{3}) = 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 + x + 1$ หาร $f(x)$ ลงตัว สรุป $x^2 + x + 1$ หาร $x^{10} + x^5 + 1$ ลงตัว

11.แนวคิด $\dfrac{x^{100}+x^{50}+1}{x^2+x+1} = \dfrac{(x^{100}+x^{50}+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{(x^{100}+x^{50}+1)(x-1)}{x^3-1}$

$= \dfrac{x^{101}-x^{100}+x^{51}-x^{50}+x-1}{x^3-1}$

x^3-1 หาร x^{101} เหลือเศษ x^2

x^3-1 หาร x^{100} เหลือเศษ x

x^3-1 หาร x^{51} เหลือเศษ 1

x^3-1 หาร x^{50} เหลือเศษ x^2

x^3-1 หาร x เหลือเศษ x

x^3-1 หาร 1 เหลือเศษ 1

ดังนั้น x^3-1 หาร $x^{101}-x^{100}+x^{51}-x^{50}+x-1$ เหลือเศษเท่ากับ

$x^2-x+1-x^2+x-1 = 0$

สรุป x^3-1 หาร $x^{101}-x^{100}+x^{51}-x^{50}+x-1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^2+x+1 หาร $x^{100}+x^{50}+1$ ลงตัว

12.แนวคิด $\dfrac{x^{10}+x^5+1}{x^2+x+1} = \dfrac{(x^{10}+x^5+1)(x-1)}{(x^2+x+1)(x-1)}$

$= \dfrac{x^{11}-x^{10}+x^6-x^5+x-1}{x^3-1}$

$\dfrac{x^{11}}{x^3-1} = x^8+x^5+x^2+\dfrac{x^2}{x^3-1}$

$\dfrac{x^{10}}{x^3-1} = x^7+x^4+x+\dfrac{x}{x^3-1}$

$$\frac{x^6}{x^3-1} = x^3+1+\frac{1}{x^3-1}$$

$$\frac{x^5}{x^3-1} = x^2+\frac{x^2}{x^3-1}$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{x^{11}-x^{10}+x^6-x^5+x-1}{x^3-1}$

$$= (x^8+x^5+x^2+\frac{x^2}{x^3-1})-(x^7+x^4+x+\frac{x}{x^3-1})+(x^3+1+\frac{1}{x^3-1})$$

$$-(x^2+\frac{x^2}{x^3-1})+\frac{x-1}{x^3-1}$$

$$= x^8+x^5-x^7-x^4+x^3-x+1+[\frac{x^2-x+1-x^2+x-1}{x^3-1}]$$

$$= x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1$$

13.แนวคิด

แบบที่ 1

x^3-1 หาร x^k เหลือเศษเท่ากับ x^r เมื่อ r เป็นเศษที่เหลือจากการหาร k ด้วย 3

เพราะฉะนั้น x^3-1 หาร $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$

เหลือเศษ $x+1+1+1+1+1 \;=\; x+5$

แบบที่ 2

$x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$

$= x+(x^3-1)+(x^9-1)+(x^{27}-1)+(x^{81}-1)+(x^{243}-1)+5$

$= (x+5)+(x^3-1)+[(x^3)^3-1]+[(x^3)^9-1]+[(x^3)^{27}-1]+[(x^3)^{81}-1]$

เพราะว่า x^3-1 หาร $(x^3)^k-1$ ลงตัวเสมอ

เพราะฉะนั้น x^3-1 หาร $x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}$ เหลือเศษ $x+5$

14.แนวคิด สมมติ $\dfrac{p(x)}{(x-1)(x-2)} = q(x) + \dfrac{ax+b}{(x-1)(x-2)}$

ดังนั้น $ax + b = p(x) - q(x)(x-1)(x-2)$

$x - 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2 $\rightarrow$ $p(1) = 2$

$\rightarrow$ $a + b = 2$ … (1)

$x - 2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 $\rightarrow$ $p(2) = 1$

$\rightarrow$ $2a + b = 1$ … (2)

จาก (1) และ (2) $a = -1$ และ $b = 3$

สรุป $(x-1)(x-2)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $-x + 3$

15.แนวคิด วิธีที่ 1. ให้ $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เป็นเศษเหลือจากการหาร

ดังนั้น $x^{100} + x^{90} + x^{80} + \ldots + x^{20} + x^{10} + 1 = q(x)(x^4 - 1) + r(x)$

ให้ $f(x) = (x^{100} + x^{90} + x^{80} + \ldots + x^{20} + x^{10} + 1) - r(x) = q(x)(x^4 - 1)$

เพราะว่า $1, -1, i, -i$ เป็นรากของสมการ $x^4 - 1$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0$, $f(-1) = 0$, $f(i) = 0$, $f(-i) = 0$

$f(1) = 0 \rightarrow 1^{100} + 1^{90} + \ldots + 1^{20} + 1^{10} + 1 - r(1) = 0$

$r(1) = 11$

$f(-1) = 0 \rightarrow (-1)^{100} + (-1)^{90} + \ldots + (-1)^{20} + (-1)^{10} + 1 - r(-1) = 0$

$r(-1) = 11$

$f(i) = 0 \rightarrow i^{100} + i^{90} + i^{80} + i^{70} + i^{60} + i^{50} + i^{40} + i^{30} + i^{20} + i^{10} + 1 - r(i) = 0$

$1 + (-1) + (1) + (-1) + (1) + (-1) + (1) + (-1) + (1) + (-1) + 1 - r(i) = 0$

$r(i) = 1$

$f(-i) = 0 \rightarrow$ ในทำนองเดียวกันจะได้ $r(-i) = 1$

$r(1) = 11 \rightarrow \qquad a + b + c + d \ = \ 11 \qquad \ldots(1)$

$r(-1) = 11 \rightarrow \qquad -a + b - c + d \ = \ 11 \qquad \ldots(2)$

$(1) + (2)\,; \qquad 2b + 2d \ = \ 22$

$b + d \ = \ 11$

$r(i) = \ -1 \rightarrow \qquad -ai - b + ci + d = \ 1$

$(-b + d) + (c - a)i \ = \ 1$

$-b + d \ = \ 1\,, \quad c - a \ = \ 0$

$d \ = \ 1 + b\,, \quad c \ = \ a$

เพราะฉะนั้น $b = 5\,, d = 6$

จาก $(1)\,;\ c + 6 + c + 5 \ = \ 11$

$c \ = \ 0$ และ $a \ = \ 0$

สรุป $r(x) \ = \ 5x^2 + 6$

เพราะฉะนั้น $x^{100} + x^{90} + x^{80} + \ldots + x^{20} + x^{10} + 1$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ $5x^2 + 6$

วิธีที่ 2. $(x^4 - 1)(x^{96} + x^{92} + x^{88} + \ldots + x^8 + x^4 + 1)$

$= \ (x^{100} + x^{96} + x^{92} + \ldots + x^{12} + x^8 + x^4) - (x^{96} + x^{92} + x^{88} + \ldots + x^8 + x^4 + 1)$

$= \ x^{100} - 1$

$(x^4 - 1)(x^{86} + x^{82} + x^{78} + \ldots + x^6 + x^2)$

$= \ (x^{90} + x^{86} + x^{82} + \ldots + x^{10} + x^6) - (x^{86} + x^{82} + \ldots + x^6 + x^2)$

$= \ (x^{90} - x^2)$

$(x^4 - 1)(x^{76} + x^{72} + x^{68} + \ldots + x^8 + x^4 + 1) \ = \ x^{80} - 1$

$(x^4 - 1)(x^{66} + x^{62} + x^{58} + \ldots + x^6 + x^2) \ = \ x^{70} - x^2$

$(x^4 - 1)(x^{56} + x^{52} + x^{48} + \ldots + x^8 + x^4 + 1) \ = \ x^{60} - 1$

$$(x^4-1)(x^{46}+x^{42}+\ldots+x^6+x^2)= x^{50}-x^2$$

$$(x^4-1)(x^{36}+x^{32}+\ldots+x^8+x^4+1)= x^{40}-1$$

$$(x^4-1)(x^{26}+x^{22}+\ldots+x^6+x^2)= x^{30}-x^2$$

$$(x^4-1)(x^{16}+x^{12}+\ldots+x^4+1) = x^{20}-1$$

$$(x^4-1)(x^6+x^4+x^2) = x^{10}-x^2$$

เพราะว่า $x^{100}+x^{90}+x^{80}+\ldots+x^{20}+x^{10}+1$

$$= (x^{100}-1)+1+(x^{90}-x^2)+x^2+(x^{80}-1)+1+(x^{70}-x^2)+x^2+\ldots+$$

$$+(x^{20}-1)+1+(x^{10}-x^2)+x^2+1$$

$$= (x^{100}-1)+(x^{90}-x^2)+(x^{80}-1)+\ldots+(x^{20}-1)+(x^{10}-x^2)+5x^2+6$$

และ x^4-1 หาร $(x^{100}-1)$, $(x^{90}-x^2)$, … , $(x^{10}-x^2)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร $x^{100}+x^{90}+x^{80}+\ldots+x^{10}+1$ เหลือเศษ $5x^2+6$

วิธีที่ 3. เพราะว่า $(a-b)$ หาร $a^{2n}-b^{2n}$ ลงตัว , $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น (x^4-1) หาร $(x^4)^n-1$ ลงตัว

ดังนั้น x^4-1 หาร $x^{4n}-1$ ลงตัว เพราะฉะนั้น

x^4-1 หาร $x^{100}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{80}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{60}-1$, $x^{40}-1$, $x^{20}-1$ ลงตัว

เพราะว่า x^4-1 หาร $x^{88}-1$, $x^{68}-1$, $x^{28}-1$, x^8-1 ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร $x^2(x^{88}-1)$, $x^2(x^{68}-1)$, $x^2(x^{48}-1)$, $x^2(x^{28}-1)$

, $x^2(x^8-1)$ ลงตัว

เพราะว่า $x^{100}+x^{90}+x^{80}+\ldots+x^{20}+x^{10}+1$

$$= (x^{100} - 1) + x^2(x^{88} - 1) + (x^{80} - 1) + x^2(x^{68} - 1) + \dots + (x^{20} - 1)$$

$$+ x^2(x^8 - 1) + 5 + 5x^2 + 1$$

$$= (x^{100} - 1) + (x^{80} - 1) + (x^{60} - 1) + (x^{40} - 1) + (x^{20} - 1) + x^2(x^{88} - 1)$$

$$+ x^2(x^{68} - 1) + x^2(x^{48} - 1) + x^2(x^{28} - 1) + x^2(x^8 - 1) + 5x^2 + 6$$

เพราะฉะนั้น $x^4 - 1$ หาร $x^{100} + x^{90} + \dots + x^{20} + x^{10} + 1$ เหลือเศษ $5x^2 + 6$

16.แนวคิด จากการจัดรูปพีชคณิต

$$(x^{2539} - x^{2537} + x^{2535} - \dots + x^3 - x)(x^2 + 1)$$

$$= (x^{2541} - x^{2539} + x^{2537} - \dots + x^5 - x^3) + (x^{2539} - x^{2537} + x^{2535} - \dots + x^3 - x)$$

$$= x^{2541} - x$$

$$= (x^{2541} - 1) - (x - 1)$$

ดังนั้น $x^{2541} - 1$ หารด้วย $x^2 + 1$ เหลือเศษ $x - 1$

17.แนวคิด

$$(x^{997} + x^{994} + x^{993} + \dots + x^4 + x)(x^3 - 1)$$

$$= (x^{1000} + x^{997} + x^{993} + \dots + x^7 + x^4) - (x^{997} + x^{994} + \dots + x^4 + x)$$

$$= x^{1000} - x$$

$$= (x^{1000} + x) - (x + 1)$$

เพราะฉะนั้น $x^{1000} + 1 \;=\; (x^{997} + x^{994} + \dots + x^4 + x)(x^3 - 1) + (x + 1)$

เพราะฉะนั้น $x^{1000} + 1$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $x + 1$

18.แนวคิด วิธีที่ 1. $(x^4-1)(x^{2537}+x^{2533}+x^{2529}+\ldots+x^5+x)$

$= (x^{2541}+x^{2537}+\ldots+x^9+x^5)-(x^{2537}+x^{2533}+\ldots+x^5+x)$

$= x^{2541}-x$

เพราะฉะนั้น $x^{2541}=(x^4-1)(x^{2537}+x^{2533}+\ldots+x^5+x)+x$

สรุป x^4-1 หาร x^{2541} เหลือเศษ x

วิธีที่ 2. เพราะว่า x^4-1 หาร $(x^4)^{635}-1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร $x^{2540}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x(x^{2540}-1)$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{2541}-x$ ลงตัว

สรุป x^4-1 หาร x^{2541} เหลือเศษ x

19.แนวคิด เพราะว่า x^4-1 หาร $(x^4)^n-1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร $x^{4n}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{4(499)}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{1996}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^2(x^{1996}-1)$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{1998}-x^2$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร x^{1998} เหลือเศษ x^2

หมายเหตุ ข้อสรุปเกี่ยวกับการหารลงตัวที่ได้จากการพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์ $a-b$ หาร a^n-b^n ลงตัว

$a+b$ หาร a^n-b^n ลงตัว ทุกค่า $n = 2, 4, 6, \ldots$

$a+b$ หาร a^n+b^n ลงตัว ทุกค่า $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$

สามารถตรวจสอบเศษเหลือที่เกิดจากการหารพหุนามด้วย x^p-1 หรือ x^p+1 เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มได้

20.แนวคิด $n = 4p + r$, $r = 0, 1, 2, 3$

x^4-1 หาร $(x^4)^p-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{4p}-1$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^r(x^{4p}-1)$ ลงตัว

x^4-1 หาร $x^{4p+r}-x^r$ ลงตัว

x^4-1 หาร x^n-x^r ลงตัว

$x^n = (x^n-x^r)+x^r$

เพราะว่า x^4-1 หาร x^n-x^r ลงตัว เพราะฉะนั้น x^4-1 หาร x^n เหลือเศษ x^r

5^{100} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

เพราะว่า 2^{100} เป็นจำนวนเต็ม 31 หลัก

เพราะฉะนั้น $2^{100} = A \times 10^{30}$ เมื่อ $1<A<10$

เพราะว่า $5^{100} = \dfrac{10^{100}}{2^{100}} = \dfrac{10^{100}}{A\times 10^{30}} = \dfrac{10^{70}}{A} = \dfrac{10}{A}\times 10^{69}$

และ $1 < \dfrac{10}{A} < 10$ เพราะฉะนั้น $10^{69} < 5100 < 10^{70}$

เพราะฉะนั้น 5100 เป็นจำนวนเต็ม 70 หลัก

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
ชุดที่ 3

1. กำหนด n , p เป็นจำนวนเต็มบวก และ $p < n$

   1.1 จงแสดงว่า $x^p - 1$ หาร x^n เหลือเศษเท่าใด

   1.2 $x^{2541} + x^{1998} + 1$ หารด้วย $x^{10} - 1$ เหลือเศษเท่าใด

   1.3 $x^{2500} + x^{2000} + x^{1500} + x^{1000} + x^{500} + 1$ หารด้วย $x^{13} - 1$ เหลือเศษเท่าใด

2. $x^6 + 1$ หาร x^{2540} เหลือเศษเท่าใด

3. $x^8 + 1$ หาร x^n เหลือเศษเท่าใด

4. n , p เป็นจำนวนเต็มบวก และ $p < n$ $x^p + 1$ หาร x^n เหลือเศษเท่าใด

5. $x^{120} + x^{80} + x^{40} + 1$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษเท่าใด

6. $x^3 + 1$ หาร $x^{120} + x^{80} + x^{40} + 1$ เหลือเศษเท่าใด

7. $x^{12} + 1$ หาร $x^{2541} + x^{254} + x^{25} + x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด

8. $x^{12} - 1$ หาร $x^{1998} + x^{199} + x^{19} + x + 1$ เหลือเศษเท่าใด

9. $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ หาร $x^{2541} + x^{541} + x^{41} + x + 1$ เหลือเศษเท่าใด

10. $x^4 - 1$ หาร $4x^4 + 8x^8 + 12x^{12} + \ldots + 2540x^{2540}$ เหลือเศษเท่าใด

11. $x^4 - 1$ หาร $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + 2541x^{2541}$ เหลือเศษเท่าใด

12. $x^4 - 1$ หาร $x + 5x^5 + 9x^9 + 13x^{13} + \ldots + 2541x^{2541}$ เหลือเศษเท่าใด

13. $(x - 1)^{16}$ หารด้วย $x^5 + 1$ เหลือเศษเท่าใด

14. 14.1 $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ หาร $x^{2000} - 1$ เหลือเศษเท่าใด

14.2 $x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$

หาร $x^{2543}-1$ เหลือเศษเท่าใด

15. x^4-1 หาร $(x+1)^{25}$ เหลือเศษเท่าใด

16. x^3-1 หาร $(x-1)^{20}$ เหลือเศษเท่าใด

17. $(x+1)^{15}$ หารด้วย x^3+1 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

18. $(x+1)^{10}$ หารด้วย x^2-1 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

19. จงแสดงว่า $x^9+x^8+x^7+\ldots+x^2+x+1$ หาร

$x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\ldots+x^{2222}+x^{1111}+1$ ลงตัว

20. จงแสดงว่าไม่มีพจน์ของพหุนามกำลังเลขคี่ในการกระจายพหุนาม

$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^{99}+x^{100})(1+x+x^2+\ldots+x^{99}+x^{100})$

เฉลยปัญหาเพิ่มเติมจากหน้า 20

ถ้า $x^2+y^2=1$ แล้วค่ามากที่สุดของ $x+y$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด เพราะว่า $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2 = 1+2xy$

และ xy มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $1+2xy$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 2

เพราะฉะนั้น $x+y$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\sqrt{2}$

หมายเหตุ $x+y$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\sqrt{2}$ เมื่อ $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x+y$ มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ $-\sqrt{2}$ เมื่อ $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 3

1. แนวคิด **1.1** $n = pm + r$, $r = 0 , 1 , 2 , \ldots , p - 1$

$x^p - 1$ หาร $(x^p)^m - 1$ ลงตัว

$x^p - 1$ หาร $x^{pm} - 1$ ลงตัว

$x^p - 1$ หาร $x^r(x^{pm} - 1)$ ลงตัว

$x^p - 1$ หาร $x^{pm+r} - x^r$ ลงตัว

$x^p - 1$ หาร $x^n - x^r$ ลงตัว

เพราะว่า $x^n = (x^n - x^r) + x^r$ เพราะฉะนั้น $x^p - 1$ หาร x^n เหลือเศษ x^r

1.2 $x^{10} - 1$ หาร x^{2541} เหลือเศษ x^1

$x^{10} - 1$ หาร x^{1998} เหลือเศษ x^8

$x^{10} - 1$ หาร 1 เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้น $x^{10} - 1$ หาร $x^{2541} + x^{1998} + 1$ เหลือเศษ $x^8 + x + 1$

1.3 13 หาร 2500 , 2000 , 1500 , 1000 , 500 เหลือเศษ 4 , 11 , 5 , 12 , 6 ตามลำดับ เพราะฉะนั้น $x^{13} - 1$ หาร $x^{2500} + x^{2000} + x^{1500} + x^{1000} + x^{500} + 1$ เหลือเศษเท่ากับ $x^4 + x^{11} + x^5 + x^{12} + x^6 + 1$

2. แนวคิด **วิธีที่ 1** เพราะว่า $x^6 + 1$ หาร $(x^6)^n + 1$ ลงตัวเมื่อ n เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $x^6 + 1$ หาร $(x^6)^{423} + 1$ ลงตัว

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2538} + 1 \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^2(x^{2538} + 1) \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2540} + x^2 \text{ ลงตัว}$$

เพราะฉะนั้น $x^6 + 1$ หาร x^{2540} เหลือเศษ $-x^2$

วิธีที่ 2 เพราะว่า $(x^6 + 1)$ หาร $(x^6)^n - 1$ ลงตัวเมื่อ n เป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้น $x^6 + 1$ หาร $(x^6)^{422} - 1$ ลงตัว

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2532} - 1 \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^8(x^{2532} - 1) \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2540} - x^8 \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2540} - x^2(x^6 + 1) + x^2 \text{ ลงตัว}$$

$$x^6 + 1 \text{ หาร } x^{2540} + x^2 \text{ ลงตัว}$$

สรุป $x^6 + 1$ หาร x^{2540} เหลือเศษ $-x^2$

3. แนวคิด ให้ $n = 8m + r$, $r = 0, 1, 2, 3, \ldots 7$

กรณี 1 m เป็นเลขคู่

$$x^8 + 1 \text{ หาร } (x^8)^m - 1 \text{ ลงตัว}$$

$$x^8 + 1 \text{ หาร } x^{8m} - 1 \text{ ลงตัว}$$

$$x^8 + 1 \text{ หาร } x^r(x^{8m} - 1) \text{ ลงตัว}$$

$$x^8 + 1 \text{ หาร } x^{8m+r} - x^r \text{ ลงตัว}$$

เพราะฉะนั้น $x^8 + 1$ หาร x^n เหลือเศษ x^r

กรณี 2 m เป็นเลขคี่

x^8+1 หาร $(x^8)^m+1$ ลงตัว

x^8+1 หาร $x^{8m}+1$ ลงตัว

x^8+1 หาร $x^r(x^{8m}+1)$ ลงตัว

x^8+1 หาร $x^{8m+r}+x^r$ ลงตัว

x^8+1 หาร x^n+x^r ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^8+1 หาร x^n เหลือเศษ $-x^r$

4. แนวคิด ให้ $n = pm + r$, $r = 0, 1, 2, \ldots, p-1$

กรณี 1 m เป็นเลขคู่

x^p+1 หาร $(x^p)^m-1$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^{pm}-1$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^r(x^{pm}-1)$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^{pm+r}-x^r$ ลงตัว

x^p+1 หาร x^n-x^r ลงตัว

เพราะฉะนั้น x^p+1 หาร x^n เหลือเศษ x^r

กรณี 2 m เป็นเลขคี่

x^p+1 หาร $(x^p)^m+1$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^{pm}+1$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^r(x^{pm}+1)$ ลงตัว

x^p+1 หาร $x^{pm+r}+x^r$ ลงตัว

$x^p + 1$ หาร $x^n + x^r$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $x^p + 1$ หาร x^n เหลือเศษ $-x^r$

ข้อสังเกต

1. $x^p + 1$หาร x^n เหลือเศษเท่าใด พิจารณาตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่า m , r ที่ทำให้ $n = mp + r$ และ $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$
2. ถ้า m เป็นเลขคี่ แล้วเศษเหลือคือ $-x^r$

ถ้า m เป็นเลขคู่ แล้วเศษเหลือคือ x^r

สรุปโดยรวมได้ว่าเศษเหลือคือ $(-1)^m x^r$

2. $x^p - 1$ หาร x^n เหลือเศษเท่าใด พิจารณาตามขั้นตอนดังนี้

1. หาค่า m , r ที่ทำให้ $n = mp + r$ และ $r = 0, 1, 2, 3, \ldots, p-r$
2. เศษเหลือจากการหาร x^n ด้วย $x^p - 1$ คือ x^r

5. แนวคิด $120 = 40(3) + 0 \rightarrow x^3 - 1$ หาร x^{120} เหลือเศษ 1

$80 = 26(3) + 2 \rightarrow x^3 - 1$ หาร x^{80} เหลือเศษ x^2

$40 = 13(3) + 1 \rightarrow x^3 - 1$ หาร x^{40} เหลือเศษ x

สรุป $x^3 - 1$ หาร $x^{120} + x^{80} + x^{40} + 1$ เหลือเศษ $1 + x^2 + x + 1 = x^2 + x + 2$

6. แนวคิด $120 = 4(3) + 0 \rightarrow x^3 + 1$ หาร x^{120} เหลือเศษ $(-1)^4 x^0 = 1$

$80 = 26(3) + 2 \rightarrow x^3 + 1$ หาร x^{80} เหลือเศษ $(-1)^{26} x^2 = x^2$

$80 = 13(3) + 1 \rightarrow x^3 + 1$ หาร x^{40} เหลือเศษ $(-1)^{13} x^1 = -x$

สรุป $x^3 + 1$ หาร $x^{120} + x^{80} + x^{40} + 1$ เหลือเศษ $1 + x^2 + (-x) + 1 = x^2 - x + 2$

7. **แนวคิด** $2541 = 211(12)+9 \rightarrow$ $x^{12}+1$ หาร x^{2541} เหลือเศษ $-x^{9}$

$254 = 21(12)+2 \rightarrow$ $x^{12}+1$ หาร x^{254} เหลือเศษ $-x^{2}$

$25 = 2(12)+1 \rightarrow$ $x^{12}+1$ หาร x^{25} เหลือเศษ x

เพราะฉะนั้น $x^{12}+1$ หาร $x^{2541}+x^{254}+x^{25}+x^{2}+1$

เหลือเศษ $(-x^{9})+(-x^{2})+(x)+(x^{2})+1 = -x^{9}+x+1$

8. **แนวคิด** $1998 = 166(12)+6 \rightarrow$ $x^{12}-1$ หาร x^{1998} เหลือเศษ x^{6}

$199 = 16(12)+7 \rightarrow$ $x^{12}-1$ หาร x^{199} เหลือเศษ x^{7}

$19 = 1(12)+7 \rightarrow$ $x^{12}-1$ หาร x^{19} เหลือเศษ x^{7}

เพราะฉะนั้น $x^{12}-1$ หาร $x^{1998}+x^{199}+x^{19}+x+1$

เหลือเศษ $(x^{6})+(x^{7})+(x^{7})+x+1 = 2x^{7}+x^{6}+x+1$

9. **แนวคิด** $\dfrac{x^{2541}+x^{541}+x^{41}+x+1}{x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1} = \dfrac{(x^{2541}+x^{541}+x^{41}+x+1)(x-1)}{(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1)(x-1)}$

$$= \frac{x^{2542}+x^{542}+x^{42}+x^{2}+x-x^{2541}-x^{541}-x^{41}-x-1}{x^{5}-1}$$

x^{2542} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x^{2}

x^{542} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x^{2}

x^{42} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x^{2}

x^{2541} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x

x^{541} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x

x^{41} หารด้วย $x^{5}-1$ เหลือเศษ x

เพราะฉะนั้น $x^{2542}+x^{542}+x^{42}+x^{2}+x-x^{2541}-x^{541}-x^{41}-x-1$ หารด้วย

$x^{5}-1$ จะเหลือเศษ $= x^{2}+x^{2}+x^{2}+x^{2}+x-x-x-x-x-1 = 4x^{2}-3x-1$

ดังนั้น $\dfrac{x^{2541}+x^{541}+x^{41}+x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1} = \dfrac{q(x)(x^5-1)+(4x^2-3x-1)}{x^5-1}$

$$= q(x)+\frac{4x^2-3x-1}{x^5-1}$$

$$= q(x)+\frac{(4x+1)(x-1)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

$$= q(x)+\frac{4x+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

สรุป $x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$ หาร $x^{2541}+x^{541}+x^{41}+x+1$ เหลือเศษ $4x+1$

10.แนวคิด x^{4} หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 1

$4x^{4}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 4

x^{8} หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 1

$8x^{8}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 8

$\vdots$

ในทำนองเดียวกัน

$12x^{12}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 12

$16x^{16}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 16

$\vdots$

$2540x^{2540}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ 2540

เพราะฉะนั้น $4x^{4}+8x^{8}+\ldots+2540x^{2540}$ หารด้วย $x^{4}-1$ เหลือเศษ

$4+8+\ldots+2540 = (\frac{635}{2})(4+2540) = 807720$

11.แนวคิด $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + 2541x^{2541}$

$= 1 + [4x^4 + 8x^8 + \ldots + 2540x^{2540}]$

$+ [x + 5x^5 + 9x^9 + \ldots + 2537x^{2537} + 2541x^{2541}]$

$+ [2x^2 + 6x^6 + 10x^{10} + \ldots + 2534x^{2534} + 2538x^{2538}]$

$+ [3x^3 + 7x^7 + 11x^{11} + \ldots + 2535x^{2535} + 2539x^{2539}]$

เพราะฉะนั้น $1 + x + 2x^2 + \ldots + 2541x^{2541}$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ

$= 1 + [4 + 8 + 12 + \ldots + 2540] + [1 + 5 + 9 + \ldots + 2541]\,x$

$+ [2 + 6 + 10 + \ldots + 2538]\,x^2 + [3 + 7 + 11 + \ldots + 2539]\,x^3$

$= 1 + \frac{635}{2}(4+2540) + \frac{636}{2}(1+2541)\,x$

$+ \frac{635}{2}(2+2538)\,x^2 + \frac{635}{2}(3+2539)\,x^3$

$= 807721 + 808356x + 806450\,x^2 + 807085\,x^3$

12.แนวคิด x หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ x

x^5 หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ x

$5x^5$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ $5x$

ในทำนองเดียวกัน $n = 1, 2, 3, \ldots$

x^{4n+1} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ x

$(4n + 1)x^{4n+1}$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ $(4n + 1)x$

เพราะฉะนั้น $9x^9$ หารด้วย x^{4-1} เหลือเศษ $9x$

$13x^3$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ $13x$

$\vdots$

$2541x^{2541}$ หารด้วย x^4-1 เหลือเศษ $2541x$

สรุป $x + 5x^5 + \ldots + 2541x^{2541}$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษเท่ากับ

$$x + 5x + 9x + \ldots + 2541x = (1+5+9+\ldots+2541)x$$
$$= \left(\frac{636}{2}\right)(1+2541)x$$
$$= 808356x$$

13.แนวคิด x^p หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^n x^r$ เมื่อ

$p = 5n + r$, $n \geq 0$, $r = 0 , 1 , 2 , 3 , 4$

$$(x^5-1)^{16} = \binom{16}{0}x^{16}(-1)^0 + \binom{16}{1}x^{15}(-1)^1 + \binom{16}{2}x^{14}(-1)^2 + \ldots + \binom{16}{15}x^1(-1)^{15} + \binom{16}{16}(-1)^{16}$$

x^{16} หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^3x^1 = -x$

x^{15} หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^3x^0 = -1$

x^{14} หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^2x^4 = x^4$

$\vdots$

x^6 หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^1x^1 = -x$

x^5 หารด้วย x^5+1 เหลือเศษ $(-1)^1x^0 = -1$

$(x-1)^{16}$ หารด้วย x^5+1 เหลือเศษเท่ากับ

$$= \binom{16}{0}(-1)^3x(-1)^0 + \binom{16}{1}(-1)^3x^0(-1)^1 + \binom{16}{2}(-1)^2x^4(-1)^2 + \ldots + \binom{16}{10}(-1)^{10}x^0(-1)^2 + \binom{16}{11}(-1)^{11}x^0(-1)^1 + \binom{16}{12}(-1)^{12}x^4 + \binom{16}{13}(-1)^{13}x^3 + \binom{16}{14}(-1)^{14}x^2 + \binom{16}{15}(-1)^{15}x + \binom{16}{16}(-1)^{16}$$

$$= [\binom{16}{2}(-1)^2(-1)^2 + \binom{16}{7}(-1)^{17}(-1)^1 + \binom{16}{12}(-1)^{12}]\,x^4$$

$$+ [\binom{16}{3}(-1)^3(-1)^2 + \binom{16}{8}(-1)^8(-1)^1 + \binom{16}{13}(-1)^{13}]\,x^3$$

$$+ [\binom{16}{4}(-1)^4(-1)^2 + \binom{16}{9}(-1)^9(-1)^1 + \binom{16}{14}(-1)^{14}]\,x^2$$

$$+ [\binom{16}{0}(-1)^0(-1)^3 + \binom{16}{5}(-1)^5(-1)^2 + \binom{16}{10}(-1)^{10}(-1)^1 + \binom{16}{15}(-1)^{15}]\,x$$

$$+ [\binom{16}{1}(-1)^1(-1)^3 + \binom{16}{6}(-1)^6(-1)^2 + \binom{16}{11}(-1)^{11}(-1)^1 + \binom{16}{16}(-1)^{16}]$$

$$= [\binom{16}{2} + \binom{16}{7} + \binom{16}{12}]\,x^4 + [-\binom{16}{3} - \binom{16}{8} - \binom{16}{13}]\,x^3$$

$$+ [\binom{16}{4} + \binom{16}{9} + \binom{16}{14}]\,x^2 + [-\binom{16}{0} - \binom{16}{5} - \binom{16}{10} - \binom{16}{15}]\,x$$

$$+ [\binom{16}{1} + \binom{16}{6} + \binom{16}{11} + \binom{16}{16}]$$

$$= 13380x^4 - 13990x^3 + 13380x^2 - 12393x + 12393$$

14. 14.1 แนวคิด $\dfrac{x^{2000}-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$

$$= \frac{(x^{2000}-1)(x-1)}{(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)} = \frac{x^{2001}-x^{2000}-x+1}{x^6-1}$$

x^{2001} หารด้วย $x^6 - 1$ เหลือเศษ x^3 และ x^{2000} หารด้วย $x^6 - 1$ เหลือเศษ x^2

เพราะฉะนั้น $x^{2001} - x^{2000} - x + 1$ หารด้วย $x^6 - 1$ จะเหลือเศษ $= x^3 - x^2 - x + 1$

ดังนั้น $\dfrac{x^{2001}-x^{2000}-x+1}{x^6-1} = \dfrac{q(x)(x^6-1)+(x^3-x^2-x+1)}{x^6-1}$

$$\frac{x^{2000}-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1} = q(x) + \frac{x^3-x^2-x+1}{x^6-1}$$

$$= q(x) + \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^6-1}$$

$$= q(x) + \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

$$= q(x) + \frac{x^2-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$$

สรุป $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ หาร $x^{2000}-1$ เหลือเศษ x^2-1

14.2 แนวคิด $\dfrac{x^{2543}-1}{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$

$$= \frac{(x^{2543}-1)(x-1)}{(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^{2544}-x^{2543}-x+1}{x^{11}-1}$$

x^{2544} หารด้วย $x^{11}-1$ เหลือเศษ x^3 และ x^{2543} หารด้วย $x^{11}-1$ เหลือเศษ x^2

เพราะฉะนั้น $x^{2544}-x^{2543}-x+1$ หารด้วย $x^{11}-1$ เหลือเศษ $= x^3-x^2-x+1$

ดังนั้น $\dfrac{x^{2543}-1}{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$

$$= \frac{x^{2544}-x^{2543}-x+1}{x^{11}-1}$$

$$= \frac{q(x)(x^{11}-1)+(x^3-x^2-x+1)}{x^{11}-1}$$

$$= q(x) + \frac{x^3-x^2-x+1}{x^{11}-1} \qquad = q(x) + \frac{x^2(x-1)-(x-1)}{x^{11}-1}$$

$$= q(x) + \frac{(x^2-1)(x-1)}{(x-1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}$$

$$= q(x) + \frac{x^2-1}{x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}$$

สรุป $x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ หาร $x^{2543}-1$ เหลือเศษ

x^2-1

15.แนวคิด $(x+1)^{25} = \binom{25}{0}x^{25} + \binom{25}{1}x^{24} + \binom{25}{2}x^{23} + \ldots + \binom{25}{24}x + \binom{25}{25}$

x^{25} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ x

x^{24} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ 1

x^{23} หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษ x^3

$\vdots$

$x^4 - 1$ หาร $(x+1)^{25}$ เหลือเศษ

$$
\begin{aligned}
&= \binom{25}{0}x + \binom{25}{1}x^0 + \binom{25}{2}x^3 + \binom{25}{3}x^2 \\
&\quad + \binom{25}{4}x + \binom{25}{5}x^0 + \binom{25}{6}x^3 + \binom{25}{7}x^2 \\
&\quad + \binom{25}{8}x + \binom{25}{9}x^0 + \binom{25}{10}x^3 + \binom{25}{11}x^2 \\
&\quad + \binom{25}{12}x + \binom{25}{13}x^0 + \binom{25}{14}x^3 + \binom{25}{15}x^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \binom{25}{20}x + \binom{25}{21}x^0 + \binom{25}{22}x^3 + \binom{25}{23}x^2 \\
&\quad + \binom{25}{24}x + \binom{25}{25} \\
&= \binom{25}{1} + \binom{25}{5} + \binom{25}{9} + \binom{25}{13} + \binom{25}{17} + \binom{25}{21} + \binom{25}{25} \\
&\quad + [\binom{25}{0} + \binom{25}{4} + \binom{25}{8} + \ldots + \binom{25}{24}]\,x \\
&\quad + [\binom{25}{3} + \binom{25}{7} + \ldots + \binom{25}{23}]\,x^2 \\
&\quad + [\binom{25}{2} + \binom{25}{6} + \binom{25}{10} + \ldots + \binom{25}{22}]\,x^3 \\
&= 8390656 + 8390656x + 8386560\,x^2 + 8386560\,x^3
\end{aligned}
$$

16.แนวคิด

$$(x-1)^{20} = \binom{20}{0}x^{20}(-1)^0 + \binom{20}{1}x^{19}(-1)^1 + \ldots + \binom{20}{19}x(-1)^{19} + \binom{20}{20}(-1)^{20}$$

x^p หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ x^r เมื่อ r เป็นเศษเหลือจากการหาร p ด้วย 3

เพราะฉะนั้น $\binom{20}{0}x^{20}(-1)^0$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{0}(-1)^0x^2$

$\binom{20}{1}x^{19}(-1)^1$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{1}(-1)^1x$

$\binom{20}{2}x^{18}(-1)^2$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{2}(-1)^2$

$\vdots$

$\binom{20}{18}x^2(-1)^{18}$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{18}x^2(-1)^{18}$

$\binom{20}{19}x(-1)^{19}$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{19}x(-1)^{19}$

$\binom{20}{20}(-1)^{20}$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษ $\binom{20}{20}(-1)^{20}$

ดังนั้น $(x-1)^{20}$ หารด้วย $x^3 - 1$ เหลือเศษเท่ากับ

$$= \binom{20}{0}(-1)^0x^2 + \binom{20}{1}(-1)^1x + \binom{20}{2}(-1)^2 + \ldots + \binom{20}{18}(-1)^{18}x^2$$

$$+ \binom{20}{19}(-1)^{19}x + \binom{20}{20}$$

$$= [\binom{20}{0}(-1)^0 + \binom{20}{3}(-1)^3 + \binom{20}{6}(-1)^6 + \binom{20}{9}(-1)^9 + [\binom{20}{12}(-1)^{12}$$

$$+ \binom{20}{15}(-1)^{15} + \binom{20}{18}(-1)^{18}]x^2$$

$$+ [\binom{20}{1}(-1)^1 + \binom{20}{4}(-1)^4 + \binom{20}{7}(-1)^7 + \binom{20}{10}(-1)^{10} + \binom{20}{13}(-1)^{13}$$

$$+ \binom{20}{16}(-1)^{16} + \binom{20}{19}(-1)^{19}]x$$

$$+\left[\binom{20}{2}(-1)^2+\binom{20}{5}(-1)^5+\binom{20}{8}(-1)^8+\binom{20}{11}(-1)^{11}+\binom{20}{14}(-1)^{14}\right.$$

$$\left.+\binom{20}{17}(-1)^{17}+\binom{20}{20}(-1)^{20}\right]$$

$$=[\binom{20}{0}(-1)^0+\binom{20}{3}(-1)^3+\binom{20}{6}(-1)^6+\binom{20}{9}(-1)^9+[\binom{20}{12}(-1)^{12}$$

$$+\binom{20}{15}(-1)^{15}+\binom{20}{18}(-1)^{18}]x^2$$

$$+\left[\binom{20}{1}(-1)^1+\binom{20}{4}(-1)^4+\binom{20}{7}(-1)^7+\binom{20}{10}(-1)^{10}+\binom{20}{13}(-1)^{13}\right.$$

$$\left.+\binom{20}{16}(-1)^{16}+\binom{20}{19}(-1)^{19}\right]x$$

$$+\left[\binom{20}{2}(-1)^2+\binom{20}{5}(-1)^5+\binom{20}{8}(-1)^8+\binom{20}{11}(-1)^{11}+\binom{20}{14}(-1)^{14}\right.$$

$$\left.+\binom{20}{17}(-1)^{17}+\binom{20}{20}(-1)^{20}\right]$$

$$=\left[\binom{20}{0}-\binom{20}{3}+\binom{20}{6}-\binom{20}{9}+\binom{20}{12}-\binom{20}{15}+\binom{20}{18}\right]x^2$$

$$+\left[-\binom{20}{1}+\binom{20}{4}-\binom{20}{7}+\binom{20}{10}-\binom{20}{13}+\binom{20}{16}-\binom{20}{19}\right]x$$

$$+\left[\binom{20}{2}-\binom{20}{5}+\binom{20}{8}+\binom{20}{11}+\binom{20}{14}-\binom{20}{17}+\binom{20}{20}\right]$$

$$=-19683x^2+39366x-19683$$

17.แนวคิด x^p หารด้วย x^3+1 เหลือเศษเท่ากับ $(-1)^n x^r$

เมื่อ $p = 3n + r$, $n \geq 0$ และ $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$

ดังนั้น x^{15} หารด้วย x^3+1 เหลือเศษ $(-1)^5=-1$

x^{14} หารด้วย x^3+1 เหลือเศษ $(-1)^4x^2=x^2$

x^{13} หารด้วย x^3+1 เหลือเศษ $(-1)^4x=x$

x^{12} หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^4 = 1$

x^{11} หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^3 x^2 = -x^2$

x^{10} หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^3 x = -x$

x^9 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^3 = -1$

x^8 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^2 x^2 = x^2$

x^7 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^2 x = x$

x^6 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^2 = 1$

x^5 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^1 x^2 = -x^2$

x^4 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)x = -x$

x^3 หารด้วย $x^3 + 1$ เหลือเศษ $(-1)^1 = -1$

เพราะว่า $(x + 1)^{15} = \binom{15}{0} x^{15} + \binom{15}{1} x^{14} + \ldots + \binom{15}{14} x + \binom{15}{15}$

เพราะฉะนั้น $(x + 1)^{15}$ หารด้วย $(x^3 + 1)$ เหลือเศษเท่ากับ

$$= \binom{15}{0}(-1) + \binom{15}{1}(x^2) + \ldots + \binom{15}{14} x + \binom{15}{15}$$

$$= [-\binom{15}{0} + \binom{15}{3} - \binom{15}{6} + \binom{15}{9} - \binom{15}{12} + \binom{15}{15}]$$

$$+ [\binom{15}{2} - \binom{15}{5} + \binom{15}{8} - \binom{15}{11} + \binom{15}{14}] x$$

$$+ [\binom{15}{1} - \binom{15}{4} + \binom{15}{7} - \binom{15}{10} + \binom{15}{13}] x^2$$

$$= 0 + 2187x + 2187x^2$$

18.แนวคิด $(x+1)^{10} = \binom{10}{0}x^{10} + \binom{10}{1}x^9 + \binom{10}{2}x^8 + \ldots + \binom{10}{9}x + \binom{10}{10}$

เพราะว่า x^p หารด้วย $x^2 - 1$ เหลือเศษ x^r เมื่อ r เท่ากับเศษเหลือที่เกิดจากการหาร p ด้วย 2

ดังนั้น $x^{10}, x^8, x^6, x^4, x^2$ หารด้วย $x^2 - 1$ เหลือเศษ 1

และ x^9, x^7, x^5, x^3, x หารด้วย $x^2 - 1$ เหลือเศษ x

เพราะฉะนั้น $(x+1)^{10}$ หาร $x^2 - 1$ เหลือเศษ

$$= \binom{10}{0} + \binom{10}{1}x + \binom{10}{2} + \ldots + \binom{10}{9}x + \binom{10}{10}$$

$$= [\binom{10}{0} + \binom{10}{2} + \binom{10}{4} + \binom{10}{6} + \binom{10}{8} + \binom{10}{10}]$$

$$+ [\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9}]\,x$$

$$= 512 + 512x$$

19.แนวคิด ให้ $A = x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x^2 + x + 1$

$B = x^{9999} + x^{8888} + x^{7777} + \ldots + x^{2222} + x^{1111} + 1$

$$B - A = (x^{9999} + x^{8888} + \ldots + x^{1111} + 1) - (x^9 + x^8 + \ldots + x + 1)$$

$$= (x^{9999} - x^9) + (x^{8888} - x^8) + \ldots + (x^{1111} - x^1)$$

$$= x^9(x^{9990} - 1) + x^8(x^{8880} - 1) + \ldots + x(x^{1110} - 1)$$

$$= x^9((x^{10})^{999} - 1) + x^8((x^{10})^{888} - 1) + \ldots + x((x^{10})^{111} - 1)$$

เพราะว่า $x^{10} - 1$ หาร $(x^{10})^k - 1$ ลงตัว , k เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(x-1)(x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1)$ หาร $(x^{10})^k - 1$ ลงตัว

ดังนั้น $x^9 + x^8 + x^7 + \ldots + x + 1$ หาร $(x^{10k}) - 1$ ลงตัว

เพราะว่า B $= x^9((x^{10})^{999}-1)+x^8((x^{10})^{888}-1)+\ldots+x((x^{10})^{111}-1)+A$

$= x^9((x^{10})^{999}-1)+x^8((x^{10})^{888}-1)+\ldots+x((x^{10})^{111}-1)$

$+(x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1)$

เพราะฉะนั้น

$x^9+x^8+x^7+\ldots+x+1$ หาร $x^{9999}+x^{8888}+x^{7777}+\ldots+x^{1111}+1$ ลงตัว

วิธีที่ 2 $$\frac{x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{2222}+x^{1111}+1}{x^9+x^8+\ldots+x^2+x+1}$$

$$=\frac{(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{2222}+x^{1111}+1)(x-1)}{(x^9+x^8+\ldots+x^2+x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{x(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{1111}+1)-(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{1111}+1)}{x^{10}-1}$$

$$=\frac{x^{10000}+x^{8889}+\ldots+x^{1112}+x-(x^{9999}+x^{8888}+\ldots+x^{1111}+1)}{x^{10}-1}$$

$$=\frac{x^{10000}+x^{8889}+\ldots+x^{2223}+x^{1112}+x-x^{9999}-x^{8888}-\ldots-x^{1111}-1}{x^{10}-1}$$

เพราะว่า x^k หารด้วย $x^{10}-1$ จะเหลือเศษเท่ากับ x^r เมื่อ r เป็นเศษเหลือที่ได้จาก การหาร k ด้วย 10

เพราะฉะนั้น x^{10000} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ 1

x^{8889} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^9

x^{7778} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^8

x^{6667} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^7

x^{5556} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^6

x^{4445} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^5

x^{3334} หารด้วย $x^{10}-1$ เหลือเศษ x^4

x^{2223} หารด้วย $x^{10} - 1$ เหลือเศษ x^{3}

x^{1112} หารด้วย $x^{10} - 1$ เหลือเศษ x^{2}

เพราะฉะนั้น

$x^{10000} + x^{8889} + \ldots + x^{2223} + x^{1112} + x - x^{9999} - x^{8888} - \ldots - x^{1111} - 1$

หารด้วย $x^{10} - 1$ เหลือเศษ

$1 + x^{9} + x^{8} + x^{7} + x^{6} + x^{5} + x^{4} + x^{3} + x^{2} + x - x^{9} - x^{8} - x^{7} - \ldots - x^{2} - x - 1 = 0$

สรุป $x^{9} + x^{8} + x^{7} + \ldots + x^{2} + x + 1$ หาร $x^{9999} + x^{8888} + \ldots + x^{1111} + 1$ ลงตัว

20.แนวคิด

วิธีที่ 1 $\quad (1 - x + x^{2} - x^{3} + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x) \;=\; 1 + x^{101}$

$(1 + x + x^{2} + x^{3} + \ldots + x^{99} + x^{100})(1 - x) \;=\; 1 - x^{101}$

$(1 - x + x^{2} - x^{3} + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x)(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{99} + x^{100})(1 - x)$

$= (1 + x^{101})(1 - x^{101})$

$= 1 - x^{202}$

$(1 - x + x^{2} - x^{3} + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^{2} + \ldots + x^{99} + x^{100})$

$$= \frac{(1 - x^{202})}{1 - x^{2}}$$

$$= \frac{x^{202} - 1}{x^{2} - 1}$$

$$= \frac{(x^{2})^{101} - 1}{x^{2} - 1}$$

$= (x^{2})^{100} + (x^{2})^{99} + (x^{2})^{98} + \ldots + (x^{2})^{2} + (x^{2}) + 1$

$= x^{200} + x^{198} + x^{196} + \ldots + x^{4} + x^{2} + 1$

วิธีที่ 2 $(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots - x^{99} + x^{100})(1 + x + x^2 + \ldots + x^{99} + x^{100})$

$$= [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) - (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{99})]$$
$$\times [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) + (x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{99})]$$
$$= [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) - x(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{98})]$$
$$\times [(1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100}) + x(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{98})]$$
$$= (1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{100})^2 - x^2(x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{98})^2$$

เป็นพหุนามในพจน์ของ x กำลังเลขคู่

เฉลยปัญหาเพิ่มเติมจากหน้า 20

ถ้า $x^2 + y^2 = 1$ แล้วค่ามากที่สุดของ xy เท่ากับเท่าใด

แนวคิด เราหาค่ามากที่สุดของ x^2y^2 แทนค่า $y^2 = 1 - x^2$

เพราะฉะนั้น $x^2y^2 = x^2(1 - x^2) = x^2 - x^4$

$$= -(x^4 - x^2) = -(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}$$
$$= -(x^4 - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$$
$$\leqq \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น $xy \leqq \frac{1}{2}$

หมายเหตุ $xy = \frac{1}{2}$ เมื่อ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 4

1. จงหาค่าของ $1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots$ เมื่อ $|x|<1$

2. จงหาค่าของ $1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$ เมื่อ $|x|<1$

3. จงหาค่าของ $(3)(2)x+(4)(3)x^2+(5)(4)x^3+(6)(5)x^4+\ldots$ เมื่อ $|x|<1$

4. จงหาค่าของ $x+4x^2+9x^3+16x^4+25x^5+\ldots$ เมื่อ $|x|<1$

5. จงหาค่าของ $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots$ เมื่อ $|x|<1$

6. จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nx^n$, $|x|<\frac{1}{3}$

7. จงหาค่าของ

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = (1)(2)x+(2)(3)x^2+(3)(4)x^3+(4)(5)x^4+\ldots$$

8. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\ldots+\binom{k+n-1}{k}x^k+\ldots$$

9. ในการกระจายพหุนาม $(1+x+x^2+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots)^6$ สัมประสิทธิ์ของ x^{16} เท่ากับเท่าใด

10. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{10} ใน $(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+\ldots)^{10}$

11. จงหาสัมประสิทธิ์ x^9 ในพหุนาม $(x^2+x^3+x^4+x^5)^5$

12. จงหาสัมประสิทธิ์ x^{18} ในพหุนาม $(x^2 + x^3 + \dots + x^7)^4$

13. ค่าคงตัวที่มีในอนุกรม $(1 + \frac{1}{x})^4(\frac{1}{(1-x)^4})$ เท่ากับเท่าใด

14. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ในอนุกรม $\frac{(1+x)^5}{(1-x)^5}$

15. สัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $\frac{1+x^5}{(1-x)^5}$ เท่ากับเท่าใด

16. สัมประสิทธิ์ของ x^{12} ในอนุกรม $\frac{x^2-3x}{(1-x)^4}$ เท่ากับเท่าใด

17. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{12} จากอนุกรม $x^2(1-x)^{-10}$

18. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{16} จากอนุกรม $(x^2 + x^3 + x^4 + \dots)^5$

19. จงหาสัมประสิทธิ์ x^{12} จากอนุกรม $\frac{x+3}{(1-2x+x^2)}$

เฉลยปัญหาเพิ่มเติมจากหน้า 20

ถ้า $x^2 + y^2 = 4$ แล้วค่ามากที่สุดของ $x + y + xy$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด แทนค่า $x = 2u$ และ $y = 2v$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 4$ จะเป็น $4u^2 + 4v^2 = 4$

ดังนั้น $u^2 + v^2 = 1$ และ $x + y + xy = 2u + 2v + 4uv$

เพราะว่า $u + v$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\sqrt{2}$

uv มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{1}{2}$ เมื่อ $u = v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $2u + 2v + 4uv$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $2\sqrt{2} + 2$

เพราะฉะนั้น $x + y + xy$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $2\sqrt{2} + 2$

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 4

1. แนวคิด

เพราะว่า $1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

เมื่อ $-1 < x < 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$

ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + x + x^2 + \ldots + x^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

เพราะฉะนั้น $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x}$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกัน $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \dfrac{1}{1 + x}$

2. แนวคิด ให้ $s = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ ...(1)

เพราะฉะนั้น $xs = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$ ...(2)

(1) – (2); $s - xs = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$(1 - x)s = \frac{1}{1 - x}$$

$$s = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

เพราะฉะนั้น $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \dfrac{1}{(1 - x)^2}$

3. แนวคิด เพราะว่า $|x| < 1$

เพราะฉะนั้น $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \dfrac{1}{1 - x}$

$$\frac{d}{dx}[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots] = \frac{d}{dx}[\frac{1}{1-x}]$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots] = \frac{d}{dx}[\frac{1}{(1-x)^2}]$$

$$2 + (3)(2)x + (4)(3)x^2 \ldots = \frac{2}{(1-x)^3}$$

สรุป $(3)(2)x + (4)(3)x^2 + (5)(4)x^3 + \ldots = \frac{2}{(1-x)^3} - 2$

4. แนวคิด $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{1-x}] = \frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty} x^n]$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{d}{dx}x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

x คูณตลอด ; $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$

$$\frac{d}{dx}[\frac{x}{(1-x)^2}] = \frac{d}{dx}[\sum_{n=1}^{\infty} nx^n]$$

$$\frac{(1-x)^2(1) + x(2)(1-x)}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{d}{dx}(nx^n))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\frac{1-2x+x^2+2x-2x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{(1+x)x}{(1-x)^3}$$

เพราะฉะนั้น $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \ldots = \dfrac{(1+x)x}{(1-x)^3}$

5. แนวคิด $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$

$$\frac{d}{dx}[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots] = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$x(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

เพราะฉะนั้น $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

สรุป $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

6. แนวคิด

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-3x)^n}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} n(-3x)^n$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sum_{n=1}^{\infty} nv^n\right] \qquad \text{เมื่อ } v = -3x$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} nv^n$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{v}{(1-v)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{3x}{(1-(-3x))^2}\right]$$

$$= \frac{x}{(1+3x)^2}$$

เพราะฉะนั้น $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-3)^{n-1} n x^n = \frac{x}{(1+3x)^2}$

7. แนวคิด $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{(1-x)+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)nx^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

เพราะฉะนั้น $(1)(2)x + (2)(3)x^2 + (3)(4)x^3 + (4)(5)x^4 + \ldots = \dfrac{2x}{(1-x)^3}$

8. แนวคิด โดยการหาอนุพันธ์ทั้งสองข้างของสมการ

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+\ldots$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2+(2)(3)x+(3)(4)x^2+(4)(5)x^3+(5)(6)x^4+\ldots$$

$$\frac{2\cdot 3}{(1-x)^4} = 2\cdot3+2\cdot3\cdot4x+3\cdot4\cdot5x^2+4\cdot5\cdot6x^3+\ldots$$

$$\frac{2\cdot 3\cdot 4}{(1-x)^5} = 2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5x+3\cdot4\cdot5\cdot6x^2+4\cdot5\cdot6\cdot7x^3+\ldots$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\frac{2\cdot 3\cdot 4\ldots(n-1)}{(1-x)^n} = {} & [2\cdot3\cdot4\ \ldots\ (n-1)]+[2\cdot3\cdot4\ \ldots\ (n-1)n]x \\ & +[3\cdot4\ \ldots\ (n-1)n(n+1)]x^2 \\ & +[4\cdot5\cdot6\ \ldots\ n(n+1)(n+2)]x^3 \\ & \vdots \\ & +[(k+1)\ \ldots\ (n+k-2)(n+k-1)]x^k+\ldots\end{aligned}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^k ของ $\frac{1}{(1-x)^n}$ คือ

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)(k+2)\ldots(n+k-2)(n+k-1)}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot\ldots(n-1)} &= \frac{(k!)(k+1)(k+2)\ldots(n+k-2)(n+k-1)}{(k!)(n-1)!} \\ &= \frac{(k+n-1)!}{(k!)(n-1)!} \\ &= \binom{k+n-1}{k}\end{aligned}$$

สรุป $\frac{1}{(1-x)^n} = 1+\binom{1+n-1}{1}x+\binom{2+n-1}{2}x^2+\ldots+\binom{k+n-1}{k}x^k+\ldots$

สูตรที่สำคัญเกี่ยวกับผลบวก

1. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$
2. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$
3. $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$
4. $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$
5. $(1+x^m)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} + \dots + \binom{n}{k}x^{km} + \dots + \binom{n}{n}x^{nm}$
6. $\dfrac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \dots + \binom{k+n-1}{k}x^k + \dots$

9. แนวคิด $(1 + x + x^2 + \dots)^6 = \dfrac{1}{(1-x)^6}$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{10} = \frac{1-x^{11}}{1-x}$$

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots)^6$$

$$= \frac{(1-x^{11})}{(1-x)}\frac{1}{(1-x)^6}$$

$$= (1-x^{11})(1-x)^{-7}$$

$$= (1-x^{11})(1 + \binom{7}{1}x + \binom{8}{2}x^2 + \binom{9}{3}x^3 + \dots + \binom{16}{10}x^{10} + \dots)$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^{16} ของพหุนาม

$(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots)^6$ เกิดจาก

$$((-1)x^{11})\binom{11}{5}x^5 + (1)\binom{22}{16}x^{16} = ((-1)\frac{11!}{6!5!} + \frac{22!}{16!6!})x^{16}$$

$$= (-462 + 74613)x^{16}$$

$$= 74151x^{16}$$

สัมประสิทธิ์ของ x^{16} ของ $(1 + x + x^2 + \dots + x^{10})(1 + x + x^2 + \dots)^6$ คือ 74151

10.แนวคิด

$$(1 + x + x^2 + x^3) = \frac{(1-x^4)}{(1-x)}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^{10} = \frac{1}{(1-x)^{10}}$$

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \dots)^{10} = \frac{(1-x^4)}{(1-x)}\,\frac{1}{(1-x)^{10}}$$

$$= (1 - x^4)(1 - x)^{-11}$$

เพราะว่า $(1 - x)^{-11} = 1 + \binom{11}{1}x + \binom{12}{2}x^2 + \binom{13}{3}x^3 + \dots + \binom{10+k}{k}x^k + \dots$

เพราะฉะนั้น

$$(1 - x^4)(1 - x)^{-11} = (1 - x^4)(1 + \binom{11}{1}x + \binom{12}{2}x^2 + \dots + \binom{10+k}{k}x^k + \dots)$$

สัมประสิทธิ์ของ x^{10} เกิดจาก $(1)\binom{10+10}{10}x^{10} + (-x^4)\binom{10+6}{6}x^6$

$$= [\binom{20}{10} - \binom{16}{6}]x^{10}$$

$$= (184756 - 8008)x^{10}$$

$$= 176748\,x^{10}$$

11.แนวคิด

เพราะว่ากำลังต่ำสุดของ x ใน $(x^2+x^3+x^4+x^5)^5$ เท่ากับ (2)(5)= 10

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^9 มีค่าเท่ากับ 0

12.แนวคิด $(x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7)^4 = [x^2(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)]^4$

$$= [x^2(\frac{1+x^6}{1-x})]^4$$

$$= x^8(1+x^6)^4(\frac{1}{1-x})^4$$

$$= x^8(1+x^6)^4(1-x)^{-4}$$

$$= x^8(1+4x^6+6x^{12}+4x^{18}+x^{24})(1+\binom{4}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\dots)$$

เพราะฉะนั้นพจน์ที่มี x^{18} คือ $x^8[(1)\binom{13}{10}x^{10}+(4x^6)\binom{7}{4}x^4]$

$$= [\binom{13}{10}+4\binom{7}{4}]x^{18}$$

$$= (286+140)x^{18}$$

$$= 426x^{18}$$

13.แนวคิด $(1+\frac{1}{x})^4 = 1+4(\frac{1}{x})+6(\frac{1}{x^2})+4(\frac{1}{x^3})+\frac{1}{x^4}$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = (1-x)^{-4}$$

$$= 1+\binom{4}{1}x+\binom{5}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3+\dots$$

$$(1+\frac{1}{x})^4(\frac{1}{(1-x)^4}) = (1+4(\frac{1}{x})+6(\frac{1}{x^2})+4(\frac{1}{x^3})+\frac{1}{x^4})(1+\binom{4}{1}x+\binom{5}{2}x^2+$$

$$+\binom{6}{3}x^3+\binom{7}{4}x^4+\ldots)$$

เพราะฉะนั้นพจน์ที่เป็นค่าคงตัว คือ

$$(1)(1)+(4)\binom{4}{1}+(6)\binom{5}{2}+(4)\binom{6}{3}+(1)\binom{7}{4} = 1+16+60+80+35$$

$$= 192$$

14.แนวคิด $(1+x)^{-n} = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\binom{n+2}{3}x^3+\ldots$

$$(1+x)^{-5} = 1+\binom{5}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\binom{7}{3}x^3+\ldots$$

$$(1+x)^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$$

$$\frac{(1+x)^5}{(1-x)^5} = (1+x)^5(1-x)^{-5}$$

$$= (1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5)(1+\binom{5}{1}x+$$

$$+\binom{6}{2}x^2+\binom{7}{3}x^3+\ldots)$$

เพราะฉะนั้นพจน์ที่มี x^{12} เกิดจาก

$$(1)\binom{16}{12}x^{12}+(5x)\binom{15}{11}x^{11}+(10x^2)\binom{14}{10}x^{10}+(10x^3)\binom{13}{9}x^9+(5x^4)\binom{12}{8}x^8+$$

$$(x^5)\binom{11}{7}x^7$$

$$= [\binom{16}{12}+5\binom{15}{11}+10\binom{14}{10}+10\binom{13}{9}+5\binom{12}{8}+\binom{11}{7}]x^{12}$$

$$= (1820 + 6825 + 10010 + 7150 + 2475 + 330)\,x^{12}$$

$$= 28610x^{12}$$

สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $(\frac{1+x}{1-x})^5$ คือ 28610

15.แนวคิด $(1+x)^{-n} = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \dots$

$$(1+x)^{-5} = 1 + \binom{5}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \dots$$

$$\frac{1+x^5}{(1-x)^5} = (1+x^5)(1 + \binom{5}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{7}{3}x^3 + \dots)$$

ดังนั้นพจน์ที่มี x^{12} เกิดจาก $(1)\binom{16}{12}x^{12} + (x^5)\binom{11}{7}x^7 = [\binom{16}{12} + \binom{11}{7}]x^{12}$

$$= (1820 + 330)x^{12}$$

$$= 2150x^{12}$$

เพราะฉะนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^{12} ใน $\frac{1+x^5}{(1-x)^5}$ เท่ากับ 2150

16.แนวคิด $(1+x)^{-n} = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \binom{n+2}{3}x^3 + \dots$

$$(1-x)^{-4} = 1 + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \dots$$

$$\frac{(x^2-3x)}{(1-x)^4} = (x^2-3x)(1-x)^{-4}$$

$$= (x^2-3x)(1 + \binom{4}{1}x + \binom{5}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \dots)$$

พจน์ที่มี x^{12} เกิดจาก $(x^2)\binom{13}{10}x^{10}+(-3x)\binom{14}{11}x^{11} = [\binom{13}{10}-3\binom{14}{11}]\,x^{12}$

$= (286-3(364))\,x^{12}$

$= -806\,x^{12}$

สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ในการกระจาย $\dfrac{x^2-3x}{(1-x)^4}$ คือ -806

17.แนวคิด $(1+x)^{-n} = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\binom{n+2}{3}x^3+\ldots$

เพราะฉะนั้น $(1-x)^{-10} = 1+\binom{10}{1}x+\binom{11}{2}x^2+\binom{12}{3}x^3+\ldots$

$$x^2(1-x)^{-10} = x^2+\binom{10}{1}x^3+\binom{11}{2}x^4+\binom{12}{3}x^5+\ldots$$

ดังนั้นพจน์ที่มี x^{12} คือ $\binom{19}{10}x^{12} = \dfrac{19!}{10!9!}x^{12} = 92378\,x^{12}$

สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^{12} ในอนุกรม $x^2(1-x)^{-10}$ คือ 92378

18.แนวคิด $(x^2+x^3+x^4+\ldots)^5 = [x^2(1+x+x^2+\ldots)]^5$

$$= x^{10}\left(\frac{1}{1-x}\right)^5$$

$$= \frac{x^{10}}{(1-x)^5}$$

เพราะว่า $\dfrac{1}{(1-x)^5} = 1+\binom{5}{1}x+\binom{6}{2}x^2+\binom{7}{3}x^3+\binom{8}{4}x^4+\binom{9}{5}x^5+\binom{10}{6}x^6+\ldots$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^{16} ใน $\dfrac{x^{10}}{(1-x)^5}$ คือ $\binom{20}{16} = \dfrac{20!}{16!4!} = 4845$

19.แนวคิด $$\frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$$

$$= 1+\binom{2}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{4}{3}x^3+\ldots$$

$$\frac{x+3}{1-2x+x^2} = (x+3)(1-x)^{-2}$$

$$= (x+3)\left(1+\binom{2}{1}x+\binom{3}{2}x^2+\binom{4}{3}x^3+\ldots\right)$$

พจน์ที่มี x^{12} ของ $\frac{x+3}{1-2x+x^2}$ คือ $(x)\binom{12}{11}x^{11}+3\binom{13}{12}x^{12}$

$$= [\binom{12}{11}+3\binom{13}{12}]\,x^{12}$$

$$= (12+39)\,x^{12}$$

$$= 51x^{12}$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ x^{12} จากอนุกรม $\frac{x+3}{(1-2x+x^2)}$ เท่ากับ 51

---

100 หาร 2^{100} เหลือเศษเท่าใด

$2^{100} = (2^5)^{20} = (3^2)^{20} = (30+2)^{20} = \sum_{k=0}^{19}\binom{20}{k}(30)^{20-k}(2)^k + 2^{20}$

เพราะว่า 100 หาร $\binom{20}{k}(30)^{20-k}(2)^k$ ลงตัวทุกค่า $k = 0,1,2,\ldots,19$

และ $2^{20} = (2^{10})^2 = (1024)^2 = (1000+24)^2 = 1000^2 + 2(1000)(24) + (24)^2$

$= 1000^2 + 2(1000)(24) + 576 \quad = 1000^2 + 2(1000)(24) + 500 + 76$

และ 100 หาร $1000^2 + 2(1000)(24) + 500$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 100 หาร 2^{100} เหลือเศษ 76

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
ชุดที่ 5

1. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มากที่สุดที่ทำให้ $(x-1)^k$ หาร $x^7-2x^6+x^5-x^2+2x-1$ ลงตัว
2. k เท่ากับเท่าไรบ้างจึงจะทำให้ $(x-2)^k$ หาร $x^6-6x^5+13x^4-13x^3+6x^2+4x-8$ ลงตัว
3. จงแสดงว่า $(fg)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)} g^{(r)}$
4. กำหนดให้ $f(x)=(x-c)^n$ ค่าของ $f^{(k)}(c)$; $k = 1, 2, \ldots, n$ เท่ากับเท่าใด
5. ถ้า $q(1) = 5$ และ $f(x) = \frac{d^4}{dx^4}(q(x)(x-1)^4)$ แล้ว f(1) เท่ากับเท่าใด
6. กำหนดให้ $f(x) = q(x)(x-c)^n$ จงหาค่าของ $f^{(k)}(c)$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, n$
7. กำหนด $f(x) = x^{10}+x^5-130x^3+335x^2-295x+88$ ค่าของ k ที่มากที่สุดทำให้ $(x-1)^k$ หาร f(x) ลงตัวเท่ากับเท่าใด
8. กำหนด $f(x) = x^{10}-120x^3+315x^2-280x+84$ จงหาค่า k ที่มากสุดที่ทำให้ $(x-1)^k$ หาร f(x) ลงตัว
9. ถ้า $(x+1)^k$ หาร $x^9+6x^8+15x^7+19x^6+9x^5-9x^4-19x^3-15x^2-6x-1$ ลงตัว แล้ว k มีค่าเท่ากับเท่าใดบ้าง

10. x^{10} หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษเท่าใด

11. จงหาผลหารของ x^{10} ด้วย $(x-1)^4$ พร้อมทั้งเหลือเศษ

12. x^{40} หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษเท่าใด

13. $x^{40}+x^{10}+1$ หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษเท่าใด

14. $x^{10}+x^5+1$ หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษเท่าใด

วิธีพิจารณาหลักหน่วยของ a^n เมื่อ a , n เป็นจำนวนเต็มบวก

ขั้นที่ 1 หาเศษที่เหลือจากการหาร n ด้วย 4

ให้ k เป็นเศษที่เหลือจากการหาร n ด้วย 4

ขั้นที่ 2 หาหลักหน่วยของ a ให้ x เป็นหลักหน่วยของ a

ขั้นที่ 3 ใช้ตารางสรุปผลดังนี้

x	หลักหน่วยของ a^n เท่ากับ ค่าหลักหน่วยของ
0	0
1 , 3 , 7 ,9	x^k
2 , 4 , 6 , 8	$6(x^k)$
5	5

อ่านเนื้อหาเพิ่มเติมได้ที่บทความเรื่อง $\sum_{n=0}^{2000} 2543^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด หน้า 239

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 5

1. แนวคิด ให้ $f(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^2 + 2x - 1$

เพราะว่า $f(1) = 1 - 2 + 1 - 1 + 2 - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $x^7 - 2x^6 + x^5 - x^2 + 2x - 1$ ลงตัว

โดยการหารยาวจะได้ $\dfrac{x^7 - 2x^6 + x^5 - x^2 + 2x - 1}{x - 1} = x^6 - x^5 - x + 1$

ให้ $g(x) = x^6 - x^5 - x + 1$

เพราะว่า $g(1) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $(x - 1)$ หาร $x^6 - x^5 - x + 1$ ลงตัว

โดยการหารยาวจะได้ $\dfrac{x^6 - x^5 - x + 1}{x - 1} = x^5 - 1$

ให้ $h(x) = x^5 - 1$

เพราะว่า $h(1) = 1 - 1 = 0$

เพราะฉะนั้น $(x - 1)$ หาร $x^5 - 1$ ลงตัว

โดยการหารยาวจะได้ $\dfrac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x + 1$

ให้ $p(x) = x^4 + x^3 + x + 1$

เพราะว่า $p(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $(x - 1)$ หาร $x^4 + x^3 + x + 1$ ไม่ลงตัว

นั่นคือ $x^4 + x^3 + x + 1$ ไม่ $(x - 1)$ เป็นตัวประกอบ

สรุป $x^7 - 2x^6 + x^5 - x^2 + 2x - 1 = (x - 1)^3(x^4 + x^3 + x + 1)$

สรุป $k = 3$

หมายเหตุ นักเรียนสามารถใช้การจัดรูปทรงพีชคณิตกับข้อนี้ได้

$$x^7 - 2x^6 + x^5 - x^2 + 2x - 1 = (x-1)(x^6 - x^5 - x + 1)$$
$$= (x-1)(x^5(x-1) - (x-1))$$
$$= (x-1)(x-1)(x^5 - 1)$$
$$= (x-1)(x-1)(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$
$$= (x-1)^3(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

แต่อย่างไรก็ตามเราต้องยืนยันว่า $(x-1)$ หาร $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ไม่ลงตัวและยังต้องทำการหารยาวในบางขั้นตอนด้วย

ปัญหา !!! มีวิธีแก้ปัญหาโดยไม่ต้องทำการหารยาวหรือไม่

ตอบ มีแน่นอน

2. แนวคิด ลองทำโดยเอา $(x-2)$, $(x-2)^2$, $(x-3)^3$, … , $(x-3)^6$ หาร $x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ ก็จะได้คำตอบ แต่เสียเวลามาก

ลองทำแบบนี้จะดีกว่า ให้ $f(x) = x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

$$f(2) = 64 - 6(32) + (13)(16) - (13)(8) + 6(4) + 8 - 8 = 0$$

ดังนั้น $x - 2$ หาร $f(x)$ ลงตัว

โดยการหารยาวจะได้ $\dfrac{f(x)}{x-2} = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$

ให้ $g(x) = x^5 - 4x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 4$

$$g(2) = 32 - 4(16) + 5(8) - 12 + 4 = 0$$

ดังนั้น $x - 2$ หาร $g(x)$ ลงตัว

โดยการหารยาวจะได้ $\frac{g(x)}{x-2} = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2$

ให้ $\quad h(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 2$

$\quad h(2) = 16 - 16 + 4 - 2 - 2 = 0$

ดังนั้น $x - 2$ หาร $h(x)$ ลงตัว โดยการหารยาวจะได้ $\frac{h(x)}{x-2} = x^3 + x + 1$

ให้ $\quad p(x) = x^3 + x + 1$

เพราะว่า $\quad p(2) = 8 + 2 + 1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $(x - 2)$ หาร $x^3 + x + 1$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น $x^3 + x + 1$ ไม่มี $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบ

สรุป
$$\begin{aligned} x^6 - 6x^5 + 13x^4 - 13x^3 + 6x^2 + 4x - 8 &= f(x) \\ &= (x-2)g(x) \\ &= (x-2)(x-2)h(x) \\ &= (x-2)(x-2)(x-2)(x^3+x+1) \\ &= (x-2)^3(x^3+x+1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $k = 0 , 1 , 2 , 3$

หมายเหตุ เรามีวิธีแก้ปัญหาแบบนี้โดยไม่ต้องหารยาวได้โดยนำประโยชน์ของอนุพันธ์อันดับต่าง ๆ ของ $f(x)$, $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, … มาช่วยได้ แต่ต้องใช้เหตุผลต่าง ๆ ที่จำเป็นดังต่อไปนี้

การหาอนุพันธ์อันดับที่ n ของผลคูณของฟังก์ชัน

$$(fg)' = f'g + f'g$$

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

$$\vdots$$

$$(fg)^{(4)} = f^{(4)}g^{(0)} + 4f^{(3)}g^{(1)} + 6f^{(2)}g^{(2)} + 4f^{(1)}g^{(3)} + f^{(0)}g^{(4)}$$

$$\vdots$$

$$(fg)^{(n)} = \binom{n}{0}f^{(n)}g^{(0)} + \binom{n}{1}f^{(n-1)}g^{(1)} + \ldots + \binom{n}{r}f^{(n-r)}g^{(r)} + \ldots + \binom{n}{n}f^{(0)}g^{(n)}$$

3. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^{(n-r)}g^{(r)}$

(1) การแสดงว่า P(1) จริง เพราะว่า

$$\begin{aligned}
(fg)^{(1)} &= (fg)' \\
&= f'g + fg' \\
&= f^{(1)}g^{(0)} + f^{0)}g^{(1)} \\
&= \sum_{r=0}^{1}\binom{n}{r}f^{(1-r)}g^{(r)}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(1) จริง

(2) สมมติ P(k) จริง เพราะฉะนั้น $(fg)^{(k)} = \sum\limits_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r)}g^{(r)}$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
(fg)^{(k+1)} &= \frac{d}{dx}[(fg)^{(k)}] \\
&= \frac{d}{dx}\Big[\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r)}g^{(r)}\Big] \\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{d}{dx}[f^{(k-r)}g^{(r)}] \\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\frac{d}{dx}[f^{(k-r+1)}g^{(r)} + f^{(k-r)}g^{(r+1)}] \\
&= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r+1)}g^{(r)} + \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r)}g^{(r+1)}
\end{aligned}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r+1)}g^{(r)} = \binom{k}{0}f^{(k+1)}g^{(0)}+\binom{k}{1}f^{(k)}g^{(1)}+\binom{k}{2}f^{(k-1)}g^{(2)}$$
$$+\binom{k}{3}f^{(k-2)}g^{(3)}+\ldots+\binom{k}{k}f^{(1)}g^{(k)}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r)}g^{(r+1)} = \binom{k}{0}f^{(k)}g^{(1)}+\binom{k}{1}f^{(k-1)}g^{(2)}+\binom{k}{2}f^{(k-2)}g^{(3)}$$
$$+\binom{k}{3}f^{(k-3)}g^{(4)}+\ldots+\binom{k}{k}f^{(0)}g^{(k+1)}$$

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(k+1)}g^{(0)}$ คือ $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(k)}g^{(1)}$ คือ $\binom{k}{1}+\binom{k}{0} = \binom{k+1}{1}$

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(k-1)}g^{(2)}$ คือ $\binom{k}{2}+\binom{k}{1} = \binom{k+1}{2}$

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(k-2)}g^{(3)}$ คือ $\binom{k}{3}+\binom{k}{2} = \binom{k+1}{3}$

⋮

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(k+1-r)}g^{(r)}$ คือ $\binom{k}{r}+\binom{k}{r-1} = \binom{k+1}{r}$

⋮

สัมประสิทธิ์ของ $f^{(0)}g^{(k+1)}$ คือ $\binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r+1)}g^{(r)}+\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}f^{(k-r)}g^{(r+1)} = \sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}f^{(k+1-r)}g^{(r)}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) จริง

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่า P(n) จริงทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $(fg)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}f^{(n-r)}g^{(r)}$ ทุกค่า n = 1 , 2 , 3 , ...

หมายเหตุ จะเห็นได้ว่า $(fg)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} f^{(n-r)} g^{(r)}$

มีรูปแบบเหมือนการ กระจายทวินาม $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

4. แนวคิด

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-c)^n \\
f(c) &= 0 \\
f^{(1)}(x) &= n(x-1)^{n-1} \\
f^{(1)}(c) &= 0 \\
f^{(2)}(x) &= n(n-1)(x-1)^{n-2} \\
f^{(2)}(c) &= 0 \\
&\vdots \\
f^{(n-1)}(x) &= n(n-1)(n-2)\ldots(2)(x-1) \\
f^{(n-1)}(c) &= 0 \\
f^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) \\
f^{(n)}(c) &= n!
\end{aligned}
$$

สรุป $f^{(k)}(c) = \begin{cases} 0 & k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1 \\ n! & k = n \end{cases}$

5. แนวคิด $\frac{d^4}{dx^4}(q(x)(x-1)^4)$

$$
\begin{aligned}
&= (q(x)(x-1)^4)^{(4)} \\
&= q^{(4)}(x)(x-1)^4 + 4q^{(3)}(x)((x-1)^4)^{(1)} + 6q^{(2)}(x)((x-1)^4)^{(2)} + \\
&\quad 4q^{(1)}(x)((x-1)^4)^{(3)} + q^{(0)}(x)((x-1)^4)^{(4)}
\end{aligned}
$$

$$= q^{(4)}(x)(x-1)^4 + 16q^{(3)}(x)(x-1)^3 + 72q^{(2)}(x)(x-1)^2 + 96q^{(1)}(x)(x-1) + 24q(x)$$

เพราะฉะนั้น $f(1) = 0+0+0+0+24q(1) = 120$

6. แนวคิด

เมื่อ $k < n$ จะได้ $f^{(k)}(x) = (q(x)(x-c)^n)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} q^{(k-r)}((x-c)^n)^{(r)}$

เพราะว่าถ้า $q(x) = [(x-c)^n]^{(r)}$ แล้ว $g(c) = 0$ ทุกค่า $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

เพราะฉะนั้น $f^{(k)}(c) = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, r-1$

เมื่อ $k = n$ $\quad f^{(n)}(x) = (q(x)(x-c)^n)^{(n)}$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} q^{(n-r)}(x)[(x-c)^n]^{(r)}$$

เพราะว่า $\quad$ ถ้า $g(x) = [(x-c)^n]^{(r)}$

แล้ว $g(c) = 0$, ทุกค่า $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

เพราะฉะนั้น $\quad f^{(n)}(c) = q^{(0)}(c)(n!)$

สรุป $f^{(k)}(c) = \begin{cases} 0 & , k = 0,1,2,\ldots,n-1 \\ q(c)(n!) & , k = n \end{cases}$

หมายเหตุ จากเงื่อนไข ถ้า $f(x) = (x-c)^n$

แล้ว $f^{(k)}(c) = \begin{cases} 0 & ; k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ n! & ; k = n \end{cases}$

ทำให้เราสามารถหาจำนวนรากที่ซ้ำกันของ $f(x) = 0$ หรือกำลังสูงสุดของ $x-a$ ที่เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ ได้โดยใช้ขั้นตอนดังนี้

ถ้า $f^{(k)}(a) = 0$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ และ $f^{(m)}(a) \neq 0$

แล้วตัวประกอบของ $x-a$ ใน $f(x)$ คือ $(x-a)^m$

นั่นคือ $f(x) = p(x)(x-a)^m$ โดยที่ $p(a) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $x = a$ เป็นรากของ $f(x) = 0$ ที่ซ้ำกัน m ครั้ง หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ m เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(x-a)^m$ หาร $f(x)$ ลงตัว

7. แนวคิด

$$f(1) = 1+1-130+335-295+88 = 0$$
$$f^{(1)}(x) = 10x^9+5x^4-390x^2+670x-295$$
$$f^{(1)}(1) = 10+5-390+670-295 = 0$$
$$f^{(2)}(x) = 90x^8+20x^3-780x+670$$
$$f^{(2)}(1) = 90+20-780+670 = 0$$
$$f^{(3)}(x) = 720x^7+60x^2-780$$
$$f^{(3)}(1) = 720+60-780 = 0$$
$$f^{(4)}(x) = 5040x^6+120x$$
$$f^{(4)}(1) \neq 0$$

สรุป $k = 4$ เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(x-1)^k$ หาร $f(x)$ ลงตัว

8. แนวคิด

$$f(x) = x^{10}-120x^3+315x^2-280x+84$$
$$f(1) = 1-120+315-280+84 = 0$$
$$f^{(1)}(x) = 10x^9-360x^2+630x-280$$

$f^{(1)}(1) = 10 - 360 + 630 - 280 = 0$

$f^{(2)}(x) = 90x^8 - 720x + 630$

$f^{(2)}(1) = 90 - 720 + 630 = 0$

$f^{(3)}(x) = 720x^7 - 720$

$f^{(3)}(1) = 720 - 720 = 0$

$f^{(4)}(x) = 5040x^6$

$f^{(4)}(1) \neq 0$

สรุป k= 4 เป็นค่ามากสุดที่ทำให้ $(x-1)^k$ หาร f(x) ลงตัว

หมายเหตุ $f(x) = (x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 56x + 84)(x-1)^4$

9. แนวคิด

ให้ $f(x) = x^9 + 6x^8 + 15x^7 + 19x^6 + 9x^5 - 9x^4 - 19x^3 - 15x^2 - 6x - 1$

$f(-1) = 1 + 6 + 15 + 19 + 9 - 9 - 19 - 15 - 6 - 1$

$= 0$

$f^{(1)}(x) = 9x^8 + 48x^7 + 105x^6 + 114x^5 + 45x^4 - 36x^3 - 57x^2 - 30x - 6$

$f^{(1)}(-1) = 9 - 48 + 105 - 114 + 45 - 36 - 57 + 30 - 6$

$= 0$

$f^{(2)}(x) = 72x^7 + 336x^6 + 630x^5 + 570x^4 + 180x^3 - 108x^2 - 114x - 30$

$f^{(2)}(-1) = -72 + 336 - 630 + 570 - 180 - 180 + 114 - 30 = 0$

$f^{(3)}(x) = 504x^6 + 2016x^5 + 3150x^4 + 2280x^3 + 540x^2 - 216x - 144$

$f^{(3)}(-1) = 504 - 2016 + 3150 - 2280 + 540 + 216 - 144 = 0$

$$f^{(4)}(x) = 3024x^5 + 10080x^4 + 12600x^3 + 6840x^2 + 1080x - 216$$

$$f^{(4)}(-1) = -3024 + 10080 - 12600 + 6840 - 1080 - 216 = 0$$

$$f^{(5)}(x) = 15120x^4 + 40320x^3 + 37800x^2 + 13680x + 1080$$

$$f^{(5)}(-1) = 15120 - 40320 + 37800 - 13680 + 1080 = 0$$

$$f^{(6)}(x) = 60480x^3 + 120960x^2 + 75600x + 13680$$

$$f^{(6)}(-1) = -60480 + 120960 - 75600 + 13680 = -1440 \neq 0$$

สรุป $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ทำให้

$(x+1)^k$ หาร $x^9 + 6x^8 + 15x^7 + 19x^6 + 9x^5 - 9x^4 - 19x^3 - 15x^2 - 6x - 1$ ลงตัว

แบบฝึกหัด จงหา k มากสุดที่ทำให้ $(x-a)^k$ หารพหุนามที่กำหนดให้ลงตัว

1. $(x-2)$

$p(x) = x^{10} + 10x^9 + 40x^8 + 80x^7 + 81x^6 + 43x^5 + 50x^4 + 120x^3 + 160x^2 + 112x + 32$

ตอบ $p(x) = (x+2)^5(x^5 + x + 1)$

2. $(x+1)$

$p(x) = x^{10} + 7x^9 + 22x^8 + 42x^7 + 57x^6 + 62x^5 + 57x^4 + 42x^3 + 22x^2 + 7x + 1$

ตอบ $p(x) = (x+1)^6(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

3. $(x+1)$

$p(x) = x^9 + 19x^6 + 6x^8 + 9x^5 + 15x^7 - 9x^4 - 19x^3 - 15x^2 - 6x - 1$

ตอบ $p(x) = (x+1)^6(x^3 - 1)$

10.แนวคิด $\dfrac{x^{10}}{(x-1)^4} = q(x) + \dfrac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-1)^4}$

จะได้ $x^{10} = q(x)(x-1)^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ .... (1)

$$10x^9 = \frac{d}{dx}(q(x)(x-1)^4) + 3ax^2 + 2bx + c \quad \ldots\ldots. (2)$$

$$90x^8 = \frac{d^2}{dx^2}(q(x)(x-1)^4) + 6ax + 2b \quad \ldots\ldots. (3)$$

$$720x^7 = \frac{d^3}{dx^3}(q(x)(x-1)^4) + 6a \quad \ldots\ldots. (4)$$

เพราะว่า $\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-1)^4) = 0$ เมื่อ $x = 1$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, 3$

เพราะฉะนั้นจากสมการ (1), (2), (3) และ (4) เมื่อแทนค่า $x = 1$ จะได้

(1) ; $a + b + c + d = 1$

(2) ; $3a + 2b + c = 10$

(3) ; $6a + 2b = 90$

(4) ; $6a = 720$

เพราะฉะนั้น $a = 120$ และ $b = -315$

$c = 10 - 3a - 2b = 10 - 360 + 630 = 280$

$d = 1 - a - b - c = 1 - 120 + 315 - 280 = -84$

สรุปเศษเหลือคือ $120x^3 - 315x^2 + 280x - 84$

หมายเหตุ โดยใช้การคำนวณของโปรแกรม MATHCAD จะได้ว่า

$x^{10} - (120x^3 - 315x^2 + 280x - 84)$

$= (x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 56x + 84)(x-1)^4$

11.แนวคิด

เพราะว่า x^{10} หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษ $120x^3 - 315x^2 + 280x - 84$

เพราะฉะนั้น $x^{10} - (120x^3 - 315x^2 + 280x - 84)$ ต้องหารด้วย $(x-1)^4$ ลงตัว

นั้นคือ $x^{10} - 120x^3 + 315x^2 - 280x + 84$ หารด้วย $(x-1)^4$ ลงตัว

โดยการหารสังเคราะห์จะได้ว่า

1	1	0	0	0	0	0	0	–120	315	– 280	84
		1	1	1	1	1	1	1	–119	196	–84
1	1	1	1	1	1	1	1	–119	196	– 84	0
		1	2	3	4	5	6	7	–112	84	
1	1	2	3	4	5	6	7	–112	84	0	
		1	3	6	10	15	21	28	–84		
1	1	3	6	10	15	21	28	–84	0		
		1	4	10	20	35	56	84			
	1	4	10	20	35	56	84	0			

สรุป $\dfrac{x^{10}-120x^3+315x^2-280x+84}{(x-1)^4} = x^6+4x^5+10x^4+20x^3+35x^2+56x+84$

12.แนวคิด $$\frac{x^{40}}{(x-1)^4} = q(x)+\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{(x-1)^4}$$

$$x^{40} = q(x)(x-1)^4+(Ax^3+Bx^2+Cx+D) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้างเทียบกับ x จะได้

$$40x^{39} = [q(x)(x-1)^4]'+3Ax^2+2Bx+C \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$(40)(39)x^{38} = [q(x)(x-1)^4]''+6Ax+2B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$(40)(39)(38)x^{37} = [q(x)(x-1)^4]'''+6A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

เพราะว่า $[q(x)(x-1)^4]' = 0$ เมื่อ $x = 1$

$[q(x)(x-1)^4]'' = 0$ เมื่อ $x = 1$

$$[q(x)(x-1)^4]''' = 0 \text{ เมื่อ } x = 1$$

เพราะฉะนั้นแทนค่า $x = 1$ ในสมการ (1) , (2) , (3) และ (4) จะได้

$$1 = A+B+C+D \quad \text{..........}(5)$$

$$40 = 3A+2B+C \quad \text{..........}(6)$$

$$(40)(39) = 6A+2B \quad \text{..........}(7)$$

$$(40)(39(38) = 6A$$

$$A = 9880$$

$$B = \frac{(40)(39)-6A}{2} = \frac{1560-59280}{2} = -28860$$

$$C = 40–3A–2B = 40–3(9880)+2(28860) = 40–29640 + 57720 = 28120$$

$$D = 1-A-B-C = -9139$$

สรุปเศษเหลือ คือ $9880x^3 - 28860x^2 + 28120x - 9139$

13.แนวคิด

x^{40} หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษ $9880x^3 - 28860x^2 + 28120x - 9139$

x^{10} หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษ $120x^3 - 315x^2 + 280x - 84$

สรุป $x^{40} + x^{10} + 1$ หารด้วย $(x-1)^4$ เหลือเศษ

$(9880 + 120)x^3 - (28860 + 315)x^2 + (28120 + 280)x - (9139 + 84 - 1)$

$= 10000x^3 - 29175x^2 + 28400x - 9222$

14.แนวคิด ให้ $\dfrac{x^{10}+x^5+1}{(x-1)^4} = q(x) + \dfrac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^4}$

เพราะฉะนั้น $x^{10} + x^5 + 1 = q(x)(x-1)^4 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)$ ...(*)

แทนค่า $x = 1$;

$$1 + 1 + 1 = a + b + c + d$$

ดังนั้น $a + b + c + d = 3$ ...(1)

จากสมการ (*) เราหาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง

$$10x^9 + 5x^4 = [q(x)(x-1)^4]' + 3ax^2 + 2bx + c \qquad ...(**)$$

แทนค่า $x = 1$;

$$15 = 3a + 2b + c \qquad ...(2)$$

จากสมการ (* *) หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง

$$90x^8 + 20x^3 = [q(x)(x-1)^4]'' + 6ax + 2b \qquad ...(* * *)$$

แทนค่า $x = 1$;

$$110 = 6a + 2b \qquad ...(3)$$

จากสมการ (* * *) หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง

$$720x^7 + 60x^2 = [q(x)(x-1)^4]''' + 6a$$

แทนค่า $x = 1$; $780 = 6a$; $a = 130$

(3) ; $2b = 110 - 6a = 670$; $b = -335$

(2) ; $c = 15 - 3a - 2b = 15 - 390 + 670 = 295$

(1) ; $d = 3 - a - b - c = 3 - 130 + 335 - 295 = -87$

สรุปเศษเหลือ คือ $130x^3 - 335x^2 + 295x - 87$

หมายเหตุ โดยการคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD จะได้ว่า

$(x^{10} + x^5 + 1) - (130x^3 - 335x^2 + 295x - 87)$

$= (x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 35x^2 + 57x + 88)(x-1)^4$

****

2^{100} = 1267650600 2282294014 9670320537 6

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 6

1. จงหาค่าของ

1.1 $\binom{1}{0}\binom{1}{1}+\binom{1}{1}\binom{1}{0}$

1.2 $\binom{2}{0}\binom{1}{1}+\binom{2}{1}\binom{1}{0}$

1.3 $\binom{2}{2}\binom{3}{0}+\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{2}{0}\binom{3}{2}$

1.4 $\binom{2}{0}\binom{3}{1}+\binom{2}{1}\binom{3}{0}$

1.5 $\binom{2}{2}\binom{4}{0}+\binom{2}{1}\binom{4}{1}+\binom{2}{0}\binom{4}{2}$

1.6 $\binom{3}{0}\binom{4}{2}+\binom{3}{1}\binom{4}{1}+\binom{3}{2}\binom{4}{0}$

1.7 $\binom{4}{0}\binom{8}{3}+\binom{4}{1}\binom{8}{2}+\binom{4}{2}\binom{8}{1}+\binom{4}{3}\binom{8}{0}$

1.8 $\binom{3}{0}\binom{5}{2}+\binom{3}{1}\binom{5}{1}+\binom{3}{2}\binom{5}{0}$

2. จงแสดงว่า $\binom{n}{0}\binom{m}{2}+\binom{n}{1}\binom{m}{1}+\binom{n}{2}\binom{m}{0}=\binom{m+n}{2}$

3. จงแสดงว่า $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}=\binom{m+n}{r}$

4. จงแสดงว่า $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

5. จงหาค่าของ $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k\binom{k+n-1}{k}$

6. $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}^k$ เท่ากับเท่าใด

7. ค่าของ $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$ เท่ากับเท่าใด

8. จงหาค่าของ $\sum\limits_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{4}{k}\binom{4}{2-k}$

9. จงหาค่าของ $\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{5}{k}\binom{5}{4-k}$

10. จงหาค่าของ $\sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{10}{k}\binom{10}{5-k}$

11. ค่าของ $\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{r-k}$ เท่ากับเท่าใด

12. จงแสดงว่า $\binom{x}{n} = \binom{x-1}{n-1} + \binom{x-2}{n-1} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}$

    เมื่อ x , n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $n < x$

13. จงแสดงว่า $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$

14. จงแสดงว่า $\binom{m}{0}\binom{n-m}{r}+\binom{m}{1}\binom{n-m}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n-m}{0}=\binom{n}{r}$

เฉลยปัญหาเพิ่มเติมจากหน้า 20

จงพิสูจน์ว่า $(m-1)^2 \mid m^{m-1} - 1$ ทุกจำนวนเต็ม $m > 1$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $(k+1)^{[(k+1)-1]} - 1 = (k+1)^k - 1$

$$= \binom{k}{0}k^k + \binom{k}{1}k^{k-1} + \binom{k}{2}k^{k-2} + \ldots + \binom{k}{k-1}k + \binom{k}{k} - 1$$

$$= \binom{k}{0}k^k + \binom{k}{1}k^{k-1} + \binom{k}{2}k^{k-2} + \ldots + k\,k + 1 - 1$$

$$= \binom{k}{0}k^k + \binom{k}{1}k^{k-1} + \binom{k}{2}k^{k-2} + \ldots + k^2$$

และ $k^2 \mid \binom{k}{0}k^k$, $k^2 \mid \binom{k}{1}k^{k-1}$, $k^2 \mid \binom{k}{2}k^{k-2}$, … , $k^2 \mid k^2$

เพราะฉะนั้น $k^2 \mid (k+1)^{[(k+1)-1]} - 1$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots$

แทนค่า $k = m - 1$

เพราะฉะนั้น $(m-1)^2 \mid m^{m-1} - 1$ ทุกค่า $m = 2, 3, 4, \ldots$

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 6

1. ตอบ 1.1 $\binom{2}{1}=2$ 1.2 $\binom{3}{1}=3$ 1.3 $\binom{5}{2}=10$

1.4 $\binom{5}{1}=5$ 1.5 $\binom{6}{2}=15$ 1.6 $\binom{7}{2}=21$

1.7 $\binom{12}{3}=$ 220 1.8 $\binom{8}{2}=28$

2. แนวคิด

$$\binom{n}{0}\binom{m}{2} = (1)\left(\frac{m!}{2!(m-2)!}\right) = \frac{(m-1)m}{2}$$

$$\binom{n}{1}\binom{m}{1} = nm = m\,n$$

$$\binom{n}{2}\binom{m}{0} = \left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)(1) = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\begin{aligned}\binom{n}{0}\binom{m}{2}+\binom{n}{1}\binom{m}{1}+\binom{n}{2}\binom{m}{0} &= \frac{(m-1)m}{2}+m\,n+\frac{(n-1)n}{2}\\ &= \frac{m^2-m+2mn+n^2-n}{2}\\ &= \frac{(m^2+2mn+n^2)-(m+n)}{2}\\ &= \frac{(m+n-1)(m+n)}{2}\\ &= \binom{m+n}{2}\end{aligned}$$

3. แนวคิด เพราะว่า $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x^n)$

และพจน์ที่มี x^r ของ $(1+x)^{m+n}$ คือ $\binom{m+n}{r} x^r$

และพจน์ที่มี x^r ของ $(1+x)^m(1+x)^n$ เกิดจาก

$$\binom{m}{0}x^0\binom{n}{r}x^r + \binom{m}{1}x\binom{n}{r-1}x^{r-1} + \ldots + \binom{m}{r}x^r\binom{n}{0}x^0$$

$$= [\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \ldots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}]\, x^r$$

$$= (\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k})x^r$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$

4. แนวคิด $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n$

$(1+x)^{2n} = \binom{2n}{0} + \binom{2n}{1}x + \binom{2n}{2}x^2 + \ldots + \binom{2n}{2n}x^{2n}$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ใน $(1+x)^{2n}$ คือ $\binom{2n}{n}$

สัมประสิทธิ์ของ x^n ที่ได้จาก $(1+x)^n(1+x)^n$

$$= [\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{n}x^n][\binom{n}{n}x^n + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{0}]$$

สัมประสิทธิ์ของ x^n คือ $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}$

$$= \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$$

เพราะว่า $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$

เพราะฉะนั้น $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

5. **แนวคิด** เพราะว่า $\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \ldots$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}x^k$$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^n} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}(\frac{1}{2})^k$

สรุป $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{(\frac{1}{2})^n} = 2^n$

6. **แนวคิด** $n=2$ จะได้ว่า $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+2-1}{k}(\frac{1}{2})^k = 2^2$

$$2^2 = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(\frac{1}{2})^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}k(\frac{1}{2})^k + \sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^k$$

$$4 = \sum_{k=0}^{\infty}k(\frac{1}{2})^k + 2$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=0}^{\infty}k(\frac{1}{2})^k = 2$

7. **แนวคิด** $(1+2)^n = 1 + \binom{n}{1}(2) + \binom{n}{2}(2)^2 + \ldots + \binom{n}{n}2^n$

$$3^n = \sum_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}$$

8. **แนวคิด** $\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{4}{k}\binom{4}{2-k} = (1)\binom{4}{0}\binom{4}{2} + (-1)\binom{4}{1}\binom{4}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{0}$

$$= 6 - 16 + 6$$

$$= -4$$

9. แนวคิด

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^k \binom{5}{k}\binom{5}{4-k} = \binom{5}{0}\binom{5}{4}-\binom{5}{1}\binom{5}{3}+\binom{5}{2}\binom{5}{2}-\binom{5}{3}\binom{5}{1}+\binom{5}{4}\binom{5}{0}$$

$$= 5-50+100-50+5$$

$$= 10$$

10.แนวคิด $\sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{10}{k}\binom{10}{5-k}$

$$= \binom{10}{0}\binom{10}{5}-\binom{10}{1}\binom{10}{4}+\binom{10}{2}\binom{10}{3}-\binom{10}{3}\binom{10}{2}+\binom{10}{4}\binom{10}{1}-\binom{10}{5}\binom{10}{0}$$

$$= 0$$

11.แนวคิด $(x-1)^n = \binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$

$$(x+1)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n}1$$

เพราะว่า $(x-1)^n(x+1)^n$

$$= [\binom{n}{0}x^n - \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2} + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}x^{n-k} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}]$$

$$[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}x + \binom{n}{n}]$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^r ใน $(x-1)^n(x+1)^n$ คือ

$$(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n}{0} + (-1)^{r-1}\binom{n}{r-1}\binom{n}{1} + (-1)^{r-2}\binom{n}{r-2}\binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{0}\binom{n}{r}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k}\binom{n}{k}\binom{n}{r-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n}{r-k}$$

เพราะว่า $(x-1)^n(x+1)^n = ((x-1)(x+1))^n = (x^2-1)^n$

และ $(x^2-1)^n$ มีแต่พจน์ของ x กำลังเลขคู่

เพราะฉะนั้น $\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{r-k}=0$ เมื่อ r เป็นเลขคี่

เพราะว่า $(x^2-1)^n \;=\; \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{n-k}(x^2)^{n-k}$

เมื่อ r เป็นเลขคู่จะได้ว่าพจน์ที่มี x^r ของ $(x^2-1)^n$ คือ

$$(-1)^{\frac{r}{2}}\binom{n}{r/2}(x^2)^{\frac{r}{2}} = (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{n}{r/2}x^r$$

สรุป $\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{n}{r-k} = (-1)^{\frac{r}{2}}\binom{n}{r/2}$

ตัวอย่างเช่น

$$\sum_{k=0}^{2}(-1)^k\binom{4}{k}\binom{4}{2-k} = (-1)^{\frac{2}{2}}\binom{4}{1} = -4$$

$$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\binom{5}{k}\binom{5}{4-k} = (-1)^{\frac{4}{2}}\binom{5}{2} = 10$$

12.แนวคิด เพราะว่า $\binom{m+1}{k} = \binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}$ ทุกค่า k , m

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
\binom{x}{n} &= \binom{x-1}{n-1}+\binom{x-1}{n} \\
&= \binom{x-1}{n-1}+\binom{x-2}{n-1}+\binom{x-2}{n} \\
&= \binom{x-1}{n-1}+\binom{x-2}{n-1}+\binom{x-3}{n-1}+\binom{x-3}{n} \\
&= \vdots \\
&= \binom{x-1}{n-1}+\binom{x-2}{n-1}+\binom{x-3}{n-1}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}
\end{aligned}$$

13.แนวคิด $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1}+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)}\right)$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{k(n-k+1)}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$= \binom{n+1}{k}$$

14.แนวคิด สิ่งของ n สิ่งต่างกันเลือกมา r สิ่งมีวิธีเลือกได้ 2 แบบ คือ

แบบที่ 1 เลือกออกมาพร้อมกันทีเดียว r สิ่ง ทำได้ $\binom{n}{r}$

แบบที่ 2 แบ่งของ n สิ่งออกเป็น 2 ส่วนก่อนคือ m , n – m

m	n–m	จำนวนวิธี
0	r	$\binom{m}{0}\binom{n-m}{r}$
1	r–1	$\binom{m}{1}\binom{n-m}{r-1}$
⋮		
r	0	$\binom{m}{r}\binom{n-m}{0}$

จำนวนวิธีทั้งหมด $= \binom{m}{0}\binom{n-m}{r}+\binom{m}{1}\binom{n-m}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n-m}{0}$

สรุป $\binom{m}{0}\binom{n-m}{r}+\binom{m}{1}\binom{n-m}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n-m}{0}=\binom{n}{r}$

****

$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{50} =$ 1690200800 3043058686 6227094050 1

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 7

1. กำหนด $0 \le x \le 1$ จงหาค่าสูงสุดของ $x(1-x^3)$
2. กำหนดให้ $xy = 1$ และ $x, y > 0$

   จงหาขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\dfrac{x^4+y^4}{x+y}$
3. กำหนดให้ $x, y > 0$ และ $xy = 1$

   $\dfrac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับเท่าใด
4. กำหนดให้ $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ จงหาจำนวนเต็มบวก k มากที่สุดที่ทำให้

   $k \le \dfrac{x^2+y^2+z^2+x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}$
5. a , b , c เป็นลำดับเลขคณิต และ $a < b < c$ โดยที่ a , b , c เป็นด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก จงหาค่า a , b , c มาทั้งหมด
6. ถ้า α และ 2α เป็นรากของสมการ $x^2 + ax + 8 = 0$ จงหาค่า a
7. เป็นรากตัวหนึ่งของสมการ $a^2 + bx + c = 0$ เป็นสี่เท่าของอีกตัวหนึ่ง

   จงแสดงว่า $4b^2 = 25ac$
8. กำหนดให้ α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$

   จงแสดงว่า $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ และ $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$
9. กำหนดให้ α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

   จงหาค่าในเทอมของ a , b , c ของ

(1) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$ (2) $\alpha^4+\beta^4$ (3) $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$

10. กำหนด $x^2+bx+c=0$ และ $x^2+cx+b=0$ และ $b \neq c$ มีรากตัวเดียวกัน จงแสดงว่า $1+b+c=0$

11. กำหนด α , β เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$ จงหาสมการกำลังสองที่มี (1) α^2 , β^2 เป็นรากสมการ (2) $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$ เป็นรากสมการ

12. จงแสดงว่า α เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{1}{\alpha}$ เป็นรากของสมการ $cx^2+bx+a=0$

13. กำหนด α , β เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$ จงหาค่าของ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ และ $\alpha^3+\beta^3$, $\alpha^2+\beta^2$

14. กำหนดให้ α , β เป็นรากของสมการ $x^2+2x-15=0$

จงหาค่าของ 1. $\alpha+\beta$ 2. $\alpha\beta$

3. $\alpha^2+\beta^2$ 4. $\alpha^3+\beta^3$

15. กำหนด α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$ จงหาสมการพหุนามกำลังสองที่มีรากของสมการเป็น

(1) α^4 , β^4 (2) $\alpha+1$, $\beta+1$

16. จงแสดงว่า ถ้า α เป็นจำนวนตรรกยะ และ $\sqrt{\beta}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ $\alpha+\sqrt{\beta}$ เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$ แล้ว $\alpha-\sqrt{\beta}$ เป็นรากของสมการด้วย

17. จงหารากของสมการ $\sqrt{x^2+4x-21}+\sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{6x^2-5x-39}$

18. จงหาค่า k ที่ทำให้ $10x^2-29x+k=0$ มีรากเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน

19. จงหาสมการกำลังสองที่มีรากเป็น 2 เท่าของรากสมการ $x^2+px+q=0$

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ ชุดที่ 7

1. แนวคิด วิธีที่ 1. ให้ $y = x(1-x^3)$

$$y^3 = x^3(1-x^3)^3$$

$$3y^3 = 3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)$$

เพราะว่า $0 \le x \le 1$ เพราะฉะนั้น $x^3 \ge 0$ และ $1-x^3 \ge 0$

เพราะว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากกว่าค่าเฉลี่ยเรขาคณิต เพราะฉะนั้น

$$\left(\frac{(3x^3)+(1-x^3)+(1-x^3)+(1-x^3)}{4}\right) \ge \sqrt[4]{3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)}$$

$$\frac{3}{4} \ge \sqrt[4]{3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)}$$

เพราะฉะนั้น $3y^3 \le \left(\frac{3}{4}\right)^4$

$$y^3 \le \frac{3^3}{4^4}$$

$$y \le \frac{3}{4\sqrt[3]{4}} = \frac{3\sqrt[3]{16}}{4\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{16}} = \frac{3\sqrt[3]{16}}{16}$$

เพราะว่า $\frac{(3x^3)+(1-x^3)+1-x^3)+(1-x^3)}{4} = \sqrt[4]{3x^3(1-x^3)(1-x^3)(1-x^3)}$

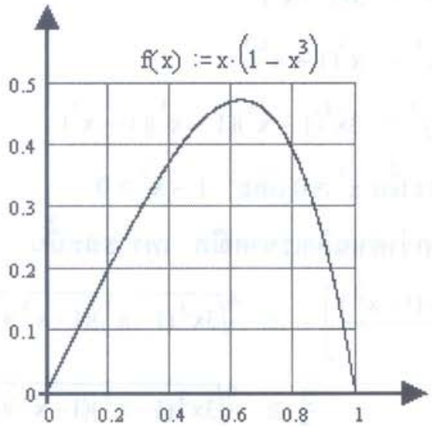
เมื่อ $3x^3 = 1-x^3$

$$4x^3 = 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

สรุป $x(1-x^3)$ มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{3\sqrt[3]{16}}{16}$ เมื่อ $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

กราฟของ f(x) ที่เขียนด้วยโปรแกรม MATHCAD



$\frac{1}{\sqrt[3]{4}} = 0.63 \qquad \frac{3\cdot\sqrt[3]{16}}{16} = 0.47247$

$f(x) := x\cdot\left(1-x^3\right)$

$t := 0.61, 0.62 .. 0.65$

t	f(t)
0.61	0.471542
0.62	0.472237
0.63	0.47247
0.64	0.472228
0.65	0.471494

วิธีที่ 2 โดยการใช้ CALCULUS

$$f(x) = x(1-x^3) = x - x^4 \qquad 0 \le x \le 1$$

$$f'(x) = 1 - 4x^3$$

$$f''(x) = -12x^2$$

$$f'(x) = 0 \leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

เพราะว่า $f'(x) \ge 0$ เมื่อ $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

เพราะฉะนั้น $f(x) \le f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ ทุกค่า x , $0 \le x \le \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

เพราะว่า $f'(x) \le 0$ เมื่อ $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \le x \le 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) \leq f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}})$ ทุกค่า $\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leq x \leq 1$

เพราะฉะนั้น $f(\frac{1}{\sqrt[3]{4}}) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4\sqrt[3]{4}}$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

2. แนวคิด เพราะว่า $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$

$$x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$$

$$x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} = 1$$

เพราะฉะนั้น $x + y \geq 2$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{x^2+y^2}{2} \geq \sqrt{x^2y^2} = 1$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 \geq 2$

เพราะว่า $(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \geq 2(x+y) - 2 \geq (x+y) + 2 - 2$$

$$\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 1 \qquad \ldots(1)$$

$$(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2 \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 + y^4 - 2y^2 + 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &\geq 2(x^2+y^2) - 2 \\ &\geq (x^2+y^2) + (x^2+y^2) - 2 \\ &\geq x^2 + y^2 + 2 - 2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \geq 1 \qquad \ldots(2)$$

(1) & (2) $$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 1$$

$$\frac{x^4+y^4}{x+y} \geq 1$$

เพราะว่า $x = 1 = y$ ทำให้ $\frac{x^4+y^4}{x+y} = 1$

เพราะฉะนั้น 1 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\frac{x^4+y^4}{x+y}$

3. แนวคิด $x^2+y^2 \geq 2$, $x+y \geq 2$, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq 2$

$$(\sqrt{x}-1)^2 + (\sqrt{y}-1)^2 \geq 0$$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 + y - 2\sqrt{y} + 1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} x+y &\geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}) - 2 \\ &= (\sqrt{x}+\sqrt{y}) + (\sqrt{x}+\sqrt{y}) - 2 \\ &\geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+2-2 \\ &\geq \sqrt{x}+\sqrt{y} \end{aligned}$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq 1$$

ในทำนองเดียวกัน $$\frac{x^2+y^2}{x+y} \geq 1$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{x^2+y^2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq 1$$

$$\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq 1$$

ทำให้ $$\frac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \geq 2$$

เพราะว่า $x = 1, y = 1$ ทำให้ $\dfrac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2$

เพราะฉะนั้นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\dfrac{x^2+y^2+x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ มีค่าเท่ากับ 2

4. แนวคิด เพราะว่าค่าเฉลี่ยเรขาคณิตน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

เพราะฉะนั้น
$$\sqrt[3]{xyz} \le \frac{x+y+z}{3}$$
$$1 \le \frac{x+y+z}{3}$$
$$3 \le x+y+z$$

ในทำนองเดียวกัน $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z} \ge 3$

$$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y}-1)^2+(\sqrt{z}-1)^2 \ge 0$$
$$x-2\sqrt{x}+1+y-2\sqrt{y}+1+z-2\sqrt{z}+1 \ge 0$$
$$x+y+z \ge 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})-3$$
$$x+y+z \ge (\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})+3-3$$
$$= \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$$
$$\frac{x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \ge 1 \qquad \ldots(1)$$

ในทำนองเดียวกัน
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z} \ge 1$$

ดังนั้น
$$\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \ge 1 \qquad \ldots(2)$$

จาก (1) & (2) จะได้ $\dfrac{x^2+y^2+z^2+x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \ge 2$

เพราะว่า $x = y = z = 1$ จะได้ $\dfrac{x^2+y^2+z^2+x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} = 2$

สรุป $k = 2$

หมายเหตุ จากแนวคิดของวิธีทำข้างต้น เมื่อ $x, y, z > 0$, $xyz = 1$ (ขอให้ทดลองทำเป็นแบบฝึกหัด) จะได้ว่า

1. $$\frac{x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \geq 3$$

2. $$\frac{x^8+y^8+z^8+x^4+y^4+z^4+x^2+y^2+z^2+x+y+z}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \geq 4$$

3. $$\frac{\sum_{n=0}^{m}(x^{2^n}+y^{2^n}+z^{2^n})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}} \geq m$$

5. แนวคิด ให้ผลต่างร่วมคือ d เพราะฉะนั้น $a = b - d$, $c = b + d$

เพราะว่า a , b , c เป็นด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก และ $a < b < c$

เพราะฉะนั้น $c^2 = a^2 + b^2$

$$(b+d)^2 = (b-d)^2 + b^2 \qquad \ldots(1)$$

$$b^2 + 2bd + d^2 = b^2 - 2bd + d^2 + b^2$$

$$4bd - b^2 = 0$$

$$b(4d - b) = 0$$

$b \neq 0$ $\qquad 4d - b = 0$

$$b = 4d$$

เพราะฉะนั้น $a : b : c = 3d : 4d : 5d$ เป็นอัตราส่วนด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

สรุป $S = \{(a, b, c) \mid a < b < c$ และ a , b , c เป็นลำดับเลขคณิต และ เป็นด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก$\}$

$= \{(3d, 4d, 5d) \mid d$ เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากกว่าศูนย์$\}$

6. แนวคิด จากสมการ $x^2 + ax + 8 = 0$

เพราะฉะนั้น $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 32}}{2}$

ให้ $\alpha = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 32}}{2}$ และ $2\alpha = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 32}}{2}$

เพราะฉะนั้น
$$
\begin{aligned}
-a - \sqrt{a^2 - 32} &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - 32}}{2} \\
-2a - 2\sqrt{a^2 - 32} &= -a + \sqrt{a^2 - 32} \\
-a &= 3\sqrt{a^2 - 32} \\
a^2 &= a(a^2 - 32) \\
9(32) &= 8a^2 \\
a^2 &= 36 \\
a &= \pm 6
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ $x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \rightarrow x = 2\,,\,4$

$x^2 + 6x + 8 = 0 \rightarrow (x+2)(x+4) = 0 \rightarrow x = -2\,,\,-4$

7. แนวคิด เพราะว่า $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

และรากตัวหนึ่งของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ เป็นสี่เท่าของอีกตัวหนึ่ง

เพราะฉะนั้น
$$
\begin{aligned}
\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= 4\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \\
-b - \sqrt{b^2 - 4ac} &= -4b + 4\sqrt{b^2 - 4ac} \\
3b &= 5\sqrt{b^2 - 4ac} \\
9b^2 &= 25(b^2 - 4ac)
\end{aligned}
$$

$$ab^2 = 25b^2 - 100ac$$

$$-16b^2 = -100ac$$

เพราะฉะนั้น $\quad 4b^2 = 25ac$

8. แนวคิด วิธีที่ 1. $\quad ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ให้ $\quad \alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ดังนั้น $\alpha + \beta = -\dfrac{2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$ และ $\alpha\beta = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a^2} = \dfrac{c}{a}$

วิธีที่ 2 เพราะว่า α, β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

เพราะฉะนั้น α, β เป็นรากของสมการ $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$

และ $\quad (x - \alpha)(x - \beta) = x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}$

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$$

สรุป $\quad \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ และ $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

9. แนวคิด เพราะว่า α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

เพราะฉะนั้น $\quad \alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}, \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(1) $\quad \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta}$

$$= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} - 2$$

$$= \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\left(\frac{c}{a}\right)} - 2 \qquad = \quad \frac{b^2}{ca} - 2$$

(2) $$(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4 + 4\alpha 3\beta + 6\alpha^2\beta^2 + 4\alpha\beta^3 + \beta^4$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = (\alpha+\beta)^4 - 4\alpha^3\beta - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta^3$$

$$= (\alpha+\beta)^4 - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$$

$$= (\alpha+\beta)^4 - 6\alpha^2\beta^2 - 4\alpha\beta((\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta))$$

$$= (-\frac{b}{a})^4 - 6(\frac{c}{a})^2 - 4(\frac{c}{a})((-\frac{b}{a})^2 - 2(\frac{c}{a}))$$

$$= \frac{b^4}{a^4} + \frac{6c^2}{a^2} - \frac{4cb^2}{a^3} + \frac{8c^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^4}{a^4} + \frac{2c^2}{a^2} - \frac{4cb^2}{a^3}$$

$$= \frac{b^4 + 2a^2c^2 - 4ab^2c}{a^4}$$

(3) $$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{\beta^3 + \alpha^3}{\alpha^3\beta^3}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta^3}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^3\beta^3} = \frac{\left(-\frac{a}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3}$$

$$= \frac{-\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2}}{\frac{c^3}{a^3}} = \frac{3abc - b^3}{c^3}$$

10.แนวคิด ให้ α เป็นรากของ $x^2 + bx + c = 0$ และ $x^2 + cx + b = 0$

ดังนั้น $\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ และ $\alpha^2 + c\alpha + b = 0$

$$b\alpha + c = c\alpha + b$$

$$(b - c)\alpha = b - c$$

เพราะว่า $b \neq c$ เพราะฉะนั้น $\alpha = 1$ ดังนั้น $1 + b + c = 0$

11.แนวคิด α , β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

ดังนั้น $\alpha + \beta = -\frac{b}{c}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$

$$\alpha^2\beta^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

ดังนั้น สมการคือ $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$$x^2 - (\frac{b^2 - 2ac}{a^2})x + \frac{c^2}{a^2} = 0$$

$$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{(-\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = -\frac{b}{c}$

$$(\frac{1}{\alpha})(\frac{1}{\beta}) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{a}{c}$$

ดังนั้น สมการคือ $x^2 - (-\frac{b}{c})x + \frac{a}{c} = 0$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

12. แนวคิด ให้ α เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

ดังนั้น $$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

$\alpha \neq 0$; $$a + \frac{b}{\alpha} + \frac{c}{\alpha^2} = 0$$

$$c(\frac{1}{\alpha})^2 + b(\frac{1}{\alpha}) + a = 0$$

สรุป $\frac{1}{\alpha}$ เป็นรากของสมการ $cx^2 + bx + a = 0$

13. แนวคิด α , β เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

ดังนั้น $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

เพราะฉะนั้น $$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{(-\frac{b}{a})}{(\frac{c}{a})} = -\frac{b}{c}$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = (-\frac{b}{a})^3 - 3(\frac{c}{a})(-\frac{b}{a})$$

$$= -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{3abc - b^3}{a^3}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{b^2}{a^2} + \frac{2c}{a} = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$$

14. แนวคิด เพราะว่า α , β เป็นรากของสมการ $x^2 - 2x + 15 = 0$

เพราะฉะนั้น $\alpha + \beta = 2$ และ $\alpha\beta = 15$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$4 = \alpha^2 + \beta^2 + 30$$

เพราะฉะนั้น $\alpha^2 + \beta^2 = -26$

$$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$= \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$8 = \alpha^3+\beta^3+3(15)(2)$$

$$\alpha^3+\beta^3 = -82$$

15.แนวคิด เพราะว่า α และ β เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c=0$

เพราะฉะนั้น $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(1) จาก $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, $\alpha^4\beta^4 = \frac{c^4}{a^2}$

และ $\alpha^4+\beta^4 = \frac{b^4+2a^2c^2-4ab^2c}{a^4}$

เพราะฉะนั้นสมการที่มี α^4 , β^4 เป็นรากคือ $x^2-(\alpha^4+\beta^4)x+\alpha^4\beta^4 = 0$

$$x^2-(\frac{b^4+2a^2c^2-4ab^2c}{a^4})x+\frac{c^4}{a^4} = 0$$

$$a^4x^2-(b^4+2a^2c^2-4ab^2c)x+c^4 = 0$$

(2) สมการที่มี $\alpha+1$, $\beta+1$ เป็นรากคือ

$$x^2-((\alpha+1)+(\beta+1))x+(\alpha+1)(\beta+1) = 0$$

$$x^2-(\alpha+\beta+2)x+\alpha\beta+\alpha+\beta+1 = 0$$

$$x^2-(-\frac{b}{a}+2)x+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}+1 = 0$$

$$ax^2+(b-2a)x+c-b+a= 0$$

16 แนวคิด $\alpha+\sqrt{\beta}$ เป็นรากของสมการ $ax^2+bx+c = 0$

เพราะฉะนั้น $a(\alpha+\sqrt{\beta})^2+b(\alpha+\sqrt{\beta})+c = 0$

$$a(\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\beta} + \beta) + b\alpha + b\sqrt{\beta} + c = 0$$

$$(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) + (2a\alpha + b)\sqrt{\beta} = 0$$

เพราะฉะนั้น $a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c = 0$

และ $(2a\alpha + b)\sqrt{\beta} = 0$

ดังนั้น $(a\alpha^2 + a\beta + b\alpha + c) - (2a\alpha + b)\sqrt{\beta} = 0$

$$a(\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\beta} + \beta) + b(\alpha - \sqrt{\beta}) + c = 0$$

$$a(\alpha - \sqrt{\beta})^2 + b(\alpha - \sqrt{\beta}) + c = 0$$

สรุป $\alpha - \sqrt{\beta}$ เป็นรากของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$

17.แนวคิด $\sqrt{x^2+4x-21} + \sqrt{x^2-x-6} = \sqrt{6x^2-5x-39}$

$$\sqrt{(x-3)(x+7)} + \sqrt{(x-3)(x-2)} = \sqrt{(x-3)(6x+13)}$$

$$\sqrt{x-3}\,[\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} - \sqrt{6x+13}\,] = 0$$

กรณี 1 $\sqrt{x-3} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 3$

กรณี 2 $\sqrt{x+7} + \sqrt{x+2} = \sqrt{6x+13}$

$$x + 7 + 2\sqrt{x+7}\,\sqrt{x+2} + x + 2 = 6x + 13$$

$$\sqrt{x+7}\,\sqrt{x+2} = 2(x+1)$$

$$x^2 + 9x + 14 = 4x^2 + 8x + 4$$

$$3x^2 - x - 10 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6} = 2, -\frac{5}{3}$$

$x = 2$; $\sqrt{4+8-21} + \sqrt{4-2-6} = \sqrt{24-10-39}$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $x = 2$ ได้

แทนค่า $x = -\frac{5}{3}$ จะได้ $\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{20}{3} - 21} + \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{5}{3} - 6} \neq \sqrt{\frac{150}{9} + \frac{25}{3} - 39}$

สรุป $x = 3$ หรือ $x = 2$

หมายเหตุ ในระบบจำนวนจริง จะได้รากตัวเดียวคือ $x = 3$

18.แนวคิด $10x^2 - 29x + k = 0$

$$x = \frac{29 \pm \sqrt{841 - 40k}}{20}$$

ให้ $$\frac{29 - \sqrt{841-40k}}{20} = \frac{20}{29 - \sqrt{841-40k}}$$

$$(29 + \sqrt{841-40k})(29 - \sqrt{841-40k}) = 400$$

$$840 - (841 - 40k) = 400$$

$$k = 10$$

หมายเหตุ $ax^2 + bx + c = 0$ มีรากเป็นส่วนกลับซึ่งกันและกัน ก็ต่อเมื่อ เมื่อ $a = c$ เท่านั้น เพราะฉะนั้น $k = 10$

19.แนวคิด $x^2 + px + q = 0$ มีรากเป็น α , β

ดังนั้น $$\alpha + \beta = -p$$

$$\alpha\beta = q$$

เพราะฉะนั้น $$2\alpha + 2\beta = -2p$$

$$(2\alpha)(2\beta) = 4q$$

เพราะฉะนั้น $2\alpha , 2\beta$ เป็นรากของสมการ $x^2 - 2px + 4q = 0$

****

$1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{200}$

= 3984209833 1381215400 8171983053 6694402438 5017898009
1743961862 4426086387 3635195327 4491577048 566001

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

ผลงานของ เก่ง วิบูลย์ธัญญ์

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ต่อไปนี้เป็นผลงานของ **เก่ง วิบูลย์ธัญญ์** ซึ่งได้เขียนลงวารสารคณิตศาสตร์ตั้งแต่ พ.ศ. 2537 ขณะที่เป็นนักเรียนระดับ ม.ปลาย จาก โรงเรียนพนัสพิทยาคาร จ. ชลบุรี จนปัจจุบัน พ.ศ. 2542 นี้ เป็นนิสิตระดับชั้นปีที่ 4 ของภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ผู้เขียนเห็นว่าผลงานของ เก่ง วิบูลย์ธัญญ์ เป็นผลงานที่ดีมาก เหมาะสมกับนักเรียนทุกคนที่สนใจปัญหาคณิตศาสตร์ จึงขอนำผลงานมาลงไว้ในหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 19 นี้

1. จงหาค่าของ $$\frac{\dfrac{(1004)!}{(1000)!}-\dfrac{(1003)!}{(999)!}}{\sqrt{\dfrac{(1004)!}{(1000)!}+1}-\sqrt{\dfrac{(1003)!}{(999)!}+1}}$$

2. กำหนด m และ n เป็นจำนวนจริง

   จงแสดงว่า $m^4+m^3n+m^2n^2+mn^3+n^4 \geq 0$

3. จงแก้อสมการต่อไปนี้เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง

   $\sqrt{x^2-6x-1}+\sqrt{x^2-6x-3}+\sqrt{x^2-6x-5}+\sqrt{x^2-6x-7} \geq 5$

4. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

   $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{11}}+\frac{1}{x^{13}}+\frac{1}{x^{15}} \leq \frac{7}{x^9}$

5. จงหาค่าของ $$\dfrac{-1+\dfrac{1}{2^7}-\dfrac{1}{3^7}+\dfrac{1}{4^7}-\dfrac{1}{5^7}+\dfrac{1}{6^7}-\dots}{1+\dfrac{1}{3^7}+\dfrac{1}{5^7}+\dfrac{1}{7^7}+\dfrac{1}{9^7}+\dots}$$

6. จงหาค่า x และ y จากสมการ

$$\log(x^2+9)+\log(y^2+16)=\log x+\log y+\log 48$$

7. กำหนด x , y , z เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้อง

สมการ $xyz-x-y-z=2$ จงหาค่าต่ำสุดของ $x^2+y^2+z^2$

8. ถ้า $\cos A+\cos B+\cos C=0$ จงหาค่าของ $\dfrac{\cos A\cos B\cos C}{\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C}$

9. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ถ้า x , y , z เป็นจำนวนสามจำนวนที่ต่างกันทั้งหมดและสอดคล้องสมการต่อไปนี้

$$y^3+z^3+a(y^2+z^2)=z^3+x^3+a(z^2+x^2)=x^3+y^3+a(x^2+y^2)$$

จงแสดงว่า $x+y+z+a=0$

10 สำหรับจำนวนเต็ม $m>1$ จงแสดงว่า $(m-1)^2$ หาร $m^{m-1}-1$ ลงตัว

11. กำหนดให้ $a+b+c=6, a^2+b^2+c^2=8$ และ $a^3+b^3+c^3=10$

จงหาค่าของ $3(a^6+b^6+c^6)$

12. กำหนดให้ $|x|<1 , |y|<1 , |z|<1$ จงแสดงว่า $\dfrac{|x+y+z+xyz|}{|xy+yz+zx+1|}<1$

13. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกจงพิสูจน์ว่า มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$m^2 = \underbrace{444\ldots44}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{88\ldots8}_{n-1\text{ ตัว}}9$$

14. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$ จงแสดงว่าสำหรับจำนวนเต็มบวก n $A^n=6^{n-1}A$

15. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x^2-1|+|x^3-1|}{\sqrt[3]{x-2}+1}$

16. กำหนด $m , n \in I^+$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{\log(mn)}+\frac{1}{\log(2m+4n)-\log(\pi mn)}+\frac{1}{\log\pi}=\frac{1}{\log(2m+4n)}$$

จงหาคู่อันดับ (m , n) ทั้งหมด

17. จงหาจำนวนคู่อันดับ (m , n) ทั้งหมดที่เป็นคำตอบของสมการ

$$2(n!) = m!(m!+2)$$

18. กำหนดให้ a , b , c เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $1 < a < b < c$

และ abc หาร $(ab-1)(bc-1)(ca-1)$ ลงตัว จงหาจำนวนเต็ม a , b , c

19. กำหนดให้ N เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติดังนี้

(1) ตัวเลขที่แสดง N เป็นตัวเลข 8 หลัก

(2) ตัวเลขที่แสดง N 4 หลักแรกกับ 4 หลักหลังเหมือนกัน เช่น 12341234

(3) 28907 หาร N ลงตัว

จงหา N ที่มากที่สุด

20. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งมีสมบัติดังนี้

(1) m เป็นจำนวน 7 หลัก

(2) หลักล้านและหลักแสนของ m คือ 7

(3) หลักหน่วยและหลักสิบของ m คือ 7

(4) 31 และ 53 เป็นตัวประกอบของ m

จงหา m

21. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$m^2 = 15\underbrace{999\ldots99}_{n\text{ ตัว}}2\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ ตัว}}1$$

22. มีถุงใส่เหรียญ 5 ถุง ในแต่ละถุงมีเหรียญอยู่มากกว่าถุงละ 7 เหรียญโดยมีเหรียญปลอมอยู่ 2 ถุง เหรียญแท้และเหรียญปลอมแตกต่างกันเฉพาะน้ำหนัก โดยเหรียญแท้และเหรียญปลอมหนักเหรียญละ 50 และ 49 กรัม ตามลำดับ ให้หาว่าถุงใดบ้างบรรจุเหรียญปลอมโดยการใช้ตาชั่งเพียงครั้งเดียว และต้องชั่งเหรียญน้อยอันที่สุด

23. กำหนดให้ ผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักของ 3^{10000} เท่ากับ A
ผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักของ A เท่ากับ B
ผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักของ B เท่ากับ C จงหาค่าของ C

24. กำหนดให้ $N = 0! + 1(1!) + 2(2!) + \ldots + 1996(1996!)$ และ k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ ซึ่ง 189^k หาร N ลงตัว จงหาค่า k ที่มากที่สุด

25. กำหนด $f : R \rightarrow R$ โดย $a_i \in I$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$
โดย $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$
และมีจำนวนเต็มที่ต่างกัน 10 ตัว คือ $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ ที่ทำให้
$f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{10}) = 1996$
จงหาว่ามีจำนวนเต็ม n ที่ $f(n) = 2539$ หรือไม่ ถ้ามีจงหาค่าของ n

26. จงพิสูจน์ว่าในลำดับอนันต์ $11, 111, 1111, 11111, \ldots$
ไม่มีพจน์ใดเป็นกำลังสองสมบูรณ์

27. ให้ a , b , c , x , y และ z เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0

และ $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 163$$

$$\frac{ax}{a^2+x^2} + \frac{by}{b^2+y^2} + \frac{cz}{c^2+z^2} = 0$$

จงหาค่าของ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$

28. ถ้า $\sum_{k=1}^{n} \arctan \frac{2k}{2+k^2+k^4} = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ จงหาค่าของ x ในรูปของ n

29. กำหนดให้ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริงใดๆ

ซึ่ง $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} = 6$ และ $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b} = 8$ จงหาค่าของ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

30. จงแสดงว่า $2222^{5555} + 5555^{2222}$ หารด้วย 7 ลงตัว

31. กำหนดให้

$$A = (\arcsin x)^4 + (\arcsin x)^3(\arccos x) + (\arcsin x)(\arccos x)^3 + (\arccos x)^4$$

จงแสดงว่า $\frac{\pi^4}{64} \le A \le \frac{7\pi^4}{16}$

32. กำหนดให้ N เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) N ขึ้นต้นด้วย 3 และลงท้ายด้วย 6

2) ผลบวกของเลขโดดในทุกหลักของ N มีค่า 36

3) N หารด้วย 36 ลงตัว

จำนวน N ที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นเป็นเท่าใด

33. จงหาค่าจำนวนจริง a ทั้งหมด ที่ทำให้สมการ

$$x^4 - 10x^3 - 2(a-11) + 2(5a+6)x + 2a + a^2 = 0$$

มีคำตอบเป็นจำนวนจริงที่ต่างกันสามจำนวนเท่านั้น

34. สำหรับจำนวนเต็มบวก n จงพิสูจน์ว่า

$$n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \dots + n^{\frac{1}{2n+1}} \ge n\sqrt[n]{2}$$

35. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ P(x) เป็นพหุนามกำลัง n ซึ่ง

$P(k) = \frac{k}{1+k}$ เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

จงแสดงว่า $P(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \frac{n}{n+2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

เฉลยสารพันปัญหาคณิตศาสตร์ผลงานของ เก่ง วิบูลย์ธัญญู่

1. แนวคิด

$$\frac{(1004)!}{(1000)!}=\frac{(1004)(1003)(1002)(1001)(1000)!}{(1000)!}=(1004)(1003)(1002)(1001)$$

$$\frac{(1003)!}{(999)!}=\frac{(1003)(1002)(1001)(1000)(999)!}{(999)!}=(1003)(1002)(1001)(1000)$$

ให้ $A = 1001$, $B = 1000$ นั่นคือให้หาค่าของ

$$\frac{A(A+1)(A+2)(A+3)-B(B+1)(B+2)(B+3)}{\sqrt{A(A+1)(A+2)(A+3)+1}-\sqrt{B(B+1)(B+2)(B+3)}}$$

$$=\frac{\{A(A+1)(A+2)(A+3)+1\}-\{B(B+1)(B+2)(B+3)+1\}}{\sqrt{A(A+1)(A+2)(A+3)+1}-\sqrt{B(B+1)(B+2)(B+3)+1}}$$

$$=\sqrt{A(A+1)(A+2)(A+3)+1}+\sqrt{B(B+1)(B+2)(B+3)+1}$$

$$=\sqrt{(A^2+3A)(A^2+3A+2)+1}+\sqrt{(B^2+3B)(B^2+3B+2)+1}$$

$$=\sqrt{(A^2+3A^2)+2(A^2+3A)+1}+\sqrt{(B^2+3B^2)+2(B^2+3B)+1}$$

$$=\sqrt{(A^2+3A+1)^2}+\sqrt{(B^2+3B+1)^2}$$

$$=\left|A^2+3A+1\right|+\left|B^2+3B+1\right|$$ แทนค่า $A = 1001$, $B = 1000$

$$=(1001)^2+3(1001)+1+(1000)^2+3(1000)+1$$

$$=2{,}008{,}006$$

2. แนวคิด จาก $x^5-y^5=(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)$

เพราะว่า $(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)=\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$

พิจารณาค่าของ $\dfrac{x^5-y^5}{x-y}$

กรณีที่ 1 ถ้า $x > y$ จะได้ $x^5 > y^5$ ดังนั้น $x - y > 0$ และ $x^5 - y^5 > 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y} > 0$

กรณีที่ 2 ถ้า $x < y$ จะได้ $x^5 < y^5$ ดังนั้น $x - y < 0$ และ $x^5 - y^5 < 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y} > 0$

นั่นคือ $\dfrac{x^5 - y^5}{x - y} > 0$ ทุก $x, y \in R$ และ $x \neq y$

จะได้ $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 > 0$ ทุก $x, y \in R$ และ $x \neq y$

และถ้า $x = y$ จะได้

$$x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 = x^4 + x^4 + x^4 + x^4 + x^4 = 5x^4 \geq 0$$

ดังนั้น $x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4 \geq 0$ ทุก $x, y \in R$

3. ตอบ $(-\infty, -1] \cup [7, \infty)$

แนวคิด ให้ $A = x^2 - 6x$ แทนในอสมการที่กำหนดจะได้

$$\sqrt{A-1} + \sqrt{A-3} + \sqrt{A-5} + \sqrt{A-7} \geq 5 \qquad \ldots(1)$$

เห็นชัดว่าค่า A ซึ่งสอดคล้องอสมการจะต้องอยู่ในช่วง $[7, \infty)$

พิจารณา $A = 7$ จะได้ $\sqrt{A-1} + \sqrt{A-3} + \sqrt{A-5} + \sqrt{A-7} = \sqrt{6} + \sqrt{4} + \sqrt{2} \geq 5$

ดังนั้น $A = 7$ สอดคล้องอสมการ (1)

ถ้า $A > 7$ จะได้ $\sqrt{A-1} > \sqrt{6}$

$\sqrt{A-3} > \sqrt{4}$

$\sqrt{A-5} > 2$

$\sqrt{A-7} > 0$

ซึ่งทำให้ $\sqrt{A-1}+\sqrt{A-3}+\sqrt{A-5}+\sqrt{A-7} > \sqrt{6}+\sqrt{4}+\sqrt{2} \geq 5$

นั่นคือเซตคำตอบของอสมการ (1) คือ $[7, \infty)$

และนั่นคือ $x^2-6x = A \geq 7$

$$x^2-6x-7 \geq 0$$

$$(x-7)(x+1) \geq 0$$

ดังนั้น $x \leq -1$ หรือ $x \geq 7$

4. แนวคิด กรณี 1 ถ้า $x > 0$, จะได้ $x^9 > 0$

x^9 คูณตลอด , $x^6+x^4+x^2+1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6} \leq 7$

$x^6+\frac{1}{x^6}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2} \leq 6$ …(1)

เนื่องจาก ถ้า A เป็นจำนวนจริงโดย $A > 0$ แล้ว $A+\frac{1}{A} \geq 2$

และ $A+\frac{1}{A}=2$ ก็ต่อเมื่อ $A = 1$

จาก $x^6 > 0$, $x^4 > 0$, $x^2 > 0$ จะได้

$x^6+\frac{1}{x^6} \geq 2, x^4+\frac{1}{x^4} \geq 2, x^2+\frac{1}{x^2} \geq 2$

และ $x^6+\frac{1}{x^6}=2$ เมื่อ $x = 1$ $(x > 0)$, $x^4+\frac{1}{x^4}=2$ เมื่อ $x = 1$

$(x > 0)$, $x^2+\frac{1}{x^2}=2$ เมื่อ $x = 1$ $(x > 0)$

ดังนั้น $x^6+\frac{1}{x^6}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2} \leq 6$ …(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $x^6+\frac{1}{x^6}+x^4+\frac{1}{x^4}+x^2+\frac{1}{x^2}=6$

นั่นคือ $x = 1$ เท่านั้น

กรณี 2 ถ้า $x < 0$, จะได้ $x^9 < 0$

x^9 คูณตลอด , $x^6 + x^4 + x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} \geq 7$

แต่จาก (2) $x^6 + \frac{1}{x^6} + x^4 + \frac{1}{x^4} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq 6$

สำหรับทุกๆ จำนวน จริง $x \neq 0$ นั่นคือ $x \in R$ แต่ $x < 0$ ดังนั้น $x < 0$

จากกรณี 1 และกรณี 2 จะได้เซตคำตอบของอสมการคือ $(-\infty, 0) \cup \{1\}$

5. แนวคิด จากการที่ อนุกรม P

$\frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \frac{1}{4^P} + \ldots$ หาผลบวกได้เมื่อ $P > 1$

ให้ $$P_7 = \frac{1}{1^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} + \ldots \quad \ldots(1)$$

ได้ $$\frac{P_7}{2^7} = \frac{1}{2^7} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{6^7} + \frac{1}{8^7} + \ldots \quad \ldots(2)$$

(1)–(2) , $$P_7 - \frac{P_7}{2^7} = \frac{1}{1^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \ldots \quad \ldots(3)$$

2×(3) , $$2\left(P_7 - \frac{P_7}{2^7}\right) = \frac{2}{1^7} + \frac{2}{3^7} + \frac{2}{5^7} + \frac{2}{7^7} + \ldots \quad \ldots(4)$$

(1) – (4) , $$P_7 - 2\left(P_7 - \frac{P_7}{2^7}\right) = -\frac{1}{1^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \ldots$$

$$P_7 - \left(2P_7 - \frac{P_7}{2^6}\right) = -\frac{1}{1^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{4^7} + \frac{1}{5^7} + \ldots \quad \ldots(5)$$

(5) ÷ (3) , นั่นคือ $$\frac{-1 + \frac{1}{2^7} - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{4^7} - \frac{1}{5^7} + \frac{1}{6^7} - \ldots}{1 + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} + \ldots} = \frac{P_7 - 2P_7 + \frac{P_7}{64}}{P_7 - \frac{P_7}{128}}$$

$$= \frac{-1 + \frac{1}{64}}{1 - \frac{1}{128}}$$

$$= -\frac{126}{127}$$

6. แนวคิด

จาก $\log(x^2+9)+\log(y^2+16) = \log x+\log y+\log 48$

$= \log x+\log y+\log 6+\log 8$

$= \log 6x+\log 8y$

จากสมการเดิมจะได้ $x > 0$ และ $y > 0$ (นิยามฟังก์ชันลอการิธึม)

ดังนั้น $\{\log(x^2+9)-\log 6x\}+\{\log(y^2+16)-\log 8y\}=0$

$$\log\frac{x^2+9}{6x}+\log\frac{y^2+16}{8y}=0 \qquad ...(1)$$

จาก $(x-3)^2 \geq 0$ และ $(y-4)^2 \geq 0$

ได้ $x^2+9 \geq 6x$ และ $y^2+16 \geq 8y$

และเพราะว่า $x > 0, y > 0$ จะได้ว่า $\frac{x^2+9}{6x} \geq 1$ และ $\frac{y^2+16}{8y} \geq 1$

นั่นคือ $\log\frac{x^2+9}{6x} \geq 0$ และ $\log\frac{y^2+16}{8y} \geq 0$

แต่จาก (1) $\log\frac{x^2+9}{6x}+\log\frac{y^2+16}{8y}=0$

ดังนั้น $\log\frac{x^2+9}{6x}=0$ และ $\log\frac{y^2+16}{8y}=0$

แสดงว่า $x^2+9=6x$ และ $y^2+16=8y$

นั่นคือ $(x-3)^2=0$ และ $(y-4)^2=0$ ดังนั้น $x=3$ และ $y=4$

7. แนวคิด จาก $(x-y)^2 \geq 0$ ได้ $x^2+y^2 \geq 2xy$ และ $x^2+y^2=2xy$ เมื่อ $x=y$

$(y-z)^2 \geq 0$ ได้ $y^2+z^2 \geq 2yz$ และ $y^2+z^2=2yz$ เมื่อ $y=z$

$(z-x)^2 \geq 0$ ได้ $z^2+x^2 \geq 2zx$ และ $z^2+x^2=2zx$ เมื่อ $z=x$

ดังนั้น $2(x^2 + y^2 + z^2) \ge 2(xy + yz + zx)$

และ $2(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + zx)$. เมื่อ $x = y = z$

ดังนั้น $3(x^2 + y^2 + z^2) \ge (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) \ge (x + y + z)^2$

และ $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$ เมื่อ $x = y = z$

และค่าต่ำที่สุดของ $(x^2 + y^2 + z^2)$ คือ $\frac{1}{3}(x + y + z)^2$ เมื่อ $x = y = z$

จาก $xyz - x - y - z = 2$ ต้องการหาค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2 + z^2$

ซึ่งจะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = y = z$ ฉะนั้น แทน y และ z ในสมการที่กำหนด

ด้วย x จะได้ว่า $x^3 - 3x = 2$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x - 2)(x + 1)^2 = 0$$

แต่โจทย์กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $x = 2$ ทำให้ $y = 2 , z = 2$

ดังนั้นค่าต่ำสุดของ $x^2 + y^2 + z^2$ คือ $\frac{1}{3}(2+2+2)^2 = 12$

8. แนวคิด จาก $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

จะได้ว่า $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C - 3\cos A \cos B \cos C = 0$

เพราะว่า $\cos A + \cos B + \cos C = 0$

ดังนั้น $\cos^3 A + \cos^3 B + \cos^3 C = 3\cos A \cos B \cos C$ ...(1)

จาก $\cos^3 A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

จะได้ว่า $\cos^3 A = \dfrac{\cos 3A + 3\cos A}{4}$ ...(2)

ในทำนองเดียวกัน $\cos^3 B = \dfrac{\cos 3B + 3\cos B}{4}$ ...(3)

และ $\cos^3 C = \dfrac{\cos 3C + 3\cos C}{4}$ ...(4)

จาก (1) , (2) , (3) และ (4) จะได้ว่า

$$\frac{\cos 3A + 3\cos A + \cos 3B + 3\cos B + \cos 3C + 3\cos C}{4} = 3\cos A\cos B\cos C$$

แต่ $\cos A + \cos B + \cos C = 0$

ดังนั้น $\dfrac{\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C}{4} = 3\cos A\cos B\cos C$

นั่นคือ $\dfrac{\cos A\cos B\cos C}{\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C} = \dfrac{1}{12}$

9. แนวคิด จาก $y^3 + z^3 + a(y^2 + z^2) = z^3 + x^3 + a(z^2 + x^2)$

จะได้ $y^3 - x^3 + a(y^2 + z^2) - a(z^2 + x^2) = 0$

$$y^3 - x^3 + a(y^2 + z^2 - z^2 - x^2) = 0$$

$$y^3 - x^3 + a(y^2 - x^2) = 0$$

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) + a(y - x)(y + x) = 0$$

เนื่องจาก $y \neq x$ ฉะนั้น $y - x \neq 0$

ดังนั้น $y^2 + xy + x^2 + a(y + x) = 0$ ...(1)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $z^2 + yz + y^2 + a(z + y) = 0$ ...(2)

(1) – (2) ; $x^2 - z^2 + y(x - z) + a(x - z) = 0$

$$(x + y + z + a)(x - z) = 0$$

$$(x + z + y + a)(x - z) = 0$$

เนื่องจาก $x \neq z$ ฉะนั้น $x - z \neq 0$ ทำให้ได้ว่า $x + y + z + a = 0$

10.แนวคิด แทน m ด้วย 2 จะได้ว่า $(2-1)^2$ หาร $2^{2-1}-1=1$

แสดงว่าปัญหาจริงเมื่อ m = 2

สำหรับกรณี m > 2 พิจารณาดังนี้

$m^{m-1}-1=(m-1)(m^{m-2}+m^{m-3}+\ldots\ldots+m+1)$

$=(m-1)((m-1+1)^{m-2}+(m-1+1)^{m-3}+\ldots\ldots+(m-1+1)+1$

โดยทฤษฎีบททวินามจะได้ว่า

$((m-1)+1)^{m-2} = k_{m-2}(m-1)+1$, สำหรับบาง $k_{m-2}\in I$

$((m-1)+1)^{m-3} = k_{m-3}(m-1)+1$, สำหรับบาง $k_{m-3}\in I$

$\vdots$

$(m-1)+1 = (m-1)+1$

$1 = 1$

ดังนั้น $m^{m-2}+m^{m-3}+\ldots.+m+1$

$=(m-1)(k_{m-2}+k_{m-3}+\ldots.+1)+\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{m\text{-}2\text{ ตัว}}+1$

$=(m-1)(k_{m-2}+k_{m-3}+\ldots.+1)+(m-1)$

$=(m-1)(k_{m-2}+k_{m-3}+\ldots.+1+1)$

แสดงว่า $(m-1)^2$ หาร $m^{m-1}-1$ ลงตัวเมื่อ m > 1

11.แนวคิด จาก $a+b+c=6$ จะได้ $(a+b+c)^2=6^2$

หรือ $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)= 36$

หรือ $8+2(ab+bc+ca) = 36$

ดังนั้น $ab + bc + ca = 14$ ...(1)

$(1)^2$ ได้ $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2(ab^2c + bc^2a + ca^2b) = 196$

หรือ $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 2abc\,(b + c + a) = 196$

หรือ $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 + 12\,abc = 196$ ...(2)

จาก $a^2 + b^2 + c^2 = 8$ จะได้ว่า $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 8^2$

หรือ $a^4 + b^4 + c^4 + 2\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 64$ ...(3)

เนื่องจาก

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ ...(4)

ดังนั้น $10 - 3abc = 6\,(8 - 14)$

$$abc = \frac{46}{3}$$

จาก (2) จะได้ว่า $(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = 196 - (12 \times \frac{46}{3}) = 12$ ...(5)

จาก (5) และ (3) จะได้ว่า $a^4 + b^4 + c^4 = 64 - (2 \times 12) = 40$ ...(6)

ในทำนองเดียวกับ (4) จะได้ว่า

$a^6 + b^6 + c^6 - 3a^2b^2c^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)$

แทนค่าต่าง ๆ ที่หาไว้ จะได้ว่า $a^6 + b^6 + c^6 = 8(40 - 12) + 3(\frac{46}{3})^2 = \frac{2788}{3}$

ดังนั้น $3(a^6 + b^6 + c^6) = 2788$

12.แนวคิด $|\,x\,| < 1 \leftrightarrow x^2 < 1 \leftrightarrow x^2 - 1 < 0$

$|\,y\,| < 1 \leftrightarrow y^2 < 1 \leftrightarrow y^2 - 1 < 0$

$|\,y\,| < 1 \leftrightarrow z^2 < 1 \leftrightarrow z^2 - 1 < 0$

ดังนั้น $(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)<0$

$\leftrightarrow\quad (x^2y^2-y^2-x^2+1)(z^2-1)<0$

$\leftrightarrow\quad x^2y^2z^2-y^2z^2-x^2z^2+z^2-x^2y^2+y^2+x^2-1<0$

$\leftrightarrow\quad x^2y^2z^2+x^2+y^2+z^2<x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+1$

$\leftrightarrow\quad x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+x^2y^2z^2$

$\qquad <x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z)^2+x^2y^2z^2<x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z)^2+2(x+y+z)xyz+x^2y^2z^2$

$\qquad <x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2(x+y+z)xyz+2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z+xyz)^2<x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2x^2yz+2xy^2z+2xyz^2$

$\qquad\qquad +2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z+xyz)^2<x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+2(xy)(zx)+2(xy)(yz)$

$\qquad\qquad +2(yz)(zx)+2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z+xyz)^2<(xy+yz+zx)^2+2(xy+yz+zx)+1$

$\leftrightarrow\quad (x+y+z+xyz)^2<(xy+yz+zx+1)^2$

$\leftrightarrow\quad \left(\dfrac{x+y+z+xyz}{xy+yz+zx+1}\right)^2<1$

$\leftrightarrow\quad \left|\dfrac{x+y+z+xyz}{xy+yz+zx+1}\right|<1$

$\leftrightarrow\quad \dfrac{|x+y+z+xyz|}{|xy+yz+zx+1|}<1$

13.แนวคิด จาก $\underbrace{444...44}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{888..8}_{n-1\text{ ตัว}}9 = \underbrace{444...44}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{888...8}_{n\text{ ตัว}} + 1$

$$= \{(\underbrace{444...4}_{n\text{ ตัว}}\times 10^{n}) + \underbrace{888...8}_{n\text{ ตัว}}\} + 1 = \underbrace{111...1}_{n\text{ ตัว}}\{(4\times 10^{n}) + 8\} + 1$$

$$= \underbrace{111...1}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{4000...0}_{n\text{ ตัว}}8 + 1 = \underbrace{111...1}_{n\text{ ตัว}}\{6\times(\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}8)\} + 1$$

$$= \underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}\{\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}8\} + 1 = \underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}\{\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}} + 2\} + 1$$

$$= (\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}})^{2} + 2(\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}) + 1 = (\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}} + 1)^{2}$$

$$= (\underbrace{666...6}_{n\text{ ตัว}}7)^{2}$$

นั่นคือแสดงว่ามีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $m^{2} = \underbrace{444...44}_{n\text{ ตัว}}\underbrace{888..8}_{n-1\text{ ตัว}}9$

14.แนวคิด พิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ให้ P(n) แทน $A^{n} = 6^{n-1}A$

เมื่อ n = 1 P(1) คือ $a_{1} = 6^{1-1}A = A$ จริง

ให้ P(k) เป็นจริง คือ ให้ $A^{k} = 6^{k-1}A$

พิจารณา P(k+1) ต้องแสดงว่า $A^{k+1} = 6^{(k+1)-1}A = 6^{k}A$

จาก $A^{k+1} = A^{k}A = (6^{k-1}A)A$

ได้ $A^{k+1} = 6^{k-1}A^{2}$ ...(1)

เนื่องจาก $A^{2} = AA = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1(1)+2(1)+3(1) & 1(2)+2(2)+3(2) & 1(3)+2(3)+3(3) \\ 1(1)+2(1)+3(1) & 1(2)+2(2)+3(2) & 1(3)+2(3)+3(3) \\ 1(1)+2(1)+3(1) & 1(2)+2(2)+3(2) & 1(3)+2(3)+3(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}$$

$$= 6\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^2 = 6A$ แทนค่าใน (1) , $A^{k+1} = A^{k-1}6A$ นั่นคือ $A^{k+1} = 6^k A$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า $A^n = 6^{n-1}A$ ทุกจำนวนเต็มบวก n

15.ตอบ 15

แนวคิด พิจารณา $|x^2-1| = x^2-1$ เมื่อ $x \geq 1$ หรือ $x \leq -1$

$= 1-x^2$ เมื่อ $-1 \leq x \leq 1$

และ $|x^3-1| = x^3-1$ เมื่อ $x \geq 1$

$= 1-x^3$ เมื่อ $x \leq 1$

เมื่อ $x \to 1^+$ ได้ $x > 1$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{|x^2-1|+|x^3-1|}{\sqrt[3]{x-2}+1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x^2-1)+(x^3-1)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)+(x-1)(x^2+x+1)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\{(x-2)+1\}(x^2+2x+2)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\{(\sqrt[3]{x-2})^3+1^3\}(x^2+2x+2)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(\sqrt[3]{x-2}+1)\{(\sqrt[3]{x-2})^2-\sqrt[3]{x-2}+1\}(x^2+2x+2)}{\sqrt[3]{x-2}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \left\{\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2-\sqrt[3]{x-2}+1\right\}(x^2+2x+2)$$

$$= \left\{\left(\sqrt[3]{1-2}\right)^2-\sqrt[3]{1-2}+1\right\}(1^2+2(1)+2)$$

$$= (1+1+1)(1+2+2)$$

$$= 15$$

16.ตอบ คู่อันดับมี 4 คู่ คือ (3 , 12) , (4 , 8) , (6 , 6) และ (10 , 5)

แนวคิด ให้ $A = \log(mn)$, $B = \log(2m+4n) - \log(\pi mn)$, $C = \log\pi$

พิจารณา
$$A+B+C = \log(mn) + \log(2m+4n) - \log(\pi mn) + \log\pi$$
$$= \log\left(\frac{mn\cdot(2m+4n)\cdot\pi}{\pi mn}\right)$$
$$= \log(2m+4n)$$

ดังนั้นเขียนสมการในรูป A , B และ C ; $\frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=\frac{1}{A+B+C}$

ABC คูณตลอด , $BC + AC + AB = \frac{ABC}{A+B+C}$

$$(A+B+C)(BBC+AC+AB) = ABC$$
$$3ABC+A^2C+A^2B+B^2C+AB^2+BC^2+AC^2 = ABC$$
$$2ABC+A^2C+A^2B+B^2C+AB^2+BC^2+AC^2 = 0$$
$$(A^2B+ABC)+(A^2C+AC^2)+(ABC+BC^2)+(AB^2+B^2C) = 0$$
$$AB(A+C)+AC(A+C)+BC(A+C)+B^2(A+C) = 0$$
$$(A+C)(AB+AC+BC+B^2) = 0$$
$$(A+C)\{A(B+C)+B(C+B)\} = 0$$
$$(A+C)(B+C)(A+B) = 0$$

ดังนั้น $A = -C$ หรือ $B = -C$ หรือ $A = -B$

พิจารณา $A = -C$ ได้

$$\log(mn) = -\log\pi$$

$$\log(mn) = \log\frac{1}{\pi}$$

$$mn = \frac{1}{\pi}$$

แต่ $m, n \in I^+$ ดังนั้น $A \neq -C$

พิจารณา $B = -C$ ได้

$$\log(2m+4n) - \log(\pi mn) = -\log\pi$$

$$\log\left(\frac{2m+4n}{\pi mn}\right) = \log\left(\frac{1}{\pi}\right)$$

$$\frac{2m+4n}{\pi mn} = \frac{1}{\pi}$$

$$2m+4n = mn$$

$$4n = mn - 2m$$

$$4n = m(n-2)$$

$$m = \frac{4n}{n-2} \qquad \ldots(1)$$

เนื่องจาก $m \in I^+$ ดังนั้น $n-2 \mid 4n$ หรือ $n-2 \mid 4(n-2)+8$

แต่ $n-2 \mid 4(n-2)$ ดังนั้น $n-2 \mid 8$

พิจารณา $n \in I^+$ ซึ่ง $n-2 \mid 8$ จะได้ว่า $n \in \{1, 3, 4, 6, 10\}$

แทนค่า ด้วย 1 , 3 , 4 , 6 , 10 ใน (1)

ได้ m เป็น –4 , 12 , 8 , 6 , 5 ตามลำดับ แต่ $m, n \in I^+$

ดังนั้นคู่อันดับ (m , n) ที่ใช้ได้คือ (3 , 12) , (4 , 8) , (6 , 6) , (10 , 5)

พิจารณา $A = -B$ ได้

$$\log(mn) = \log(\pi mn) - \log(2m+4n)$$

$$\log(mn) = \log\left(\frac{\pi mn}{2m+4n}\right)$$

$$mn = \frac{\pi mn}{2m+4n}$$

$$2m+4n = \pi$$

แต่ $m , n \in I$ ดังนั้น $A \neq -B$ สรุป $B = -C$ เท่านั้น

นั่นคือ คู่อันดับ (m , n) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{\log(mn)}+\frac{1}{\log(2m+4n)-\log(\pi mn)}+\frac{1}{\log\pi}=\frac{1}{\log(2m+4n)}$$ โดย $m , n \in I^+$

คือ $(3 , 12) , (4 , 8) , (6 , 6) , (10 , 5)$

17.ตอบ มีคู่อันดับเดียวคือ $(3 , 4)$

แนวคิด จาก $2(n!) = m!(m!+2)$

เนื่องจาก $m!+2 > 2$ (เพราะว่า $m! > 0$)

ได้ $m!(m!+2) > 2(m!)$

$2(n!) > 2(m!)$

$n! > m!$

ดังนั้น $n > m$

ให้ $n = m+k , k \in I^+$

จะได้ว่า $2(m+k)! = m!(m!+2)$

กรณี 1. ถ้า $k = 1$ $2(m+1)! = m!(m!+2)$

$$2(m+1)m! = m!(m!+2)$$

$$2m+2 = m!+2$$

$$2m = m!$$

$$2m = m(m-1)!$$

$$(m-1)! = 2 . 1 = 2!$$

$m-1 = 2 , m = 3$ และ $n = m+1 = 3+1 = 4$

กรณี 2. ถ้า $k \geq 2$ $2(m+k)! = m!(m!+2)$

$2(m+k)(m+k-1)\ldots(m+1).m! = m!(m!+2)$

$2(m+k)(m+k-1)\ldots(m+1) = m!+2$

จะเห็นได้ว่า เมื่อ $k \geq 2$ ทางฝั่งซ้ายของสมการจะมีวงเล็บคูณกันตั้งแต่ 2 วงเล็บขึ้นไปซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกคูณกันตั้งแต่ 2 จำนวนขึ้นไปและเรียงกันด้วย

เนื่องจากเมื่อนำจำนวนเต็ม 2 จำนวนเรียงกันมาคูณกันจะหารด้วย 2 ลงตัวเสมอ

ดังนั้น $2(m+k)(m+k-1)\ldots(m+1)$ เมื่อ $k \geq 2$ หารด้วย 4 ลงตัว

ดังนั้น $m!+2$ หารด้วย 4 ลงตัวด้วย

พิจารณาค่าของ $m!$ เมื่อ $m \geq 4$ จะได้ว่า $4 \mid m!$

ดังนั้น 4 หาร $m! + 2$ เหลือเศษ 2 ดังนั้น เมื่อ $m \geq 4$ จะเป็นไปไม่ได้

ต่อไปพิจารณา $m < 4$, $m \neq 3$ คือ m มีค่า 0 , 1 หรือ 2

จะได้ $m = 2$ เท่านั้นจึงทำให้ $4 \mid m!+2$

แทนค่า $m= 2$ ในสมการ $2(n!) = m!(m!+2)$ ได้

$$2(n!) = 2!(2!+2)$$

$$2(n!) = 8$$

$$n! = 4$$

ดังนั้น หาค่า n ไม่ได้

และที่ไม่พิจารณา $m = 3$ เพราะ $m = 3$ เป็นคำตอบในกรณี 1 แล้ว

นั้นคือ จะมีเพียงคู่อันดับเดียวกันคือ (3 , 4) ที่เป็นคำตอบของสมการ

18.ตอบ $a = 2 , b = 3 , c = 5$

แนวคิด $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1) = (ab^2c - bc - ab + 1)(ca - 1)$

$$= a^2b^2c^2 - ab^2c - abc^2 + bc - a^2bc + ab + ca - 1$$

$$= abc(abc - a - b - c) + ab + bc + ca - 1$$

เนื่องจาก abc หาร $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)$ ลงตัว

ดังนั้น abc หาร $ab + bc + ca - 1$ ลงตัวด้วย

ให้ $ab + bc + ca - 1 = kabc$

โดยที่ k ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก โดยเงื่อนไข $1 < a < b < c$

ได้ $k = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}$ …(1)

จาก $1 < a < b < c$ และ a , b , c เป็นจำนวนเต็มทำให้ได้ว่า $a \geq 2 , b \geq 3 , c \geq 4$

ดังนั้น $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}, \frac{1}{c} \leq \frac{1}{4}$ และ $\frac{1}{abc} \leq \frac{1}{24}$

จาก (1) ทำให้ได้ว่า $k \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{24}$ หรือ $k \leq \frac{25}{24}$

แต่ k เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $k = 1$ ทำให้ $ab + bc + ca - 1 = abc$

ซึ่งได้ $a = \frac{ab+bc+ca-1}{bc} = \frac{a}{c}+1+\frac{a}{b}-\frac{1}{bc}$ …(2)

จาก $1 < a < b < c$ จะได้ $\frac{a}{c} < 1$ และ $\frac{a}{b} < 1$ ดังนั้น $\frac{a}{c}+\frac{a}{b} < 2$

และ $\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1 < 3$ เนื่องจาก $\frac{1}{bc} \leq \frac{1}{12}$ ดังนั้น $\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1-\frac{1}{bc} < 3-\frac{1}{12}$

สรุป $\frac{a}{c}+\frac{a}{b}+1-\frac{1}{bc} < 2\frac{11}{12}$ และจาก (2) ทำให้ได้ว่า $a < 2\frac{11}{12}$

แต่ $a \geq 2$ สรุป $a = 2$ …*

แทนค่า $a = 2$ ใน $ab + bc + ca - 1 = abc$

จะได้ $2b + bc + 2c - 1 = 2bc$

$$bc - 2b = 2c - 1$$

$$b(c-2) = 2c-1$$
$$b = \frac{2c-1}{c-1}$$
$$= \frac{2(c-2)+3}{c-2}$$
$$= 2+\frac{3}{c-2} \qquad \ldots(3)$$

เนื่องจาก b เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $c-2$ หารด้วย 3 ลงตัว

ซึ่งได้ $c = 3$ หรือ $c = 5$ แต่ $c \geq 4$ สรุป $c = 5$ จาก (3) ได้ $b = 2+\frac{3}{5-2} = 3$

สรุป $a = 2$, $b = 3$, $c = 5$ เท่านั้น

19.ตอบ 99179917

แนวคิด สมมติให้ N = ABCDABCD โดย $A,B,C,D \in \{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$

ถ้าสังเกตดี ๆ จะพบว่า $ABCD \times 10001 = ABCDABCD$

นั้นก็คือ เลข 8 หลัก ที่เกิดจากเลข 4 หลักหน้า และ 4 หลักหลังเหมือนกันจะหารด้วย 10001 ได้ลงตัวเสมอ หรือ อาจใช้เหตุผลที่ว่า

$$ABCDABCD = (A\times10^7)+(B\times10^6)+(C\times10^5)+(D\times10^4)+(A\times10^3)$$
$$+(B\times10^2)+(C\times10)+D$$

จับคู่แล้วดึงตัวร่วมได้

$$ABCDABCD = (A\times10^3)(10^4+1)+(B\times10^2)(10^4+1)$$
$$+(C\times10)(10^4+1)+D(10^4+1)$$
$$= (10^4+1)((A\times10^3)+(B\times10^2)+(C\times10)+D)$$
$$= (10^4+1)ABCD$$

ดังนั้น $10^4 + 1 = 10001$ หาร ABCDABCD ลงตัว และจากโจทย์บอกว่า ให้หาเลขนี้ที่สามารถหารด้วย 28907 ได้ลงตัว

แสดงว่าเลข 8 หลักนี้สามารถหารด้วย 10001 และ 28907 ได้ลงตัวทั้งคู่

เราพบว่า $10001 = 137 \times 73$ และ $28907 = 137 \times 211$

เนื่องจาก 137 , 73 , 211 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 1001 และ 28907 คือ 137 หรือถ้าเรามองการแยกตัวประกอบของ 10001 กับ 28907 ไม่ออก เราจะใช้ขั้นตอนของยุคลิด (Euclidean Algorithm) ในการหา ห.ร.ม. ของ 10001 กับ 28907

$$28907 = 2(10001) + 8905$$

$$10001 = 1(8905) + 1096$$

$$8905 = 8(1096) + 137$$

$$1096 = 8(137)$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 10001 กับ 28907 คือ 137 ซึ่งพอเรารู้ว่า ห.ร.ม. ของ 10001 กับ 28907 คือ 137 เราก็จะแยกตัวประกอบของ 10001 กับ 28907 ได้ซึ่งก็คือ

$10001 = 73 \times 137$ และ $28907 = 211 \times 137$

จาก $ABCDABCD = 10001 \times ABCD = N$

พิจารณา
$$\frac{N}{28907} = \frac{10001 \times ABCD}{28907} = \frac{73 \times 137 \times ABCD}{211 \times 137} = \frac{73 \times ABCD}{211}$$

ดังนั้น
$$N = 28907 \times \left[\frac{73 \times ABCD}{211}\right]$$

เราต้องการหา N ที่มีค่ามากที่สุด ซึ่งถ้าดูแล้ว $ABCD < 10000$

เราก็ต้องหา ABCD ที่มากที่สุด ซึ่งหารด้วย 211 ลงตัว

ดังนั้น เราพิจารณา $\frac{10000}{211} = 47.39$

นั่นก็คือ เราเลือก ABCD $= 211 \times 47$

ดังนั้น ABCD $= 9917$

และก็จะได้คำตอบแล้วว่า ตัวเลข 8 หลัก ที่ต้องการหาก็คือ 99179917

สรุป N ที่มากที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์คือ 99179917

(**หมายเหตุ** : ถ้าโจทย์ต้องการ N ที่น้อยที่สุด ก็จะหาได้ทำนองเดียวกัน โดย N ที่น้อยที่สุด คือ 10551055 โดยใช้เงื่อนไข ABCD ≥ 1000 และ พิจารณาค่าของ $\frac{10000}{211}$)

20. ตอบ $m = 7786177$

แนวคิด ให้ $m = 77xyz77$

เนื่องจาก 31 และ 53 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น 31×53 หาร m ลงตัวด้วย

ถ้าให้ k เป็นผลการหาร m ด้วย $31 \times 53 = 1643$

นั่นคือ $k = m \div 1643$ ดังนั้น $k \times 1643 = m$

เรารู้ว่าหลักหน่วยของ m เป็น 7 แสดงว่า k ต้องมีหลักหน่วยเป็น 9 เท่านั้น โจทย์บอกอีกว่าหลักสิบของ m ต้องเป็น 7 เราจะลองหาดูว่าหลักหน่วยและหลักสิบของ k เป็นอะไรบ้างที่คูณกับ 1643 แล้วจะให้หลักสิบและหลักหน่วยเป็น 77 โดยคูณ 1643 กับ 09 , 19 , 29 , ... , 89 , 99 ดู (เพราะเรารู้แล้วว่าหลักหน่วยของ k เป็น 9) จะพบว่า 39 เท่านั้นที่ให้สองหลักท้ายเป็น 77

ต่อไปเนื่องจากโจทย์บอกว่าหลักล้านและหลักแสนก็เป็น 77 และจาก

$$7700077 \div 1643 = 4686.5958...$$

$$7799977 \div 1643 = 4747.3992...$$

เพราะว่า xyz น้อยสุด และมากสุดเป็น 000 และ 999 ตามลำดับ ดังนั้น เราก็จะรู้ว่าผลหาร k จะเป็นค่าระหว่าง 4686 และ 4747 และเราก็รู้แล้วว่าสองตัวสุดท้ายของ k เป็น 39 แสดงว่า $k = 4739$ นั่นก็คือ $m = 1643 \times 4739 = 7786177$

21. ตอบ $m = 3\underbrace{999...99}_{n+1\text{ ตัว}}$

แนวคิด จาก

$$15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2\underbrace{000...0}_{n\text{ ตัว}}1 = 15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2\ \underbrace{000...0}_{n+1\text{ ตัว}} + 1$$

$$= (15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2 \times 10^{n+1}) + 1 \qquad ...(1)$$

เนื่องจาก $15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2 = (15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}} \times 10^{2}) + 92$

ดังนั้น $15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2 = 4\{(15\underbrace{999...9}_{n-1\text{ ตัว}} \times 25 + 23\}$

แทนใน (1) ,

$$15\underbrace{99...9}_{n\text{ ตัว}}2\underbrace{000...0}_{n\text{ ตัว}}1 = \left\{4 \times \left\{\left(15\underbrace{99..9}_{n-1\text{ ตัว}} \times 25\right) + 23\right\} \times 10^{n+1}\right\} + 1$$

$$= \left\{4 \times 10^{n+1}\right\}\left\{\left(15\underbrace{99...9}_{n-1\text{ ตัว}} \times 25\right) + 23\right\} + 1$$

$$= \left\{4 \times 10^{n+1}\right\}\left\{\left(15\underbrace{99...9}_{n-1\text{ ตัว}} \times 25\right) + 25 - 2\right\} + 1$$

$$= \left\{4 \times 10^{n+1}\right\}\left[\left\{25\left(15\underbrace{99...9}_{n-1\text{ ตัว}} + 1\right)\right\} - 2\right] + 1$$

$$= \left\{4\times10^{n+1}\right\}\left\{25\left(16\underbrace{00\ldots0}_{n-1\text{ ตัว}}\right)-2\right\}+1$$

$$= \left\{4\times10^{n+1}\right\}\left\{(25\times16\times10^{n-1})-2\right\}+1$$

$$= \left\{4\times10^{n+1}\right\}\left\{(400\times10^{n-1})-2\right\}+1$$

$$= \left\{4\times10^{n+1}\right\}\left\{(4\times10^{n+1})-2\right\}+1$$

$$= \left[4\times10^{n+1}\right]^2-2\left[4\times10^{n+1}\right]+1$$

$$= \left[\left(4\times10^{n+1}\right)-1\right]^2$$

$$= \left(3\underbrace{999..9}_{n+1\text{ ตัว}}\right)^2 = m^2$$

ดังนั้น มีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $m^2 = 15\underbrace{99\ldots99}_{n\text{ ตัว}}2\,\underbrace{00\ldots01}_{n\text{ ตัว}}$

22.แนวคิด เพราะว่าเหรียญเก๊เบากว่าเหรียญจริงอยู่เหรียญละ 1 กรัม นั่นก็คือ เรานำเหรียญจากแต่ละถุงในจำนวนที่ต่างกัน มาชั่งรวมกันในครั้งเดียว ก็น่าจะหาคำตอบได้ และเพื่อให้จำนวนของเหรียญน้อยที่สุดในการชั่งเราจะคิดเป็นขั้น ๆ ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ถุงแรกจะไม่เอาสักเหรียญ

ขั้นที่ 2 จากถุงที่สองเอาออกมา 1 เหรียญ จากถุงที่ 3 เอาออกมา 2 เหรียญ

ขั้นที่ 3 ส่วนถุงที่ 4 นั้น จะเอาแค่ 3 เหรียญไม่ได้ เพราะถ้าเมื่อชั่งแล้วน้ำหนักขาดไป 3 กรัม เราจะบอกไม่ได้ว่า ถุง 2 กับถุง 3 เก๊ หรือถุง 4 กับถุงแรกเก๊กันแน่ นั่นคือ จากถุงที่ 4 นั้นต้องเอาออกมา 4 เหรียญ

ขั้นที่ 4 ในทำนองเดียวกัน ถุงที่ 5 จะเอาแค่ 5 เหรียญหรือ 6 เหรียญไม่ได้ จะต้อง 7 เหรียญ

ถุงที่ 1	ถุงที่ 2	ถุงที่ 3	ถุงที่ 4	ถุงที่ 5
❶	❷	❸	❹	❺
0 เหรียญ	1 เหรียญ	2 เหรียญ	4 เหรียญ	7 เหรียญ

สรุปแล้วก็คือ จำนวนที่น้อยที่สุดโดยจะหาคำตอบได้คือต้องเอาเหรียญออกมาทั้งหมดเท่ากับ $0+1+2+4+7 = 14$ เหรียญ ซึ่งน้ำหนักที่ควรจะเป็น (ถ้าเราคิดว่าเหรียญที่เอาออกมาทั้งหมดเป็นเหรียญจริง) คือ $14 \times 50 = 700$ กรัม จะได้ว่าน้ำหนักที่ชั่งจะต้องน้อยกว่า 700 กรัม เสมอ

สมมติว่า ถ้าชั่งแล้วน้ำหนักเป็น 695 น้ำหนักจะขาดไป 5 กรัม ซึ่งทำให้เราสรุปได้ว่า ถุงที่ 2 และถุงที่ 4 เป็นเหรียญเก๊

ทำนองเดียวกันกับกรณีที่ต่างออกไปเราก็จะสามารถบอกได้ว่า 2 ถุงไหนเป็นถุงเก๊ โดยดูจากน้ำหนักที่ขาดหายไป และพิจารณาจากแผนภาพ จะสังเกตว่าน้ำหนักที่ขาดหายไปจะเป็น 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 11 กรัม เท่านั้น

23. ตอบ 9

แนวคิด ให้ $x = 3^{10000}$

ดังนั้น $\log x = \log 3^{10000} = 10000 \log 3 \approx 0.4771 \times 1000$

แสดงว่า $\log x \approx 4771$ หรือ $x \approx 10^{4771}$

ดังนั้น สรุปได้ว่า x เป็นจำนวนที่เขียนในระบบเชิงหลักฐานสิบแล้วมีจำนวนหลักน้อยกว่า 5000 หลักและเนื่องจากเลขโดดในแต่ละหลักมีค่าไม่เกิน 9

ดังนั้น $A < 9 \times 5000$ หรือ $A < 45,000$

นั่นคือ A เป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักไม่เกิน 5 หลัก

เนื่องจากเลขโดดในแต่ละหลักมีค่าไม่เกิน 9 ดังนั้น $B < 5 \times 9$ หรือ $B < 45$

นั่นคือ B เป็นจำนวนที่มีจำนวนหลักไม่เกิน 2 หลัก

เนื่องจากเลขโดดในแต่ละหลักมีค่าไม่เกิน 9 ดังนั้น $C < 2 \times 9$ หรือ $C < 18$

นั่นคือ $C \in [1, 18]$ พิจารณา $3^{10000} = (3^2)^{5000} = 9^{5000}$

แสดงว่า $9 \mid 3^{10000}$

และเราทราบว่า "จำนวนนับใด ๆ ที่ 9 หารลงตัว 9 จะหารผลบวกของเลขโดดจากทุกหลักของจำนวนนับนั้นลงตัวด้วย"

เนื่องจาก $9 \mid 3^{10000}$ ดังนั้น $9 \mid A$

เนื่องจาก $9 \mid A$ ดังนั้น $9 \mid B$

เนื่องจาก $9 \mid B$ ดังนั้น $9 \mid C$

ดังนั้น $C = 9$ เพราะจำนวนนับระหว่าง 1 กับ 18 ที่ 9 หารลงตัวมีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้นคือ 9

24. ตอบ 330

แนวคิด พิจารณา
$$\begin{aligned} (n+1)! - n! &= (n+1)n! - n! \\ &= n!(n+1-1) \\ &= n(n!) \qquad \ldots(*) \end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 1(1!) &= 2! - 1! \\ 2(2!) &= 3! - 2! \end{aligned}$$

$$3(3!) = 4! - 3!$$

$$4(4!) = 5! - 4!$$

$$\vdots$$

$$1995(1995!) = 1996! - 19995!$$

$$1996(1996!) = 1997! - 1996!$$

แสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + 1995(1995!) + 1996(1996!) = 1997! - 1$

นั่นคือ $0! + 1(1!) + 2(2!) + 3(33!) + \ldots + 1995(1995!) + 1996(1996!)$

$$= 1997! - 1 + 0!$$

$$= 1997!$$

สรุป $N = 1997!$

พิจารณาค่าของ 189 โดยหลักการมีตัวประกอบชุดเดียวได้

$$189 = 3^3 \times 7 \qquad \ldots(*)$$

เนื่องจาก $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 1996 \times 1997 \qquad \ldots(1)$

ต้องการหาค่า k ที่มากที่สุด ที่ทำให้ $(189)^k \mid N$

ต้องนำ 3^3 มาคูณกับ 7 จึงจะได้ 189 1 ตัว และเนื่องจาก 3 และ 7 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้นเราจะหาว่า $3^a \mid N$ a มากที่สุดเท่าใด

และ $7^b \mid N$ b มากที่สุดเท่าใด

ถ้าเราให้ $\lfloor a \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ a

พิจารณา ตัวประกอบของ N ใน (1) ที่หารด้วย 3 ลงตัว คือ

$3, 6, 9, 12, \ldots, 1995 \qquad \ldots(2)$

จะเห็นว่า แต่ละตัว 3 หารลงตัว ดังนั้น เราจะได้ 3 ในกรณีนี้

เท่ากับ $\left\lfloor \frac{1997}{3} \right\rfloor = 655$ ตัว

แต่จำนวนดังกล่าวใน (2) มีบางตัวหารด้วย 3^2 ลงตัว ในกรณีนี้เราจะได้ 3 เพิ่มขึ้นอีก เท่ากับ $\left\lfloor \frac{1997}{3^2} \right\rfloor = 221$ ตัว

แต่จำนวนดังกล่าวใน (2) มีบางตัวหารด้วย 3^2 ลงตัว ในกรณีนี้เราจะได้ 3 เพิ่มขึ้นอีกเท่ากับ $\left\lfloor \frac{1997}{3^3} \right\rfloor = 73$ ตัว

$\vdots$

ตามหลักการข้างต้น ทำให้เราได้

$$\begin{aligned} a &= \left\lfloor \frac{1997}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{3^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{3^5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{3^6} \right\rfloor \\ &= 665 + 221 + 73 + 24 + 8 + 2 \\ &= 993 \end{aligned}$$

ทำนองเดียวกัน เราได้ $b = \left\lfloor \frac{1997}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1997}{7^3} \right\rfloor$

ดังนั้น จาก $N = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times 1996 \times 1997$

เราสามารถดึง 3 ออกมาได้มากที่สุด 993 ตัวและสามารถดึง 7 ออกมาได้มากที่สุด 330 ตัวซึ่งเราต้องหาค่า k ที่มากที่สุด ซึ่ง $(189)^k \mid N$ แต่การจะได้ 189 และแต่ละตัวจะต้องประกอบด้วย 3 จำนวน 3 ตัวและ 7 จำนวน 1 ตัว

นั่นคือ 3^3 มีทั้งหมดเท่ากับ $\left\lfloor \frac{993}{3} \right\rfloor = 331$ ชุดและ 7 มีทั้งหมด 330 ตัว

แต่ต้องนำมาประกบกันจึงจะเท่ากับ 189 แต่ละตัว ซึ่งจะเห็นได้ว่าชุดของ 7 หมดก่อน (330×331)

สรุป นั่นคือ ค่า k ที่มากที่สุดที่ทำให้ N หารด้วย $(189)^k$ ลงตัวคือ 330

หมายเหตุ เพื่อเป็นประโยชน์ในการทำโจทย์ในแนวนี้จึงขอเสนอขั้นตอนการคิดดังนี้

การหาค่า k ที่มากที่สุด ที่ทำให้ $m^k \mid N!$

กำหนดให้ $\lfloor a \rfloor$ คือ จำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a

กรณี 1 m เป็นจำนวนเฉพาะ

จะได้ k ที่มากที่สุด = $\left\lfloor \frac{N}{m} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{m^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{m^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{m^4} \right\rfloor + \ldots$

กรณี 2 m เป็นจำนวนประกอบ มีขั้นตอนดังนี้

1. ใช้หลักการมีตัวประกอบชุดเดียว

   เขียน m ในรูป $P_1^{\alpha_1} . P_2^{\alpha_2} . P_3^{\alpha_3} . \ldots . P_n^{\alpha_n}$

   เมื่อ P_i เป็นจำนวนเฉพาะบวก (i = 1 ถึง n) และ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ เป็นเลขชี้กำลังซึ่งเป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

2. หาค่าของ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$A_1 = \left\lfloor \frac{N}{P_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_1)^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_1)^3} \right\rfloor + \ldots$$

$$A_2 = \left\lfloor \frac{N}{P_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_2)^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_3)^3} \right\rfloor + \ldots$$

$$A_3 = \left\lfloor \frac{N}{P_3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_3)^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_3)^3} \right\rfloor + \ldots$$

$$\vdots$$

$$A_n = \left\lfloor \frac{N}{P_n} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_n)^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{(P_n)^3} \right\rfloor + \ldots$$

3. หาค่าของ $\left\lfloor \frac{A_1}{\alpha_1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{A_2}{\alpha_2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{A_3}{\alpha_3} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{A_n}{\alpha_n} \right\rfloor$

4. จากข้อ 3. ค่าไหนที่น้อยที่สุด ค่านั้นจะเป็นค่า k ที่มากที่สุด

25.ตอบ ไม่มี

แนวคิด จาก $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$

ให้ M และ N เป็นจำนวนเต็มจะได้ว่า

$$f(M) = M^n + a_{n-1}M^{n-1} + a_{n-2}M^{n-2} + \ldots + a_1M + a_0$$

$$f(N) = N^n + a_{n-1}N^{n-1} + a_{n-2}N^{n-2} + \ldots + a_1N + a_0$$

ดังนั้น $f(M) - f(N) = (M^n - N^n) + a_{n-1}(M^{n-1} - N^{n-1}) + \ldots + a_1(M - N)$

เนื่องจาก $(M - N) \mid (M^k - N^k)$ ทุกจำนวนเต็มบวก k

ดังนั้น $(M - N) \mid (f(M) - f(N))$ ...(1)

สมมติมี n ซึ่ง $f(n) = 2539$ ...(2)

จาก (1) และ (2) และสิ่งที่กำหนดให้ $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{10}) = 1996$

จะได้ว่า $(n - x_1) \mid (2539 - 1996)$

$(n - x_2) \mid (2539 - 1996)$

: :

$(n - x_{10}) \mid (2539 - 1996)$

แสดงว่า $n - x_1, n - x_2, n - x_3, \ldots, n - x_{10}$ เป็นจำนวนเต็มที่ต่างกันสิบจำนวนที่เป็นตัวประกอบของ $2539 - 1996 = 543$

แต่ $543 = 3\times181$ และ 3 และ 181 ต่างเป็นจำนวนเฉพาะ

ฉะนั้นมีจำนวนเต็มต่าง ๆ กันเพียง 8 ตัวเท่านั้นที่หาร 543 ลงตัวคือ ±1, ±543, ±3, ±181

ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่จะมี n ที่ $f(n) = 2539$

26. พิสูจน์จะต้องพิสูจน์ว่า $\underbrace{111...11}_{n\text{ ตัว}}$ โดย n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 ไม่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

สมมุติว่ามีจำนวนนับ A ซึ่ง $A^2 = \underbrace{111...11}_{n\text{ ตัว}}$

จะเห็นว่าเลขโดดที่หลักหน่วยของ A มีได้เพียง 2 ตัวเท่านั้นคือ 1 กับ 9

ดังนั้นมีจำนวนนับ k หรือ p ที่ทำให้ $A = 10k + 1$ หรือ $A = 10p + 9$

กรณี 1 $A = 10k + 1$

$$A = 100k^2 + 20k + 1$$

จะเห็นว่าหลักสิบของ $100k^2$ คือ 0 หลักสิบของ 20k เป็นจำนวนคู่

ดังนั้นหลักสิบของ $100k^2 + 20k + 1$ ต้องเป็นจำนวนคู่ แต่ $A^2 = \underbrace{111...11}_{n\text{ ตัว}}$

ซึ่งมีหลักสิบเป็น 1 จึงไม่มี k ที่ $A = 10k + 1$

กรณี 2 $A = 10p + 9$

$$A = 100p^2 + 180p + 81$$

จะเห็นว่า หลักสิบของ $100p^2$ คือ 0

หลักสิบของ 180p คือจำนวนคู่

หลักสิบของ 81 คือ 8

ดังนั้นหลักสิบของ $100p^2 + 180p + 81$

เป็นจำนวนคู่ แต่ $A^2 = \underbrace{111...11}_{n\text{ ตัว}}$ มีหลักสิบเป็น 1จึงไม่มี p ที่ $A = 10p + 9$

จากทั้งสองกรณีเห็นได้ว่าในลำดับอนันต์ 11 , 111 , … ไม่มีพจน์ใดเป็นกำลังสองสมบูรณ์

27.ตอบ ± 13

แนวคิด ให้ $A = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $B = \frac{y}{b} + \frac{b}{y}$ และ $C = \frac{z}{c} + \frac{c}{z}$

จะได้ $A^2 = \frac{x^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{x^2}$ $B^2 = \frac{y^2}{b^2} + 2 + \frac{b^2}{y^2}$

และ $C^2 = \frac{z^2}{c^2} + 2 + \frac{c^2}{z^2}$

จาก $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 163$

จะได้ว่า $A^2 - 2 + B^2 - 2 + C^2 - 2 = 163$

ดังนั้น $A^2 + B^2 + C^2 = 169$ ...(1)

จาก $A = \frac{x}{a} + \frac{a}{x} = \frac{x^2 + a^2}{ax}$ จึงได้ว่า $\frac{1}{A} = \frac{ax}{x^2 + a^2}$

ในทำนองเดียวกัน $\frac{1}{B} = \frac{by}{b^2 + y^2}$ และ $\frac{1}{C} = \frac{cz}{c^2 + z^2}$

ดังนั้นจาก $\frac{ax}{a^2 + x^2} + \frac{by}{b^2 + y^2} + \frac{cz}{c^2 + z^2} = 0$

จะได้ว่า $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} = 0$ หรือ $AB + BC + CA = 0$ ...(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $A^2 + B^2 + C^2 + 2(AB + BC + CA) = 169$

หรือ $(A + B + C)^2 = 169$

ดังนั้น $A + B + C = \pm 13$

นั่นคือ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} + \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \pm 13$

28.ตอบ $x = n^2 + n + 1$

แนวคิด เพราะว่า $\frac{2k}{2 + k^2 + k^4} = \frac{2k}{1 + (1 + k^2 + k^4)}$

$$= \frac{2k}{1+((1+2k^2+k^4)-k^2)}$$

$$= \frac{2k}{1+(k^2+1)^2-k^2}$$

$$= \frac{2k}{1+(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$$

$$= \frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{1+(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$$

ดังนั้น $$\arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4} = \arctan\frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{1+(k^2+k+1)(k^2-k+1)}$$

$$= \arctan(k^2+k+1)-\arctan(k^2-k+1)$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4}$$

$$= [\arctan(1^2+1+1)-\arctan(1^2-1+1)]$$

$$+ [\arctan(2^2+2+1)-\arctan(2^2-2+1)]$$

$$+ \ldots$$

$$+ [\arctan(n^2+n+1)-\arctan(n^2-n+1)]$$

เนื่องจาก $$k^2+k+1 = (k+1)^2-(k+1)+1$$

ดังนั้น จะได้ว่า $$\arctan(1^2+1+1) = \arctan(2^2-2+1)$$

$$\arctan(2^2+2+1) = \arctan(3^2-3+1)$$

$$\arctan((n-1)^2+(n-1)+1) = \arctan(n^2-n+1)$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{n}\arctan\frac{2k}{2+k^2+k^4} = -\arctan(1^2-1+1)+\arctan(n^2+n+1)$$

$$= -\arctan 1+\arctan(n^2+n+1)$$

$$= -\frac{\pi}{4}+\arctan(n^2+n+1)$$

ดังนั้น $\arctan -\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + \arctan(n^2+n+1)$

นั่นคือ $\arctan x = \arctan(n^2+n+1)$

หรือ $x = n^2+n+1$

29.แนวคิด เนื่องจากต้องการหาค่า $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$

ดังนั้นให้ $x = \frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ และ $y = \frac{b}{c}+\frac{d}{a}$ จากโจทย์ $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} = 6$

จะได้ $x + y = 6$ ...(1)

พิจารณาค่า
$$xy = (\frac{a}{b}+\frac{c}{d})(\frac{b}{c}+\frac{d}{a})$$
$$= \frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{a}+\frac{d}{b}$$

จากโจทย์จะได้ $xy = 8$ ...(2)

จาก (1) ได้ $y = 6 - x$

แทนใน (2)
$$x(6-x) = 8$$
$$6x - x^2 = 8$$
$$x^2 - 6x + 8 = 0$$
$$(x-4)(x-2) = 0$$
$$x = 2 \text{ หรือ } 4$$

ดังนั้น $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = 2$ หรือ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = 4$

30.แนวคิด เพราะว่า

$$2222^{5555} + 5555^{2222} = (2222^{5555} + 4^{5555}) + (5555^{2222} - 4^{2222}) - (4^{5555} - 4^{2222})$$

พิจารณา $2222^{5555} + 4^{5555}$ ซึ่งมี $(2222 + 4)$ เป็นตัวประกอบ

และ $2222 + 4 = 2226 = 7 \times 318$ ดังนั้น $7 \mid (2222^{5555} + 4^{5555})$

พิจารณา $5555^{2222} - 4^{2222}$ ซึ่งมี $(5555 - 4)$ เป็นตัวประกอบ

และ $5555 - 4 = 5551 = 7 \times 793$ ดังนั้น $7 \mid (5555^{2222} - 4^{2222})$

พิจารณา $4^{5555} - 4^{2222} = 4^{2222}(4^{3333} - 1)$

$$= 4^{2222}(64^{1111} - 1)$$

$$= 4^{2222}(64 - 1)(64^{1110} + 64^{1109} + \ldots + 64 + 1)$$

เนื่องจาก $63 = 7 \times 9$ ดังนั้น $7 \mid (4^{5555} - 4^{2222})$

เพราะฉะนั้น $7 \mid (2222^{5555} + 5555^{5555})$

31.แนวคิด ให้ $\arcsin x = m$ และ $\arccos x = n$

พิจารณาเรนจ์ของ $\arcsin x$ ซึ่ง $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $m + n = \frac{\pi}{2}$ ...*

จากโจทย์จะได้ $A = m^4 + m^3 n + mn^3 + n^4$

$$= m^3(m + n) + n^3(m + n)$$

$$= (m + n)(m^3 + n^3)$$

$$= \frac{\pi}{2}(m^3 + n^3)$$

$$= \frac{\pi}{2}(m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

ดังนั้น $A = \frac{\pi^2}{4}(m^2 - mn + n^2)$ ... (1)

พิจารณา ค่าของ $m^2 - mn + n^2 = (m + n)^2 - 3mn$

$$= \left(\frac{\pi^2}{4}\right) - 3m\left(\frac{\pi}{2} - m\right) \quad \text{(จาก...*)}$$

$$= 3m^2 - \frac{3\pi}{2}m + \frac{\pi^2}{4}$$

ให้ $f(m) = 3m^2 - \frac{3\pi}{2}m + \frac{\pi^2}{4}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le m \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก f มีกราฟเป็นพาราโบลาจาก $y = ax^2 + bx + c$ ให้ค่าต่ำสุดเมื่อ $a > 0$

โดยจะให้ค่าต่ำสุดเมื่อ $x = \frac{-b}{2a}$ ดังนั้น f จะมีค่าต่ำสุดเมื่อ $m = \frac{-(-\frac{3\pi}{2})}{2(3)} = \frac{\pi}{4}$

และเนื่องจากโดเมนของ f มีขอบเขตโดย $-\frac{\pi}{2} \le m \le \frac{\pi}{2}$

จะพิจารณาที่จุดปลายของโดเมน ที่ $m = \frac{\pi}{2}$ กับ $m = -\frac{\pi}{2}$

ว่าที่จุดใดทำให้เกิดค่าสูงสุด

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{3\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2 - \frac{3\pi}{2}\left(-\frac{-\pi}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4} = \frac{7\pi^2}{4}$$

ดังนั้น ที่ $m = -\frac{\pi}{2}$ ทำให้ f(m) เป็นค่าสูงสุด

จาก...(1) A เกิดค่าสูงสุด เมื่อ $m^2 - mn + n^2$ เกิดค่าสูงสุด

A เกิดค่าต่ำสุด เมื่อ $m^2 - mn + n^2$ เกิดค่าต่ำสุด

ดังนั้น ค่าสูงสุดของ A คือ $\frac{\pi^2}{4} \cdot f(\frac{-\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{7\pi^2}{4} = \frac{7\pi^2}{16}$

ค่าต่ำสุดของ A คือ $\frac{\pi^2}{4} \cdot f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4} \cdot \left(3(\frac{\pi}{4})^2 - \frac{3\pi}{2}(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^4}{64}$

นั่นคือ $\frac{\pi^4}{64} \le A \le \frac{7\pi^4}{16}$

หมายเหตุ อาจทำให้อยู่ในรูป f(n) ก็ได้ (n = arccosx) แต่ต้องพิจารณาโดเมนใหม่ โดย $0 \le n \le \pi$ เนื่องจาก $0 \le \text{arccos}x \le \pi$ ก็จะได้ผลสรุปเหมือนกัน

32.ตอบ 39996

แนวคิด ให้ $N = 3a_1a_2a_3\ldots a_n6$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$
ต้องการหา N ที่น้อยที่สุด ถ้า N = 36 เป็นไปไม่ได้ เพราะว่าผลบวกของเลขโดดของ $N \neq 6$

กรณี 1 N เป็นตัวเลข 3 หลักคือ 3a6

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $9 \leq 3 + a + 6 \leq 18$

ดังนั้น N เป็นเลข 3 หลักไม่ได้

กรณี 2 N เป็นตัวเลข 4 หลักคือ $3a_1a_26$

เนื่องจาก $9 \leq 3 + a_1 + a_2 + 6 \leq 27$

ดังนั้น N เป็นเลข 4 หลักไม่ได้

กรณี 3 N เป็นตัวเลข 5 หลักคือ $3a_1a_2a_36$

เนื่องจาก $9 \leq 3 + a_1 + a_2 + a_3 + 6 \leq 36$

และ$3 + a_1 + a_2 + a_3 + 6 = 36$ เมื่อ $a_1 = a_2 = a_3 = 9$

พิจารณาว่า 36 | 39996 หรือไม่

$36 \mid 39996 \leftrightarrow 9 \mid 39996 \wedge 4 \mid 39996$

เนื่องจาก $9 \mid a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0 \leftrightarrow 9 \mid (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$

และ $4 \mid a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0 \leftrightarrow 4 \mid a_1a_0$

เพราะว่า $9 \mid (3 + 9 + 9 + 9 + 6)$ และ $4 \mid 96$

ดังนั้น $36 \mid 39996$

นั่นคือจำนวน N ที่น้อยที่สุดซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขคือ 39996

หมายเหตุ การทดสอบว่า 36 | 39996 หรือไม่อาจทำได้โดยการตั้งหารก็ได้

33.ตอบ –5 และ –6

แนวคิด จะเห็นได้ว่าเราลองแยกตัวประกอบในรูปของ x เลย จะค่อนข้างยาก ดังนั้น เราจึงจัดรูปแบบสมการใหม่ให้กลายเป็นสมการของ a

จะได้ $a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 12x) = 0$

พิจารณา
$$\begin{aligned} x^4 - 10x^3 + 22x^2\ 12x &= x^4 - 6x^3 - 4x^3 + 22x^2\ 12x \\ &= x^3(x-6) - 2x(2x^2 - 11x - 6) \\ &= x^3(x-6) - 2x(2x+1)(x-6) \\ &= x(x-6)(x^2 - 4x - 2) \\ &= (x^2 - 6x)(x^2 - 4x - 2) \end{aligned}$$

ดังนั้นได้ $a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^2 - 6x)(x^2 - 4x - 2) = 0$

เนื่องจาก $(x^2 - 6x) + (x^2 - 4x - 2) = 2(x^2 - 5x - 1)$

ดังนั้นเราสามารถแยกตัวประกอบได้เป็น

$$\begin{aligned} a^2 - 2(x^2 - 5x - 1)a + (x^2 - 6x)(x^2 - 4x - 2) &= 0 \\ (a - x^2 + 6x)(a - x^2 + 4x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $(x^2 - 6x - a)(x^2 - 4x - 2 - a) = 0$

เนื่องจากต้องการคำตอบเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน 3 ค่า ดังนั้นพิจารณาได้ดังนี้

กรณี 1 $x^2 - 6x - a$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ได้ $(-6)^2 - 4(-a) = 0$

ดังนั้น $a = -9$

แต่เมื่อแทน $a = -9$ ใน $x^2 - 4x - 2 - a = 0$ จะได้คำตอบที่ไม่ใช่จำนวนจริง กรณีเป็นไปไม่ได้

กรณี 2 $x^2 - 4x - 2 - a$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์

ได้ $16 - 4(-2 - a) = 0$

หรือ $a = -6$

แทนในสมการ $(x^2 - 6x - a)(x^2 - 4x - 2 - a) = 0$

ได้ $(x^2 - 6x + 6)(x^2 - 4x + 4) = 0$

$$(x^2 - 6x + 6)(x - 2)^2 = 0$$

ซึ่งได้ว่าคำตอบของสมการคือ 2 , $3 \pm \sqrt{3}$ ซึ่งมี 3 ค่าที่ต่างกัน

กรณี 3 สมการ $x^2 - 6x - a = 0$ กับ $x^2 - 4x - 2 - a = 0$ จะต้องมีคำตอบซ้ำกัน 1 คำตอบ

พิจารณา $x^2 - 6x - a = 0$ ได้ $x = 3 \pm \sqrt{9+a}$

พิจารณา $x^2 - 4x - 2 - a = 0$ ได้ $x = 2 \pm \sqrt{6+a}$

สามารถแยกการแทนค่าได้ 4 กรณีคือ

กรณี 3.1 $3 + \sqrt{9+a} = 2 + \sqrt{6+a}$

$1 + \sqrt{9+a} = \sqrt{6+a}$

$1 + 2\sqrt{9+a} + 9 + a = 6 + a$

$\sqrt{9+a} = -4$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี 3.2 $3 + \sqrt{9+a} = 2 - \sqrt{6+a}$

$1 + \sqrt{9+a} + \sqrt{6+a} = -1$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

กรณี 3.3 $3 - \sqrt{9+a} = 2 + \sqrt{6+a}$

$1 - \sqrt{9+a} = \sqrt{6+a}$

$1 - 2\sqrt{9+a} + 9 + a = 6 + a$

$4 = 2\sqrt{9+a}$

$$\sqrt{9+a} = 2$$
$$9+a = 4$$
$$a = -5$$

กรณี 3.3 $3-\sqrt{9+a} = 2-\sqrt{6+a}$

$$1-\sqrt{9+a} = -\sqrt{6+a}$$
$$1-2\sqrt{9+a}+9+a = 6+a$$
$$\sqrt{9+a} = 2$$
$$a = -5$$

จากทั้ง 4 กรณีจะสรุปได้ว่า $a=-5$

ลองแทนค่า $a=-5$ ในสมการ $(x^2-6x-a)(x^2-4x-2-a) = 0$

จะได้สมการเป็น $(x^2-6x+5)(x^2-4x+3) = 0$

$$(x-5)(x-1)(x-1)(x-3) = 0$$

ซึ่งมีคำตอบเป็นจำนวนจริง 3 ค่า คือ 1 , 3 , 5

ดังนั้นจากทั้ง 3 กรณี จะมีค่า a 2 ค่า คือ –5 กับ –6 ที่ทำให้

สมการ $x^4-10x^3-2(a-11)+2(5a+6)x+2a+a^2=0$

มีคำตอบเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน 3 จำนวน

หมายเหตุ การทำกรณีที่ 3 นั้น มีแนวคิดที่ง่ายกว่าดังนี้

กรณี 3 สมการ $x^2-6x-a=0$ กับ $x^2-4x-2-a=0$ ต้องมีคำตอบซ้ำกัน 1 คำตอบ ให้คำตอบที่ซ้ำกันเป็น k

ได้ $k^2-6k-a = 0$ … (1)

และ $k^2-4k-2-a = 0$ … (2)

(1) – (2) , $-6k+4k-a-(-2-a) = 0$

$$-2k + 2 = 0$$

ดังนั้น $k = 1$

นั่นคือ คำตอบที่ซ้ำกันต้องเท่ากับ 1

แทนในสมการ $x^2 - 6x - a = 0$ หรือ $x^2 - 4x - 2 - a = 0$

ได้ $1^2 - 6(1) - a = 0$

ดังนั้น $a = -5$

นั่นคือ เราสามารถหา $a = -5$ ได้เหมือนวิธีแรกและจะง่ายกว่าด้วย

34. ข้อพิสูจน์ เราจะใช้**อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** (The arithematics mean – geometric mean inequality) ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยในการพิสูจน์ ซึ่งต้องใช้ 2 ครั้งด้วยกันเนื่องจาก อสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต กล่าวได้ว่า

สำหรับจำนวนจริงบวก $x_1, x_2, x_3, .., x_n$ โดย n เป็นจำนวนเต็มบวก

จะได้ว่า $\dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 ... x_n}$

ดังนั้นถ้าเราแทนค่า

$$x_1 = n^{\frac{n+1}{n}},\ x_2 = n^{\frac{n+2}{n+1}},\ x_3 = n^{\frac{n+3}{n+2}},\ ..,\ x_n = n^{\frac{n+n}{n+n-1}} = n^{\frac{2n}{2n-1}}$$

จะได้ว่า
$$\frac{n^{\frac{n+1}{n}} + n^{\frac{n+2}{n+1}} + n^{\frac{n+3}{n+2}} + ... + n^{\frac{2n}{2n-1}}}{n}$$
$$\geq \sqrt[n]{n^{\frac{n+1}{n}} n^{\frac{n+2}{n+1}} n^{\frac{n+3}{n+2}} ... n^{\frac{2n}{2n-1}}}$$
$$= n^{\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\frac{n+2}{n+3}+...+\frac{2n}{2n-1})}$$

และเนื่องจาก $\dfrac{n^{\frac{n+1}{n}} + n^{\frac{n+2}{n+1}} + n^{\frac{n+3}{n+2}} + ... + n^{\frac{2n}{2n-1}}}{n}$

$$= n^{\frac{n+1}{n}-1} + n^{\frac{n+2}{n+1}-1} + n^{\frac{n+3}{n+2}-1} + \ldots + n^{\frac{2n}{2n-1}-1}$$

$$= n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \ldots + n^{\frac{1}{2n-1}}$$

นั้นคือ

$$n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \ldots + n^{\frac{1}{2n-1}} \geq n^{\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\frac{n+2}{n+3}+\ldots+\frac{2n}{2n-1})} \qquad \ldots(1)$$

ต่อไปพิจารณาให้ $y_1 = \dfrac{n+1}{n}$, $y_2 = \dfrac{n+2}{n+1}$, ... , $y_n = \dfrac{2n}{2n-1}$

โดยอสมการค่าเฉลี่ยเลขคณิต – ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต จะได้ว่า

$$\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n} + \frac{n+2}{n+1} + \ldots + \frac{2n}{2n-1}) \geq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \cdot \ldots \cdot \frac{2n}{2n-1})} = \sqrt[n]{2}$$

ดังนั้น จะได้ด้วยว่า $n^{\frac{1}{n}(\frac{n+1}{n}+\frac{n+2}{n+1}+\frac{n+2}{n+3}+\ldots+\frac{2n}{2n-1})} \geq n^{\sqrt[n]{2}}$

เพราะฉะนั้นจาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \ldots + n^{\frac{1}{2n-1}} \geq n^{\sqrt[n]{2}}$$

35.แนวคิด เพราะว่า $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ เมื่อ $k = 0 , 1 , 2 , \ldots , n$

ดังนั้น $(k+1)P(k) - k = 0$ เมื่อ $k = 0 , 1 , 2 , \ldots , n$

หรือ $(x+1)P(x) - x = 0$ เมื่อ $x = 0 , 1 , 2 , \ldots , n$

เนื่องจาก $P(x)$ เป็นพหุนามกำลัง n

ดังนั้น $(x+1)P(x) - x = 0$ เป็นพหุนามกำลัง $n+1$

และเพราะว่า $Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$ เมื่อ A เป็นค่าคงตัว เป็นพหุนามกำลัง $n+1$ ซึ่งมีค่าเป็น 0 เมื่อ $x = 0 , 1 , 2 , \ldots , n$

ดังนั้น $(x+1)P(x) - x = Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n) \qquad \ldots(1)$

แทนค่า $x = -1$ ในสมการ (1) จะได้

$$1 = A(-1)((-2)(-3)\ldots(-(n+1))$$

$$1 = A(-1)^{n+1}(n+1)!$$

ดังนั้น $$A = \frac{1}{(-1)^{n+1}(n+1)!}$$

จาก (1) จะได้ $$P(x) = \frac{Ax(x-1)(x-2)\ldots(x-n)+x}{(x+1)}$$

แทนค่า A จะได้ $$P(x) = \frac{\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{(-1)^{n+1}(n+1)!}+x}{(x+1)}$$

แทนค่า $x = n + 1$ จะได้ว่า

$$P(n+1) = \frac{\frac{(n+1)(n)(n-1)\ldots(2)(1)}{(-1)^{n+1}(n+1)!}+(n+1)}{(n+2)}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{(-1)^{n+1}(n+1)!}+(n+1)}{(n+2)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}+(n+1)}{(n+2)}$$

ถ้า n เป็นเลขคี่ จะได้ว่า $(-1)^{-n-1} = 1$

ดังนั้น $P(n+1) = \frac{1+(n+1)}{(n+2)} = \frac{n+2}{n+2} = 1$

ถ้า n เป็นเลขคู่ จะได้ว่า $(-1)^{-n-1} = -1$

ดังนั้น $P(n+1) = \frac{-1+(n+1)}{(n+2)} = \frac{n}{n+2}$

นั่นคือ $$P(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ n เป็นเลขคี่} \\ \frac{n}{n+2} & \text{เมื่อ n เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

****

$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100}$

$= 2535301200\ 4564588029\ 9340641075\ 1$

จำนวนค่าของ x ที่ทำให้ ห.ร.ม. (x , 1000) = 10

จากปัญหาการนับจำนวนสมาชิกแบบง่าย เช่น

$U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$

$X = \{x \in U \mid x \text{ เป็นเลขคู่}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ จะได้ว่า $n(X) = 5$

$U = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$

$X = \{x \in U \mid 3 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{3, 6, 9, \dots, 48\}$ จะได้ว่า $n(X) = 16$

เมื่อปัญหามีความยากมากขึ้น เช่น $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$

$X = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 3 \text{ หาร } x \text{ ไม่ลงตัว}\}$

$Y = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 2^2 \text{ หาร } x \text{ ไม่ลงตัว}\}$

$Z = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 1000) = 10\}$

การหาจำนวนสมาชิกของ X , Y , Z จะยากขึ้นดังนั้นเราจึงศึกษาแนวทางในการหาจำนวนสมาชิกของเซตตามเงื่อนไขต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. การนับสมาชิกของเซต

1.1 หารตลอดด้วยค่าคงตัว เช่น

$n(\{3, 6, 9, 12, \dots, 300\}) = n(\{1, 2, 3, \dots, 100\}) = 100$

1.2 หาค่าคงตัวบวกทุกตัวเลขในเซตนั้นก่อนแล้วจึงทำการหารตลอด ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} n(\{1, 4, 7, 10, \dots, 100\}) &= n(\{3, 6, 9, 12, \dots, 102\}) \\ &= n(\{1, 2, 3, \dots, 34\}) \\ &= 34 \end{aligned}$$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกในการเขียน จะขอใช้สัญลักษณ์ $x \mid y$ แทนคำว่า x หาร y ลงตัว

2. $U = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $A_n = \{x \in U \mid n \mid x\}, n = 1, 2, 3, ..$

   จะได้ว่า $A_n \cap A_m = \{x \in U \mid n \mid x$ และ $m \mid x\}$

   $= \{x \in U \mid (\text{ค.ร.น.}(n, m)) \mid x\} = A_{\text{ค.ร.น.}(n, m)}$

   ตัวอย่างเช่น $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

   $A_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}, A_3 = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$

   $A_2 \cap A_3 = A_6 = \{6, 12, 18, \ldots, 96\}$

   $A_4 = \{4, 8, 12, \ldots, 100\}, A_{10} = \{10, 20, 30, \ldots, 100\}$

   $A_4 \cap A_{10} = A_{20} = \{20, 40, 60, 80, 100\}$

3. สัญลักษณ์ [x] แทนจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x

   ตัวอย่างเช่น $[4.4] = 4, [4.5] = 4, [4.6] = 4$

   ประโยชน์ของสัญลักษณ์ [x] สามารถช่วยในการนับจำนวนสมาชิกของเซตได้

   ตัวอย่างเช่น $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

   $A = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset U$ $n(A)$ เท่ากับเท่าใด

   เพราะว่า $A = \{2, 4, 6, \ldots\} \subset U$

   $= \{2(1), 2(2), 2(3), \ldots, 2[\frac{1000}{2}]\} \subset U$

   เพราะฉะนั้น $n(A) = [\frac{1000}{2}] = 500$

   ในทำนองเดียวกัน

   $A = \{3, 6, 9, \ldots\} \subset U$ จะได้ $n(A) = [\frac{1000}{3}] = 333$

   $B = \{11, 22, 33, \ldots\} \subset U$ จะได้ $n(B) = [\frac{1000}{11}] = [90.9] = 90$

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

$A = \{x \in U \mid 7 \mid x\}$ n(A) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ แบบที่ 1 โดยการแจงสมาชิก สมาชิกของ A คือ 7 , 14 , 21 , …

การหาสมาชิกตัวสุดท้ายของ A ให้ทำดังนี้

ขั้นที่ 1 หาค่า $\frac{1000}{7} = 142.85$

ขั้นที่ 2 ปัดเศษทิ้งเหลือ 142

ขั้นที่ 3 สมาชิกตัวที่ใหญ่ที่สุดของ A คือ 7(142) = 994

เพราะฉะนั้น $A = \{7, 14, 21, \ldots, 994\}$ และ n(A) = 142

แบบที่ 2 จากขั้นตอนการหาสมาชิกตัวที่ใหญ่ที่สุดว่าเป็นเท่าใด

เราสามารถหาได้จากสูตร $7[\frac{1000}{7}] = 7[142.85] = 7(142) = 994$

นั่นคือ $[\frac{1000}{7}] = 142$ เป็นตัวเลขที่บอกจำนวนสมาชิกของ A

สูตร $U = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $A = \{x \in U \mid m \mid x\}$, $n(A) = [\frac{n}{m}]$

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

$B = \{x \in U \mid 7 \mid x$ หรือ $5 \mid x\}$ n(B) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ให้ $B_5 = \{x \in U \mid 5 \mid x\}$ $B_7 = \{x \in U \mid 7 \mid x\}$

$B_5 \cap B_7 = \{x \in U \mid 5 \mid x$ และ $7 \mid x\} = \{x \in U \mid 35 \mid x\}$

ให้ $B_{35} = \{x \in U \mid 35 \mid x\}$

เพราะว่า $n(B_5) = [\frac{1000}{5}] = [200] = 200$

$n(B_7) = [\frac{1000}{7}] = [142.8] = 142$

$$n(B_{35}) = [\frac{1000}{35}] = [28.57] = 28$$

เพราะฉะนั้น $n(B) = n(B_5 \cup B_7) = n(B_5) + n(B_7) - n(B_5 \cap B_7)$

$= 200 + 142 - 28 = 314$

ทบทวนสูตรเกี่ยวกับเซต

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(A - B) = n(A) - n(B)$
3. $A - B = A - (A \cap B)$
4. $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
5. $A - B = A \cap B'$
6. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C)$

    $+ n(A \cap B \cap C)$

ตัวอย่าง 3. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

$C = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2) = 2\}$ $n(C)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $C = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2) = 2\}$

$= \{x \in U \mid 2 \mid x\}$

$= \{2, 4, 6, \ldots, 1000\}$

เพราะฉะนั้น $n(C) = 500$

ตัวอย่าง 4. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

$D = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 3) = 3\}$ $n(D)$ เท่ากับเท่าใด

แนวคิด เพราะว่า $D = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 3) = 3\}$

$= \{x \in U \mid 3 \mid x\}$

$= \{3, 6, 9, \ldots, 3[\frac{1000}{3}]\}$

เพราะฉะนั้น $n(D) = [\frac{1000}{3}] = 333$

ต่อไปนี้เราจะเพิ่มลำดับของความยากให้มากขึ้น เช่น

$U = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$, $A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 4) = 2\}$

โดยการแจงสมาชิก $A = \{2, 6, 10, \ldots\} = \{2(1), 2(3), 2(5), 2(7), 2(9)\}$

ดังนั้น $n(A) = 5$ เมื่อให้สมาชิกของ U มากขึ้นและเงื่อนไขสมาชิกของ A ซับซ้อนมากขึ้นเช่น $A = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 3000) = 3\}$

ตัวอย่าง 5. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 3000\}$

$H = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 3000) = 3\}$ n(H) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $3000 = 3 \cdot 2^3 \cdot 5^3$

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. $(x, 3000) = 3$ ก็ต่อเมื่อ ($3 \mid x$ และ $2 \nmid x$ และ $5 \nmid x$)

$A_2 = \{2, 4, 6, \ldots, 3000\}$

$A_3 = \{3, 6, 9, \ldots, 3000\}$

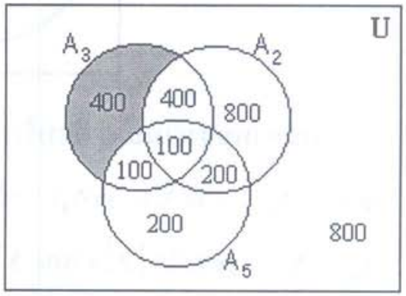
$A_5 = \{5, 10, 15, \ldots, 3000\}$

$H = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 3000) = 3\}$

$= \{x \in U \mid 3 \mid x \text{ และ } 2 \nmid x \text{ และ } 5 \nmid x\}$

$= (A_3 - A_2) - A_5$

เพราะฉะนั้น $n(H) = 400$



แผนภาพแสดงจำนวนสมาชิก

ตัวอย่าง 6. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$G = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 100) = 2\}$ n(G) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $100 = 2^2 \cdot 5^2$

$G = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 100) = 2\}$

$= \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2^2 \cdot 5^2) = 2\}$

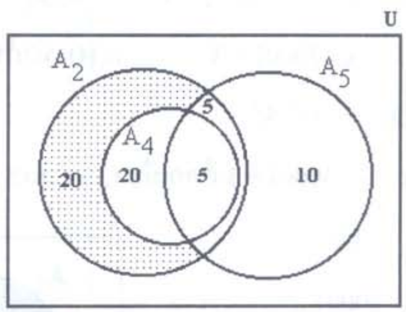
$= \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $2^2 \nmid x$ และ $5 \nmid x\}$

$A_2 = \{x \in U \mid 2 \mid x\}$, $n(A_2) = [\frac{100}{2}] = 50$

$A_4 = \{x \in U \mid 4 \mid x\}$, $n(A_4) = [\frac{100}{4}] = 25$

$A_5 = \{x \in U \mid 5 \mid x\}$, $n(A_5) = [\frac{100}{5}] = 20$

$G = \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $2^2 \nmid x$ และ $5 \nmid x\}$



จากแผนภาพของเวนน์ G คือบริเวณที่แรเงา

$n(A_2 - A_4) = n(A_2) - n(A_4) = 50 - 25 = 25$

$A_4 \cap A_5 = \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $5 \mid x\} = \{x \in U \mid 10 \mid x\} = A_{10}$

$n(A_2 \cap A_5) = n(A_{10}) = [\frac{100}{10}] = 10$

$A_4 \cap A_5 = A_{20}$

$n(A_4 \cap A_5) = n(A_{20}) = [\frac{100}{20}] = 5$

สรุป $n(G) = 20$

ต่อไปเราจะลองหาค่า n(G) โดยการกระจายสูตร ทำได้ดังนี้

$$G = \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 4 \nmid x \text{ และ } 5 \nmid x\}$$
$$= A_2 \cap A'_4 \cap A'_5$$
$$= (A_2 - A_4) \cap A'_5$$
$$= (A_2 - A_4) - A_5$$

ตารางแสดงจำนวนสมาชิก

	2|x 50	4|x 25
5|x 20	10|x 10	20|x 5
25|x 4	50|x 2	100|x 1

$$n(G) = n((A_2 - A_4) - A_5)$$
$$= n((A_2 - A_4) - ((A_2 - A_4) \cap A_5))$$
$$= n(A_2 - A_4) - n((A_2 - A_4) \cap A_5)$$
$$= n(A_2 - A_4) - [n(A_2 \cap A_5) - n(A_4 \cap A_5)]$$
$$= n(A_2 - A_4) - n(A_2 \cap A_5) + n(A_4 \cap A_5)$$
$$= n(A_2 - A_4) - n(A_{10}) + n(A_{20})$$
$$= n(A_2) - n(A_4) - n(A_{10}) + n(A_{20})$$
$$= 50 - 25 - 10 + 5$$
$$= 20$$

หมายเหตุ ตรวจสอบโดยการแจงสมาชิกจะได้ว่า

G = {2(1) , 2(3) , 2(7) , 2(9) , 2(11) , 2(13) , 2(17) , 2(19) , 2(21) , 2(23) , 2(27) , 2(29) , 2(31) , 2(33) , 2(37) , 2(39) , 2(41) , 2(43) , 2(47) , 2(49)}

n(G) = 20

จากตารางข้างต้นเราสามารถตอบคำถามต่าง ๆ ได้มากขึ้น ดังนี้

$H = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 100) = 5\}$

$= \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2^2 \cdot 5^2) = 5\}$

$= \{x \in U \mid 5 \mid x$ และ $5^2 \nmid x$ และ $2 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_5$ และ $x \notin A_{25}$ และ $x \notin A_2\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_5$ และ $x \in A'_{25}$ และ $x \in A'_2\}$

$= A_5 \cap A'_{25} \cap A'_2$

$= (A_5 - A_{25}) - A_2$

โดยการกระจายสูตร

$n(H) = n((A_5 - A_{25}) - A_2)$

$= n((A_5 - A_{25}) - (A_5 - A_{25}) \cap A_2)$

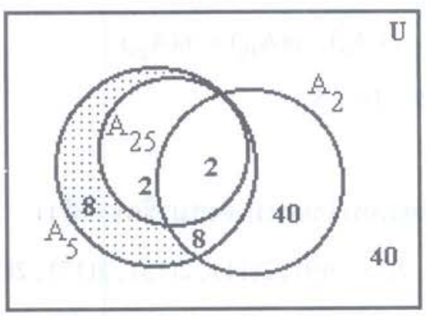
$= n((A_5 - A_{25}) - (A_5 \cap A_2 - A_{25} \cap A_2))$

$= n(A_5 - A_{25}) - n(A_5 \cap A_2) + n(A_{25} \cap A_2)$

$= n(A_5) - n(A_{25}) - n(A_{10}) + n(A_{50})$

$= 20 - 4 - 10 + 2$

$= 8$



โดยการใช้แผนภาพของเวนน์จะได้ว่า $n(H) = 8$

ตัวอย่าง 7. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$G = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 10) = 2\}$ n(G) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $100 = 2 \cdot 5$

$G = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 10) = 2\} = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2 \cdot 5) = 2\}$

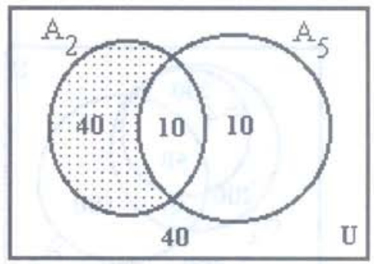
$= \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 5 \nmid x\}$

ให้ $A_2 = \{x \in U \mid 2 \mid x\}$ $\quad n(A_2) = [\frac{100}{2}] = 50$

$A_5 = \{x \in U \mid 5 \mid x\}$ $\quad n(A_5) = [\frac{100}{5}] = 20$

$G = A_2 \cap A'_5 = A_2 - A_5$

$= A_2 - (A_2 \cap A_5)$



$A_2 \cap A_5 = \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 5 \mid x\}$

$= \{x \in U \mid 10 \mid x\}$

$n(A_2 \cap A_5) = [\frac{100}{10}] = 10$

$n(G) = n(A_2 - (A_2 \cap A_5)) = n(A_2 - A_{10}) = n(A_2) - n(A_{10}) = 50 - 10 = 40$

ตัวอย่าง 8. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, $B = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 500) = 2\}$ และ $C = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 1000) = 10\}$ จงหาจำนวนสมาชิก B และ C

วิธีทำ 1. แยกตัวประกอบ $500 = 2^2 \cdot 5^3$

$B = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 500) = 2\}$

$= \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 2^2 \cdot 5^3) = 2\}$

$= \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 4 \nmid x \text{ และ } 5 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_2 \text{ และ } x \notin A_4 \text{ และ } x \notin A_5\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_2$ และ $x \in A'_4$ และ $x \in A'_5\}$

$= A_2 \cap A'_4 \cap A'_5$

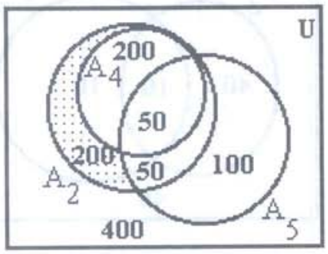
$= (A_2 - A_4) - A_5$

$= (A_2 - A_4) - (A_2 - A_4) \cap A_5$

$= (A_2 - A_4) - ((A_2 \cap A_5) - A_4 \cap A_5))$

$= (A_2 - A_4) - (A_{10} - A_{20})$

2. สร้างตารางแสดงจำนวนสมาชิก U ที่สอดคล้องเงื่อนไขการหารลงตัว



	$2 \mid x$ 500	$4 \mid x$ 250
$5 \mid x$ 200	$10 \mid x$ 100	$20 \mid x$ 50
$25 \mid x$ 40	$50 \mid x$ 20	$100 \mid x$ 10
$125 \mid x$ 8	$250 \mid x$ 4	$500 \mid x$ 2

$n(B) = n((A_2 - A_4) - (A_{10} - A_{20}))$

$= n(A_2) - n(A_4) - n(A_{10}) + n(A_{20})$

$= 500 - 250 - 100 + 50$

$= 200$

หมายเหตุ โดยการใช้แผนภาพเวนน์จะได้ $n(B) = 200$

แยกตัวประกอบ $1000 = 2^3 5^3$

$C = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 1000) = 10\}$

$= \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 2^3 \cdot 5^3) = 2 \cdot 5\}$

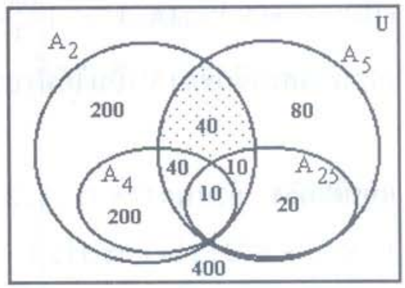
$= \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $5 \mid x$ และ $2^2 \nmid x$ และ $5^2 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid 10 \mid x$ และ $4 \nmid x$ และ $25 \nmid x\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_{10}$ และ $x \notin A_4$ และ $x \notin A_{25}\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_{10}$ และ $x \in A'_4$ และ $x \in A'_{25}\}$

$= A_{10} \cap A'_4 \cap A'_{25}$



$= (A_{10} - A_4) - A_{25}$

$= (A_{10} - A_{10} \cap A_4) - A_{25}$

$= (A_{10} - A_{20}) - A_{25}$

$= (A_{10} - A_{20}) - (A_{10} - A_{20}) \cap A_{25}$

$= (A_{10} - A_{20}) - ((A_{10} \cap A_{25}) - (A_{20} \cap A_{25}))$

$= (A_{10} - A_{20}) - (A_{50} - A_{100})$

$n(C) = n(A_{10}) - n(A_{20}) - n(A_{50}) + n(A_{100})$

$= 100 - 50 - 20 + 10$

$= 40$

ตัวอย่าง 9. จากข้อสอบคณิตศาสตร์ กข. ปี 2538 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ 0 และ $-100 \le x \le 100\}$

ให้ $V = \{x \mid$ ห.ร.ม. ของ x กับ 21 เป็น 3$\}$

จำนวนสมาชิกของ V เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 29
2. 34
3. 68
4. 58

วิธีทำ การหาคำตอบเราจะพิจารณา ดังนี้ ให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$B = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 21) = 3\} = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 3 \cdot 7) = 3\}$

$= \{x \in U \mid 3 \mid x$ และ $7 \nmid x\}$ $= \{x \in U \mid x \in A_3$ และ $x \notin A_7\}$

$= \{x \in U \mid x \in A_3$ และ $x \in A'_7\}$

$= A_3 \cap A'_7 = A_3 - A_7 = A_3 - A_3 \cap A_7 = A_3 - A_{21}$

$n(B) = n(A_3) - n(A_{21}) = [\frac{100}{3}] - [\frac{100}{21}] = 33 - 4 = 29$

เพราะว่าสมาชิกของ V เป็นได้ทั้งบวกและลบ เพราะฉะนั้น $n(V) = 58$

แบบฝึกหัด กำหนด $U = \{1, 2, 3, \ldots, 9000\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของ

1. $V = \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $3 \mid x\}$
2. $V = \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $5 \mid x$ และ $9 \mid x\}$
3. $V = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 9000) = 3\}$
4. $V = \{x \in U \mid 5 \mid x$ และ $5^2 \nmid x\}$
5. $V = \{x \in U \mid 3 \mid x$ และ $2 \mid x$ และ $9 \nmid x\}$
6. $V = \{x \in U \mid 3 \mid x$ และ $9 \nmid x\}$
7. $U = \{1, 2, 3, \ldots, 3600\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของ
   - 7.1 $V = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม. $(x, 3600) = 6\}$
   - 7.2 $V = \{x \in U \mid 12 \mid x$ และ $5 \nmid x\}$
   - 7.3 $V = \{x \in U \mid 6 \mid x$ และ $5 \nmid x\}$
   - 7.4 $V = \{x \in U \mid 18 \mid x$ และ $5 \nmid x\}$
   - 7.5 $V = \{x \in U \mid 12 \mid x$ และ $18 \mid x$ และ $5 \nmid x\}$

ตอบ 1. 1500 , 2. 100 , 3. 800 , 4. 1440 , 5. 1000 , 6. 2000

7.1 160 , 7.2 240 , 7.3 480 , 7.4 160 , 7.5 80

****

$5^{50} =$ 8881784197 0012523233 8905334472 65625

$\sum_{i=1}^{2001} i^{2544}$ หารด้วย 5 เหลือเศษเท่าใด

จากปัญหาง่ายๆ เช่น $\sum_{n=1}^{10} n$ เท่ากับเท่าใด เราสามารถหาคำตอบได้โดยง่าย คือ $\sum_{n=1}^{10} n = 1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$ หรือหาค่า $\sum_{n=1}^{100} n$ ก็สามารถหาค่าโดยใช้สูตร $\sum_{n=1}^{100} n = \frac{100}{2}(1 + 100) = 50(101) = 5050$ หรือจะถามให้ยากขึ้น เช่น $\sum_{n=1}^{100} n^2$ เท่ากับเท่าใดก็ยังสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\sum_{n=1}^{100} n^2 = \frac{100}{6}(100 + 1)(200 + 1) = 338350$$

ก่อนที่จะเข้าสู่ปัญหาที่ยากขึ้นขอทบทวนสูตรผลบวกที่สำคัญ

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n + 1)$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{n}{2}(n + 1)]^2$

เพราะฉะนั้นการหาตัวเลขในหลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{n} i$, $\sum_{i=1}^{n} i^2$ และ $\sum_{i=1}^{n} i^3$ สามารถทำได้โดยง่าย ดังนี้

ตัวอย่าง 1. หลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{2539} i$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{2539} i = \frac{2539}{2}(2539 + 1) = \frac{(2539)(2540)}{2} = (2539)(1270)$

$= 3224530 = (\ldots 0)$

ข้อตกลง (...x) หมายถึง สัญลักษณ์แทนจำนวนที่เราต้องการแสดงผลเฉพาะหลักหน่วยเท่านั้น โดยที่ x = 0 , 1 , 2 , ... , 9

ตัวอย่าง 2. หลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{10!} i^2$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{10!} i^2 = \frac{10!}{6}(10! + 1)(2(10!) + 2)$

เพราะว่า 10! = 3628800 และ $\frac{10!}{6} = 604800$

เพราะฉะนั้น $\frac{10!}{6}(10! + 1)(2(10!) + 2)$ มีหลักหน่วยเป็น 0

ตัวอย่าง 3. หลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{1997} i^3$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{1997} i^3 &= [\frac{1997}{2}(1997+1)]^2 \\ &= [(1997)(999)]^2 \\ &= [(\ldots 3)]^2 \\ &= (\ldots 9)\end{aligned}$$

สรุปหลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{1997} i^3$ เท่ากับ 9

จากตัวอย่างที่ผ่านมาเราสามารถหาหลักหน่วยของผลบวกได้โดยง่าย เพราะว่าเรารู้สูตรผลบวก ต่อไปเราจะเพิ่มระดับความยากขึ้น เช่น ถามว่า

หลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{100} i^4$ เท่ากับเท่าใด

หลักหน่วยของ $\sum_{i=1997}^{2540} i^5$ เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 4. $\sum_{i=1}^{40} i^4$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาหลักหน่วยของตัวเลขที่ลงท้ายด้วย 1 , 2 , … , 9 , 0 ดังนี้

	หลักหน่วย
$(\ldots 1)^4$	1
$(\ldots 2)^4$	6
$(\ldots 3)^4$	1
$(\ldots 4)^4$	6
$(\ldots 5)^4$	5
$(\ldots 6)^4$	6
$(\ldots 7)^4$	1
$(\ldots 8)^4$	6
$(\ldots 9)^4$	1
$(\ldots 0)^4$	0
$(\ldots 1)^4 + (\ldots 2)^4 + \ldots + (\ldots 9)^4 + (\ldots 0)^4$	3

พิจารณาหลักหน่วยของ

$$\sum_{i=1}^{40} i^4 = (1^4 + 2^4 + \ldots + 10^4) + (11^4 + 12^4 + \ldots + 20^4)$$

$$+ (21^4 + 22^4 + \ldots + 30^4) + (31^4 + 32^4 + \ldots + 40^4)$$

$$= (\ldots 3) + (\ldots 3) + (\ldots 3) + (\ldots 3)$$

$$= (\ldots 2)$$

สรุป $\sum_{i=1}^{40} i^4$ มีหลักหน่วยเป็น 2

คำถามเพิ่มเติม จงหาหลักหน่วยของผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{i=1}^{41} i^4$ 2. $\sum_{i=1}^{42} i^4$ 3. $\sum_{i=1}^{403} i^4$ 4. $\sum_{i=1}^{405} i^4$

ตัวอย่าง 5. $\sum_{i=1}^{25} i^5$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาหลักหน่วยของตัวเลขที่ลงท้ายด้วย 1 , 2 , … , 9 ดังนี้

	หลักหน่วย
$(\ldots 1)^5$	1
$(\ldots 2)^5$	2
$(\ldots 3)^5$	3
$(\ldots 4)^5$	4
$(\ldots 5)^5$	5
$(\ldots 6)^5$	6
$(\ldots 7)^5$	7
$(\ldots 8)^5$	8
$(\ldots 9)^5$	9
$(\ldots 0)^5$	0
$(\ldots 1)^5 + (\ldots 2)^5 + \ldots + (\ldots 9)^5 + (\ldots 0)^5$	5

พิจารณาหลักหน่วยของ

$$\sum_{i=1}^{25} i^5 = (1^5 + 2^5 + \ldots + 10^5) + (11^5 + 12^5 + \ldots + 20^5) + (21^5 + 22^5 + \ldots + 25^5)$$

$$= (\ldots 5) + (\ldots 5) + (\ldots 1 + \ldots 2 + \ldots 3 + \ldots 4 + \ldots 5)$$

$$= (\ldots 0) + (\ldots 5)$$

$$= (\ldots 5)$$

สรุป $\sum_{i=1}^{25} i^5$ มีหลักหน่วยเป็น 5

คำถามเพิ่มเติม จงหาตัวเลขในหลักหน่วยของผลบวก

1. $\sum_{i=1}^{26} i^5$ 2. $\sum_{i=1}^{27} i^5$ 3. $\sum_{i=1}^{125} i^5$ 4. $\sum_{i=1}^{126} i^5$

ตัวอย่าง 6. จงหาตัวเลขในหลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{63} i^6$

วิธีทำ

	หลักหน่วย
$(\ldots 1)^6$	1
$(\ldots 2)^6$	4
$(\ldots 3)^6$	9
$(\ldots 4)^6$	6
$(\ldots 5)^6$	5
$(\ldots 6)^6$	6
$(\ldots 7)^6$	9
$(\ldots 8)^6$	4
$(\ldots 9)^6$	1
$(\ldots 0)^6$	0
$(\ldots 1)^6 + (\ldots 2)^6 + \ldots + (\ldots 9)^6 + (\ldots 0)^6$	5

พิจารณาหลักหน่วยของ

$$\sum_{i=1}^{63} i^6 = (1^6+2^6+\ldots+10^6)+(11^6+12^6+\ldots+20^6)+\ldots$$

$$+(51^6+52^6+\ldots+60^6)+(61^6+62^6+63^6)$$

$$= \underbrace{(\ldots 5)+(\ldots 5)+\ldots+(\ldots 5)}_{6\text{ พจน์}}+[\ldots 1+\ldots 4+\ldots 9]$$

$$= (\ldots 0)+(\ldots 4)$$

$$= (\ldots 4)$$

สรุป $\sum_{i=1}^{63} i^6$ มีหลักหน่วยเป็น 4

คำถามเพิ่มเติม จงหาหลักหน่วยของผลบวกต่อไปนี้

1. $\sum_{i=1}^{64} i^6$ 2. $\sum_{i=1}^{74} i^6$ 3. $\sum_{i=1}^{6002} i^6$

สำหรับปัญหาในกรณีที่กำลังของ i มากๆ เช่น $\sum_{i=1}^{1999} i^{2542}$ เราควรจะพิจารณา

ข้อสรุปในกรณีทั่ว ๆ ไปก่อนดังนี้

i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721
10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000

i	i^9	i^{10}	i^{11}	i^{12}
1	1	1	1	1
2	512	1024	2048	4096
3	19683	59049	177147	531441
4	262144	1048576	4194304	16777216
5	1953125	9765625	48828125	244140625
6	10077696	60466176	362797056	2176782336
7	40353607	282475249	1977326743	13841287201
8	134217728	1073741824	8589934592	68719476736
9	387420489	3486784401	31381059609	282429536481
10	1000000000	10000000000	100000000000	1000000000000

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตารางแสดงค่าในหลักหน่วยของ $(\ldots1)^n + (\ldots2)^n + \ldots + (\ldots9)^n + (\ldots0)^n$

	4 หาร n เหลือเศษ			
	0	1	2	3
$(\ldots1)^n$	1	1	1	1
$(\ldots2)^n$	6	2	4	8
$(\ldots3)^n$	1	3	9	7
$(\ldots4)^n$	6	4	6	4
$(\ldots5)^n$	5	5	5	5
$(\ldots6)^n$	6	6	6	6
$(\ldots7)^n$	1	7	9	3
$(\ldots8)^n$	6	8	4	2
$(\ldots9)^n$	1	9	1	9
$(\ldots0)^n$	0	0	0	0
หลักหน่วยของผลรวม	3	5	5	5

ตัวอย่างผลบวกเช่น

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^5 = 220825 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^9 = 1574304985$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^6 = 1978405 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^{10} = 14914341925$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = 3025 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^7 = 18080425 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^{11} = 142364319625$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^4 = 25333 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^8 = 167731333 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^{12} = 1367428536133$$

เพราะฉะนั้น $(\ldots 1)^n + (\ldots 2)^n + \ldots + (\ldots 9)^n + (\ldots 0)^n$ มีหลักหน่วย

$= 5$ ถ้า 4 หาร n ไม่ลงตัว

$= 3$ ถ้า 4 หาร n ลงตัว

จากข้อสรุปนี้จะได้ว่า

ผลบวก	มีหลักหน่วยเป็น
$\sum_{i=1}^{10} i^{200}$	3
$\sum_{i=11}^{20} i^{200}$	3

ผลบวก	มีหลักหน่วยเป็น
$\sum_{i=201}^{210} i^{200}$	3
$\sum_{i=2001}^{2010} i^{200}$	3

ผลบวก	มีหลักหน่วยเป็น
$\sum_{i=1}^{10} i^{25}$	5
$\sum_{i=11}^{20} i^{25}$	5

ผลบวก	มีหลักหน่วยเป็น
$\sum_{i=111}^{120} i^{25}$	5
$\sum_{i=2001}^{2010} i^{25}$	5

ตัวอย่าง 7. หลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{2542} i^{1999}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ 4 หาร 1999 เหลือเศษ 3

เพราะฉะนั้น $(\ldots 1)^{1999} + (\ldots 2)^{1999} + \ldots + (\ldots 9)^{1999} + (\ldots 0)^{1999} = \ldots 5$

เพราะว่า $2542 = 10(254) + 2$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{i=1}^{2542} i^{1999} = \underbrace{(\ldots 5)}_{\substack{\text{มาจาก} \\ i = 1, 2, \ldots, 10}} + (\ldots 5) + \ldots + \underbrace{(\ldots 5)}_{\substack{\text{มาจาก} \\ i = 2531, 2532, \ldots, 2540}} + 2541^{1999} + 2542^{1999}$$

$$= (\ldots 5) \times (254) + (\ldots 1) + (2542)^{4(499)+3}$$

$= (\ldots0) + (\ldots1) + (\ldots6)(2542)^3$

$= (\ldots1) + (\ldots6)(\ldots8)$

$= (\ldots1) + (\ldots8)$

$= (\ldots9)$

ตัวอย่าง 8. $\sum_{i=1}^{1997} i^{2540}$ หารด้วย 10 เหลือเศษเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า 4 หาร 2540 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(\ldots1)^{2540} + (\ldots2)^{2540} + \ldots + (\ldots9)^{2540} + (\ldots0)^{2540} = \ldots3$

เพราะว่า $1997 = 10(199) + 7$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{i=1}^{1997} i^{2540} = \overbrace{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{มาจาก} \\ i = 1, 2, \ldots, 10}}{(\ldots3)} + (\ldots3) + \ldots + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{มาจาก} \\ i = 1981, 1982, \ldots, 1990}}{(\ldots3)}}^{\text{จำนวน 199 พจน์}} + 1991^{2540} + \ldots + 1997^{2540}$$

$= (\ldots3) \times 199 + 1991^{2540} + 1992^{2540} + \ldots + 1997^{2540}$

$= (\ldots7) + (\ldots1) + (\ldots6) + (\ldots1) + (\ldots6) + (\ldots5) + (\ldots6) + (\ldots1)$

$= (\ldots3)$

สรุป 10 หาร $\sum_{i=1}^{1997} i^{2540}$ เหลือเศษ 3

ตัวอย่าง 9. $\sum_{i=1}^{2001} i^{2544}$ หารด้วย 5 เหลือเศษเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{i=1}^{2001} i^{2544} = \sum_{i=1}^{2000} i^{2544} + 2001^{2544}$

พิจารณาเฉพาะหลักหน่วยของ $\sum_{i=1}^{2000} i^{2544}$ เพราะว่า 4 หาร 2544 ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(\ldots1)^{2544} + (\ldots2)^{2544} + \ldots + (\ldots9)^{2544} + (\ldots0)^{2544} = \ldots3$

$$\sum_{i=1}^{2000} i^{2544} = \overbrace{(\ldots3) + (\ldots3) + \ldots + (\ldots3)}^{\text{จำนวน 200 พจน์}}$$

มาจาก $i = 1, 2, \ldots, 10$ มาจาก $i = 1991, 1992, \ldots, 2000$

$$= (\ldots3) \times (200) = (\ldots0)$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{2001} i^{2544} = (\ldots0) + 2001^{2544} = (\ldots0) + (\ldots1)$

สรุป $\sum_{i=1}^{2001} i^{2544}$ หารด้วย 5 เหลือเศษ 1

แบบฝึกหัด จำนวนต่อไปนี้หารด้วย 5 เหลือเศษเท่าใด

1. $\sum_{i=1}^{14} i^{41}$
2. $\sum_{i=1}^{2539} i^{2539}$
3. $\sum_{i=1}^{1999} i^{1999}$
4. $\sum_{i=1}^{100} (2i)^{45}$
5. $\sum_{i=1}^{100} (2i-1)^{15}$
6. $\sum_{i=1}^{1001} (2i+1)^{15}$

2^{100} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก ห้ามใช้ log2 = 0.30103 ช่วย

เพราะว่า $10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}$ เพราะฉะนั้น $10^{30} < 2^{100}$

เพราะว่า $\dfrac{11^{10}}{10^{11}} = \dfrac{1.1^{10}}{10} = \dfrac{1.21^5}{10} < 1$ เพราะฉะนั้น $11^{10} < 11^{10}$

เพราะว่า $1024^{10} = (1000 + 24)^{10} < (1000 + 100)^{10} = (10^3 + 10^2)^{10}$

$$= 10^{20}(10 + 1)^{10} = 10^{20}(11)^{10} < 10^{20}(10)^{11}$$

เพราะฉะนั้น $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$ สรุป 2^{100} เป็นจำนวนเต็ม 31 หลัก

การหาค่า n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ลงตัว

การหาค่า n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n$ ลงตัว จะเห็นได้ว่าค่าของ n มีได้หลายค่าเช่น n = 2 , 6 , 10 , .. ในที่นี้เราต้องการศึกษาปัญหาจากง่ายไปยาก ดังนั้นเราต้องพยายามพิจารณาเป็นกรณีทั่วไปจากลักษณะของปัญหาที่ยากขึ้น

ตัวอย่าง 1. n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n$ ลงตัว ค่าของ n เท่ากับค่าใด

1. 2539
2. 2540
3. 2541
4. 2542

ตอบ 4.

แนวคิด ความยากของปัญหาขณะนี้เราไม่สามารถรู้ค่า 2^{2539}
ดังนั้นแนวทางการแก้ปัญหาต้องคิดในแบบอื่น

พิจารณาค่า $1^n + 2^n$

n	2^n	$1^n + 2^n$	เศษเหลือจากการหารด้วย 5
1	2	3	3
2	4	5	0
3	8	9	4
4	16	17	2
5	32	33	3
6	64	65	0
7	128	129	4

เมื่อคำนวณมากขึ้นจะเห็นได้ว่า 5 หาร 1^n+2^n ลงตัวเมื่อหลักหน่วยของ 2^n เป็นเลข 4 นอกจากนั้นหลักหน่วยของ 2^n ยังมีลักษณะหมุนเวียน 2 , 4 , 6 ,… โดยมีเงื่อนไขดังนี้

$$\text{หลักหน่วยของ } 2^n = \begin{cases} 2 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 1} \\ 4 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 2} \\ 8 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 3} \\ 6 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 0} \end{cases}$$

เพราะว่า $n = 2542$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 2

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1^{2542} + 2^{2542}$ มีค่าเท่ากับ 5

ดังนั้น 5 หาร $1^{2542} + 2^{2542}$ ลงตัว สรุป $n = 2542$

ตัวอย่าง 2. $X=\{1 , 2 , 3 , \dots , 2500\}$

$Y = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n \text{ ลงตัว} \}$ n(Y) เท่ากับเท่าใด

1. 525 2. 625 3. 725 4. 1025

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า (5 หาร $1^n + 2^n$ ลงตัว) ก็ต่อเมื่อ หลักหน่วยของ 2^n เป็น 4

ก็ต่อเมื่อ 4 หาร n เหลือเศษ 2

$$\begin{aligned} \text{เพราะฉะนั้น } Y &= \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n \text{ ลงตัว} \} \\ &= \{ n \in X \mid 4 \text{ หาร n เหลือเศษ } 2 \} \\ &= \{2 , 6 , 10 , 14 , \dots , 2498\} \end{aligned}$$

การนับสมาชิกของ Y ทำได้โดยง่ายดังนี้

$$2 , 6 , 10 , 14 , \dots , 2498$$

เอา 2 บวกตลอด

$$4 , 8 , 12 , 16 , \dots , 2500$$

เอา 2 หารตลอด 1 , 2 , 3 , 4 , … , 625

เพราะฉะนั้น $n(Y) = 625$

การนับสมาชิกของ Y โดยใช้ลำดับเลขคณิต $a = 2$, $d = 4$, $a_n = 2498$

$$
\begin{aligned}
2498 &= a + (n-1)d = 2 + (n-1)4 \\
2496 &= 4(n-1) \\
n - 1 &= 624 \\
n &= 625
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า $n(Y) = 625$ เหมือนกัน

ต่อไปเราจะเพิ่มความยากขึ้นอีกนิด

ตัวอย่าง 3. $X = \{1 , 2 , 3 , \ldots , 2500\}$

$Y = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n + 3^n \text{ ลงตัว} \}$ $n(Y)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1

3. 2 4. 3

ตอบ 1.

แนวคิด ค่า n ในตัวเลือกมีค่ามาก ดังนั้นการแทนค่าโดยตรงคงจะคิดเลขยาก มาทำโดยใช้วิธีดูตัวเลขที่หลักหน่วยดีกว่า

n	2^n	3^n	$1^n + 2^n + 3^n$	เศษเหลือจากการหารด้วย 5
1	2	3	6	1
2	4	9	14	4
3	8	27	36	1
4	16	81	98	3
5	32	243	276	1

6	64	729	794	4
7	128	2187	2316	1
8	256	6561	6818	3

จากการคำนวณมาพอสมควรจะเห็นว่า หลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$

มีค่าหมุนเวียน 1 , 4 , 1 , 3 , 1 , 4 , 1 , 3 , ...

ไม่มีกรณีใดเลยที่ 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ลงตัว

ดังนั้นตัวเลือกน่าจะเป็น ตัวเลือก 1.

หมายเหตุ เพื่อประโยชน์สูงสุดของผู้อ่านเรามาดูแนวทางการพิสูจน์ว่า

5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัวทุกค่า $n \in N$

กำหนดให้ $N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

กรณีที่ 1 4 หาร n ลงตัว

ให้ $n = 4k$, $k \in N$

หลักหน่วยของ 2^n $(= 2^{4k} = (2^4)^k = 16^k = \ldots 6)$ เท่ากับ 6

หลักหน่วยของ 3^n $(= 3^{4k} = (3^4)^k = 81^k = \ldots 1)$ เท่ากับ 1

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$ เท่ากับ $1 + 6 + 1 = 8$

ดังนั้น 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัว

กรณีที่ 2 4 หาร n เหลือเศษ 1

ให้ $n = 4k + 1$, $k \in N$

หลักหน่วยของ 2^n $(= 2^{4k+1} = (\ldots 6)(2) = \ldots 2)$ เท่ากับ 2

หลักหน่วยของ 3^n $(= 3^{4k+1} = (\ldots 1)(3) = \ldots 3)$ เท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$ เท่ากับ 6

ดังนั้น 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัว

กรณีที่ 3 4 หาร n เหลือเศษ 2

ให้ $n = 4k + 2$, $k \in N$

หลักหน่วยของ 2^n $(= 2^{4k+2} = (\ldots6)(4) = \ldots4)$ เท่ากับ 4

หลักหน่วยของ 3^n $(= 3^{4k+2} = (\ldots1)(4) = \ldots9)$ เท่ากับ 9

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$ เท่ากับ 4

ดังนั้น 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัว

กรณีที่ 4 4 หาร n เหลือเศษ 3

ให้ $n = 4k + 3$, $k \in N$

หลักหน่วยของ 2^n $(= 2^{4k+3} = (\ldots6)(8) = \ldots8)$ เท่ากับ 8

หลักหน่วยของ 3^n $(= 3^{4k+3} = (\ldots1)(27) = \ldots7)$ เท่ากับ 7

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n$ เท่ากับ 6

ดังนั้น 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัว

สรุปทุกค่า $n \in N$, 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n$ ไม่ลงตัว

ตัวอย่าง 4. $X = \{1, 2, 3, 4, \ldots, 2500\}$

$Y = \{ n \in X \mid 5$ หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ลงตัว $\}$ n(Y) เท่ากับเท่าใด

1. 500
2. 625
3. 1875
4. 2000

ตอบ 3.

แนวคิด เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

หลักหน่วยของ $2^n = 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, \ldots$ ตามลำดับ

หลักหน่วยของ $3^n = 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, \ldots$ ตามลำดับ

หลักหน่วยของ $4^n = 4, 6, 4, 6, 4, 6, 4, 6, \ldots$ ตามลำดับ

ตัวเลขในหลักหน่วยมีค่าหมุนเวียนทีละ 4

ดังนั้นเราพิจารณาหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ในรูปแบบตาราง ดังนี้

4 หาร n เหลือเศษ	**หลักหน่วยของ**				
	1^n	2^n	3^n	4^n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$
1	1	2	3	4	0
2	1	4	9	6	0
3	1	8	7	4	0
0	1	6	1	6	4

เพราะฉะนั้น

(5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ไม่ลงตัว) ก็ต่อเมื่อ (4 หาร n ลงตัว)

ดังนั้น $Y' = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \text{ ไม่ลงตัว} \}$

$= \{ n \in X \mid 4 \text{ หาร } n \text{ ลงตัว} \}$

$= \{4, 8, 12, \ldots, 2500\}$

$n(Y') = 625$

เพราะฉะนั้น $n(Y) = n(X) - n(Y') = 2500 - 625 = 1875$

ตัวอย่าง 5. $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2500\}$

$Y = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n \text{ ลงตัว} \}$ n(Y) เท่ากับเท่าใด

1. 500
2. 625
3. 1875
4. 2000

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า 5 หาร 5^n ทุกค่า $n \in X$

เพราะฉะนั้น $Y = \{ n \in X \mid 5$ หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$ ลงตัว $\}$

$= \{ n \in X \mid 5$ หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ลงตัว $\}$

$n(Y) = 1875$

ระดับของคำถามที่ยากขึ้นไปอีกอาจจะเป็นการหาค่า n ที่ทำให้

1. 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$ ลงตัว
2. 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$ ลงตัว
3. 10 หาร $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 10^n$ ลงตัว
4. 2 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 10^n$ ลงตัว
5. 5 หาร $11^n + 12^n + 13^n + 14^n + 15^n$ ลงตัว

แนวทางของการหาคำตอบยังคงใช้หลักการและเหตุผลเกี่ยวกับ

1. หลักหน่วยของตัวเลข 2^n , 3^n , 4^n , …
2. ผลบวกของหลักหน่วย
3. ลักษณะการหมุนเวียนของตัวเลขในหลักหน่วย (ส่วนใหญ่จะซ้ำกันทีละ 4 ตัวเป็นช่วง ๆ)

หมายเหตุ หลักหน่วยของตัวเลข 2^n, 12^n, 22^n,… จะมีลักษณะเหมือนกัน นอกจากนั้นทุกค่า $i(i = 1 , 2 , 3 ,\ldots)$ และ $n = 1 , 2 , 3 ,\ldots$ จะได้ว่า i^n จะมีลักษณะของหลักหน่วยเหมือนกัน เพราะฉะนั้น

คำถาม $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2500\}$

$Y = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 11^n + 12^n + 13^n + 14^n \text{ ลงตัว} \}$

$Z = \{ n \in X \mid 5 \text{ หาร } 101^n + 102^n + 103^n + 104^n \text{ ลงตัว} \}$

n(Y) และ n(Z) เท่ากับเท่าใด

คำตอบ ในทำนองเดียวกับข้อ 5 จะได้ n(Y) = 1875 และ n(Z) = 1875

n	$1^n + 2^n$	$1^n + 2^n + 3^n$	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$
1	3	6	10	15
2	5	14	30	55
3	9	36	100	225
4	17	98	354	979
5	33	276	1300	4425
6	65	794	4890	20515
7	129	2316	18700	96825
8	257	6818	72354	462979
9	513	20196	282340	2235465
10	1025	60074	1108650	10874275

ข้อสังเกต

1. ลักษณะของหลักหน่วยของตัวเลข i^n; n = 1 , 2 , 3 ,...

	หลักหน่วย	**ลักษณะการวนซ้ำ**
i	i^n; n=1 , 2 , 3 , 4 , ...	(รอบ)
1	1 , 1 , 1 , ...	1
2	2 , 4 , 8 , 6 , 2 , 4 , 8 , 6 , ...	4
3	3 , 9 , 7 , 1 , 3 , 9 , 7 , 1 , ...	4
4	4 , 6 , 4 , 6 , 4 , 6 , 4 , 6 , ...	2
5	5 , 5 , 5 , 5 , ...	1
6	6 , 6 , 6 , 6 , ...	1

7	7 , 9 , 3 , 1 , 7 , 9 , 3 , 1 , …	4
8	8 , 4 , 2 , 6 , 8 , 4 , 2 , 6 , …	4
9	9 , 1 , 9 , 1 , 9 , 1 , 9 , 1 , …	2

2. การวนซ้ำของตัวเลขในหลักหน่วยในผลบวก $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$ จะมีลักษณะการวนซ้ำเท่ากับ 4 เสมอ ตัวอย่างเช่น

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$
1	21
2	91
3	441
4	2275
5	12201
6	67171
7	376761
8	2142595
9	12313161
10	71340451

มีลักษณะการวนซ้ำของหลักหน่วยเป็น 4 นั้นคือ 1 , 1 , 1 , 5 , 1 , 1 , 1 , 5 ,…

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n$
1	28
2	140
3	784
4	4676
5	29008
6	184820
7	1200304
8	7907396
9	52666768
10	353815700

มีลักษณะการวนซ้ำเป็น 4 คือ 8 , 0 , 4 , 6 , 8 , 0 , 4 , 6 ,…

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n$
1	36
2	204
3	1296
4	8772
5	61776
6	446964
7	3297456
8	24684612
9	186884496
10	1427557524

มีลักษณะการวนซ้ำเป็น 4 คือ 6 , 4 , 6 , 2 , 6 , 4 , 6 , 2 ,...

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n$
1	45
2	285
3	2025
4	15333
5	120825
6	978405
7	8080425
8	67731333
9	574304985
10	4914341925

มีลักษณะการวนซ้ำเป็น 4 คือ 5 , 5 , 5 , 3 , 5 , 5 , 5 , 3 , ...

สรุปขั้นตอนการคำนวณค่า n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$ ลงตัว

1. หาหลักหน่วยของ $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$ โดยคิดเฉพาะ $n = 1, 2, 3, 4$
2. ให้ m เป็นค่าตัวเลขที่ทำให้ 5 หาร $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + k^m$ ลงตัว
3. ค่า n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + k^n$ ลงตัว

   คือ $n = m + 4k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

หมายเหตุ 1. ค่า m อาจมีได้มากกว่า 1 ค่า ตัวอย่างเช่น

การหาค่า n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 12^n$ ลงตัว

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n + 11^n + 12^n$
1	78
2	650
3	6084
4	60710
5	630708
6	6735950
7	73399404
8	812071910
9	9092033028
10	102769130750

n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 12^n$ ลงตัวคือ

$n = 2, 6, 10, 14, \ldots$ และ $4, 8, 12, \ldots$

รูปแบบทั่วไปคือ $n = 2 + 4k$ และ $n = 4k$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n$
1	55
2	385
3	3025
4	25333
5	220825
6	1978405
7	18080425
8	167731333
9	1574304985
10	14914341925

n ที่ทำให้ 5 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 9^n + 10^n$ ลงตัว

มีสูตรเป็น $n = 1 + 4k , 2 + 4k , 3 + 4k ; k = 0 , 1 , 2 ,\ldots$

ในบางกรณีการแสดงว่า 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 10^n + 11^n$ ไม่ลงตัว

เราอาจแสดงเพียง 4 กรณีตามเศษเหลือจากการหาร n ด้วย 4 คือ

เศษเหลือเป็น 0 , 1 , 2 และ 3

เพราะว่าเมื่อ n = 1 , 2 , 3 และ 4

5 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 11^n$ ไม่ลงตัว

เพราะฉะนั้น

5 หาร $1^n + 2^n + \ldots + 11^n$ ไม่ลงตัวทุกค่า $n = 1 , 2 , 3 ,\ldots$

n	$1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 7^n + 8^n + 9^n + 10^n + 11^n$
1	66
2	506
3	4356
4	39974
5	381876
6	3749966
7	37567596
8	382090214
9	3932252676
10	40851766526

แบบฝึกหัด

1. $X = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

   $Y = \{n \in X \mid n$ หาร $1^n + 2^n + \ldots + 6^n$ ลงตัว$\}$ n(Y) เท่ากับเท่าใด

2. $A = \{1, 2, \ldots, 250\}$

   $B = \{n \in A \mid 10$ หาร $1^n + 2^n + \ldots + 7^n$ ลงตัว$\}$ n(B) เท่ากับเท่าใด

3. $N = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

   $M = \{n \in N \mid 5$ หาร $1^n + 2^n + \ldots + 9^n$ ไม่ลงตัว$\}$ n(M) เท่ากับเท่าใด

4. $X = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$

   $Y = \{n \in X \mid 10$หาร $1^n + 2^n + \ldots + 12^n$ ไม่ลงตัว$\}$ n(Y) เท่ากับเท่าใด

ต่อไปเราจะเพิ่มระดับความยากโดยถามว่าผลบวกของสมาชิกในเซต Y เท่ากับเท่าใด เพื่อจะได้ใช้สูตรผลบวกของลำดับเลขคณิต

5. $X = \{1, 2, 3, \ldots, 200\}$

$Y = \{n \in X \mid 5$ หาร $1^n + 2^n + \ldots + 5^n + 6^n$ ลงตัว$\}$

ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน Y เท่ากับเท่าใด

แนวคิด $n = 1;\quad 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$

$n = 2;\quad 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$

$n = 3;\quad 1 + 8 + 27 + 64 + 125 + 216 = 441$

$n = 4;\quad 1 + 16 + 81 + 256 + 625 + 1296 = 2275$

เพราะฉะนั้น 5 หาร $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 5^n + 6^n$ ลงตัว

เมื่อ $n = 4, 8, 12, \ldots, 200$

เพราะฉะนั้น $Y = \{4, 8, 12, \ldots, 200\}$ และ $n(Y) = 50$

$$\sum_{n\in Y} n = 4 + 8 + 12 + \ldots + 200 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 5100$$

1000 **หาร** 2^{100} **เหลือเศษเท่าใด**

$$2^{1000} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10} = (1000 + 24)^{10} = \sum_{k=0}^{9}\binom{10}{k}(1000)^{10-k}(24)^k + 24^{10}$$

เพราะว่า 1000 หาร $\binom{10}{k}(1000)^{10-k}(24)^k$ ลงตัวทุกค่า $k = 0,1,2,\ldots,9$

และ $24^{10} = (24^2)^5 = (576)^5 = (500 + 76)^5$

$= (500)^5+(5)(500)^4(76)+10(500)^3(76)^2+10(500)^2(76)^3+5(500)(76)^4+(76)^5$

และ $(76)^5 = (70 + 6)^5$

$= (70)^5+(5)(70)^4(6)+10(70)^3(6)^2+10(70)^2(6)^3+5(70)(6)^4+(6)^5$

$= (70)^5+(5)(70)^4(6)+10(70)^3(6)^2+10(70)^2(6)^3+453600 + 7776$

$= (70)^5+(5)(70)^4(6)+10(70)^3(6)^2+10(70)^2(6)^3+461000 + 376$

เพราะฉะนั้น 1000 หาร 2^{100} เหลือเศษ 376

เศษเหลือที่ได้จากการหาร 10^{100} ด้วย 17

เศษเหลือจากการหารเป็นปัญหาที่สามารถสร้างคำถามได้ตั้งแต่ง่ายไปหายาก เช่น 10075 หารด้วย 10 เหลือเศษเท่าใด **ตอบ** 5

1234 หารด้วย 5 เหลือเศษเท่าใด **ตอบ** 4

2641 หารด้วย 2 เหลือเศษเท่าใด **ตอบ** 1

ต่อไปเมื่อตัวหารและตัวตั้งมากขึ้น การหาเศษเหลือจากการหารสามารถทำได้โดยการตั้งหารยาว เช่น 10075 หารด้วย 13

```
      7750
   ________
13 |100751
    91
    ____
     97
     91
    ____
      65
      65
     ____
       1
       ____
       ____
```

ดังนั้น 10075 หารด้วย 13 เหลือเศษ 1

การหาเศษเหลือของตัวเลขยกกำลัง เช่น

1. เศษเหลือจากการหาร 2^{10} ด้วย 5
2. เศษเหลือจากการหาร 3^{100} ด้วย 7

3. เศษเหลือจากการหาร 17^{1000} ด้วย 13

แนวทางการหาเศษเหลือของตัวเลข x^n ที่หารด้วย p

ขอให้ศึกษาจากคำถามที่ง่ายและยากขึ้นตามลำดับ ดังนี้

ตัวอย่าง 1. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^{100} ด้วย 5 เท่ากับเท่าใด

วิธีที่ 1 เพราะว่า $2^{100} = (2^4)^{25} = (16)^{25} = \ldots 6$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ 2^{100} เป็นเลข 6

สรุปเศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^{100} ด้วย 5 มีค่าเท่ากับ 1

วิธีที่ 2
$$\begin{aligned} 2^{100} &= (2^2)^{50} = 4^{50} = (5-1)^{50} \\ &= \binom{50}{0}5^{50} - \binom{50}{1}5^{49} + \binom{50}{2}5^{48} - \ldots - \binom{50}{49}5 + 1 \end{aligned}$$

เพราะว่า 5 หาร $\binom{50}{k}5^{5-k}$ ลงตัวทุกค่า $k = 0, 1, \ldots, 49$

เพราะฉะนั้น 5 หาร 2^{100} เหลือเศษ 1

หมายเหตุ การแก้ปัญหาข้อนี้วิธีที่ 1 เป็นวิธีที่เข้าใจได้ง่ายกว่าวิธีที่ 2 แต่เมื่อต้องการหาในกรณีที่ตัวหารไม่ใช่เลข 5 หรือ 10 จะพบว่าวิธีที่ 2 จะดีกว่า

ตัวอย่าง 2. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 10^{10} ด้วย 7 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ
$$\begin{aligned} 10^{10} &= (7+3)^{10} \\ &= \binom{10}{0}7^{10} + \binom{10}{1}7^9\cdot 3 + \ldots + \binom{10}{9}7\cdot 3^9 + 3^{10} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นเศษเหลือที่ได้จากการหาร 10^{10} ด้วย 7

ต้องเท่ากับเศษเหลือจากการหาร 3^{10} ด้วย 7

เพราะว่า $3^{10} = (3^2)^5 = 9^5 = (7+2)^5$

$$= \binom{5}{0} 7^5 + \binom{5}{1} 7^4 \cdot 2 + \ldots + \binom{5}{4} 7 \cdot 2^4 + 2^5$$

เพราะฉะนั้นเศษเหลือที่ได้จากการหาร 3^{10} ด้วย 7

ต้องเท่ากับเศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^5 ด้วย 7

เพราะว่า $2^5 = 32$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 4

สรุป 10^{10} หารด้วย 7 เหลือเศษ 4

ตัวอย่าง 3. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 10^{100} ด้วย 13 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $10^{100} = (10^2)^{50} = (100)^{50} = [\ 7(13) + 9\ ]^{50}$

เพราะเศษเหลือจากการหาร 10^{10} ด้วย 13

เท่ากับเศษเหลือที่ได้จากการหาร 9^{50}

$$9^{50} = (9^2)^{25} = (81)^{25} = (\ 6(13) + 3\ )^{25}$$

เพราะฉะนั้นเศษเหลือที่ได้จากการหาร 9^{50} ด้วย 13

ต้องเท่ากับเศษเหลือที่ได้จากการหาร 3^{25} ด้วย 13

$$3^{25} = (3^5)^5 = (243)^5 = (\ 18(13) + 9\ )^5$$

เศษเหลือจากการหาร 3^{25} ด้วย 13 เท่ากับเศษเหลือจากการหาร 9^5 ด้วย 13

$$9^5 = (3^2)^5 = (3^5)^2 = (243)^2 = (\ 18\ (13) + 9)^2$$

เศษเหลือจากการหาร 9^5 ด้วย 13 เท่ากับเศษเหลือจากการหาร 9^2 ด้วย 13

เพราะว่า $9^2 = 81$ หารด้วย 13 เหลือเศษ 3

เพราะฉะนั้น 10^{100} หารด้วย 13 เหลือเศษ 3

ตัวอย่าง 4. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^{100} ด้วย 7 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25} = (14+2)^{25}$

$$= \binom{25}{0} 14^{25} + \binom{25}{1} 14^{24} \cdot 2 + \ldots + \binom{25}{24} 14 \cdot 2^{24} + 2^{25}$$

เพราะว่า 7 หาร $\binom{25}{0}14^{25} + \binom{25}{1} 14^{24} \cdot 2 + \ldots + \binom{25}{24} 14 \cdot 2^{24}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้นเศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^{100} ด้วย 7 ต้องเท่ากับเศษที่ได้จากการหาร 2^{25} ด้วย 7

$$2^{25} = (2^5)^5 = 32^5 = (28+4)^5$$

$$= \binom{5}{0} 28^5 + \binom{5}{1} 28^4 \cdot 4 + \ldots + \binom{5}{4} 28 \cdot 4^4 + 4^5$$

เพราะว่า 7 หาร $\binom{5}{0} 28^5 + \binom{5}{1} 28^4 \cdot 4 + \ldots + \binom{5}{4} 28 \cdot 4^4$ ลงตัว

เพราะฉะนั้นเศษเหลือจากการหาร 2^{25} ด้วย 7 ต้องเท่ากับเศษเหลือที่ได้จากการหาร 4^5 ด้วย 7

$$4^5 = (2^2)^5 = (2^5)^2 = (32)^2 = (28+4)^2 = 28^2 + 2(28)(4) + 4^2$$

$$= 8^2 + 2(28)(4) + 16$$

$$= 28^2 + 2(28)(4) + 14 + 2$$

ดังนั้น 7 หาร 4^5 เหลือเศษ 2 สรุป 7 หาร 2^{100} เหลือเศษ 2

เหตุผลสำคัญที่เราจะอ้างใช้ คือ

ถ้า $x^n = (kp+r)^n$ แล้วเศษเหลือที่ได้จากการหาร x^n ด้วย p เท่ากับเศษเหลือจากการหาร r^n ด้วย p

ข้อพิสูจน์ จากการกระจายทวินาม

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{0} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

ดังนั้น

$$(kp+r)^n = \binom{n}{0}(kp)^n + \binom{n}{1}(kp)^{n-1} r + \ldots + \binom{n}{n-1} kp\, r^{n-1} + \binom{n}{n} r^n$$

เพราะว่า p หาร $\binom{n}{i}(kp)^{n-i} r^i$ ลงตัวทุกค่า $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

เพราะฉะนั้น p หาร $\binom{n}{0}(kp^n) + \binom{n}{1}(kp)^{n-1} r + \ldots + \binom{n}{n-1} kp\, r^{n-1}$ ลงตัว

ดังนั้นเศษเหลือจากการหาร $(kp+r)^n$ ด้วย p ต้องเท่ากับเศษเหลือจากการหาร r^n ด้วย p

ตัวอย่าง 5. เศษเหลือจากการหาร 2^{1000} ด้วย 13 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $2^{1000} = (2^5)^{200} = (32)^{200} = (26+6)^{200} = (2(13)+6)^{200}$

$6^{200} = (6^2)^{100} = (36)^{100} = (26+10)^{10} = (2(13)+10)^{100}$

$10^{100} = (10^2)^{50} = (100)^{50} = (7(13)+9)^{50}$

$9^{50} = 81^{25} = (6(13)+3)^{25}$

$3^{25} = (3^5)^5 = (243)^5 = (18(13)+9)^5$

$9^5 = 59049$

เพราะว่า 59049 หารด้วย 13 เหลือเศษ 3

โดยการอ้างเหตุผลข้างต้น

เศษเหลือจากการหาร 2^{1000} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 6^{200} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 10^{100} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 9^{50} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 3^{25} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 9^{5} ด้วย 13

= เศษเหลือจากการหาร 59049 ด้วย 13

= 3

หมายเหตุ การหาเศษเหลือแบบนี้จะทำได้เร็วหรือช้าขึ้นอยู่กับนักเรียนจะแบ่งตัวเลขออกเป็นผลบวกหรือการแบ่งกำลัง ซึ่งอาจทำได้หลายวิธีเช่น

$2^{1000} = (2^{8})^{125} = (256)^{125} = (\ 19(13) + 9)^{125}$

$9^{125} = 3^{250} = (3^{5})^{50} = (243)^{50} = (\ 18(13) + 9)^{50}$

$9^{50} = (9^{2})^{25} = 81^{25} = (\ 6(13) + 3)^{25}$

$3^{25} = (35)^{5} = (\ 18(13) + 9)^{5}$

$9^{5} = 59049$

ดังนั้นจะได้เศษเหลือของ 2^{1000} หารด้วย 13 เท่ากับ 3 เหมือนกัน

ตัวอย่าง 6. เศษเหลือจากการหาร 7^{2541} ด้วย 4 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $7^{2541} = (4 + 3)^{2541}$

$3^{2541} = (3^{3})^{847} = (27)^{847} = (\ 6(4) + 3)^{847}$

$3^{847} = (3^{7})^{121} = (2187)^{121} = (\ 546(4) + 3)^{121}$

$3^{121} = (3^{11})^{11} = (177147)^{11} = (\ 44286(4) + 3)^{11}$

$3^{11} = 177147$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

เศษจากการหาร 7^{2541} ด้วย 4

= เศษจากการหาร 3^{2541} ด้วย 4

= เศษจากการหาร 3^{847} ด้วย 4

= เศษจากการหาร 3^{121} ด้วย 4

= เศษจากการหาร 3^{11} ด้วย 4

= 3

ในหลักสูตรเกี่ยวกับระบบจำนวนมีการกำหนดสัญลักษณ์ $a \equiv b \bmod m$ หมายความว่า $a - b$ หารด้วย m ลงตัว ตัวอย่างเช่น

$10 - 1$ หารด้วย 3 ลงตัว เพราะฉะนั้น $10 \equiv 1 \bmod 3$

$17 - 5$ หารด้วย 12 ลงตัว เพราะฉะนั้น $17 \equiv 5 \bmod 12$

$100 - 50$ หารด้วย 10 ลงตัว เพราะฉะนั้น $100 \equiv 50 \bmod 10$

ในกรณีที่ $0 \le b < m$ และ $a \equiv b \bmod m$

จะได้ว่า b เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร a ด้วย m

โดยการใช้สัญลักษณ์ $a \equiv b \bmod m$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 7^{2541} \bmod 4 &\equiv 3^{2541} \bmod 4 \equiv 3^{847} \bmod 4 \equiv 3^{121} \bmod 4 \equiv 3^{11} \bmod 4 \\ &\equiv 177147 \bmod 4 \\ &\equiv 3 \bmod 4 \end{aligned}$$

ต่อไปพิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหาร $(m+b)^n$ ด้วย m โดยการกระจายทวินาม

$$(m+b)^n = \binom{n}{0} m^n + \binom{n}{1} m^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} mb^{n-1} + b^n$$

ดังนั้น $(m+b)^n - b^n = \binom{n}{0} m^n + \binom{n}{1} m^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} mb^{n-1}$

เพราะว่า m หาร $\binom{n}{0} m^n + \binom{n}{1} m^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} mb^{n-1}$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น m หาร $(m+b)^n - b^n$ ลงตัว

สรุป $(m+b)^n \equiv b^n \bmod m$

ตัวอย่าง 7. การหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 2^{1000} ด้วย 13

เพราะว่า $2^{1000} = (2^4)^{250} = 16^{250} = (13+3)^{250}$

เพราะฉะนั้น $2^{1000} \equiv (13+3)^{250} \bmod 13 \equiv 3^{250} \bmod 13$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ว่า $(m+b)^n \equiv b^n \bmod m$

จะได้ว่า $(km+b)^n \equiv b^n \bmod m$

นั้นคือ ถ้า m หาร A ลงตัว แล้ว $(A+b)^n \equiv b^n \bmod m$

เพราะว่า $3^{250} = (3^5)^{50} = (243)^{50} = (18(13)+9)^{50}$

เพราะฉะนั้น $3^{250} \bmod 13 \equiv (18(13)+9)^{50} \bmod 13$

$\equiv 9^{50} \bmod 13 \equiv (9^2)^{25} \bmod 13$

$\equiv 81^{25} \bmod 13 \equiv (6(13)+3)^{25} \bmod 13$

$\equiv 3^{25} \bmod 13 \equiv (3^5)^5 \bmod 13$

$\equiv (18(13)+9)^5 \bmod 13 \equiv 9^5 \bmod 13$

$\equiv 3^{10} \bmod 13 \equiv (3^5)^2 \bmod 13$

$\equiv 9^2 \bmod 13 \equiv 81 \bmod 13$

$\equiv 3 \bmod 13$

สรุป $2^{1000} \equiv 3 \bmod 13$

นั้นคือ 2^{1000} หารด้วย 13 เหลือเศษ 3

ต่อไปเราจะหาเหตุผลที่สำคัญซึ่งจะช่วยในการหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร ได้ง่ายขึ้น

ก่อนอื่นขอให้ดูจากตัวอย่างง่าย ๆ ดังนี้

14 หาร 3 เหลือเศษ 2

11 หาร 3 เหลือเศษ 2

(14)(11) = 154 หาร 3 เหลือเศษ 1

เศษที่เหลือจากการหารด้วย 3

(2)(2) = 4 หาร 3 เหลือเศษ 1

ด้วยการเขียนในรูปแบบสัญลักษณ์

$$14 \equiv 2 \bmod 3$$

$$11 \equiv 2 \bmod 3$$

$$(14)(11) \equiv (2)(2) \bmod 3 \equiv 4 \bmod 3 \equiv 1 \bmod 3$$

ในกรณีทั่วไปเราสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 1 a, b, c, d เป็นจำนวนเต็ม , m เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $a \equiv b \bmod m$ และ $c \equiv d \bmod m$ แล้ว

$$ac \equiv bd \bmod m$$

$$a - c \equiv (b - d) \bmod m$$

$$a + c \equiv (b + d) \bmod m$$

ข้อพิสูจน์ $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m$

$$a = mk + b, \quad c = ml + d$$

$a - c = mk + b - ml - d$

$= m(k - l) + (b - d)$

เพราะฉะนั้น m หาร $a - c$ เหลือเศษ $b - d$

นั้นคือ $a - c \equiv (b - d) \bmod m$

ในทำนองเดียวกัน $a + c \equiv (b + d) \bmod m$

เพราะว่า $ac = (mk + b)(ml + d)$

$= m^2 kl + mkd + mbl + bd$

$= m(mkl + kd + bl) + bd$

เพราะฉะนั้น m หาร ac เหลือเศษ bd

นั้นคือ $ac \equiv bd \bmod m$

หมายเหตุ ผลจากทฤษฎีบทจะได้ว่า

ถ้า $a \equiv b \bmod m$ แล้ว $a^n \equiv b^n \bmod m$ ทุกค่า n ที่เป็นจำนวนเต็ม

ผลจากทฤษฎีบท 1 นี้จะช่วยให้การหาเศษเหลือง่ายขึ้น

ตัวอย่าง 8. การหาเศษเหลือของ 10^{10} หารด้วย 7

วิธีทำ เพราะว่า 10 หารด้วย 7 เหลือเศษ 3

เพราะฉะนั้น $10 \equiv 3 \bmod 7$

ดังนั้น $10^{10} \equiv 3^{10} \bmod 7$

เพราะว่า $3^{10} = 9^5$ และ $9 \equiv 2 \bmod 7$

เพราะฉะนั้น $3^{10} \bmod 7 \equiv 9^5 \bmod 7$

$\equiv 2^5 \bmod 7$

$\equiv 32 \bmod 7$

$\equiv 4 \bmod 7$

สรุป 10^{10} หารด้วย 7 เหลือเศษ 4

ตัวอย่าง 9. การหาเศษเหลือจากการหาร 10^{100} ด้วย 13

วิธีทำ $10^{100} = (10^2)^{50} = 100^{50}$

เพราะว่า 100 หารด้วย 13 เหลือเศษ 9

เพราะฉะนั้น $100 \equiv 9 \bmod 13$

ดังนั้น $100^{50} \equiv 9^{50} \bmod 13$

$\equiv (9^2)^{25} \bmod 13 \qquad \equiv 81^{25} \bmod 13$

$\equiv (6(13) + 3)^{25} \bmod 13 \qquad \equiv 3^{25} \bmod 13$

$\equiv (3^5)^5 \bmod 13 \qquad \equiv (243)^5 \bmod 13$

$\equiv (18(13) + 9)^5 \bmod 13 \qquad \equiv 9^5 \bmod 13$

$9 \equiv 9 \bmod 13$

$9^2 \equiv 9^2 \bmod 13 \equiv 81 \bmod 13 \equiv 3 \bmod 13$

$9^4 \equiv 3^2 \bmod 13 \equiv 9 \bmod 13$

$9^5 \equiv 9(9) \bmod 13 \equiv 81 \bmod 13 \equiv 3 \bmod 13$

สรุป $10^{100} \equiv 100^{50} \bmod 13 \qquad \equiv 9^{50} \bmod 13$

$\equiv 9^5 \bmod 13 \qquad \equiv 3 \bmod 13$

นั่นคือ 10^{100} หารด้วย 13 เหลือเศษ 3

ตัวอย่าง 10. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 13^{100} ด้วย 17 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เศษเหลือที่ได้จากการหาร 13^{100} ด้วย 17

$\equiv 13^{100} \bmod 17$	$\equiv (13^2)^{50} \bmod 17$
$\equiv (169)^{50} \bmod 17$	$\equiv (9(17) + 16)^{50} \bmod 17$
$\equiv 16^{50} \bmod 17$	$\equiv (2^4)^{50} \bmod 17$
$\equiv (2^5)^{40} \bmod 17$	$\equiv (32)^{40} \bmod 17$
$\equiv (17 + 15)^{40} \bmod 17$	$\equiv (15)^{40} \bmod 17$
$\equiv (15^2)^{20} \bmod 17$	$\equiv (225)^{20} \bmod 17$
$\equiv 4^{20} \bmod 17$	$\equiv 2^{40} \bmod 17$
$\equiv (2^5)^8 \bmod 17$	$\equiv 32^8 \bmod 17$
$\equiv (17 + 15)^8 \bmod 17$	$\equiv 15^8 \bmod 17$
$\equiv (15^2)^4 \bmod 17$	$\equiv (225)^4 \bmod 17$
$\equiv 4^4 \bmod 17$	$\equiv 256 \bmod 17$
$\equiv 1 \bmod 17$	

สรุป 13^{100} หารด้วย 17 เหลือเศษ 1

ต่อไปเราจะหาขั้นตอนวิธีที่จะทำให้การคำนวณง่ายขึ้น ก่อนอื่นขอทบทวนแนวคิดของการหาหลักหน่วยของ 3^n

เพราะว่า $3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$\vdots$

$3^{4k} = \ldots 1$ หลักหน่วยเป็นเลข 1

$3^{4k+1} = \ldots 3$ หลักหน่วยเป็นเลข 3

$3^{4k+2} = \ldots 9$ หลักหน่วยเป็นเลข 9

$3^{4k+3} = \ldots 7$ หลักหน่วยเป็นเลข 7

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ 3^n จึงขึ้นอยู่กับเศษเหลือของ n หารด้วย 4

แนวทางการหาเศษเหลือจาก a^n ด้วย m

1. หาค่า k น้อยสุดที่ทำให้ $a^k \equiv 1 \mod m$
2. หาเศษเหลือจากการหาร n ด้วย k สมมติเป็น p
3. จะได้ว่า $a^n \equiv a^p \mod m$

ตัวอย่าง 11. การหาเศษเหลือจากการหาร 13^{100} ด้วย 17

ขั้นที่ 1 $13 \equiv 13 \mod 17$

$13^2 \equiv 169 \mod 17 \equiv 16 \mod 17$

$13^3 \equiv 13(16) \mod 17 \equiv 208 \mod 17 \equiv 4 \mod 17$

$13^4 \equiv 13(4) \mod 17 \equiv 52 \mod 17 \equiv 1 \mod 17$

ได้ $k = 4$

ขั้นที่ 2 100 หาร 4 เหลือเศษ 0

ขั้นที่ 3 $13^{100} \equiv 13^0 \mod 17 \equiv 1 \mod 17$

สรุป 13^{100} หาร 17 เหลือเศษ 1

ตัวอย่าง 12. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 10^{100} ด้วย 7

วิธีทำ ขั้นที่ 1 หาค่า k น้อยสุดที่ทำให้ $10^k \equiv 1 \bmod 7$

$10 \equiv 10 \bmod 7 \equiv 3 \bmod 7$

$10^2 \equiv 30 \bmod 7 \equiv 2 \bmod 7$

$10^3 \equiv 20 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$

$10^4 \equiv 60 \bmod 7 \equiv 4 \bmod 7$

$10^5 \equiv 40 \bmod 7 \equiv 5 \bmod 7$

$10^6 \equiv 50 \bmod 7 \equiv 1 \bmod 7$

สรุป $k = 6$

ขั้นที่ 2 $100 = 16(6) + 4$

ขั้นที่ 3 $10^{100} \equiv 10^{16(6)+4} \bmod 7 \equiv 10^4 \bmod 7 \equiv 4 \bmod 7$

สรุป 7 หาร 10^{100} เหลือเศษ 4

ท้ายสุดของปัญหาในหัวข้อนี้จะขอนำทฤษฎีของระบบจำนวนมาแนะนำให้ใช้เพื่อเกิดประโยชน์ ในการคิดเลขให้เร็วขึ้น ดังนี้

ทฤษฎีบท 2 ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ a เป็นจำนวนบวกและ p หาร a ไม่ลงตัว แล้ว $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$

ตัวอย่าง 13.. จงหาเศษเหลือจากการหาร 10^{100} ด้วย 17

วิธีทำ เพราะว่า $10^{16} \equiv 1 \bmod 17$ และ $100 = 6(16) + 4$

เพราะฉะนั้น $10^{16} \equiv 1 \bmod 17$

$$(10^{16})^6 \equiv 1^6 \bmod 17$$

$$10^{6(16)} \equiv 1 \bmod 17$$

$$10^{16(16)+4} \equiv 10^4 \bmod 17$$

เพราะว่า $10^2 \equiv 100 \bmod 17 \equiv 15 \bmod 17$

$$10^3 \equiv 150 \bmod 17 \equiv 14 \bmod 17$$

$$10^4 \equiv 140 \bmod 17 \equiv 4 \bmod 17$$

เพราะฉะนั้น 10^{100} หาร 17 เหลือเศษ 4

ตัวอย่าง 14.. จงหาเศษเหลือจากการหาร $2^{100!}$ ด้วย 19

วิธีทำ เพราะว่า $2^{18} \equiv 1 \bmod 19$ และ $\frac{100!}{18}$ เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $(2^{18})^{\frac{100!}{18}} \equiv 1 \bmod 19$

$$2^{100!} \equiv 1 \bmod 19$$

เพราะฉะนั้น 19 หาร $2^{100!}$ เหลือเศษ 1

คำถามเพิ่มเติม

1. จงหาเศษเหลือจากการหาร 5^{50} ด้วย 11
2. จงหาเศษเหลือจากการหาร 7^{100} ด้วย 9
3. จงหาเศษเหลือจากการหาร 5^{5^5} ด้วย 17
4. จงหาเศษเหลือจากการหาร $2543^{2000!}$ ด้วย 19

ตอบ 1. 1 , 2. 7 , 3. 5 , 4. 1

ข้อมูลในตารางต่อไปนี้เป็นผลการคำนวณของโปรแกรม MATHCAD

คำสั่ง mod [3^n , n] หมายถึงเศษเหลือของการหาร 3^n ด้วย n

n	3^n	$\mathrm{mod}(3^n, n)$
1	3	0
2	9	1
3	27	0
4	81	1
5	243	3
6	729	3
7	2187	3
8	6561	1
9	19683	0
10	59049	9
11	177147	3
12	531441	9
13	1594323	3
14	4782969	9
15	14348907	12
16	43046721	1

n	5^n	$\mathrm{mod}(5^n, n)$
1	5	0
2	25	1
3	125	2
4	625	1
5	3125	0
6	15625	1
7	78125	5
8	390625	1
9	1953125	8
10	9765625	5
11	48828125	5
12	244140625	1
13	1220703125	5
14	6103515625	11
15	30517578125	5
16	152587890625	1

n	7^n	$\mathrm{mod}(7^n, n)$
1	7	0
2	49	1
3	343	1
4	2401	1
5	16807	2
6	117649	1
7	823543	0
8	5764801	1
9	40353607	1
10	282475249	9
11	1977326743	7

n	9^n	$\mathrm{mod}(9^n, n)$
1	9	0
2	81	1
3	729	0
4	6561	1
5	59049	4
6	531441	3
7	4782969	2
8	43046721	1
9	387420489	0
10	3486784401	1
11	31381059609	9

ถ้า 33333 หาร N = 444…4 ลงตัวแล้ว N เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

จากตัวเลขง่าย ๆ จะเห็นว่า 3 หาร 444 ลงตัว 3 หาร 444444 ลงตัว 33 หาร 444444 ลงตัว เราจะหาแนวทางในการหารูปแบบตัวเลขที่ทุก หลักเหมือนกันที่หารด้วย 333…3 ลงตัว ตัวอย่างเช่น 3 หาร 111 ลงตัว 33 หาร 111111 ลงตัว 333 หาร 222222222 ลงตัว

ตัวอย่าง 1. จงหาจำนวนเต็มบวก N ที่เล็กที่สุดและตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 4 ที่ทำให้ 3 หารลงตัว

วิธีทำ $\frac{4}{3} = 1.33$, $\frac{44}{3} = 14.67$, $\frac{444}{3} = 148$

สรุป N = 444

ตัวอย่าง 2. จงหาจำนวนเต็มบวก N ที่เล็กที่สุดและตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 4 ที่ทำให้ 33 หาร N ลงตัว

วิธีทำ $\frac{444}{33} = 13.45$, $\frac{4444}{33} = 134.67$, $\frac{44444}{33} = 1346.78$,

$\frac{444444}{33} = 13468$ สรุป N = 444444

หมายเหตุ คำถามที่ถามว่า n = 33 , N เป็นตัวเลข x หลักที่ตัวเลขทุกหลักของ N เป็นเลข 4 ค่า x น้อยสุดที่ทำให้ n หาร N ลงตัว , x เท่ากับเท่าใด จากแนวคิดข้อ 2 นี้จะได้ x = 6 เพื่อให้เห็นแนวทางสำหรับกรณีทั่วไป ในการหาจำนวนหลักที่น้อยที่สุดของตัวเลข N = 444… 4 ซึ่ง 33 หารลงตัว จึงพิจารณาในลักษณะของสูตรเกี่ยวกับการกระจายพหุนาม , การแยกตัวประกอบ , ผลบวกลำดับเรขาคณิตและการกระจายทวินาม ดังนี้

1. $A^{2n+1} - B^{2n+1} = (A - B)(A^{2n} + A^{2n-1}B + \ldots + B^{2n})$

2. $A^{2n+1} + B^{2n+1} = (A + B)(A^{2n} - A^{2n-1}B + \ldots + B^{2n})$

3. $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

4. $(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n$

ตัวอย่างเช่น
$$\begin{aligned}
444444 &= 4 + 40 + 400 + 4000 + 40000 + 400000 \\
&= 4 + 4\cdot 10 + 4\cdot 10^2 + 4\cdot 10^3 + 4\cdot 10^4 + 4\cdot 10^5 \\
&= \frac{(4)(1-10^6)}{1-10} \\
&= \frac{4}{9}(10^6 - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10^6 - 1 &= (10^2 - 1)(10^4 + 10^2 + 1) \\
10^5 - 1 &= (10 - 1)(10^4 + 10^3 + 10^2 + 10 + 1) \\
10^4 &= (9 + 1)^4 \\
&= \binom{4}{0} 9^4 + \binom{4}{1} 9^3 + \binom{4}{2} 9^2 + \binom{4}{3} 9 + \binom{4}{4} \\
&= 9^4 + 4\cdot 9^3 + 6\cdot 9^2 + 4\cdot 9 + 1 \\
10^4 + 10^2 + 1 &= (9^4 + 4\cdot 9^3 + 6\cdot 9^2 + 4\cdot 9 + 1) + (9^2 + 2\cdot 9 + 1) + 1 \\
&= (9^4 + 4\cdot 9^3 + 7\cdot 9^2 + 6\cdot 9) + 3
\end{aligned}$$

ดังนั้น $10^4 + 10^2 + 1$ หารด้วย 3 ลงตัว

หมายเหตุ ทุกค่า x และ y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก 3 หาร $10^x + 10^y + 1$ ลงตัว

ข้อพิสูจน์โดยย่อ
$$\begin{aligned}
10^x &= 1000\ldots0 = 999\ldots9 + 1 \\
10^y &= 1000\ldots0 = 999\ldots9 + 1 \\
10^x + 10^y + 1 &= 999\ldots9 + 1 + 999\ldots9 + 1 + 1
\end{aligned}$$

$= 999\ldots9 + 999\ldots9 + 3$

สรุป 3 หาร $10^x + 10^y + 1$ ลงตัว

ให้ N เป็นจำนวนเต็มประกอบด้วยเลข 4 ทั้งหมด x หลัก

$$N = 444\ldots4 \qquad \text{(จำนวน x หลัก)}$$

$$= 4 + 40 + 400 + \ldots + 4\cdot10^{x-1}$$

$$= \frac{(4)(1-10^x)}{1-10}$$

$$= \frac{(4)(10^x-1)}{10-1}$$

$$= \frac{4}{9}(10^x - 1)$$

$$n = 33$$

$$= 3 + 30$$

$$= \frac{(3)(1-10^2)}{1-10}$$

$$= \frac{(3)(10^2-1)}{10-1}$$

$$= \frac{3}{9}(10^2 - 1)$$

$$\frac{N}{n} = \frac{\frac{4}{9}(10^x-1)}{\frac{3}{9}(10^2-1)}$$

$$= \frac{4(10^x-1)}{3(10^2-1)}$$

จากลักษณะของ $\frac{4(10^x-1)}{3(10^2-1)}$ จะได้ว่า $10^2 - 1$ ต้องหาร $10^x - 1$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $x > 2$

$x = 3$;

$$10^3 - 1 = (10-1)(10^2+10+1)$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{(10^3-1)}{(10^2-1)} = \frac{4}{3}\,\frac{(10-1)(10^2+10+1)}{(10-1)(10+1)}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$x = 4$;

$$(10^4 - 1) = (10^2-1)(10^2+1)$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{(10^4-1)}{(10^2-1)} = \frac{4}{3}\,\frac{(10^2-1)(10^2+1)}{(10^2-1)}$$

$$= \frac{4}{3}(10^2+1)$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$x = 5$;

$$10^5 - 1 = (10-1)(10^4+10^3+10^2+10+1)$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{(10^5-1)}{(10^2-1)} = \frac{4}{3}\,\frac{(10-1)(10^4+10^3+10^2+10+1)}{(10-1)(10+1)}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$x = 6$;

$$10^6 - 1 = (10^2)^3 - 1$$

$$= (10^2-1)(10^4+10^2+1)$$

เพราะว่า

$$10^4 + 10^2 + 1 = (9+1)^4 + (9+1)^2 + 1$$

$$= 9^4 + 4\cdot 9^3 + 6\cdot 9^2 + 4\cdot 9 + 1 + 9^2 + 2\cdot 9 + 1 + 1$$

$$= 9^4 + 4\cdot 9^3 + 7\cdot 9^2 + 6\cdot 9 + 3$$

เพราะฉะนั้น 3 หาร $10^4 + 10^2 + 1$ ลงตัว สรุป $\frac{4}{3}\,\frac{(10^6-1)}{(10^2-1)}$ เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่าง 3. จงหาจำนวนเต็มบวก N ที่เล็กที่สุดและตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 4 ที่ทำให้ 333 หาร N ลงตัว

วิธีทำ $n = 333$

$N = 444\ldots4$ จำนวน x หลัก

เพราะฉะนั้น $N = 4(111\ldots1)$

$$= 4(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{x-1})$$

$$= \frac{4(1)(1-10^x)}{1-10}$$

$$= \frac{4}{9}(10^x - 1)$$

$$n = 3(111)$$

$$= 3(1 + 10 + 100)$$

$$= \frac{3(1)(1-10^3)}{1-10}$$

$$= \frac{3}{9}(10^3 - 1)$$

$$\frac{N}{n} = \frac{\frac{4}{9}(10^x - 1)}{\frac{3}{9}(10^3 - 1)}$$

$$= \frac{4(10^x - 1)}{3(10^3 - 1)}$$

เพราะว่า 4 และ 3 , $10^3 - 1$ ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

เพราะฉะนั้น n หาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $3(10^3 - 1)$ หาร $10^x - 1$ ลงตัว

เพราะว่า $(10^3)^{\frac{x}{3}} - 1 = (10^3 - 1)((10^3)^{\frac{x}{3}-1} + (10^3)^{\frac{x}{3}-2} + \ldots + 10^3 + 1)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{10^x - 1}{3(10^3 - 1)} = \dfrac{(10^3)^{\frac{x}{3}-1} + (10^3)^{\frac{x}{3}-2} + \ldots + 10^3 + 1}{3}$

x น้อยที่สุดที่ทำให้ 3 หาร $(10^3)^{\frac{x}{3}-1} + (10^3)^{\frac{x}{3}-2} + \ldots + 10^3 + 1$ ลงตัว

คือ x ที่ทำให้ $(10^3)^{\frac{x}{3}-1} + (10^3)^{\frac{x}{3}-2} + \ldots + 10^3 + 1$ มี 3 พจน์บวกกัน

นั้นคือ $\frac{x}{3} - 1 = 2$, $x = 9$ สรุป $N = 444444444$

คำถามจาก Australian Mathematics Competition

Let n = 333…3 , consisting of 100 3's Let N be the least number containing only 4's , such that N is divisible by n. Then N consists of x 4's , where x equals.

(A) 180 (B) 240 (C) 150 (D) 400 (E) 300

วิธีทำ n = 333…3 เป็นตัวเลข 100 หลักที่ตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 3

N = 444…4 เป็นตัวเลข x หลักที่ตัวเลขทุกหลักเป็นตัวเลข 4

$$n = 3 + 30 + 300 + \ldots + 3 \cdot 10^{99}$$

$$= 3 + 3 \cdot 10 + 3 \cdot 10^2 + \ldots + 3 \cdot 10^{99}$$

$$= \frac{(3)(1-10^{100})}{1-10}$$

$$= \frac{3}{9}(10^{100} - 1)$$

N = 444…4 จำนวน x ตัว

$$= 4 + 40 + 400 + \ldots + 4 \cdot 10^{x-1}$$

$$= \frac{4(1-10^x)}{1-10}$$

$$= \frac{4}{9}(10^x - 1)$$

$$\frac{N}{n} = \frac{\frac{4}{9}(10^x - 1)}{\frac{3}{9}(10^{100} - 1)}$$

$$= \frac{4(10^x - 1)}{3(10^{100} - 1)}$$

$10^x - 1 = (10^{100})^{\frac{x}{100}} - 1$

$= [\, 10^{100} - 1 \,][\, (10^{100})^{\frac{x}{100}-1} + (10^{100})^{\frac{x}{100}-2} + \ldots + 10^{100} + 1 \,]$

n หาร N ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $3(10^{100} - 1)$ หาร $10^x - 1$ ลงตัว

ก็ต่อเมื่อ 3 หาร $[\, (10^{100})^{\frac{x}{100}-1} + (10^{100})^{\frac{x}{100}-2} + \ldots + 10^{100} + 1 \,]$

เพราะว่าเราต้องการ x ที่มีค่าน้อยสุด

เพราะฉะนั้นเลือก x ที่ทำให้ $[\, (10^{100})^{\frac{x}{100}-1} + (10^{100})^{\frac{x}{100}-2} + \ldots + 10^{100} + 1 \,]$

มีจำนวนพจน์เท่ากับ 3พจน์ $\quad \frac{x}{100} - 1 = 2$

เพราะฉะนั้น $\quad x = 300$

ต่อไปเราจะหาแนวทางสำหรับกรณีทั่วไป

ก่อนอื่นขอให้สังเกตว่า $\frac{444}{3} = \frac{4(111)}{3}$, $\frac{444444}{33} = \frac{4(111111)}{33}$

การหาตัวเลข x หลักที่ประกอบด้วยเลข 1 ทุกหลักและมีค่าน้อยสุดที่ทำให้ 3 หาร 111…1 ลงตัวคือ 111 , 33 หาร 111…1 ลงตัวคือ 111111 นั้นคือการที่ตัวเลขทุกหลักเป็นเลขเดียวกันจะได้ว่า 111 เป็นค่าน้อยสุดที่ 3 หารลงตัว 222 เป็นค่าน้อยสุดที่ 3 หารลงตัว นอกจากนั้น 444 , 555 , 777 , 888 เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ตัวเลขทุกหลักเหมือนกันและหารด้วย 3 ลงตัว

คำถาม จำนวนเต็ม N = 111…1 จำนวน n หลัก หารด้วย M = 333…3 จำนวน m หลักลงตัว n มีค่าน้อยสุดเท่ากับเท่าใด

คำตอบ n = 3m

แนวคิด $N = 111\ldots1$ จำนวน n หลัก

$= 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{n-1}$

$$= \frac{1-10^n}{1-10}$$

$$= \frac{10^n - 1}{10 - 1}$$

M = 333…3 จำนวน m หลัก

$$= 3 + 30 + 300 + \ldots + 3\cdot 10^{m-1}$$

$$= \frac{3(1-10^m)}{1-10}$$

$$= \frac{3(10^m - 1)}{10 - 1}$$

$$\frac{N}{M} = \frac{\left(\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right)}{\left(3\frac{(10^m - 1)}{10 - 1}\right)}$$

$$= \frac{10^n - 1}{3(10^m - 1)}$$

$$= \frac{(10^m)^{\frac{n}{m}} - 1}{3(10^m - 1)}$$

$$= \frac{(10^m - 1)[(10^m)^{\frac{n}{m}-1} + (10^m)^{\frac{n}{m}-2} + \ldots + 10^m + 1]}{3(10^m - 1)}$$

$$= \frac{(10^m)^{\frac{n}{m}-1} + (10^m)^{\frac{n}{m}-2} + \ldots + 10^m + 1}{3}$$

n ที่มีค่าน้อยสุดที่ทำให้ 3 หาร $(10^m)^{\frac{n}{m}-1} + (10^m)^{\frac{n}{m}-2} + \ldots + 10^m + 1$ ลงตัว

คือ n ที่ทำให้ $(10^m)^{\frac{n}{m}-1} + (10^m)^{\frac{n}{m}-2} + \ldots + 10^m + 1$ มี 3 พจน์

เพราะฉะนั้น n ได้จากสมการ $\frac{n}{m} - 1 = 2$, $n = 3m$

ตัวอย่างเช่น

m	n
3	111
33	111,111
333	111,111,111
3333	111,111,111,111

เพื่อความสะดวกในการเขียนจำนวนเรากำหนดให้ k = 1 , 2 , 3 , … , 9 และ x เป็นจำนวนเต็มบวก

N(k , x) หมายถึงจำนวนเต็มบวก x หลักและทุกหลักเป็นเลข k

ตัวอย่างเช่น N(2 , 4) = 2222

N(4 , 2) = 44

N(3 , 10) = 3,333,333,333

ผลจากข้อสรุปข้างต้น

1. เพราะว่า 444 เป็นตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 4 และมีค่าน้อยสุดที่ 3 หารลงตัว เพราะฉะนั้น N(3 , 4) เป็นค่าน้อยสุดที่ทุกหลักเป็น 4 และ N(1 , 3) หาร N(3 , 4) ลงตัว
2. N(1 , 12) เป็นค่าน้อยสุดที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และ N(3 , 4) หารลงตัว
3. N(4 , 300) เป็นค่าน้อยสุดที่ทุกหลักเป็นเลข 4 และ N(3 , 100) หารลงตัว

สรุป N(1 , 3n) เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยสุดที่ทุกหลักเป็นเลข 1 และ N(3 , n) หารลงตัว นอกจากนั้นเมื่อ x = 1 , 2 , 4 , 5 , 7 , 8 , 9 N(x , 3n) เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยสุดที่ทุกหลักเป็นเลข x และ N(3 , n) หาร N(x , 3n) ลงตัว

ตัวอย่าง 4. P เป็นจำนวนเต็มที่ตัวเลขทุกหลักเป็น 2 และ 33333 หาร P ลงตัว P มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ 33333 = N(3 , 5) เพราะฉะนั้น 222…2 ค่าน้อยสุดที่ 33333 หาร 222…2 ลงตัว คือ N(2 , (3)(5)) = N(2 , 15)

เพราะฉะนั้น P = 222,222,222,222,222

ตัวอย่าง 5. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 5 และ 3333 หาร P ลงตัว ถ้า P มีค่าน้อยสุดแล้วผลบวกของตัวเลขทุกหลักใน P เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ 3333 = N(3 , 4) 555…5 ค่าน้อยสุดที่ 3333 หาร 555…5 ลงตัว คือ N(5 , (3)(4)) = N(5 , 12) เพราะฉะนั้น P = 555,555,555,555

สรุปผลบวกของตัวเลขทุกตัวใน P เท่ากับ 5(12) = 60

ตัวอย่าง 6. A = { 1 , 2 , 3 , … , 1000 }

B = {P∈A | P เป็นจำนวนเต็มที่ตัวเลขทุกหลักเหมือนกัน และ 3 หาร P ลงตัว}

จำนวนสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ สมาชิกของ B คือ 3 , 6 , 9

33 , 66 , 99

111 , 222 , 333 , … , 888 , 999

สรุป n(B) = 15

ตัวอย่าง 7. A = { 1 , 2 , 3 , … , 1000000 }

B = {P∈A | P เป็นจำนวนเต็มที่ตัวเลขทุกหลักเหมือนกัน และ 33 หาร P ลงตัว }

ผลบวกของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ สมาชิกในเซต B จำแนกเป็น

กรณี 1 ตัวเลข 2 หลัก มี 33 , 66 , 99

$33 + 66 + 99 = 11(3 + 6 + 9) = 198$

กรณี 2 ตัวเลข 3 หลัก ไม่มี

กรณี 3 ตัวเลข 4 หลัก 3333 , 6666 , 9999

$3333 + 6666 + 9999 = 1111(3 + 6 + 9) = 19998$

กรณี 4 ตัวเลข 5 หลัก ไม่มี

กรณี 5 ตัวเลข 6 หลัก 111111 , 222222 , … , 999999

$111111 + 222222 + \ldots + 999999$

$= 111111(1 + 2 + 3 + \ldots + 9) = 111111(45) = 4999995$

สรุปผลบวกของสมาชิกในเซต B = $198 + 19998 + 4999995 = 5020191$

ตัวอย่าง 8. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักของ P เป็นเลข 1 ค่าน้อยสุดของ P ที่ 9 หาร P ลงตัวเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ให้ P = 111…1 เป็นจำนวนเต็ม m หลัก

$111\ldots1 = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}$

เพราะว่าตัวเลข $1 , 10 , 10^2 , \ldots , 10^{m-1}$ แต่ละตัวเมื่อหารด้วย 9 จะเหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น m น้อยสุดที่ทำให้ 9 หาร $1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}$ ลงตัวคือ $m = 9$ เพราะฉะนั้น P = 111111111

ข้อสังเกต เพราะว่า $222\ldots2 = 2(111\ldots1)$ เพราะฉะนั้น 222222222 เป็นจำนวนเต็มน้อยสุดที่ทุกหลักเป็นเลข 2 และ 9 หาร 222222222 ลงตัว ใน

ทำนองเดียวกัน 444444444 , 555555555 , 777777777 และ 888888888 หาร

ด้วย 9 ลงตัว

ตัวอย่าง 9. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักของ P เป็นเลข 1 และ 99 หาร P ลงตัว ค่าน้อยสุดของ P เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ให้ P = 111…1 เป็นจำนวนเต็ม m หลัก

$$P = 111\ldots1$$

$$= 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}$$

$$= \frac{10^m - 1}{9}$$

$$\frac{P}{99} = \frac{10^m - 1}{9(99)}$$

$$= \frac{10^m - 1}{9(10^2 - 1)}$$

$$= \frac{(10^2)^{\frac{m}{2}} - 1}{9(10^2 - 1)}$$

$$= \frac{(10^2 - 1)[(10^2)^{\frac{m}{2}-1} + (10^2)^{\frac{m}{2}-2} + \ldots + 10^2 + 1]}{9(10^2 - 1)}$$

$$= \frac{(10^2)^{\frac{m}{2}-1} + (10^2)^{\frac{m}{2}-2} + \ldots + 10^2 + 1}{9}$$

เพราะว่าตัวเลขแต่ละตัวของ $(10^2)^{\frac{m}{2}-1}$, $(10^2)^{\frac{m}{2}-2}$, … , 10^2 และ 1

เมื่อหารด้วย 9 จะเหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น m น้อยสุดที่ทำให้ 9 หาร

$(10^2)^{\frac{m}{2}-1} + (10^2)^{\frac{m}{2}-2} + \ldots + (10^2) + 1$ ลงตัว คือ m ที่ทำให้ $\frac{m}{2} - 1 = 8$

เพราะฉะนั้น m = 18 สรุป P = 111,111,111,111,111,111

จากตัวอย่างข้างต้นเราสามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไปได้ดังนี้

ให้ $N(1\,,m) = 111\ldots1$ เป็นจำนวนเต็ม m หลัก

$N(9\,,n) = 999\ldots9$ เป็นจำนวนเต็ม n หลัก

$$\frac{N(1,m)}{N(9,n)} = \frac{1+10+10^2+\ldots+10^{m-1}}{9(1+10+10^2+\ldots+10^{n-1})}$$

$$= \frac{(\frac{10^m-1}{10-1})}{[\frac{9(10^n-1)}{10-1}]}$$

$$= \frac{10^m-1}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n)^{\frac{m}{n}}-1}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n-1)[(10^n)^{\frac{m}{n}-1}+(10^n)^{\frac{m}{n}-2}+\ldots+10^n+1]}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n)^{\frac{m}{n}-1}+(10^n)^{\frac{m}{n}-2}+\ldots+10^n+1}{9}$$

m น้อยสุดที่ทำให้ 9 หาร $(10^n)^{\frac{m}{n}-1}+(10^n)^{\frac{m}{n}-2}+\ldots+(10^n)+1$ ลงตัว

คือ m ที่ทำให้ $\frac{m}{n}-1=8\,,\ m=9n$

สรุป $m=9n$ เป็นค่าน้อยสุดที่ทำให้ $N(9\,,n)$ หาร $N(1\,,m)$ ลงตัว

ตัวอย่าง 10. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักเป็นเลข 5 ถ้า P เป็นจำนวนเต็ม m หลักและ 999 หาร P ลงตัว แล้วค่าน้อยสุดของ m เท่ากับเท่าใด

แนวคิด $P = 555\ldots5$ เป็นจำนวนเต็ม m หลัก

$$= N(5, m)$$

$$= 5N(1, m)$$

$$\frac{P}{999} = \frac{5N(1,m)}{N(9,3)}$$

999 หาร P ลงตัวก็ต่อเมื่อ N(9 , 3) หาร N(1 , m) ลงตัว m ค่าน้อยสุดที่ N(9 , 3) หาร N(1 , m) ลงตัวคือ m = (3)(9) = 27

สรุป P เป็นจำนวนเต็ม 27 หลัก

ตัวอย่าง 11. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักของ P เป็นเลข 1 7 หาร P ลงตัว ค่าน้อยสุดของ P เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ แบบที่ 1 ใช้การหาโดยตรง เช่น $\frac{111}{7}$, $\frac{1111}{7}$, ...

จะได้ $\frac{111111}{7}$ = 15873 สรุป P น้อยสุดเท่ากับ 111111

แบบที่ 2 เพราะว่า $P = 111\ldots1$

$$= 1 + 10 + 100 + \ldots + 10^{m-1}$$

เพราะฉะนั้นพิจารณาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 1 , 10 , 10^2 , ... ด้วย 7

		เศษเหลือ	ผลรวมของเศษ
1	1	1	1
10	$1 \times 7 + 3$	3	4
100	$14 \times 7 + 2$	2	6
1000	$142 \times 7 + 6$	6	12
10000	$1428 \times 7 + 4$	4	16
100000	$14285 \times 7 + 5$	5	21

เพราะฉะนั้น $1 + 10 + \ldots + 100000 = 111111$ หารด้วย 7 ลงตัว

สรุป $P = 111111$ เป็นค่าน้อยสุด

ตัวอย่าง 12. P เป็นจำนวนเต็มบวกที่ตัวเลขทุกหลักของ P เป็นเลข 1

777 หาร P ลงตัว ค่าน้อยสุดของ P เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ ให้ $P = 111\ldots1$ เป็นจำนวนเต็ม m หลัก

$$P = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{m-1}$$

$$= \frac{1-10^m}{1-10}$$

$$777 = 7(111)$$

$$= 7(1 + 10 + 10^2)$$

$$= \frac{7(1-10^3)}{(1-10)}$$

$$\frac{P}{777} = \frac{\left(\frac{1-10^m}{1-10}\right)}{\left(\frac{7(1-10^3)}{1-10}\right)}$$

$$= \frac{1-10^m}{7(1-10^3)}$$

$$= \frac{1-(10^3)^{\frac{m}{3}}}{7(1-10^3)}$$

$$= \frac{(1-10^3)(1+10^3+(10^3)^2+\ldots+(10^3)^{\frac{m}{3}-1})}{7(1-10^3)}$$

$$= \frac{1+10^3+(10^3)^2+\ldots+(10^3)^{\frac{m}{3}-1}}{7}$$

การหาค่า m น้อยสุดพิจารณาเศษเหลือและผลรวมของเศษเหลือที่ได้จากการ

หาร 1 , 10^3 , 10^6 , 10^9 , … ด้วย 7

	เศษเหลือ	ผลรวมของเศษ
1	1	1
$10^3 = 1000$	6	7

สรุป m น้อยสุดคือ m ที่ทำให้ $\frac{m}{3} - 1 = 1$, m = 6

ปัญหาที่เราจะศึกษาต่อไปคือกรณีที่ตั้งหารอยู่ในรูป 111…1 , 222…2 , 444…4 , 555…5 , … , 999…9

กรณีที่ 1 111…1 = N(1 , n) เป็นตัวหาร

N(2 , m) = 222…2 น้อยสุดที่ทำให้ 111 หารลงตัวคือ 222

N(7 , m) = 777…7 น้อยสุดที่ทำให้ 1111 หารลงตัวคือ 7777

สรุปตัวเลข xxx…x ที่หารด้วย 111…1 และ xxx…x มีค่าน้อยสุด

จำนวนหลักของ xxx…x ต้องเท่ากับ จำนวนหลักของ 111…1

ดังนั้น N(x , n) เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ N(1 , n) หาร N(x , n) ลงตัว

กรณีที่ 2 222…2 = N(2 , n) เป็นตัวหาร

กรณีที่ 2.1 x = 2 , 4 , 6 , 8

$$\frac{xxx...x}{222...2} = \frac{yyy...y}{111...1} , y = \frac{x}{2}$$

yyy…y น้อยสุดที่หารด้วย 111…1 ลงตัว จำนวนหลักของ

yyy…y ต้องเท่ากับจำนวนหลักของ xxx…x

สรุปจำนวนหลักของ 222…2 ต้องเท่ากับจำนวนหลักของ xxx…x

นั้นคือ N(x , n) เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ N(2 , n) หาร N(x , n) ลงตัว

กรณีที่ 2.2 $x = 1, 3, 5, 7, 9$

$$\frac{N(x,m)}{N(2,n)} = \frac{xxx...x}{222...2}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณีที่ 3 $N(3, n) = 333...3$ เป็นตัวหาร

กรณีที่ 3.1 $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8$

$m = 3n$ เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ $N(3, n)$ หาร $N(x, m)$ ลงตัว

ตัวอย่างเช่น $\frac{111111}{33} = 3367$

$$\frac{555555555}{333} = \frac{5(111111111)}{333}$$

$$= 5(333667)$$

$$= 1668335$$

กรณีที่ 3.2 $x = 3, 6, 9$

$N(x, n)$ เป็นตัวเลขน้อยสุดที่ $N(3, n)$ หาร $N(x, n)$ ลงตัว

ตัวอย่างเช่น $\frac{333}{333} = 1, \frac{666}{333} = 2, \frac{9999}{3333} = 3$

กรณีที่ 4 $N(4, n) = 444...4$ เป็นตัวหาร

กรณีที่ 4.1 $x = 1, 3, 5, 7, 9$

จะได้ $xxx...x$ เป็นจำนวนคี่

เพราะฉะนั้น $444...4$ หาร $xxx...x$ ไม่ลงตัวแน่นอน

กรณีที่ 4.2 $x = 2, 4, 6, 8$

$$\frac{222...2}{444...4} = \frac{111...1}{222...2}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$444...4$ จำนวนหลักต้องเท่ากับ n จึงจะเป็นค่าน้อยสุด

$$\frac{666...6}{444...4} = \frac{333...3}{222...2}$$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

$888...8$ จำนวนหลักต้องเท่ากับ n จึงจะเป็นค่าน้อยสุด

กรณีที่ 5 $N(5, n) = 555...5$ เป็นตัวหาร

$$\frac{N(7,m)}{N(9,n)} = \frac{777...7}{999...9} = \frac{7(111...1)}{999...9} = \frac{7N(1,m)}{N(9,n)}$$

เพราะฉะนั้นเราพิจารณากรณี $\frac{N(1,m)}{N(9,n)}$

$$\frac{N(1,m)}{N(9,n)} = \frac{1+10+10^2+...+10^{m-1}}{9(1+10+10^2+...+10^{n-1})} = \frac{\left(\frac{10^m-1}{10-1}\right)}{\left(\frac{9(10^n-1)}{(10-1)}\right)} = \frac{10^m-1}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n)^{\frac{m}{n}}-1}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n-1)((10^n)^{\frac{m}{n}-1}+(10^n)^{\frac{m}{n}-2}+...+(10^n)+1}{9(10^n-1)}$$

$$= \frac{(10^n)^{\frac{m}{n}-1}+(10^n)^{\frac{m}{n}-2}+...+(10^n)+1}{9}$$

เพราะว่าตัวเลขแต่ละตัวของ $(10^n)^{\frac{m}{n}-1}$, $(10^n)^{\frac{m}{n}-2}$, … , $10^n + 1$

เมื่อหารด้วย 9 จะเหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้น m น้อยสุดที่ทำให้ 9 หาร $(10^n)^{\frac{m}{n}-1} + (10^n)^{\frac{m}{n}-2} + \ldots + 10^n + 1$

ลงตัวคือ m ที่ทำให้ $\frac{m}{n} - 1 = 8$, $m = 9n$

สรุป $m = 9n$ เป็นค่าน้อยสุดที่ทำให้ N(9 , n) หาร N(1 , m) ลงตัว

ตัวอย่างการคำนวณบางจำนวน

$\frac{111111}{33} = 3367$ $\frac{555555555555}{3333} = 166683335$ $\frac{222222222}{333} = 667334$

$\frac{222222222}{666} = 333667$ $\frac{888888888888}{6666} = 133346668$

$\frac{111111}{7} = 15873$ $\frac{111111}{77} = 1443$ $\frac{111111}{777} = 143$

$\frac{111111111111}{77} = 1443001443$ $\frac{111111111111}{777} = 143000143$ $\frac{111111111111}{7777} = 14287143$

$\frac{666666666}{999} = 667334$ $\frac{777777777}{9} = 86419753$

****

$$\sum_{n=1}^{10} 1998^n = 2540863240\ 1424513319\ 4578170$$

100! หารด้วย 103 เหลือเศษเท่าใด

ปัญหาเกี่ยวกับเศษเหลือที่ได้จากการหาร n! ด้วย p เช่น $3! = 6$ หารด้วย 5 เหลือเศษ 1 $4! = 24$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 3 $4! = 24$ หารด้วย 11 เหลือเศษ 2 เมื่อตัวเลขมากขึ้นเช่น 10! หารด้วย 13 เหลือเศษเท่าใด 12! หารด้วย 17 เหลือเศษเท่าใด จะเป็นลักษณะของปัญหาที่ยากขึ้นตามลำดับเราจึงศึกษาแนวทางและขั้นตอนที่เหมาะสมตามลำดับของปัญหาจากง่ายไปยาก ดังนี้

ตัวอย่าง 1. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 6! ด้วย 7 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า $6! = 720 = (102)(7) + 6$

เพราะฉะนั้น 7 หาร 6! เหลือเศษ 6

ตัวอย่าง 2. 10! หารด้วย 11 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $10! = 3628800 = 329890\,(11) + 10$

เพราะฉะนั้น 10! หารด้วย 11 เหลือเศษ 10

แนวคิดการหาเศษเหลือของการหาร n! ด้วย n + 1 เมื่อตัวเลข n ใหญ่ขึ้น เช่น 100! หารด้วย 101 เหลือเศษเท่าใด เราไม่สามารถหาผลคูณ 100! ได้โดยง่าย ดังนั้นเราต้องหาแนวทางอื่น เช่น

7 หาร 12 เหลือเศษ 5

7 หาร 13 เหลือเศษ 6

7 หาร $(5)(6) = 30$ เหลือเศษ 2

7 หาร (12)(13) = 156 เหลือเศษ 2

โดยทั่วไปจะได้ว่า 7 หาร m เหลือเศษ q

7 หาร n เหลือเศษ p

7 หาร pq เหลือเศษ r

จะได้ว่า 7 หาร mn เหลือเศษ r

ข้อพิสูจน์ $m = 7x + q$

$n = 7y + p$

$mn = (7x + q)(7y + p) = 7^2xy + 7xp + 7qy + pq$

เพราะว่า 7 หาร $(7^2xy + 7xp + 7qy)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้นเศษเหลือจากการหาร mn ด้วย 7 ต้องเท่ากับเศษเหลือจากการหาร pq ด้วย 7 ในการเขียนโดยใช้ภาษาสัญลักษณ์จะได้ว่า

ถ้า $m \equiv q \bmod 7$

$n \equiv p \bmod 7$

แล้ว $mn \equiv pq \bmod 7$

ในทำนองเดียวกันสำหรับจำนวนเต็มบวก k ใด ๆ จะได้ว่า

ถ้า $m \equiv q \bmod k$

$n \equiv p \bmod k$

แล้ว $mn \equiv pq \bmod k$

ตัวอย่าง 3. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 8! ด้วย 11

วิธีทำ แบบที่ 1 $8! = 40320 = 3665(11) + 5$

เพราะฉะนั้น 11 หาร 8! เหลือเศษ 5

ข้อสังเกต แบบที่ 1 มองดูเหมือนกับง่ายแต่ต้องคูณเลขมากตัวและต้องตั้งหารยาวจึงได้เศษเหลือเป็น 5

แบบที่ 2 $1 \equiv 1 \bmod 11$

$2 \equiv 2 \bmod 11$

$2! \equiv 2 \bmod 11$

$3! \equiv 3(2) \bmod 11 \equiv 6 \bmod 11$

$4 \equiv 4 \bmod 11$

$3!(4) \equiv 6(4) \bmod 11 \equiv 24 \bmod 11$

$4! \equiv 2 \bmod 11$

$5 \equiv 5 \bmod 11$

$4!(5) \equiv 2(5) \bmod 11$

$5! \equiv 10 \bmod 11$

$6 \equiv 6 \bmod 11$

$5!(6) \equiv 10(6) \bmod 11 \equiv 60 \bmod 11$

$6! \equiv 5 \bmod 11$

$7 \equiv 7 \bmod 11$

$6!(7) \equiv 5(7) \bmod 11 \equiv 35 \bmod 11$

$7! \equiv 2 \bmod 11$

$8 \equiv 8 \bmod 11$

$7!(8) \equiv 2(8) \bmod 11 \equiv 16 \bmod 11 \equiv 5 \bmod 11$

สรุปเศษเหลือจากการหาร 8! ด้วย 11 เท่ากับ 5

ข้อสังเกต การทำงานโดยวิธีที่ 2 ใช้เหตุผลที่ยากกว่าการคูณและการตั้งหารยาว ถึงแม้จะต้องทำหลายครั้งกว่าจะได้คำตอบ แต่การคำนวณแต่ละขั้นตอนก็ถือว่าตัวเลขไม่มากนัก เหตุผลอีกแบบที่จะทำให้การคำนวณสะดวกขึ้น คือ

ถ้า $m \equiv q \bmod k$ และ $n \equiv n \bmod k$ แล้ว $nm \equiv nq \bmod k$

มีความหมายเหมือนกับ เอา n คูณตลอด $m \equiv q \bmod k$

ตัวอย่างเช่น การหาเศษเหลือจากการหาร 6! ด้วย 7

$$1 \equiv 1 \bmod 7$$

$$2! = 2\cdot 1 \equiv 2\cdot 1 \bmod 7 \equiv 2 \bmod 7$$

$$3! \equiv 3\cdot 2 \bmod 7 \equiv 6 \bmod 7$$

$$4! \equiv 4\cdot 6 \bmod 7 \equiv 24 \bmod 7 \equiv 3 \bmod 7$$

$$5! \equiv 5(3) \bmod 7 \equiv 15 \bmod 7 \equiv 1 \bmod 7$$

$$6! \equiv 6 \bmod 7$$

นั้นคือ 6! หารด้วย 7 เหลือเศษ 6

ตัวอย่าง 4. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 10! ด้วย 13

วิธีทำ $1 \equiv 1 \bmod 13$

$$2 \equiv 2 \bmod 13$$

$$3! \equiv 6 \bmod 13$$

$$4! \equiv 24 \bmod 13 \equiv 11 \bmod 13$$

$$5! \equiv 55 \bmod 13 \equiv 3 \bmod 13$$

$$6! \equiv 18 \bmod 13 \equiv 5 \bmod 13$$

$$7! \equiv 35 \bmod 13 \equiv 9 \bmod 13$$

$$8! \equiv 72 \bmod 13 \equiv 7 \bmod 13$$

9! $\equiv 63 \bmod 13 \quad \equiv 11 \bmod 13$

10! $\equiv 110 \bmod 13 \quad \equiv 6 \bmod 13$

สรุป 10! หารด้วย 13 เหลือเศษ 6

ตัวอย่าง 5. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 16! ด้วย 17

วิธีทำ 3! $\equiv 6 \bmod 17$

4! $\equiv 24 \bmod 17 \equiv 7 \bmod 17$

5! $\equiv 35 \bmod 17 \equiv 1 \bmod 17$

6! $\equiv 6 \bmod 17$

7! $\equiv 42 \bmod 17 \quad \equiv 8 \bmod 17$

8! $\equiv 64 \bmod 17 \equiv 13 \bmod 17$

9! $\equiv 9(13) \bmod 17 \equiv 117 \bmod 17 \equiv 15 \bmod 17$

10! $\equiv 150 \bmod 17 \equiv 14 \bmod 17$

11! $\equiv 11(14) \bmod 17 \equiv 154 \bmod 17 \equiv 1 \bmod 17$

12! $\equiv 12 \bmod 17$

13! $\equiv 13(12) \bmod 17 \equiv 156 \bmod 17 \equiv 3 \bmod 17$

14! $\equiv 14(3) \bmod 17 \equiv 42 \bmod 17 \equiv 8 \bmod 17$

15! $\equiv 15(8) \bmod 17 \equiv 120 \bmod 17 \equiv 1 \bmod 17$

16! $\equiv 16 \bmod 17$

สรุป 17 หาร 16! เหลือเศษ 16

ตัวอย่าง 6. จงหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 12! ด้วย 13

วิธีทำ แบบที่ 1 $12! = 479001600 = 36846276\,(13) + 12$

เพราะฉะนั้น 12! หารด้วย 13 จะเหลือเศษ 12

แบบที่ 2 $4! \equiv 4! \bmod 13 \equiv 24 \bmod 13 \equiv 11 \bmod 13$

$5! \equiv 5(11) \bmod 13 \equiv 55 \bmod 13 \equiv 3 \bmod 13$

$6! \equiv 6(3) \bmod 13 \equiv 18 \bmod 13 \equiv 5 \bmod 13$

$7! \equiv 7(5) \bmod 13 \equiv 35 \bmod 13 \equiv 9 \bmod 13$

$8! \equiv 8(9) \bmod 13 \equiv 72 \bmod 13 \equiv 7 \bmod 13$

$9! \equiv 9(7) \bmod 13 \equiv 63 \bmod 13 \equiv 11 \bmod 13$

$10! \equiv 10(11) \bmod 13 \equiv 110 \bmod 13 \equiv 6 \bmod 13$

$11! \equiv 11(6) \bmod 13 \equiv 66 \bmod 13 \equiv 1 \bmod 13$

$12! \equiv 12 \bmod 13$

สรุปเศษที่เหลือจากการหาร 12! ด้วย 13 มีค่าเท่ากับ 12

แบบที่ 3 $12! = 2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$

$2^5 \equiv 32 \bmod 13 \equiv 6 \bmod 13$

$2^{10} \equiv 6^2 \bmod 13 \equiv 10 \bmod 13$ …(1)

$3^2 \equiv 9 \bmod 13$

$3^3 \equiv 27 \bmod 13 \equiv 1 \bmod 13$

$3^5 \equiv 9 \bmod 13$ …(2)

(1) & (2) ; $2^8\cdot 3^5 \equiv (10)(9) \bmod 13 \equiv 90 \bmod 13 \equiv 12 \bmod 13$

$5^2 \equiv 25 \bmod 13 \equiv 12 \bmod 13$

$2^8\cdot 3^5\cdot 5^2 \equiv (12)(12) \bmod 13 \equiv 144 \bmod 13 \equiv 1 \bmod 13$

$2^8\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7 \equiv (7)(1) \bmod 13 \equiv 7 \bmod 13$

$2^8\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11 \equiv (7)(11) \bmod 13$

$12! \quad \equiv 77 \bmod 13 \equiv 12 \bmod 13$

สรุป 13 หาร 12! เหลือเศษ 12

ข้อสังเกต

แบบที่ 1 การหาค่าจริงของ 12! ออกมาก่อนแล้วจึงหารยาวเพื่อหาเศษแท้จริง จะเสียเวลาในการคำนวณมาก

แบบที่ 2 การใช้เหตุผลเกี่ยวกับ $a \equiv b \bmod m$ จะทำให้การคูณตัวเลขน้อยลง แต่ยังคงต้องคิดเลขตามลำดับตั้งแต่ 1, 2, … , 12

วิธีที่ 3 มีการใช้เหตุผลที่ยากขึ้นอีกนิด คือ $12! = 2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11$ แต่ขั้นตอนการคำนวณน้อยกว่าวิธีที่ 2

ในตัวอย่างการหาเศษเหลือจากการหาร 12! ด้วย 13 อาจจะยังเห็นไม่ชัดเจนว่าวิธีที่ 3 ดีกว่าวิธีที่ 2 แต่ถ้า n! มากขึ้นจะเห็นว่าทำตามวิธีที่ 3 ดีกว่า

หมายเหตุ การเขียน n! ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะอ่านได้จากเรื่อง **การหาค่า k มากสุดที่ทำให้ p^k หาร n! ลงตัว** ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 15

ข้อสังเกต คำถามที่ถามว่า เศษเหลือที่ได้จากการหาร n! ด้วย n + 1 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด ถ้า n + 1 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะจะได้ว่าต้องมี x และ y ที่ทำให้ $2 \le x < n$ และ $2 \le y < n$ ที่ทำให้ $n + 1 = xy$ เพราะฉะนั้น n + 1 หาร n! ลงตัวเสมอ ตัวอย่างเช่น $\frac{5!}{6} = \frac{5!}{2\cdot 3} = 20$, $\frac{7!}{8} = \frac{7!}{2\cdot 4} = 3\cdot 5\cdot 6\cdot 7 = 630$

ตัวอย่าง 7. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 10! ด้วย 17 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $10! \quad = 2^8\cdot 3^4\cdot 5^2\cdot 7$

$2^3 \equiv 8 \bmod 17$

$2^5 \equiv 32 \bmod 17 \equiv 15 \bmod 17$

$2^8 \equiv (8)(15) \bmod 17 \equiv 120 \bmod 17 \equiv 1 \bmod 17$

$3^3 \equiv 27 \bmod 17 \equiv 10 \bmod 17$

$3^4 \equiv (3)(10) \bmod 17 \equiv 30 \bmod 17 \equiv 13 \bmod 17$

$2^8 \cdot 3^4 \equiv (1)(13) \bmod 17 \equiv 13 \bmod 17$

$5^2 \equiv 25 \bmod 17 \equiv 8 \bmod 17$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \equiv (13)(8) \bmod 17 \equiv 104 \bmod 17 \equiv 2 \bmod 17$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \equiv (7)(2) \bmod 17 \equiv 14 \bmod 17$

$10! \equiv 14 \bmod 17$

เพราะฉะนั้น 17 หาร 10! เหลือเศษ 14

ตัวอย่าง 8. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 10! ด้วย 19 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$

$2^3 \equiv 8 \bmod 19$

$2^5 \equiv 32 \bmod 19 \equiv 13 \bmod 19$

$2^8 \equiv (8)(13) \bmod 19 \equiv 104 \bmod 19 \equiv 9 \bmod 19$

$3^4 \equiv 81 \bmod 19 \equiv 5 \bmod 19$

$2^8 \cdot 3^4 \equiv (9)(5) \bmod 19 \equiv 45 \bmod 19 \equiv 7 \bmod 19$

$5^2 \equiv 25 \bmod 19 \equiv 6 \bmod 19$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \equiv (7)(6) \bmod 19 \equiv 42 \bmod 19 \equiv 4 \bmod 19$

$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \equiv 7\ (4) \bmod 19 \equiv 28 \bmod 19$

$10! \equiv 9 \bmod 19$

สรุป 10! หารด้วย 19 เหลือเศษ 9

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ผ่านมา

ตัวตั้ง	ตัวหาร	เศษเหลือ
6!	7	6
10!	11	10
8!	11	5
12!	13	12
10!	17	14
10!	19	9
16!	17	16

จะเห็นได้ว่าเมื่อ n + 1 เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว n + 1 หาร n! จะเหลือเศษเท่ากับ n ในทฤษฎีจำนวนมีทฤษฎีบทที่สำคัญชื่อ WILSON'S THEORM กล่าวว่า ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว $(p - 1)! \equiv (-1) \bmod p$ ซึ่งผลจากทฤษฎีนี้จะได้ว่า ถ้า n + 1 เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว $n! \equiv (-1) \bmod (n + 1) \equiv n \bmod (n + 1)$ นั้นคือเศษเหลือจากการหาร n! ด้วย n + 1 เท่ากับ n เสมอ

จากหลักการหาเศษเหลือที่ใช้การคูณด้วย 1, 2, 3, …

ตัวอย่างเช่นการหาเศษเหลือที่ได้จากการหาร 10! ด้วย 17

$1 \equiv 1 \bmod 17$

$2! \equiv 2 \bmod 17$

$3! \equiv 6 \bmod 17$

$4! \equiv 24 \bmod 17 \equiv 7 \bmod 17$

$5! \equiv 35 \bmod 17 \equiv 1 \bmod 17$

$6! \equiv 6 \bmod 17$

$7! \equiv 42 \bmod 17 \equiv 8 \bmod 17$

$8! \equiv 64 \bmod 17 \equiv 13 \bmod 17$

$9! \equiv (9)(13) \bmod 17 \equiv 117 \bmod 17 \equiv 15 \bmod 17$

$10! \equiv 150 \bmod 17 \equiv 14 \bmod 17$

สรุป 10! หารด้วย 17 เหลือเศษ 14

จากขั้นตอนการทำงานในลักษณะนี้เราให้คอมพิวเตอร์ช่วยคำนวณหาเศษเหลือของ n! หารด้วย m ได้

หลักการหาเศษเหลือของ n! หารด้วย m ด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนด m
2. กำหนด n
3. ให้ $r_1 = 1 \bmod m$
4. ให้ $r_{i+1} = (i+1)\, r_i \bmod m$

จะได้ r_n เป็นเศษเหลือที่ได้จากการหาร n! ด้วย m ตัวอย่างเช่น

```
m := 17
n := 10
i := 1 .. n
r_1 := mod(1, m)
r_{i+1} := mod[(i + 1)·r_i, m]
```

i	r_i
1	1
2	2
3	6
4	7
5	1
6	6
7	8
8	13
9	15
10	14

หมายเหตุ mod(10! , 17) = 14 โปรแกรม MATHCAD ยังสามารถคำนวณได้ แต่ไม่สามารถคำนวณ mod(100! , 103) ได้เพราะว่า 100! มีค่ามากเกินไป เราจึงจำเป็นต้องคิดตามขั้นตอนข้างต้น

การหาเศษเหลือจากการหาร 100! ด้วย 103

$m := 103$
$n := 100$
$i := 1..n$
$r_1 := \mathrm{mod}(1, m)$
$r_{i+1} := \mathrm{mod}\left[(i+1)\cdot r_i, m\right]$

$i := 1..5$

i	r_i
1	1
2	2
3	6
4	24
5	17

$i := 96..100$

i	r_i
96	1
97	97
98	30
99	86
100	51

เพราะฉะนั้น เศษเหลือจากการหาร 100! ด้วย 103 คือ 51

การหาเศษเหลือจากการหาร 25! ด้วย 29

$m := 29$
$n := 25$
$i := 1..n$
$r_1 := \mathrm{mod}(1, m)$
$r_{i+1} := \mathrm{mod}\left[(i+1)\cdot r_i, m\right]$
$i := 20..25$

i	r_i
20	26
21	24
22	6
23	22
24	6
25	5

เพราะฉะนั้น เศษเหลือจากการหาร 25! ด้วย 29 คือ 5

ข้อมูลในตารางสามารถใช้เป็นแบบฝึกหัดและเฉลยได้

n	n!	mod(n!,7)	mod(n!,11)	mod(n!,13)	mod(n!,17)
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	6	6	6	6	6
4	24	3	2	11	7
5	120	1	10	3	1
6	720	6	5	5	6
7	5040	0	2	9	8
8	40320	0	5	7	13
9	362880	0	1	11	15
10	3628800	0	10	6	14
11	39916800	0	0	1	1
12	479001600	0	0	12	12
13	6227020800	0	0	0	3
14	87178291200	0	0	0	8
15	1307674368000	0	0	0	1
16	20922789888000	0	0	0	16
17	355687428096000	0	0	0	0

n	mod(n!,19)	mod(n!,23)	mod(n!,29)	mod(n!,31)	mod(n!,37)
1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	6	6	6	6	6
4	5	1	24	24	24
5	6	5	4	27	9
6	17	7	24	7	17
7	5	3	23	18	8
8	2	1	10	20	27
9	18	9	3	25	21
10	9	21	1	2	25
11	4	1	11	22	16
12	10	12	16	16	7
13	16	18	5	22	17
14	15	22	12	29	16
15	16	8	6	1	18
16	9	13	9	16	29
17	1	14	8	24	12

หมายเหตุ mod (n!, m) คือเศษเหลือจากการหาร n! ด้วย m

$\sum_{n=0}^{2000} 2543^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

ปัญหาที่น่าสนใจในหัวข้อนี้เช่น หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{5} 2^n$ เท่ากับเท่าใด

$$\sum_{n=1}^{5} 2^n = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{5} 2^n$ เท่ากับ 2 ต่อไปเราเพิ่มระดับความยากของคำถามเช่น $\sum_{n=1}^{5} (232)^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด หรือ $\sum_{n=1}^{1999} (2542)^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด แนวทางในการศึกษาหาคำตอบเป็นดังนี้

ตารางแสดงค่า m^n เมื่อ m เป็นเลขหนึ่งหลัก และ n = 1 , 2 , ... , 10

n	2^n	3^n	4^n	5^n	6^n
1	2	3	4	5	6
2	4	9	16	25	36
3	8	27	64	125	216
4	16	81	256	625	1296
5	32	243	1024	3125	7776
6	64	729	4096	15625	46656
7	128	2187	16384	78125	279936
8	256	6561	65536	390625	1679616
9	512	19683	262144	1953125	10077696
10	1024	59049	1048576	9765625	60466176

n	7^n	8^n	9^n
1	7	8	9
2	49	64	81
3	343	512	729
4	2401	4096	6561
5	16807	32768	59049
6	117649	262144	531441
7	823543	2097152	4782969
8	5764801	16777216	43046721
9	40353607	134217728	387420489
10	282475249	1073741824	3486784401

เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก หลักหน่วยของ m^n มีค่าเท่ากับเท่าใด เป็นปัญหาที่น่าสนใจและมีแนวทางการหาคำตอบได้อย่างชัดเจน

1. **m เป็นจำนวนบวกที่หลักหน่วยเป็นเลข 1**

จะได้ว่าหลักหน่วยของ m^n เป็นเลข 1

ตัวอย่างเช่น $11^2 = 121$

$101^3 = 1030301$

$41^5 = 115856201$

ลองมาดูแนวทางในการพิสูจน์ว่า m^n ต้องมีหลักหน่วย เพราะว่า หลักหน่วยของ m เป็น 1 เพราะฉะนั้น $m - 1$ หารด้วย 10 ลงตัว

นั้นคือ $m \equiv 1 \bmod 10$

$m^n \equiv 1^n \bmod 10 \equiv 1 \bmod 10$

เพราะฉะนั้น $m^n - 1$ หารด้วย 10 ลงตัว

นั้นคือ หลักหน่วยของ m^n ต้องเป็นเลข 1

แนวทางการพิสูจน์ข้างต้นอาจจะเกินหลักสูตร ม. ปลาย

ลองมาดูการพิสูจน์โดยใช้เหตุผลตามหลักสูตร ม. ปลาย ดังนี้

เพราะว่า หลักหน่วยของ m เป็น 1 เพราะฉะนั้นต้องมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้

$10k + 1 = m$ โดยการกระจายทวินาม

$$(10k+1)^n = \binom{n}{0}(10k)^n + \binom{n}{1}(10k)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}10k + 1$$

เพราะว่า $\binom{n}{0}(10k)^n + \binom{n}{1}(10k)^{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1}10k \geq 10$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $(10k + 1)^n$ ต้องเป็นเลข 1

2. **m เป็นจำนวนเต็มบวกที่หลักหน่วยเป็นเลข 2**

หลักหน่วยของ m^n มีค่าจำแนกเป็น 4 กรณี ดังนี้

$$(\ldots 2)^n \text{ มีหลักหน่วย } = \begin{cases} 6 & \text{ถ้า 4 หาร n ลงตัว} \\ 2 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 1} \\ 4 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 2} \\ 8 & \text{ถ้า 4 หาร n เหลือเศษ 3} \end{cases}$$

ตัวอย่างเช่น $42^3 = 74088$ $\qquad 22^4 = 221533456$

$32^5 = 33554432$ $\qquad 22^6 = 113379904$

แนวทางในการพิสูจน์

วิธีที่ 1 ใช้การกระจายทวินาม เพราะว่าหลักหน่วยของ m เป็นเลข 2

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $10k + 2 = m$

กรณี 1 4 หาร n ลงตัว เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก t , $n = 4t$

$$\begin{aligned} m^n &= (10k+2)^n \\ &= (10k+2)^{4t} \\ &= \binom{4t}{0}(10k)^{4t} + \binom{4t}{1}(10k)^{4t-1} + \ldots + \binom{4t}{4t-1}(10k) + 2^{4t} \end{aligned}$$

เพราะว่า $\binom{4t}{0}(10k)^{4t} + \binom{4t}{1}(10k)^{4t-1} + \ldots + \binom{4t}{4t-1}10k$ มีหลักหน่วยเป็น

เลขศูนย์ และ $2^{4t} = (2^4)^t = 16^t$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 6

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ m^n เป็นเลข 6

วิธีที่ 2 เราลองพิสูจน์กับกรณี 4 หาร n เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก t , n = 4t + 1

$$
\begin{aligned}
m &= (\ldots 2) \\
m^n &= m^{4t+1} \\
&= (m^{4t})m \\
&= (m^4)^t \cdot m \\
&= (\ldots 6)^t \cdot m \\
&= (\ldots 6)(\ldots 2) \\
&= (\ldots 2)
\end{aligned}
$$

วิธีที่ 3 เราลองพิสูจน์กับกรณี 4 หาร n เหลือเศษ 2

เพราะฉะนั้นมีจำนวนเต็มบวก t ที่ทำให้ n = 4t + 2

เพราะว่าหลักหน่วยของ m เป็น 2 เพราะฉะนั้น m – 2 หาร 10 ลงตัว

นั้นคือ $m \equiv 2 \bmod 10$

$$
\begin{aligned}
m^2 &\equiv 4 \bmod 10 \\
m^4 &\equiv 2^4 \bmod 10 \equiv 16 \bmod 10 \equiv 6 \bmod 10 \\
(m^4)^t &\equiv 6^t \bmod 10 \equiv 6 \bmod 10 \\
m^{4t} &\equiv 6 \bmod 10 \\
m^{4t} \cdot m^2 &\equiv (6)(4) \bmod 10
\end{aligned}
$$

$$m^{4t+2} \equiv 24 \bmod 10$$

$$m^{n} \equiv 4 \bmod 10$$

สรุปหลักหน่วยของ m^n เท่ากับ 4

แนวทางการพิสูจน์ทั้งสามวิธีกับกรณี n ต่าง ๆ กันจะเห็นได้ว่า

วิธีที่ 1 ใช้เหตุผลการกระจายทวินาม

วิธีที่ 2 ใช้เหตุผลที่เขียนเฉพาะหลักหน่วยเท่านั้น

วิธีที่ 3 ใช้เหตุผลการหารลงตัว (อาจจะเกินหลักสูตร ม. ปลาย)

กรณี 4 หาร n เหลือเศษ 3

$$n = 4t + 3$$

$$m^n = m^{4t+3}$$

$$= m^{4t} \cdot m^{3}$$

$$= (\ldots 6)(\ldots 2)^{3}$$

$$= (\ldots 6)(\ldots 8)$$

$$= \ldots 8$$

นั่นคือหลักหน่วยของ m^n เท่ากับ 8

3. **m เป็นจำนวนเต็มบวกมีหลักหน่วยเป็นเลข 3**

$$3^1 = 3$$

$$3^2 = 9$$

$$3^3 = 27$$

$$3^4 = 81$$

$$3^{4t} = (3^4)^t = (81)^t = \ldots 1$$

$$3^{4t+1} = (3^{4t})(3) = (\ldots 1)(3) = \ldots 3$$

$$3^{4t+2} = (3^{4t})(3^{2}) = (\ldots 1)(9) = \ldots 9$$

$$3^{4t+3} = (3^{4t})(3^{3}) = (\ldots 1)(27) = \ldots 7$$

เมื่อ $m = \ldots 3$

$$m^{4t} = (\ldots 3)^{4t} = ((\ldots 3)^{4})^{t} = (\ldots 1)^{t} = \ldots 1$$

$$m^{4t+1} = (m^{4t})(m) = (\ldots 1)(\ldots 3) = \ldots 3$$

$$m^{4t+2} = (m^{4t})(m^{2}) = (\ldots 1)(\ldots 3)^{2} = (\ldots 1)(\ldots 9) = \ldots 9$$

$$m^{4t+3} = (m^{4t})(m^{3}) = (\ldots 1)(\ldots 3)^{3} = (\ldots 1)(\ldots 7) = \ldots 7$$

สรุป $(\ldots 3)^n$ มีหลักหน่วย $= \begin{cases} 1 \text{ , 4 หาร } n \text{ ลงตัว} \\ 3 \text{ , 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ } 1 \\ 9 \text{ , 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ } 2 \\ 7 \text{ , 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ } 3 \end{cases}$

4. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 4**

$$4^{1} = 4$$

$$4^{2} = 16$$

$$4^{3} = 64$$

$$4^{4} = 256$$

เมื่อ $m = \ldots 4$

$$m^{2t} = (\ldots 4)^{2t} = ((\ldots 4)^{2})^{t} = (\ldots 6)^{t} = \ldots 6$$

$$m^{2t+1} = (m^{2t})\, m = (\ldots 6)(\ldots 4) = \ldots 4$$

สรุป $(\ldots 4)^n$ มีหลักหน่วย $= \begin{cases} 6 \text{ ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 4 \text{ ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

5. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 5**

$5^1 = 5$

$5^2 = 25$

$5^3 = 125$

$5^4 = 625$

$\vdots$

ถ้า m มีหลักหน่วยเป็นเลข 5 แล้ว m^n มีหลักหน่วยเป็นเลข 5

6. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 6**

$6^1 = 6$

$6^2 = 36$

$6^3 = 216$

$6^4 = 1296$

ถ้า m มีหลักหน่วยเป็นเลข 6 แล้ว m^n มีหลักหน่วยเป็นเลข 6

7. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 7**

$7^1 = 7$

$7^2 = 49$

$7^3 = 343$

$7^4 = 2401$

$\vdots$

เมื่อ $m = \ldots 7$

$$m^{4t} = (\ldots 7)^{4t} = ((\ldots 7)^4)^t = (\ldots 1)^t = \ldots 1$$

$m^{4t+1} = m^{4t} \cdot m = (\ldots 1)(\ldots 7) = \ldots 7$

$m^{4t+2} = m^{4t} \cdot m^{2} = (\ldots 1)(\ldots 7)^{2} = (\ldots 1)(\ldots 9) = \ldots 9$

$m^{4t+3} = m^{4t} \cdot m^{3} = (\ldots 1)(\ldots 7)^{3} = (\ldots 1)(\ldots 3) = \ldots 3$

สรุป $(\ldots 7)^n$ มีหลักหน่วย $= \begin{cases} 1 & 4 \text{ หาร } n \text{ ลงตัว} \\ 7 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 1 \\ 9 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 2 \\ 3 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 3 \end{cases}$

8. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 8**

$8^1 = 8$

$8^2 = 64$

$8^3 = 512$

$8^4 = 4096$

เมื่อ $m = \ldots 8$

$m^{4t} = (\ldots 8)^{4t} = ((\ldots 8)^{4})^{t} = (\ldots 6)^{t} = \ldots 6$

$m^{4t+1} = m^{4t} \cdot m = (\ldots 6)(\ldots 8) = \ldots 8$

$m^{4t+2} = m^{4t} \cdot m^{2} = (\ldots 6)(\ldots 8)^{2} = (\ldots 6)(\ldots 4) = \ldots 4$

$m^{4t+3} = m^{4t} \cdot m^{3} = (\ldots 6)(\ldots 8)^{3} = (\ldots 6)(\ldots 2) = \ldots 2$

สรุป $(\ldots 8)^n$ มีหลักหน่วย $= \begin{cases} 6 & 4 \text{ หาร } n \text{ ลงตัว} \\ 8 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 1 \\ 4 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 2 \\ 2 & 4 \text{ หาร } n \text{ เหลือเศษ } 3 \end{cases}$

9. **m มีหลักหน่วยเป็นเลข 9**

$9^1 = 9$

$9^2 = 81$

$9^3 = 729$

$9^4 = 6561$

เมื่อ $m = \ldots 9$

$m^{2t} = (\ldots 9)^{2t} = ((\ldots 9)^2)^t = (\ldots 1)^t = \ldots 1$

$m^{2t+1} = m^{2t} \cdot m = (\ldots 1)(\ldots 9) = \ldots 9$

สรุป $(\ldots 9)^n$ มีหลักหน่วย $= \begin{cases} 1 , & n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 9 , & n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

ตารางแสดงหลักหน่วยของ m^n $n = 1, 2, 3, \ldots$

หลักหน่วยของ m	4 หาร n เหลือเศษ 0	4 หาร n เหลือเศษ 1	4 หาร n เหลือเศษ 2	4 หาร n เหลือเศษ 3
1	1	1	1	1
2	6	2	4	8
3	1	3	9	7
4	6	4	6	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	1	7	9	3
8	6	8	4	2
9	1	9	1	9

ตัวอย่าง 1. หลักหน่วยของ $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ แบบที่ 1 $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1)(1-2^{101})}{1-2} = 2^{101} - 1$$

เพราะว่า $2^{101} = 2^{100+1} = 2(2^4)^{25} = 2(16)^{25} = 2(\ldots 6) = \ldots 2$

และ $2^{101} - 1 = (\ldots 2) - 1 = \ldots 1$

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100}$ เท่ากับ 1

แบบที่ 2 $\left.\begin{array}{l} 2^1 = 2 \\ 2^2 = 4 \\ 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \end{array}\right\}$ หลักหน่วยรวมกันเป็น 0

$\left.\begin{array}{l} 2^5 = \ldots 2 \\ 2^6 = \ldots 4 \\ 2^7 = \ldots 8 \\ 2^8 = \ldots 6 \end{array}\right\}$ หลักหน่วยรวมกันเป็น 0

2^n เมื่อ $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 100$

$= (1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), \ldots, (97, 98, 99, 100)$

ผลรวมของ 2^n เป็นกลุ่มทีละ 4 ตัว จะได้หลักหน่วยเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{100}$ มีหลักหน่วยเป็นศูนย์

สรุป $1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{100}$ มีหลักหน่วยเป็น 1

ตัวอย่าง 2. หลักหน่วยของ $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{200}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $1 + 3 + 9 + 27 + \ldots + 3^{200} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{200}$

$$= \frac{(1)(1-3^{201})}{1-3} = \frac{3^{201}-1}{2}$$

$3^{201} = 3(3^{200}) = 3(3^4)^{50} = 3(81)^{50} = 3(\ldots 1) = \ldots 3$

$3^{201} - 1 = (\ldots 3) - 1 = \ldots 2$

$$\frac{3^{201}-1}{2} = \frac{1}{2}(\ldots 2) = \ldots 1 \text{ หรือ } \ldots 6$$

เพราะว่า $1, 3, 9, 27, \ldots, 3^{200}$ เป็นเลขคี่ทุกตัว

เพราะฉะนั้น $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{200}$ เป็นผลบวกของเลขคี่จำนวน 201 ตัวจึงต้องเป็นเลขคี่ สรุป $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{200}$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 1

ตัวอย่าง 3. หลักหน่วยของ $1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \ldots + 4^{50}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ **แบบที่ 1.** $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{50} = \frac{(1)(1-4^{51})}{1-4} = \frac{4^{51}-1}{3}$

เพราะว่า $4^{51} = 4 \cdot 4^{50} = 4(4^2)^{25} = 4(16)^{25} = 4(\ldots 6) = \ldots 4$

เพราะฉะนั้น $4^{51} - 1$ มีหลักหน่วยเป็น 3 นั่นคือ $4^{51} - 1 = \ldots 3$

เพราะฉะนั้น $\frac{4^{51}-1}{3} = \frac{\ldots 3}{3} = \ldots 1$

แบบที่ 2. $\left.\begin{aligned} 4 &= 4 \\ 4^2 &= 16 \end{aligned}\right\}$ หลักหน่วยรวมกันเป็นศูนย์

$\left.\begin{aligned} 4^3 &= 64 \\ 4^4 &= 256 \end{aligned}\right\}$ หลักหน่วยรวมกันเป็นศูนย์

เพราะฉะนั้น $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \ldots + 4^{49} + 4^{50}$ มีหลักหน่วยเป็น 0

สรุปหลักหน่วยของ $1 + 4 + 4^2 + \ldots + 4^{50}$ เท่ากับ 1

ตัวอย่าง 4. $\sum_{n=0}^{2541} (1998)^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ **แบบที่ 1** $\sum_{n=0}^{2541} (1998)^n = 1 + 1998 + 1998^2 + \ldots + 1998^{2541}$

$$= \frac{(1)(1-1998^{2542})}{1-1998} = \frac{1998^{2542}-1}{1998-1} = \frac{1998^{2542}-1}{1997}$$

$1998^4 = \ldots 6$

$$1998^{2542} = 1998^{4(635)+2} = (1998^4)^{635}(1998)^2 = (\ldots 6)(\ldots 4) = \ldots 4$$

$$1998^{2542} - 1 = (\ldots 4) - 1 = \ldots 3$$

เพราะว่า $\frac{1998^{2542}-1}{1997}$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม เพราะฉะนั้น $\frac{\ldots 3}{1997} = \ldots x$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม เพราะว่า $(\ldots x)(1997) = \ldots 3$ มีได้กรณีเดียวคือ $x = 9$

สรุปหลักหน่วยของ $\sum_{n=0}^{2541}(1998)^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับ 9

แบบที่ 2. $\left.\begin{aligned} 1998 &= \ldots 8 \\ 1998^2 &= \ldots 4 \\ 1998^3 &= \ldots 2 \\ 1998^4 &= \ldots 6 \end{aligned}\right\}$ รวมกันจะได้หลักหน่วยเป็น 0

เพราะฉะนั้น $n = 1, 2, 3, \ldots, 2540$ สามารถแบ่งเป็นกลุ่มละ 4 ตัวได้พอดี

ทำให้ $1998 + 1998^2 + \ldots + 1998^{2540}$ มีหลักหน่วยเป็น 0

ดังนั้นหลักหน่วยของ $\sum_{n=0}^{2541}(1998)^n$ จึงขึ้นอยู่กับ $1 + 1998^{2541}$

$$\begin{aligned} 1998^{2541} &= 1998^{4(635)+1} = (1998^4)^{635}(1998) = (\ldots 6)^{635}(1998) \\ &= (\ldots 6)(1998) = \ldots 8 \end{aligned}$$

$1998^{2541} + 1 = \ldots 9$ สรุป $\sum_{n=0}^{2541}(1998)^n$ มีหลักหน่วยเป็น 9

ข้อสังเกต จากคำถามและแนวคิดจะทำให้สามารถสร้างโจทย์ที่ทันสมัยกับ พ.ศ. และ ค.ศ. ได้เช่น จำนวนต่อไปนี้มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

1. $\sum_{n=1}^{2543}(2543)^n$ 2. $\sum_{n=1}^{1999}(1999)^n$

หรือจำนวนต่อไปนี้หารด้วย 10 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

3. $\sum_{n=2000}^{2543}(2543)^n$ 4. $\sum_{n=1999}^{2542}(1999)^n$

ตัวอย่าง 5. $\sum_{n=0}^{1997} 7^n$ หารด้วย 10 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=0}^{1997} 7^n = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{1997} = \frac{(1)(1-7^{1998})}{1-7} = \frac{7^{1998}-1}{6}$

$7^4 = 2401$

$7^{1998} = 7^{4(499)+2} = (7^4)^{499}7^2 = (2401)^{499}(49) = (\ldots 1)(49) = (\ldots 9)$

$7^{1998} - 1 = (\ldots 9) - 1 = \ldots 8$

ถ้า $\frac{7^{1998}-1}{6} = \frac{\ldots 8}{6} = \ldots x$ จะได้ $\ldots 8 = (\ldots x)(6)$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ หรือ $x = 8$

เพราะว่า $1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{1997}$ เป็นการบวกของเลขคี่จำนวน 1998 ตัว

เพราะฉะนั้น $1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{1997}$ ต้องเป็นเลขคู่

สรุป $\sum_{n=0}^{1997} 7^n$ มีหลักหน่วยเป็น 8 เพราะฉะนั้น 10 หาร $\sum_{n=0}^{1997} 7^n$ เหลือเศษ 8

วิธีที่ 2 $7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 = 7 + 49 + 343 + 2401 = \ldots 0$

$7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8 = \ldots 7 + \ldots 9 + \ldots 3 + \ldots 1 = \ldots 0$

$\vdots$

$7^{1993} + 7^{1994} + 7^{1995} + 7^{1996} = \ldots 7 + \ldots 9 + \ldots 3 + \ldots 1 = \ldots 0$

เพราะฉะนั้น $7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{1996} = \ldots 0$

ดังนั้นหลักหน่วยของ $1 + 7^1 + 7^2 + \ldots + 7^{1996} + 7^{1997}$ จึงขึ้นอยู่กับ $1 + 7^{1997}$

เพราะว่า $7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = (\ldots 1)^{499} \cdot 7 = (\ldots 1) \cdot 7 = \ldots 7$

เพราะฉะนั้น $1 + 7^{1997} = 1 + (\ldots 7) = \ldots 8$

สรุป $\sum_{n=0}^{1997} 7^n$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 8

ตัวอย่าง 6. เศษเหลือจากการหาร $\sum^{10} (-9)^n$ ด้วย 10 เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{10} (-9)^n = -9 + 9^2 - 9^3 + 9^4 - \ldots + 9^{10}$

$= (-9 - 9^3 - 9^5 - 9^7 - 9^9) + (9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8 + 9^{10})$

$= -9(1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8) + 9^2(1 + 9^2 + 9^4 + 9^6 + 9^8)$

$= (-9 + 9^2)(1 + 9^2 + 9^4 + 9^8)$

เพราะว่า $1 + 9^2 + 9^4 + 9^8 = (\ldots1) + (\ldots1) + (\ldots1) + (\ldots1) + (\ldots1) = \ldots5$

และ $(-9 + 9^2) = 9(9 - 1) = 9(8) = 72$

เพราะฉะนั้น $(-9 + 9^2)(1 + 9^2 + 9^4 + 9^8) = (72)(\ldots5) = \ldots0$

สรุป $\sum_{n=1}^{10} (-9)^n$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 0

ตัวอย่าง 7. $\sum_{n=1}^{2540} (-3)^n$ หารด้วย 10 เหลือเศษเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $\sum_{n=1}^{2540} (-3)^n = -3 + 3^2 - 3^3 + 3^4 - \ldots + 3^{2540}$

$= (3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2540}) - (3 + 3^3 + 3^5 + 3^7 + \ldots + 3^{2539})$

$= 3^2(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2538}) - 3(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2538})$

$= (3^2 - 3)(1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 + \ldots + 3^{2538})$

$= 6[(1 + 9) + (9^2 + 9^3) + (9^4 + 9^5) + \ldots (9^{1268} + 9^{1269})]$

$= 6[(10) + (\ldots0) + (\ldots0) + \ldots (\ldots0)]$

$= 6(\ldots0)$

$= (\ldots0)$

สรุป $\sum_{n=1}^{2540} (-3)^n = (\ldots 0)$ หารด้วย 10 เหลือเศษ 0

ตัวอย่าง 8. $\sum_{n=1}^{8} 1998^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ หลักหน่วยของ 1998^n = หลักหน่วยของ 8^n ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots, 8$

เพราะฉะนั้น หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{8} 1998^n$ = หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{8} 8^n$

$$\sum_{n=1}^{8} 8^n = 8 + 8^2 + 8^3 + 8^4 + 8^5 + 8^6 + 8^7 + 8^8 = 19173960$$

เพราะฉะนั้น หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{8} 1998^n$ คือ 0

ตัวอย่าง 9. $\sum_{n=1}^{2000} 2543^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ

หลักหน่วยของ 2543^n = หลักหน่วยของ 3^n ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots, 2000$

เพราะฉะนั้น หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{2000} 2543^n$ = หลักหน่วยของ $\sum_{n=1}^{2000} 3^n$

$$\sum_{n=1}^{2000} 3^n = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \ldots + 3^{2000}$$

เพราะว่า $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = \ldots 3 + \ldots 9 + \ldots 7 + \ldots 1 = \ldots 0$

$3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 = \ldots 3 + \ldots 9 + \ldots 7 + \ldots 1 = \ldots 0$

$3^9 + 3^{10} + 3^{11} + 3^{12} = \ldots 3 + \ldots 9 + \ldots 7 + \ldots 1 = \ldots 0$

$$3^{1997} + 3^{1998} + 3^{1999} + 3^{2000} = \ldots 3 + \ldots 9 + \ldots 7 + \ldots 1 = \ldots 0$$

มีหลักหน่วยเป็น 0 ทุกค่า

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{2000} 2543^n$ มีหลักหน่วยเท่ากับ 0

โดยการคำนวณของโปรแกรม MATHEMATICA เราสามารถหาผลบวกของ $\sum_{n=0}^{100} 2^n , \sum_{n=0}^{200} 3^n , \sum_{n=0}^{50} 4^n$ ได้ดังต่อไปนี้

In[2]:= $\sum_{n=0}^{100} 2 \hat{} n$

Out[2]= 2535301200456458802993406410751

In[3]:= $\sum_{n=0}^{200} 3 \hat{} n$

Out[3]= 398420983313812154008171983053669440243850178980091\
743961862442608638736351953274491577048566001

In[4]:= $\sum_{n=0}^{50} 4 \hat{} n$

Out[4]= 1690200800304305868662270940501

การหาผลบวก $\sum_{n=0}^{2539} 2539^n$ เป็นค่าที่ใหญ่มากเราจึง คำนวณเฉพาะผลบวกของหลักหน่วยเท่านั้น

In[8]:= $\sum_{n=0}^{2539}$ Mod[2539 ^ n, 10]

Out[8]= 12700

$\sum_{n=0}^{2539} 2539^n$ มีผลบวกหลักหน่วย = 12700

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{2539} 2539^n$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 0

In[4]:= $\sum_{n=0}^{2541}$ Mod[1998^n, 10]

Out[4]= 12709

$\sum_{n=0}^{2541} 1998^n$ มีผลบวกหลักหน่วย = 12709

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=0}^{2541} 1998^n$ มีหลักหน่วยเป็นเลข 9

ตัวอย่างผลการคำนวณของค่าอื่นๆ เช่น

In[5]:= $\sum_{n=0}^{2541}$ Mod[1998^n, 10]

Out[5]= 12709

In[6]:= $\sum_{n=0}^{2539}$ Mod[2539^n, 10]

Out[6]= 12700

In[7]:= $\sum_{n=0}^{1997}$ Mod[1997^n, 10]

Out[7]= 9988

In[8]:= $\sum_{n=1}^{2000}$ Mod[2543^n, 10]

Out[8]= 10000

In[9]:= $\sum_{n=1}^{1999}$ Mod[2542^n, 10]

Out[9]= 9994

In[10]:= $\sum_{n=1999}^{2542}$ Mod[1999^n, 10]

Out[10]= 2720

In[11]:= $\sum_{n=2000}^{2543}$ Mod[2543^n, 10]

Out[11]= 2720

ตัวอย่างคำถาม

1. ผลคูณ (1)(4)(7)(10)(13)(16)(19)…(2539)(2542) ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว
2. ผลคูณ (1)(10)(19)(28)(37)(46)…(1990)(1999) ลงท้ายด้วยศูนย์กี่ตัว
3. จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ เป็นจำนวนเต็ม ทุกจำนวนเต็มบวก m , n
4. จงพิสูจน์ว่า $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{n}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม ทุกค่า n = 1 , 2 , 3 , …
5. จงหาค่า m และ k ที่ทำให้ x^2-x-1 หาร mx^4+kx^3+1 ลงตัว
6. จงหา ห.ร.ม.($2^{10}-1$, $2^{15}-1$)
7. จงหา ห.ร.ม.($2^{100}-1$, $2^{24}-1$)
8. จงหา ห.ร.ม.($2^{2543}-1$, $2^{2000}-1$)
9. จงหาค่า n ที่ทำให้ $2^{n-1} \mid n!$

10 จงหาพหุนาม P(x) ที่ทำให้ $P(x^2) = P(x)P(x-1)$

11. จงหาค่า n ที่ทำให้ x^2-x+1 หาร $x^{n+1}-x^n+1$ ลงตัว
12. จงหาโพลิโนเมียลดีกรี 3 P(x) โดยที่ P(0) = 0 และ P(1) = P(2) = P(3) = 1
13. จงหาโพลิโนเมียลดีกรี 4 P(x) โดยที่ P(0) = 0 และ P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1
14. จงแสดงว่า $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
15. จงแสดงว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
16. จงแสดงว่า $\sqrt[3]{16}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ติดตามแนวคิดจากง่ายไปยากได้ใน

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ และ ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

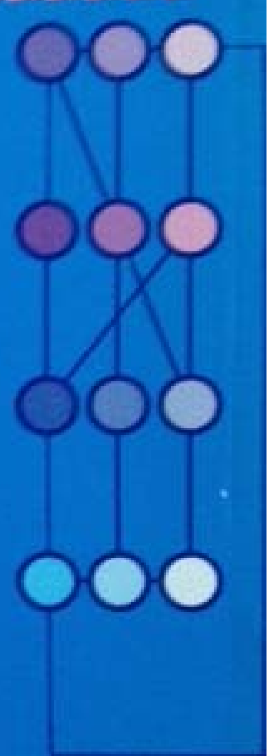
คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19

เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

สารพันปัญหาคณิตศาสตร์ และ ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก

ภายในเล่มมีคำถามคณิตศาสตร์ต่างๆ มากมาย เหมาะสำหรับครูและนักเรียนที่สนใจปัญหาคณิตศาสตร์ ตัวอย่างเช่น



1. จงแสดงว่า $\log n < n$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
2. $x^2 + x + 1$ หาร $x^{2545} + x^{2002} + 1$ เหลือเศษเท่าใด
3. จงแสดงว่า ถ้า $m > n$ แล้ว $(1 + \frac{1}{m})^m > (1 + \frac{1}{n})^n$
4. $x^{2541} - 1$ หารด้วย $x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด
5. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{16} จากอนุกรม $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$
6. จงหาค่าของ $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$
7. กำหนด $f(x) = x^{10} + x^5 - 130x^3 + 335x^2 - 295x + 88$
   k มากที่สุดทำให้ $(x-1)^k$ หาร $f(x)$ ลงตัวเท่ากับเท่าใด
8. จงแสดงว่า $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$
9. สำหรับจำนวนเต็มบวก n จงพิสูจน์ว่า
   $$n^{\frac{1}{n}} + n^{\frac{1}{n+1}} + n^{\frac{1}{n+2}} + \ldots + n^{\frac{1}{2n+1}} \geq n\sqrt[n]{2}$$
10. ถ้า $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ จงหาค่าของ $\dfrac{\cos A \cos B \cos C}{\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C}$

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330
สาขาศาลาพระเกี้ยว โทร. 255-4433 โทรสาร 255-4441
สาขาสยามสแควร์ โทร. 251-6141 โทรสาร 254-9495
email : cubook@chula.ac.th
http://www.cubook.chula.ac.th

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 19
ISBN 974-332-595-6
9 789743 325953
C112 -
7010 160.00 บาท