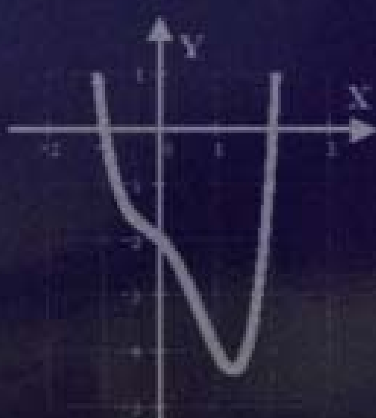
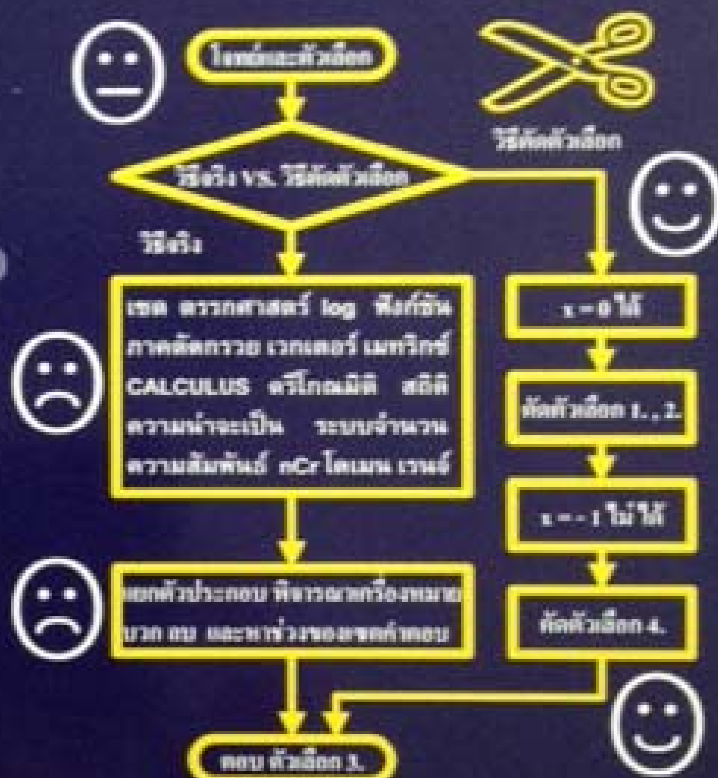
book20

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
## ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่
## คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

เซตคำตอบของอสมการ
$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 < 0$
คือตัวเลือกใด
1. $(-\infty, -1)$
2. $(2, \infty)$
3. $(-1, 2)$
4. $[-1, 2]$




- วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
- เทคนิคการตัดตัวเลือกและวิธีลัดแบบต่างๆ
- ใช้เวลาน้อยกว่าในการทำคะแนน
- ประยุกต์เหตุผลคณิตศาสตร์ในการทำโจทย์

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# คณิตศาสตร์ปรนัย
# เล่มที่ 20

## โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
## ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่
## คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

book20

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
## ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่
## คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

เหมาะสำหรับ

**ENTRANCE** ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

ข้อสอบคณิตศาสตร์ ระดับ ม. ปลาย

ค.011 , ค.012 , ค.013 , ค.014 , ค.015 , ค.016

ค.021 , ค.022 , ค.023 , ค.024 , ค.025 , ค.026

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

book20

# คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20
## โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์
## ENTRANCE ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

**ผู้เขียน** **รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา**

พิมพ์ครั้งที่ 1 พฤษภาคม พ.ศ. 2542



**ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ**

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20 -- กรุงเทพฯ :

จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

416 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง

510

ISBN 974-332-284-1

จัดจำหน่ายโดย *ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*

*ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330*

*ศาลาพระเกี้ยว โทร. 255-4433 โทรสาร 255-4441*

*สยามสแควร์ โทร. 251-6141 โทรสาร 254-9495*

*email: cubook@chula.ac.th*

*http://www.cubook.chula.ac.th*

*พิมพ์ที่* *โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2183563-4, 2153612*

*นายประเสริฐ ศีลพิพัฒน์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา พฤษภาคม 2542*

*4202-65/3,000(2)*

# คำนำ

หนังสือ **โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒** ผู้เขียนได้รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ โดยคัดเลือกข้อสอบที่สามารถทำได้ทั้งสองแบบ คือโดยการใช้วิธีจริง และ วิธีการตัดตัวเลือก เพื่อให้นักเรียนได้เห็นการหาคำตอบโดยวิธีจริงตามหลักสูตร และได้ฝึกหัดใช้ข้อสังเกต หรือใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็กๆ น้อยๆ ช่วยในการตัดตัวเลือก

การทำข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE โดยการตัดตัวเลือกที่ผู้เขียนได้จัดทำเป็นหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัยตั้งแต่ พ.ศ. 2537 และ คู่มือตัดตัวเลือกภาค 1 – 3 นั้นต้องขอยืนยันว่าไม่ใช่การสอนให้นักเรียนทำการเดาสุ่มตัวเลือกแบบไร้เหตุผล แต่การตัดตัวเลือกที่ผู้เขียนได้แนะนำเป็นการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่เหมาะสมกับข้อจำกัดของโจทย์และตัวเลือก ทำให้เกิดเทคนิคการตัดตัวเลือกแบบต่างๆ มากมายเช่น

- โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
- เซตคำตอบเป็นตัวเลือกใด
- วาดรูปวัดระยะทาง
- โดเมนและเรนจ์คือเซตใด
- ความชัน บวก หรือ ลบ
- ฯลฯ

การใช้หนังสือเล่มนี้ให้เกิดประโยชน์มากที่สุดนักเรียนควรจะต้องดูทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่า การตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้นในการสอบ แต่วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป

พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

**สวัสดีครับ**

**รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา**

## ผลงานเฉลยข้อสอบของผู้เขียนในชุด คณิตศาสตร์ปรนัย

เล่มที่ 1 คณิตศาสตร์ กข. 2537

เล่มที่ 2 คณิตศาสตร์ ก. 2537

เล่มที่ 3 สมาคมคณิตศาสตร์ ฯ 2537

เล่มที่ 4 วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 2 2536

เล่มที่ 5 คณิตศาสตร์โอลิมปิกรอบคัดเลือก 2537

เล่มที่ 6 วัฏจักรคณิตศาสตร์ ครั้งที่ 3 2537 สมาคมคณิตศาสตร์ ฯ 2538
คณิตศาสตร์ กข. 2538 คณิตศาสตร์ ก. 2538

เล่มที่ 7 คู่มือตัดตัวเลือกสำหรับคณิตศาสตร์ ม.ปลาย ภาค 1

เล่มที่ 8 คณิตศาสตร์โอลิมปิกรอบคัดเลือก 2533-2538

เล่มที่ 9 คู่มือตัดตัวเลือกสำหรับคณิตศาสตร์ ม.ต้น

เล่มที่ 10 คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 เฉลย ก - กข. 2539

เล่มที่ 11 เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 2537 - 2539

เล่มที่ 12 เฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2537 - 2539

เล่มที่ 13 คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA

เล่มที่ 14 เฉลยวัฏจักรคณิตศาสตร์ครั้งที่ 1 - 5

เล่มที่ 15 เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิก และข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิก 2539

เล่มที่ 16 คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 เฉลย ก.-กข. 2540

เล่มที่ 17 ก. - กข. 2541 , โอลิมปิก 2540 , สมาคมคณิตศาสตร์ฯ 2539 - 2541

เล่มที่ 18 รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ และ สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

เล่มที่ 19 สารพันปัญหาคณิตศาสตร์

เล่มที่ 20 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์
ENTRANCE ระบบใหม่คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

**ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

# สารบัญ

## MATHCAD กับการเฉลยข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒

8. $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5-2\sqrt{6}$
2. $-5+2\sqrt{6}$
3. $5-2\sqrt{6}$
4. $5+2\sqrt{6}$

**แนวคิด** MATHCAD สามารถจัดรูปแบบพีชคณิตได้

$$\frac{2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$$

เพราะฉะนั้นตอบ 4.

$$5+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$$

10. ถ้า A เป็น 2 × 2 เมทริกซ์ ซึ่งมิใช่เอกฐาน และถ้า $\begin{bmatrix}60 & 20\\30 & 40\end{bmatrix}A = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$

แล้ว $A^{-1}$ คือ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix}6 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix}9 & -18\\-12 & 6\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}12 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix}12 & 20\\30 & 8\end{bmatrix}$

**แนวคิด** MATHCAD สามารถหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ได้

$$\left[\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}60 & 20\\30 & 40\end{bmatrix}^{-1}\right]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix}12 & 4\\6 & 8\end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นตอบ 3.

**สนใจความสามารถของ MATHCAD อื่น ๆ หาอ่านได้ใน *<u>คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD</u>* เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา**
**หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

# บทนำ

## คำถามเกี่ยวกับการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์

**คำถาม 1.** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร

**คำตอบ 1.** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์เป็นการหาคำตอบของข้อสอบแบบปรนัยโดยวิธีกำจัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการออกไปก่อนโดยใช้เหตุผลง่ายๆ ว่าในข้อสอบแต่ละข้อ

มีตัวเลือกที่ได้คะแนนเพียงตัวเลือกเดียว

และ ตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนมีอยู่ 3 ตัวเลือก

ดังนั้นการหาตัดตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนซึ่งมีถึง 3 ตัวเลือกทิ้งไปก่อนอาจเป็นวิธีที่ได้คะแนนเร็วกว่า

**คำถาม 2.** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คือเดาใช่หรือไม่

**คำตอบ 2.** ไม่ใช่การเดา เพราะว่าเหตุผลที่เราใช้ในการตัดตัวเลือกนั้นเราสามารถมั่นใจได้ว่าตัวเลือกที่ตัดทิ้งไปนั้นเป็นตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนแน่นอน

**คำถาม 3.** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ต้องใช้เนื้อหาคณิตศาสตร์อะไรบ้าง

**คำตอบ 3.** เหตุผลและเนื้อหาที่เราใช้ในการตัดตัวเลือก ก็คือเหตุผลทางคณิตศาสตร์ตามหลักสูตรที่นักเรียนได้เรียนมาโดยเราเลือกนำมาใช้ให้เหมาะสมกับโจทย์และตัวเลือกขณะนั้น ทำให้เราสามารถได้ได้คะแนนอย่างรวดเร็ว ตัวอย่างเช่น

1. คำถามเกี่ยวกับเซต

   เราสามารถใช้ แผนภาพของเวนน์ หรือ การสมมติสมาชิก ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

2. คำถามเกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณ sinx , cosx

   ในการตัดตัวเลือกเราสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับ

   ค่าบวกหรือลบของ sinx cos x ในควอดรันท์ต่างๆ

   $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad -1 \leq \cos x \leq 1$

   โดเมนของฟังก์ชันตรีโกณ arcsinx , arccosx ., ....ฯลฯ

3. คำถามเกี่ยวกับตรรกศาสตร์

เราสามารถใช้ ค่าความจริง T F ช่วยในการจำแนกตัวเลือก

4. คำถามเกี่ยวกับเวกเตอร์

เราสามารถวาดรูปเพื่อวัดความยาวของเวกเตอร์ หรือ ดูจุดปลายของเวกเตอร์ว่าอยู่ในควอดรันท์ใด ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

5. คำถามเกี่ยวจำนวนเชิงซ้อน

เราสามารถใช้ ค่าสัมบรูณ์ของจำนวนเชิงซ้อน หรือ พิกัดของจำนวนเชิงซ้อนว่าอยู่ในควอดรันท์ใด ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

6. คำถามเกี่ยวกับสมการเส้นตรง

เราสามารถใช้ ความชัน ระยะตัดแกน และ กราฟของเส้นตรง ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

7. คำถามเกี่ยวกับภาคตัดกรวย เช่น พาราโบลา

เราสามารถใช้ พิกัดจุดยอด โฟกัส หรือลักษณะ คว่ำหงาย เปิดซ้ายขวา ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

8. คำถามเกี่ยวกับภาคตัดกรวย เช่น วงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา

เราสามารถใช้ รูปแบบสมการวงกลม วงรี ไฮเพอร์โบลา พิกัดจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก แกนโท หรือแกนสมมาตรของรูป ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

9. คำถามเกี่ยวกับเซตคำตอบของ สมการ หรือ อสมการ

เราสามารถใช้ การแทนค่า x บางค่าเพื่อดูว่า x นั้นอยู่หรือไม่อยู่ในเซตคำตอบ ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

10. คำถามเกี่ยวกับ โดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

เราสามารถใช้ การแทนค่า x บางค่าเพื่อดูว่า x นั้นอยู่หรือไม่อยู่ใน โดเมน และ เรนจ์ของความสัมพันธ์และฟังก์ชันนั้น ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

**คำถาม 4.** ข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือกมีมาตั้งแต่เมื่อไร

**คำตอบ 4.** ในความคิดของผู้เขียนคาดว่ามีมาพร้อมๆ กับการสอบแบบปรนัย ซึ่งแต่เดิมประมาณก่อน พ.ศ. 2510 การสอบ ENTRANCE จะเป็นการสอบแบบอัตนัย นักเรียนต้องแสดงวิธีทำทุกข้อ แต่หลังจากนั้น ได้มีการเปลี่ยนลักษณะข้อสอบจากแสดงวิธีทำ มาเป็นแบบปรนัย ตัวอย่างเช่น

**ข้อสอบแบบอัตนัย** จงหาคำตอบของสมการ $x^2 - 4x - 5 = 0$

นักเรียนที่จะได้คะแนนจากข้อนี้ต้องมีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รู้สูตรรากของสมการกำลังสอง

**ข้อสอบแบบปรนัย** คำตอบของสมการ $x^2 - 4x - 5 = 0$ คือตัวเลือกใด

1. $1 , 5$ 2. $-1 , 5$ 3. $1 , -5$ 4. $-1 , -5$

นักเรียนที่มีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รู้สูตรรากของสมการกำลังสอง ต้องทำคะแนนได้แน่นอน แต่พวกที่ไม่มีความรู้ การแยกตัวประกอบ หรือ รู้สูตรรากของสมการกำลังสอง แต่แทนค่า $x = -1$ จะได้ $x^2 - 4x - 5 = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3.

$x = 5$ จะได้ $x^2 - 4x - 5 = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4.

**คำถามถึงครูผู้สอนและผู้ออกข้อสอบคณิตศาสตร์** ท่านคิดว่านักเรียนที่ได้ 2 คะแนนจากการแทนค่าจะมีความรู้เรื่องการแยกตัวประกอบหรือไม่ แต่จากประสบการณ์ของผู้เขียนในการตรวจข้อสอบ CALCULUS ของนิสิตปีที่ 1 ซึ่งเป็นข้อสอบแบบแสดงวิธีทำพบว่ามีนิสิตมากกว่า 1 คนแยกตัวประกอบไม่เป็น

**ตัวอย่างข้อสอบจริง ข้อ 6 หมวด ข. คณิตศาสตร์ ก. 2520**

ค่าของ x ที่สอดคล้องอสมการ $\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x}$ คือ

ก. $x > 1$ ข. $x < \frac{1}{2}$ ค. $0 < x < \frac{1}{2}$

ง. $\frac{1}{2} < x < 1$ จ. $0 < x < \frac{1}{2}$ หรือ $x > 1$

**วิธีจริงที่หลักสูตรคณิตศาสตร์เราต้องการ**

$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x}$ เอา $x^2(2x-1)^2$ คูณตลอดจะได้

$$x^2(2x-1)^2 \frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x} x^2(2x-1)^2$$

$$x^2 (2x-1) < x(2x-1)^2$$

$$x^2 (2x-1) - x(2x-1)^2 < 0$$

$$x (2x-1)(x-(2x-1)) < 0$$

$$x (2x-1)(1-x) < 0$$

$$x ( x - \frac{1}{2})(1-x) < 0$$

$$x (x - \frac{1}{2})( x - 1) > 0$$

เพราะฉะนั้นค่าของ x คือ $0 < x < \frac{1}{2}$ หรือ $x > 1$

**การตัดตัวเลือก**

$x = 0$ ไม่ได้ $\longrightarrow$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ข.

$x = 2$ $\longrightarrow \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ จริง $\longrightarrow$ $x = 2$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ค. และ ง.

$x = 0.1$ $\longrightarrow \frac{1}{0.2-1} = -\frac{1}{0.8} < 10$ จริง $\longrightarrow$ $x = 0.1$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก ก.

สรุปได้ตัวเลือก จ. เป็นคำตอบ

**หมายเหตุ**ตัวอย่างนี้จะเห็นว่าการตัดตัวเลือกได้คะแนนเร็วกว่าวิธีจริง

**คำถาม 5.** ทำไมจึงต้องมีข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก

**คำตอบ 5.** ครูผู้สอนและผู้ออกข้อสอบคณิตศาสตร์ทุกคนอยากให้ข้อสอบที่ออกมานั้นสามารถวัดความรู้ได้ตรงวัตถุประสงค์และต้องใช้ความรู้จริงตามหลักสูตร โดยต้องมีขั้นตอนการคำนวณต่างๆ ครบจึงจะได้คำตอบที่ต้องการ แต่สาเหตุที่ยังมีข้อสอบ ENTRANCE ที่สามารถหาคำตอบได้ด้วยการตัดตัวเลือก อาจเป็นเพราะ

1. หลักสูตรบังคับ เช่น หลักสูตรบังคับว่านักเรียนต้องบอกได้ว่า ประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์หรือประพจน์สมมูล ดังนั้นตัวเลือกจึงต้องเป็นประพจน์ เราจึงแทนค่า T F ของประพจน์แล้วดูว่าค่าความจริงของตัวเลือกไม่เหมือนกับประพจน์ของโจทย์ ทำการตัดตัวเลือกได้
2. มีเวลาในการออกข้อสอบน้อย
3. การออกข้อสอบแบบตัวเลือกต้องมีการสร้างตัวลวง ซึ่งตัวลวงนี้เองทำให้เราสามารถใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็กๆ น้อยๆ มาช่วยในการตัดตัวเลือกได้
4. เมื่อเป็นข้อสอบจึงต้องเป็นความลับ เมื่อเป็นความลับ ก็ไม่สามารถตรวจสอบได้ ทำให้ไม่สามารถปรับปรุงคุณภาพข้อสอบได้ ดังนั้นตัวเลือกบางตัวจึงยังมีข้อบกพร่อง ทำให้เราตัดทิ้งได้

**คำถาม 6.** เราควรใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบใดกับข้อสอบคณิตศาสตร์

**คำตอบ 6.** เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ไม่ได้มีใน ค 011 – ค 016 แต่เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบมีที่ตัวข้อสอบเอง นั้นคือคำถาม และ รูปแบบของข้อสอบจะเป็นตัวชี้แนะว่า ต้องใช้เทคนิคการตัดตัวเลือกแบบใด

**คำถาม 7.** เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์มีอะไรบ้าง

**คำตอบ 7.**เทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คงจะมีใหม่ออกมาเรื่อยๆ ขึ้นอยู่กับตัวข้อสอบ แต่ผู้เขียนจะนำเทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์ที่ได้เขียนไว้ตั้งแต่การเฉลยข้อสอบ ENTRANCE พ.ศ. 2537 จนถึง ENTRANCE ระบบใหม่ พ.ศ. 2542 เท่าที่พบ

ตัวอย่างของเทคนิคการตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร
2. เซตคำตอบคือเซตในตัวเลือกใด
3. เซตคำตอบเป็นสับเซตของตัวเลือกใด
4. โดเมนและเรนจ์คือเซตในตัวเลือกใด
5. ใช้การดูเครื่องหมายบวกลบของ sin ,cos, ... ในการจำแนกตัวเลือก
6. พาราโบลา คว่ำหรือหงาย
7. เส้นตรงมีความชันเป็นบวกหรือลบ
8. วาดรูปที่สอดคล้องกับโจทย์ แล้วทำการวัดระยะทาง
9. ประมาณค่าของโจทย์กับของตัวเลือก
10. ขนาดของเวกเตอร์สามารถจำแนกตัวเลือกถูกและผิดได้
11. ใช้ค่า detA ในการจำแนกตัวเลือก
12. เปรียบเทียบค่า มากกว่าหรือน้อยกว่า ระหว่างโจทย์กับตัวเลือก
13. รูปแบบสมการภาคตัดกรวย จำแนกตัวเลือกได้
14. จุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จำแนกตัวเลือกเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้
15. แกนสมมาตรขนานแกน X หรือ แกน Y จำแนกตัวเลือกเกี่ยวกับภาคตัดกรวยได้
16. การพิจารณาข้อความ 2 ข้อความหากเราทำได้ 1 ข้อความก็จะตัดตัวเลือกได้ 2 ตัวเลือก
18. คำถามที่ถามว่าตัวเลือกใดผิด แสดงว่าโจทย์ต้องการให้เราตัดตัวเลือกที่ถูกทิ้ง
19. คำถามที่ถามว่าตัวเลือกใดถูก แสดงว่าโจทย์ต้องการให้เราตัดตัวเลือกที่ผิดทิ้ง
20. ฯลฯ

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่ดีที่สุดคือการทำด้วยวิธีจริงไปเรื่อยๆ และสังเกตตัวเลือกไปด้วยว่าเราจะตัดตัวเลือกได้หรือยังเมื่อเห็นว่าได้คำตอบที่ถูกต้องแล้วก็ควรจะหยุดทำข้อนี้ ไปทำข้ออื่นต่อดีกว่า ตัวอย่างข้อสอบต่างๆ และเทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมมีดังต่อไปนี้

# โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ค่า x จากสมการ $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$ ตรงกับข้อใด

1. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi$
2. $2n\pi + \frac{\pi}{4}, 2n\pi$
3. $2n\pi + \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{4}$
4. $2n\pi$

**การตัดตัวเลือก**

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ n

แทนค่า n = 0 ตัวเลือกแต่ละตัวเลือกจะเป็น

1. $\frac{\pi}{2}, 0$
2. $\frac{\pi}{4}, 0$
3. $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$
4. $0$

โดยการแทนค่า x = 0 จะได้ว่าสมการ $\sin 0 + \cos 0 = 1 + \sin 0 \cos 0$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น x = 0 ได้ แต่ตัวเลือก 3. ไม่มีค่า 0

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

โดยการแทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้ว่าสมการ $\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + \sin\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{2}$ ได้ แต่ตัวเลือก 2. และ 4. ไม่มีค่า $\frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

# เซตคำตอบคือตัวเลือกใด

เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} > 0$ คือตัวเลือกใด

1. $(-\infty, -4] \cup [3, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$
3. $(-\infty, -4) \cup [3, \infty) \cup \{0\}$
4. $(-\infty, -4] \cup [3, \infty) \cup \{0\}$

**การตัดตัวเลือก**

จากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} > 0$ x ต้องไม่เท่ากับ – 4 แต่ตัวเลือก 1. และ 4. มี – 4 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

แทนค่า $x = 3$ $\frac{x^2(x-3)}{x+4} = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 3. $(-\infty, -4) \cup [3, \infty) \cup \{0\}$ มี 3 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เซตคำตอบของอสมการ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$ คือตัวเลือกใด

1. $(-\infty, 5]$
2. $[0, 5)$
3. $(5, \infty)$
4. $(-5, 5)$

**การตัดตัวเลือก**

จากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$ จะเห็นว่า $x = 0$ ได้ แต่ตัวเลือก 3. ไม่มี 0 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

จากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$ จะเห็นว่า $x = 5$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 1. มี 5 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จากเงื่อนไขของโจทย์ $\frac{|x|}{|x|-5} \leq 0$ จะเห็นว่า $x = -4$ ได้ แต่ตัวเลือก 2. ไม่มี –4 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

# โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ค่าของ $(\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta})^2+(\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta})^2-(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta})^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 1
3. 3
4. 5

**การตัดตัวเลือก**

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ $\theta$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$(\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta})^2+(\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta})^2-(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta})^2$$
$$= (\sin\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}})^2+(\cos\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}})^2-(\tan\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}})^2$$
$$= (\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1})^2+(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{1})^2-(1+1)^2$$
$$= (\frac{3}{\sqrt{2}})^2+(\frac{3}{\sqrt{2}})^2-4$$
$$= 4.5+4.5-4$$
$$= 5$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

∀∃∅∩∪→±∉≥≤∞∈π

# ใช้การส่งค่าของฟังก์ชันในการตัดตัวเลือก

กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ,x \ge 0 \\ -x^2-1 & ,x < 0 \end{cases}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ มีค่าตรงกับข้อใด

1. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 2 \\ -\sqrt{-x-1} & ,x < -1 \end{cases}$
2. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 2 \\ -\sqrt{1-x} & ,x < 1 \end{cases}$
3. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 0 \\ -\sqrt{-x-1} & ,x < 0 \end{cases}$
4. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 0 \\ -\sqrt{1-x} & ,x < 0 \end{cases}$

**การตัดตัวเลือก**

จากโจทย์ $f(-1) = -2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-2) = -1$ และ $f^{-1}(-2)$ ของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 2 \\ -\sqrt{-x-1} & ,x < -1 \end{cases}$ $\quad f^{-1}(-2) = -1$

ตัวเลือก 2. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 2 \\ -\sqrt{1-x} & ,x < 1 \end{cases}$ $\quad f^{-1}(-2) = -\sqrt{3}$

ตัวเลือก 3. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 0 \\ -\sqrt{-x-1} & ,x < 0 \end{cases}$ $\quad f^{-1}(-2) = -1$

ตัวเลือก 4. $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 0 \\ -\sqrt{1-x} & ,x < 0 \end{cases}$ $\quad f^{-1}(-2) = -\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & ,x \ge 0 \\ -x^2-1 & ,x < 0 \end{cases}$ มีเรนจ์เป็นเซต $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

เพราะฉะนั้นโดเมนของ $f^{-1}$ คือ $(-\infty, -1) \cup [2, \infty)$

แต่โดเมนของ $f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & ,x \ge 0 \\ -\sqrt{-x-1} & ,x < 0 \end{cases}$ คือ $(-\infty, \infty)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

# โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ถ้า $A_{nxn}$ เป็นเมทริกซ์ที่มิใช่เอกฐาน แล้ว det(adj(adjA)) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $|A|^{n^2+2n}$ 2. $|A|^{n^2-2n}$
3. $|A|^{(n-1)^2}$ 4. $|A|^{(n+1)^2}$

**การตัดตัวเลือก**

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเมทริกซ์ A และ n

แทนค่า n = 1 และ A = [ 4 ]

จะได้ว่า $\det A = 4$ , $A^{-1} = [\frac{1}{4}]$ , $\mathrm{adj}A = \det A\ A^{-1} = 4\,[\frac{1}{4}] = [\ 1\ ]$

และ det(adj(adj[ 4 ])) = det(adj([ 1 ])) = det([ 1 ]) = 1

ค่า det ของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. $|A|^{n^2+2n} = 4^3 = 64$
2. $|A|^{n^2-2n} = 4^{-1} = 0.25$
3. $|A|^{(n-1)^2} = 4^0 = 1$
4. $|A|^{(n+1)^2} = 4^4 = 256$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

∀∃∅∩∪→±∉≥≤∞∈π

# เปรียบเทียบค่าระหว่างโจทย์กับตัวเลือก

กำหนดให้ อนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+...$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{3}{4}$
2. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{4}$
3. เป็นอนุกรมลู่เข้ามีผลบวกเท่ากับ $\frac{7}{4}$
4. เป็นอนุกรมลู่ออก

**การตัดตัวเลือก**

เราสามารถเปรียบเทียบค่าระหว่างโจทย์และตัวเลือกได้

เพราะว่า $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+... > \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+... > \frac{5}{4}$

$\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+... > \frac{7}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวเลือกใดเป็นผลบวกของอนุกรมอนันต์ $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + .......$

1. $\frac{20}{9}$
2. $\frac{40}{9}$
3. $\frac{91}{45}$
4. $\frac{218}{99}$

**การตัดตัวเลือก**

เราสามารถเปรียบเทียบค่าระหว่างโจทย์และตัวเลือกได้

โจทย์ $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + ....... = 2.2222222222222..... < 2.3$ แน่นอน

คำนวณค่าแต่ละตัวเลือกโดยการหารยาว

1. $\frac{20}{9} = 2.222$
2. $\frac{40}{9} > 3$
3. $\frac{91}{45} = 2.02$
4. $\frac{218}{99} = 2.202$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

# โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

จากข้อสอบคัดเลือกโอลิมปิก พ.ศ. 2539

2. $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ เมื่อ $2 < x < 3$ มีค่าเท่าใด

1. $3\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{3}$
3. $2\sqrt{2}$
4. $3\sqrt{2}$

**การตัดตัวเลือก** เนื่องจากโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า $x = \frac{5}{2}$ จะได้คำตอบเร็วกว่า

$2x - 4 = 2(\frac{5}{2}) - 4 = 1$ และ $2\sqrt{2x-4} = 2\sqrt{1} = 2$

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{\frac{5}{2}+2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \sqrt{\frac{5}{2}-2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง**

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} &= \sqrt{x+2\sqrt{2(x-2)}} = \sqrt{(x-2)+2\sqrt{(x-2)2}+2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})^2} = \left|\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right| \\ &= \sqrt{x-2}+\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} &= \sqrt{x-2\sqrt{2(x-2)}} = \sqrt{(x-2)-2\sqrt{(x-2)2}+2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2} \\ &= \left|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right|\end{aligned}$$

เพราะว่า $2 < x < 3$

$0 < x - 2 < 1$

$\sqrt{x-2} < 1$

$\sqrt{x-2} - \sqrt{2} < 1 - \sqrt{2} < 0$

เพราะฉะนั้น $\left|\sqrt{x-2} - \sqrt{2}\right| = -(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})$

สรุป $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}} = (\sqrt{x-2} + \sqrt{2}) - (\sqrt{x-2} - \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$

# โดเมนและเรนจ์คือเซตในตัวเลือกใด

กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 2 \}$ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือตัวเลือกใด

1. $D_r = [0, 5]$ $R_r = [0, 3]$ 2. $D_r = [1, 5]$ $R_r = [0, 3]$

3. $D_r = [1, 5]$ $R_r = [-1, 3]$ 4. $D_r = [0, 5]$ $R_r = [-1, 3]$

**การตัดตัวเลือก**

จากเงื่อนไข $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 2$ แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้

แต่ตัวเลือก 1. และ 4. มี 0 เป็นสมาชิกในโดเมน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 5$ และ $y = -1$ จะได้ $\sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = \sqrt{5-1} + \sqrt{-1+1} = 2$

แสดงว่า $y = -1$ ได้ แต่ตัวเลือก 2. ไม่มี $-1$ เป็นสมาชิกในเรนจ์

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid 3|x| + 5|y| = 15 \}$ $D_r \cap R_r$ คือตัวเลือกใด

1. $[-3, 3]$ 2. $[-5, 5]$

3. $[0, 3]$ 4. $[0, 5]$

**การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า ถ้า $y = 5$ จะทำให้ $3|x| = 15 - 25 = -10 < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $5 \notin R_r$ เพราะฉะนั้น $5 \notin D_r \cap R_r$

แต่ตัวเลือก 1. และ 4. มี 5 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

จากเงื่อนไข $3|x| + 5|y| = 3|\pm x| + 5|\pm y| = 15$ แสดงว่า $\pm x, \pm y \in D_r \cap R_r$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

∀∃∅∩∪→±∉≥≤∞×∈π

# ใช้การเปรียบเทียบค่ามากหรือน้อยระหว่างโจทย์กับตัวเลือก

ค่าของ $\frac{1}{8}$ sin70 sin 50 sin 10 มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{16}$
3. $\frac{1}{32}$
4. $\frac{1}{64}$

**การตัดตัวเลือก**

เราสามารถเปรียบเทียบค่าระหว่างโจทย์และตัวเลือกได้

เพราะว่า $\sin 70 < 1$ , $\sin 50 < 1$ , $\sin 10 < 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70 \sin 50 \sin 10 < \frac{1}{8}(1)(1)(1) = \frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $\sin 70 < 1$ , $\sin 50 < 1$ , $\sin 10 < \sin 30 = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70 \sin 50 \sin 10 < \frac{1}{8}(1)(1)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$$\sin 75 = \sin(45+30) = \sin 45\cos 30 + \cos 45\sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+1.732}{2(1.414)} = \frac{2.732}{2.828} = 0.966$$

$$\sin 15 = \sin(45-30) = \sin 45\cos 30 - \cos 45\sin 30$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{1.732-1}{2(1.414)} = \frac{0.732}{2.828} = 0.259$$

เพราะว่า $\sin 70 < \sin 75 = 0.966$ , $\sin 50 < \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$ , $\sin 10 < \sin 15 = 0.259$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70 \sin 50 \sin 10 < \frac{1}{8}(0.966)(0.866)(0.259) = 0.027$

เพราะว่า $\frac{1}{32} = 0.031 > 0.027$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

# วาดรูปและวัดระยะทาง

วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ และ $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ อยู่ใกล้กันมากที่สุดเป็นระยะทางเท่าใด

1. 2 หน่วย
2. 3 หน่วย
3. 5 หน่วย
4. 6 หน่วย

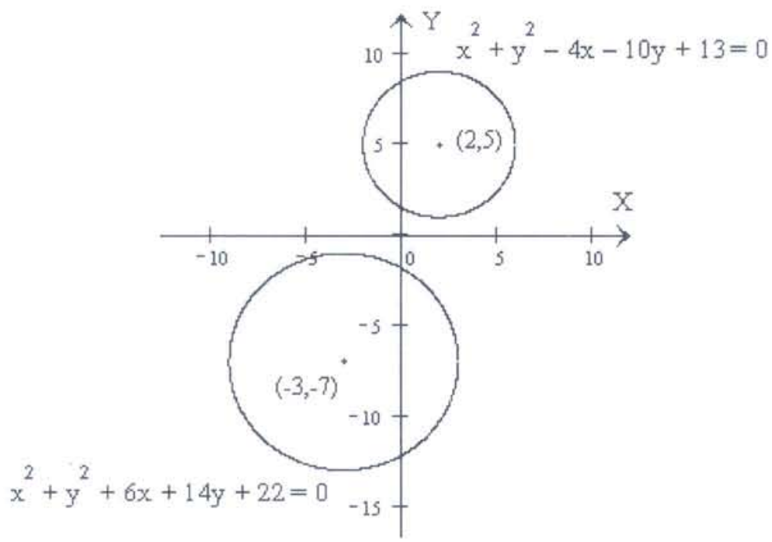
**การตัดตัวเลือก**

ท่องจำสูตรไว้ใช้งานได้เลย $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$ เพราะฉะนั้น

วงกลม $x^2 + y^2 + 6x + 14y + 22 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, -7)$ และรัศมี $= \sqrt{\frac{36}{4} + \frac{196}{4} - 22} = 6$

วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 13 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 5)$ และรัศมี $= \sqrt{\frac{16}{4} + \frac{100}{4} - 13} = 4$

วาดรูปวงกลมทั้งสอง ใช้ 1 เซนติเมตร ต่อ 1 หน่วย




จะเห็นว่าจุดที่อยู่ใกล้กันมีระยะเท่ากับ 2 เซนติเมตร
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

# วาดรูปและใช้พิกัดช่วยตัดตัวเลือก

ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีสมการเป็น $2x + 3y - 4 = 0$

N เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2 , \frac{13}{2})$ และตั้งฉากกับ L

ถ้า P เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับ N จุดที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับแกน Y คือจุดใด

1. $(-1 , 0)$
2. $(0 , 2)$
3. $(-\frac{49}{5} , 0)$
4. $(0 , \frac{121}{5})$

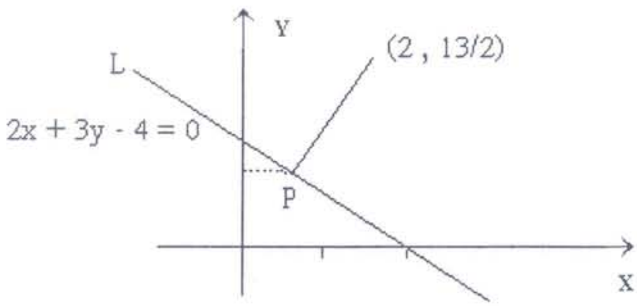
**การตัดตัวเลือก**

โจทย์ถามว่า จุดที่เกิดจากเส้นตรงที่ลากจากจุด P ไปตั้งฉากกับแกน Y คือจุดใด แสดงว่าจุดนั้นอยู่บนแกน Y

1. $(-1 , 0)$ อยู่บนแกน X
2. $(0 , 2)$ อยู่บนแกน Y
3. $(-\frac{49}{5} , 0)$ อยู่บนแกน X
4. $(0 , \frac{121}{5})$ อยู่บนแกน Y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์




จากรูปจะเห็นว่าเมื่อลากเส้นจากจุด P มาตั้งฉากกับแกน Y จะตัดแกน Y ทางด้านบวก 2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งดีกว่า

# ใช้พิกัดจุดศูนย์กลางช่วยตัดตัวเลือก

กำหนดให้วงรีมีสมการเป็น $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$ สมการของวงกลมที่บรรจุในวงรีแนบในและมีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงรีที่กำหนดให้คือ

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$

**การตัดตัวเลือก**

จัดรูปสมการวงรี $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$

$$6(x^2 + 2x + 1) + 5(y^2 - 4y + 4) = 4 + 6 + 20$$

$$6(x + 1)^2 + 5(y - 2)^2 = 30$$

การทำข้อสอบเพื่อให้ได้คะแนนเร็วที่สุดคือทำตามวิธีจริงและสังเกตตัวเลือกด้วยว่าตัดทิ้งได้หรือยัง

จากสมการวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ $(-1 , 2)$

ท่องจำสูตรไว้ใช้งานได้เลย $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

หาจุดศูนย์กลางของแต่ละตัวเลือก

1. $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ จุดศูนย์กลาง $(-1 , 2)$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 31 = 0$ จุดศูนย์กลาง $(1 , -2)$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ จุดศูนย์กลาง $(-2 , 1)$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 1 = 0$ จุดศูนย์กลาง $(2 , 1)$

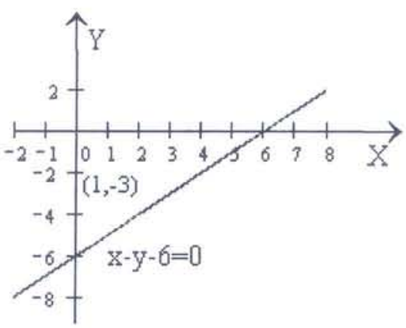
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

# ใช้พิกัดจุดศูนย์กลางช่วยตัดตัวเลือก

ให้ (1 , –3) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง $x - y - 6 = 0$ ที่จุด (2 , –4) สมการของวงกลมคือสมการในข้อใด

1. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 8 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 8 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

**การตัดตัวเลือก**




โดยการวาดรูปเส้นตรงและวัดระยะทางจากจุด (1 , –3) มายังเส้นตรงจะได้ระยะทาง 1.4 เซนติเมตร

วงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

จุดศูนย์กลางของตัวเลือกแต่ละตัวคือ

1. (– 1 , 3)  2. (1 , –3)  3. (1 , 3)  4. (1 , –3)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีรัศมี $r = \sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

รัศมีของตัวเลือกที่เหลือแต่ละตัวคือ  2. $\sqrt{2}$  4. 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

# เซตคำตอบคือตัวเลือกใด

กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $[0, 2\pi]$

เซตคำตอบของอสมการ $\dfrac{\sin^2 x - \sin x}{\cos x - \frac{1}{2}} < 0$ คือเซตใด

1. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$
2. $(0, \frac{\pi}{3}) \cup [\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$
3. $(0, \frac{\pi}{3}) \cup (\pi, \frac{5\pi}{3}]$
4. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

**การตัดตัวเลือก**

คำถามและตัวเลือกแบบนี้เราจะใช้วิธีนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ โดยเลือกค่าที่คิดเลขง่ายๆ และจำแนกตัวเลือกได้ยิ่งดี

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ $\qquad \dfrac{\sin^2(\frac{\pi}{4}) - \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}} = -1 < 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{4}$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ แต่ตัวเลือก 1. และ 4. ไม่มี $\frac{\pi}{4}$ เป็นสมาชิก
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \frac{5\pi}{3}$ $\qquad \dfrac{\sin^2(\frac{5\pi}{3}) - \sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3} - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\frac{5\pi}{3}$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ แต่ตัวเลือก 2. มี $\frac{5\pi}{3}$ เป็นสมาชิก
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

θ∀∃φ∅∩→≥≤×∝⊂∈∉∪πt5

# บวกเป็นรากลบก็ต้องเป็นราก

คำตอบทั้งหมดของสมการ $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \pi$
เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

1. $\{ \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots \}$
2. $\{\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots \}$
3. $\{ \ldots, \frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \ldots \}$
4. $\{ \ldots, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \ldots \}$

**การตัดตัวเลือก**

เพราะว่าสมการ $\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \frac{1}{2}))) = \pi$ มีพจน์ของ $x^2$
เพราะฉะนั้น ถ้า x เป็นรากของสมการ แล้ว $-x$ ต้องเป็นรากของสมการด้วย
เพราะว่า 1. $\{ \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots \}$ 2. $\{\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4\sqrt{2}}, \ldots \}$
มีแต่ค่า **บวก** เท่านั้น เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้
แทนค่า $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$
\begin{aligned}
\arccos(\sin(\pi + \arccos(x^2 - \tfrac{1}{2}))) &= \arccos(\sin(\pi + \arccos(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}))) \\
&= \arccos(\sin(\pi + \arccos(0))) \\
&= \arccos(\sin(\pi + \tfrac{\pi}{2})) \\
&= \arccos(\sin(\tfrac{3\pi}{2})) \\
&= \arccos(-1) \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นคำตอบ
เพราะว่าตัวเลือก 4. ไม่มี $\frac{1}{\sqrt{2}}$ เป็นสมาชิก
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

# ถ้า z เป็นรากแล้ว z คอนจูเกตต้องเป็นรากด้วย

รากที่สอดคล้องสมการ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ คือข้อใด

1. $\{1, 2, 3, i, -1\}$
2. $\{1, 2, -3, 1+i, -1\}$
3. $\{1, 2, -1+i, -1-i\}$
3. $\{1, 2, 3, 1+i\}$

**การตัดตัวเลือก**

คำถามแบบนี้ให้ใช้การแทนค่าแล้วทำการตัดตัวเลือกดีกว่า

แทนค่า $z = 1$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 1 - 2 - 1 + 6 - 4 = 0$

แทนค่า $z = 2$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 32 - 32 - 8 + 12 - 4 = 0$

แทนค่า $z = -1$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = -1 - 2 + 1 - 6 - 4 = -12 \neq 0$

แทนค่า $z = 3$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 3^5 - 2\,3^4 - 3^3 + 6(3) - 4 = 68 \neq 0$

แทนค่า $z = -3$ จะได้ $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = -3^5 - 2\,3^4 + 3^3 - 6(3) - 4 = -400 \neq 0$

เพราะฉะนั้นค่าที่เป็นจำนวนจริง $z = 1, 2$ เท่านั้นที่เป็นราก

เพราะว่า $z^5 - 2z^4 - z^3 + 6z - 4 = 0$ เป็นสมการพหุนามที่สัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้น ถ้า z เป็นคำตอบแล้ว $\bar{z}$ ต้องเป็นคำตอบด้วย

ตัวเลือก 1. มี i แต่ไม่มี $-i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. มี $-i$ แต่ไม่มี i เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวเลือก 4. มี $1 + i$ แต่ไม่มี $1 - i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

θ∀∃φ∅∩→≥≤×∝⊂∈∉∪≠πt7

# โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร

กำหนดให้ $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$ , $x > 0$

ค่าของ $f'(x^2) - f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $6x^2 - 2 - \frac{4}{x^3}$
2. $6x^2 - 4 - \frac{2}{x^3}$
3. $18x^2 - 14 - \frac{4}{x^3}$
4. $18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$

**การตัดตัวเลือก**

$f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 2(3x-2)(3) - \frac{2}{x\sqrt{x}} = 18x - 12 - \frac{2}{x\sqrt{x}}$

$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3}$

ขณะนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

เพราะว่า $f'(1)$ เป็นตัวเลข เพราะฉะนั้น $f'(x^2) - f'(1)$ จึงมีแต่ $\frac{2}{x^3}$ และ $18x^2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1 , 3) และมีความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด (x , y) ใดๆ เป็น 2x + 5

1. $y = x^2 + 5x - 3$
2. $y = 2x^2 + 5x - 3$
3. $y = x^2 + 5x - 3$
4. $y = 2x^2 + 5x - 3$

**การตัดตัวเลือก**

ขณะนี้โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x ความชันของเส้นสัมผัสของแต่ละตัวเลือกคือ

1. 2x + 5 2. 4x + 5 3. 2x + 5 4. 4x + 5

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่าจุดผ่าน (1 , 3) ไม่อยู่บนเส้นโค้ง 3. $y = x^2 + 5x - 3$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

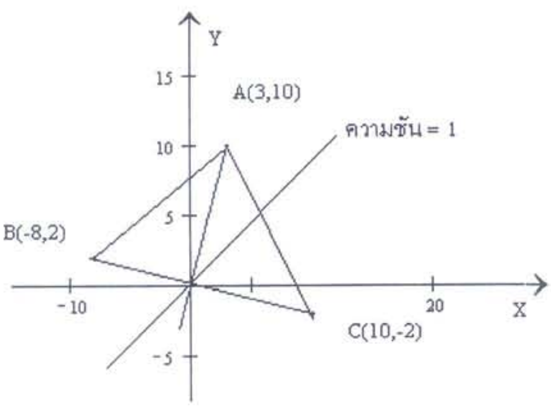
# วาดรูปจริงและดูความชันตัดตัวเลือกได้

ถ้า A(3,10) , B(–8,2) และ C(10,–2) เป็นจุดมุมยอดของสามเหลี่ยม ABC แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และตั้งฉากกับ BC คือข้อใด

1. $2x - 9y + 7 = 0$
2. $2y - 9x + 7 = 0$
3. $2y - 9x - 7 = 0$
4. $2y + 9x - 7 = 0$

**การตัดตัวเลือก**

วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์




เส้นที่ลากจาก A มาตั้งฉากกับ BC มีความชันเป็นบวก และ มีค่ามากกว่า 1

ความชันของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\frac{2}{9} < 1$ 2. $\frac{9}{2} > 1$ 3. $\frac{9}{2} > 1$ 4. $-\frac{9}{2} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด A(3,10)

แทนค่า x = 3 , y = 10 ในตัวเลือก 2. และ 3.

2. $2y - 9x + 7 = 20 - 27 + 7 = 0$
3. $2y - 9x - 7 = 20 - 27 - 7 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

# โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

กำหนด $\sin x + \cos y = a$ และ $\cos x + \sin y = b$ จะได้ $\sin(x + y)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{a^2 + b^2}{2}$
2. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$
3. $\dfrac{a^2 + b^2 - 2}{2}$
4. $\dfrac{a^2 + b^2 + 2}{2}$

**การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x , y , a

แทนค่า $x = 0 , y = 0$ จะได้ $a = \sin 0 + \cos 0 = 1$ และ $b = \cos 0 + \sin 0 = 1$

ค่าของโจทย์ $\sin(x + y) = \sin(0 + 0) = 0$ แทนค่า $a = 1 , b = 1$ ในแต่ละตัวเลือก

1. $\dfrac{a^2 + b^2}{2} = 1$ 2. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0$ 3. $\dfrac{a^2 + b^2 - 2}{2} = 0$ 4. $\dfrac{a^2 + b^2 + 2}{2} = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 0 , y = \dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $a = \sin 0 + \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$ และ $b = \cos 0 + \sin\dfrac{\pi}{2} = 2$

ค่าของโจทย์ $\sin(x + y) = \sin(0 + \dfrac{\pi}{2}) = 1$ แทนค่า $a = 0 , b = 1$ ในแต่ละตัวเลือก

2. $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = -1$ 3. $\dfrac{a^2 + b^2 - 2}{2} = 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

$$\sin x + \cos y = a \quad \ldots(1)$$

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y = a^2 \quad \ldots(2)$$

$$\cos x + \sin y = b \quad \ldots(3)$$

$$\cos^2 x + 2\sin y\cos x + \sin^2 y = b^2 \quad \ldots(4)$$

(2) + (4) ; $\sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y + \cos^2 x + 2\sin y\cos x + \sin^2 y = a^2 + b^2$

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos y + 2\sin y\cos x + \cos^2 y + \sin^2 y = a^2 + b^2$$

$$1 + 2(\sin x\cos y + \sin y\cos x) + 1 = a^2 + b^2$$

$$2\sin(x + y) = a^2 + b^2 - 2$$

$$\sin(x + y) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$$

# ข้อสอบ ENTRANCE ที่ตัดตัวเลือกได้จากอดีตสู่ปัจจุบัน

ตั้งแต่การสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ได้เปลี่ยนจากการสอบแบบอัตนัยมาเป็นข้อสอบแบบปรนัย ก็ทำให้เกิดข้อสอบที่สามารถตัดตัวเลือกได้ ในบทความนี้จึงขอนำตัวอย่างของข้อสอบบางข้อในแต่ละปีตั้งแต่ พ.ศ. 2529 – 2536 นำมาบันทึกไว้เพื่อเป็นหลักฐานทางการศึกษาต่อไป สำหรับข้อสอบ ตั้งแต่ พ.ศ. 2537 – 2541 มีข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้มากกว่า 10 ข้อต่อหนึ่งชุดข้อสอบทั้งคณิตศาสตร์ ก. และ คณิตศาสตร์ กข. ขอให้หาอ่านได้จาก หนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย** ตั้งแต่เล่มที่ 1 – 19 ทุกเล่ม

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 9 เมษายน 2529**

ให้ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือ

1. $\frac{x}{1-x}$
2. $\frac{x}{1-|x|}$
3. $\frac{x}{1+|x|}$
4. $\frac{x}{1+x}$

**ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร**

เพราะว่า $f(1) = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(\frac{1}{2}) = 1$

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ ในทุกตัวเลือก

1. $\frac{x}{1-x} = 1$ 2. $\frac{x}{1-|x|} = 1$ 3. $\frac{x}{1+|x|} = \frac{1}{3}$ 4. $\frac{x}{1+x} = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $f(-1) = -\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-\frac{1}{2}) = -1$

แทนค่า $x = -\frac{1}{2}$ ในทุกตัวเลือกที่เหลือ

1. $\frac{x}{1-x} = -3$ 2. $\frac{x}{1-|x|} = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ต้องแยกกรณีและจัดรูปจาก $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

$x < 0$

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1-x}$$

$$y+1 = \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{x+1-x}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

$$1-x = \frac{1}{y+1}$$

$$x = 1 - \frac{1}{y+1} = \frac{y+1-1}{y+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{y}{1+y} = \frac{y}{1-(-y)} = \frac{y}{1-|y|}$$

$x \geq 0$

$$y = \frac{x}{1+|x|} = \frac{x}{1+x}$$

$$y-1 = \frac{x}{1+x} - 1 = \frac{x-1-x}{1+x} = \frac{-1}{1+x}$$

$$1+x = \frac{-1}{y-1}$$

$$x = -1 - \frac{1}{y-1} = \frac{-y+1-1}{y-1} = \frac{y}{1-y} = \frac{y}{1-|y|}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 8 เมษายน 2530**

กำหนดให้ $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) = \frac{\pi}{3}$ ดังนั้น arcsina มีค่าในช่วงใด

1. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$
2. $(-\frac{\pi}{4}, 0)$
3. $(0, \frac{\pi}{4})$
4. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

**ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้เหตุผลเกี่ยวกับค่าของ arcsin(บวก) = บวก หรือ arcsin(ลบ) = ลบ**

เพราะว่า arcsina < 0 $\rightarrow$ $a < 0$

$\rightarrow$ $2a\sqrt{1-a^2} < 0$

$\rightarrow$ $\arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) < 0$

$\rightarrow$ $2\arcsin a + \mathrm{arc}(2a\sqrt{1-a^2}) < 0$

$\rightarrow$ $\frac{\pi}{3} < 0$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ลองใช้เหตุผลอื่นอีกก็ได้

เพราะว่า arcsina $\in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ $\rightarrow$ $a > 0$ และ 2arcsina $\in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\rightarrow$ $\arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) > 0$ และ 2arcsina $\in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

$\rightarrow$ $2\arcsin a + \text{arc}(2a\sqrt{1-a^2}) = \frac{\pi}{3}$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นการใช้เหตุผลแบบนี้ตัดได้ทีเดียว 3 ตัวเลือกคือ ตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากเงื่อนไข $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) = \frac{\pi}{3}$ ทำให้ $a > 0$

กำหนดให้ $x = \arcsin a$ $\rightarrow$ $\sin x = a$

$\rightarrow$ $\cos x = \pm\sqrt{1-a^2}$

$$2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) = 2x + \arcsin(2\sin x\cos x)$$

$$\frac{\pi}{3} = 2x + \arcsin(\sin 2x)$$

$$\frac{\pi}{3} = 2x + 2x$$

$$\frac{\pi}{3} = 4x$$

$$x = \frac{\pi}{12}$$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 8 เมษายน 2531**

จำนวนเชิงซ้อน z ซึ่ง $\left|\frac{z+1}{z+(3-2i)}\right| = 1$ และ $z\bar{z} = 29$ คือจำนวนในข้อใด

1. $-5 \pm 2i$
2. $2 \pm 5i$
3. $-5 - 2i, 2 - 5i$
4. $2 + 5i, -5 - 2i$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์**

แทนค่า $z = -5 - 2i$ $\left|\frac{z+1}{z+(3-2i)}\right| = \left|\frac{-5-2i+1}{-5-2i+(3-2i)}\right| = \left|\frac{-4-2i}{-2-4i}\right| = 1$ และ $z\bar{z} = 29$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

แทนค่า $z = -5 + 2i$ $\left|\frac{z+1}{z+(3-2i)}\right| = \left|\frac{-5+2i+1}{-5+2i+(3-2i)}\right| = \left|\frac{-4+2i}{-2}\right| \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

แทนค่า $z = 2 - 5i$ $\quad |\frac{z+1}{z+(3-2i)}| = |\frac{2-5i+1}{2-5i+(3-2i)}| = |\frac{3-5i}{5-7i}| \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

**วิธีจริง** สมมติ $z = a + bi$

เพราะว่า $z\bar{z} = 29$

เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 = 29$ ...(1)

เพราะว่า $|\frac{z+1}{z+(3-2i)}| = |\frac{a+bi+1}{a+bi+(3-2i)}| = 1$

$|(a+1)+bi| = |(a+3)+(b-2)i|$

เพราะฉะนั้น $(a+1)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2$ ...(2)

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้ $a = 2, -5$ และ $b = 5, -2$

เพราะฉะนั้น $z = 2 + 5i, -5 - 2i$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 8 เมษายน 2532**

กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0\}$

$B = \{x \in R \mid 1 \leq |x| \leq 3\}$

เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง $A' \cup B$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-3, -1] \cup [1, 3]$
2. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$
3. $[-3, 3]$
4. $(-\infty, \infty)$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามนี้ตรงกับหลักการเซตคำตอบคือตัวเลือกใด**

เพราะฉะนั้นแทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น

แทนค่า $x = 0$ จะเห็นว่า $0 \in A' \rightarrow 0 \in A' \cup B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

แทนค่า $x = 100$ จะเห็นว่า $\frac{|x|-1}{|x|-2} = \frac{|100|-1}{|100|-2} > 0 \rightarrow 100 \notin A$

$\rightarrow 100 \in A' \cup B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

**วิธีจริง** $A = \{x \in R \mid \frac{|x|-1}{|x|-2} \le 0\}$

$x \ge 0$ $\quad \frac{|x|-1}{|x|-2} \le 0$

$\frac{x-1}{x-2} \le 0$

$1 \le x < 2$

$x < 0$ $\quad \frac{|x|-1}{|x|-2} \le 0$

$\frac{-x-1}{-x-2} \le 0$

$-2 < x \le -1$

เพราะฉะนั้น $A = (-2, -1] \cup [1, 2)$

$A' = (-\infty, -2] \cup (-1, 1) \cup [2, \infty)$

$B = \{x \in R \mid 1 \le |x| \le 3\} = [-3, -1] \cup [1, 3]$

$A' \cup B = (-\infty, \infty)$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 9 เมษายน 2533**

เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \le x \le \pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid -\pi \le x < -\frac{\pi}{3}$ หรือ $\frac{2\pi}{3} < x \le \pi\}$ 2. $\{x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\}$
3. $\{x \mid -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$ 4. $\{x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$

**ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบคือตัวเลือกใดให้นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์ โดยเลือกค่าที่จำแนกตัวเลือกได้และควรเป็นค่าที่คิดเลขง่าย

เลือก $x = 0$ $\quad \sqrt{3}\cos 0 + \sin 0 = \sqrt{3} > 0$ $\quad$ ดังนั้น 0 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เลือก $x = \frac{\pi}{2}$ $\quad \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$ $\quad$ ดังนั้น $\frac{\pi}{2}$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\quad \sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x > 0$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x > 0$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) > 0$$

$$0 < x+\frac{\pi}{3} < \pi$$

$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \leq x \leq \pi$ คือ $\{ x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \}$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 7 เมษายน 2534**

กำหนดฟังก์ชัน f และ g จากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R โดย $f(x) = 1 + |x|$ $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

(gof)(x) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + |x|$
2. $2 + |x|$
3. $\frac{1}{1+|x|}$
4. $\frac{1}{2+|x|}$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร**

แทนค่า $x = 1$ ในโจทย์และตัวเลือก $(gof)(1) = g(f(1)) = g(2) = \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{3}$

1. $1 + |x| = 2$
2. $2 + |x| = 3$
3. $\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{2}$
4. $\frac{1}{2+|x|} = \frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** 
$$\begin{aligned}(gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= \frac{1}{f(f(x))} \\ &= \frac{1}{f(1+|x|)} \\ &= \frac{1}{1+|1+|x||} \\ &= \frac{1}{2+|x|}\end{aligned}$$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 7 เมษายน 2535**

กำหนด $A = \{ \arcsin x \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

$B = \{ \arccos x \mid -1 \leq x \leq 1 \}$

$C = \{ \arctan x \mid$ x เป็นจำนวนจริง $\}$

แล้ว $(A \cap C)' \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$
2. $[0, \frac{\pi}{2}]$
3. $[-\frac{\pi}{2}, 0]$
4. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

**ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $(A \cap C)' \cap B \subset B$ และ $B = \{ \arccos x \mid -1 \leq x \leq 1 \} = [0, \pi]$

เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่ถูกต้องเป็นสับเซตของ $[0, \pi]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $A = \{ \arcsin x \mid -1 \leq x \leq 1 \} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$C = \{ \arctan x \mid$ x เป็นจำนวนจริง $\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$(A \cap C)' = ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))' = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})' = (-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty)$$

$$(A \cap C)' \cap B = ((-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty)) \cap [0, \pi] = [\frac{\pi}{2}, \pi]$$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ กข. 8 เมษายน 2536**

กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้วเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \geq 3$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{1}{16}]$
2. $[0, \frac{1}{16}]$
3. $(0, \frac{1}{4}]$
4. $(0, \frac{1}{4}]$

**ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $f(x) = \sqrt{x} + x$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $f'(\frac{1}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} + 1 = 2$ ไม่มากกว่า 3 เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{4}$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \geq 3$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} \geq 2$$

$$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$$

$$x \leq \frac{1}{16}$$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 18 เมษายน 2527**

จงหาว่า $\{x \mid -1 < x < 3\}$ สอดคล้องกับอสมการใด

1. $x^2 + 2x > 3$
2. $x^2 + 2x < 3$
3. $x^2 - 2x > 3$
4. $x^2 - 2x < 3$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $0 \in \{x \mid -1 < x < 3\}$

แต่ 0 ไม่สอดคล้องอสมการในตัวเลือก 1. $x^2 + 2x > 3$ 3. $x^2 - 2x > 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $2 \in \{x \mid -1 < x < 3\}$

แต่ 2 ไม่สอดคล้องอสมการในตัวเลือก 2. $x^2 + 2x < 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 17 เมษายน 2528**

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริงแล้วเซตคำตอบของอสมการ $\frac{2}{x} - 3 \leq \frac{4}{x} + 1$ คือข้อใด

1. $[-\frac{1}{2}, 0)$
2. $(0, \infty)$
3. $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$
4. $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, \infty)$

**ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบของอสมการคือตัวเลือกใดใช้การนำค่าในตัวเลือกแทนค่าจาก

เงื่อนไขอสมการ $\frac{2}{x}-3 \le \frac{4}{x}+1$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -1$ $\frac{2}{-1}-3 = -4 \le -2 = \frac{4}{-1}+1$ เพราะฉะนั้น $x = -1$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

$$\frac{2}{x}-3 \le \frac{4}{x}+1$$

$$\frac{2-3x}{x} \le \frac{4+x}{x}$$

$$-\frac{2x+1}{x} \le 0$$

เซตคำตอบของอสมการ $\frac{2}{x}-3 \le \frac{4}{x}+1$ คือ $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup (0, \infty)$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 16 เมษายน 2529**

ถ้าเอกภพสัมพัทธ์ $U = R$ แล้ว เซตคำตอบของอสมการ $|x^3| < 8$ คือข้อใด

1. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
2. $[0, 2]$
3. $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$
4. $(-2, 2)$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบของอสมการคือตัวเลือกใดใช้การนำค่าในตัวเลือกแทนค่าจาก

เงื่อนไขอสมการ $|x^3| < 8$ เพราะฉะนั้น $x = 2$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เงื่อนไขอสมการ $|x^3| < 8$ เพราะฉะนั้น $x = 20000$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $|x^3| < 8$

$$-8 < x^3 < 8$$

$$(-2)^3 < x^3 < 2^3$$

$$-2 < x < 2$$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 16 เมษายน 2530**

รูปของประพจน์ $T \rightarrow (S \rightarrow W)$ สมมูลกับรูปของประพจน์ในข้อใด

1. $T \rightarrow (W \rightarrow S)$
2. $S \rightarrow (T \rightarrow W)$
3. $(S \wedge W) \rightarrow T$
4. $W \rightarrow (S \rightarrow T)$

**ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่าความจริง T F ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $T = T \quad S = T \quad W = F$

ค่าความจริงของโจทย์ $T \rightarrow (S \rightarrow W) = T \rightarrow (T \rightarrow F) = F$

ค่าความจริงของตัวเลือก

1. $T \rightarrow (W \rightarrow S) = T \rightarrow (F \rightarrow T) = T$
2. $S \rightarrow (T \rightarrow W) = T \rightarrow (T \rightarrow F) = F$
3. $(S \wedge W) \rightarrow T = (T \wedge F) \rightarrow T = T$
4. $W \rightarrow (S \rightarrow T) = F \rightarrow (T \rightarrow T) = T$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 16 เมษายน 2531**

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และกำหนดให้โดเมนของ f เป็น $\{x \in R \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{4}\}$ แล้วเรนจ์ของ f คือข้อใด

1. $\{y \in R \mid -\frac{15}{16} < y \leq -\frac{3}{4}\}$
2. $\{y \in R \mid -\frac{15}{16} \leq y < -\frac{3}{4}\}$
3. $\{y \in R \mid -1 \leq y \leq -\frac{3}{4}\}$
4. $\{y \in R \mid -1 \leq y < -\frac{3}{4}\}$

**ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

โดเมนของ f เป็น $\{x \in R \mid -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{4}\}$

เพราะว่า $0 \in D_f$ และ $f(0) = -1$ เพราะฉะนั้น $-1$ ต้องอยู่ในเรนจ์ของ f

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $x^2 - 1 = -\frac{3}{4}$ เมื่อ $x = \frac{1}{2}$ แต่ $\frac{1}{2}$ ไม่มีในโดเมนของ f

เพราะฉะนั้น $-\frac{3}{4}$ ไม่อยู่ในเรนจ์ของ f

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** กราฟของ $f(x) = x^2 - 1$ เป็นพาราโบลาหงาย

มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $f(0) = -1$ และ มีค่าสูงสุดน้อยกว่าหรือเท่ากับ $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ f คือ $\{y \in R \mid -1 \leq y < -\frac{3}{4}\}$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 16 เมษายน 2532**

เซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ เป็นสับเซตของเซตคำตอบในข้อใด

1. $|2x - 3| \geq 1$
2. $|x - 4| \leq 5$
3. $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$
4. $x^2 \neq 9$

**ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

จากโจทย์ $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้

ตัวเลือก 2. $|x - 4| \leq 5$ ดังนั้น $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

จากโจทย์ $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ เพราะฉะนั้น $x = -3$ ได้

ตัวเลือก 3. $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$ ดังนั้น $x = -3$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ตัวเลือก 4. $x^2 \neq 9$ ดังนั้น $x = -3$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

**วิธีจริง** เซตคำตอบของอสมการ $x^2 + 2x - 3 \leq 0$

$$(x + 3)(x - 1) \leq 0$$

เซตคำตอบ $= [-3, 1]$

1. $|2x - 3| \geq 1$ เซตคำตอบ $= (-\infty, 1] \cup [2, \infty]$
2. $|x - 4| \leq 5$ เซตคำตอบ $= [-1, 9]$
3. $\frac{x-1}{x+3} \leq 0$ เซตคำตอบ $= (-3, 1]$
4. $x^2 \neq 9$ เซตคำตอบ $= R - \{-3, 3\}$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 18 เมษายน 2533**

กำหนดให้ $f = \{(x , y) \in R \times R \mid x^2y - x^2 - y = 0\}$ โดเมนและเรนจ์ของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $D_f = R - \{-1 , 1\}$ $R_f = R - (0 , 1]$
2. $D_f = R - \{-1 , 1\}$ $R_f = R - [0 , 1)$
3. $D_f = R - \{1\}$ $R_f = R - [0 , 1)$
4. $D_f = R - \{1\}$ $R_f = R - (0 , 1]$

**ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $f = \{(x , y) \in R \times R \mid x^2y - x^2 - y = 0\}$

จากเงื่อนไข $x^2y - x^2 - y = 0$ จะได้ว่า $(0 , 0) \in f$ เพราะฉะนั้น $0 \in R_f$

เพราะว่า $0 \notin R - [0 , 1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

จากเงื่อนไข $x^2y - x^2 - y = 0$ จะได้ว่า $x = -1$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้น $-1 \notin D_f$

แต่ $-1 \in R - \{1\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $f = \{(x , y) \in R \times R \mid x^2y - x^2 - y = 0\}$

$$x^2y - x^2 - y = 0$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 1} \text{ และ } x^2 = \frac{y}{y-1} \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $D_f = R - \{-1 , 1\}$ และ $R_f = R - (0 , 1]$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 17 เมษายน 2534**

เซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{x+1}{x+2} - 3\right| > 4$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $(-3 , -2)$
2. $(-2 , -1)$
3. $(-3.5 , -1)$
4. $(-1.5 , 0)$

**ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากเงื่อนไข $\left|\frac{x+1}{x+2} - 3\right| > 4$

แทนค่า $x = -1.99$ $\quad |\frac{x+1}{x+2} - 3| = |\frac{-1.99+1}{-1.99+2} - 3| = 102 > 4$

แต่ $-1.99$ ไม่มีใน $(-3, -2), (-1.5, 0)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -2.01$ $\quad |\frac{x+1}{x+2} - 3| = |\frac{-2.01+1}{-2.01+2} - 3| = 98 > 4$

แต่ $-2.01$ ไม่มีใน $(-2, -1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $|\frac{x+1}{x+2} - 3| > 4$

$\frac{x+1}{x+2} - 3 < -4$ หรือ $\frac{x+1}{x+2} - 3 > 4$

$\frac{x+1}{x+2} + 1 < 0$ หรือ $\frac{x+1}{x+2} - 7 > 0$

$\frac{2x+3}{x+2} < 0$ หรือ $\frac{-6x-13}{x+2} > 0$

$\frac{2x+3}{x+2} < 0$ หรือ $\frac{6x+13}{x+2} < 0$

เซตคำตอบคือ $[-\frac{13}{6}, -2) \cup (-2, -\frac{3}{2}] \subset (-3.5, -1)$

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 17 เมษายน 2535**

เซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} x^2$ คือเซตของข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 1]$
2. $[0, 1]$
3. $[1, \infty)$
4. $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

**ตอบ 1.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** จากเงื่อนไข $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} x^2$

เพราะว่า $x = -1$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 4. มี 1 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

เพราะว่า $x = 0$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 2. มี 0 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $x = \frac{1}{2}$ ได้ แต่ตัวเลือก 3. ไม่มี $\frac{1}{2}$ เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} x^2$

$x \geq x^2$ (เพราะว่า $\log_{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันลด)

$x(x-1) \leq 0$

$$0 \leq x \leq 1$$

แต่ $x > 0$ เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} x^2$ คือ (0, 1]

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 17 เมษายน 2536**

ค่าของ x ที่ทำให้ $\sin x + \cos x \leq 0$ จะอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[0, \pi]$
2. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$
4. $[\pi, 2\pi]$

**ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากเงื่อนไข $\sin x + \cos x \leq 0$

แทนค่า $x = \frac{3\pi}{4}$ $\quad \sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = 0 \leq 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3\pi}{4}$ ได้ แต่ $x = \frac{3\pi}{4}$ ไม่อยู่ใน $[\pi, 2\pi]$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

แทนค่า $x = \frac{7\pi}{4}$ $\quad \sin\frac{7\pi}{4} + \cos\frac{7\pi}{4} = 0 \leq 0$

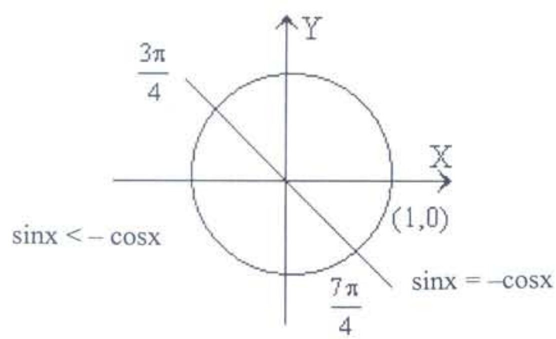
เพราะฉะนั้น $x = \frac{7\pi}{4}$ ได้ แต่ $x = \frac{7\pi}{4}$ ไม่อยู่ใน $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $[0, \pi]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\sin x + \cos x \leq 0$

$$\sin x \leq -\cos x$$

ดูจากกราฟของวงกลมหนึ่งหน่วย




ค่าของ x ที่ทำให้ $\sin x + \cos x \leq 0$ จะอยู่ในช่วง $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

**ข้อสอบ ENTRANCE ระบบใหม่ยังคงมีข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้เหมือนเดิม ตัวอย่างเช่น**

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ 1 ENTRANCE ระบบใหม่ ตุลาคม 2541**

กำหนดให้ A และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x^2}{x+2} \geq 0$ และ $|2-x^2| \leq 2$ ตามลำดับ

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ B – A

1. $\{-1.6, 1.6\}$ 2. $\{-1.7, 1.7\}$

2. $\{-1.8, 1.8\}$ 4. $\{-1.8, 1.7\}$

**การตัดตัวเลือก** แทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ $A = \{x \mid \frac{3-x^2}{x+2} \geq 0\}$

$$A' = \{x \mid \frac{3-x^2}{x+2} < 0\} \cup \{-2\}$$

$$B = \{x \mid |2-x^2| \leq 2\} = \{x \mid -2 \leq 2-x^2 \leq 2\}$$

$$B - A = B \cap A'$$

แทนค่า $x = 1.6$ $\frac{3-x^2}{x+2} = \frac{3-1.6^2}{1.6+2} = \frac{3-2.56}{3.6} > 0 \rightarrow 1.6 \notin A' \rightarrow 1.6 \notin B - A$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

แทนค่า $x = 1.7$ $\frac{3-x^2}{x+2} = \frac{3-1.7^2}{1.7+2} = \frac{3-2.89}{3.7} > 0 \rightarrow 1.7 \notin A' \rightarrow 1.7 \notin B - A$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

**ข้อสอบ คณิตศาสตร์ 2 ENTRANCE ระบบใหม่ ตุลาคม 2541**

ถ้า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ และ $f^{-1} o g = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$

แล้ว g คือฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(a, 3), (c, 1), (d, 4)\}$ 2. $\{(1, c), (3, a), (4, d)\}$

3. $\{(1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$ 4. $\{(a, c), (c, a), (d, d)\}$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$ และ $f^{-1} o g = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$

เพราะฉะนั้น $D_g = \{1, 3, 4\}$ และ $R_g \subset \{a, b, c, d\}$

โดเมนของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\{a, b, c\}$ 2. $\{1, 3, 4\}$ 3. $\{1, 3, 4\}$ 4. $\{a, c, d\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เรนจ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. { 1 , 3 , 4 } 2. { a , c , d } 3. { 1 , 3 , 4 } 4. {a , c , d }
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**ข้อสอบคณิตศาสตร์ 2. ENTRANCE ระบบใหม่ มีนาคม 2542**

ข้อใดต่อไปนี้คือ เซตคำตอบของอสมการ $x - \frac{9}{x} \leq 0$

1. $[-3, 0) \cup (3, \infty)$
2. $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, 3]$
3. $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$
4. $(-\infty, -3] \cup (0, 3]$

**การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าบางค่า

จากเงื่อนไข $x - \frac{9}{x} \leq 0$ แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -100000$ ทำให้ $x - \frac{9}{x} = -100000 + \frac{9}{100000} \leq 0$ ดังนั้น $x = -100000$ ได้
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \frac{1}{9}$ ทำให้ $x - \frac{9}{x} = 9 - 91 = -82 \leq 0$ ดังนั้น $x = \frac{1}{9}$ ได้
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**ข้อสอบคณิตศาสตร์ 2. ENTRANCE ระบบใหม่ มีนาคม 2542**

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงโดยที่ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$
2. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$
3. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$
4. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$

**การตัดตัวเลือก** แทนค่า (x , y) บางค่าก็สามารถจำแนกตัวเลือกได้

จากเงื่อนไข $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ จะเห็นว่า $x = -1$ ได้ ดังนั้น $-1 \in D_r$

เพราะว่า $-1$ ไม่อยู่ใน $D_r$ ของตัวเลือก 3. และ 4. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\} = \{(1, 0), (-1, 0), \ldots\}$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(1, 0), (-1, 0), \ldots\}$ เพราะฉะนั้น $1, -1 \in D_{r^{-1}}$

เพราะว่า $1, -1$ ไม่อยู่ใน $D_{r^{-1}}$ ของตัวเลือก 2. และ 4. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 1.

1. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   และให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ , $B = \{3, 4, 5, 6\}$ , $C = \{2, 4, 6, 7\}$

   แล้ว $[(B \cap C) - A] \cup (A \cup B \cup C)'$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\{6\}$ 2. $\{6, 8\}$
   3. $\{5, 6\}$ 4. $\{5, 6, 7\}$

2. ถ้า $x < \frac{1}{2}$ แล้ว $| x + | 2x - 1 ||$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $x - 1$ 2. $-x + 1$
   3. $3x - 1$ 4. $-3x + 1$

3. ข้อใดต่อไปนี้คือ เซตคำตอบของอสมการ $x - \frac{9}{x} \le 0$

   1. $[-3, 0) \cup (3, \infty)$ 2. $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, 3]$
   3. $(-\infty, -3] \cup [0, 3]$ 4. $(-\infty, -3] \cup (0, 3]$

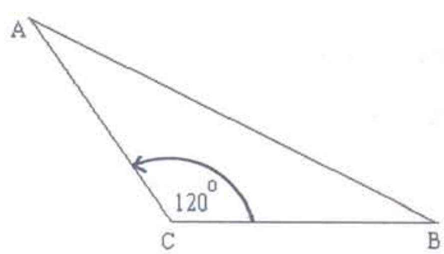
4. อินเวอร์สของฟังก์ชัน $y = \frac{x}{x-1}$ คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $y = \frac{x}{x-1}$ 2. $y = \frac{x}{x+1}$
   3. $y = \frac{x-1}{x}$ 4. $y = \frac{x+1}{x}$

5. กำหนดให้ $\cot\theta = 2$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 2. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$
   3. $\frac{2}{5}$ 4. $-\frac{2}{5}$

6. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่มุม ACB = $120^\circ$ และด้าน AC = BC ดังรูป




   ลากเส้นตรงจาก A มาตั้งฉากกับด้าน BC ที่ต่อออกไปที่จุด D ถ้า AD ยาว 3 หน่วย แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{3}{2} + 3\sqrt{3}$ 2. $6 + 3\sqrt{3}$
   3. $\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}$ 4. $6 + 4\sqrt{3}$

7. เส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , −1) และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y = 4$ ตัดกับแกน y ที่จุดๆ หนึ่ง จุดนั้น y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$ 2. $-\frac{1}{4}$
3. $-\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{2}$

8. $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5-2\sqrt{6}$ 2. $-5+2\sqrt{6}$
3. $5-2\sqrt{6}$ 4. $5+2\sqrt{6}$

9. กำหนดให้ C เป็นจุดยอดของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C และผ่านจุด (0 , 0) คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + 10x + y^2 = 0$ 2. $x^2 - 10x + y^2 = 25$
3. $x^2 + y^2 + 10y = 0$ 4. $x^2 + y^2 - 10y = 25$

10. ถ้า A เป็น 2 × 2 เมทริกซ์ ซึ่งมิใช่เอกฐาน และถ้า $\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$
แล้ว $A^{-1}$ คือ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 9 & -18 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 8 \end{bmatrix}$

11. ถ้า $A = \begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\sin\theta \end{bmatrix}$
แล้ว det(AB) คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\sin^2\theta$ 2. $\cos^2\theta$
3. $2\cos\theta$ 4. $2\sin\theta$

12. ถ้า $f'(x) = g(x)$ และ $g'(x) = h(x)$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\int g(x)dx = f(x)+C$ 2. $\int h(x)dx = f'(x)+C$
3. $\int g'(x)dx = h(x)+C$ 4. $\int f''(x)dx = f'(x)+C$

13. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำเสีย เท่ากับ 0.2
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย เท่ากับ 0.1
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำหรือห้องครัวเสีย เท่ากับ 0.25 แล้ว
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.05      2. 0.1

3. 0.3      4. 0.75

14. นักเรียน 100 คน ได้เข้าสอบแข่งขันเพื่อศึกษาต่อที่สถาบันแห่งหนึ่ง ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับ 500 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 100 คะแนน นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนมาตรฐานเท่ากับ 2 นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนสอบรวมกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1200      2. 1250

3. 1300      4. 1350

15. กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์
ประพจน์ $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$      2. $\sim q \vee (\sim p \wedge r)$

3. $\sim(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$      4. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

16. กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงโดยที่ $r = \{(x , y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_r = [-1 , 1]$ , $D_{r^{-1}} = [-1 , 1]$      2. $D_r = [-1 , 1]$ , $D_{r^{-1}} = [0 , 1]$

3. $D_r = [0 , 1]$ , $D_{r^{-1}} = [-1 , 1]$      4. $D_r = [0 , 1]$ , $D_{r^{-1}} = [0 , 1]$

17. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$      2. $\frac{2}{3}$

3. $\frac{3}{4}$      4. $\frac{4}{5}$

18. ถ้า $1 + \cos^2\theta + \cos^4\theta + \dots = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง แล้ว $\cos(\pi - 2\theta)\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-(\frac{a-2}{a})^2$
2. $(\frac{a-2}{a})^2$
3. $-(\frac{a}{a+2})^2$
4. $(\frac{a}{a+2})^2$

19. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\cos(2\arcsin x) + 2 = 4\sin^2(\arccos x)$ ข้อใดต่อไปนี้คือผลคูณของสมาชิกในเซต A

1. $-\frac{1}{4}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2}$

20. วงรีวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (3 , 1) จุดโฟกัสจุดหนึ่งที่ (5 , 1) และสัมผัสแกน y ที่จุด (0 , 1) สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (–2 , 1) และมีรัศมีเท่ากับความยาวของแกนโทของวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$

**หมายเหตุ** ข้อสอบในชุดนี้นำมาจากข้อสอบ ENTRANCE ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ 1 และคณิตศาสตร์ 2 ที่สอบในเดือนมีนาคม 2542 จะเห็นได้ว่าข้อสอบ ENTRANCE ชุดสุดท้ายก่อนที่จะพิมพ์หนังสือเล่มนี้เสร็จ ก็ยังตัดตัวเลือกได้ **คำถาม นักเรียนคิดว่า ข้อสอบ ENTRANCE คณิตศาสตร์ 1 และ คณิตศาสตร์ 2 ที่จะสอบในเดือนตุลาคม 2542 และต่อๆ ไปจะมีข้อสอบตัดตัวเลือกได้อีกหรือไม่**

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 1.

**1. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{2, 4, 6, 7\}$

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$(A \cup B \cup C)' = \{8\}$

เพราะฉะนั้น 8 ต้องเป็นสมาชิกของ $[(B \cap C) - A] \cup (A \cup B \cup C)'$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เมื่อได้ $(A \cup B \cup C)' = \{8\}$ ต้องหา $(B \cap C) - A$ ต่อไป

เพราะว่า $B \cap C = \{4, 6\}$ และ $(B \cap C) - A = \{6\}$

เพราะฉะนั้น $[(B \cap C) - A] \cup (A \cup B \cup C)' = \{6, 8\}$

**2. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x**

แทนค่า $x = 0$ โจทย์ $|x + |2x - 1|| = 1$ ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $x - 1 = -1$ 2. $-x + 1 = 1$

3. $3x - 1 = -1$ 4. $-3x + 1 = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า $x = -1$ โจทย์ $|x + |2x - 1|| = 2$ ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

2. $-x + 1 = 2$ 4. $-3x + 1 = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** เพราะว่า $x < \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $|2x - 1| = -(2x - 1)$

และ $|x + |2x - 1|| = |x - (2x - 1)|$

$= |-x + 1| = |x - 1| = -x + 1$ (เพราะว่า $x < \frac{1}{2} < 1$)

**3. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าบางค่า

จากเงื่อนไข $x - \frac{9}{x} \leq 0$ แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = -100000$ ทำให้ $x - \frac{9}{x} = -100000 + \frac{9}{100000} \leq 0$ ดังนั้น $x = -100000$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \frac{1}{9}$ ทำให้ $x - \frac{9}{x} = 9 - 81 = -72 \leq 0$ ดังนั้น $x = \frac{1}{9}$ ได้

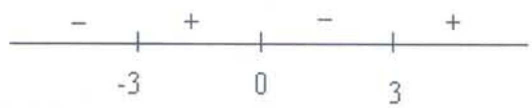
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

$$x - \frac{9}{x} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 9}{x} \leq 0$$

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x} \leq 0$$

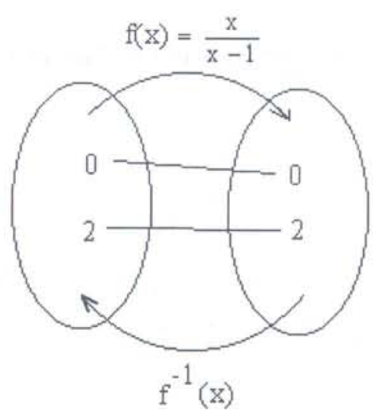



เพราะฉะนั้น $\{x \mid x - \frac{9}{x} \leq 0\} = (-\infty, -3] \cup (0, 3]$

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

จาก $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ดูการส่งค่าบางตัวก็พอ




เพราะว่า $f(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ในตัวเลือกจะได้

1. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} = 0$ 2. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1} = 0$

3. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$ ไม่มีค่า 4. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$ ไม่มีค่า

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $f(2) = 2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(2) = 2$

แทนค่า $x = 2$ ในตัวเลือกที่เหลือจะได้

1. $\frac{x}{x-1} = 2$ 2. $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**วิธีจริง** $f(x) = y = \frac{x}{x-1}$

$$y(x-1) = x$$

$$xy - y = x$$

$$xy - x = y$$

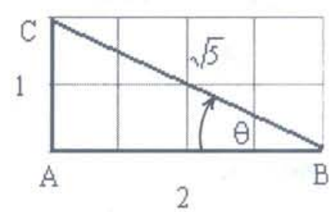
$$x(y-1) = y$$

$$x = \frac{y}{y-1}$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$

**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้เครื่องหมาย บวก ลบ ในควอดรันท์ต่างๆ ของ cos เพราะว่า $\cot\theta = 2$ เป็นบวก และ $\sin\theta < 0$ เพราะฉะนั้น ต้องอยู่ในควอดรันท์ 3 ดังนั้น $\cos\theta$ ต้องเป็น ลบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

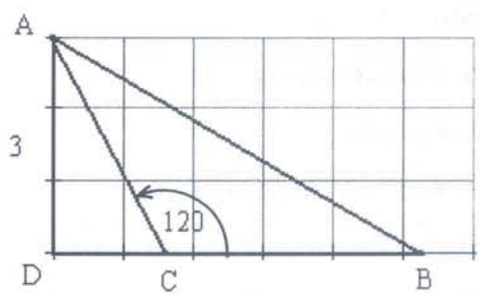



**วิธีจริง** ใช้สามเหลี่ยมมุมฉาก

เพราะว่า $\cot\theta = 2$ และ $\sin\theta < 0$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

**6. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามโจทย์กำหนด วัดระยะทาง และประมาณค่า $\sqrt{3} = 1.7$ ก็สามารถจำแนกตัวเลือกได้




1. ลากเส้น ADยาว 3 cm
2. ลากเส้นตรง AC ทำมุม 30 องศา
3. กางวงเวียนรัศมีเท่ากับ AC จุดศูนย์กลางที่ C ตัดที่ B

วัดความยาวด้วยไม้โปรจะได้ค่า

AC = CB = 3.5 cm และ AB = 6 cm

เพราะฉะนั้นค่าประมาณของความยาวเส้นรอบรูป ABC = 13

ค่าประมาณของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\frac{3}{2} + 3\sqrt{3} = 1.5 + 3(1.7) = 1.5 + 5.1 = 6.6$ 2. $6 + 3\sqrt{3} = 6 + 5.1 = 11.1$
3. $\frac{3}{2} + 4\sqrt{3} = 1.5 + 6.8 = 8.3$ 4. $6 + 4\sqrt{3} = 6 + 6.8 = 12.8$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

**วิธีจริง** เพราะว่า DAC = 30 องศา เพราะฉะนั้น $\frac{AD}{AC} = \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เพราะฉะนั้น $AC = \frac{2}{\sqrt{3}} AD = \frac{2}{\sqrt{3}}(3) = 2\sqrt{3}$

ลาก CE ตั้งฉากกับ AB จะได้ว่า สามเหลี่ยม ADC , ACE ,CBE เหมือนกันทุกประการ

เพราะฉะนั้น AE = AD = EB

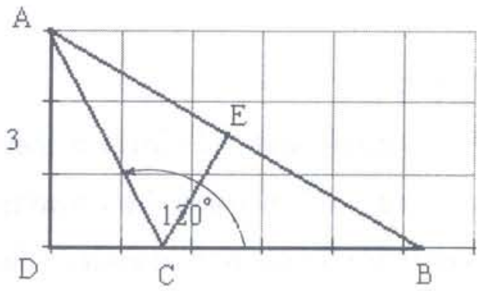
ดังนั้น AB = AE + EB = 3 + 3 = 6

เพราะฉะนั้น ความยาวเส้นรอบรูป ABC

$= AC + BC + AB$

$= 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 6$

$= 6 + 4\sqrt{3}$




**7. ตอบ 3.**

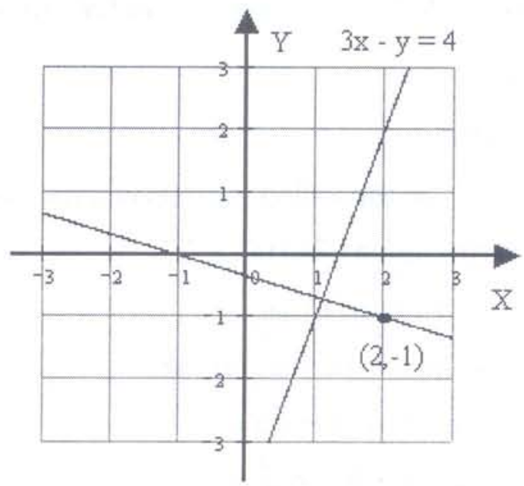
**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

การวาดรูปวัดระยะทางก็ได้คำตอบแล้ว

1. เขียนเส้นตรง L : $3x - y = 4$
2. เขียนจุด $(2, -1)$
3. ลากเส้นตรงผ่านจุด $(2, -1)$
   และตั้งฉากกับ L

วัดระยะตัดแกน Y ได้ประมาณ – 0.3

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้




**วิธีจริง** L : $3x - y = 4$ มีความชันเท่ากับ 3 เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ต้องมีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{3}$

สมการที่มีความชัน $-\frac{1}{3}$ และผ่านจุด $(2, -1)$ คือ $y - (-1) = (-\frac{1}{3})(x - 2)$ หรือ $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ระยะตัดแกน Y เท่ากับ $-\frac{1}{3}$

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้การประมาณค่าหรือดูค่า บวก ลบ ก็ตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $2\sqrt{2}+2\sqrt{3}>0$ และ $\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}=2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}>0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}>0$

เพราะว่า 1. $-5-2\sqrt{6}<0$ 2. $-5+2\sqrt{6}=-5+2(2.45)<0$

3. $5-2\sqrt{6}>0$ 4. $5+2\sqrt{6}>0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

**วิธีจริง** $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}} = \dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3}{3-2} = 5+2\sqrt{6}$$

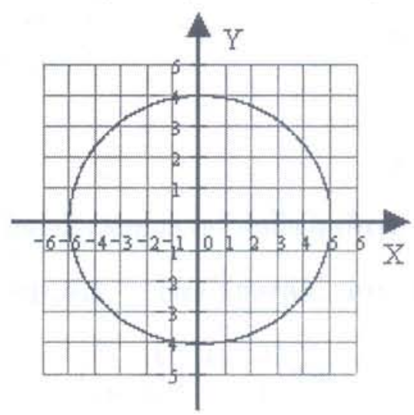
**9. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** นำพิกัดของจุดผ่านไปแทนค่าในตัวเลือก

เพราะว่าวงรีผ่านจุด (0 , 0) แต่วงรีในตัวเลือก 2. และ 4. ไม่ผ่านจุด (0 , 0)

1. $x^2+10x+y^2=0$ 2. $x^2-10x+y^2=25$ 3. $x^2+y^2+10y=0$ 4. $x^2+y^2-10y=25$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง




**วิธีจริง**

วงรี $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

มีแกนเอกทับแกน X

$a=5$ , $b=4$

เพราะฉะนั้นจุดยอดของวงรีคือ (–5 , 0) และ (5 , 0) เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมเท่ากับ 5

สมการวงกลมคือ $(x+5)^2+y^2=25$ หรือ $(x-5)^2+y^2=25$

$x^2+10x+y^2=0$ หรือ $x^2-10x+y^2=0$

คงต้องเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบ

**10.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้ค่า detA ช่วยตัดตัวเลือก จากโจทย์ $\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

จะได้

$$\det(\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A) = \det(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix})$$

$$\det(\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix})\det(A) = \det(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix})$$

$$(2400 - 600)\det A = 25$$

$$\det A = \frac{25}{1800} = \frac{1}{72}$$

เพราะฉะนั้น $\det(A^{-1}) = 72$ ต่อไปหาค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\det(\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}) = 24 - 6 = 18$
2. $\det(\begin{bmatrix} 9 & -18 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}) = 54 - 216 = 162$
3. $\det(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}) = 96 - 24 = 72$
4. $\det(\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 8 \end{bmatrix}) = 96 - 600 = -504$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

**11.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ $\theta$

แทนค่า $\theta = 0$ จะได้ค่าของโจทย์ $\det(AB) = \det(\begin{bmatrix} \tan 0 & -1 \\ 1 & \cos 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\sin 0 \end{bmatrix})$

$$= \det(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix})$$

$$= \det(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = (1)(1) = 1$$

แทนค่า $\theta = 0$ จะได้ค่าของแต่ละตัวเลือกเป็น

1. $\sin^2\theta = 0$ 2. $\cos^2\theta = 1$ 3. $2\cos\theta = 2$ 4. $2\sin\theta = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\det(AB) = \det(\begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\sin\theta \end{bmatrix})$

$= \det(\begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix})\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\sin\theta \end{bmatrix}) = (\tan\theta\cos\theta + 1)(-\sin\theta + 1)$

$= (\sin\theta + 1)(1 - \sin\theta) = (1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)$

$= 1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$

**12. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

แทนค่า $f(x) = x^3$ จะได้ $g(x) = f'(x) = 3x^2$ และ $h(x) = g'(x) = f''(x) = 6x$

แทนค่าในแต่ละตัวเลือก 1. $\int g(x)dx = \int 3x^2dx = x^3 + C = f(x) + C$ ตัวเลือกนี้ยังตัดทิ้งไม่ได้

2. $\int h(x)dx = \int 6xdx = 3x^2 + C = f'(x) + C$ ตัวเลือกนี้ยังตัดทิ้งไม่ได้

3. $\int g'(x)dx = \int 6xdx = 3x^2 + C \neq h(x) + C$ เพราะฉะนั้นเลือกเป็นคำตอบได้ 2 คะแนนแน่นอน

4. $\int f''(x)dx = \int 6xdx = 3x^2 + C = f'(x) + C$

**หมายเหตุ** ตอนสอบจริงอย่าทำตัวเลือก 4. อีกดีกว่าเพื่อจะเอาเวลาไปทำข้ออื่นแทน

**วิธีจริง** ต้องจำบทนิยามให้ได้

1. $\int g(x)dx = \int f'(x)dx = f(x) + C$ ถูกต้อง
2. $\int h(x)dx = \int f''(x)dx = f'(x) + C$ ถูกต้อง
3. $\int g'(x)dx = \int f''(x)dx = f'(x) + C \neq h(x) + C$
4. $\int f''(x)dx = f'(x) + C$ ถูกต้อง

**13. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้เหตุผลว่า ถ้า $A \subset B$ และ $A \neq B$ แล้ว $P(A) < P(B)$

เพราะว่าเหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน เป็นสับเซตของ เหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน < 0.1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $A$ = เหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำ

$B$ = เหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย

$A \cup B$ = เหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำหรือห้องครัวเสีย

$A \cap B$ = เหตุการณ์ ที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสีย

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.25 = 0.2 + 0.1 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 0.05$$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน = 0.05

**14. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** สมมติว่า ก และ ข ได้คะแนนมาตรฐาน $z = 1$ เท่ากันก็ได้

$$\bar{x} = 500$$

$$s = 100$$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

$$1 = \frac{x - 500}{100}$$

เพราะฉะนั้น $x = 600$

ดังนั้น นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนสอบรวมกันเท่ากับ 1200 คะแนน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** สมมติ คะแนนของ ก เท่ากับ $x$ และ คะแนนของ ข เท่ากับ $y$

$$\bar{x} = 500$$

$$s = 100$$

เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานของ ก รวมกับ ข เท่ากับ $\frac{x - 500}{100} + \frac{y - 500}{100}$

ดังนั้น $$2 = \frac{x - 500}{100} + \frac{y - 500}{100}$$

$$200 = x - 500 + y - 500$$

$$x + y = 1200$$

เพราะฉะนั้น นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนสอบรวมกันเท่ากับ 1200 คะแนน

**15.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่าความจริง T , F ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า p = T , q = T , r = T

ค่าความจริงของโจทย์ $\sim[(p\wedge q)\rightarrow(\sim q\vee r)] = \sim[(T\wedge T)\rightarrow(\sim T\vee T)] = F$

ค่าความจริงของตัวเลือกคือ

1. $p\wedge\sim(q\rightarrow r) = T\wedge\sim(T\rightarrow T) = F$
2. $\sim q\vee(\sim p\wedge r) = \sim T\vee(\sim T\wedge T) = F$
3. $\sim(p\wedge q)\wedge(q\wedge r) = \sim(T\wedge T)\wedge(T\wedge T) = F$
4. $\sim(p\wedge q)\rightarrow(q\wedge\sim r) = \sim(T\wedge T)\rightarrow(T\wedge\sim T) = T$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

แทนค่า p = T , q = T , r = F

ค่าความจริงของโจทย์ $\sim[(p\wedge q)\rightarrow(\sim q\vee r)] = \sim[(T\wedge T)\rightarrow(\sim T\vee F)] = T$

ค่าความจริงของตัวเลือกคือ

1. $p\wedge\sim(q\rightarrow r) = T\wedge\sim(T\rightarrow F) = T$
2. $\sim q\vee(\sim p\wedge r) = \sim T\vee(\sim T\wedge F) = F$
3. $\sim(p\wedge q)\wedge(q\wedge r) = \sim(T\wedge T)\wedge(T\wedge F) = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

**วิธีจริง สูตรยอดนิยมของข้อสอบ ENTRANCE คือ**

$$X\rightarrow Y\equiv\sim X\vee Y \qquad \sim(X\wedge Y)\equiv\sim X\vee\sim Y$$

$$\sim(X\vee Y)\equiv\sim X\wedge\sim Y \qquad \sim(X\rightarrow Y)\equiv\sim(\sim X\vee Y)\equiv X\wedge\sim Y$$

**วิธีจริงจะยากตรงที่เราต้องจัดรูปไปหาตัวเลือก ที่ยังไม่รู้ว่าจะเป็นตัวเลือกใด**

ประพจน์ $\sim[(p\wedge q)\rightarrow(\sim q\vee r)] \equiv \sim[\sim(p\wedge q)\vee(\sim q\vee r)]$

$$\begin{aligned}
&\equiv (p\wedge q)\wedge\sim(\sim q\vee r)\\
&\equiv (p\wedge q)\wedge(q\wedge\sim r)\\
&\equiv p\wedge q\wedge\sim r\\
&\equiv p\wedge(\sim(\sim q\vee r))\\
&\equiv p\wedge\sim(q\rightarrow r)
\end{aligned}$$

**16.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่า (x , y) บางค่าก็สามารถจำแนกตัวเลือกได้

จากเงื่อนไข $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ จะเห็นว่า x = -1 ได้ ดังนั้น $-1 \in D_r$

เพราะว่า −1 ไม่อยู่ใน $D_r$ ของตัวเลือก 3. และ 4. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $r = \{(x , y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\} = \{(1 , 0) , (-1 , 0) , \ldots\}$

ดังนั้น $r^{-1} = \{(1 , 0) , (-1 , 0) , \ldots\}$ เพราะฉะนั้น $1 , -1 \in D_{r^{-1}}$

เพราะว่า 1 , −1 ไม่อยู่ใน $D_{r^{-1}}$ ของตัวเลือก 2. และ 4. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** $r = \{(x , y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\}$

$$D_r = \{x \mid 1-x^2 \geq 0\} = \{x \mid x^2-1 \leq 0\} = \{x \mid (x+1)(x-1) \leq 0\}$$
$$= \{x \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1 , 1]$$

$$D_{r^{-1}} = R_r = \{y \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \text{ และ } -1 \leq x \leq 1\}$$

พิจารณา

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$
$$y^2 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$
$$(1+x^2)y^2 = 1-x^2$$
$$y^2+x^2y^2 = 1-x^2$$
$$x^2+x^2y^2 = 1-y^2$$
$$x^2(1+y^2) = 1-y^2$$
$$x^2 = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

เพราะฉะนั้น $D_{r^{-1}} = R_r = \{y \mid 1-y^2 \geq 0\}$

$$= \{y \mid y^2-1 \leq 0 \text{ และ } y \geq 0\} = \{y \mid -1 \leq y \leq 1 \text{ และ } y \geq 0\}$$
$$= [0 , 1]$$

**หมายเหตุ** การหาโดเมนและเรนจ์โดยวิธีจริงก็ยากแบบนี้แหละ

**17.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เขียนวงกลมและเส้นตรงก็ตัดตัวเลือกได้

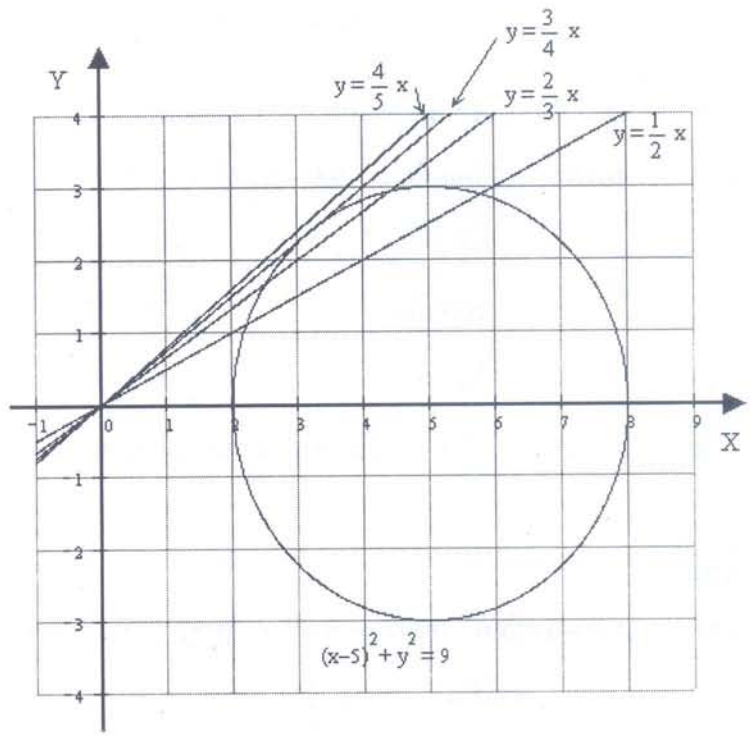
วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$$

$$(x-5)^2 + y^2 = 3^2$$

เขียนวงกลมและเส้นตรง

1. $y = \frac{1}{2}x$
2. $y = \frac{2}{3}x$
3. $y = \frac{3}{4}x$
4. $y = \frac{4}{5}x$




จากรูปจะเห็นเส้นตรงตัดวงกลมเมื่อ $m = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $S = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\}$ แต่โจทย์ต้องการขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ ตัดกับ

วงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ แทนค่า $y = mx$ ในสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(1 + m^2)x^2 - 10x + 16 = 0 \qquad \ldots(1)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (a = 1 + m^2, b = -10, c = 16)$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4(1+m^2)(16)}}{2(1+m^2)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64(1+m^2)}}{2(1+m^2)}$$

เพราะว่าเส้นตรงตัดกับวงกลมเมื่อสมการ (1) มีคำตอบ

สมการ (1) มีคำตอบ ก็ต่อเมื่อ $100 - 64(1 + m^2) \geq 0$

ก็ต่อเมื่อ $1 + m^2 \leq \frac{100}{64}$

ก็ต่อเมื่อ $m^2 \leq \frac{100}{64} - 1 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

ก็ต่อเมื่อ $-\frac{3}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น $S = [-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}]$ ดังนั้นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S คือ $\frac{3}{4}$

**18. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ $\theta$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $a = 1 + \cos^2\frac{\pi}{2} + \cos^4\frac{\pi}{2} + \ldots = 1 + 0 + 0 + \ldots = 1$

ค่าของโจทย์ $\cos(\pi - 2\theta)\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = \cos(\pi - 2(\frac{\pi}{2}))\sin(\frac{\pi}{2} - 2(\frac{\pi}{2})) = \cos 0 \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$

แทนค่า a = 1 ในทุกตัวเลือก

1. $-(\frac{a-2}{a})^2 = -1$ 2. $(\frac{a-2}{a})^2 = 1$

3. $-(\frac{a}{a+2})^2 = -\frac{1}{9}$ 4. $(\frac{a}{a+2})^2 = \frac{1}{9}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** $a = 1 + \cos^2\theta + \cos^4\theta + \ldots = \frac{1}{1 - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta} = \operatorname{cosec}^2\theta$

$$\cos(\pi - 2\theta)\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta) = (-\cos 2\theta)(\cos 2\theta)$$

$$= -\cos^2 2\theta$$ (**ข้อสังเกต** ค่านี้ต้องเป็นลบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 4. ทิ้ง)

$$= -(1-2\sin^2\theta)^2$$
$$= -(1-2(\frac{1}{a}))^2$$
$$= -(\frac{a-2}{a})^2$$

**19.ตอบ 2.**

**แนวคิด** ใช้วิธีสังเกตขณะทำโดยวิธีจริง

$\sin^2(\arccos x) = 1-\cos^2(\arccos x) = 1-x^2$

$\cos(2\arcsin x) = 1-2\sin^2(\arcsin x) = 1-2x^2$

เพราะฉะนั้น $\cos(2\arcsin x)+2 = 4\sin^2(\arccos x)$

$$1-2x^2+2 = 4(1-x^2)$$

**การตัดตัวเลือก** โปรดสังเกตว่า สมการแบบนี้ x หากบวกเป็นคำตอบ ลบก็ต้องเป็นคำตอบด้วย

เพราะฉะนั้น ผลคูณของสมาชิกในเซต A ต้องเป็นลบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริงต่อไป $1-2x^2+2 = 4(1-x^2)$

$$1-2x^2+2 = 4-4x^2$$
$$2x^2+1 = 0$$
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $A = \{\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$ ดังนั้นผลคูณของสมาชิกในเซต A เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

**20.ตอบ** สมการวงกลมคือ $x^2+y^2+4x-2y-15 = 0$

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้จุดศูนย์กลางของวงกลมช่วยตัดตัวเลือก

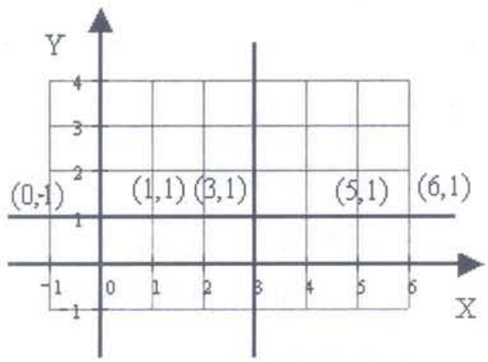
สูตรนี้มีโอกาสใช้ในการสอบเกือบทุกครั้ง

วงกลม $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ รัศมี = $\sqrt{-C+\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}}$

โจทย์กำหนดวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$ จุดศูนย์กลางและรัศมีของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ จุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$ รัศมี = $\sqrt{5}$
2. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 1 = 0$ จุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$ รัศมี = $\sqrt{6}$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ จุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$ รัศมี = 3
4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$ จุดศูนย์กลาง $(2, 1)$ รัศมี = $2\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง




เพราะว่าวงรีวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (3 , 1) จุดโฟกัสจุดหนึ่งที่ (5 , 1) และสัมผัสแกน y ที่จุด (0 , 1)
เพราะฉะนั้นวงรีมี $a = 3$ , $c = 2$ เพราะฉะนั้น $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$
เพราะฉะนั้นรัศมีของวงกลมที่ต้องการมีค่าเท่ากับ $2\sqrt{5}$
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

**วิธีจริง** สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (–2 , 1) และมีรัศมีเท่ากับความยาวของแกนโทของวงรีเท่ากับ $2\sqrt{5}$ คือสมการ $(x+2)^2 + (y-1)^2 = (2\sqrt{5})^2$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 20$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$$

∩∅∪×~∀∃φπθ∝⊂≡≈⊄∈∉° ∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥ → ↑ x y ≯≱≮≰
❶❷❸❹ ① ② ③ ④

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 2.

1. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x^2}{x+2} \geq 0$ และ $|2-x^2| \leq 2$ ตามลำดับ เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $B - A$

   1. $\{-1.6, 1.6\}$ 2. $\{-1.7, 1.7\}$
   2. $\{-1.8, 1.8\}$ 4. $\{-1.8, 1.7\}$

2. ประพจน์ $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p))$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(\sim p) \vee q \vee r$ 2. $p \vee (\sim q) \vee r$
   3. $p \vee q \vee (\sim r)$ 4. $p \vee (\sim q) \vee (\sim r)$

3. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4-x^2)\}$

   และ $g = \{(x, y) \mid y = 2^{x-1}$ และ $x \geq 0\}$

   ถ้า $D_f$ = โดเมนของ f และ $R_g$ = เรนจ์ของ g แล้ว $D_f \cap R_g$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $[0, 1.5)$ 2. $[0.5, 2.5)$
   3. $[1, 3)$ 4. $[1.5, 4)$

4. ให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

   ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = 2x$ และ $g(x) = x - 1$ ทุก $x \in I$ แล้ว เรนจ์ของ $(f \circ g) + f$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\{x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\}$
   2. $\{x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคู่$\}$
   3. เซตของจำนวนเต็มคี่ทั้งหมด
   4. เซตของจำนวนเต็มคู่ทั้งหมด

5. ข้อใดต่อไปนี้ถูก เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก

   1. ถ้า $a < b$ แล้ว $a < b^2$ 2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b$
   3. ถ้า $a < b$ แล้ว $a < ab$ 4. ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

6. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ข้อใดต่อไปนี้ผิด

 1. $10^x < 10^y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$
 2. $\log x < \log y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$
 3. $\frac{1}{2^x} < \frac{1}{2^y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$
 4. $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$

7. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in B \times B \mid |x - y|$ หารด้วย 3 ลงตัว $\}$
 โดยที่ $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ จำนวนสมาชิกของเซต r เท่ากับเท่าใด

 1. 2 ตัว
 2. 4 ตัว
 3. 5 ตัว
 4. 9 ตัว

8. ถ้า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ และ $f^{-1}og = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$
 แล้ว g คือฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้

 1. $\{(a, 3), (c, 1), (d, 4)\}$
 2. $\{(1, c), (3, a), (4, d)\}$
 3. $\{(1, 1), (3, 3), (4, 4)\}$
 4. $\{(a, c), (c, a), (d, d)\}$

9. ถ้า $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ และ $\det A < 0$ แล้ว $\det A^{-1}$ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

 1. $-2$
 2. $-\frac{1}{2}$
 3. $\frac{1}{2}$
 4. $4$

10. ถ้า $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = a^2$ แล้ว $\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

 1. $\frac{1}{a}$
 2. $\frac{-a}{1+a^2}$
 3. $\frac{a}{1-a^2}$
 4. $\frac{2a}{a^2-1}$

11. พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และ มีเส้นตรง $y = 4$ เป็นไดเรกตริกซ์ จะผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

 1. $(4, -1)$
 2. $(4, -\frac{1}{4})$
 3. $(4, \frac{1}{4})$
 4. $(4, 1)$

12.เซตคำตอบของอสมการ $3x^{-2} - 5x^{-1} - 2 > 0$ คือข้อใด

1. $(-3\ ,\ \frac{1}{2})$
3. $(-2\ ,0) \cup (0\ ,\ \frac{1}{2})$
3. $(-\infty\ ,-3) \cup (\ \frac{1}{2},\infty)$
4. $(-\infty ,-3] \cup [\frac{1}{2},\infty)$

13.จากสมการ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$ ค่าของ x ตรงกับข้อใด

1. $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{9}\ ,\ 2n\pi-\frac{\pi}{3}$
2. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\ ,\ n\pi-\frac{\pi}{3}$
3. $\frac{2n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\ ,\ 2n\pi+\frac{\pi}{3}$
4. $\frac{n\pi}{3}-\frac{\pi}{6},\ n\pi+\frac{\pi}{3}$

14.กำหนด $\arcsin(\cos(\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2}))) = -\frac{\pi}{2}$ ค่าของ x อยู่ในเซตใด

1. $\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4}\}$
2. $\{0,\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{4}\}$
3. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\}$
4. $\{-\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\}$

15.กำหนดสมการ $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$ ค่าของ x ในรูปทั่วไปเป็นดังข้อใด

1. $n\pi + \frac{\pi}{4}$
2. $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$
3. $2n\pi + \frac{\pi}{4}$
4. $n\pi - \frac{\pi}{4}$

16.ถ้า $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

แล้ว det(AB) เท่ากับเท่าใด

1. $1 + \cos^2 x + \cos^2 3x$
2. $1 - \cos^2 x + \cos^2 3x$
3. $1 + \cos^2 x - \cos^2 3x$
4. $1 - \cos^2 x - \cos^2 3x$

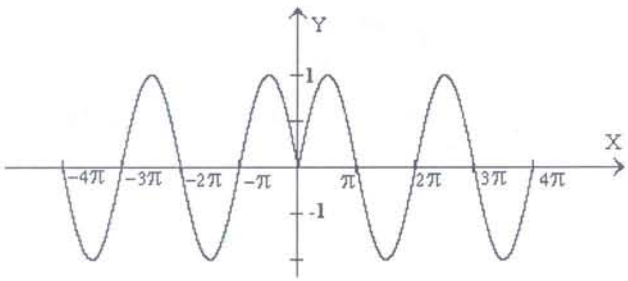
17 ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด ใดๆ เป็น $x - 1$ และเส้นโค้งนี้มีความชันเป็น 1 ณ จุด $(-1\ ,\ 0)$ แล้วสมการของเส้นโค้งนี้คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$
2. $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$
3. $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$
4. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6}$

18. ค่าของ $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\tan x-\sin x\cos x}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $1+\cot 2x$ 2. $2\cot^2 x$
3. $4-2\cot x$ 4. $\cot x$

19.




กราฟที่กำหนดให้ เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด

1. $y=\sin(-x)$ 2. $y=\cos(|x|)$
3. $y=\sin(|x|)$ 4. $y=|\sin(x)|$

20. กำหนดความสัมพันธ์ $r=\{(x,y)\in R\times R \mid y=1-\sqrt{x^2-9}\}$
โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์คือข้อใด

1. $D_r=[-3,3]$ $R_r=(-\infty,1]$
2. $D_r=(-\infty,-3]\cup[3,\infty)$ $R_r=[1,\infty)$
3. $D_r=[3,\infty)$ $R_r=[1,\infty)$
4. $D_r=(-\infty,-3]$ $R_r=[3,\infty)$

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂⊄∈∉° ∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥→ ↑ X Y
❶❷❸❹①②③④

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 2.

**1. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

$$A = \{ x \mid \frac{3-x^2}{x+2} \geq 0 \}$$

$$A' = \{ x \mid \frac{3-x^2}{x+2} < 0 \} \cup \{-2\}$$

$$B = \{ x \mid | 2-x^2 | \leq 2 \}$$

$$= \{ x \mid -2 \leq 2-x^2 \leq 2 \}$$

$$B - A = B \cap A'$$

แทนค่า $x = 1.6$

$$\frac{3-x^2}{x+2} = \frac{3-1.6^2}{1.6+2} = \frac{3-2.56}{3.6} > 0 \quad \rightarrow \quad 1.6 \notin A' \quad \rightarrow 1.6 \notin B - A$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

แทนค่า $x = 1.7$

$$\frac{3-x^2}{x+2} = \frac{3-1.7^2}{1.7+2} = \frac{3-2.89}{3.7} > 0 \quad \rightarrow \quad 1.7 \notin A' \quad \rightarrow 1.7 \notin B - A$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

**วิธีจริง** $A = \{ x \mid \frac{3-x^2}{x+2} \geq 0 \} = \{ x \mid \frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{x+2} \geq 0 \}$

$$= \{ x \mid \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{x+2} \leq 0$$

$$= (-\infty, -2) \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$B = \{ x \mid | 2-x^2 | \leq 2 \} = \{ x \mid (2-x^2)^2 \, 4 \leq 0 \}$

$$= \{ x \mid [(2-x^2)-2][(2-x^2)+2] \leq 0 \} = \{ x \mid [-x^2][4-x^2] \leq 0 \}$$

$$= \{ x \mid x^2 - 4 \leq 0 \} = \{ x \mid (x-2)(x+2) \leq 0 \}$$

$$= [-2, 2]$$

เพราะฉะนั้น $B - A = [-2, 2] - ((-\infty, -2) \cup [-\sqrt{3}, \sqrt{3}])$

$= [-2, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2]$

$= [-2, -1.732) \cup (1.732, 2]$

เพราะฉะนั้น $\{-1.8, 1.8\} \subset B - A$

**2. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่าความจริงบางค่าสามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = F, q = T, r = F$ และหาค่าความจริงของแต่ละตัวเลือก

ประพจน์ $\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p)) = \sim F \rightarrow (T \rightarrow (F \vee F)) = F$

1. $(\sim p) \vee q \vee r = (\sim F) \vee T \vee F = T$
2. $p \vee (\sim q) \vee r = F \vee (\sim T) \vee F = F$
3. $p \vee q \vee (\sim r) = F \vee T \vee (\sim F) = T$
4. $p \vee (\sim q) \vee (\sim r) = F \vee (\sim T) \vee (\sim F) = T$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ต้องจำสูตรได้คือ $X \rightarrow Y$ สมมูล $\sim X \vee Y$

$\sim p \rightarrow (q \rightarrow (r \vee p))$ สมมูล $p \vee (q \rightarrow (r \vee p))$

สมมูล $p \vee (\sim q \vee (r \vee p))$

สมมูล $p \vee (\sim q) \vee r \vee p$

สมมูล $p \vee (\sim q) \vee r$

**3. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = \log(1 + 1) + \log(1 + 1) - \log(4 - 1^2)$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $1 \in D_f$

$x = 1$ จะได้ $y = 2^{1-1} = 1$ เพราะฉะนั้น $1 \in R_g$

ดังนั้น $1 \in D_f \cap R_g$ แต่ $1 \notin [1.5, 4)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ จะได้ $y = \log(\frac{1}{2} + 1) + \log(\frac{1}{2} + 1) - \log(4 - (\frac{1}{2})^2)$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} \in D_f$

$x = 0$ จะได้ $y = 2^{0-1} = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} \in R_g$

ดังนั้น $\frac{1}{2} \in D_f \cap R_g$ แต่ $\frac{1}{2} \notin [1, 3)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \sqrt{3}$ จะได้ $y = \log(\sqrt{3} + 1) + \log(\sqrt{3} + 1) - \log(4 - \sqrt{3}^2)$ หาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\sqrt{3} \in D_f$

$x = \log_2 \sqrt{3} + 1$ จะได้ $y = 2^{\log_2 \sqrt{3}+1-1} = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{3} \in R_g$

ดังนั้น $\sqrt{3} \in D_f \cap R_g$ แต่ $\sqrt{3} \notin [0, 1.5)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง การหาโดเมนของ f** $f = \{(x, y) \mid y = \log(x + 1) + \log(x + 2) - \log(4 - x^2)\}$

โดเมนของ f คือเซตของ x ที่ทำให้ $x + 1 > 0$ และ $x + 2 > 0$ และ $4 - x^2 > 0$

ที่ทำให้ $x > -1$ และ $x > -2$ และ $x^2 - 4 < 0$

$D_f = (-1, \infty) \cap (-2, \infty) \cap (-2, 2) = (-1, 2)$

**การหาเรนจ์ของ g** $R_g = \{2^{x-1} \mid x \geq 0\} = [\frac{1}{2}, \infty)$

$D_f \cap R_g = (-1, 2) \cap [\frac{1}{2}, \infty) = [\frac{1}{2}, 2)$

เพราะฉะนั้น $[\frac{1}{2}, 2) \subset [0.5, 2.5)$

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f(x) = 2x$ และ โดเมนของ f คือเซตของจำนวนเต็ม
เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ f เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่
เพราะว่า เรนจ์ของ $(fog) + f$ เป็นสับเซตของ f ซึ่งเป็นเซตของจำนวนเต็มคู่
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**ตัวเลือก 1.** $\{x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่ $\} = \{x \in I \mid \frac{x}{2} = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots\}$

$= \{\pm 2, \pm 6, \pm 10, \ldots\}$

**ตัวเลือก 2.** $\{x \in I \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคู่$\} = \{x \in I \mid \frac{x}{2} = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6 \ldots \ldots\}$

$= \{0, \pm 4, \pm 8, \pm 12, \ldots\}$

**ตัวเลือก 4.** เซตของจำนวนเต็มคู่ทั้งหมด = $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \ldots\ldots\}$

เพราะว่า $((fog) + f)(0) = (fog)(0) + f(0) = f(g(0)) + 0 = f(-1) = -2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $((fog) + f)(x) = (fog)(x) + f(x) = f(g(x)) + f(x)$

$= f(x-1) + 2x = 2(x-1) + 2x$

$= 4x - 2$

**หมายเหตุ** ขณะนี้จะเห็นได้ว่าไม่มี x ที่ทำให้ $4x - 2 = 0$

เพราะฉะนั้น 0 ไม่อยู่ในเรนจ์ของ $(fog) + f$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริงต่อไป เรนจ์ของ $(fog) + f$ = $\{4x - 2 \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

= $\{2(2x - 1) \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

= $\{2k \mid k = 2x - 1$ และ $x$ เป็นจำนวนเต็ม$\}$

= $\{2k \mid k$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

= $\{k \mid \frac{k}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

= $\{x \mid \frac{x}{2}$ เป็นจำนวนเต็มคี่$\}$

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่า $a = 2$ และ $b = 3$ ก็ตอบได้เลยว่าตัวเลือกใดผิด

1. ถ้า $2 < 3$ แล้ว $2 < 3^2$ จริง เก็บตัวเลือกนี้ไว้ก่อน
2. ถ้า $2 < 3$ แล้ว $2^2 < 3$ ไม่จริง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้
3. ถ้า $2 < 3$ แล้ว $2 < (2)(3)$ จริง เก็บตัวเลือกนี้ไว้ก่อน
4. ถ้า $2 < 3$ แล้ว $2^2 < 3^2$ จริง เก็บตัวเลือกนี้ไว้ก่อน

ต่อไปแทนค่า $a = 0.1$ และ $b = 0.2$

1. ถ้า $0.1 < 0.2$ แล้ว $0.1 < 0.2^2$ ไม่จริง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้
3. ถ้า $0.1 < 0.2$ แล้ว $0.1 < (0.1)(0.2)$ ไม่จริง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ถูกต้อง

**วิธีจริง** ใครจำได้ว่าว่าตัวเลือก 4. ถูกต้องเอาคะแนนไปเลยหรือจะลองพิสูจน์ดูก็ได้

เพราะว่า $a < b$

ดังนั้น $aa < ab$

และ $ab < bb$

เพราะฉะนั้น $aa < bb$

สรุป $a^2 < b^2$

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่า $x = 1$ และ $y = 100$ ก็ตอบได้เลยว่าตัวเลือกใดผิด

ตัวเลือก 1. $10^1 < 10^{100}$ ก็ต่อเมื่อ $1 < 100$ ยังไม่ผิด เก็บตัวเลือกนี้ไว้ก่อน

ตัวเลือก 2. $\log 1 < \log 100$ ก็ต่อเมื่อ $1 < 100$ ยังไม่ผิด เก็บตัวเลือกนี้ไว้ก่อน

เพราะว่า $\frac{1}{2^1} < \frac{1}{2^{100}}$ เป็นเท็จ แต่ $1 < 100$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2^1} < \frac{1}{2^{100}}$ ก็ต่อเมื่อ $1 < 100$ ไม่จริง สรุปตัวเลือก 3. ผิด

**วิธีจริง** ในระดับ ม. ปลายต้องท่องจำได้ว่า $f(t) = 10^t$ , $f(t) = \log t$ , $f(t) = \sqrt{t}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น 1. $10^x < 10^y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ ถูกต้อง

2. $\log x < \log y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ ถูกต้อง

4. $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ ถูกต้อง

เพราะฉะนั้น 3. $\frac{1}{2^x} < \frac{1}{2^y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ ผิด

**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $x = y$ ทำให้ $|x - y| = 0$ หารด้วย 3 ลงตัวเสมอ

เพราะฉะนั้น $(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \in r$

ดังนั้น r มีสมาชิกอย่างน้อย 5 ตัวแล้ว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $|5 - 2| = 3$ หารด้วย 3 ลงตัว เพราะฉะนั้น $(5, 2) \in r$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ในเซต $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$|x - y|$ หารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $|x - y| = 0, \pm 3, \pm 6$

โดยการแจงสมาชิก $r = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (2, 5), (5, 2), (3, 6), (6, 3)\}$

เพราะฉะนั้น $n(r) = 9$

8. ตอบ 2.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

เพราะฉะนั้น $f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)\}$

และ $f^{-1} og = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$

เพราะฉะนั้น $D_g = \{1, 3, 4\}$ และ $R_g \subset \{a, b, c, d\}$

โดเมนของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\{a, b, c\}$ 2. $\{1, 3, 4\}$ 3. $\{1, 3, 4\}$ 4. $\{a, c, d\}$

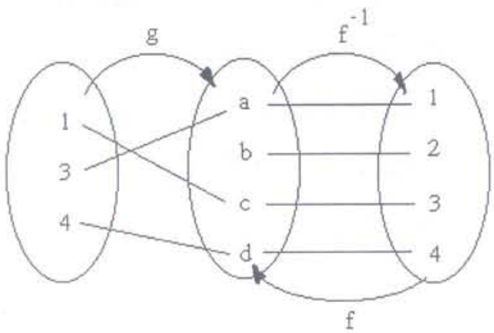
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เรนจ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\{1, 3, 4\}$ 2. $\{a, c, d\}$ 3. $\{1, 3, 4\}$ 4. $\{a, c, d\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ให้ดูจากแผนภาพการส่งค่า $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

และ $f^{-1} og = \{(1, 3), (3, 1), (4, 4)\}$




เพราะฉะนั้น $g = \{(1, c), (3, a), (4, d)\}$

9. ตอบ 2.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $\det A \det A^{-1} = 1$ เพราะฉะนั้น $\det A$ และ $\det A^{-1}$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

เพราะว่า $\det A < 0$ เพราะฉะนั้น $\det A^{-1} < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $(\det A)^2 = \det A^2 = \det\begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{bmatrix} = (7)(22) - (-15)(-10) = 4$ และ $\det A < 0$

เพราะฉะนั้น $\quad \det A = -2$

เพราะว่า $\det A \det A^{-1} = 1$ และ $\det A = -2$ เพราะฉะนั้น $-1 < \det A^{-1} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $\det A \det A^{-1} = 1$

เพราะฉะนั้น $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = -\dfrac{1}{2}$

**10.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a และ $\theta$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $a^2 = (\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4})^2 = 0$ เพราะฉะนั้น $a = 0$

ค่าของโจทย์ $\quad \operatorname{cosec}\theta - \sec\theta = \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} - \sec\frac{\pi}{4} = 0$

แทนค่า $a = 0$ ค่าของของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\infty$ 2. 0 3. 0 4. 0

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

แทนค่า $\theta = 0$ จะได้ $a^2 = (\sin 0 - \cos)^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $a = \pm 1$

ค่าของโจทย์ $\quad \operatorname{cosec}\theta - \sec\theta = \operatorname{cosec}0 - \sec 0 = \pm\infty - 1$ หาค่าไม่ได้

แทนค่า $a = 1$ ค่าของของแต่ละตัวเลือกคือ 2. $\pm\frac{1}{2}$ 3. หาค่าไม่ได้ 4. หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**วิธีจริง** $a^2 = (\sin\theta - \cos\theta)^2 = \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

เพราะฉะนั้น $\quad 2\sin\theta\cos\theta = 1 - a^2$

$$(\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta)^2 = \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right)^2 = \left(\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}\right)^2 = \frac{(\cos\theta - \sin\theta)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{a^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{4a^2}{4\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

$$= \frac{4a^2}{(1-a^2)^2} = \frac{4a^2}{(a^2-1)^2}$$

เพราะฉะนั้น $\quad \operatorname{cosec}\theta - \sec\theta = \dfrac{\pm 2a}{a^2 - 1}$

สรุปตัวเลือก 4 ถูกต้อง

**11.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

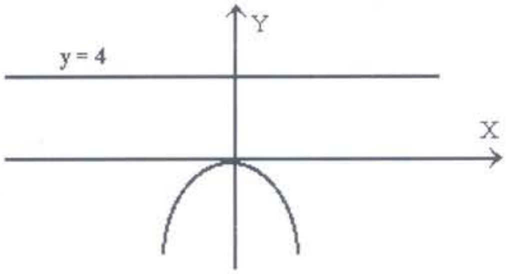
จะเห็นได้ว่าพาราโบลาไม่ผ่านควอดรันทร์ 1. และ 2.

เพราะว่า 1. $(4, -1) \in$ ควอดรันทร์ 4.

2. $(4, -\frac{1}{4}) \in$ ควอดรันทร์ 4.

3. $(4, \frac{1}{4}) \in$ ควอดรันทร์ 1.

4. $(4, 1) \in$ ควอดรันทร์ 1.




เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

**วิธีจริง** พาราโบลาคว่ำมีค่า $c = -4$

สมการพาราโบลาคือ $x^2 = 4cy = 4(-4)y = -16y$

เพราะฉะนั้น $(4, -1)$ เป็นจุดบนพาราโบลา

**12.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากเงื่อนไขของอสมการ $3x^{-2} - 5x^{-1} - 2 > 0$ แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 1$ $3x^{-2} - 5x^{-1} - 2 = 3 - 5 - 2$ ไม่มากกว่า 0

เพราะฉะนั้น $x = 1$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $3x^{-2} - 5x^{-1} - 2 > 0$

$$\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 > 0$$

$$\frac{3 - 5x - 2x^2}{x^2} > 0$$

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2} < 0$$

$$\frac{(2x-1)(x+3)}{x^2} < 0$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $(-3, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$

**13. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ n

แทนค่า n = 0 ตัวเลือกแต่ละข้อจะมีค่าเป็น

1. $\frac{\pi}{9}, -\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$ 3. $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ 4. $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{3}$ $\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 2$ , $2\cos 2(\frac{\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2}) = -1 \neq 2$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{3}$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = \frac{\pi}{6}$ $\cos\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}\,(\frac{1}{2}) = \sqrt{3}$

$$2\cos 2(\frac{\pi}{6}) = 2\cos(\frac{\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2}) = -1 \neq \sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{6}$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 2x$$

$$\cos(\frac{\pi}{3})\cos x + \sin(\frac{\pi}{3})\sin x = \cos 2x$$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos 2x$$

$$\frac{\pi}{3} - x = 2n\pi \pm 2x$$

$\frac{\pi}{3} - x = 2n\pi - 2x$ หรือ $\frac{\pi}{3} - x = 2n\pi + 2x$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ หรือ $-3x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

$$x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{9},\ 2n\pi - \frac{\pi}{3}$$

**14. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่าสมการ $\arcsin(\cos(\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2}))) = -\frac{\pi}{2}$ มีพจน์ของ $x^2$

ทำให้ x เป็นราก ก็ต่อเมื่อ – x เป็นรากของสมการ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

$$\arcsin(\cos(\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2}))) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2})) = -1$$

$$\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2}) = \pi$$

$$\arcsin(x^2 - \frac{1}{2}) = 0$$

$$x^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**15. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ n

แทนค่า n = 0 ตัวเลือกแต่ละข้อจะมีค่าเป็น

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\pm\frac{\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $-\frac{\pi}{4}$

เพราะว่า sinx เป็นฐานของ log เพราะฉะนั้น $\sin x > 0$

เพราะว่า $\sin(-\frac{\pi}{4}) < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า n = 1 ในตัวเลือกที่เหลือ 1. $\frac{5\pi}{4}$ 3. $\frac{9\pi}{4}$

เพราะว่า $\sin(\frac{5\pi}{4}) < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$

แทนค่า $v = \log_{\cos x}(\sin x)$ เพราะฉะนั้น $\log_{\sin x}(\cos x) = \frac{1}{v}$

จากสมการ $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$ จะได้ $v + \frac{1}{v} = 2$ เพราะฉะนั้น $v = 1$

ดังนั้น $\log_{\cos x}(\sin x) = 1$ เพราะฉะนั้น $\sin x = \cos x$ และ $\sin x > 0$ และ $\cos x > 0$

$$\tan x = 1$$

เพราะฉะนั้น

$$x = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

**16.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

แทนค่า x = 0 $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\det A = -1$

$B = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det B = 1$

เพราะฉะนั้นค่าของโจทย์ $\det(AB) = \det A \det B = -1$

ค่าของแต่ละตัวเลือก 1. $1 + \cos^2 x + \cos^2 3x = 3$ 2. $1 - \cos^2 x + \cos^2 3x = 1$

3. $1 + \cos^2 x - \cos^2 3x = 1$ 4. $1 - \cos^2 x - \cos^2 3x = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $AB = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \sin x\cos 2x - \cos x\sin 2x & -\sin x\sin 2x + \cos x\cos 2x \\ -\cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x & -\cos x\sin 2x + \sin x\cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\sin x & \cos 3x \\ \cos 3x & -\sin x \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) = \sin^2 x - \cos^2 3x = 1 - \cos^2 x - \cos^2 3x$$

**17.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้จุดผ่าน (–1 , 0) ช่วยในการตัดตัวเลือก

แทนค่า x = –1 ในแต่ละตัวเลือก

1. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1$
2. $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3$
3. $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$
4. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6} = -1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{13}{6} \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุด ใดๆ เป็น $x - 1$

เพราะฉะนั้น $f''(x) = x - 1$

และ $f'(x) = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + K$

เพราะว่าเส้นโค้งนี้มีความชันเป็น 1 ณ จุด $(-1, 0)$

เพราะฉะนั้น $1 = f'(-1) = \frac{1}{2} + 1 + K$ ดังนั้น $K = -\frac{1}{2}$

ทำให้ได้ว่า $f'(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + K$ เพราะว่าเส้นโค้งนี้มีความชันเป็น 1 ณ จุด $(-1, 0)$

เพราะฉะนั้น $0 = f(-1) = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + K$ เพราะฉะนั้น $K = \frac{1}{6}$

สรุป $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$

**18. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x แทนค่า $x = \frac{\pi}{6}$

โจทย์มีค่า $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cos x} = \frac{(\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6})^2 - 1}{\tan\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - (\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}$

$$= \frac{\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4\sqrt{3}}} = 6$$

ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น 1. $1 + \cot 2(\frac{\pi}{6}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $2\cot^2(\frac{\pi}{6}) = 2(\sqrt{3})^2 = 6$

3. $4 - 2\cot\frac{\pi}{6} = 4 - 2(\sqrt{3})$ 4. $\cot(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\tan x-\sin x\cos x} = \dfrac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1}{\tan x-\sin x\cos x} = \dfrac{2\sin x\cos x}{\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x\cos x}$

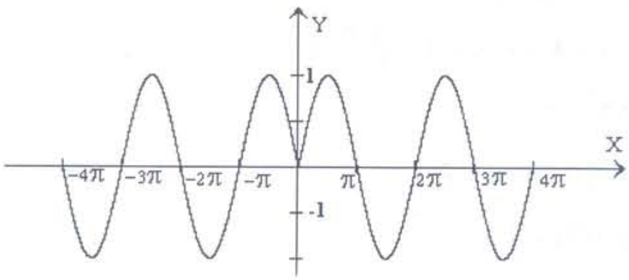
$$= \dfrac{2\cos x}{\dfrac{1}{\cos x}-\cos x} = \dfrac{2\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$$

$$= \dfrac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= 2\cot^2 x$$

**19.ตอบ 3.**

**แนวคิด**




**การตัดตัวเลือก** คำถามแบบนี้ใช้การแทนค่าเพื่อดูว่าจุดนั้นอยู่บนเส้นโค้งหรือไม่เป็นวิธีที่ได้คะแนนเร็วที่สุด จากกราฟที่กำหนดให้ผ่านจุด (0 , 0) แทนค่า $x=0$ ค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $y=\sin(-0)=0$ 2. $y=\cos(|0|)=1$

3. $y=\sin(|0|)=0$ 4. $y=|\sin(0)|=0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

จากกราฟที่กำหนดให้ผ่านจุดที่ $(\frac{\pi}{2},1)$ แทนค่า $x=\frac{\pi}{2}$ ค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $y=\sin(-\frac{\pi}{2})=-1$ 3. $y=\sin(|\frac{\pi}{2}|)=1$ 4. $y=|\sin(\frac{\pi}{2})|=1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จากกราฟที่กำหนดให้ผ่านจุดที่ $(\frac{3\pi}{2},-1)$ แทนค่า $x=\frac{3\pi}{2}$ ค่าแต่ละตัวเลือกคือ

3. $y=\sin(|\frac{3\pi}{2}|)=-1$ 4. $y=|\sin(\frac{3\pi}{2})|=1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** นักเรียนต้องจำลักษณะกราฟได้

**20. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โดเมนและเรนจ์คือเซตใดให้นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อจำแนกตัวเลือกดีกว่า

$$r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}\}$$

จากเงื่อนไข $y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}$

เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

จากเงื่อนไข $y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}$ เพราะฉะนั้น $x = -3 , 3$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}\}$

จากเงื่อนไข $y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}$

เพราะฉะนั้น $x^2 - 9 \geq 0$ และ $y \geq 1$

เพราะฉะนั้น $x \leq -3$ หรือ $x \geq 3$

ดังนั้น $D_r = (-\infty , -3] \cup [3 , \infty)$ และ $R_r = [1 , \infty)$

×~∀∃ϕπθ≤↔≠→±≥∝∩∅∪⊂⊄∈∉∞ ∧∨

⇐⊗⊕⊕♣♦♥♠⊗⊕⊕⇒

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 3.

1. ถ้าให้ A , B , C เป็นเซตใด ๆ และ $\varnothing$ เป็นเซตว่างแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

   1. $C-(A\cup B)=(C-A)\cup(C-B)$
   2. ถ้า $A\cap B=A\cap C$ แล้ว $B=C$
   3. $A\subset C$ , $B\subset C$ และ $(C-B)\subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A\cup B=C$
   4. $(B\cup A)\cap(\varnothing\cup A)\neq A$

2. วงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $V_1(1, 2)$ และ $V_2(7, 2)$ และความยาวครึ่งแกนโทเท่ากับ 2 หน่วย มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

   1. $x^2+y^2-8x-4y+11=0$ 
   2. $4x^2+9y^2-32x-36y+64=0$
   3. $x^2+y^2-16x-9y+32=0$ 
   4. $4x^2+9y^2-32x+36y-8=0$

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (1) $\quad \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

   (2) $\quad \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}-\arccos\frac{1}{2}=\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
   2. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
   3. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
   4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

4. ให้ $\bar{u}$ , $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วยที่แตกต่างกัน และต่างก็ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\bar{i}+\bar{j}$ $\bar{u}+\bar{v}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$
   2. $\sqrt{2}\bar{i}+\sqrt{2}\bar{j}$
   3. $2\bar{i}+2\bar{j}$
   4. $2\sqrt{2}\bar{i}+2\sqrt{2}\bar{j}$

5. ค่าของ $\lim\limits_{x\to-2}\frac{|3x+2|-4}{2-|x|}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $-2$
   2. $-3$
   3. $-4$
   4. หาค่าไม่ได้

6. ถ้า $\int f(x)dx = \frac{2}{15}(15x^2 + 12x + 8)\sqrt{(x-1)^3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว f(x) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x^2\sqrt{x-1}$
2. $5x^2\sqrt{x-1}$
3. $7x^2\sqrt{x-1}$
4. $9x^2\sqrt{x-1}$

7. การประมาณค่าของค่าคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในเรื่องความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ค่าในข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าน้อยที่สุด

1. $(\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i^2)$
2. $\sum_i (y_i - x_i)^2$
3. $\sum_i (y_i - \bar{y})^2$
4. $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$

8. การแจกแจงจำนวนครอบครัว 40 ครอบครัวที่มีเครื่องรับโทรทัศน์มีดังนี้

| จำนวนเครื่อง | จำนวนครอบครัว |
|---|---|
| 1 | 14 |
| 2 | 12 |
| 3 | 8 |
| 4 | 4 |
| 5 | 2 |

ให้ สัมประสิทธิ์ของพิสัย = a
สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ = b
สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = c
สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน = d

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $c < b < a < d$
2. $b < d < a < c$
3. $a = b = c = d$
4. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

9. **ทฤษฎีบท** ให้ f(x) และ g(x) เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $g(x) \neq 0$ ดังนั้นมีพหุนาม q(x) , r(x) ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ โดย $r(x) = 0$ หรือดีกรีของ r(x) น้อยกว่าดีกรีของ g(x)

ถ้าเศษที่ได้จากการหารพหุนาม p(x) ด้วย $x - 1$ และ $x - 2$ คือ 2 และ 1 ตามลำดับ แล้วการหาร p(x) ด้วย $x^2 - 3x + 2$ จะเหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x - 3$
2. $-x + 3$
3. 3
4. ข้อมูลที่ให้ไม่เพียงพอ

10. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

(1) เหตุ : 1. $p \leftrightarrow \sim q$

2. $r \vee (p \wedge q)$

ผล : $p \rightarrow r$

(2) เหตุ : 1. $p \wedge q$

2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

ผล : $r$

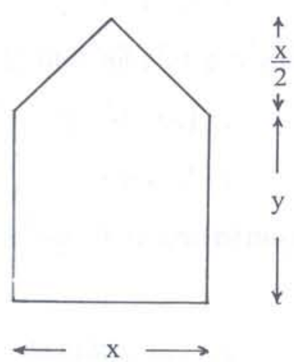
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (1) และ (2) สมเหตุสมผล
2. (1) เท่านั้นสมเหตุสมผล
3. (2) เท่านั้นสมเหตุสมผล
4. (1) และ (2) ไม่สมเหตุสมผล

11. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1\cdot 2}{3}+\frac{2\cdot 3}{3^2}+\frac{3\cdot 4}{3^3}+\frac{4\cdot 5}{3^4}+\ldots$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{7}{4}$
4. $\frac{9}{4}$

12. หน้าต่างบานหนึ่งประกอบด้วยส่วนล่างเป็นส่วนของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า และส่วนบนเป็นส่วนของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว มีส่วนสูงเท่ากับครึ่งหนึ่งของฐาน (ดังรูป) โดยมีเส้นรอบรูปยาว 12 ฟุต เพื่อให้หน้าต่างนี้มีพื้นที่มากที่สุด ความยาวของฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้




1. $\frac{12}{7}(2\sqrt{2}-1)$
2. $\frac{12}{7}(2\sqrt{2}+1)$
3. $\frac{12}{7}(\sqrt{2}-1)$
4. $\frac{12}{7}(\sqrt{2}+1)$

13. ร้านขายขนมในเทศกาลตรุษจีนได้รวบรวมข้อมูลการจำหน่ายขนมไว้ดังนี้

| | ปริมาณ (พันหน่วย) | | | ราคาต่อหน่วย | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| รายการสินค้า | 2537 | 2538 | 2539 | 2537 | 2538 | 2539 |
| ขนมเทียนไส้เค็ม | 2 | 3 | 4 | 3.00 | 3.50 | 4.00 |
| ขนมเทียนไส้หวาน | 2 | 2 | 4 | 3.00 | 3.50 | 4.00 |
| ขนมเข่งธรรมดา | 2 | 3.5 | 4 | 2.00 | 2.50 | 3.00 |
| ขนมเข่งใส่กะทิ | 2 | 1.5 | 4 | 2.00 | 3.00 | 4.00 |

พ.ศ. 2537 เป็นปี ฐาน พ.ศ. 2539 เป็นปีที่ต้องการหาเลขดัชนี โดยให้

$I_1$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

$I_2$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$I_3$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐานและปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$I_4$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $I_1 = I_2$ และ $I_3 \neq I_4$
2. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 = I_4$
3. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 \neq I_4$
4. $I_1 = I_2$ และ $I_3 = I_4$

14. ถ้า $|z| = 1$ และ a , b เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $|az + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$
2. $|az + b| = |a| + |b|$
3. $|a\bar{z} + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$
4. $|a\bar{z} + b| = |a| + |b|$

15. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC $\cos B\hat{A}M$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A - 2\sin A \cos C}}$
2. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A + 2\sin A \cos C}}$
3. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C - 2\sin C \cos A}}$
4. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C + 2\sin C \cos A}}$

16. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมี $AB = CD$ E , F , G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD , BC และ AC ตามลำดับ ถ้า $B\hat{A}C = 85^\circ$ และ $A\hat{C}D = 45^\circ$ จะได้ $G\hat{F}E$ มีค่าเท่าใด

1. $15^\circ$
2. $20^\circ$
3. $25^\circ$
4. $30^\circ$

17. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 10 หน่วย สูง 6 หน่วย และมุมทั้งสามเป็นมุมแหลมรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งบรรจุในสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่เท่าใด

1. 15 ตารางหน่วย
2. 20.5 ตารางหน่วย
3. 25 ตารางหน่วย
4. 27.5 ตารางหน่วย

18. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ และ $A \neq B$

ถ้า $A^3 = B^3$ และ $A^2B = B^2A$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A^2 + B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
2. $A^2 + B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
3. $A^2 - B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
4. $A^2 - B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

19. ถ้า $5 \tan A = \tan (A + B)$ จะได้ $\dfrac{\sin(2A + B)}{\sin B}$ มีค่าเท่าใด

1. $\dfrac{5}{3}$
2. $\dfrac{5}{4}$
3. $\dfrac{4}{3}$
4. $\dfrac{3}{2}$

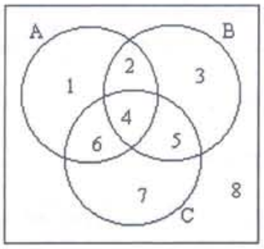
20. ถ้า $a \cos\theta + b \sin\theta + c = 0$ และ $a \cos \varnothing + b \sin \varnothing + c = 0$ โดยที่ a , b , c ไม่เท่ากับ 0 และ $\varnothing - \theta \neq 0$ และไม่เป็นพหุคูณของ $2\pi$

แล้ว $\dfrac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ $\theta$ และ $\varnothing$

1. $\sin(\varnothing - \theta)$
2. $\cos(\varnothing - \theta)$
3. $\tan(\varnothing - \theta)$
4. $\cot(\varnothing - \theta)$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 3.

**1. ตอบ 3.**




**แนวคิด** 1. ผิด ตัวอย่างจากแผนภาพเวนน์

$C-(A\cup B) = \{7\}$

$(C-A)\cup(C-B) = \{5, 7\} \cup \{6, 7\}$

$= \{5, 6, 7\}$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \{1\}$ , $B = \{2\}$ , $C = \{3\}$ **จะได้** $A\cap C = \varnothing = B\cap C$ แต่ $A \neq B$

4. ผิด เพราะว่า $\varnothing \cup A = A$ , $A \subset A\cup B$

เพราะฉะนั้น $(A\cup B)\cap(\varnothing\cup A) = (A\cup B)\cap A = A$

3. ถูกต้อง **ข้อพิสูจน์** สมมติ $A\subset C$ , $B\subset C$ และ $(C-B)\subset A$

เพราะฉะนั้น $A\cup B \subset C$ แน่นอน ....(1)

ให้ $x\in C$ ถ้า $x\in B$ แล้ว $x\in A\cup B$ ถ้า $x \notin B$ จะได้ว่า $x\in C-B$ ทำให้ $x\in A$

ดังนั้น $x\in A\cup B$ แน่นอน

สรุป $C\subset A\cup B$ ....(2)

จาก (1) และ (2) $A\cup B = C$

สมมติ $A\cup B = C$ เพราะฉะนั้น $A\subset A\cup B = C$ , $B\subset A\cup B = C$

และ $C-B = (A\cup B)-B = (A\cup B)\cap B' = (A\cap B')\cup(B\cap B')$

$= (A\cap B')\cup\varnothing = A\cap B' \subset A$

**2. ตอบ 2.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** โจทย์ถามสมการวงรี แต่ตัวเลือก 1. และ 3. เป็นสมการวงกลม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3 ทิ้ง เพราะว่าจุดยอด $V_1(1, 2)$ , $V_2(7, 2)$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงรี คือ $\left(\frac{1+7}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (4, 2)$

จุดยอดของวงรีแต่ละตัวเลือก คือ 2. (4 , 2) และ 4. (4 , – 2) ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จุดศูนย์กลางของวงรี คือ (4 , 2) และ 2a = 7 – 1 = 6 , a = 3 , b = 2

สมการวงรี คือ $\frac{(x-4)^2}{3^2}+\frac{(y-2)^2}{2^2} = 1$

$$\frac{x^2-8x+16}{9}+\frac{y^2-4y+4}{4} = 1$$

$$4(x^2-8x+16)+9(y^2-4y+4) = 36$$

$$4x^2+9y^2-32x-36y+64 = 0$$

**3. ตอบ 3.**

**แนวคิด** (1) ผิด เพราะว่า $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ , $\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} > \frac{\pi}{2}$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \le \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ต้องผิดแน่

(2) ถูกต้อง $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$ , $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ , $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}$

$$\cos(\frac{\pi}{12}) = \cos(15) = \cos(45-30)$$

$$= \cos45\cos30+\sin45\sin30$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\pi}{12} = \arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

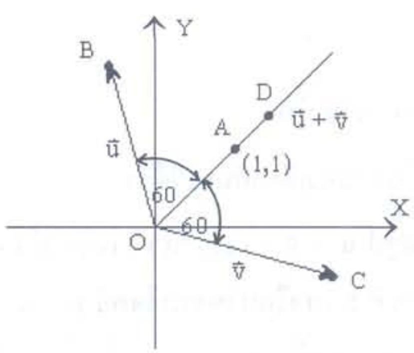
สรุป $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = -\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ ถูกต้อง

**4. ตอบ 2.**

**แนวคิด** คำถามแบบนี้วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

**ขั้นตอนการวาดรูป**

1. เขียน A(1 , 1) จะได้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i}+\bar{j}$
2. ลาก OB และ OC ยาว 2 หน่วย
   โดยให้ $A\hat{O}B = A\hat{O}C = 60^\circ$
3. ให้ $\bar{u} = \overrightarrow{OB}$, $\bar{v} = \overrightarrow{OC}$



4. ลาก $\overrightarrow{CD}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ และยาว 2 หน่วย

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OD}$ คือ $\bar{u} + \bar{v}$

จะได้ OCD เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า , $|\overrightarrow{OD}| = 2$

เพราะว่า 1. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}\right| = 1$ 2. $\left|\sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}\right| = 2$

3. $\left|2\bar{i} + 2\bar{j}\right| = 2\sqrt{2}$ 4. $\left|2\sqrt{2}\bar{i} + 2\sqrt{2}\bar{j}\right| = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก** โดยใช้ขนาดของเวกเตอร์ เพราะว่า $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$

ดังนั้น $|\bar{u} + \bar{v}| < |\bar{u}| + |\bar{v}| = 2 + 2 = 4$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** สมมติ $\bar{u} = a\bar{i} + b\bar{j}$ และ $\bar{v} = c\bar{i} + d\bar{j}$

$|\bar{u}| = 2 \longrightarrow a^2 + b^2 = 4$ ....(1)

$|\bar{u}| = 2 \longrightarrow c^2 + d^2 = 4$ ....(2)

$\overrightarrow{OA} = \bar{i} + \bar{j}$ , $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = |\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos 60^\circ$

$$(a)(1) + (b)(1) = (2)(\sqrt{2})(\tfrac{1}{2})$$

$$a + b = \sqrt{2} \quad ....(3)$$

ในทำนองเดียวกัน $c + d = \sqrt{2}$ ....(4)

จาก (1) และ (3) จะได้

$$\begin{aligned} a^2 + (\sqrt{2} - a)^2 &= 4 \\ a^2 + 2 - 2\sqrt{2}\,a + a^2 &= 4 \\ 2a^2 - 2\sqrt{2}\,a - 2 &= 0 \\ a^2 - \sqrt{2}\,a - 1 &= 0 \\ a &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{2} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$ , $b = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $c = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ , $d = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$

**สรุป** $\bar{u} + \bar{v} = (a\bar{i} + b\bar{j}) + (c\bar{i} + d\bar{j}) = (a + c)\bar{i} + (b + d)\bar{j} = \sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$

**วิธีที่ 2** จากเงื่อนไขของโจทย์ $\bar{u} + \bar{v}$ ต้องเป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\bar{i} + \bar{j}$ และมีขนาดเท่ากับ 2.

เพราะฉะนั้น $\bar{u} + \bar{v} = 2\left(\frac{\bar{i} + \bar{j}}{|\bar{i} + \bar{j}|}\right) = \frac{2(\bar{i} + \bar{j})}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$

**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-(3x+2)-4}{2-(-x)} = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3x-6}{2+x}$

$= \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{-3(x+2)}{2+x} \quad = -3$

เพราะว่าหากลิมิตหาค่าได้ก็ต้องเท่ากับ –3 เพราะฉะนั้นถึงขั้นตอนนี้เราต้องตัดตัวเลือก 1. , 3. ทิ้งได้

ทำนองเดียวกัน $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{-(3x+2)-4}{2-(-x)} = -3$

สรุป $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{|3x+2|-4}{2-|x|} = -3$

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด** $f(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2}{15}(15x^2+12x+8)\sqrt{(x-1)^3}+c\right]$

$= \dfrac{2}{15}\left[\dfrac{d}{dx}((15x^2+12x+8)(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]$

$= \dfrac{2}{15}\left[(15x^2+12x+8)\dfrac{d}{dx}(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}\dfrac{d}{dx}(15x^2+12x+8)\right]$

$= \dfrac{2}{15}\left[(15x^2+12x+8)\dfrac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{3}{2}}(30x+12)\right]$

**ข้อแนะนำ** แทนที่เราจะจัดรูปไปหาตัวเลือก เรามาใช้วิธีแทนค่า x บางค่าแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น แทน $x = 2$ จะได้ว่า $f(2) = \dfrac{2}{15}\left[(60+24+8)(\dfrac{3}{2})(1)+(1)(60+12)\right] = \dfrac{2}{15}(138+72) = 28$

ตัวเลือก 1. $3x^2\sqrt{x-1} = 12$ ตัวเลือก 2. $5x^2\sqrt{x-1} = 20$

ตัวเลือก 3. $7x^2\sqrt{x-1} = 28$ ตัวเลือก 4. $9x^2\sqrt{x-1} = 36$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** สมมติข้อมูลเพียง 2 ตัวก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่นข้อมูลที่มาจาก $\hat{y} = 2x+3$

| x | y | $\hat{y}$ |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 7 | 7 |

ตัวเลือก 1. $\left(\sum_i x_i^2\right)\left(\sum_i y_i^2\right) = (5)(25+49) = (5)(74) = 370$

ตัวเลือก 2. $\sum_i (y_i - x_i)^2 = (4)^2 + (5)^2 = 16 + 25 = 41$

ตัวเลือก 3. $\sum_i (y_i - \bar{y})^2 = (5-6)^2 + (7-6)^2 = 2$

ตัวเลือก 4. $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 = (5-5)^2 + (7-7)^2 = 0$

ดังนั้นต้องตัดตัวเลือก 1. , 2. , 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** คำถามข้อนี้เป็นการวัดความจำ ดังนั้นหากนักเรียนจำคำตอบได้ว่า $\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2$ เป็นค่าน้อยสุดก็จะได้ 2 คะแนนสบายๆ ( จากหนังสือ ค.016 หน้า 67 )

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด** a = สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= \frac{\max - \min}{\max + \min} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3} = 0.6666$

b = สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{3-1}{3+1} = 0.5$

ดังนั้น b < a ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$$\overline{X} = \frac{(1)(14)+(2)(12)+(3)(8)+(4)(4)+(5)(2)}{40} = \frac{88}{40} = 2.2$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (M.D.) $= \frac{|1-2.2|(14)+|2-2.2|(12)+|3-2.2|(8)+|4-2.2|(4)+|5-2.2|(2)}{40}$

$$= \frac{(0.8)(14)+(0.2)(12)+(0.8)(8)+(1.8)(4)+(2.8)(2)}{40} = \frac{32.8}{40} = 0.82$$

c = สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{\text{M.D.}}{\overline{X}} = \frac{0.82}{2.2} = 0.3727$

เพราะฉะนั้น c < b < a ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ได้

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 f_i}{40} = \frac{(0.8)^2(14)+(0.2)^2(12)+(0.8)^2(8)+(1.8)^2(4)+(2.8)^2(2)}{40} = \frac{43.2}{40} = 1.08$$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}}$ เพราะฉะนั้น $d = \frac{\sqrt{1.08}}{2.2} = \frac{1.0392}{2.2} = 0.4723$

ดังนั้น c < d < b < a สรุปไม่มีตัวเลือกใดถูกต้อง

**9. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากโจทย์ต้องได้ว่า p(1) = 2 , p(2) = 1 สมมติเศษเหลือ คือ x − 3

เพราะฉะนั้น $\frac{p(x)}{x^2 - 3x + 2} = q(x) + \frac{(x-3)}{x^2 - 3x + 2}$

$$p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (x - 3)$$

ทำให้ $p(1) = q(1)(0) + (1 - 3) = -2$

ขัดแย้งกับโจทย์ที่กำหนดว่า $p(1) = 2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่า $\dfrac{p(x)}{x^2 - 3x + 2} = q(x) + \dfrac{(-x+3)}{x^2 - 3x + 2}$

$$p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (-x + 3)$$

จะเห็นได้ว่า $p(1) = 2$ และ $p(2) = 1$ ดังนั้นเศษเหลือ คือ $-x + 3$ เลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง** สมมติเศษเหลือ คือ $ax + b$ เพราะว่า $\dfrac{p(x)}{x^2 - 3x + 2} = q(x) + \dfrac{ax + b}{x^2 - 3x + 2}$

เพราะฉะนั้น $p(x) = q(x)(x^2 - 3x + 2) + (ax + b)$

เพราะว่า $x - 1$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 2 เพราะฉะนั้น $p(1) = 2$ ดังนั้น $2 = p(1) = q(x)(0) + (a + b)$

เพราะฉะนั้น $a + b = 2$ ....(1)

เพราะว่า $x - 2$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น $p(2) = 1$ ดังนั้น $1 = p(2) = q(1)(0) + 2a + b$

เพราะฉะนั้น $2a + b = 1$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a = -1$ และ $b = 3$ สรุปเศษเหลือ คือ $-x + 3$

**10. ตอบ 1.**

**แนวคิด** (1) สมมติ $\big((p \leftrightarrow \sim q) \wedge (r \vee (p \wedge q))\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \leftrightarrow \sim q \equiv T$, $r \vee (p \wedge q) \equiv T$, $p \rightarrow r \equiv F$

ดังนั้น $p \equiv T$, $r \equiv F$ เพราะว่า $r \vee (p \wedge q) \equiv T$ เพราะฉะนั้น $p \wedge q \equiv T$

ดังนั้น $p \equiv T$ และ $q \equiv T$ ขัดแย้งกับ $p \leftrightarrow \sim q \equiv T$

ดังนั้น $\big((p \leftrightarrow \sim q) \wedge (r \vee (p \wedge q))\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$ เป็นจริงเสมอ

สรุป (1) สมเหตุสมผล

(2) สมมติ $\big((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))\big) \rightarrow r$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \wedge q \equiv T$, $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv T$, $r \equiv F$ เพราะฉะนั้น $p \equiv T$, $q \equiv T$

เกิดข้อขัดแย้งกับ $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv T \rightarrow (T \rightarrow F) \equiv T \rightarrow F \equiv F$

ดังนั้น $\big((p \wedge q) \wedge (p \rightarrow (q \rightarrow r))\big) \rightarrow r$ เป็นจริงเสมอ สรุป (2) สมเหตุสมผล

**11.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** ให้ $S = \frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{4\cdot 5}{3^4} + \ldots = \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{12}{27} + K$

เมื่อ K คือผลบวกส่วนที่เหลือ , ดังนั้น $K > 0$

เพราะฉะนั้น $S > \frac{2}{3} + \frac{6}{9} + \frac{12}{27} = \frac{18+18+12}{27} \ \frac{48}{27} > 1.77$

แต่ $\frac{3}{4} < 1.77$ , $\frac{5}{4} < 1.77$ , $\frac{7}{4} < 1.77$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** จริงๆ แล้วเราจะบวกทีละตัว แล้วตัดตัวเลือกทีละตัวก็ได้

เช่น $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} > \frac{3}{4} \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} = \frac{4}{3} + \frac{12}{27} = \frac{4}{3} + \frac{4}{9} = \frac{16}{9} = 1.777 > \frac{5}{4}$ และมากกว่า $\frac{7}{4}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

**วิธีจริง** จาก $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) = (2\cdot 1) + (3\cdot 2)x + (4\cdot 3)x^2 + (5\cdot 4)x^3 + \ldots$$

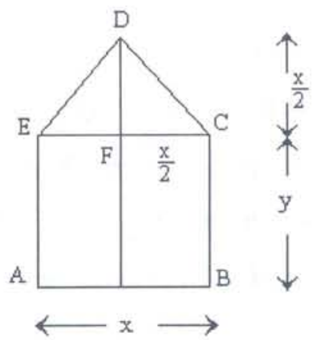
$$(1\cdot 2) + (2\cdot 3)x + (3\cdot 4)x^2 + (5\cdot 4)x^3 + \ldots = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\frac{(1\cdot 2)x + (2\cdot 3)x^2 + (3\cdot 4)x^3 + (5\cdot 4)x^4 + \ldots}{x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

สรุป $(1\cdot 2)x + (2\cdot 3)x^2 + (3\cdot 4)x^3 + (5\cdot 4)x^4 + \ldots = \frac{2x}{(1-x)^3}$

แทนค่า $x = \frac{1}{3}$ จะได้ $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{5\cdot 4}{3^4} + \ldots = \frac{2(\frac{1}{3})}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{8}{27})} = \frac{(2)(27)}{(3)(8)} = \frac{9}{4}$

**12.ตอบ 1.**




**แนวคิด** $DF = \frac{x}{2}$ , $CF = \frac{x}{2}$ จะได้ $DC^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$

$$DC = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

ความยาวเส้นรอบรูป ABCDE = AB + BC + CD + DE + EA

เพราะฉะนั้น $12 = x + y + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + y = (1+\sqrt{2})x + 2y$

ดังนั้น $y = \frac{12-(1+\sqrt{2})x}{2}$

พื้นที่หน้าต่าง $= $ พ.ท. ABCD + พ.ท. CDE $= xy + \frac{1}{2}(EC)(DF)$

$= xy + \frac{1}{2}(x)\frac{x}{2}$ $\qquad = x\left(\frac{12-(1+\sqrt{2})x}{2}\right) + \frac{x^2}{4}$

$= x\,(6 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{\sqrt{2}}x) + \frac{x^2}{4}$ $\qquad = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{4}$

$= 6x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

ให้ $f(x) = 6x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = 6 - \frac{x}{2} - \frac{2x}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 6 - \frac{x}{2} - \frac{2x}{\sqrt{2}} = 0$

$\leftrightarrow \quad 12 - x - 2\sqrt{2}\,x = 0$

$\leftrightarrow \quad x + 2\sqrt{2}\,x = 12$

$\leftrightarrow \quad x(1 + 2\sqrt{2}) = 12$

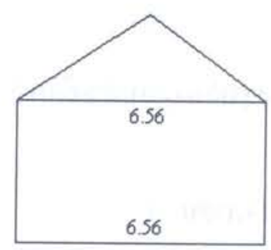
$x = \frac{12}{1+2\sqrt{2}} = \frac{12(1-2\sqrt{2})}{(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2})} = \frac{12(1-2\sqrt{2})}{1-8} = \frac{12}{7}(2\sqrt{2}-1)$

สรุปพื้นที่มากสุดเมื่อ $x = \frac{12}{7}(2\sqrt{2}-1)$

**การตัดตัวเลือก 2.**

เพราะว่าค่าประมาณ $\frac{12}{7}(2\sqrt{2}+1) = (1.71)(2.83 + 1) = 6.56$

เส้นรอบรูปจะเกิน 12 ฟุตแน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง




**13. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $I_1$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{oi}} \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)(2)+(4)(2)+(3)(2)+(4)(2)}{(3)(2)+(3)(2)+(2)(2)+(2)(2)}\right) \times 100 = \left(\frac{30}{20}\right) \times 100 = 133.33$$

$I_2$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{ni}} \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)(4)+(4)(4)+(3)(4)+(4)(4)}{(3)(4)+(3)(4)+(2)(4)+(2)(4)}\right) \times 100 = \left(\frac{50}{40}\right) \times 100 = 125$$

**หมายเหตุ** ได้แค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

$I_3$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐานและปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}\left(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2}\right)}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\left(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2}\right)} \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)(\frac{2+4}{2})+(4)(\frac{2+4}{2})+(3)(\frac{2+4}{2})+(4)(\frac{2+4}{2})}{(3)(\frac{2+4}{2})+(3)(\frac{2+4}{2})+(2)(\frac{2+4}{2})+(2)(\frac{2+4}{2})}\right) \times 100$$

$$= \left(\frac{(4)(3)+(4)(3)+(3)(3)+(4)(3)}{(3)(3)+(3)(3)+(2)(3)+(2)(3)}\right) \times 100 = \left(\frac{45}{30}\right) \times 100 = 150$$

$I_4$ คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}} \times 100 = \frac{4+4+3+4}{3+3+2+2} \times 100 = \frac{15}{10} \times 100 = 150$$

สรุปต้องตอบตัวเลือก 2.

**14.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นแทนค่า z , a , b บางค่าก็จำแนกตัวเลือกได้แล้วเช่น เลือก $z = i , a = 4 , b = 1$ จะได้ $|z| = 1$

ตัวเลือก 1. $|az + b| = |4i + 1| = \sqrt{17}$ , $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + i1| = \sqrt{17}$

ตัวเลือก 2. $|az + b| = \sqrt{17}$ , $|a| + |b| = 4 + 1 = 5 \neq \sqrt{17}$ $\longrightarrow$ตัดตัวเลือก 2.

ตัวเลือก 3. $|a\bar{z} + b| = |4(-i) + 1| = \sqrt{17}$ , $|\bar{a} + \bar{b}z| = |4 + i| = \sqrt{17}$

ตัวเลือก 4. $|a\bar{z} + b| = |-4i + 1| = \sqrt{17} \neq |a| + |b| = 5$ $\longrightarrow$ตัดตัวเลือก 4.

เลือก $z = i , a = 4 , b = i$

ตัวเลือก 1. $|az+b| = |4i+i| = 5$ , $|\bar{a}+\bar{b}z| = |4+(-i)(i)| = |4+1| = 5$

ตัวเลือก 3. $|a\bar{z}+b| = |4(-i)+i| = |-3i| = 3$

$|\bar{a}+\bar{b}z| = |4+(-i)(i)| = |5| = 5 \neq 3 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** **การแสดงว่า** $|az+b| = |\bar{a}+\bar{b}z|$

ให้ $a = p+qi$ , $b = r+si$ , $z = x+yi$

$$\begin{aligned}|az+b|^2 &= |(p+qi)(x+yi)+(r+si)|^2 \\ &= |(px-qy+r)+(py+qx+s)i|^2 \\ &= (px-qy+r)^2+(py+qx+s)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\bar{a}+\bar{b}z|^2 &= |(p-qi)+(r-si)(x+yi)|^2 \\ &= |(p+rx+sy)+(-q+ry-sx)i|^2 \\ &= (p+rx+sy)^2+(-q+ry-sx)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|az+b|^2-|\bar{a}+\bar{b}z|^2 &= [(px-qy+r)^2+(py+qx+s)^2]-[(p+rx+sy)^2+(-q+ry-sx)^2] \\ &= p^2x^2+q^2y^2+r^2+p^2y^2+q^2x^2+s^2-p^2-r^2x^2-y^2s^2-q^2-r^2y^2-s^2x^2 \\ &= -(x^2+y^2-1)(-p^2+r^2-q^2+s^2)\end{aligned}$$

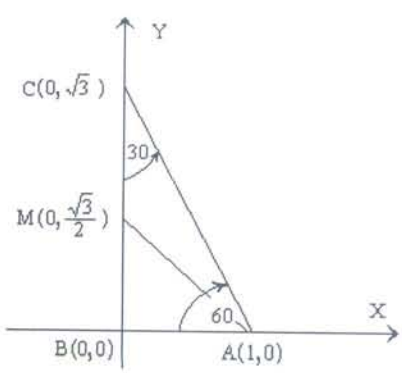
เพราะว่า $|z| = 1$ , $|z|^2 = 1$ , $x^2+y^2 = 1$

เพราะฉะนั้น $|az+b|^2-|\bar{a}+\bar{b}z|^2 = 0 \longrightarrow |az+b|^2 = |\bar{a}+\bar{b}z|^2 \longrightarrow |az+b| = |\bar{a}+\bar{b}z|$

**15. ตอบ 4.**

**แนวคิด** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของสามเหลี่ยมและมุม ดังนั้นใช้รูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ก็จะจำแนกตัวเลือกได้

$AM = \sqrt{1+\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ , $A = 60°$ , $B = 90°$ , $C = 30°$




จากรูป $\cos B\hat{A}M = \frac{AB}{AM} = \frac{1}{(\frac{\sqrt{7}}{2})}$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}} = 0.7559$$

1. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1+\sin^2 A - 2\sin A\cos C}} = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2})}{\sqrt{1+\frac{3}{4}-2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}}$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{7}{4}-\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3} \neq \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

2. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1+\sin^2 A + 2\sin A\cos C}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1+\frac{3}{4}+\frac{3}{2}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\frac{13}{4}}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}} \neq \dfrac{2}{7}$

3. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C - 2\sin C\cos A}} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}-2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}} = 2 \neq \dfrac{2}{7}$

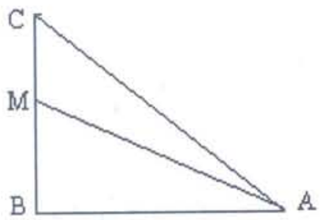
4. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C + 2\sin C\cos A}} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}+2(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{7}{4}}} = \dfrac{2}{7}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**การพิสูจน์ว่า** $\cos B\hat{A}M = \dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C + 2\sin C\cos A}}$

$$\cos(B\hat{A}M) = \frac{AB}{AM} = \frac{AB}{\sqrt{AB^2+BM^2}}$$

$$= \frac{AB}{\sqrt{AB^2+(\frac{BC}{2})^2}}$$




$$= \frac{2AB}{\sqrt{4AB^2+BC^2}}$$

$$= \frac{2AB}{\sqrt{3AB^2+AB^2+BC^2}}$$

$$= \frac{2AB}{\sqrt{3AB^2+AC^2}}$$

$$= \frac{(\frac{2AB}{AC})}{\sqrt{\frac{3AB^2}{AC^2}+1}}$$

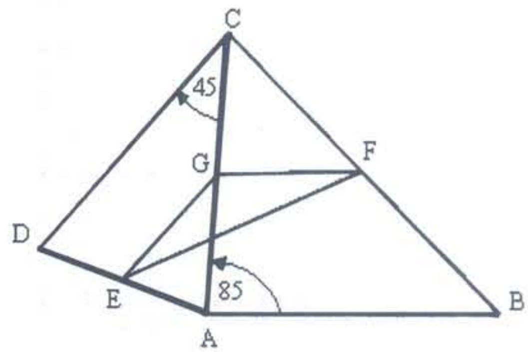
$$= \frac{\frac{AB}{AC}+\frac{AB}{AC}}{\sqrt{1+\frac{AB^2}{AC^2}+2\frac{AB}{AC}\frac{AB}{AC}}}$$

$$= \frac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1+\sin^2 C + 2\sin C\cos A}}$$

**16.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของความยาวด้านและมุม ดังนั้นวาดรูปก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้

1. ลาก AB ยาว 2 นิ้ว
2. ลาก AC ยาว 2 นิ้ว และ $B\hat{A}C = 85^\circ$
3. ลาก CD ยาว 2 นิ้ว และ $A\hat{C}D = 45^\circ$
4. แบ่งครึ่งด้าน AD , BC และ AC ที่จุด E , F , G ตามลำดับ
5. ลากเส้น EF และ FG
6. วัดมุม $E\hat{F}G$ ได้ $20^\circ$




สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

**วิธีจริง** G , F เป็นจุดกึ่งกลางของ AC และ BC เพราะฉะนั้น AB ขนานกับ FG และ $FG = \frac{1}{2}AB$ $A\hat{G}F$ เป็นมุมในด้านเดียวกันของเส้น AG ที่ตัดกับเส้นขนาน AB และ GF

เพราะฉะนั้น $A\hat{G}F = 95^\circ$

ในทำนองเดียวกัน $A\hat{G}E = 45^\circ$ และ $EG = \frac{1}{2}CD$

ดังนั้น $E\hat{G}F = 45^\circ + 95^\circ = 140$

เพราะว่า $GF = \frac{1}{2}AB$ และ $EG = \frac{1}{2}CD$ และ $AB = CD$

เพราะฉะนั้น EG = FG ดังนั้น EGF เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

สรุป $E\hat{F}G = \frac{180 - E\hat{G}F}{2} = \frac{180-140}{2} = 20^\circ$

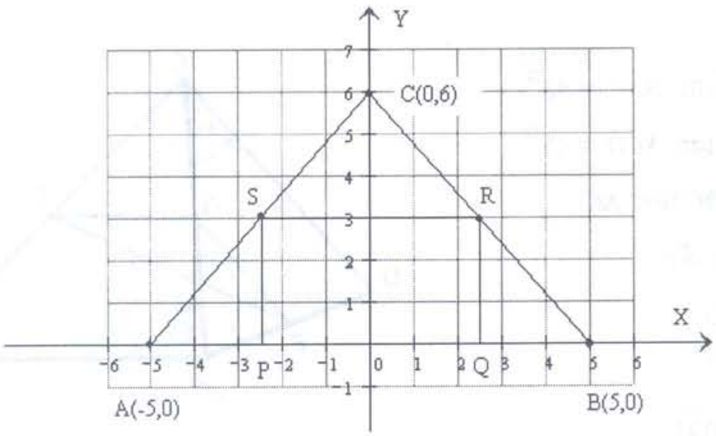
**17.ตอบ 1.**

**แนวคิด** วิธีที่ดีที่สุดคือท่องจำเลยว่าสี่เหลี่ยมที่บรรจุในสามเหลี่ยมมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับครึ่งหนึ่งของพื้นที่สามเหลี่ยม

จากโจทย์พื้นที่สามเหลี่ยมมีพื้นที่ = $\frac{1}{2}(10)(6) = 15$

เพราะฉะนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมเท่ากับ 15 ตารางหน่วย

**การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นวาดรูปและให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว




ให้ R(x , y) เป็นจุดมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้าและ R อยู่บนเส้นตรง BC

พิกัด Q คือ (x , 0) , พิกัด P คือ (– x , 0) , พิกัด S คือ (– x , y)

พื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS = (2x) y = 2xy

สมการเส้นตรง BC คือ $\dfrac{y-0}{x-5} = \dfrac{6-0}{0-5}$

$$-5y = 6x - 30$$

$$y = -\frac{6}{5}x + 6$$

พื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS $= 2x(-\frac{6}{5}x + 6) = -\frac{12}{5}x^2 + 12x$

ให้ $f(x) = -\frac{12}{5}x^2 + 12x$

$$= -\frac{12}{5}(x^2 - 5x)$$

$$= -\frac{12}{5}(x^2 - 5x + (2.5)^2) + \frac{12}{5}(2.5)^2$$

$$= -\frac{12}{5}(x - 2.5)^2 + \frac{12}{5}(2.5)^2$$

$$\leq \frac{12}{5}(2.5)^2$$

ค่ามากสุดของ f(x) คือ $\frac{12}{5}(2.5)^2 = 15$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**18. ตอบ 3.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของมิติ ดังนั้นเลือก $n = 2$ สามารถจำแนกตัวเลือกได้ เลือก $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A \neq B$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = B^3$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะเห็นได้ว่า $A \neq B$ , $A^3 = B^3$ , $A^2B = B^2A$

แต่ $A^3 + B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

$A^3 - B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เลือกกรณี $AB = BA$ เพื่อสะดวกในการหาคำตอบ

เพราะว่า $A \neq B$ , $A^3 = B^3$ และ $A^2B = B^2A$ ดังนั้นเราพิจารณา

$$\begin{aligned}
(A^2 - B^2)^3 &= A^6 - 3(A^2)^2 B^2 + 3(A^2)(B^2)^2 - B^6 \\
&= A^6 - 3A^4B^2 + 3A^2B^4 - B^6 \\
&= (A^3)^2 - 3(A^2B)^2 + 3A^2B^4 - B^6 && (\because A^2B = B^2A) \\
&= (B^3)^2 - 3(B^2A)^2 + 3A^2B^4 - B^6 && (\because A^3 = B^3) \\
&= B^6 - 3B^4A^2 + 3A^2B^4 - B^6 \\
&= -3B^2A^2 + 3B^4A^2 && (\because AB = BA) \\
&= \underline{0}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
\det((A^2 - B^2)^3) &= 0 \\
(\det(A^2 - B^2))^3 &= 0 \\
\det(A^2 - B^2) &= 0
\end{aligned}$$

สรุป $A^2 - B^2$ ต้องเป็นเมทริกซ์เอกฐาน

**19.ตอบ 4.**

**แนวคิด** คำถามแบบนี้สามารถใช้แนวคิดของคำว่าโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของมุม A และ B ดังนั้นเมื่อเราเลือก A , B ที่สอดคล้องเงื่อนไข 5 tan A = tan (A + B) ก็จะตัดตัวเลือกได้

จากสูตรที่โจทย์กำหนด $5\tan A = \tan(A+B)$

$$5\tan A = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B}$$

$$5\tan A(1-\tan A\tan B) = \tan A + \tan B$$

$$5\tan A - 5\tan^2 A\tan B = \tan A + \tan B$$

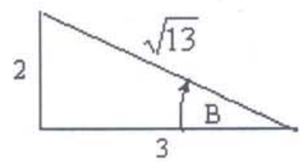
**การตัดตัวเลือก** เลือก $\tan A = 1$ จะได้ $5 - 5\tan B = 1 + \tan B$

$$6\tan B = 4$$

$$\tan B = \frac{2}{3}$$

ขณะนี้จะเห็นว่า $\tan A = 1$ และ $\tan B = \frac{2}{3}$ ทำให้ $5\tan A = \tan(A+B)$ เป็นจริง

$\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ , $\cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}$




$$\tan A = 1$$

$$A = \frac{\pi}{4}$$

$$2A = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin(2A+B) = \sin(\frac{\pi}{2}+B) = \cos B = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

สรุป $\frac{\sin(2A+B)}{\sin B} = \frac{(\frac{3}{\sqrt{13}})}{(\frac{2}{\sqrt{13}})} = \frac{3}{2}$

ดังนั้นเรามีเหตุผลเพียงพอที่จะตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากสมการ $5\tan A - 5\tan^2 A\tan B = \tan A + \tan B$

$$4\tan A - 5\tan^2 A\tan B - \tan B = 0$$

$$4\frac{\sin A}{\cos A} - 5\frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\frac{\sin B}{\cos B} - \frac{\sin B}{\cos B} = 0$$

$$4\sin A\cos A\cos B - 5\sin^2 A\sin B - \sin B\cos^2 A = 0$$

เพราะว่า $\sin B \neq 0$

เพราะฉะนั้น
$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5\sin^2 A - \cos^2 A = 0$$
$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5(1-\cos^2 A) - \cos^2 A = 0$$
$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 4\cos^2 A = 0$$
$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 4\left(\frac{1+\cos 2A}{2}\right) = 0$$
$$4\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} - 5 + 2 + 2\cos 2A = 0$$
$$2\sin A\cos A\frac{\cos B}{\sin B} + \cos 2A = \frac{3}{2}$$
$$\sin 2A\frac{\cos B}{\sin B} + \cos 2A = \frac{3}{2}$$
$$\frac{\sin 2A\cos B + \sin B\cos 2A}{\sin B} = \frac{3}{2}$$
$$\frac{\sin(2A+B)}{\sin B} = \frac{3}{2}$$

**20. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของมุม $\varnothing$ , $\theta$ , a , b และ c ดังนั้นเราเลือก $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$$
$$a(1) + b(0) + c = 0$$
$$a = -c$$
$$a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0$$
$$a(0) + b(1) + c = 0$$
$$b = -c$$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \dfrac{2c^2 - c^2 - c^2}{c^2 + c^2} = 0$

สรุปค่าของโจทย์ $\dfrac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = 0$ เมื่อ $\varnothing = 0$ และ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ตัวเลือก 1. $\sin(\varnothing - \theta) = \sin(0 - \frac{\pi}{2}) = -1$

ตัวเลือก 2. $\cos(\varnothing - \theta) = \cos(0 - \frac{\pi}{2}) = 0$

ตัวเลือก 3. $\tan(\varnothing - \theta) = \tan(0 - \frac{\pi}{2}) = \infty$

ตัวเลือก 4. $\cot(\varnothing - \theta) = \cot(0 - \frac{\pi}{2}) = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $\varnothing = \frac{\pi}{4}$ , $\theta = -\frac{\pi}{4}$

$$a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$$

$$a\cos(-\frac{\pi}{4}) + b\sin(-\frac{\pi}{4}) + c = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} + c = 0$$

$$a - b = -c\sqrt{2} \qquad \text{....(1)}$$

$$a\cos\varnothing + b\sin\varnothing + c = 0$$

$$a\cos\frac{\pi}{4} + b\sin\frac{\pi}{4} + c = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + c = 0$$

$$a + b = -c\sqrt{2} \qquad \text{....(2)}$$

(1) + (2) ; $2a = -c\,2\sqrt{2}$

$$a = -c\sqrt{2}$$

ดังนั้น $b = 0$

ค่าของโจทย์ $\frac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = \frac{2c^2 - 2c^2 - 0}{2c^2 + 0} = 0$

ตัวเลือก 2. $\cos(\varnothing - \theta) = \cos(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) = 0$

ตัวเลือก 3. $\tan(\varnothing - \theta) = \tan(\frac{\pi}{4} - (-\frac{\pi}{4})) = \infty$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 4.

1. กำหนดให้ $A - B = \{1, 2, 4\}$ , $B - A = \{3, 5\}$

   และ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

   1. $\{0, 1, 4, 6, 7\}$　　2. $\{0, 1, 3, 5, 7\}$
   3. $\{1, 2, 3, 4, 7\}$　　4. $\{1, 2, 4, 5, 6\}$

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า b หาร a ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 24

   โดยที่ $24 < b$ และ 24 หาร b ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 12

   แล้ว ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

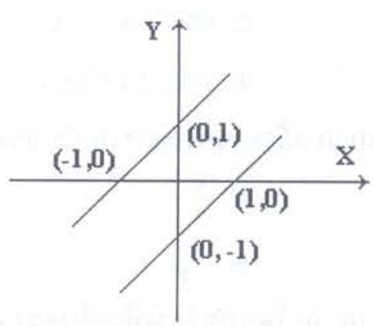
   1. 1　　2. 2
   3. 6　　4. 12

3. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ $R^+$ แทนเซตของจำนวนจริงบวก

   ให้ $r = \{(x, y) \mid yx^2 = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้คือเรนจ์ของ r

   1. $R^+$　　2. $R^+ \cup \{0\}$
   3. $R - \{0\}$　　4. $R$

4. กราฟที่กำหนดให้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้




   1. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x + y| = 1\}$　　2. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| + |y| = 1\}$
   3. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$　　4. $\{(x, y) \in R \times R \mid |x| - |y| = 1\}$

5. กำหนดให้ค่าของ $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{3}{16}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

    1. $\frac{3}{4}$
    2. $-\frac{3}{4}$
    3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
    4. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

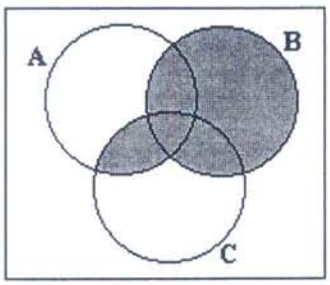
6. ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับเซตของจุด (x , y) ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย

    1. $\{(x, y) \mid x^2 + 16y^2 = 16\}$
    2. $\{(x, y) \mid x^2 + 16y^2 = 64\}$
    3. $\{(x, y) \mid x^2 - 16y^2 = 16\}$
    4. $\{(x, y) \mid x^2 - 16y^2 = 64\}$

7. ข้อใดต่อไปนี้คือเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

    1. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
    2. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
    3. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$
    4. $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$

8. ส่วนที่แรเงาคือเซตในข้อใดต่อไปนี้




    1. $(B \cup A) \cap C$
    2. $(B \cap A) \cup C$
    3. $B \cap (A \cup C)$
    4. $B \cup (A \cap C)$

9. ถ้า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta$ มีค่าเป็นบวก แล้วค่าของ $\sec\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

    1. $\frac{3}{5}$
    2. $\frac{5}{3}$
    3. $-\frac{3}{5}$
    4. $-\frac{5}{3}$

10. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0 , 0) ไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรง x = 3 คือข้อใดต่อไปนี้

    1. $y^2 = 4x$
    2. $y^2 = -4x$
    3. $y^2 = 12x$
    4. $y^2 = -12x$

11. ค่าของ $\left[\dfrac{3^{4n+3}+3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 5
3. 7 4. 9

12. อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์ ในขณะที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 32 องศาฟาเรนไฮต์ สมมติว่าอุณหภูมิที่วัดในมาตรา องศาเซลเซียส(C) และองศาฟาเรนไฮต์(F) มีความสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F และ C คือข้อใดต่อไปนี้

1. $F = 32 + \frac{9}{5}C$ 2. $F = 32 + 9C$
3. $F = 32 - \frac{9}{5}C$ 4. $F = 32 - 9C$

13. กำหนด p , q , r และ s เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ **ไม่เป็น** สัจนิรันดร์

1. $[p\vee(q\wedge r)] \leftrightarrow [(p\vee q)\wedge(p\vee r)]$
2. $[p\vee(q\wedge r)] \vee \sim[p\vee(q\wedge r)]$
3. $[(p\vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p\wedge\sim q)]$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s\vee\sim r)\wedge\sim s] \leftrightarrow p$

14. เซตคำตอบของ $\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(2 , 3)$
3. $(-1 , 2) \cup (2 , 7)$ 4. $(\frac{5}{3} , 2) \cup (2 , 3)$

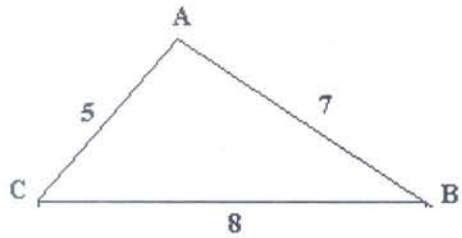
15. ถ้าความสัมพันธ์ $r = \{(x ,y) \in R\times R \mid y = 2 - \dfrac{4}{(x-1)^2-4}\}$ แล้วข้อใดเป็นเรนจ์ของ r

1. $(-\infty , 2) \cup [3 , \infty)$
2. $(-\infty , 2) \cup (3 , \infty)$
3. $(-\infty , 2] \cup [3 , \infty)$
4. $(-\infty , 2] \cup (3 , \infty)$

16. $\tan(\frac{11\pi}{12})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{-1}{1+\sqrt{3}}$ 2. $\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$
3. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 4. $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

17. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมดังรูป




ค่า $\sin^2\frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{28}$
2. $\frac{7}{28}$
3. $\frac{12}{28}$
4. $\frac{21}{28}$

18. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $2A^{-1}B^{t}$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

19. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่งทำให้ AB = C

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(B^{-1}) = 12$
2. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$
3. $\det(2B^{t}) = 24$
4. $\det(A^{2}B) = 48$

20. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ , $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $\bar{a}$ เท่ากับที่ทำกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} - 3\bar{j})$
2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} + 3\bar{j})$
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} + \bar{j})$
4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} - \bar{j})$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 4.

**1. ตอบ 1.**

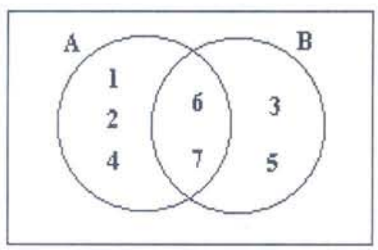
**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

**วิธีที่ 1.** จากโจทย์ $A - B = \{1, 2, 4\}$

$B - A = \{3, 5\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

เราเขียนแผนภาพเวนน์ได้เป็น




เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{6, 7\} \subset \{0, 1, 4, 6, 7\}$

**วิธีที่ 2.** เพราะว่า $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = [(A \cup B) - (A - B)] - (B - A)$

$= [\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 4\}] - \{3, 5\}$

$= \{3, 5, 6, 7\} - \{3, 5\}$

$= \{6, 7\} \subset \{0, 1, 4, 6, 7\}$

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด** b หาร a ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 24 $\longrightarrow a = b(1) + 24$ ...(1)

24 หาร b ได้ผลลัพธ์ 1 เหลือเศษ 12 $\longrightarrow b = 24(1) + 12$ ...(2)

**วิธีที่เร็วที่สุด** จากสมการ (2) จะเห็นว่า 12 หาร b ลงตัว

และจากสมการ (1) จะได้ว่า 12 หาร a ลงตัวด้วย ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $24 = 12(2)$ ...(3)

จาก (1) – (3) และขั้นตอนวิธีของยุคลิดจะได้ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 12

**3. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก

จากเงื่อนไข $yx^2 = 1$ แสดงว่า $y = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

จากเงื่อนไข $yx^2 = 1$ และ $x^2 > 0$ เพราะฉะนั้น $y = -1$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** $r = \{(x, y) \mid yx^2 = 1\} = \{(x, y) \mid y = \frac{1}{x^2}\}$

เพราะว่า $\frac{1}{x^2} > 0$ เพราะฉะนั้นเรนจ์ของ r คือ $R^+$

**4. ตอบ 3.**

**แนวคิด** คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก "**นำจุดบนกราฟไปแทนค่าในตัวเลือก**"

เพราะว่า (0 , 1) อยู่บนกราฟ แต่ $|0| - |1| = -1 \neq 1$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 4.

เพราะว่า $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ไม่อยู่บนกราฟ แต่ $|\frac{1}{2}| + |\frac{1}{2}| = 1$ และ $|\frac{1}{2} + \frac{1}{2}| = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

**วิธีจริง** สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0 , 1) และ (–1 , 0) คือ $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1 \rightarrow x - y = -1$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0 , –1) และ (1 , 0) คือ $\frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = \rightarrow x - y = 1$

สรุปสมการเส้นตรงทั้งสองเส้นคือ $|x - y| = 1$

**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta\cos\theta < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากโจทย์ $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{3}{16}$ เพราะว่า $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

เพราะฉะนั้น $\sin\theta\cos\theta < 0$ และ $\sin\theta\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ สรุป $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

**6. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่าโจทย์ถามสมการวงรี แต่ตัวเลือก 3. และ 4. เป็นไฮเพอร์โบลา

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จุด $(x , y)$ ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีแกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย จะได้ $a = 4$ , $b = 1$

มีสมการเป็น $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{1}=1$ หรือ $\frac{y^2}{4^2}+\frac{x^2}{1}=1$

$x^2 + 16y^2 = 16$ หรือ $y^2 + 16x^2 = 16$

สรุปต้องเลือกตัวเลือก 1.

**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** คำถามที่ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือก "**เซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใด**" แทนค่า $x = -2$ $\frac{(-2-1)(-4-1)}{4-1} = 5 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x = -2$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ $\frac{(\frac{1}{2}-1)(1-1)}{\frac{1}{4}-1} = 0 \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{2}$ ได้ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

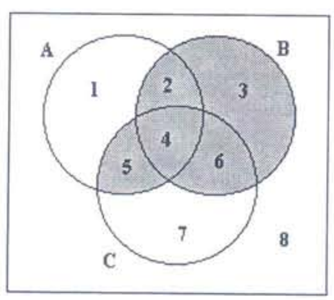
$\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(x+1)} \geq 0$ และ $x \neq 1$

$\frac{(2x-1)}{(x+1)} \geq 0$ และ $x \neq 1$

สรุป เซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$ คือ $(-\infty , -1) \cup [\frac{1}{2} , 1) \cup (1 , \infty)$

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด** เติมสมาชิกในแผนภาพเวนน์



เพราะฉะนั้นส่วนแรเงา = {2 , 3 , 4 , 5 , 6}

1. $(B \cup A) \cap C = \{4, 5, 6\}$ → ตัดตัวเลือก 1.

2. $(B \cap A) \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$ → ตัดตัวเลือก 2.

3. $B \cap (A \cup C) = \{2, 4, 6\}$ → ตัดตัวเลือก 3.

4. $B \cup (A \cap C) = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ → เลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

**9. ตอบ 4.**

**แนวคิด** มาฝึกหัดการตัดตัวเลือกกันบ้าง

เพราะว่า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta > 0$ เพราะฉะนั้น $\theta$ อยู่ควอดรันท์ 3

ดังนั้น $\sec\theta < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2.

เพราะว่า $|\sec\theta| \geq 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** เพราะว่า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta > 0$

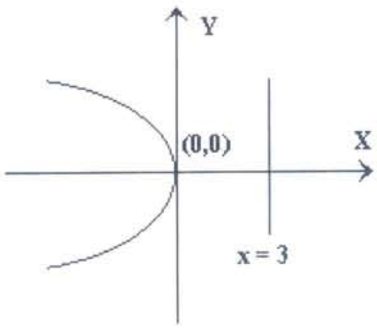
เพราะฉะนั้น $\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$

สรุป $\sec\theta = -\frac{5}{3}$

**10. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ลักษณะของพาราโบลาแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. $y^2 = 4x$ พาราโบลาเปิดด้านขวา
2. $y^2 = -4x$ พาราโบลาเปิดด้านซ้าย
3. $y^2 = 12x$ พาราโบลาหงาย
4. $y^2 = -12x$ พาราโบลาคว่ำ




พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0 , 0)

ไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรง $x = 3$

จากรูปเป็นพาราโบลาเปิดด้านซ้าย

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. เพราะฉะนั้น $c = -3$

และพาราโบลามีสมการเป็น $y^2 = 4cx = -12x$

**11. ตอบ 4.**

**แนวคิด** ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกอีกแล้วโดยการแทนค่า n = 1 จะได้

$$\left[\frac{3^{4n+3}+3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{3^7+3^6}{(3^4)(4)}\right]^{\frac{1}{1}} = \frac{3^3+3^2}{(4)} = \frac{27+9}{4} = 9$$

**วิธีจริง** $$\left[\frac{3^{4n+3}+3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{27(3^{4n})+9(3^{4n})}{9(3^{2n})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\frac{36(3^{4n})}{9(3^{2n})(4)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[3^{2n}\right]^{\frac{1}{n}} = 9$$

**12. ตอบ 1.**

**แนวคิด** ข้อสอบแบบนี้ตรงกับหลักสูตรตัดตัวเลือก "**นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์**"
จากโจทย์อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์
นั่นคือ ถ้า C = 100 แล้ว F = 212 แทนค่า C = 100 แต่ละตัวเลือกจะได้ค่า F

1. 212 2. 932 3. – 148 4. –868

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4.

**วิธีจริง** สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (0 , 32) และ (100 , 212) คือ

$$\frac{F-32}{C-0} = \frac{212-32}{100-0}$$

$$\frac{F-32}{C} = \frac{212-32}{100-0} = \frac{180}{100} = \frac{9}{5}$$

$$F = 32 + \frac{9}{5}C$$

**13. ตอบ 4.**

**แนวคิด** สำหรับคนที่จำสูตรสัจนิรันดร์ได้จะรู้ทันที่ว่า ตัวเลือก 1.,2. และ 3. เป็นสัจนิรันดร์
การตีตารางค่าความจริงได้คำตอบแน่นอนแต่เป็นวิธีที่ช้าที่สุด
การพิสูจน์ว่า ตัวเลือก 1.,2. และ 3.เป็นสัจนิรันดร์ในห้องสอบก็ช้าเหมือนกัน
แทนค่าความจริงแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น p = T , q = T , r = T และ s = T จะได้ว่า

1. $[p\vee(q\wedge r)]\leftrightarrow[(p\vee q)\wedge(p\vee r)] = T$
2. $[p\vee(q\wedge r)] \vee \sim[p\vee(q\wedge r)] = T$
3. $[(p\vee q) \rightarrow r]\leftrightarrow[\sim r \rightarrow (\sim p\wedge\sim q)\ ] = T$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s\vee\sim r)\wedge\sim s]\leftrightarrow p = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้

**14. ตอบ 4.**

**แนวคิด** คำถามแบบนี้ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกที่สุด

แทนค่า $x = 1.9$ จะได้ $\left|\frac{1.9-1}{1.9-2}\right| = 9 > 2$

เพราะฉะนั้น $x = 1.9$ ได้ แต่ตัวเลือก 1. และ 2. ไม่มี 1.9 เป็นสมาชิก

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 3$ จะได้ $\left|\frac{3-1}{3-2}\right| = 2 > 2$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 3.มี 3 เป็นสมาชิก

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{x-1}{x-2} < -2$ | หรือ | $\frac{x-1}{x-2} > 2$ |
| $\frac{x-1}{x-2} + 2 < 0$ | หรือ | $\frac{x-1}{x-2} - 2 > 0$ |
| $\frac{x-1+2x-4}{x-2} < 0$ | หรือ | $\frac{x-1-2x+4}{x-2} > 0$ |
| $\frac{3x-5}{x-2} < 0$ | หรือ | $\frac{-x+3}{x-2} > 0$ |
| $\frac{3x-5}{x-2} < 0$ | หรือ | $\frac{x-3}{x-2} < 0$ |
| $\frac{5}{3} < x < 2$ | หรือ | $2 < x < 3$ |

สรุปเซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซต $(\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3)$

**15. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ตรงตามหลักสูตรการตัดตัวเลือกอีกแล้ว

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $y = 2 - \frac{4}{(1-1)^2 - 4} = 3$ เพราะฉะนั้น 3 ต้องอยู่ในเรนจ์ของ r

แต่ตัวเลือก 2. และ 4. ไม่มี 3 เป็นสมาชิก ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

ถ้า $y = 2$ แล้ว จากสูตร $y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$ จะได้ว่า $2 = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$

และ $0 = \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $y = 2$ ไม่ได้แน่นอน

เพราะฉะนั้น 2 ต้องไม่อยู่ในเรนจ์ของ r แต่ตัวเลือก 3. และ 4. มี 2 เป็นสมาชิก

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

**วิธีจริง** $y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}$

$$\frac{4}{(x-1)^2-4} = 2-y$$

$$(x-1)^2 - 4 = \frac{4}{2-y}$$

$$(x-1)^2 = \frac{4}{2-y} + 4$$

เพราะฉะนั้น $\frac{4}{2-y} + 4 \geq 0$

$$\frac{4+4(2-y)}{2-y} \geq 0$$

$$\frac{12-4y}{2-y} \geq 0$$

$$\frac{y-3}{y-2} \geq 0$$

$2 < y$ หรือ $y \geq 3$

สรุปเรนจ์ของ r คือ $(-\infty, 2) \cup [3, \infty)$

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $\tan(\frac{11\pi}{12}) = \tan(165^\circ) = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ > -\tan 45^\circ = -1$

เพราะว่า $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < -1$ และ $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < -1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\tan(\frac{11\pi}{12}) = \tan(165^\circ) = \tan(180^\circ - 15^\circ) = -\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$

$$= -\frac{\tan(45^\circ) - \tan(30^\circ)}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$\tan(\frac{11\pi}{12}) = -\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

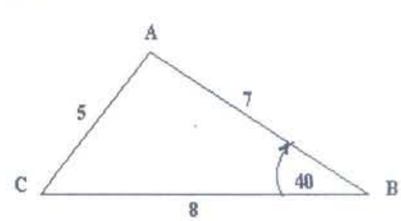
**17. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

วัดมุม B ได้ 40 องศา เพราะฉะนั้น $\frac{B}{2} = 20$

เพราะว่า $0 < \sin 20 < \sin 30$

$$0 < \sin 20 < \frac{1}{2}$$



$$0 < \sin^2\frac{B}{2} < \frac{1}{4} = \frac{7}{28}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{8^2+7^2-5^2}{2(8)(7)} = \frac{64+49-25}{112} = \frac{88}{112} = \frac{11}{14}$

$$\sin^2\frac{B}{2} = \frac{1-\cos B}{2} = \frac{1-\frac{11}{14}}{2} = \frac{3}{28}$$

**18. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เราสามารถใช้ค่า det ช่วยในการตัดตัวเลือกได้สำหรับข้อนี้

เพราะว่า $\det(2A^{-1}B^t) = 2^2\det(A^{-1})\det(B^t) = \frac{4\det(B)}{\det(A)} = \frac{4(-3)}{(-2)} = 6$

และ det ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}\right) = 6$
2. $\det\left(\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}\right) = 6$
3. $\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\right) = 18$
4. $\det\left(\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}\right) = -18$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2A^{-1}B^t = 2(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix})(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$$

**19. ตอบ 4.**

**แนวคิด** $\det(A) = 2$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{2}$$

$$\det(C) = 240 - 216 = 24$$

เพราะว่า $AB = C$

$$\det(A)\det(B) = \det(C)$$

$$2\det(B) = 24$$

$\det(B) = 12$

เพราะฉะนั้น $\det(B^{-1}) = \frac{1}{12}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิด

เพราะว่า $\det(B^{-1}A^{-1}) = \det(B^{-1})\det(A^{-1}) = (\frac{1}{12})(\frac{1}{2}) \neq 24$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

เพราะว่า $\det(2B^{t}) = 2^{2}\det(B) = 4\det(B) = 48$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

สรุปตัวเลือก 4. ต้องถูกต้อง มิฉะนั้นโจทย์ผิด

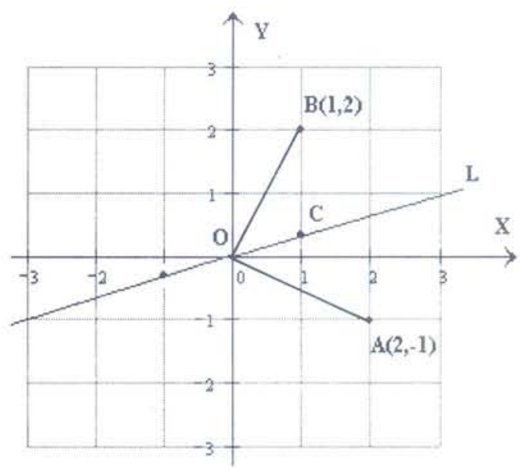
**20.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ข้อสังเกตที่ได้จากตัวเลือก

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}-3\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่ในควอดรันท์ที่ 2 , 4
2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}+3\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่ในควอดรันท์ที่ 1 , 3
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}+\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่ในควอดรันท์ที่ 1 , 3
4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}-\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่ในควอดรันท์ที่ 2 , 4

คำถามเกี่ยวกับเวกเตอร์แบบนี้วาดรูปแล้วตัดตัวเลือกดีกว่า

1. เขียนจุด A(2 , −1 ) B(1 , 2) จะเห็นว่า OA ตั้งฉากกับ OB
2. ลากเส้นตรง L แบ่งครึ่งมุม AOB
3. C เป็นจุดบนเส้นแบ่งครึ่งมุม AOB




ซึ่งอยู่ใน $Q_1$ หรือ $Q_3$

นั้นคือพิกัด (x , y) ของจุด C

ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าจุดพิกัด (x , y) ของจุด C

บนเส้นตรง L ใน $Q_1$ จากรูป $x > y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ , $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ เพราะฉะนั้น $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{c}$ ทำมุม 45 องศากับ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ , $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$

สมมติ $\bar{c} = OC$ และ พิกัด C คือ (x , y)

เพราะฉะนั้น $\bar{c} = x\bar{i} + y\bar{j}$ และ $|x\bar{i} + y\bar{j}| = 1$

$$\frac{\bar{a}\bar{c}}{|\bar{a}||\bar{c}|} = \cos 45^\circ = \frac{\bar{b}\bar{c}}{|\bar{b}||\bar{c}|}$$

$$\frac{2x-y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2x-y}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{x+2y}{\sqrt{5}}$$

$$2x - y = x + 2y$$

$$x = 3y \qquad \text{....(1)}$$

**หมายเหตุ** ข้อสังเกตที่ได้จากตัวเลือก

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} - 3\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่บนเส้นตรง $y = -3x$
2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} + 3\bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่บนเส้นตรง $y = 3x$
3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} + \bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่บนเส้นตรง $y = \frac{1}{3}x$
4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} - \bar{j})$ จุดปลายของเวกเตอร์อยู่บนเส้นตรง $y = -\frac{1}{3}x$

ตามวิธีจริงหากทำมาได้แค่นี้ก็สามารถตัดตัวเลือก 1.,2. และ 4. ทิ้งได้

ทำตามวิธีจริงต่อไปอีก เพราะว่า $|x\bar{i} + y\bar{j}| = 1$

เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 1$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$ , $y = \frac{1}{\sqrt{10}}$

หรือ $x = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ , $y = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

สรุป $\bar{c} = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} + \bar{j})$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 5.

1. กำหนดให้ $A = \{0, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

   $B = \{0, \{\varnothing\}\}$

   $C = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. $\varnothing \in A \cap C$ 2. $\varnothing \in A - B$
   3. $A \subset C$ 4. $B \subset C$

2. เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2x$ คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $[-2, 1]$ 2. $[-1, 2]$
   3. $[-2, 1)$ 4. $[-1, 2)$

3. ประพจน์ข้อใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $p \rightarrow q$

   1. $\sim p \vee q$ 2. $p \vee \sim q$
   3. $\sim p \wedge q$ 4. $p \wedge \sim q$

4. ถ้า $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ แล้ว $f(x+4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{2x+11}{x+2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2}$
   3. $\frac{2x+3}{x+2}$ 4. $\frac{2x+11}{x-2}$

5. ฟังก์ชัน f ในข้อใดต่อไปนี้มีคุณสมบัติว่า $f(x) = f(-x)$

   1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 2. $f(x) = |x - 4|$
   3. $f(x) = x^3 - 1$ 4. $f(x) = x^2 + 2$

6. เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม $30^\circ$ กับแนวระนาบแล้วตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{150}{\sqrt{2}}$
   3. $150\sqrt{3}$ 4. $150\sqrt{2}$

7. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $30^\circ$
2. $60^\circ$
3. $90^\circ$
4. $120^\circ$

8. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 = 144$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, -5)$ และ $(0, 5)$
2. $(0, -\sqrt{7})$ และ $(0, \sqrt{7})$
3. $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$
4. $(-\sqrt{7}, 0)$ และ $(\sqrt{7}, 0)$

9. ถ้า A และ B เป็นจุดที่วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดกับแกน Y แล้วข้อใดต่อไปนี้คือระยะทางจาก A ไป B

1. $2\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{3}$
3. 6
4. 8

10. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\log_a(2a)^b$

1. $2b$
2. $2^b$
3. $\log_a 2 + b$
4. $b\log_a 2 + b$

11. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-1}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$

12. ให้ $f(x) = \begin{cases} 3x - 6 & , x < 2 \\ x - 1 & , x \geq 2 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$
2. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$
3. $\lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$
4. ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

13. จำนวนวิธีจัดเลข 3 หลักที่มีค่ามากกว่า 300 จากเลข 0 , 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 โดยตัวเลขเหล่านี้สามารถนำมาใช้ได้ครั้งเดียว มีเท่ากับค่าใดในข้อต่อไปนี้

1. 12
2. 24
3. 60
4. 154

14. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3-x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 3]$
2. $[0, 3]$
3. $(0, \infty)$
4. $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ก. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a < b^2$

ข. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt{a} \leq a$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

16. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $D_r = \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$

ข. $R_r = \{x \mid 0 \leq x\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

17. ให้ $A = \{0, 1, 2\}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

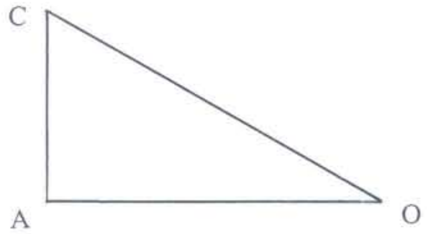
ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2 - 2x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid x - 2y + 3 = 3x\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

18. กำหนดให้ AOC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป โดยที่มุม AOC = $60^\circ$ และด้าน AC ยาว 8 หน่วย ถ้า B เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AC โดยที่เส้น BO แบ่งครึ่งมุม AOC แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของเส้นตรง BC




1. 2
2. 4
3. $\frac{8}{3}$
4. $\frac{16}{3}$

19. สมการวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0 , –5) และ (0 , 5) และจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย คือข้อใดต่อไปนี้

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$
2. $25x^2 + 9y^2 = 225$
3. $16x^2 + 25y^2 = 400$
4. $25x^2 + 16y^2 = 400$

20. ข้อใดต่อไปนี้ คือ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และ รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา

1. $x^2 + y^2 - 4x = 0$
2. $x^2 + y^2 + 4x = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4y = 0$
4. $x^2 + y^2 + 4y = 0$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 5.

**1. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $A \cap C = \{0, \{\varnothing\}\}$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin A \cap C$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

เพราะว่า $A - B = \{\{\varnothing\}\}$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin A - B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $\varnothing \in C$ แต่ $\varnothing \notin A$ เพราะฉะนั้น $C \not\subset A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ตัวเลือกที่ได้คะแนนคือตัวเลือก 4.

**วิธีจริง** $A = \{0, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}\}$

$B = \{0, \{\varnothing\}\}$

$C = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

เพราะว่า $0, \{\varnothing\} \in C$ เพราะฉะนั้น ตัวเลือกที่ถูกคือ 4. $B \subset C$

**2. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบคือข้อใดตรงกับหลักการตัดตัวเลือกพอดี

จากอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ จะเห็นได้ว่า $x = -2$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

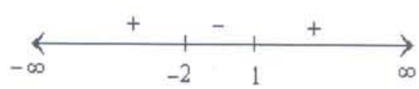
จากอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ จะเห็นได้ว่า $x = 1$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** จากอสมการ $x^2 \leq 2 - x$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x+2) \leq 0$$

พิจารณาเครื่องหมาย $(x-1)(x+2)$




เพราะฉะนั้น $-2 \leq x \leq 1$

สรุป เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ คือ $[-2, 1]$

**3. ตอบ 1.**

**แนวคิด** จำสูตรได้ดีที่สุด $p \longrightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ $\sim p \vee q$

**การตัดตัวเลือก** แทนค่า $q = T$ และ $p = T$ จะได้ว่าค่าความจริงของ $p \longrightarrow q = T$

แต่ค่าความจริงตัวเลือก 3. $\sim p \wedge q = F$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

และค่าความจริงตัวเลือก 4. $p \wedge \sim q = F$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**หมายเหตุ** ยังไงก็ยังช้ากว่าจำสูตร แนะนำการจำสูตร $p \longrightarrow q$ สมมูลกับประพจน์ $\sim p \vee q$ ดีกว่า เพราะว่าสูตรนี้ออกสอบทุกปี

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** คำถามแบบนี้ใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $x = 0$ ค่าของโจทย์ $f(x + 4) = f(4) = \frac{11}{2}$ ค่าแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{2x+11}{x+2} = \frac{11}{2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2} = \frac{1}{-2} \neq \frac{11}{2}$

3. $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2} \neq \frac{11}{2}$ 4. $\frac{2x+3}{x-2} = \frac{3}{-2} \neq \frac{11}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** การหาสูตร $f(x + 4)$ โดยแทนค่า $x$ ด้วย $x + 4$ อาจง่ายกว่าก็ได้อย่าคิดเลขผิดก็แล้วกัน

เพราะว่า $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$

เพราะฉะนั้น $f(x + 4) = \frac{2(x+4)+3}{(x+4)-2} = \frac{2x+11}{x+2}$

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด** สูตรที่ควรจำคือ f มีคุณสมบัติว่า $f(x) = f(-x)$ เรียกว่า**ฟังก์ชันคู่** โพลิโนเมียลที่กำลังของ x ทุกตัวเป็นเลขคู่เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ถูกต้อง

**การตัดตัวเลือก** เลือก x ที่ทำให้ $f(x) \neq f(-x)$

ตัวเลือก 1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ $f(-1) = 7$ และ $f(1) = 3$

ตัวเลือก 2. $f(x) = |x - 4|$ $f(-1) = 5$ และ $f(1) = 3$

ตัวเลือก 3. $f(x) = x^3 - 1$ $f(-1) = -2$ และ $f(1) = 0$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ไม่เป็นฟังก์ชันคู่

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด** AC แทนตึกสูง 150 เมตร

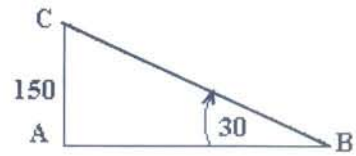
เพราะว่าดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบ เพราะฉะนั้น ABC = 30°

$$\tan ABC = \frac{AC}{AB}$$

$$\tan 30 = \frac{150}{AB}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{AB}$$

$$AB = 150\sqrt{3}$$




เพราะฉะนั้นตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาว $150\sqrt{3}$

**การตัดตัวเลือก** เขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยให้ AC = 150 ( ใช้ 1 นิ้ว ต่อ 100 เมตร)

CAB = 90 องศา AC แทนตึกสูง 150 เมตร และ ABC = 30°

เพราะฉะนั้น AB คือเงาของตึก จากรูป AB ยาวกว่า AC

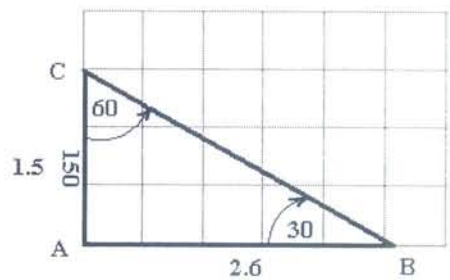
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อน

ต่อไปวัดความยาว AB ได้ 2.6 นิ้ว = 260 เมตร

3. $150\sqrt{3} = 150(1.7) = 255$

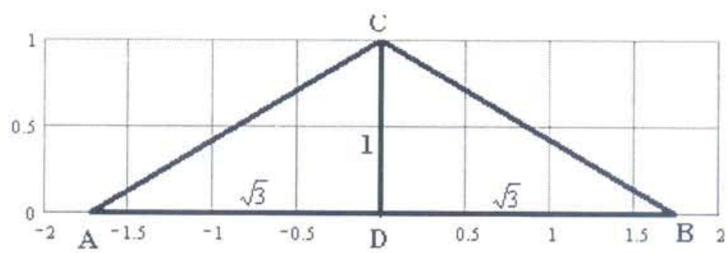
4. $150\sqrt{2} = 150(1.4) = 210$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า




**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด**




ให้ ABC สามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร $AB = 2\sqrt{3}, CD = 1$

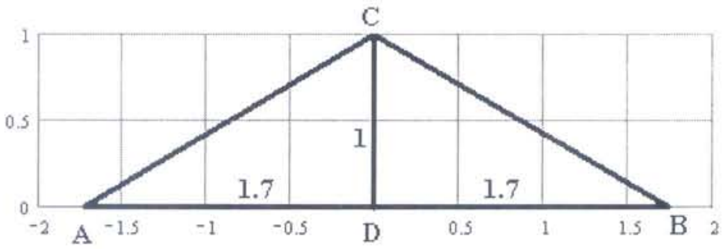
เพราะว่า CD แบ่งครึ่งฐาน เพราะฉะนั้น $AD = \sqrt{3}$

เพราะว่า $\tan A\hat{C}D = \frac{AD}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $A\hat{C}D = 60^\circ$

$A\hat{C}B = 2(A\hat{C}D) = 2(60^\circ) = 120^\circ$

สรุปสามเหลี่ยมหน้าจั่วฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตรสูง 1 เมตรแล้วมุมยอด = 120 องศา

**การตัดตัวเลือก** ประมาณค่า $2\sqrt{3} = 2(1.7) = 3.4$




ลาก AB ยาว 3.4 ลาก CD แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB

ลากเส้น AC และ BC จะเห็นว่ามุม ACB เกิน 90 องศา ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ได้เลย

8. ตอบ 1.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** สังเกตจากตัวเลือก

| | | |
|---|---|---|
| **ตัวเลือก 1.** | จุดโฟกัส $(0, -5)$ และ $(0, 5)$ | แกนตามขวางทับแกน Y |
| **ตัวเลือก 2.** | จุดโฟกัส $(0, -\sqrt{7})$ และ $(0, \sqrt{7})$ | แกนตามขวางทับแกน Y |
| **ตัวเลือก 3.** | จุดโฟกัส $(-5, 0)$ และ $(5, 0)$ | แกนตามขวางทับแกน X |
| **ตัวเลือก 4.** | จุดโฟกัส $(-\sqrt{7}, 0)$ และ $(\sqrt{7}, 0)$ | แกนตามขวางทับแกน X |

จากโจทย์ $9y^2 - 16x^2 = 144$

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

เป็นไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางทับแกน Y

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่าไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มี $a = 4$ , $b = 3$ และ $c > a = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

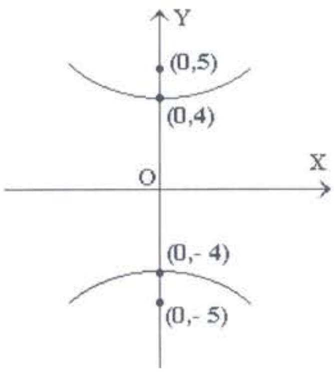
**วิธีจริง** เพราะว่า $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$

เพราะฉะนั้น $c = 5$

เพราะว่าไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ และ $c = 5$

เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสคือ $(0, -5)$ และ $(0, 5)$



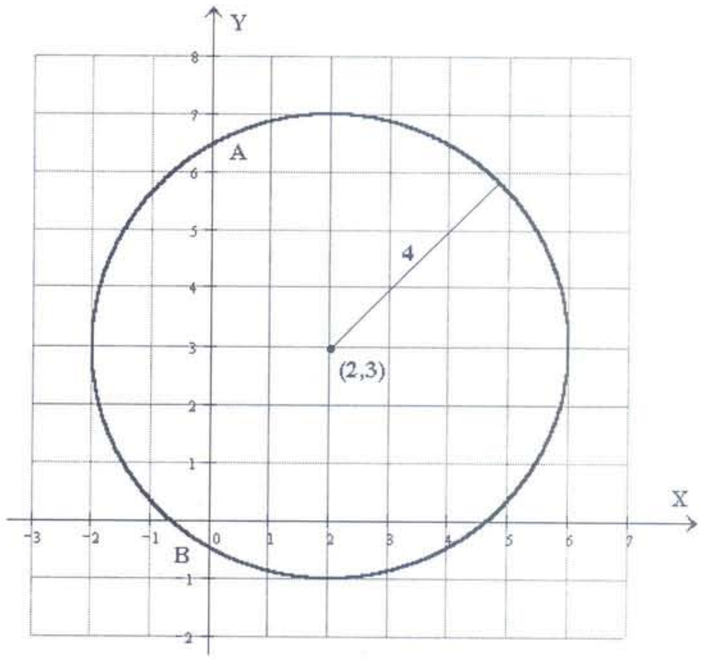
**9. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้การวาดรูปแล้ววัดระยะทาง

เพราะว่าวงกลม $x^2 + y^2 + Px + Qy + R = 0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{P}{2}, -\frac{Q}{2})$ และ รัศมี $\sqrt{(\frac{P}{2})^2 + (\frac{Q}{2})^2 - R}$

เพราะฉะนั้นวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ มีจุดศูนย์กลาง $(2, 3)$ และ รัศมี $\sqrt{4+9+3} = 4$

วัดระยะทาง AB จากรูปได้ 7




ตัวเลือก 1. $2\sqrt{3} = 2(1.73) = 3.46$

ตัวเลือก 2. $4\sqrt{3} = 4(1.73) = 6.92$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

**วิธีจริง** จุดที่วงกลม

$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดแกน Y

ได้จากแทนค่า $x = 0$ แล้วหาค่า y

จากสมการ $y^2 - 6y - 3 = 0$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{6 \pm \sqrt{36+12}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{48}}{2} \\
&= \frac{6 \pm 4\sqrt{3}}{2} \\
&= 3 + 2\sqrt{3}\ ,\ 3 - 2\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นพิกัด $A(0, 3 + 2\sqrt{3})$ และ $B(0, 3 - 2\sqrt{3})$ ระยะทาง $AB = (3+2\sqrt{3}) - (3-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$

**10. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a และ b แทนค่า $a = 10$ และ $b = 2$

ค่าของโจทย์ $\log_a(2a)^b = \log(20^2) = \log 400$

ตัวเลือก 1. $2b = 4 \neq \log 400$

ตัวเลือก 2. $2^b = 4 \neq \log 400$

ตัวเลือก 3. $\log_a 2 + b = \log 2 + 2 \quad = \log 2 + 2\log 10 = \log 2 + \log 100 = \log 200 \neq \log 400$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\log_a(2a)^b = b\log_a(2a) = b(\log_a(2) + \log_a(a)) = b(\log_a 2 + 1) = b\log_a 2 + b$

**11. ตอบ 1.**

**แนวคิด** เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

จากโจทย์ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ $\det A = 10 + 3 = 13$

เพราะฉะนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$

**หมายเหตุ** หากจำสูตร $A^{-1}$ ไม่ได้ให้นำค่าในตัวเลือกมาคูณกับ A

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งถือเป็นโชคดีของนักเรียนเพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1.

**12. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ตัวเลือก 3. และ 4. เป็นของที่ตรงกันข้าม เพราะฉะนั้นจะถูกพร้อมกันก็ไม่ได้จะผิดพร้อมกันก็ไม่ได้ เพราะฉะนั้นคำตอบต้องอยู่ที่สองตัวเลือกนี้แน่นอน **ลองใช้เหตุผลต่ออีกนิดหากตัวเลือก 3. ถูกต้องมันก็จะพาให้ตัวเลือก 1. หรือ 2. ผิดตามไปด้วยอย่างน้อยหนึ่งตัวทำให้ข้อสอบข้อนี้ก็จะเป็นข้อสอบที่ผิด**

**วิธีจริง** $f(x) = \begin{cases} 3x-6 & ,x < 2 \\ x-1 & ,x \geq 2 \end{cases}$ เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6 = 0$ (ตัวเลือก 1. ถูก)

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x-1 = 1$ (ตัวเลือก 2. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ (ตัวเลือก 4. ถูก)

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ตัวเลือก 3. จึงผิด

**13. ตอบ 3.**

**แนวคิด** การนับจำนวนวิธีพิจารณาดังนี้ หลักร้อย หลักสิบ หลักหน่วย

หลักร้อยเลือกได้ 3 วิธีจาก $\{3, 4, 5\}$

หลักสิบเลือกได้ 5 วิธีจากตัวเลขที่เหลือ

หลักหน่วยเลือกได้ 4 วิธีจากตัวเลขที่เหลือ

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = (3)(5)(4) = 60 วิธี

**การตัดเลือก** สำหรับคนที่ไม่รู้สูตรก็สามารถเขียนเลขโดยการแจงสมาชิกออกมาดูเช่น 301 , 302 , 304 , … จะสามารถตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**14. ตอบ 3.**

**แนวคิด เซตคำตอบของอสมการคือข้อใดใช้การแทนค่าจะได้ 2 คะแนนเร็วที่สุด**

จากอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3-x$ จะเห็นว่า $x = 0$ ไม่ได้ แต่ $0 \in [0, 3]$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่า $\frac{4+1}{4} \geq 3-4$ จริง เพราะฉะนั้น $x = 4$ ได้ แต่ $4 \notin (0, 3]$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า $\frac{-1+1}{-1} \geq 3-(-1)$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = -1$ ไม่ได้ แต่ $-1 \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

**วิธีจริง**

$$\frac{x+1}{x} \geq 3-x$$

$$\frac{x+1}{x} + x - 3 \geq 0$$

$$\frac{x+1+x^2-3x}{x} \geq 0$$

$$\frac{x^2-2x+1}{x} \geq 0$$

$$\frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

$$x > 0$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x+1}{x} \geq 3-x$ คือ $(0, \infty)$

**15.ตอบ 4.**

**แนวคิด** ก. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a < b^2$ ผิด ตัวอย่างเช่น $a = 0.1$ , $b = 0.2$ , $b^2 = 0.04$ จะได้ $0 < a < b$ แต่ a ไม่น้อยกว่า $b^2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งเสียก่อน

ข. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\sqrt{a} \leq a$ ผิด ตัวอย่างเช่น $a = 0.01$ จะได้ $\sqrt{a} = \sqrt{0.01} = 0.1$ ไม่น้อยกว่า 0.01

สรุปตัวเลือกของข้อนี้คือ ตัวเลือก 4.

16.ตอบ 2.

แนวคิด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{9-x^2}\}$

$$D_r = \{x \mid 9 - x^2 \geq 0\} = \{x \mid x^2 - 9 \leq 0\} = \{x \mid (x-3)(x+3) \leq 0\}$$

$$= \{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$$

เพราะฉะนั้น ก ถูก ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $0 \leq 9 - x^2 \leq 9$ เพราะฉะนั้น $0 \leq y = \sqrt{9-x^2} \leq 3$

เพราะฉะนั้น ข. $R_r = \{x \mid 0 \leq x\}$ ผิด สรุปคำตอบข้อนี้คือ ตัวเลือก 2.

17.ตอบ 3.

แนวคิด $A = \{0, 1, 2\}$

ก. $\{(x, y) \in A \times A \mid y = x^2 - 2x + 1\} = \{(0, 1), (1, 0), (2, 1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้นข้อความ ก ผิด ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ข. $\{(x, y) \in A \times A \mid x - 2y + 3 = 3x\} = \{(x, y) \in A \times A \mid 2y = -2x + 3\}$

$$= \{(x, y) \in A \times A \mid y = \frac{-2x+3}{2}\} = \varnothing$$

ข้อนี้จัดว่ายากในเรื่องของเหตุผล แต่ท่องจำไว้ใช้ต่อไปได้เลยว่า $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เพราะฉะนั้น ข. ถูก สรุปคำตอบข้อนี้คือ ตัวเลือก 3.

**หมายเหตุ** การถามว่า $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่เป็นคำถามที่ตอบได้ยากแต่ถ้าดูตามบทนิยามใน ค.012 หน้า 62

**f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$**

เพราะว่าค่าความจริงของ ถ้า $(x_1, y) \in \varnothing$ และ $(x_2, y) \in \varnothing$ แล้ว $x_1 = x_2$ เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

18.ตอบ 4.

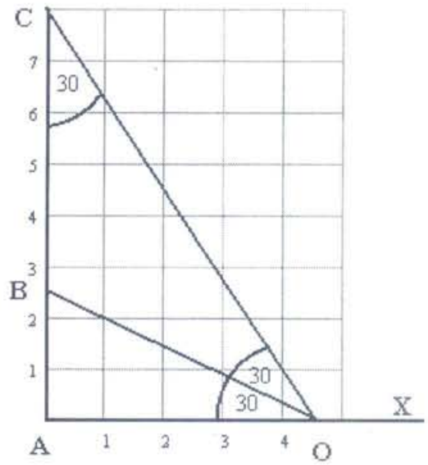
แนวคิด วาดรูปจริงตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ลากเส้น AX และ AC ยาว 8 cm. ตั้งฉากกับ AX
2. ลาก CO เพื่อให้ ACO = 30 องศา เพราะฉะนั้น AOC = 60 องศา

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

วัดระยะทางจะได้ BC ยาว 5.3 cm

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า




**วิธีจริง** จากรูป $\tan A\hat{O}C = \dfrac{AC}{AO}$

$$\tan 60 = \frac{8}{AO}$$

$$\sqrt{3} = \frac{8}{AO}$$

$$AO = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

จากรูป $\tan A\hat{O}B = \dfrac{AB}{AO}$

$$\tan 30 = \frac{AB}{AO}$$

$$AB = AO\tan 30 = \frac{8}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{8}{3}$$

เพราะฉะนั้น $BC = AC - AB = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

**19. ตอบ 2.**

**แนวคิด** เพราะว่าวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -5)$ และ $(0, 5)$ เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y

ดูจากตัวเลือกพบว่า

| ตัวเลือก | สมการมาตรฐาน | แกนเอกทับแกน |
|---|---|---|
| 1. $9x^2 + 25y^2 = 225$ | $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$ | X |
| 2 $25x^2 + 9y^2 = 225$ | $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ | Y |
| 3. $16x^2 + 25y^2 = 400$ | $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{4^2} = 1$ | X |
| 4. $25x^2 + 16y^2 = 400$ | $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$ | Y |

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่าจุดโฟกัสทั้งสองห่างกัน 8 หน่วย เพราะฉะนั้น $2c = 8$ และ $c = 4$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{x^2}{3^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

$$a = 5, b = 3, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-9} = 4$$

ตัวเลือก 4. $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$a = 5 , b = 4 , c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25-16} = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่าวงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (0 , –5) และ (0 , 5)

เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกทับแกน Y , จุดศูนย์กลาง (0 , 0) และ a = 5

เพราะว่าจุดโฟกัสห่างกัน 8 หน่วย เพราะฉะนั้น 2c = 8 และ c = 4 , $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25-16} = 3$

เพราะฉะนั้นสมการวงรีคือ $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1$$

$$25x^2 + 9y^2 = 225$$

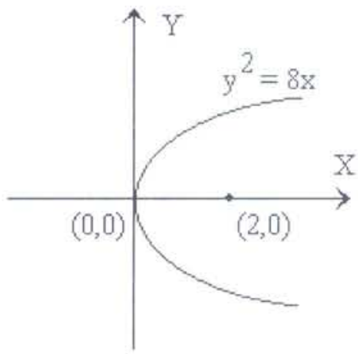
**20.ตอบ 1.**

**แนวคิด** สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 8x = 4(2)x$

เป็นพาราโบลา แกนพาราโบลาทับแกน X จุดยอด (0 , 0) จุดโฟกัส (2 , 0)

เพราะฉะนั้นวงกลมที่โจทย์ต้องการต้องมีจุดศูนย์กลางที่ (2 , 0)

**สูตรที่ใช้ได้ในการสอบ ENTRANCE ทุกครั้ง**




$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2} , -\frac{B}{2})$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางแต่ละตัวเลือกคือ

1. (2 , 0) 2. (– 2 , 0)
3. (0 , 2) 4. (0 , –2)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดของพาราโบลา = 2

สมการวงกลมจุดศูนย์กลาง (2 , 0) รัศมี 2 คือ $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 2^2$

สมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 - 4x = 0$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 6.

1. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$
   2. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}\}$
   3. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{\{b, c\}\}$
   4. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{b, c\}$

2. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

   B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1$

   $(A - B)'$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
   2. $(-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$
   3. $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$
   4. $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

3. ถ้า p และ q เป็นประพจน์ แล้ว ประพจน์ $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$
   2. $\sim p \vee (p \vee q)$
   3. $p \rightarrow (\sim q \vee q)$
   4. $p \rightarrow (\sim p \wedge q)$

4. ถ้า $f = \{(x, y) \mid y = \log(x+2) + \log(x-3) - \log(4-x)\}$

   แล้วโดเมนของ f คือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(3, 4)$
   2. $(2, 3)$
   3. $(2, 4)$
   4. $(0, 2) \cup (3, 4)$

5. นาย ก เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ต่อจากนั้นจึงเดินทางไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่า นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

   1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$
   2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$
   3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2}$
   4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2}$

6. ให้เส้นตรง $L_1$ ผ่านจุด (5 , 2) และ (1 , – 6) เส้นตรง $L_2$ ผ่านจุด (3 , – 1) และมีความชัน – 1 ถ้า (a , b) เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง แล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. – 2    2. – 1
   3. 1    4. 2

7. ให้ $f(x) = \log\sqrt{x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{\log x}$ $R_f - D_{f+g}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. [0 , 1)    2. [0 , 1]
   3. (– ∞ , 1)    4. (– ∞ , 1]

8. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด

   1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x
   2. $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x
   3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ทุกๆ $x > 0$
   4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

9. ให้ $\bar{u} = -\bar{i} - \bar{j}$ , $\bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j}$

   แล้วเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในข้อใดต่อไปนี้มีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{w}$

   1. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})$    2. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})$
   3. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} + \bar{j})$    4. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} - \bar{j})$

10. กำหนด A(1 , – 1) , B(5 , – 4) และ P(2 , 3) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า Q เป็นจุดในระนาบ XY ที่ $\overline{PQ} = 2\overline{AB}$ แล้ว $\overline{AP} \cdot \overline{PQ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

    1. – 9    2. – 1
    3. 9    4. 1

11. รากที่ 6 ของ – 64 ที่ไม่เป็นจำนวนจริง เป็นจริงตามข้อใด

    1. มี 4 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$
    2. มี 4 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$ และ $-1 \pm \sqrt{3}i$
    3. มี 6 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$ , $-1 \pm \sqrt{3}i$ และ $\pm 2i$
    4. มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ , $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

12. ถ้า $(2+i)$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x)=0$ เมื่อ $f(x)=2x^3+ax^2+bx+10$
แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(1)=8$ , $f(-1)=0$
2. $f(1)=0$ , $f(-1)=8$
3. $f(1)=4$ , $f(-1)=0$
4. $f(1)=0$ , $f(-1)=4$

13. ให้ $a+3$ , $a$ , $a-2$ เป็น 3 พจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น $r$
แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 8
2. 9
3. 16
4. 18

14. พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต 200 , 182 , 164 , 146 , ... มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 54
2. 38
3. 22
4. 20

15. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$
ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\frac{1}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ทั้งคู่
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

16. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(A)=0.5$ , $P(B)=0.6$ และ $P(A'\cap B')=0.2$
$P(A\cap B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1
2. 0.3
3. 0.8
4. 0.9

17. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ก. $\{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

ข. $\{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\} = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ก และ ข ถูกทั้งคู่
2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก
4. ก และ ข ผิดทั้งคู่

18. ให้ $I^+$ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid x + 2y = 12$ และ $x, y \in I^+\}$ แล้ว fof เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(8, 5), (4, 4)\}$
2. $\{(5, 8), (4, 4)\}$
3. $\{(2, 2), (4, 4)\}$
4. $\{(6, 3), (4, 4)\}$

19. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\}$
2. $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\}$
3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\}$
4. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\}$

20. กำหนดให้ A(1 , 2) และ B(–1 , 4) เป็นจุดสองจุดที่มีจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB ถ้าวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด M รัศมี $\sqrt{8}$ หน่วย ตัดส่วนของเส้นตรง AB ที่ต่อออกมาทั้งสองข้างที่จุดสองจุด แล้วจุดตัดจุดหนึ่งคือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(2, 1)$
2. $(2, 5)$
3. $(\sqrt{2}, 3-\sqrt{6})$
4. $(\sqrt{3}, 3-\sqrt{5})$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 6.

**1. ตอบ 1.**

**แนวคิด** $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$

$A - \{b, c\} = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$

$(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$

สรุปตัวเลือก 1. ถูกต้อง และ ตัวเลือก 2. ผิด

$A - \{a, \{b\}\} = \{\{a\}, \{b, c\}\} \neq \{\{b, c\}\}$ ตัวเลือก 3. ผิด

$A - \{a, \{b\}\} = \{\{a\}, \{b, c\}\} \neq \{b, c\}$ ตัวเลือก 4. ผิด

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $(A - B)' = (A \cap B')' = A' \cup B$

$A = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\}$

$A' = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} < 0\} \cup \{-2\}$

$B = \{x \in R \mid |\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1\}$

โดยการแทนค่าจะเห็นว่า $-2 \in A'$ และ $-1 \in B$

เพราะว่า $-2 \in A' \longrightarrow -2 \in A' \cup B \longrightarrow -2 \in (A - B)'$

แต่ $-2 \notin (-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ และ $-2 \notin (-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$

เพราะว่า 1. $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ 2. $(-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$

3. $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$ 4. $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

เพราะว่า $-1 \in B \longrightarrow -1 \in A' \cup B \longrightarrow -1 \in (A - B)'$

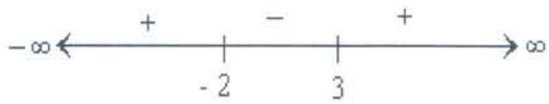
แต่ $-1 \notin (-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** จากอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

$$\frac{x-3}{x+2} \leq 0$$

$$-2 < x \leq 3$$




เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid \frac{3-x}{x+2} \geq 0\} = (-2\,,3]$

จากอสมการ $|\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1$

$$|\frac{1-x}{2}| \leq 1$$

$$|1-x| \leq 2$$

$$|x-1| \leq 2$$

$$-2 \leq x-1 \leq 2$$

$$-1 \leq x \leq 3$$

เพราะฉะนั้น $B = \{x \in R \mid |\frac{1}{2} - \frac{x}{2}| \leq 1\} = [-1\,,3]$

$$A - B = (-2\,,3] - [-1\,,3] = (-2\,,-1)$$

เพราะฉะนั้น $(A-B)' = (-\infty\,,\infty) - (-2\,,-1)$

$$= (-\infty\,,-2] \cup [-1\,,\infty)$$

**3. ตอบ 1.**

**แนวคิด** สูตรประพจน์สมมูลยอดนิยมของ ม. ปลาย $A \rightarrow B$ สมมูลกับ $\sim A \vee B$

$\sim(A \vee B)$ สมมูลกับ $\sim A \wedge \sim B$

$\sim(A \wedge B)$ สมมูลกับ $\sim A \vee \sim B$

เพราะฉะนั้น $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p) = p \rightarrow \sim(\sim q \vee p)$

$$= p \rightarrow (q \wedge \sim p)$$

$$= \sim p \vee (q \wedge \sim p)$$

$$= \sim p \vee (\sim p \wedge q)$$

**การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า T หรือ F ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = T$ **เพราะฉะนั้น** $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p) = F$

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q) = F$

ตัวเลือก 2. $\sim p \vee (p \vee q) = T$

ตัวเลือก 3. $p \rightarrow (\sim p \vee q) = T$ เมื่อ $q = T$

ตัวเลือก 4. $p \rightarrow (\sim p \wedge q) = T$ เมื่อ $q = F$

สรุปตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** คำถามข้อนี้ตรงกับหลักการเซตคำตอบตรงการตัวเลือกใด

ดูจากพจน์ $\log(x-3) \longrightarrow x = 1.9$ ไม่ได้ และ $x = 2.1$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

**วิธีจริง** โดเมนของ f ต้องสอดคล้องเงื่อนไข

$x + 2 > 0$ และ $x - 3 > 0$ และ $4 - x > 0$

$x > -2$ และ $x > 3$ และ $x < 4$

$x \in (-2, \infty) \cap (3, \infty) \cap (-\infty, 4) = (3, 4)$

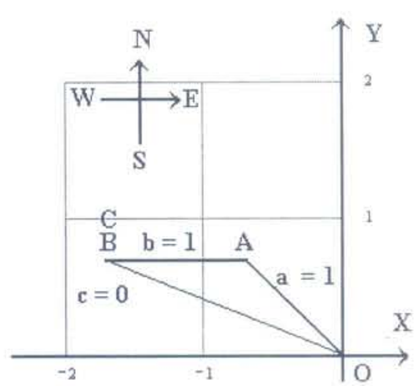
**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a , b , c**

สำหรับคนที่รู้สูตรกฎของโคไซน์ แทนค่า $a = 1$ , $b = 1$ , $c = 0$ จะได้กราฟแสดงระยะทางเป็นดังรูป

ระยะทางของโจทย์ $= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(135)}$

$= \sqrt{1^2 + 1^2 - 2(1)(1)(-\frac{1}{\sqrt{2}})} \quad = \sqrt{2+\sqrt{2}}$




ตัวเลือก 1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} = \sqrt{2} \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ตัวเลือก 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$

$= (1 + 1 + 0 + \sqrt{2} + 0)^{1/2} = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ตัวเลือก 3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2} = \sqrt{3} \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

ตัวเลือก 4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2} = 2 \neq \sqrt{2+\sqrt{2}}$

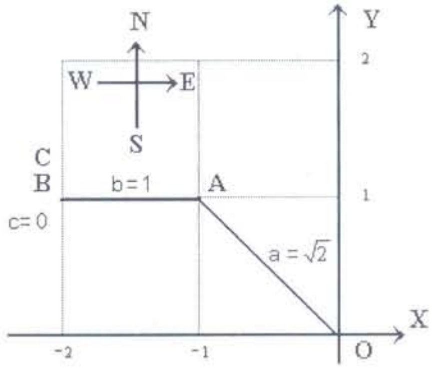
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

สำหรับคนที่รู้การเลื่อนพิกัดของจุด A , B , C แทนค่า $a = \sqrt{2}$ , $b = 1$ , $c = 0$ จะได้พิกัดของ A เป็น $(-1, 1)$ และ พิกัดของ B เป็น $(-2, 1)$ เพราะฉะนั้น นาย ก ห่างจากจุดเริ่มต้น $= \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ตัวเลือก 1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} = \sqrt{2+1+0} = \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$

ตัวเลือก 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$

$$= (2 + 1 + 0 + 2 + 0)^{1/2} = \sqrt{5}$$




ตัวเลือก 3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2}$

$$= (2 + 1 + 0 + \sqrt{2} + 0)^{1/2}$$

$$= \sqrt{3+\sqrt{2}} \neq \sqrt{5}$$

ตัวเลือก 4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2} = \sqrt{2} + 1 \neq \sqrt{5}$

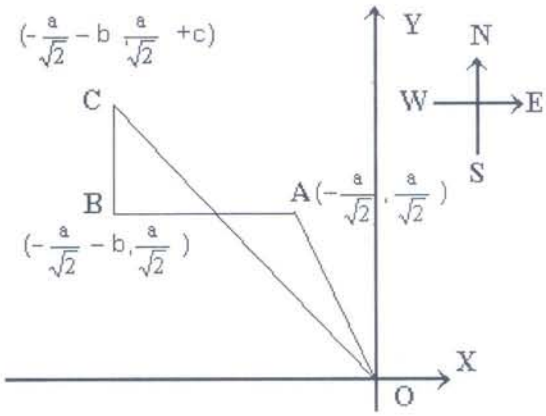
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ได้เหมือนกัน

**วิธีจริง วิธีที่ 1.** วาดรูปตามโจทย์กำหนดและใช้พิกัดของจุด

พิกัด A คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}} , \frac{a}{\sqrt{2}})$

พิกัด B คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}} - b , \frac{a}{\sqrt{2}})$

พิกัด C คือ $(-\frac{a}{\sqrt{2}} - b , \frac{a}{\sqrt{2}} + c)$




ระยะที่นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้น = OC

$$OC^2 = (-\frac{a}{\sqrt{2}} - b)^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}} + c)^2$$

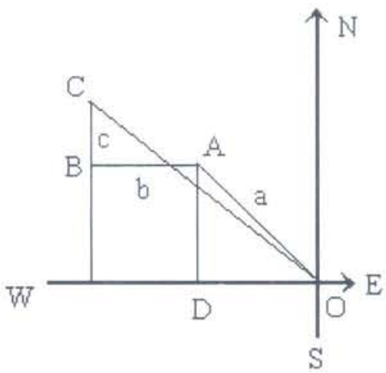
$$= \frac{a^2}{2} + 2\frac{ab}{\sqrt{2}} + b^2 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{ac}{\sqrt{2}} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac$$

$$OC = (a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$$

**วิธีที่ 2.** ไม่ใช้การอ้างอิงพิกัดของจุด

OAD เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วมุมฉาก OA = a และ OD = AD




$$OD^2 + AD^2 = OA^2$$

$$2OD^2 = a^2$$

$$OD = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $OD = AD = \frac{a}{\sqrt{2}}$

ECO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $OE = AD + AB = \frac{a}{\sqrt{2}} + b$

$EC = BC + BE = BC + OD = c + \frac{a}{\sqrt{2}}$

$$OC^2 = OE^2 + CE^2$$

$$= \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + b\right)^2 + \left(c + \frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{a^2}{2} + 2\frac{ab}{\sqrt{2}} + b^2 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{ac}{\sqrt{2}} + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac$$

สรุป $OC = (a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$

**6. ตอบ 4.**

**แนวคิด** สมการ $L_2$ คือ $(y - (-1)) = (-1)(x - 3)$

$$x + y = 2 \qquad \ldots(1)$$

**พอเราได้สมการ $L_2$ ก็จะได้คำตอบแล้ว ( เป็นความโชคดีของนักเรียนที่ฝึกสังเกต )**

เพราะว่า $(a , b)$ อยู่บน $L_2$ เพราะฉะนั้น $a + b = 2$

เพื่อความสมบูรณ์ของการเฉลยเราจะหาค่า a และ b ต่อไป

สมการ $L_1$ คือ $\frac{y-2}{x-5} = \frac{-6-2}{1-5}$

$$\frac{y-2}{x-5} = 2$$

$$y - 2 = 2x - 10$$

$$2x - y = 8 \qquad \ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a = \frac{10}{3}$ และ $b = -\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้น $a + b = 2$

**การตัดตัวเลือก**

วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทาง

ลาก $L_1$ ผ่านจุด (5 , 2) และ (1 , –6)

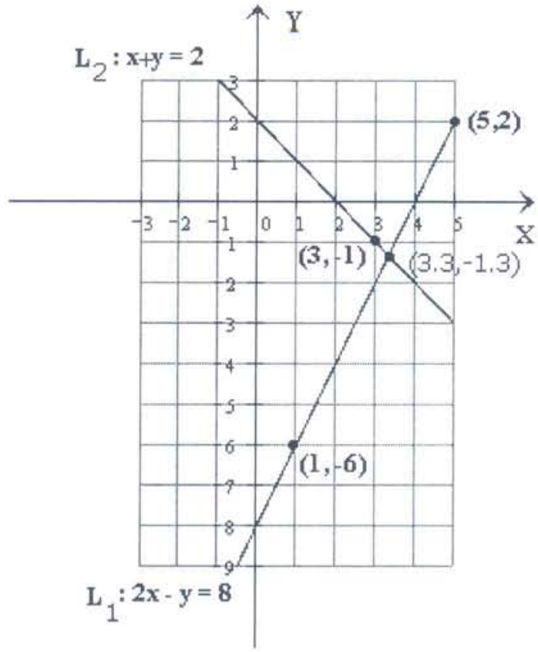
$L_2$ เป็นเส้นตรงที่มีความชัน – 1 คือ

เส้นตรงที่ทำมุม 135 องศากับแกน X

และ ผ่านจุด (3 , –1) วัดพิกัดของจุดตัด $L_1$ กับ $L_2$

ได้เป็น (3.3 , –1.3)

สรุปเลือก a + b = 3.3 – 1.3 = 2 ดีกว่า




**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่าบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น x = 101 , x = 1.01

เพราะว่า $f(101) = \log\sqrt{101-1} = \log 10 = 1$ เพราะฉะนั้น $1 \in R_f$

เพราะว่า $1 \notin D_f \rightarrow 1 \notin D_{f+g}$ เพราะฉะนั้น $1 \in R_f - D_{f+g}$

ตัวเลือกแต่ละตัวคือ 1. [0 , 1) 2. [0 , 1] 3. $(-\infty , 1)$ 4. $(-\infty , 1]$

เพราะว่า $1 \notin [0 , 1)$ และ $1 \notin (-\infty , 1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะว่า $f(1.01) = \log\sqrt{1.01-1} = \log\sqrt{0.01} = \log(0.1) = -1$ เพราะฉะนั้น $-1 \in R_f$

$-1 \notin D_f \rightarrow -1 \notin D_{f+g} \rightarrow -1 \in R_f - D_{f+g}$ แต่ $-1 \notin [0 , 1]$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2

**วิธีจริง การหาโดเมนและเรนจ์ของ f** $f(x) = \log\sqrt{x-1}$ เพราะว่า $x - 1 > 0$

$x > 1$

เพราะฉะนั้น $D_f = (1 , \infty)$ เพราะว่า $-\infty < \log\sqrt{x-1} < \infty$ เพราะฉะนั้น $R_f = (-\infty , \infty)$

**การหาโดเมนและเรนจ์ของ g** $g(x) = \sqrt{\log x}$ เพราะว่า $\log x \geq 0 = \log(1)$ เพราะฉะนั้น $x \geq 1$

เพราะฉะนั้น $D_g = [1 , \infty)$ และ $R_g = [0 , \infty)$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (1 , \infty) \cap [1 , \infty) = (1 , \infty)$$

$$R_f - D_{f+g} = (-\infty , \infty) - (1 , \infty) = (-\infty , 1]$$

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $0 < \sin 18^\circ < 1$ และ $0 < \cos 18^\circ < 1$

เพราะฉะนั้น f(x) ในตัวเลือก 1. และ 2. เหมือนกันซึ่งเป็นคำตอบไม่ได้ มิเช่นนั้นโจทย์จะผิด

ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

พิจารณาสูตรในตัวเลือก 3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ จะได้ $f(1) = 0$ และ $f(2) = 1$

เพราะฉะนั้น $1 < 2$ แต่ $f(1) > f(2)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ไม่เป็นฟังก์ชันลด

**วิธีจริง ข้อสอบข้อนี้วัดความจำของนักเรียนแน่นอน**

ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

ถ้า $a > 1$ แล้ว $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวเลือก 1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x

$$f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x} = (\frac{1}{\sin 18})^{2x} = ((\frac{1}{\sin 18})^2)^x$$

เพราะว่า $0 < \sin 18 < 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sin 18} > 1$ และ $((\frac{1}{\sin 18})^2) > 1$

สรุป $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ในทำนองเดียวกัน $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ตัวเลือก 4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

$$f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$$

$$f(x) = -\log_2 x$$

เพราะว่า $\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $f(x) = -\log_2 x$ เป็นฟังก์ชันลด

**9. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้เหตุผลนำค่าในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าในโจทย์

เพราะว่า $\bar{u} \bullet \bar{v} = 2$ ต่อไปลองนำเวกเตอร์ในตัวเลือกมา dot กับ $\bar{v}$

ตัวเลือก 1. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \bullet (\frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})) = 2$

ตัวเลือก 2. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \bullet (\frac{-2}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})) \neq 2$

ตัวเลือก 3. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \bullet (\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} + \bar{j})) \quad \neq 2$

ตัวเลือก 4. $(\bar{i} - 3\bar{j}) \bullet (\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} - \bar{j})) \quad \neq 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

**วิธีจริง** สมมติ $\bar{w} = a\bar{i} + b\bar{j}$

$\bar{u} \bullet \bar{v} = (-\bar{i} - \bar{j}) \bullet (\bar{i} - 3\bar{j}) = 2$

$\bar{v} \bullet \bar{w} = (\bar{i} - 3\bar{j}) \bullet (a\bar{i} + b\bar{j}) = a - 3b$

เพราะฉะนั้น $a - 3b = 2$ ...(1)

เพราะว่า $|\bar{w}| = 2$

เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 = 4$ ...(2)

แทนค่า $a = 2 + 3b$ ; $(2 + 3b)^2 + b^2 = 4$

$4 + 12b + 9b^2 + b^2 = 4$

$12b + 10b^2 = 0$

$b(6 + 5b) = 0$

$b = 0$ หรือ $-\frac{6}{5}$

**เมื่อทำมาถึงตรงนี้แล้วขอให้สังเกตตัวเลือกจะเห็นได้ว่าเราสามารถตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้**

คำนวนต่อไปจะได้ $a = -\frac{8}{5}$ สรุป $\bar{w} = \frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})$

**10. ตอบ 3.**

**แนวคิด** เพราะว่าจุด A(1 , –1) , B(5 , –4) เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} = (5 - 1)\bar{i} + (-4 + 1)\bar{j} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$

สมมติพิกัด Q(a , b) จะได้ $\overrightarrow{PQ} = (a - 2)\bar{i} + (b - 3)\bar{j}$

เพราะว่า $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{AB}$ เพราะฉะนั้น $(a - 2)\bar{i} + (b - 3)\bar{j} = 2(4\bar{i} - 3\bar{j})$

$a - 2 = 8$ และ $b - 3 = -6$

$a = 10$ และ $b = -3$

พิกัด Q คือ (10 , –3) $\overrightarrow{AP} = (2 - 1)\bar{i} + (3 + 1)\bar{j} = \bar{i} + 4\bar{j}$

$\overrightarrow{BQ} = (10 - 5)\bar{i} + (-3 + 4)\bar{j} = 5\bar{i} + \bar{j}$

สรุป $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{BQ} = (\bar{i} + 4\bar{j}) \bullet (5\bar{i} + \bar{j}) = 5 + 4 = 9$

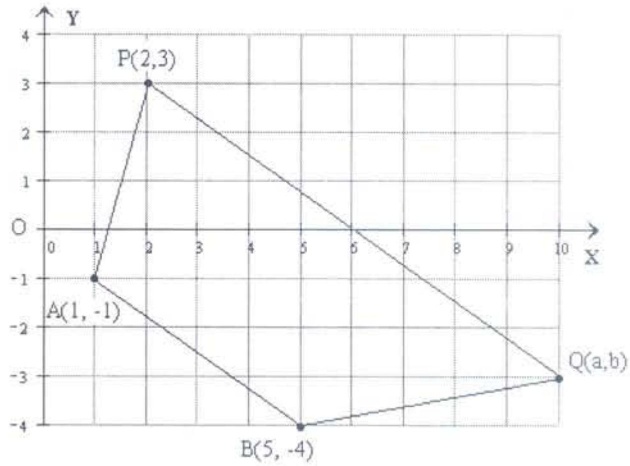
**การตัดตัวเลือก**

1. ลากเส้น AB
2. ลากเส้น PQ จาก P ในทิศทาง AB และยาวสองเท่าของ AB
3. ลากเส้น AP และ BQ

เวกเตอร์ $\overrightarrow{AP}$ และ $\overrightarrow{BQ}$ ทำมุมกันเป็นมุมแหลม

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AP} \bullet \overrightarrow{BQ} > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้




**11. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก มีเหตุผลมากมายในการตัดตัวเลือก**

**เหตุผล 1.** เพราะว่าจำนวนจริงยกกำลังเลขคู่ต้องเป็นบวก

เพราะฉะนั้นสมการ $z^6 = -64$ ต้องเป็นจำนวนเชิงซ้อนหมดทั้ง 6 ตัว

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**เหตุผล 2.** ใช้การนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ถึงแม้ว่าเราจะหารากไม่เป็นแต่ยกกำลังเป็นหรือคูณจำนวนเชิงซ้อนเป็นก็ได้คำตอบเหมือนกัน

$(2i)^6 = -64 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $(1+\sqrt{3}i)^6 = 64$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**เหตุผล 3.** ใช้เหตุผล ถ้า z เป็นราก แล้ว – z เป็นราก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $z^6 = -64$

$$z^6 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$z^6 = 2^6(\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$z = 2(\cos(\frac{\pi + 2k\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi + 2k\pi}{6})) \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$k = 0;$ $\quad z = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$

**ข้อสังเกต ตามวิธีจริงทำได้ถึงตรงนี้ควรตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้แล้ว**

$k = 1;\quad z = 2(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) = 2i$

$k = 2;\quad z = 2(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$

**ข้อสังเกต ตามวิธีจริงทำได้ถึงตรงนี้นี้ควรตัดตัวเลือก 1. ทิ้งและไปทำข้อต่อไป**

$k = 3;\quad z = 2(\cos(\frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{7\pi}{6})) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} - i$

$k = 4;\quad z = 2(\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2})) = -2i$

$k = 5;\quad z = 2(\cos(\frac{11\pi}{6}) + i\sin(\frac{11\pi}{6})) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - i$

สรุป รากที่ 6 ของ –64 มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ , $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

**12.ตอบ 1.**

**แนวคิด** $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$

เพราะว่า $2 + i$ เป็นรากหนึ่งของสมการ $f(x) = 0$

เพราะฉะนั้น $2(2+i)^3 + a(2+i)^2 + b(2+i) + 10 = 0$

$$2(8 + 12i + 6i^2 + i^3) + a(4 + 2i + i^2) + b(2+i) + 10 = 0$$

$$2(2 + 11i) + a(3 + 4i) + b(2+i) + 10 = 0$$

$$(3a + 4b + 14) + (22 + 4a + b)i = 0$$

เพราะฉะนั้น $3a + 2b + 14 = 0$ ...(1)

$4a + b + 22 = 0$ ... (2)

2(2); $8a + 2b + 44 = 0$ ... (3)

(3)–(1); $5a + 30 = 0 \longrightarrow a = -6$ และ $b = -22 - 4a = 2$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$

$f(1) = 2 - 6 + 2 + 10 = 8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งโดยไม่ต้องหาค่า $f(-1) = -2 - 6 - 2 + 10 = 0$

**ข้อเตือนใจ** ข้อสอบข้อนี้เป็นตัวอย่างที่ดีของการทำงานไป และ สังเกตตัวเลือกไปด้วยจะทำได้คำตอบที่ต้องการ โดยไม่จำเป็นต้องทำงานให้ครบทั้งหมดของข้อนั้น

**หมายเหตุ** หากครูท่านใดจะนำข้อสอบนี้ไปใช้อีกควรระบุให้ชัดเจนและรัดกุมด้วยว่า a , b เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน มิเช่นนั้น f อาจมีได้หลายฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x^3 + 10i\,x^2 - 26i\,x + 10$

มี $f(2+i) = 0$ แต่ $f(1) = 12 - 16i \neq 8$ และ $f(-1) = 8 + 36i \neq 0$

**โชคดีเป็นของนักเรียนที่ข้อสอบข้อนี้ไม่ได้เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ**

**หมายเหตุ** ถ้าโจทย์กำหนดว่า a และ b เป็นจำนวนจริง เราสามารถอ้างได้ว่า

$2-i$ เป็นรากของ $f(x) = 0$ ด้วย เพราะฉะนั้น $(x-(2+i))(x-(2-i))$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

เพราะว่า $(x-(2+i))(x-(2-i)) = x^2 - 4x + 5$

เพราะฉะนั้น $(x^2 - 4x + 5)(2x + 2) = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$

$$2x^3 - 6x^2 + 2x + 10 = f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 10$$

เพราะฉะนั้นเราได้ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 2x + 10$ เหมือนกัน

**13.ตอบ 4.**

**แนวคิด** เพราะว่า a+3 , a , a–2 เป็น 3 พจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น
$$\frac{a}{a+3} = \frac{a-2}{a}$$
$$a^2 = (a+3)(a-2)$$
$$a^2 = a^2 + a - 6$$
$$a = 6$$

เพราะฉะนั้นลำดับเรขาคณิตคือ 9 , 6 , 4 , ...เพราะฉะนั้น $r = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} = \frac{6}{1-\frac{2}{3}} = 18$

**หมายเหตุ** $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots$

คิดแค่ 2 พจน์แรก $a + ar = 6 + 6(\frac{2}{3}) = 10$ เราก็ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**14.ตอบ 1.**

**แนวคิด** ลำดับเลขคณิต 200 , 182 , 164 , 146 , ...; $a = 200$ และ $d = 182 - 200 = -18$

$a_n = a + (n-1)d = 200 + (n-1)(-18) = 218 - 18n$

การหาค่า n ที่ทำให้ $a_n < 0$

$$218 - 18n < 0$$

$$218 < 18n$$

$$12.11 < n$$

เพราะฉะนั้นพจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบคือ พจน์ที่ 13

$$a_{13} = a + 12d \quad = 200 + (12)(-18) \quad = -16$$

$$a_{10} = a + 9d \quad = 200 + (9)(-18) \quad = 38$$

$$a_{10} - a_{13} = 38 - (-6) \quad = 54$$

15.ตอบ 1.

**แนวคิด ในการทำโจทย์ข้อนี้ขอแนะนำว่าหากเราทำอะไรได้บ้างในการทำโจทย์ก็ให้ใช้ผลนั้นช่วยในการตัดตัวเลือกเท่าที่จะทำได้เช่น**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ได้ของมาแค่นี้ก็สามารถตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า x เข้าใกล้ 0 ทางซ้าย และ ทางขวา มีสูตรของ f(x) เหมือนกัน

เพราะฉะนั้น ถ้าลิมิตเข้าใกล้ 0 ทางซ้าย และ ทางขวา หาค่าได้ต้องมีค่าเท่ากัน ดังนั้นตัดตัวเลือก 4.

ทำตามวิธีจริงต่อไปจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{4+x}-2}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt{4+x}+2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. สรุปตัวเลือกที่ได้ 2 คะแนนจากข้อนี้คือตัวเลือก 1.

16 ตอบ 2.

**แนวคิด การตัดตัวเลือกได้เพียงบางส่วนก็ยังดี เพราะว่าจะมีประโยชน์ที่เห็นชัดสองประการคือ การเดาตัวเลือกจะมีตัวเลือกที่ต้องเดาน้อยลง หากคิดเลขได้ตรงกับตัวเลือกที่เราตัดทิ้งไปแล้วจะได้รู้ตัวว่าเราได้คิดอะไรผิดบางอย่างแล้ว**

เพราะว่า $A \cap B \subset A$ ทำให้ $P(A \cap B) \leq P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) \leq 0.5$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

**วิธีจริง**

$$\begin{aligned}
A' \cap B' &= (A \cup B)' \\
P((A \cup B)') &= P(A' \cap B') = 0.2 \\
P(A \cup B) &= 1 - 0.2 = 0.8 \\
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
0.8 &= 0.5 + 0.6 - P(A \cap B) \\
P(A \cap B) &= 0.3
\end{aligned}$$

17.ตอบ 4.

**แนวคิด พิจารณาข้อความ ก** $A = \{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\}$

$B = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

เพราะว่า $x = -\frac{1}{3}$ ทำให้ $\sqrt{\frac{x-1}{x}} = \sqrt{\frac{-\frac{1}{3}-1}{-\frac{1}{3}}} = 2$

เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{3} \in A$ แต่ $-\frac{1}{3} \notin B$ ดังนั้น $A \neq B$ เพราะฉะนั้น ข้อความ ก ผิด

**หมายเหตุ** โดยการแก้สมการจะได้ว่า $A = \{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{-\frac{1}{3}\}$

$B = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\} = \varnothing$

**พิจารณาข้อความ ข** $A = \{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\}$

$B = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

$1 \in B$ และ $1 \notin A \rightarrow A \neq B$ เพราะฉะนั้นข้อความ ข ผิด

**หมายเหตุ** โดยการแก้อสมการจะได้ว่า $A = \{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\} = [\frac{2}{3}, 1) \cup (1, 2]$

$B = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\} = [\frac{2}{3}, 2]$

18.ตอบ 1.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $x + 2y = 12$

$$y = \frac{12 - x}{2}$$

$$f(x) = \frac{12 - x}{2}$$

เพราะฉะนั้น $f(8) = 2$ และ $f(2) = 5$

เพราะว่า $(fof)(8) = f(f(8)) = f(2) = 5$ **เพราะฉะนั้น** $(8, 5) \in fof$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง การแสดงข้อพิสูจน์ว่า** $fof = \{(8, 5), (4, 4)\}$

เพราะว่า $f(x) = \frac{12 - x}{2}$

เพราะฉะนั้น $D_f = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ และ $R_f = \{5, 4, 3, 2, 1\}$

$$(fof)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{12 - x}{2}\right) = \frac{12 - \left(\frac{12 - x}{2}\right)}{2} = \frac{12 + x}{4}$$

$(fof)(x)$ หาค่าได้เมื่อ $x = 4$ และ $x = 8$ เท่านั้น และ $(fof)(4) = 4$ และ $fof(8) = 5$

เพราะฉะนั้น $fof = \{(8, 5), (4, 4)\}$

19.ตอบ 3.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าได้เสมอ

เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆ เช่น $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ และ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{\pi}{2}) \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$x = \frac{5\pi}{2} \longrightarrow \cos\frac{5\pi}{2} = \sqrt{3}(1 - \sin\frac{5\pi}{2}) \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

**วิธีจริง**

$$\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$$

$$\cos^2 x = 3(1 - 2\sin x + \sin^2 x)$$

$$1 - \sin^2 x = 3 - 6\sin x + 3\sin^2 x$$

$$4\sin^2 x - 6\sin x + 2 = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$$

$\sin x = 1 , \frac{1}{2}$

$\sin x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} , \frac{5\pi}{2} , \frac{9\pi}{2} , \frac{13\pi}{2} , \ldots$

$\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} , \frac{5\pi}{6} , \frac{13\pi}{6} , \frac{17\pi}{6} , \ldots$

เพราะว่า $x \in [0 , 4\pi]$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{6} , \frac{\pi}{2} , \frac{13\pi}{6} , \frac{5\pi}{2}$

**20.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามโจทย์กำหนด

ลากเส้นตรง L ผ่านจุด A(1 , 2) และ B(–1 , 4)

จุด M มีพิกัดเป็น (0 , 3)

**หมายเหตุ** กะระยะด้วยไม้โปรก็พอ ถ้าไม่รู้สูตร

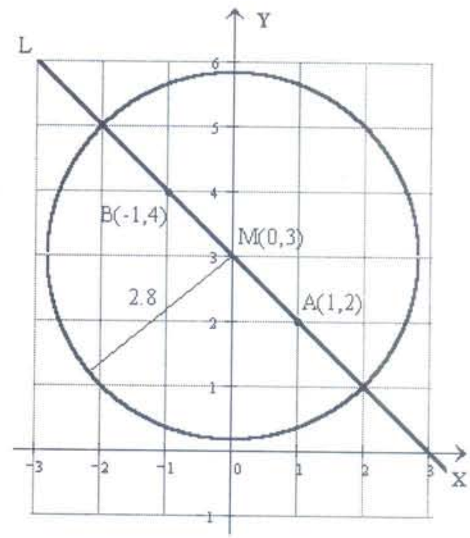
ประมาณค่า $\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2(1.4) = 2.8$

เขียนวงกลมรัศมี 2.8 จุดศูนย์กลาง M(0 , 3)

ขณะนี้เราได้จุดตัดตามที่โจทย์ต้องการแล้ว

วัดพิกัดของจุดตัดในควอดรันท์ที่ 1. ได้เป็น (2 , 1)

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า




**หมายเหตุ เพราะว่าตัวเลือกเป็นจุดในควอดรันท์ทุกตัวเลือกเราจึงไม่ต้องสนใจจุดในควอดรันท์ 2**

**การตัดตัวเลือกแบบที่ 2** สมการเส้นตรง L คือ $\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{-1-1} = -1$

$$y - 2 = -x + 1$$

$$y = -x + 3$$

โดยการแทนค่า (2 , 5) , ($\sqrt{2}$ , 3–$\sqrt{6}$) , ($\sqrt{3}$ , 3–$\sqrt{5}$) ไม่อยู่บนเส้นตรง L

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** หาจุดกึ่งกลางของ A(1 , 2) และ B(–1 , 4) ได้เป็น M(0 , 3)

สมการวงกลมคือ $(x-0)^2 + (y-3)^2 = 8$

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 = 8$$

$$x^2 + y^2 - 6y + 1 = 0 \qquad \ldots(1)$$

สมการเส้นตรง L ที่ผ่านจุด A , B คือ $\frac{y-2}{x-1} = \frac{4-2}{-1-1} = -1$

$$y - 2 = -x + 1$$

$$y = -x + 3$$

$$x + y = 3$$

**หมายเหตุ** ถึงตรงนี้ก็ตัดตัวเลือก2. , 3. และ 4. ได้แล้ว

แทนค่าในสมการ (1) ; $x^2 + (-x+3)^2 - 6(-x+3) + 1 = 0$

$$x^2 - 6x + 9 + 6x - 18 + 1 = 0$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = 4$$

เพราะฉะนั้น $x = -2 , 2$ ( ถึงตรงนี้ก็ตัดตัวเลือกได้อีกแล้ว)

สรุปจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลมคือ ( 2 , 1) และ (–2 , 5)

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂⊄∈∉° ∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥ →↑ X Y
❶❷❸❹①②③④

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 7.

1. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

   เซตในตัวเลือกใดไม่เป็นสับเซตของ $D_r \cap R_r$

   1. $(2, \infty)$
   2. $(-\infty, -1)$
   3. $(0, 2)$
   4. $(-1, 0)$

2. กำหนด $f(x) = 2x - 3$ และ $D_f = [2, 5]$

   ถ้า $g^{-1}(f(x)) = 3x + 2$ แล้ว ตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. $g(x) = 6x - 7$
   2. $g(2) = -2$
   3. $g^{-1}(3) = 1$
   4. $g^{-1}(x) = x + 2$

3. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริงบวก จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก.) ค่าความจริงของ $\forall x \forall y [x^{\log y} = y^{\log x}]$ เป็นจริง

   (ข.) ค่าความจริงของ $\forall x \forall y [(\log x)^y = (\log y)^x]$ เป็นจริง

   ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. (ก.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
   2. (ข.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
   3. (ก.) และ (ข.) ถูกต้อง
   4. (ก.) และ (ข.) ผิด

4. **บทนิยาม** สำหรับ $x \in R$, $[x]$ คือจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x

   จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก.) $[x + y] \leq [x] + [y]$ ทุกจำนวนจริง x , y

   (ข.) $[xy] = [x][y]$ ทุกจำนวนเต็ม x , y

   (ค.) $[-x] = -[x]$ ทุกจำนวนตรรกยะ x , y

   ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ
   2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
   3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ
   4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

5. กำหนดให้ a , b , c , d $\in$ {1 , 2 , 3 , ... , 9} และ $x = 1000a + 100b + 10c + d$
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(ก.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว
(ข.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร ผลคูณของ a , b , c , d ลงตัว
(ค.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร $1000d + 100c + 10b + a$ ลงตัว
ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง
1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ 2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ 4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

6. เส้นโค้ง P เป็นกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (5 , 0) และ (–5 , 0) เป็นจุดโฟกัสความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 8 ถ้าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับไฮเพอร์โบลา P ที่จุด (5 , k) แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด
1. $(\frac{4}{5}, 0)$ 2. $(\frac{6}{5}, 0)$
3. $(\frac{8}{5}, 0)$ 4. $(\frac{16}{5}, 0)$

7. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(ก.) $1 + \sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta + \ldots = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$
(ข.) $1 - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta + \ldots = \frac{1}{2\cos 4\theta}$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$
ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง
1. (ก.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว 2. (ข.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
3. (ก.) และ (ข.) ผิดทั้งสองข้อ 4. (ก.) และ (ข.) ถูกต้องทั้งสองข้อ

8. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(ก.) $f(x) = \arcsin(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง [0 , 1]
(ข.) $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$
(ค.) $h(x) = \arccos(x^2)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (0 , 1)
ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ 2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ 4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

9. จุด A(– 1 , 2) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C ซึ่งมีรัศมี 3 หน่วย P(– 4 , – 4) เป็นจุดนอกวงกลม C กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และห่างจาก A เป็นระยะทาง $\frac{3}{\sqrt{2}}$ หน่วย ถ้า (p , q) เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับวงกลม C แล้ว p + q เท่ากับเท่าใดได้บ้าง

1. $\frac{18}{5}$ 2. 0
3. $\frac{8}{5}$ 4. 2

10. สำหรับ $\bar{V} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบสามมิติ ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{V}$ เขียนแทนด้วย $\|\bar{V}\|$ กำหนดโดย $\|\bar{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ นอกจากนี้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{V}$ คือ $\frac{\bar{V}}{\|\bar{V}\|}$

กำหนด $\bar{V}_1 = 3\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$

$\bar{V}_2 = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ คือเวกเตอร์ใด

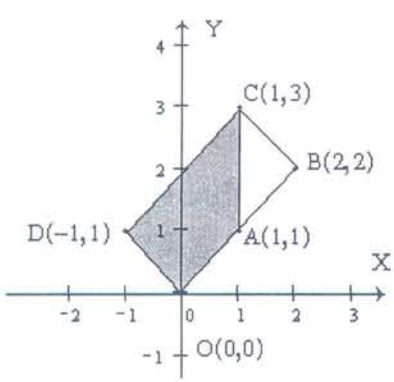
1. $\frac{-\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}}{3\sqrt{2}}$ 2. $\frac{\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}}{3\sqrt{2}}$
3. $\frac{-\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}}{\sqrt{19}}$ 4. $\frac{\bar{i} - \bar{j} + 4\bar{k}}{\sqrt{19}}$

11. จากอนุกรมเรขาคณิต จะได้ $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n , |x| < 1$

นอกจากนี้ $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} x^n , |x| < 1$ ค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ เท่ากับพจน์ใดต่อไปนี้

1. $\frac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$ 2. $\frac{n}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$
3. $\frac{x}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$ 4. $\frac{n}{1-x}$ เมื่อ $|x| < 1$

12.



พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม OACD เท่ากับเท่าใด

1. $\int_{-1}^{1} (x + 2 - |x|)dx$ 2. $\int_{-1}^{1} (|x| + x + 2)dx$

3. $\int_{-1}^{1} (|x| - x + 2)dx$ 4. $\int_{-1}^{1} (|x| - 2)dx$

13. กำหนดให้ $x, y \in R^+$ ค่าน้อยที่สุดของ $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 4

3. 6 4. 8

14. วงกลมที่ผ่านจุด (0 , 3) และผ่านจุดตัดกันของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ กับวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ใด

1. (1 , 1) 2. (2 , 2)

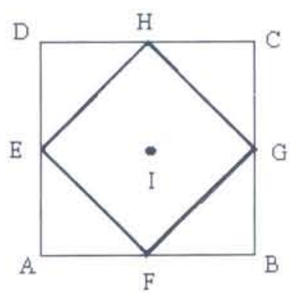
3. (1 , − 1) 4. (2 , − 2)

15. เซตคำตอบของสมการ $\log(3 - 2^x) = (1 - x)\log 2$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

1. $[-1, 2]$ 2. $[-2, \frac{1}{2}]$

3. $[\frac{1}{2}, -1]$ 4. $[-1, \frac{1}{2}]$

16. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส




E , F , G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD , AB , BC และ CD ตามลำดับ I เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \bar{0}$ 2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH}$

3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$ 4. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$

17. กำหนดให้ $|\bar{u}| = 1$ , $|\bar{v}| = 1$ , $|\bar{w}| = 3$, $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|$ เท่ากับเท่าใด

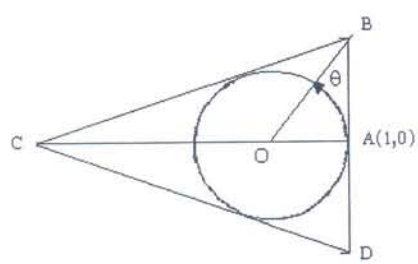
1. $\sqrt{5}$
2. $2\sqrt{5}$
3. $5$
4. $20$

18. กำหนดให้ $\theta \in [-\pi, \pi]$ เซตคำตอบของสมการ $1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + ... + \tan^{2n}\theta + ... = \frac{3}{2}$

ตรงกับเซตในข้อใด

1. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$
2. $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$
3. $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$
4. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

19. จากรูป




BD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง BD สัมผัส
วงกลมที่จุด A(1 , 0) OB ทำมุม θ เรเดียน กับ OA โดยที่ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
BC และ DC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งพบส่วนต่อของ AO ที่ C
พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับกี่ตารางหน่วย

1. $2\cos\theta\cot\theta$
2. $-\tan^2\theta\tan2\theta$
3. $-\tan^2\theta\cot2\theta$
4. $2\sin\theta\tan\theta$

20. ค่าของ $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - ... - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(2n+1)$
2. $-(2n+1)$
3. $n(2n-1)$
4. $-n(2n-1)$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 7.

**1. ตอบ 4.**

**แนวคิด** $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

จากสมการ $x(x-2)y - 1 = 0$

$$x(x-2)y = 1$$

$$y = \frac{1}{x(x-2)}$$

เพราะฉะนั้น x เป็นจำนวนจริงได้ทุกค่ายกเว้น 0 และ 2

ดังนั้น $D_r = R - \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, \infty)$

**การหาเรนจ์ของ r** ต้องหาค่า y ที่เป็นไปได้

จากสมการ $x(x-2)y - 1 = 0$

$$yx^2 - 2yx - 1 = 0 \qquad \text{..................(1)}$$

เพราะว่าสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง

$x = \dfrac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$ ก็ต่อเมื่อ $B^2 - 4AC \geq 0$

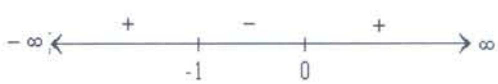
เพราะฉะนั้นจากสมการ (1) จะได้ $x = \dfrac{-(-2y) \pm \sqrt{(-2y)^2 - 4(y)(-1)}}{2(y)}$

ดังนั้น $(-2y)^2 - 4(y)(-1) \geq 0$ และ $y \neq 0$

$$4y^2 + 4y \geq 0$$

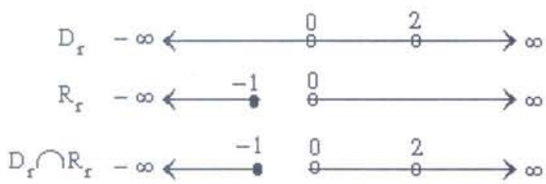
$$y(y+1) \geq 0$$

$-1 \geq y$ หรือ $y > 0$




สรุป $R_r = (-\infty, -1] \cup (0, \infty)$

**การหา $D_r \cap R_r$** $\quad D_r \cap R_r = (R - \{0, 2\}) \cap ((-\infty, -1] \cup (0, \infty))$



$D_r \cap R_r = (-\infty , -1] \cup (0 , 2) \cup (2 , \infty)$ สรุปตัวเลือก 4. $(-1,0)$ ไม่เป็นสับเซตของ $D_r \cap R_r$

**หมายเหตุ** การหาตัวเลือกที่ถูกต้องอย่างรวดเร็ว นักเรียนไม่จำเป็นต้องหา $D_r \cap R_r$ เพียงแต่ใช้เหตุผลว่า $(-1 , 0) \not\subset (-\infty, -1] \cup (0 ,\infty) = R_r$ เพราะฉะนั้น $(-1,0) \not\subset D_r \cap R_r$ แน่นอน

**2. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $f(x) = 2x - 3$

$$g^{-1}(f(x)) = 3x + 2$$

$$g^{-1}(2x - 3) = 3x + 2 \qquad \text{.....................(1)}$$

แทน x ด้วย K ; $g^{-1}(2K - 3) = 3K + 2$

แทน K ด้วย $\frac{L}{2}$ ; $g^{-1}(2(\frac{L}{2}) - 3) = 3(\frac{L}{2}) + 2$

$$g^{-1}(L - 3) = \frac{3}{2}L + 2$$

แทน L ด้วย x + 3 ; $g^{-1}(x + 3 - 3) = \frac{3}{2}(x + 3) + 2$

$$g^{-1}(x) = \frac{3x}{2} + \frac{13}{2}$$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ผิด

เพราะว่า $g^{-1}(3) = \frac{3}{2}(3) + \frac{13}{2} \neq 1$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

เพราะว่า $g^{-1}(-3) = \frac{3}{2}(-3) + \frac{13}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{13}{2} = 2$ เพราะฉะนั้น $g(2) = -3$ ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

**หมายเหตุ** จากสมการ (1) สามารถหา g(x) ก่อนได้ดังนี้

เพราะว่า $g^{-1}(2x - 3) = 3x + 2$

เพราะฉะนั้น $g(3x + 2) = 2x - 3$

$$g(3(\frac{x}{3}) + 2) = 2(\frac{x}{3}) - 3$$

$$g(x + 2) = \frac{2}{3}x - 3$$

$$g((x - 2) + 2) = \frac{2}{3}(x - 2) - 3$$

$$g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} - 3 = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3}$$

ดังนั้น $g(2) = \frac{2}{3}x - \frac{13}{3} = \frac{2}{3}(2) - \frac{13}{3} = -3$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง

**3. ตอบ 1.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.** ถูกต้อง

ทุกจำนวนจริงบวก x , y $(\log x)(\log y) = (\log y)(\log x)$

$$\log (y^{\log x}) = \log (x^{\log y})$$

$$y^{\log x} = x^{\log y}$$

สรุป $\forall x \, \forall y \, [x^{\log y} = y^{\log x}]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ ข.** ผิด ตัวอย่างเช่น x = 10 และ y = 100

$$(\log x)^y = (\log 10)^{100} = 1^{100} = 1$$

$$(\log y)^x = (\log 100)^{10} = 2^{10} \neq 1$$

สรุป $\forall x \, \forall y \, [(\log x)^y = (\log y)^x]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด ข้อความ ก. ผิด** ตัวอย่างเช่น x = 1.5 , y = 1.5 จะได้

$$[x] + [y] = [1.5] + [1.5] = 1 + 1 = 2$$

$$[x + y] = [1.5 + 1.5] = [3] = 3 \not\leq [x] + [y]$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**ข้อความ ข. ถูกต้อง** เพราะว่า x และ y เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น xy เป็นจำนวนเต็ม

$$[x] = x , [y] = y , [xy] = xy$$

สรุป $[xy] = [x][y]$ ทุกจำนวนเต็ม x และ y เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**ข้อความ ค. ถูกต้อง** ตัวอย่างเช่น x = 1.5 เป็นจำนวนตรรกยะ

$[-x] = [-1.5] = -2$ แต่ $-[x] = -[1.5] = -1$ เพราะฉะนั้น $[-x] \neq -[x]$

5. **ตอบ** 2.

**แนวคิด** **พิจารณาข้อความ (ก.)** ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ 9 หาร x $= 1000a + 100b + 10c + d$ ลงตัว

$$x = 999a + a + 99b + b + 9c + c + d$$
$$= 999a + 99b + 9c + (a + b + c + d)$$
$$= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d)$$
$$a + b + c + d = x - 9(111a + 11b + c)$$

เพราะว่า 9 หาร x ลงตัว ดังนั้น 9 หาร $x - 9(111a + 11b + c)$ ลงตัว

สรุป 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ (ข.)** ผิด ตัวอย่างเช่น 9 หาร 2781 ลงตัว แต่ $(2)(7)(8)(1) = 112$ หารด้วย 9 ไม่ลงตัว ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ (ค.)** ถูกต้อง แสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ $x = 1000a + 100b + 10c + d$

เมื่อ 9 หาร x ลงตัว จะได้ว่า 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว

เพราะว่า 9 หาร $999d + 99c + 9b$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น 9 หาร $(999d + 99c + 9b) + (a + b + c + d)$ ลงตัว

นั่นคือ 9 หาร $1000d + 100c + 10b + a$ ลงตัว

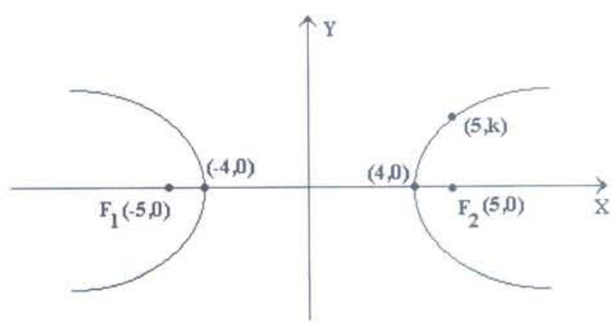
6. **ตอบ** 4.

**แนวคิด** เพราะว่า $F_1(-5,0)$ และ $F_2(5,0)$ เป็นจุดโฟกัส ดังนั้น (0,0) เป็นจุดศูนย์กลางแกนตามขวางทับแกน X และมี $(-4,0),(4,0)$ เป็นจุดยอดไฮเพอร์โบลามี $a = 4$ , $c = 5$

ดังนั้น $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{25-16} = 3$ สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

จากสมการไฮเพอร์โบลาจะได้

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$
$$\frac{d}{dx}(9x^2 - 16y^2) = \frac{d}{dx}1$$
$$\frac{d}{dx}9x^2 - \frac{d}{dx}16y^2 = 0$$
$$18x - 32y\frac{dy}{dx} = 0$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{32y} = \frac{9x}{16y}$$

เพราะว่า (5 , k) เป็นจุดบนไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{25}{16} - \frac{k^2}{9} = 1$

$$\frac{k^2}{9} = \frac{25}{16} - 1 = \frac{9}{16}$$

$$k^2 = \frac{81}{16}$$

$$k = \pm \frac{9}{4}$$

ที่จุด $(5 , \frac{9}{4})$ ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{dy}{dx}(x = 5 , y = \frac{9}{4}) = \frac{9(5)}{16(\frac{9}{4})} = \frac{5}{4}$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y - \frac{9}{4} = \frac{5}{4}(x - 5)$

$$4y - 9 = 5x - 25$$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $-9 = 5x - 25$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{16}{5}$

สรุป จุดตัดแกน X คือ $(\frac{16}{5} , 0)$

**หมายเหตุ** เมื่อทำได้แค่นี้นักเรียนควรจะเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบแล้วทำข้ออื่นก่อนดีกว่า

ที่จุด $(5 , -\frac{9}{4})$ ความชันเส้นสัมผัส $= \frac{dy}{dx}(x = 5 , y = -\frac{9}{4}) = \frac{9(5)}{16(-\frac{9}{4})} = -\frac{5}{4}$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y + \frac{9}{4} = \frac{5}{4}(x - 5)$

$$4y + 9 = -5x + 25$$

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $9 = -5x + 25$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{16}{5}$ สรุปจุดตัดแกน X เป็น $(\frac{16}{5} , 0)$

**7. ตอบ 1.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ (ก.)** ผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต $1 + r + r^2 + r^3 + \ldots = \frac{1}{1-r}$ เมื่อ $|r| < 1$ เพราะว่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ จะได้ $0 < \sin\theta < 1$ เพราะฉะนั้น

$$1 + \sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta + \ldots = \frac{1}{1-\sin\theta} = \frac{1}{1-\sin\theta}\,\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta} = \frac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

สรุปข้อความ (ก.) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

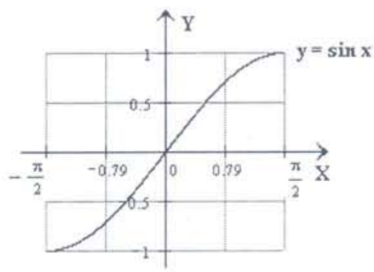
**พิจารณาข้อความ (ข.) ผิด ตัวอย่างเช่น** $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $\cos 2\theta = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

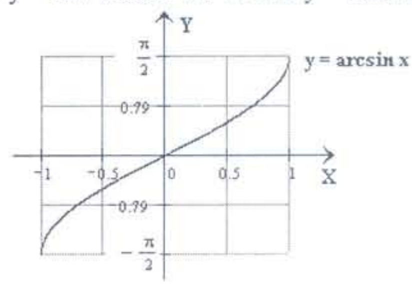
เพราะฉะนั้น $1 - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta + \ldots = 1$ แต่ $\frac{1}{2\cos 4\theta} = \frac{1}{2\cos 4(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2(-1)} = -\frac{1}{2}$

สรุปข้อความ (ข.) ผิด

8. ตอบ 1.

**แนวคิด พิจารณาข้อความ (ก.)** ถูกต้อง จากกราฟของ y = sin x และ กราฟของ y = arcsin x




f(x) = arcsin(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง [0,1] เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ (ข.)** ผิด ตัวอย่างเช่น $g(1) = \arcsin(\frac{1}{1}) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$$g(2) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$$

เพราะฉะนั้น $2 > 1$ แต่ $g(2) \not> g(1)$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1,\infty)$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**หมายเหตุ** $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1,\infty)$

แสดงข้อพิสูจน์ ให้ $x_1, x_2 \in [1,\infty)$ และ $x_1 > x_2 \geq 1$ จะได้ $0 < \frac{1}{x_1} < \frac{1}{x_2} \leq 1$

เพราะว่า arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $g(x_1) = \arcsin(\frac{1}{x_1}) < \arcsin(\frac{1}{x_2}) = g(x_2)$

สรุป ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว $g(x_1) < g(x_2)$ ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันลด

**พิจารณาข้อความ (ค.)** ผิด ตัวอย่างเช่น

$x_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ , $x_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\arccos(x_1^2) = \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$

$x_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ , $x_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\arccos(x_2^2) = \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$

เพราะว่า $(\frac{1}{\sqrt[4]{2}})^4 = \frac{1}{2}$ และ $(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})^4 = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = (\frac{1}{\sqrt[4]{2}})^4$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} > \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

นั่นคือ $x_2 > x_1$ แต่ $h(x_2) = \frac{\pi}{6} \ngtr \frac{\pi}{4} = h(x_1)$ สรุป h ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (0,1)

**หมายเหตุ** การแสดงว่า h(x) เป็นฟังก์ชันลด ให้ $x_1, x_2 \in (0,1)$ และ $x_1 < x_2$

$$0 < x_1 < x_2 < 1$$

$$0 < x_1^2 < x_2^2 < 1$$

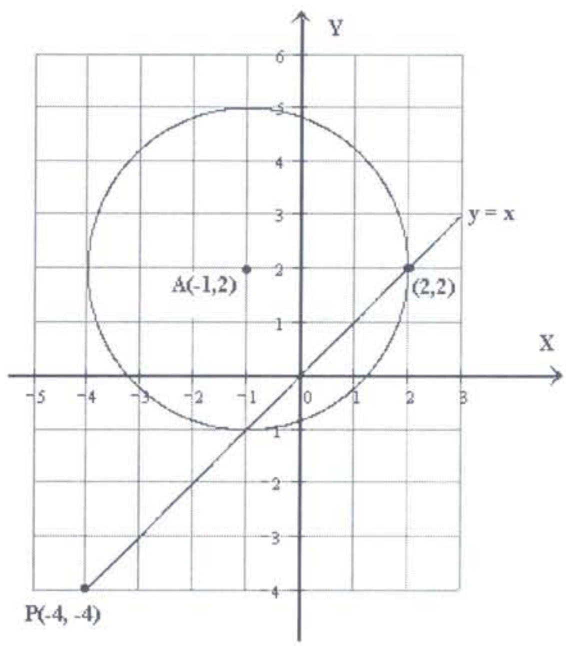
เพราะว่า arccos x เป็นฟังก์ชันลด เพราะฉะนั้น $\arccos(x_1^2) > \arccos(x_2^2)$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

นั่นคือ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $h(x_1) > h(x_2)$ สรุป $h(x) = \arccos(x^2)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง (0,1)

**9. ตอบ 3.**

**แนวคิด**




สมมติเส้นตรง L มีสมการเป็น

$y = mx + c$ หรือ $mx - y + c = 0$

เพราะว่าระยะห่างจาก A(–1 , 2)

มายังเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{m(-1)-(2)+c}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

เพราะว่าเส้นตรงผ่านจุด (–4 , –4)

เพราะฉะนั้น $m(-4)-(-4)+c = 0$

$$c = 4m - 4$$

ดังนั้น $$\left|\frac{-m-2+4m-4}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{3m-6}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\left|\frac{m-2}{\sqrt{m^2+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{m^2-4m+4}{m^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$2(m^2-4m+4) = m^2+1$$

$$m^2-8m+7 = 0$$

$$(m-7)(m-1) = 0$$

$$m = 1\ ,\ 7$$

$m = 1$ ;   $c = 4(1) - 4 = 0$   สมการ L คือ $y = x$

$m = 7$ ;   $c = 4(7) - 4 = 24$   สมการ L คือ $y = 7x + 24$

สรุปเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-4\ ,\ -4)$ และห่างจากจุด $A(-1\ ,\ 2)$ เป็นระยะทาง $\frac{3}{\sqrt{2}}$ มี 2 เส้นคือ

$y = x$ และ $y = 7x + 24$

วงกลม C มีสมการเป็น $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$ แทนค่า $y = x$

จะได้ $$(x+1)^2 + (x-2)^2 = 3^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 = 9$$

$$2x^2 - 2x - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x-2)(x+1) = 0$$

$$x = 2\ ,\ -1$$

จุดตัดของเส้นตรง L : $y = x$ และวงกลมคือ $(2\ ,\ 2)$ และ $(-1\ ,\ -1)$

แทนค่า $y = 7x + 24$ ในสมการวงกลม $(x+1)^2 + (7x+24-2)^2 = 3^2$

$$(x+1)^2 + (7x+22)^2 = 9$$

$$x^2 + 2x + 1 + 49x^2 + 308x + 484 = 9$$

$$50x^2 + 310x + 476 = 0$$

$$25x^2 + 155x + 238 = 0$$

$$x = \frac{-155 \pm \sqrt{155^2 - 4(25)(238)}}{2(25)} = \frac{-155 \pm \sqrt{225}}{50} = \frac{-155 \pm 15}{50} = -\frac{170}{50}, -\frac{140}{50} = -\frac{17}{5}, -\frac{14}{5}$$

$$y = 7(-\frac{17}{5})+24 \text{ , } 7(-\frac{14}{5})+24 = \frac{-119+120}{5}, \frac{-98+120}{5} = \frac{1}{5}, \frac{22}{5}$$

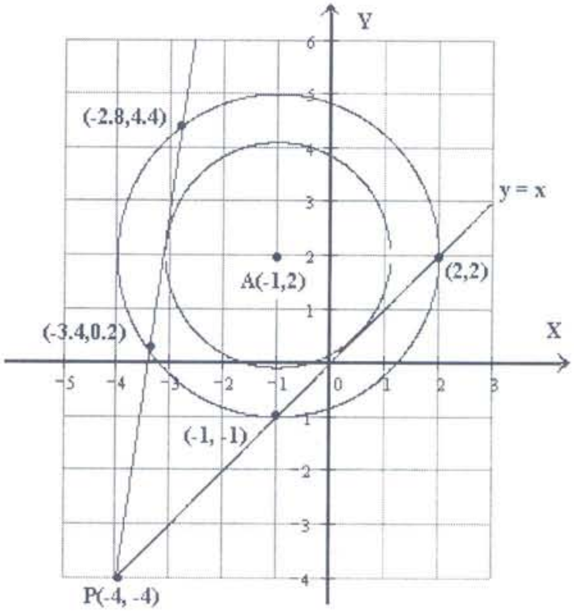
จุดตัดของวงกลมกับเส้นตรง $y = 7x + 24$ คือ $(-\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$ และ $(-\frac{14}{5}, \frac{22}{5})$

สรุป $(p , q)$ ที่เป็นไปได้คือ $(2,2)$ , $(-1,-1)$ , $(-\frac{17}{5}, \frac{1}{5})$ , $(-\frac{14}{5}, \frac{22}{5})$

$$p + q = 4, -2, -\frac{16}{5}, \frac{8}{5}$$

**การตัดตัวเลือก**

ขั้นตอนของการวาดรูปเพื่อตัดตัวเลือกทำดังนี้




1. เขียนวงกลม C และจุด $P(-4,-4)$
2. ประมาณค่า $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

   $= (1.5)(1.414) = 2.12 \simeq 2.1$
3. เขียนวงกลมรัศมี 2.1 จุดศูนย์กลางที่ A
4. ลากเส้น L จากจุด P มาสัมผัสวงกลม

   วงเล็กจะได้ว่า L ตัดวงกลม C

   ทั้งหมด 4 แห่ง

   วัดพิกัดทุกจุดด้วยไม้บรรทัดได้พิกัด

   ของจุดตัด เป็น $(p,q)$

   $(p , q) = (-1,-1),(2,2),(-3.4,0.2),(-2.8,4.4)$

   $p+q = -2, 4, -3.2, 1.6$

   สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

**10. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $\bar{v}_1 = 3\bar{i} - 3\bar{j} - \bar{k}$

และ $\bar{v}_2 = 4\bar{i} - 4\bar{j} + 3\bar{k}$

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = (3-4)\ \bar{i} + (-3-(-4))\ \bar{j} + (-1-3)\bar{k} = -\bar{i} + \bar{j} - 4\bar{k}$$

$$\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\| = \sqrt{1+1+16} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{\|\vec{v}_1-\vec{v}_2\|} = \frac{-\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}}{3\sqrt{2}}$$

**การตัดตัวเลือก** ใช้ขนาดของเวกเตอร์ช่วยในการตัดตัวเลือก

เพราะว่า $\left\|\frac{-\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{19}}\right\| = \sqrt{(\frac{1}{19})+(\frac{1}{19})+(\frac{16}{19})} \neq 1$ และ $\left\|\frac{-\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{19}}\right\| \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**11.ตอบ 1.**

**แนวคิด** $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ เมื่อ $|x| < 1$

$$\frac{d}{dx}(\frac{1}{1-x}) = \frac{d}{dx}(\sum_{n=0}^{\infty} x^n)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ เมื่อ $|x| < 1$

**การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = 0$ แต่ $\frac{n}{(1-x)^2} = n \neq 0$ และ $\frac{n}{1-x} = n \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เหตุผลอีกลักษณะที่ใช้ได้คือ ผลบวก $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ ต้องไม่มีพจน์ของ n

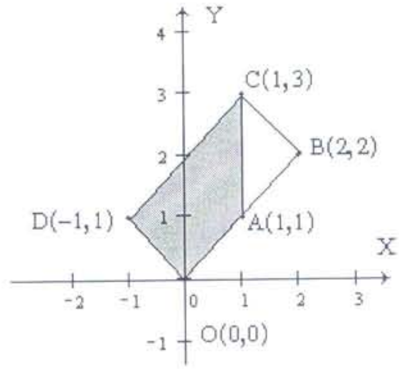
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ได้เหมือนกัน

**12.ตอบ 1.**

**แนวคิด** ความชัน DC = $\frac{3-1}{1+1} = 1$ , ความชัน OA = $\frac{1-0}{1-1} = 1$

ดังนั้น DC//OA ความชัน OD = $\frac{-1-0}{1-0} = -1$ ดังนั้น OD $\perp$ OA

สรุป OACD เป็นสี่เหลี่ยมคางหมู และ OD เป็นความสูง




พื้นที่□OACD $= \frac{1}{2}\times$สูง$\times$ผลบวกของด้านคู่ขนาน

$= \frac{1}{2}\times OD\times(OA+DC)$

$= \frac{1}{2}\times\sqrt{1^2+1^2}\times(\sqrt{1^2+1^2}+\sqrt{2^2+2^2})$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}(3\sqrt{2}) = 3$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณควรใช้เหตุผลดังนี้

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

2. เมื่อ $a < c < b$ จะได้ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

สังเกตจากตัวเลือกมีฟังก์ชันที่สำคัญคือ $|x|$ , $x$ , $2$

$$\int_{-1}^{1} 2\,dx = (2x\Big|_{-1}^{1} = 2-(-2) = 4$$

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = (\frac{x}{2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}-\frac{1}{2} = 0$$

$$\int_{-1}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} |x|dx + \int_{0}^{1} |x|dx = \int_{-1}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{1} xdx$$

$$= (-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + (\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = -(0-(\frac{1}{2})) + (\frac{1}{2}-0) = 1$$

**ตัวเลือก 1.** $\int_{-1}^{1} (x+2-|x|)dx = \int_{-1}^{1} xdx + \int_{-1}^{1} 2dx - \int_{-1}^{1} |x|dx = 0+4+1 = 3$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

**หมายเหตุ** **ตัวเลือก 2.** $\int_{-1}^{1} (|x| + x + 2)dx = 5$

**ตัวเลือก 3.** $\int_{-1}^{1} (|x| - x + 2)dx = 5$

**ตัวเลือก 4.** $\int_{-1}^{1} (|x| - 2)dx = 1 - 4 = -3$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $-1 \le x \le 1$ เพราะฉะนั้น $|x| \le 1$

ดังนั้น $|x| - 2 < 0$ ทำให้ $\int_{-1}^{1} (|x| - 2)dx \le 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\int_{-1}^{1} xdx = 0$ เพราะฉะนั้น $\int_{-1}^{1} (|x|+x+2)dx = \int_{-1}^{1} (|x|-x+2)dx$

ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้ (มิฉะนั้นโจทย์จะผิด)

**13.ตอบ 2.**

**แนวคิด** การแสดงว่าทุกจำนวนจริง $a > 0$ จะได้ว่า $a + \frac{1}{a} \ge 2$

เพราะว่า $(a - 1)^2 \ge 0$

$a^2 - 2a + 1 \ge 0$

$a^2 + 1 \ge 2a$

เพราะฉะนั้น $a + \frac{1}{a} \ge 2$

จากโจทย์ $x , y \in R^+$

$$\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} = x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = (x + \frac{1}{x}) + (y + \frac{1}{y}) \ge 2 + 2 = 4$$

สรุป $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} \ge 4$ ทุกค่า $x , y \in R^+$

เพราะฉะนั้นค่าน้อยที่สุดของ $\frac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy}$ คือ 4

**การตัดตัวเลือก** แทนค่า $x = 1 , y = 1$

จะได้ $\dfrac{x^2y + y + xy^2 + x}{xy} = \dfrac{(1)(1) + 1 + (1)(1) + 1}{(1)(1)} = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**14. ตอบ 4.**

**แนวคิด** การหาจุดตัดของสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{.................... (1)}$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0 \quad \text{.................... (2)}$$

แทนค่า (1) ใน (2) ; $25 - 2x + 2y - 23 = 0$

$$1 - x + y = 0$$

$$y = x - 1$$

แทนค่าใน (1) ; $x^2 + (x-1)^2 = 25$

$$x^2 + x^2 - 2x + 1 = 25$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x-4)(x+3) = 0$$

$$x = 4 , -3$$

$$y = 3 , -4$$

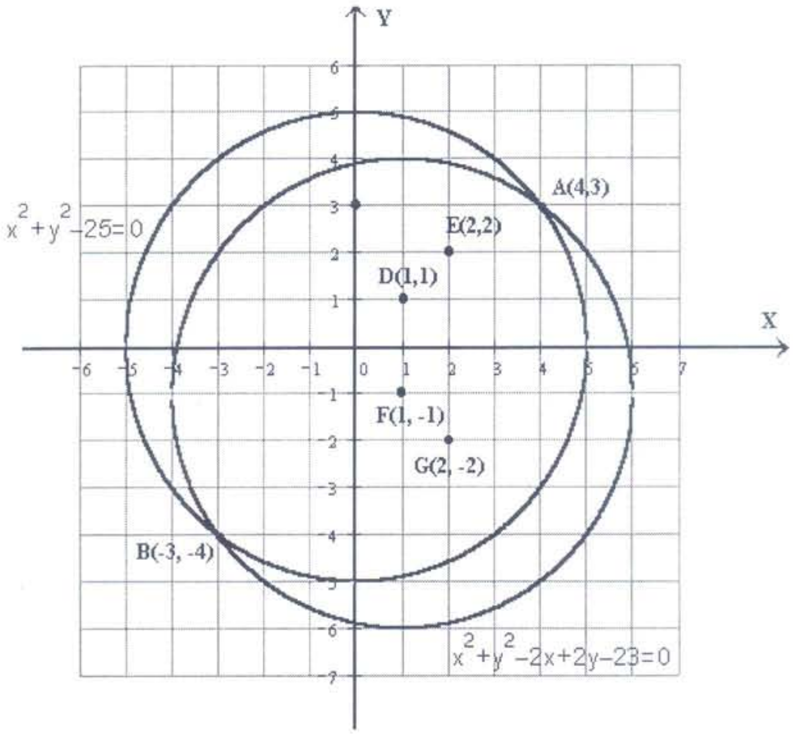
จุดตัดของวงกลมคือ A(4 , 3) และ B(–3 , –4)

เขียนภาพประกอบเพื่อช่วยในการคำนวณ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 25$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (1 , –1) รัศมี 5




**การตัดตัวเลือก** เขียนจุดในตัวเลือก D(1 , 1) , E(2 , 2) , F(1 , –1) , G(2 , –2)

โดยการวัดระยะทางจากจุด D , E , F , G ไปยังจุด A , B , C

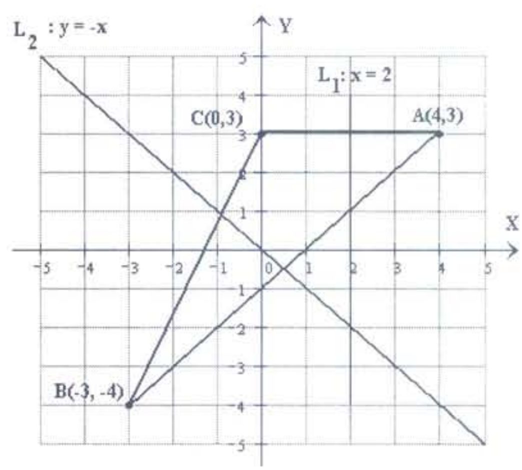
เพราะว่า $|AD| \neq |BD|$ เพราะฉะนั้น D เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

เพราะว่า $|AE| \neq BE|$ เพราะฉะนั้น E เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

เพราะว่า $|AF| \neq |FC|$ เพราะฉะนั้น F เป็นจุดศูนย์กลางไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**หมายเหตุ**เพื่อประโยชน์ของผู้อ่านสำหรับข้อสอบแบบเติมคำตอบจะแสดงให้เห็นวิธีหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A , B และ C ดังนี้ จากเหตุผลทางเรขาคณิตกล่าวว่าจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A , B , C อยู่ที่จุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB , AC และ BC



**การหาสมการเส้นตรง $l_1$ ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AC**

จุดกึ่งกลางของ AC คือ $(\frac{0+4}{2}, \frac{3+3}{2}) = (2, 0)$

เพราะว่า AC ขนานกับแกน X เพราะฉะนั้น $l_1$ มีสมการเป็น $x = 2$

**การหาสมการเส้นตรง $l_2$ ที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB**

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{3-(-4)}{4-(-3)} = 1$

เพราะว่า $l_2$ ตั้งฉากกับ AB เพราะฉะนั้นความชัน $l_2$ เท่ากับ $-1$

จุดกึ่งกลาง AB คือ $(\frac{4-3}{2}, \frac{3-4}{2}) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

สมการเส้นตรง $l_2$ คือ

$$\begin{aligned} y-(\frac{1}{2}) &= (-1)(x-\frac{1}{2}) \\ 2y+1 &= -2x+1 \\ y &= -x \end{aligned}$$

**การหาจุดตัด $l_1$ และ $l_2$**

$l_1 : x = 2$

$l_2 : y = -x$

สรุปจุดตัดคือ $(2, -2)$

**หมายเหตุ** ใช้การวาดรูปเพื่อหาจุดตัดของ $l_1$ และ $l_2$ โดยไม่ต้องคำนวณหาสมการเส้นตรง ก็จะได้พิกัดของจุดตัด $l_1$, $l_2$ คือ $(2, -2)$ เหมือนกัน

**วิธีลัด** จากเหตุผลทางเรขาคณิตสมการวงกลม

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

และ

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

ตัดกันที่จุด $(x_1, y_1)$ และ $(x_2, y_2)$ เมื่อ $(x_0, y_0)$ เป็นจุดใดๆจะได้ว่า

วงกลมที่ผ่านจุด $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$ และ $(x_2, y_2)$ ต้องมีรูปแบบเป็น

$$(x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1) + K(x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

เมื่อ K หาได้จากการแทนค่า x ด้วย $x_0$ และแทนค่า y ด้วย $y_0$

จากโจทย์ $x^2 + y^2 - 25 = 0$

$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$

ผ่านจุด $(x_0, y_0) = (0, 3)$ จากสมการ $(x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23) + K(x^2 + y^2 - 25) = 0$

แทนค่า $x = 0$, $y = 3$ จะได้ $(0 + 9 - 0 + 6 - 23) + K(0 + 9 - 25) = 0$

$$-8 - 16K = 0$$

$$K = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมที่ต้องการคือ $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 + (-\frac{1}{2})(x^2 + y^2 - 25) = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 21 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 29$$

สรุปจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการคือ $(2, -2)$ และรัศมี $\sqrt{29}$

**15. ตอบ 1.**

**แนวคิด** พิจารณาสมการ

$$\log(3 - 2^x) = (1 - x)\log 2 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\log(3 - 2^x) = \log 2^{(1-x)}$$

$$3 - 2^x = 2^{(1-x)} = 2 \cdot 2^{-x}$$

$$3 \cdot 2^x - 2^{2x} = 2$$

$$(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$(2^x - 2)(2^x - 1) = 0$$

$$2^x = 2, 1$$

$$x = 1, 0$$

**ตรวจสอบคำตอบ**

แทนค่า $x = 1$ ในสมการ (1) ; $\log(3 - 2^1) = \log 1 = 0 = (1 - 1)\log 2$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ ได้

แทนค่า $x = 0$ ในสมการ (1) ; $\log(3-2^0) = \log 2 = (1-0)\log 2$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ได้

จากตัวเลือกพบว่า $\{0, 1\} \subset [-1, 2]$

**การตัดตัวเลือก** โดยการแทนค่า $x = 1$ พบว่า $\log(3-2^1) = 0 = (1-1)\log 2$

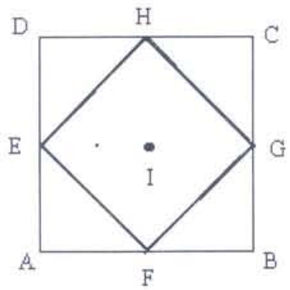
เพราะฉะนั้น $x = 1$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 0$ ทำให้ $\log(3-2^0) = \log 2 = (1-0)\log 2$

แสดงว่า $x = 0$ เป็นคำตอบได้ แต่ $0 \notin [\frac{1}{2}, 2]$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด**




1. **ถูกต้อง**

เพราะว่า $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ , $\overrightarrow{HG} = -\overrightarrow{FE}$ , $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FE} = \bar{0}$

และ $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AF}$ , $\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{FA}$ , $\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FA} = \bar{0}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH}\,\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA}$

$$= (\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH}) + (\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{FE}) + \overrightarrow{FA} \quad = \overrightarrow{DH} + \bar{0} + \overrightarrow{FA} \quad = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{FA} \quad = \bar{0}$$

2. **ผิด**เพราะว่า $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{DH}$

แต่ $\overrightarrow{DH} \neq \overrightarrow{GH}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} \neq \overrightarrow{GH}$

3. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{DG}$

และ $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}$ $(\because 2\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB})$

$= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DC}$ $(\because \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{CG})$

$= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG}$

$= \overrightarrow{DG}$

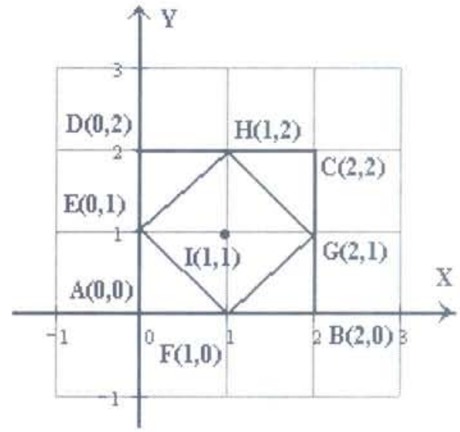
เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$

4. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HC}$ $\quad (\because \overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH})$

$$= \overrightarrow{AC}$$

$$= 2\overrightarrow{AI}$$

**การตัดตัวเลือก** ข้อสอบในลักษณะนี้วิธีที่ดีคือ เขียนรูปในพิกัดมุมฉากโดยให้จุดทุกจุดในรูปมีพิกัดและคิดค่าเวกเตอร์ต่างๆ ในพจน์ของเวกเตอร์ในพิกัดมุมฉากให้ A(0 , 0) และ C(2 , 2) จะได้จุดอื่นๆ มีพิกัดดังรูป




$\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FA}$

$$= \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

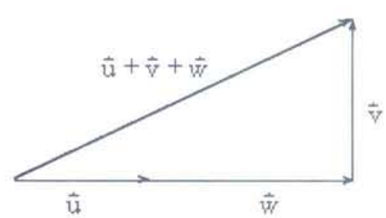
$$= \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \bar{0}$$

$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{GF} = \begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{GH} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{GF} \neq \overrightarrow{GH}$

ดังนั้นเราได้ตัวเลือก 2. เป็นคำตอบโดยไม่ต้องคิดที่ตัวเลือก 3. และ 4.

**17. ตอบ 2.**

**แนวคิด** **วิธีที่ 1** เพราะว่า $\bar{w}$ และ $\bar{u}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\bar{w} \perp \bar{v}$ เพราะฉะนั้นเราสามารถเขียนภาพของเวกเตอร์ $\bar{u}$ , $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ได้ดังนี้ โดยทฤษฎีบทของสามเหลี่ยมมุมฉาก




$$|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|^2 = |\bar{u}+\bar{w}|^2+|\bar{v}|^2$$

$$= (1+3)^2+(2)^2 = 20$$

$$|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}| = \sqrt{20}$$

สรุป $|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}| = 2\sqrt{5}$

**วิธีที่2** เพราะว่า $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

เพราะฉะนั้น $\bar{w}\cdot\bar{v} = 0, \bar{v}\cdot\bar{u} = 0, \bar{w}\cdot\bar{u} = |\bar{w}|\cdot|\bar{u}|\cdot\cos 0^\circ = (3)(1) = 3$

$$|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}|^2 = (\bar{u}+\bar{v}+\bar{w})\cdot(\bar{u}+\bar{v}+\bar{w})$$

$= \bar{u}\cdot\bar{u}+\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{u}\cdot\bar{w}+\bar{v}\cdot\bar{u}+\bar{v}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{w}+\bar{w}\cdot\bar{u}+\bar{w}\cdot\bar{v}+\bar{w}\cdot\bar{w}$

$= |\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2+|\bar{w}|^2+2\bar{u}\cdot\bar{w}+2\bar{u}\cdot\bar{v}+2\bar{u}\cdot\bar{w}$

$= 1^2+2^2+3^2+2(3)+2(0)+2(0)$

$= 20$

สรุป $|\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

**18.ตอบ 2.**

**แนวคิด** $1+\tan^2\theta+\tan^4\theta+\ldots+\tan^{2n}\theta+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $a=1$ , $r=\tan^2\theta$

เพราะฉะนั้น $1+\tan^2\theta+\tan^4\theta+\ldots+\tan^{2n}\theta+\ldots = \dfrac{a}{1-r}$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{1-\tan^2\theta}$$

$$3-3\tan^2\theta = 2$$

$$-3\tan^2\theta = -1$$

$$\tan^2\theta = \frac{1}{3}$$

$$\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$$

สรุปเซตคำตอบคือ $\{\frac{\pi}{6},-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}\}$

**การตัดตัวเลือก** เลือกค่าตัวเลขแทนค่าแล้วคำนวณได้ง่ายเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$

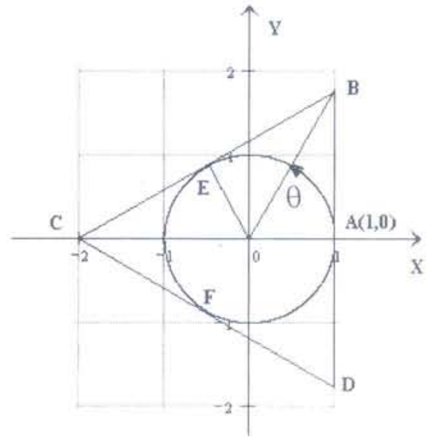
$1+\tan^2\frac{\pi}{4}+\tan^4\frac{\pi}{4}+\ldots+\tan^{2n}\frac{\pi}{4}+\ldots = 1+1+1+\ldots$

เป็นอนุกรมที่ไดเวอร์จเพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ ; $\quad 1+\tan^2\frac{\pi}{3} = 1+(\sqrt{3})^2 = 4 > \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $1+\tan^2\frac{\pi}{3}+\tan^4\frac{\pi}{3}+\ldots+\tan^{2n}\frac{\pi}{3}+\ldots \neq \frac{3}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ; $1+\tan^2(-\frac{\pi}{3}) = 1+(-\sqrt{3})^2 = 4 > \frac{3}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้




**19.ตอบ 2.**

**แนวคิด** จากโจทย์ $|OA| = 1$ และใน $\Delta OAB$ จะได้ว่า

$\tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$

**การแสดงว่า $\Delta ABC$ และ $\Delta ACD$ เท่ากันทุกประการ**

AC เป็นด้านร่วมOA ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส

ดังนั้น $C\hat{A}B = C\hat{A}D = 90^\circ$ CE และ CF เป็นเส้นสัมผัส

เพราะฉะนั้น $E\hat{C}O = O\hat{C}F$ โดย (ม.ค.ม.) จะได้ $\Delta$ ABC และ $\Delta$ ACD เท่ากันทุกประการ

เพราะฉะนั้น ความยาว $|BD| = |AB| + |AD| = \tan\theta + \tan\theta = 2\tan\theta$

เพราะว่า BE และ AB เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น OB แบ่งครึ่งมุม EBAดังนั้น $E\hat{C}O = O\hat{C}F$

เพราะว่า $O\hat{B}A = \frac{\pi}{2} - B\hat{O}A = \frac{\pi}{2} - \theta$ เพราะฉะนั้น $E\hat{B}A = 2B\hat{O}A = 2(\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi - 2\theta$

ใน $\Delta$ ABC $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AC|}{|AB|}$

$$\tan(\pi - 2\theta) = \frac{|AC|}{\tan\theta}$$

$$|AC| = \tan\theta\tan(\pi - 2\theta) = -\tan\theta\tan 2\theta$$

พื้นที่ $\Delta$ BCD $= \frac{1}{2} \times$ ฐาน $\times$ สูง $= \frac{1}{2} \times |BD| \times |AC| = \frac{1}{2}(2\tan\theta) \times (-\tan\theta\tan 2\theta)$

$= -\tan^2\theta\tan 2\theta$ ซึ่งตรงกับตัวเลือก 2.

**การตัดตัวเลือก** เลือกให้ $\Delta BCD$ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ล้อมรอบวงกลม

ดังนั้น $O\hat{B}A = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ เรเดียน และ $\theta = \frac{\pi}{3}$ เพราะว่า $\tan B\hat{O}A = \frac{|AB|}{|OA|} = \frac{|AB|}{1} = |AB|$

ดังนั้น $|AB| = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ และ $|BD| = 2|AB| = 2\sqrt{3}$

ใน $\Delta$ ABC ; $\tan A\hat{B}C = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{|AC|}{|AB|}$

$$\tan 60^\circ = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3} = \frac{|AC|}{\sqrt{3}}$$

$$|AC| = 3$$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\Delta$ BCD $= \frac{1}{2} \times |BD| \times |AC| = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3}) \times 3 = 3\sqrt{3}$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ ในตัวเลือก

1. $2\cos\frac{\pi}{3}\cot\frac{\pi}{3} = 2 \times (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{\sqrt{3}}) \neq 3\sqrt{3}$
2. $-\tan^2\theta\tan 2\theta = -\tan^2\frac{\pi}{3}\tan\frac{2\pi}{3} = -(\sqrt{3})^2(-\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$
3. $-\tan^2\theta\cot 2\theta = -\tan^2\frac{\pi}{3}\cot\frac{2\pi}{3} = -(\sqrt{3})^2(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \sqrt{3} \neq 3\sqrt{3}$
4. $2\sin\theta\tan\theta = 2\sin\frac{2\pi}{3}\tan\frac{2\pi}{3} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2})(\sqrt{3}) = 3 \neq 3\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**20. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรใช้การแทนค่า n บางค่าดีกว่า

เช่นแทนค่า n = 1 ค่าของโจทย์ $-1^2 + 2^2 = 3$

**ตัวเลือก 1.** $1(2+1) = 3$ **ตัวเลือก 2.** $-1(2+1) = -3$

**ตัวเลือก 3.** $1(2-1) = 1$ **ตัวเลือก 4.** $-1(2-1) = -1$

สรุปตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots - (2n-1)^2 + (2n)^2$

$= (-1^2 - 3^2 - 5^2 - \ldots - (2n-1)^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \ldots + (2n)^2)$

$= -(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2) + \sum_{i=1}^{n}(2i)^2$ $= -\sum_{i=1}^{n}(2n-1)^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i^2$

$= -\sum_{i=1}^{n}(4i^2 - 4i + 1) + 4\sum_{i=1}^{n} i^2$ $= -4\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i - n + 4\sum_{i=1}^{n} i^2$

$= 4\sum_{i=1}^{n} i - n$ $= 4(\frac{n}{2})(n+1) - n$

$= 2n(n+1) - n$ $= 2n^2 + 2n - n$

$= 2n^2 + n$ $= n(2n+1)$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 8.

1. เศษเหลือจากการหาร $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ ด้วย $x^2 - 1$ เป็นเท่าใด

   1. $6x$
   2. $9x$
   3. $3x + 1$
   4. $7x + 1$

2. จำนวนเต็มบวก 5 จำนวนเรียงติดต่อกัน ซึ่งมีผลคูณเท่ากับ 6375600 ผลบวกของจำนวนที่น้อยที่สุดกับจำนวนที่มากที่สุดใน 5 จำนวนนั้น เป็นเท่าใด

   1. 43
   2. 44
   3. 45
   4. 46

3. จำนวนเต็มบวก p หาร 3083 , 3295 และ 3666 เหลือเศษเท่ากัน คือ r ผลคูณของ p และ r มีค่าเท่าใด

   1. 435
   2. 477
   3. 496
   4. 512

4. กำหนดให้ $x + y = 3 - \cos 4\theta$ และ $x - y = 4\sin 2\theta$ จะได้ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด

   1. $1+\sqrt{2}$
   2. $\sqrt{2}$
   3. 2
   4. 1

5. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ D เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC E และ F เป็นจุดแบ่งด้าน AC เป็นสามส่วนเท่าๆ กัน $\overrightarrow{AD}$ ตัดกับ $\overrightarrow{BE}$ และ $\overrightarrow{BF}$ ที่ G และ H ตามลำดับ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่รูปสามเหลี่ยม BHG กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นเท่าใด

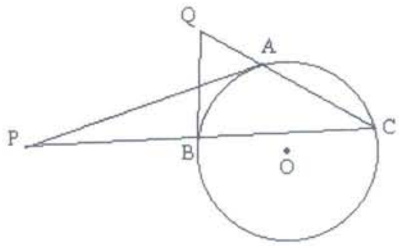
   1. $\frac{1}{8}$
   2. $\frac{2}{9}$
   3. $\frac{3}{16}$
   4. $\frac{3}{20}$

6. มีไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร ต้องการกั้นรั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุด จะได้พื้นที่เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

   1. 80,000 ตารางเมตร
   2. 160,000 ตารางเมตร
   3. 360,000 ตารางเมตร
   4. 480,000 ตารางเมตร

7. **จากรูป** $\overline{PA}$ และ $\overline{QB}$ สัมผัสวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ

ถ้า $QB = \frac{1}{3}$ PA แล้ว $\frac{QA \cdot QC}{PB \cdot PC}$ มีค่าเท่าใด

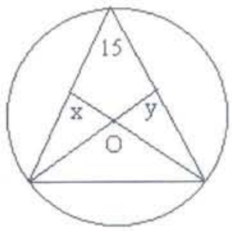



1. $\frac{1}{9}$ 2. $\frac{2}{9}$

3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{2}{3}$

8. **จากรูป** O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม

$\sin(x^\circ+y^\circ) + \cos(x^\circ+y^\circ) - \tan(x^\circ+y^\circ)$ มีค่าเท่าใด

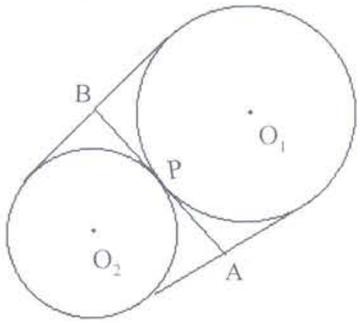



1. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 2. $\frac{-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

3. $\frac{3\sqrt{2}-5-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ 4. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$

9. **จากรูป**วงกลม $O_1$ และ $O_2$ มีรัศมียาว $r_1$ และ $r_2$ ตามลำดับ

โดยที่ $r_1 > r_2$ AB มีค่าเท่าใด




1. $\frac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ 2. $\frac{4\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

3. $2\sqrt{r_1r_2}$ 4. $r_1+r_2-\sqrt{r_1r_2}$

10. กำหนดให้ $\frac{\log x^2}{a^2-b^2} = \frac{\log y^2}{b^2-c^2} = \frac{\log z^2}{c^2-a^2}$ จะได้ $\sqrt{xyz}$ มีค่าเท่าใด

1. 4 2. 2

3. 1 4. 0

11. กำหนดให้ $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a^x < a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$

2. $a^x < a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

3. $a^x > a^y$ และ $\log_a x < \log_{aa} y$

4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

12. วงกลม A มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 14$ และตัดกับวงกลมซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 14$ ที่จุด P และ Q โดยที่จุด P มีพิกัดเป็น $(3, -4)$ และ $\overline{PQ}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม B รัศมีของวงกลม A เป็นเท่าใด

1. $5\sqrt{5}$   2. $4\sqrt{5}$
3. $3\sqrt{5}$   4. $2\sqrt{5}$

13. บริษัทหนึ่งมีตำแหน่งงานว่างอยู่ 2 ตำแหน่ง ที่แตกต่างกัน ถ้ามีผู้สมัครเข้าทำงาน 4 คน คือ ก ข ค และ ง เมื่อทำการสัมภาษณ์แล้ว ปรากฏว่าคนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 1 คือ ก ข ค คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 2 คือ ข ค ง ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน ที่บริษัทจะบรรจุคนเข้าทำงาน โดยให้คนเหมาะสมกับงาน

1. 9   2. 7
3. 6   4. 3

14. ถ้าความน่าจะเป็นที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.9 และ ความน่าจะเป็นที่แดง <u>**หรือ**</u> ดำ จะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.96 แล้วข้อใดต่อไปนี้คือความน่าจะเป็นที่ แดง <u>**และ**</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า

1. 0.04   2. 0.46
3. 0.54   4. 0.96

15. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ $(-4, 0)$ โฟกัสที่ $(-5, 0)$ และ $(1, 0)$ ถ้าวงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้ และมีความยาวของแกนเอกและแกนโท เท่ากับความยาวของแกนสังยุคและแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาตามลำดับแล้วสมการวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$   2. $\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$
3. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$   4. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

16. ให้ $R^+$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ $A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1\}$

ข้อใดถูกต้อง

1. $A \subset B$   2. $B \subset A$
3. $A \cap B = \varnothing$   4. $A \cup B = R^+$

17. กำหนดให้ $\overline{OA} = \bar{i} + 3\bar{j}$ , $\overline{OB} = 4\bar{i} + \bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่จุด D พื้นที่ของ $\Delta$OAD คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{77}{\sqrt{34}}$
2. $\frac{77}{2\sqrt{17}}$
3. $\frac{77}{17}$
4. $\frac{77}{34}$

18. ถ้า $\int_{1}^{\sin\theta} x^2 dx = -\frac{2}{3}$ แล้ว $1 + \sin\theta + \cos\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. 1
3. 0
4. –1

19. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 24 % และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 คะแนน ถ้ากำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง z = 0 ถึง z = 1.2 และถึง z = 1.25 เป็น 0.3849 และ 0.3944 ตามลำดับ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของนักเรียนที่สอบได้ 65 คะแนน

1. 38.49
2. 39.44
3. 88.49
4. 89.44

20. กำหนด $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ และ $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ และ เส้นโค้ง C มีสมการเป็น $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ คือสมการในข้อใด

1. $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$
2. $x - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$
3. $2x - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0$
4. $\sqrt{2}x - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 8.

1. ตอบ 1.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

แทนค่า $x = 0$ ก็ตัดตัวเลือกได้แล้ว เมื่อ $x = 0$

จะได้ $x^2 - 1 = 0 - 1 = -1$ และ $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} = 0$

เพราะว่า $-1$ หาร 0 เหลือเศษ 0 แต่ตัวเลือก 3. และ 4. เมื่อแทนค่า $x = 0$ แล้วได้ 1

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

ดังนั้นแทนค่า $x = 10$ ก็จำแนกตัวเลือกได้แล้ว เมื่อ $x = 10$ จะได้ $x^2 - 1 = 100 - 1 = 99$

$$
\begin{aligned}
x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243} &= x(1 + x^2 + x^8 + x^{26} + x^{80} + x^{242}) \\
&= 10(1+10^2+10^8+10^{26}+10^{80}+10^{242}) \\
&= 10(1+100+100^4+100^{13}+100^{40}+100^{121}) \\
&= 10(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})
\end{aligned}
$$

เพราะว่า 99 หาร $(99+1)^k$ เหลือเศษ 1 ทุกค่า k

เพราะฉะนั้น 99 หาร $(99+1)$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99+1)^4$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99+1)^{13}$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99+1)^{40}$ เหลือเศษ 1

99 หาร $(99+1)^{121}$ เหลือเศษ 1

ดังนั้น 99 หาร $(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})$

เหลือเศษ $(1+1+1+1+1+1) = 6$

เพราะฉะนั้น 99 หาร $10(1+(99+1)+(99+1)^4+(99+1)^{13}+(99+1)^{40}+(99+1)^{121})$

เหลือเศษ $10(6) = 60$

แทนค่า $x = 10$ ในทุกตัวเลือกจะได้ตัวเลือก 1. เท่านั้นที่มีค่าเป็น 60

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่าตัวหารคือ $x^2 - 1$ เป็นพหุนามดีกรี 2

เพราะฉะนั้นเศษเหลือต้องเป็นพหุนามดีกรี 1

สมมติเศษเหลือคือ $ax + b$ ดังนั้น ต้องมีพหุนาม $q(x)$ ที่ทำให้

$$\frac{x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}}{x^2-1} = q(x) + \frac{ax+b}{x^2-1}$$

$$\frac{x+x^3+x^9+x^{27}+x^{81}+x^{243}}{x^2-1} - \frac{ax+b}{x^2-1} = q(x)$$

$$(x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}) - (ax + b) = (x^2 - 1)\, q(x)$$

จากทฤษฎีบทของการหารลงตัว $x - a$ หารพหุนาม $p(x)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $p(a) = 0$

ให้ $p(x) = (x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}) - (ax + b)$

ดังนั้น $p(x) = (x^2 - 1)q(x) = (x + 1)(x - 1)q(x)$

เพราะฉะนั้น $x - 1$ หาร $p(x)$ ลงตัว และ $x + 1$ หาร $p(x)$ ลงตัว ดังนั้น $p(1) = 0$ และ $p(-1) = 0$

$p(1) = 0$ ; $\quad (1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1) - (a + b) = 0$

$$a + b = 6$$

$p(-1) = 0$ ; $\quad (-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1) - (-a + b) = 0$

$$-a - b = -6$$

เพราะฉะนั้น $a = 6$ และ $b = 0$ สรุปเศษเหลือคือ $6x$

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)(n + 4) = 6375600$

พิจารณาค่าของ $n + (n + 4) = 2n + 4$ จากตัวเลือกทั้งสี่ตัวดังนี้

เพราะว่า $2n + 4$ เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น $2n + 4 \neq 43$ และ $2n + 4 \neq 45$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

พิจารณาตัวเลือก 2. สมมติ $n + (n + 4) = 44$

$$2n = 40$$

$$n = 20$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 20\times21\times22\times23\times24$$

ต่อไปใช้เหตุผลว่า $20\times21\times22\times23\times24$ ลงท้ายด้วย 0 ตัวเดียวก็ได้

หรือจะคูณจริงก็ได้ $20\times21\times22\times23\times24 = 5100480 \neq 6375600$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง เหลือตัวเลือก 4. ข้อเดียวเอามาเป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง** สมมติ $n, n+1, n+2, n+3, n+4$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่คูณกันได้

เท่ากับ 6375600 เพราะฉะนั้น $n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) = 6375600$

ทำการแยกตัวประกอบของ $6375600 = 100\times63756$

$= (2\times2\times5\times5)\times2\times2\times3\times3\times7\times11\times23$

$= 2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times7\times11\times23$

$= (3\times7)\times(2\times11)\times(23)\times(2\times2\times2\times3)\times(5\times5)$

$= 21\times22\times23\times24\times25$

เพราะฉะนั้น $n = 21$ และ $n + 4 = 25$

สรุปผลบวกของจำนวนมากที่สุดกับจำนวนน้อยที่สุด $= 25 + 21 = 46$

**หมายเหตุ** ในการสอบจริงการเลือกจับคู่ตัวเลขในผลคูณ $2\times2\times2\times2\times3\times3\times5\times5\times7\times11\times23$ ให้ออกมาเป็น $(3\times7)\times(2\times11)\times(23)\times(2\times2\times2\times3)\times(5\times5)$ เป็นเรื่องที่เสียเวลา ลองใช้วิธีตัดตัวเลือกดีกว่า

**3. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** พิจารณาความเป็นไปได้ของตัวเลือก 1. $pr = 435 = 3\times5\times9$

เพราะว่า r ต้องน้อยกว่า p ดังนั้นกรณีต่างๆ ที่เป็นไปได้คือ

$(p = 15, r = 9)$ , $(p = 27, r = 5)$ , $(p = 45, r = 3)$ , $(p = 435, r = 1)$

เพราะว่า 15 หาร 3083 เหลือเศษ 8 ดังนั้น $p = 15$ ไม่ได้

เพราะว่า 27 หาร 3083 เหลือเศษ 5 และ 27 หาร 3295 เหลือเศษ 1 เพราะฉะนั้น $p = 27$ ไม่ได้

เพราะว่า 45 หาร 3083 เหลือเศษ 23 เพราะฉะนั้น $p = 45$ ไม่ได้

เพราะว่า 435 หาร 3083 เหลือเศษ 38 เพราะฉะนั้น $p = 435$ ไม่ได้

สรุป $pr = 435$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

พิจารณาความเป็นไปได้ของตัวเลือก 2. $pr = 477 = 53\times9$

$p = 53$ หาร 3083 เหลือเศษ 9 $p = 53$ หาร 3295 เหลือเศษ 9

$p = 53$ หาร 3666 เหลือเศษ 9

สรุป $pr = 477$ ใช้ได้ เลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง** $p$ หาร 3083, 3295 และ 3666 เหลือเศษเท่ากับ $r$ เหมือนกัน

ให้ $x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มที่ทำให้

$$3083 = xp + r \quad ...(1)$$

$$3295 = yp + r \quad ...(2)$$

$$3666 = zp + r \quad ....(3)$$

(2) – (1) ; $212 = (y - x)p$

$$(y - x)p = 210 = 2\times2\times53$$

(3) – (2) ; $371 = (z - y)p$

$$(z - y)p = 371 = 7\times53$$

เพราะว่า $p$ ต้องหาร 210 และ 371 ลงตัว เพราะฉะนั้น $p = 53$ เท่านั้น

เพราะว่า 3083 หารด้วย 53 เหลือเศษ 9 เพราะฉะนั้น $r = 9$

สรุป $pr = (53)(9) = 477$

**4. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** กำหนด $x + y = 3-\cos4\theta$ และ $x-y = 4\sin2\theta$ แล้วถามว่า $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ เท่ากับเท่าใด คำถามแบบนี้จัดว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ $\theta$ ดังนั้นแทนค่า $\theta$ บางค่าแล้วหาค่า $x, y$ ก็ต้องได้คำตอบ ตัวอย่างเช่นแทนค่า $\theta = 0$ จะได้

$$x + y = 3 - \cos4\theta = 3 - \cos0 = 3 - 1$$

$$x + y = 2 \quad ...(1)$$

$$x - y = 4\sin2\theta = 4\sin0 = 0$$

$$x - y = 0 \quad ...(2)$$

(1) + (2) ; $2x = 2$

$x = 1$ และ $y = 1$

เพราะฉะนั้น $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = 1 + 1 = 2$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง** $x + y = 3 - \cos4\theta$ ...(1)

$x - y = 4\sin2\theta$ ...(2)

(1) + (2) ; $2x = 3 - \cos4\theta + 4\sin2\theta = 3 - (1 - 2\sin^2 2\theta) + 4\sin2\theta$

$= 2 + 2\sin^2 2\theta + 4\sin2\theta$

$x = \sin^2 2\theta + 2\sin2\theta + 1 = (\sin2\theta + 1)^2$

$x^{\frac{1}{2}} = ((\sin2\theta + 1)^2)^{\frac{1}{2}} = |\sin2\theta + 1| = \sin2\theta + 1$

จาก (2). ; $y = x - 4\sin2\theta$

$= \sin^2 2\theta + 2\sin2\theta + 1 - 4\sin2\theta$

$= \sin^2 2\theta - 2\sin2\theta + 1$

$= (\sin2\theta - 1)^2$

$y^{\frac{1}{2}} = (\sin2\theta + 1)^{\frac{1}{2}} = |\sin2\theta - 1|$

สรุป $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = \sin2\theta + 1 + |\sin2\theta - 1|$

$= \sin2\theta + 1 + (-(\sin2\theta - 1))$

$= 2$

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของสามเหลี่ยมใดๆ และอัตราส่วน

ใช้สเกล 1 นิ้วต่อหน่วย

ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

โดยมีพิกัด A(0, 0),C(3, 0),B(0, 2)

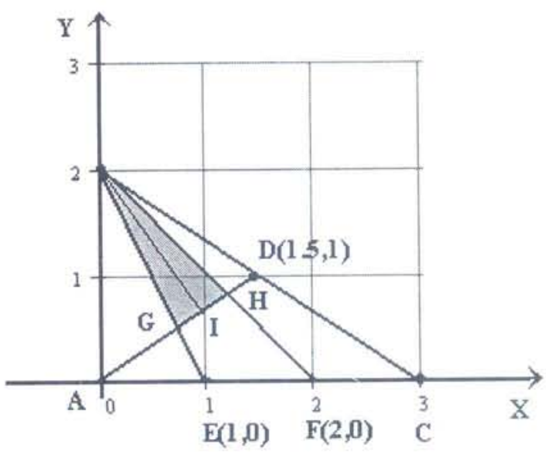
พื้นที่ $\Delta$ ABC $= \frac{1}{2}(AC)(AB)$

$= \frac{1}{2}(3)(2) = 3$

E, F แบ่ง AC เป็น 3 ส่วน ดังนั้น E, F

มีพิกัดเป็น E(1, 0),F(2, 0)

ขณะนี้เราได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ว



วัดความยาว GH ได้ 0.55 วัดความสูง BI ได้ 1.7

พื้นที่ $\Delta$ BGH = $\frac{1}{2}(GH)(BI) = \frac{1}{2}(0.55)(1.7) = 0.4675$

อัตราส่วน $\dfrac{\text{area of } \Delta BGH}{\text{area of } \Delta ABC} = \dfrac{0.4675}{3} = 0.1558 \cong 0.16$

เพราะว่า $\frac{1}{8} = 0.125$ , $\frac{2}{9} = 0.222$ , $\frac{3}{16} = 0.1875$ , $\frac{3}{20} = 0.15$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

**วิธีจริง แบบที่ 1** ใช้เหตุผลทางเรขาคณิตหา พ.ท. $\Delta$BGH จริงๆ ก็ได้

จากการแก้สมการหาจุดตัด GH

เส้นตรง AD ; $\dfrac{y-0}{x-0} = \dfrac{1-0}{1.5-0}$ $\longrightarrow 1.5y = x$ $\longrightarrow y = \frac{2}{3}x$

เส้นตรง BE ; $\dfrac{y-2}{x-0} = \dfrac{0-2}{1-0} = -2$ $\longrightarrow y-2 = -2x$ $\longrightarrow y = 2-2x$

เส้นตรง BF ; $\dfrac{y-2}{x-0} = \dfrac{0-2}{2-0} = -1$ $\longrightarrow y-2 = -x$ $\longrightarrow y = 2-x$

การหาจุด G ซึ่งเป็นจุดตัดของ AD กับ BE

$$\frac{2}{3}x = y = 2-2x$$

$$8x = 6$$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$ และจะได้ $y = \frac{1}{2}$

การหาจุดตัด H ซึ่งเป็นจุดตัดของ AD กับ BF

$$\frac{2}{3}x = y = 2-x$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5}$$ และจะได้ $y = \frac{4}{5}$

สรุป $G(\frac{3}{4},\frac{1}{2}),H(\frac{6}{5},\frac{4}{5})$

ความยาว GH $= \sqrt{(\frac{3}{4}-\frac{6}{5})^2+(\frac{1}{2}-\frac{4}{5})^2} = \sqrt{(\frac{15-24}{20})^2+(\frac{5-8}{10})^2} = \sqrt{(\frac{9}{20})^2+(\frac{3}{10})^2}$

$= \sqrt{(\frac{9}{20})^2+(\frac{6}{10})^2} = \sqrt{\frac{81+36}{400}} = \sqrt{\frac{117}{400}}$

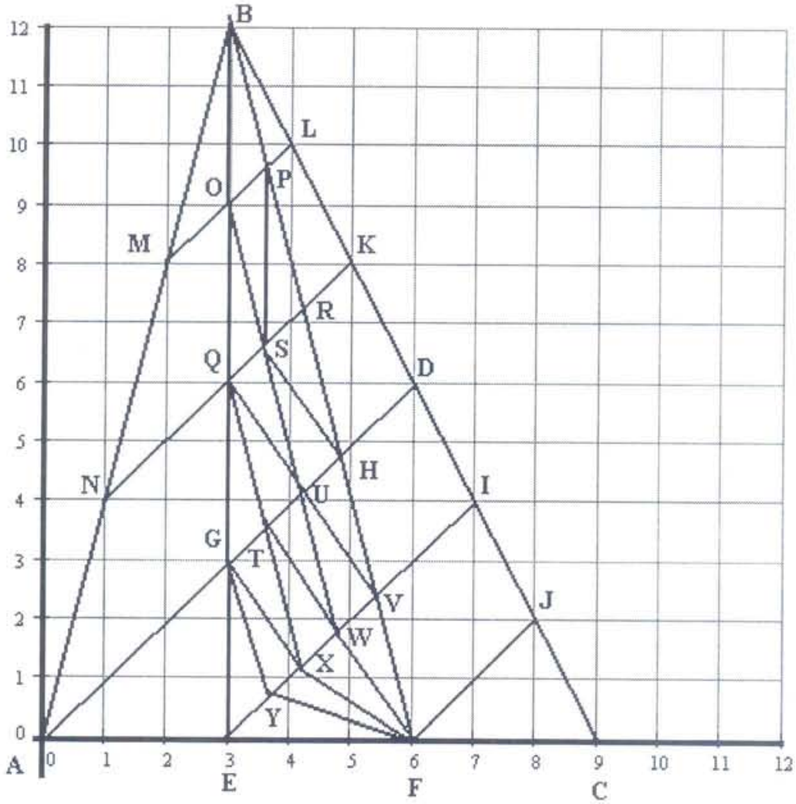
$= \frac{3\sqrt{13}}{20}$

ระยะทางจาก B(0, 2) มายังเส้น AD : $2x - 3y = 0$ มีค่าเท่ากับ BI $= \dfrac{|2(0)-3(2)|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{6}{\sqrt{13}}$

พ.ท. $\Delta$BGH= $\frac{1}{2}(\frac{6}{\sqrt{13}})(\frac{3\sqrt{13}}{20}) = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$

อัตราส่วน $\dfrac{\text{area } \Delta BGH}{\text{area } \Delta ABC} = \dfrac{(\frac{9}{20})}{3} = \dfrac{3}{20}$

**วิธีจริง แบบที่ 2**




ลากเส้นเพิ่มเติมดังนี้ 1. ลากเส้น EI // AD และ FJ // AD

2. แบ่ง BD ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆ กันที่ K, L

3. ลาก KN, LM ขนานกับ AD

OP ขนานกับ QR ขนานกับ GH และ BO = OQ = QG

ให้ S เป็นจุดกึ่งกลาง QR,T, U แบ่ง GH ออกเป็น 3 ส่วนเท่ากัน,W, X, Y แบ่ง EV ออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กัน เพราะฉะนั้น OP = $\frac{1}{2}$QR และ OP = $\frac{1}{3}$GH

พิจารณาภายในรูป $\Delta$BGH จะได้ว่า พ.ท. $\Delta$BGH ประกอบด้วยพื้นที่ สามเหลี่ยมชิ้นเล็กๆ จำนวน 9 รูป ซึ่งมีฐานเท่ากันและเท่ากับ OP โดยมีส่วนสูงเท่ากับระยะห่างระหว่างด้านคู่ขนาน OP กับ QR นั่นคือ พ.ท. $\Delta$BGH = 9 เท่าของพื้นที่ $\Delta$OBP

ภายในรูป $\Delta$EFB ประกอบด้วยสามเหลี่ยมชิ้นเล็กๆ จำนวน 20 ชิ้น ที่มีฐานยาวเท่ากับ OP และความสูงเท่ากับความสูงของ $\Delta$OBP

เพราะฉะนั้น พ.ท. $\Delta EFB$ = 20 เท่าของพื้นที่ $\Delta OBP$

เพราะว่า $EF = \frac{1}{3}AB$

เพราะฉะนั้น พ.ท. $\Delta ABC$ = 3 พ.ท. $\Delta EFB = 3(20)(\Delta OBP) = 60$(พ.ท. $\Delta OBP$)

สรุป อัตราส่วน $\dfrac{\text{area } \Delta BGH}{\text{area } \Delta ABC} = \dfrac{9(\text{area } \Delta OBP)}{60(\text{area } \Delta OBP)} = \dfrac{9}{60} = \dfrac{3}{20}$

6. **ตอบ 2.**

**แนวคิด ขอแนะนำสูตรสำเร็จรูปสำหรับคำถามแบบนี้ เส้นรอบรูปยาวเท่ากัน**

**สี่เหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ สี่เหลี่ยมจัตุรัส**

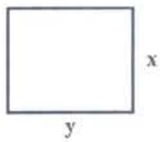
**สามเหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ สามเหลี่ยมด้านเท่า**

**n เหลี่ยม ที่ล้อมรอบพื้นที่ได้มากที่สุดคือ n เหลี่ยมด้านเท่า**

ไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร รั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุดต้องเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาว $\frac{1600}{4} = 400$ เพราะฉะนั้นพื้นที่มากที่สุด= $(400)(400) = 160{,}000$

**วิธีจริง** $x$ = ความยาวของสี่เหลี่ยม

$y$ = ความกว้างของสี่เหลี่ยม




พื้นที่สี่เหลี่ยม = $xy$

เพราะว่า $x + x + y + y = 1600$ เพราะฉะนั้น $y = 800 - x$

ดังนั้นพื้นที่ = $xy = x(800 - x)$ ให้ $f(x) = 800x - x^2$

$$f'(x) = 800 - 2x$$

$f'(x) = 0$ เมื่อ $x = 400$ เพราะว่า $x < 400 \rightarrow f'(x) > 0$ และ $x > 400 \rightarrow f'(x) < 0$

เพราะฉะนั้น $f(400) = 160{,}000$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ สรุปพื้นที่มากที่สุด = 160,000

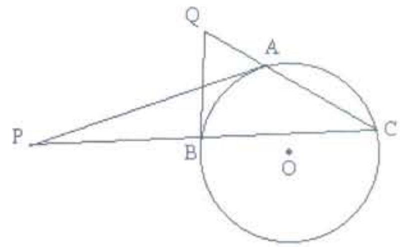
**หมายเหตุ** โดยการจัดรูปพีชคณิตสามารถหาค่าสูงสุดได้ดังนี้

$f(x) = 800x - x^2 = 160000 - 160000 + 800x - x^2 = 160000 - (x - 400)^2 \leq 160000$

เพราะฉะนั้นพื้นที่มากสุดเท่ากับ 160000 เมื่อ $x = 400$

7. **ตอบ 1.**

**แนวคิด** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของรูปใดๆ และอัตราส่วนที่เป็นค่าคงตัว ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราเลือกให้ จุดศูนย์กลาง O อยู่บนเส้น BC และวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้




1. เขียนวงกลมรัศมี 2 cm
2. ลากเส้นตรง BOC,ให้ P อยู่บนแนวเส้นตรง BOC
3. ลากเส้น PA สัมผัสวงกลมที่จุด A และ |PA| = 9 cm
4. ลากเส้น BQ ยาว 3 cm.

จะได้รูปตามเงื่อนไขของโจทย์

วัดความยาว QA = 1.6 QC = 5.3 PB= 7.3 PC = 11.8

$$\frac{QA\cdot QC}{PB\cdot PC} = \frac{(1.6)(5.3)}{(7.3)(11.8)} = 0.0984 \cong 0.1$$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

**ข้อพิสูจน์** เนื่องจากโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นเราเลือกกรณีที่ง่ายๆ มาพิสูจน์ โดยให้ BC ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม

เพราะว่า QB เป็นเส้นสัมผัส เพราะฉะนั้น $Q\hat{B}C = 90^\circ$

เพราะว่า BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เพราะฉะนั้น $B\hat{A}C = 90^\circ$

พิจารณา $\Delta QBC$ และ $\Delta ACB$ $Q\hat{B}C = 90^\circ = B\hat{A}C, Q\hat{C}B$ มุมร่วม

เพราะฉะนั้น $\Delta QBC, \Delta ACB$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

ดังนั้น $\frac{QC}{BC} = \frac{BC}{AC} = \frac{QB}{AB}$ และ $QC\cdot AC = BC^2$

APO เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $PA^2 = PO^2 - AO^2$

BCQ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $QB^2 = QC^2 - BC^2$

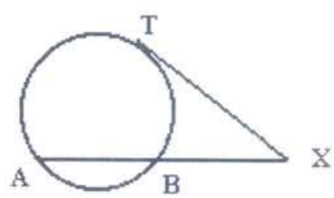
$$\begin{aligned} QA\cdot QC &= (QC - AC)\cdot QC &&= QC^2 - AC\cdot QC &&= QC^2 - BC^2 \\ &= QB^2 &&= (\tfrac{1}{3}PA)^2 &&= \tfrac{1}{9}PA^2 \\ &= \tfrac{1}{9}(PO^2 - AO^2) &&= \tfrac{1}{9}(PO^2 - OC^2) &&= \tfrac{1}{9}(PO + OC)(PO - OC) \\ &= \tfrac{1}{9}PC\cdot(PO - BO) &&= \tfrac{1}{9}(PC\cdot PB) \end{aligned}$$

สรุป $\frac{QA\cdot QC}{PC\cdot PB} = \frac{1}{9}$

**การพิสูจน์สำหรับกรณีทั่วไป**

ต้องใช้ผลของทฤษฎีบทที่ 58 ของยูคลิดซึ่งกล่าวไว้ว่า

X เป็นจุดนอกวงกลม ,XT เป็นเส้นสัมผัสวงกลม



A, B เป็นจุดบนวงกลมและ A, B, X อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน จะได้ว่า $AX \cdot BX = TX^2$

ดังนั้นจากโจทย์ จะได้ว่า $QA \cdot QC = QB^2$ และ $PB \cdot PC = PA^2$

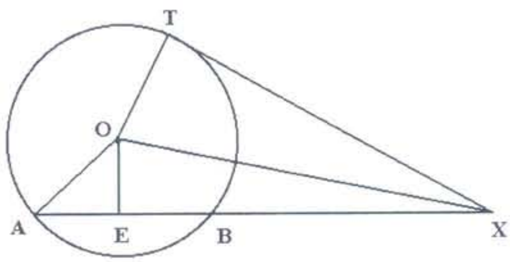
แต่ $QB = \frac{1}{3}PA$ ดังนั้น $QB^2 = \frac{1}{9}PA^2$

$$\frac{QB^2}{PA^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{QA \cdot QC}{PB \cdot PC} = \frac{1}{9}$$

**การพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 58 ของยูคลิด** กำหนด A, B เป็นจุดบนวงกลม , X เป็นจุดนอกวงกลม A, B, X อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน X, T เป็นเส้นสัมผัสวงกลม

**การแสดงว่า** $AX \cdot BX = XT^2$ ลาก OE ตั้งฉากกับ AB ดังนั้น AE = EB




$$\begin{aligned} AX \cdot BX &= (AE + EX) \cdot (EX - EB) \\ &= (AE + EX) \cdot (EX - AE) \\ &= (EX + AE) \cdot (EX - AE) \\ &= EX^2 - AE^2 \\ &= EX^2 + OE^2 - OE^2 - AE^2 \end{aligned}$$

สามเหลี่ยม AOE เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $AE^2 + OE^2 = AO^2$

สามเหลี่ยม OEX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก $EX^2 + OE^2 = OX^2$

$$\begin{aligned} AX \cdot BX &= (EX^2 + OE^2) - (AE^2 + OE^2) = OX^2 - AO^2 \\ &= OX^2 - OT^2 && (\because AO = OT) \\ &= TX^2 && (\because \text{OTX เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก}) \end{aligned}$$

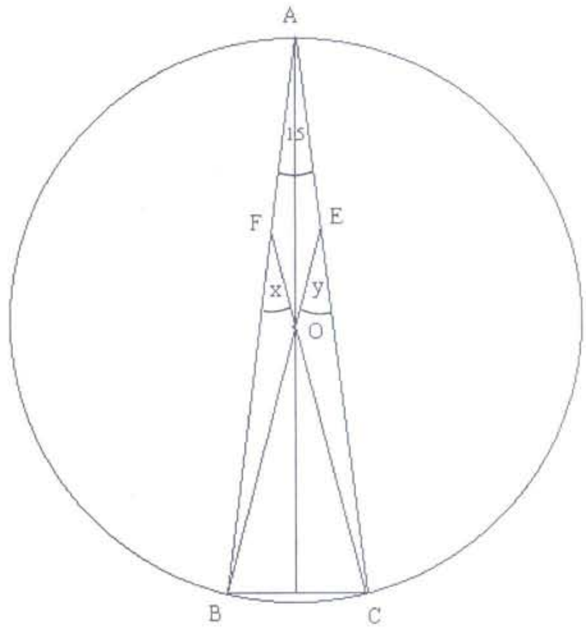
สรุป $AX \cdot BX = TX^2$

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของวงกลม, สามเหลี่ยมและมุม x, y

การเขียนรูปเลียนแบบโจทย์ ทำได้ตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนวงกลมรัศมี 5 cm.




จุดศูนย์กลาง O

2. ลากเส้นผ่านศูนย์กลาง AD
3. ลากเส้น AB ที่ทำให้

   $B\hat{A}D = 7.5$ องศา

   ลากเส้น AC ที่ทำให้

   $C\hat{A}D = 7.5$ องศา

   ดังนั้น $A\hat{B}C = 15^\circ$

   สอดคล้องกับโจทย์
4. ลากเส้น OB ตัดกับ AC ที่จุด E

   ลากเส้น OC ตัดกับ AB ที่จุด F

ขณะนี้เราได้สิ่งที่สอดคล้องกับโจทย์ โดยมี $x = B\hat{F}C$ และ $y = B\hat{E}C$

โดยการวัดมุมจะได้ $B\hat{F}C = 22^\circ$ และ $B\hat{E}C = 22^\circ$

เพราะฉะนั้น $x + y = 22 + 22 = 44 \cong 45$ องศา

$$\sin(x + y) + \cos(x + y) - \tan(x + y) = \sin 45 + \cos 45 - \tan 45$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1 = 1.414 - 1 = 0.414 > 0$$

ค่าประมาณที่ได้มานี้เพียงพอที่จะตัดตัวเลือกทิ้งได้แล้ว

**ตัวเลือก 1.** $\frac{1}{\sqrt{2}+1} < 1$ ยังตัดทิ้งไม่ได้

**ตัวเลือก 2.** $\frac{-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} < 0$ ตัดตัวเลือกนี้ตัดทิ้งได้เลย

**ตัวเลือก 3.** $3\sqrt{2} - 5 < 0$ ดังนั้น $\frac{3\sqrt{2}-5-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1} < 0$ ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งได้

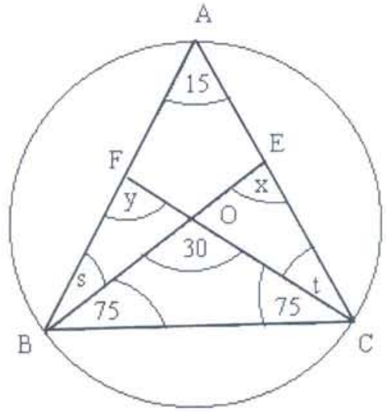
**ตัวเลือก 4.** $\sqrt{2} + 6 > 1 + \sqrt{6}$

$$\frac{\sqrt{2}+6}{1+\sqrt{6}} > 1$$

ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

จากรูปที่เราวาดสำหรับข้อนี้เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า

$\sin(x^\circ + y^\circ) + \cos(x^\circ + y^\circ) - \tan(x^\circ + y^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ แน่นอน




**วิธีจริง** เพราะว่า $B\hat{O}C$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น $B\hat{O}C = 2B\hat{A}C = 2(15) = 30$

เพราะว่า $OB = OC$

เพราะฉะนั้น $\Delta OBC$ เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

ดังนั้น $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 75^\circ$

$F\hat{O}B = 180^\circ - B\hat{O}C = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

และ $E\hat{O}C = 150^\circ$

$\Delta OBC$ ; $x + s = 180 - 150 = 30$ ; $\Delta OBC$ ; $y + t = 180 - 150 = 30$

$$x + s + y + t = 60 \qquad \text{...(1)}$$

$\Delta ABC$ ; $15 + s + 75 + 75 + t = 180$

$$s + t = 15 \qquad \text{...(2)}$$

$(1) - (2)$ ; $x + y = 60 - 15 = 45$

$$\sin(x + y) + \cos(x + y) - \tan(x + y) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$= (\sqrt{2} - 1)\frac{(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

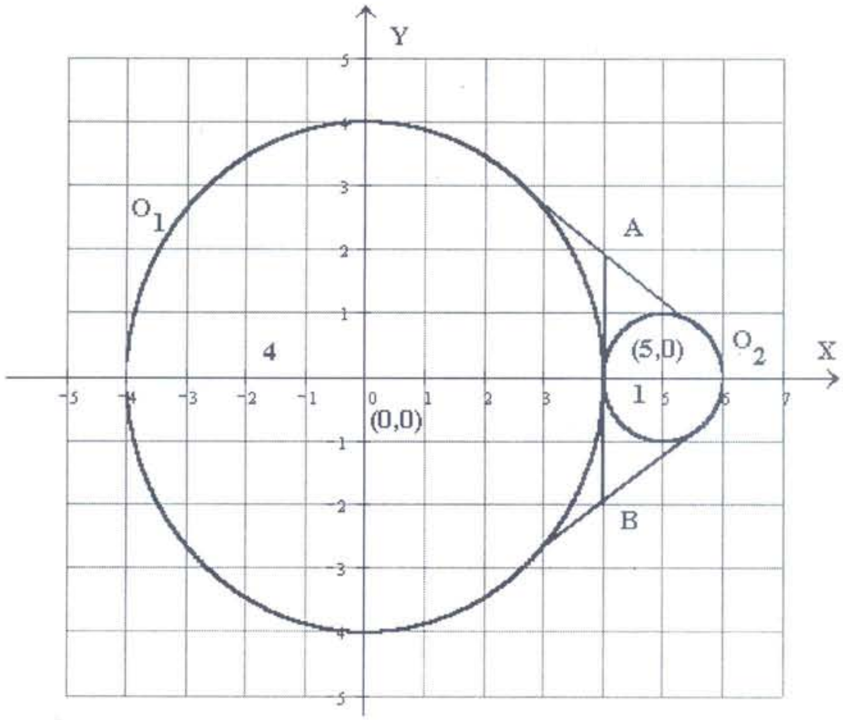
**9. ตอบ 3.**

**แนวคิด** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ $r_1$, $r_2$

ดังนั้นแทนค่า $r_1 = 4$ , $r_2 = 1$ และวาดรูปประกอบก็ตัวตัวเลือกได้แล้ว

ขั้นตอนการวาดรูป

1. เขียนวงกลมรัศมี $r_1 = 4$ จุดศูนย์กลาง (0, 0)
2. เขียนวงกลมรัศมี $r_2 = 1$ จุดศูนย์กลาง (5, 0)
3. ลากเส้นสัมผัสและลากเส้น AB ตั้งฉากกับแกน X
4. วัดความยาว AB ได้ AB = 4




แทนค่า $r_1 = 4$ , $r_2 = 1$ ในทุกตัวเลือก

**ตัวเลือก 1.** $\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2} = \dfrac{(2)(4)(1)}{4+1} = \dfrac{8}{5}$

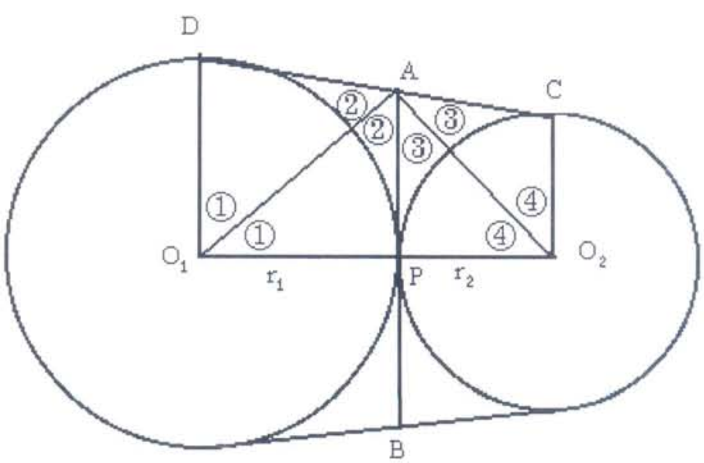
**ตัวเลือก 2.** $\dfrac{4\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2} = \dfrac{4\sqrt{(4)(1)}}{4+1} = \dfrac{8}{5}$

**ตัวเลือก 3.** $2\sqrt{r_1r_2} = 2\sqrt{(4)(1)} = 4$

**ตัวเลือก 4.** $r_1 + r_2 - \sqrt{r_1r_2} = 4 + 1 - 2\sqrt{(4)(1)} = 3$

สรุปเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบดีกว่า

**วิธีจริง**



P เป็นจุดสัมผัส APB เป็นจุดสัมผัส ดังนั้น $O_1\hat{P}A = 90^\circ$, $O_2\hat{P}A = 90^\circ$

$O_1DA$ และ $O_1PA$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย , $O_1\hat{A}D = O_1\hat{A}P =$ ②

$O_2PA$ และ $O_2CA$ เป็นสามเหลี่ยมคล้าย,$O_2\hat{A}C = O_2\hat{A}P =$ ③

$O_1\hat{A}D + O_1\hat{A}P + O_2\hat{A}C + O_2\hat{A}P = 180$

② + ② + ③ + ③ = 180

เพราะฉะนั้น ② + ③ = 90

สรุป $O_1AO_2$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้น $(O_1A)^2 + (O_2A)^2 = (O_1O_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$

AB เป็นเส้นสัมผัส , $O_1P$, $O_2P$ เป็นรัศมีวงกลม เพราะฉะนั้น $O_1\hat{P}A = 90^\circ, O_2\hat{P}A = 90^\circ$

$\Delta O_1PA$ ; $AP^2 = (AO_1)^2 - (PO_1)^2 = (AO_1)^2 - r_1^2$

$\Delta O_2PA$ ; $AP^2 = (AO_2)^2 - (PO_2)^2 = (AO_1)^2 - r_2^2$

$2AP^2 = (AO_1)^2 + (AO_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 = (O_1O_2)^2 - r_1^2 - r_2^2$

$= (r_1 + r_2)^2 - r_1^2 - r_2^2 \qquad = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_1^2 - r_2^2 - r_2^2 \qquad = 2r_1r_2$

$AP = \sqrt{r_1r_2}$

สรุป $AB = 2AP = 2\sqrt{r_1r_2}$

**10.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** เพราะว่าโจทย์มีพจน์ $\log x^2, \log y^2, \log z^2$

เพราะฉะนั้น $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ ดังนั้น $\sqrt{xyz} \neq 0$ แน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้เลย

ต่อไปลองใช้เหตุผลแบบง่ายๆ จะเห็นว่า $x = 1, y = 1, z = 1$

ทำให้ $\log x^2 = 0, \log y^2 = 0, \log z^2 = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{\log x^2}{a^2 - b^2} = \frac{\log y^2}{b^2 - c^2} = \frac{\log z^2}{c^2 - a^2} = 0$ แน่นอน

ดังนั้น $\sqrt{xyz} = 1$ ใช้ได้แน่นอน จึงเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a, b, c

ดังนั้นแทนค่า a, b, c บางค่าก็สามารถหาคำตอบได้ ตัวอย่างเช่น แทนค่า $a = 1, b = 2, c = 3$

เพราะว่า $\frac{\log x^2}{a^2-b^2} = \frac{\log y^2}{b^2-c^2} = \frac{\log z^2}{c^2-a^2}$

$\frac{2\log x}{1-4} = \frac{2\log y}{4-9} = \frac{2\log z}{9-1}$

$\frac{\log x}{-3} = \frac{\log y}{-5} = \frac{\log z}{8}$

เพราะฉะนั้น $\log y = \frac{5}{3}\log x$ และ $\log z = -\frac{8}{3}\log x$

เพราะฉะนั้น $\log\sqrt{xyz} = \frac{1}{2}\log(xyz) = \frac{1}{2}(\log x + \log y + \log z)$

$= \frac{1}{2}(\log x + \frac{5}{3}\log x - \frac{8}{3}\log x) = (\frac{5}{3})(\log x)(1 + \frac{5}{3} - \frac{8}{3})$

$= 0 \qquad = \log 1$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{xyz} = 1$

**วิธีจริง** ต้องใช้การจัดรูปทางพีชคณิตแน่นอน เพราะว่า $\frac{\log x^2}{a^2-b^2} = \frac{\log y^2}{b^2-c^2} = \frac{\log z^2}{c^2-a^2}$

$\frac{2\log x}{a^2-b^2} = \frac{2\log y}{b^2-c^2} = \frac{2\log z}{c^2-a^2}$

เพราะฉะนั้น $\log y = (\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2})\log x$ และ $\log z = (\frac{c^2-a^2}{a^2-b^2})\log x$

เพราะว่า $\log(xyz) = \log x + \log y + \log z = \log x + (\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2})\log x + (\frac{c^2-a^2}{a^2-b^2})\log x$

$= (\log x)(1 + \frac{b^2-c^2}{a^2-b^2} + \frac{c^2-a^2}{a^2-b^2}) = (\log x)[\frac{a^2-b^2+b^2-a^2+c^2-a^2}{a^2-b^2}]$

$= (\log x)(0) \qquad = 0 \quad = \log 1$

เพราะฉะนั้น $xyz = 1$ และ $\sqrt{xyz} = 1$

**11. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ,x ,y ดังนั้นแทนค่า a,x,y บางค่าก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้ ตัวอย่างเช่น แทนค่า $a = \frac{1}{2}$ , $x = 2$ และ $y = 4$ จะได้ว่า

$0 < a < 1$ และ $0 < x < y$

$a^x = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} > \frac{1}{16} = (\frac{1}{2})^4 = a^y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งไปก่อนได้

$\log_a x = \log_{(\frac{1}{2})} 2. = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2})^{-1} = -\log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{2}) = -1$

$\log_a y = \log_{(\frac{1}{2})} 4. = \log_{(\frac{1}{2})} (\frac{1}{2})^{-2} = -2\log_{(\frac{1}{2})} (\frac{1}{2}) = -2 < -1 = \log_a x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

**วิธีจริง** เพราะว่า $0 < a < 1$ เพราะฉะนั้น $f(t) = a^t$ เป็นฟังก์ชันลด และ $g(t) = \log_a t$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะว่า $0 < x < y$ เพราะฉะนั้น $f(x) > f(y)$ นั้นคือ $a^x > a^y$

เพราะว่า $0 < x < y$ เพราะฉะนั้น $g(x) > g(y)$ นั้นคือ $\log_a x > \log_a y$

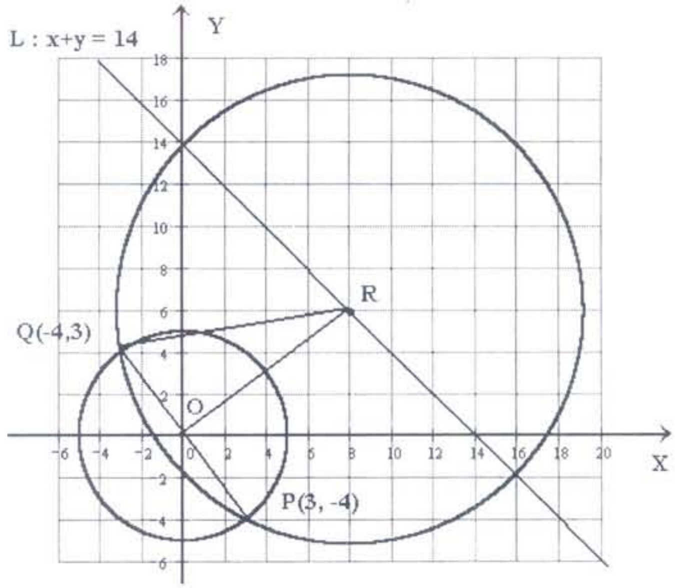
สรุปตัวเลือก 4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$ ถูกต้อง

**12. ตอบ 1.**

**แนวคิด การหาคำตอบโดยวิธีวาดรูป**

1. เขียนวงกลม B ซึ่งเป็นวงกลมรัศมี 5 และจุดศูนย์กลาง (0, 0)
2. เขียนเส้นตรง L : x + y = 14
3. เขียนจุด P(3, –4) แล้วลากเส้นผ่านศูนย์กลาง PQ
4. ลากเส้นตั้งฉากกับ PQ ที่จุด O ตัดเส้นตรง L ที่จุด R

เพราะว่า PQ เป็นคอร์ดของวงกลม A เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางวงกลม A
ต้องอยู่บนเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ PQ OQ ตัดกับเส้นตรง L ที่จุด R
เพราะฉะนั้น R เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม A

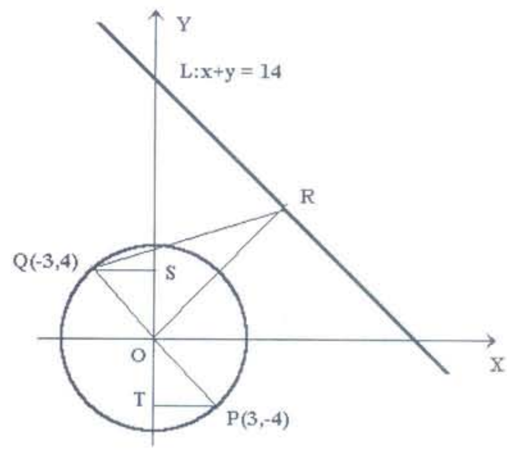


ดังนั้น RQ เป็นความยาวของรัศมีวงกลม A วัดความยาว RQ ได้ 11.2 cm

เพราะว่า $\sqrt{5} = 2.24$ เพราะฉะนั้น $5\sqrt{5} = 11.2, 4\sqrt{5} = 8.96, 3\sqrt{5} = 6.7, 2\sqrt{5} = 4.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. รัศมี = $5\sqrt{5}$ ดีกว่า

**วิธีจริง** ลาก SQ ขนานกับ PT และตั้งฉากกับแกน Y




$OQ = OP = 5, S\hat{Q}O = T\hat{P}O$

จะได้ว่า $\Delta OQS, \Delta OPT$ เหมือนกันทุกประการ

ดังนั้น QS = PT และ OS = OT สรุปพิกัด Q คือ $(-3, 4)$

ความชัน $PQ = \frac{4-(-4)}{-3-3} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}$

OR ตั้งฉากกับ QP จะได้ความชัน $OR = \frac{3}{4}$

OR ผ่านจุด (0, 0) ดังนั้นสมการเส้นตรง OR คือ $y = \frac{3}{4}x$

แทนค่า $y = \frac{3}{4}x$ ในสมการเส้นตรง $L : x + y = 14$

$$x + \frac{3}{4}x = 14$$

$$x = 8$$ ดังนั้น $y = \frac{3}{4}x = \frac{3}{4}(8) = 6$

สรุป R มีพิกัดเป็น (8, 6) รัศมีของวงกลม A = ความยาว $RQ = \sqrt{(8-(-3))^2 + (6-4)^2}$

$$= \sqrt{121+4} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

**13. ตอบ 2.**

**แนวคิด** คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 1 คือ ก ข ค คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 2 คือ ข ค ง

มีคนไม่มากใช้แจงกรณีดีกว่า

| | ตำแหน่งที่ 1 | ตำแหน่งที่ 2 |
|---|---|---|
| 1. | ก | ข |
| 2. | ก | ค |
| 3. | ก | ง |
| 4. | ข | ค |
| 5. | ข | ง |
| 6. | ค | ข |
| 7. | ค | ง |

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน = 7 วิธี

**วิธีจริง** กรณีที่ 1. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ก ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 3 วิธี

กรณีที่ 2. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ข ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 2 วิธี

กรณีที่ 3. ตำแหน่งที่ 1 เป็น ค ตำแหน่งที่ 2 เลือกได้ 2 วิธี

รวมทั้งสามกรณีจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน = 3 + 2 + 2 = 7 วิธี

**14. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า ต้องน้อยกว่าความน่าจะเป็นที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าซึ่งเท่ากับ 0.6

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

ให้ A = เหตุการณ์ที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า $P(A) = 0.6$

B = เหตุการณ์ที่ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า $P(B) = 0.9$

ความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า = $P(A \cap B)$

เพราะว่าความน่าจะเป็นที่แดง <u>**หรือ**</u> จะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.96

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = 0.96$

เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.96 = 0.6 + 0.9 - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = 1.5 - 0.96 = 0.54$$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ แดง <u>และ</u> ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า = 0.54

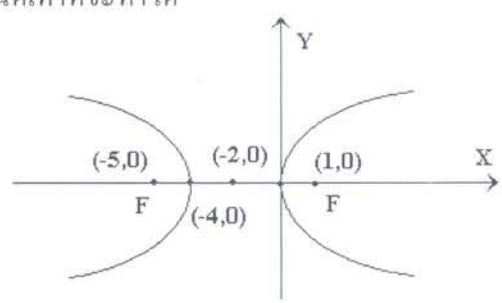
**15. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามโจทย์กำหนดเท่าที่จะทำได้

จุดศูนย์กลางของวงรีแต่ละตัวเลือกคือ

1. (–2,0) 2. (–2,0)

3. (2,0) 4. (2,0)




เพราะว่าไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง (–2,0)

เพราะฉะนั้นวงรีมีจุดศูนย์กลาง (–2,0)

ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ก่อน จากรูปความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา = 4

ความยาวแกนโทของวงรีในตัวเลือกที่เหลือคือ 1. แกนโทยาว 4 2. แกนโทยาว $2\sqrt{5}$
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.ทิ้ง

**วิธีจริง** ไฮเพอร์โบลามีจุดยอดที่ $(-4, 0)$ โฟกัสที่ $(-5, 0)$ และ $(1, 0)$
เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง $(-2,0), c = 3, a = 2$ และ $b = \sqrt{5}$

สมการของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ความยาวแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลา = 4

ความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลา = $2\sqrt{5}$ วงรีมีจุดศูนย์กลาง $(-2,0)$

$2a$ = ความยาวแกนเอกของวงรี = ความยาวแกนสังยุค = $2\sqrt{5} \longrightarrow a = \sqrt{5}$

$2b$ = ความยาวแกนโทของวงรี = ความยาวแกนตามขวาง = $4 \longrightarrow b = 2$

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

$$\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$$

**หมายเหตุ** วงรีอีกหนึ่งวงที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แต่ไม่มีในตัวเลือกคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**16.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เลือกตัวเลขที่คิดง่ายๆช่วยในการตัดตัวเลือก เช่น $x = 1,2,3,\ldots$

เพราะว่า $x = 1$ ทำให้ $2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 4 - 4 - 8 = -8 < 0$ เพราะฉะนั้น $1 \notin A$

เพราะว่า $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{0} - \sqrt{-1}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $1 \notin B$

เพราะฉะนั้น $1 \notin A \cup B$ นั่นคือ $A \cup B \neq R^+$ ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 2$ ทำให้ $2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 16 - 8 - 8 = 0$

เพราะฉะนั้น $2 \notin A$ เพราะว่า $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} \geq 1$

เพราะฉะนั้น $2 \in B$ เพราะฉะนั้น $B \not\subset A$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $x = 3$ ทำให้ $2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 = 64 - 16 - 8 = 40 > 0$ เพราะฉะนั้น $3 \in A$

เพราะว่า $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} = \sqrt{4} - \sqrt{1} = 1 \geq 1$ เพราะฉะนั้น $3 \in B$

เพราะฉะนั้น $A \cap B \neq \varnothing$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** การหาเซต $A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$$(2^x)^2 - 2(2^x) - 8 > 0$$

$$(2^x - 4)(2^x + 2) > 0$$

เพราะว่า $(2^x + 2) > 0$ เพราะฉะนั้น $2^x - 4 > 0$

$$2^x > 4 = 2^2$$

$$x > 2$$

สรุป $A = (2, \infty)$

การหาเซต $\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1$

$$(\sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2})^2 \geq 1$$

$$2x - 2 - 2\sqrt{2x-2}\sqrt{x-2} + x - 2 \geq 1$$

$$3x - 5 \geq 2\sqrt{2x-2}\sqrt{x-2}$$

$$9x^2 - 30x + 25 \geq 4(2x-2)(x-2)$$

$$9x^2 - 30x + 25 \geq 8x^2 - 24x + 16$$

$$x^2 - 6x + 9 \geq 0$$

$$(x-3)^2 \geq 0$$

$$-\infty < x < \infty \qquad \ldots(1)$$

$$x - 2 \geq 0 \text{ เมื่อ } x \geq 2 \qquad \ldots(2)$$

$$2x - 2 \geq 0 \text{ เมื่อ } x \geq 1 \qquad \ldots(3)$$

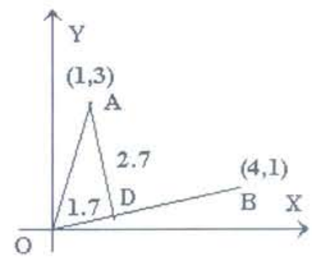
สรุป $B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1\} = [2, \infty)$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

**17. ตอบ 4.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามโจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทางเพื่อประมาณค่าพื้นที่ OAD ลากเส้นเวกเตอร์ OA และ OB ลาก OD ตั้งฉากกับ OB

วัดระยะทาง OD = 1.7 และ AD = 2.7

ค่าประมาณค่าพื้นที่ OAD $= \frac{1}{2}(OD)(AD) = \frac{1}{2}(1.7)(2.7) = 2.295$




$\frac{77}{17} = 4.5 > 3 \quad \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

$\frac{77}{2\sqrt{17}} > \frac{77}{17} > 3 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$\frac{77}{\sqrt{34}} = \frac{77}{\sqrt{2}\sqrt{17}} > \frac{77}{2\sqrt{17}} > \frac{77}{17} > 3 \quad \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$\frac{77}{34} = 2.264$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีที่สุด

**วิธีจริง** สมการเส้นตรง OB คือ $\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{4-0} = \frac{1}{4}$

$$x - 4y = 0 \qquad ...(1)$$

เพราะฉะนั้นความชัน OB เท่ากับ $\frac{1}{4}$ AD ตั้งฉากกับ OB เพราะฉะนั้นความชัน AD เท่ากับ $-4$

สมการเส้นตรง AD คือ $(y-3) = (-4)(x-1)$

$$4x + y = 7 \qquad ...(2)$$

4(2) ; $\quad 16x + 4y = 28 \qquad ...(3)$

(1) + (3) ; $\quad 17x = 28$ , $x = \frac{28}{17}$ $\quad$ เพราะฉะนั้น $y = \frac{7}{17}$ และพิกัดจุด D คือ $(\frac{28}{17}, \frac{7}{17})$

ความยาว OD $= \sqrt{(\frac{28}{17})^2 + (\frac{7}{17})^2} = \sqrt{\frac{784}{289} + \frac{49}{289}} = \sqrt{\frac{833}{289}}$

ความยาว AD $= \sqrt{(\frac{28}{17} - 1)^2 + (\frac{7}{17} - 3)^2} = \sqrt{(\frac{11}{17})^2 + (-\frac{44}{17})^2} = \sqrt{\frac{121}{289} + \frac{1936}{289}} = \sqrt{\frac{2057}{289}}$

พื้นที่ OAD $= \frac{1}{2}(OD)(AD) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{833}{289}}\sqrt{\frac{2057}{289}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{833}}{17}\frac{\sqrt{2057}}{17} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{(77)(77)(17)(17)}}{(17)(17)} = \frac{77}{34}$

**18.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta)$

$$= \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta + \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta) = \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + \theta)$$

เพราะฉะนั้น $-1.414 = -\sqrt{2} \leq \sin\theta + \cos\theta \leq \sqrt{2} = 1.414$

เพราะฉะนั้น $1 + \sin\theta + \cos\theta \neq -1$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ $\quad$ เพราะฉะนั้น $\int_1^{\sin\theta} x^2 dx = \frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{1}{3}$

$$\frac{\sin^3\theta}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

$$\sin^3\theta = -1$$

$\sin\theta = -1$ $\qquad$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = 0$ และ $1 + \sin\theta + \cos\theta = 1 - 1 + 0 = 0$

**19.ตอบ 4.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า สัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 24 % เพราะฉะนั้น $\frac{s}{\bar{x}} = 0.24$

เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 เพราะฉะนั้น $s = 12$ และ $\bar{x} = 50$

**หมายเหตุ** ถึงตรงนี้จะตัดตัวเลือกได้ 2 ตัวเลือก

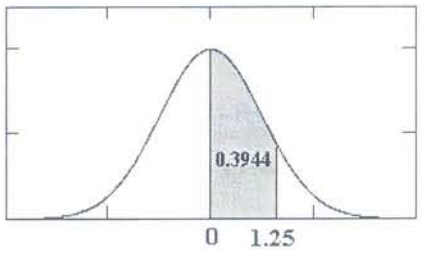
เพราะว่า $65 > 50$ = ค่าเฉลี่ย = ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ 50 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$x = 65$ จะได้ค่า $z = \frac{x - \bar{x}}{s} = \frac{65 - 50}{12} = 1.25$

จากพื้นที่ใต้โค้งปกติ ระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.25$ เป็น 0.3944

เพราะฉะนั้น $P(z < 1.25) = 0.5 + 0.3944 = 0.8944$

สรุปคะแนน 65 ตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 89.44




**20.ตอบ 1.**

**แนวคิด** $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sin^2 x + \frac{1}{2}\right) = \frac{d}{d\sin x}(\sin^2 x)\frac{d\sin x}{dx} + \frac{d(\frac{1}{2})}{dx} = 2\sin x\frac{d}{dx}(\sin x) + 0$$

$$= 2\sin x\cos x \qquad = \sin 2x$$

ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \sin 2(\frac{\pi}{4}) = 1$ สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ มีความชันเท่ากับ 1 จะมีสมการเป็น $y - 1 = 1.(x - \frac{\pi}{4})$ หรือ $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่าเส้นสัมผัสผ่านจุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$ จะต้องได้ $y = 1$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ ในทุกตัวเลือกเพื่อหาค่า y

**ตัวเลือก 1.** $\frac{\pi}{4} - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0 \longrightarrow y = 1$ **ตัวเลือก 2.** $\frac{\pi}{4} - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0 \longrightarrow y \neq 1$

**ตัวเลือก 3.** $2 - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0 \longrightarrow y \neq 1$ **ตัวเลือก 4.** $\sqrt{2} - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0 \longrightarrow y \neq 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

❶❷❸❹①②③④

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 9.

1. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$
   3. $\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{3}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+3x}{x^2+2x} & ,x<0 \\ \dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2} & ,x\ge 0 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และที่ $x = 1$
   2. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และที่ $x = 0$
   3. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$
   4. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

3. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด $2 \times 2$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $2 \times 2$ ถ้า $A^2 = I$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็น<u>เท็จ</u>

   1. $A^n$ เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n
   2. $\text{adj}A = A^{-1}$ หรือ $\text{adj}A = -(A^{-1})$
   3. $\det A = \det[C_{ij}(A)]$
   4. มีเมตริกซ์ A ซึ่งมีสมบัติตามที่กล่าวเพียง 2 เมตริกซ์เท่านั้น

4. ให้จุด O, A และ B เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัด (0, 0) , (1, 2) และ (3, 4) ตาม ลำดับ ถ้า P และ Q เป็นจุดที่มีคุณสมบัติว่า $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{OQ}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ แล้ว $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{41}{25}\bar{i} + \frac{38}{25}\bar{j}$ 2. $\frac{35}{16}\bar{i} + \frac{36}{16}\bar{j}$
   3. $\frac{38}{25}\bar{i} + \frac{41}{25}\bar{j}$ 4. $\frac{36}{16}\bar{i} + \frac{35}{16}\bar{j}$

5. ให้ $x_1, x_2, \ldots, x_N$ เป็นข้อมูล N ค่า โดยที่ N เป็นจำนวนคู่ และ $x_i = \frac{1}{i(i+1)}$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, N$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N+1})^2 \le \sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N})^2$

(2) $\sum_{i=1}^{N} \left| x_i - \frac{4}{N(N+4)} \right|$ มีค่าน้อยที่สุด

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง
2. ข้อ (1) เท่านั้นที่เป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นที่เป็นจริง
4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

6. กำหนดให้ตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง เป็นดังนี้

| ช่วงคะแนน | 30–39 | 40–49 | 50–59 | 60–69 | 70–79 | 80–89 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ความถี่ | 4 | 7 | 10 | 3 | 2 | 4 |

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลชุดนี้เป็นเท่าใด

1. 0.1835
2. 1.835
3. 5.45
4. 0.545

7. อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งอัตราส่วนของผลบวกของ r พจน์แรกต่อผลบวกของ s พจน์แรก เท่ากับ $\frac{r^2}{s^2}$ อัตราส่วนของพจน์ที่ 7 ต่อพจน์ที่ 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{7}{20}$

8. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ซึ่งหารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10
2. 15
3. 20
4. 35

9. กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 9 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, … , 9 อย่างละ 1 ใบ สุ่มหยิบบัตรทีละ 1 ใบ n ครั้ง โดยที่ใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป และบัตรแต่ละใบมีโอกาสถูกหยิบเท่า ๆ กัน ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของ n จำนวนที่ปรากฏบนบัตรที่สุ่มได้ จะหารด้วย 10 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$ 2. $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n$

3. $1-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$ 4. $1+\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$

10. กำหนด $f:[-\pi,\pi]\rightarrow R$ โดย $f(x)=\lfloor 4.5\cos x\rfloor$ เมื่อ $\lfloor a\rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a เรนจ์ของ f มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 5

3. 10 4. 11

11. กำหนด $f:\{x\in R \mid 2x^2\leq 7x-3\}\rightarrow R$ โดย $f(x)=2^{-2x}$

ค่าต่ำสุดของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-64$ 2. $-2$

3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{64}$

12. ให้ $A=\left\{\frac{y}{x} \mid \frac{x}{y}=\frac{2y}{x+y}\right\}$ เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง

จะได้ว่าจำนวนสมาชิกของ A เป็นไปดังข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1

3. 2 4. มากกว่า 2

13. สำหรับจำนวนจริง x และ y ใดๆ กำหนดให้

$$M(x,y)=\begin{cases} y & ,x\leq y \\ x & ,y<x \end{cases}$$

และ $$m(x,y)=\begin{cases} x & ,x\leq y \\ y & ,y<x \end{cases}$$

ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a<b<c<d$

$M(m(M(a,c),d),M(c,m(d,b)))$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. a 2. b

3. c 4. d

14. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < a < b < c < d$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a+c}{b+d}$

(2) $a - c < b - d$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

15. ให้เอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อความ "จำนวนจริงบวกทุกจำนวนสามารถเขียนเป็นกำลังสองของจำนวนจริงบวกบางจำนวนได้" ตรงกับสัญลักษณ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x[x > 0 \wedge \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$ , $U = R$
2. $[\forall x[x > 0]] \wedge [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$ , $U = R$
3. $\forall x[x > 0 \rightarrow \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$ , $U = R$
4. $[\forall x[x > 0]] \rightarrow [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$ , $U = R$

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\tan 61^\circ - \tan 16^\circ \tan 61^\circ - \tan 16^\circ < 1$

(2) $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

17. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น $\arcsin y + \arccos x$ มีค่าอยู่ในช่วงใดในข้อต่อไปนี้

1. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
2. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
3. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
4. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

18. ให้ $B = \{ x \mid x \in [0, 2\pi]$ และ $2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x \}$

ดังนั้น B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$
2. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$
3. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$
4. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$

19. กำหนดให้ $(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y}) = (1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x})$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ค่าของ x และ y ต้องมากกว่า 31
2. ค่าของ x และ y ต้องน้อยกว่า 13
3. ไม่มีจำนวนเต็มใด ๆ สอดคล้องสมการข้างต้น
4. x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกใดก็ได้

20. กำหนดให้ $f(x) = x^2 \cos x + \tan x^2 + e^{\sin x}$ และ $f(x) = g(x) + h(x)$ โดยที่ $g(x) = g(-x)$ และ $h(-x) = -h(x)$ จะได้ $h(x)$ มีค่าเท่าใด

1. $e^{\sin x}$
2. $\sin x\, e^{(\sin x)^2}$
3. $\frac{1}{2}(e^{\sin x} - e^{-\sin x})$
4. $e^{\sin x} - e^{-\sin x} + x\tan x^2$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 9.

1. ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $x \to 7^+$ จะได้ $x > 7$

$x+1 > 8$ $\qquad$ $x+2 > 9$

$\sqrt[3]{x+1} > 2$ $\qquad$ $\sqrt{x+2} > 3$

$-\sqrt[3]{x+1} < -2$ $\qquad$ $\sqrt{x+2}-3 > 0$

$\sqrt[3]{x+1} < 0$

ดังนั้น $x \to 7^+$ จะทำให้ $\dfrac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}+3} < 0$

เพราะว่าตัวเลือกเป็นค่าตัวเลขทุกตัว ดังนั้นค่าลิมิตต้องหาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3} < 0$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง**
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3} &= \lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}\frac{(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt{x+2}+3)}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt[3]{x+1})(\sqrt{x+2}+3)}{(x+2)-9}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{x-7}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt[3]{(x+1)})^3-2^3}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{(\sqrt{x+2}+3)(2-\sqrt[3]{x+1})}{(\sqrt[3]{x+1}-2)((\sqrt[3]{x+1})^2+2\sqrt[3]{x+1}+4)}\\
&= \lim_{x\to 7}\frac{-(\sqrt{x+2}+3)}{(\sqrt[3]{x+1})^2+2\sqrt[3]{x+1}+4}\\
&= \frac{-\left(\sqrt{7+2}+3\right)}{\left(\sqrt[3]{7+1}\right)^2+2\sqrt[3]{7+1}+4}\\
&= \frac{-6}{4+4+4}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**หมายเหตุ** โดยการใช้กฎของโลปิทัล

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ และ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L$

จากโจทย์ให้ $f(x) = 2-\sqrt[3]{x+1} = 2-(x+1)^{\frac{1}{3}}$ จะได้ $f'(x) = -\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}$

และให้ $g(x) = \sqrt{x+2}-3 = (x+2)^{\frac{1}{2}}-3$ จะได้ $g'(x) = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\to 7}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 7}\frac{\left[-\frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}}\right]}{\left[\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}}\right]}$$

$$= -\frac{2}{3}\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{8^2}}$$

$$= -\frac{2}{3}\frac{(3)}{(4)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

สรุป $\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3} = -\frac{1}{2}$

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ข้อแนะนำในการพิจารณาว่า f ไม่ต่อเนื่อง ให้ดูจากเงื่อนไข

1. จุด $x = a$ ที่ทำให้ฟังก์ชันหาค่าไม่ได้
2. จุด $x = a$ ที่ $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้
3. จุดที่ตัวหารของ $f(x)$ เป็นศูนย์

จากสูตรฟังก์ชันของโจทย์พบว่า $x^2+x-2=0$ เมื่อ $x = 1$

ดังนั้น f หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 1$

สรุป f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

**หมายเหตุ** 1. ข้อสอบแบบนี้ขอให้พิจารณาความไม่ต่อเนื่องก่อนดีกว่า

2. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$

3. f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -2$ เพราะว่า $f(-2)$ หาค่าไม่ได้

จะเห็นได้ว่าการแสดงว่า f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ จะต้องทำงานมากที่สุด

**3. ตอบ 4.**

**แนวคิด** $A^2 = I$ จะได้ $\det(A^2) = \det I$ และ $(\det A)^2 = 1$

ดังนั้น $\det A \neq 0$ และ $\det A^n \neq 0$ ทุกค่า n

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

เพราะว่า $(\det A)^2 = 1$ เพราะฉะนั้น $\det A = 1$ หรือ $\det A = -1$

จากสูตร $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}A$ และ $\det A = 1 \longrightarrow A^{-1} = \operatorname{adj}A$

และ $\det A = -1 \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\operatorname{adj}A \rightarrow \operatorname{adj}(A) = -(A^{-1})$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2 . ถูกต้อง

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ $2\times2$ ใดๆ จะได้ $C_{ij}(A) = \begin{bmatrix} d & c \\ b & a \end{bmatrix}$

$\det(A) = ad - bc$ และ $\det(C_{ij}(A)) = ad - bc$

สรุป $\det A = \det(C_{ij}(A))$ เสมอ

ดังนั้นตัวเลือก 3. เป็นจริงเสมอโดยไม่จำเป็นต้องใช้เงื่อนไข $A^2 = I$

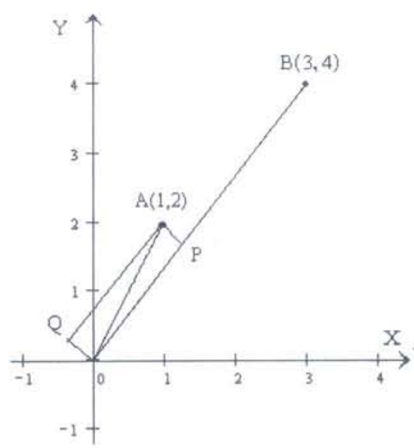
เลือก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

สรุปตัวเลือก 4. ผิด

**หมายเหตุ** คำถามข้อนี้หากนักเรียนอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนและเลือกตัวอย่างได้เร็วก็จะได้ว่าตัวเลือก 4. ผิดไม่ต้องไปเสียเวลาแสดงเหตุผลว่าตัวเลือก 1, 2 และ 3 ถูกต้อง

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์**




เพราะว่า $\overline{OP}$ ขนานกับ $\overline{OB}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OP} = k(3\bar{i} + 4\bar{j})$

จาก $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

จะได้ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$

จาก $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$

จะได้ $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} \cdot (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$

$(3\bar{i}+4\bar{j})\cdot(\bar{i}+2\bar{j}) = \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}$

$= (3\bar{i}+4\bar{j})(k(3\bar{i}+4\bar{j}))+0 \qquad (\because \overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OQ})$

$3+8 = k\,(9+16)$

$k = \frac{11}{25}$

ดังนั้น $\overrightarrow{OP} = \frac{11}{25}(3\bar{i}+4\bar{j}) = \frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j}$

จาก $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ จะได้ $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP} = (\bar{i}+2\bar{j})-(\frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j})$

$= -\frac{8}{25}\bar{i}+\frac{6}{25}\bar{j}$

สรุป $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ} = \left(\frac{33}{25}\bar{i}+\frac{44}{25}\bar{j}\right)-\left(\frac{8}{25}\bar{i}+\frac{6}{25}\bar{j}\right)$

$= \frac{41}{25}\bar{i}+\frac{38}{25}\bar{j}$

**การหาคำตอบโดยวิธีวาดรูป**

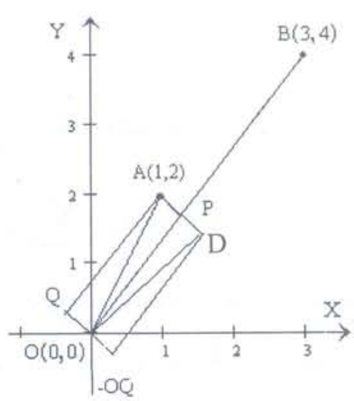
เพราะว่า $\overrightarrow{OP}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{OB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OQ}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OP}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OQ}$

เพราะว่า $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{OA}$ เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากโดยมีด้านประกอบมุมฉากเป็น $\overrightarrow{OQ}$ และ $\overrightarrow{OP}$

**ขั้นตอนการวาดรูป**

1. ลากเส้นตรง $L_1$ ผ่านเวกเตอร์ $\overrightarrow{OB}$
2. ลากเส้นตรง $L_2$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ และผ่านจุด O
3. จากปลายเวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$ ลากเส้นมาตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ จะได้พิกัดของจุด P
4. จากปลายเวกเตอร์ $\overrightarrow{OA}$ ลากเส้นมาตั้งฉากกับ $L_2$ จะได้พิกัดของจุด Q
5. ลากเวกเตอร์ $-\overrightarrow{OQ}$
6. เส้นทแยงมุม $\overrightarrow{OD}$ คือเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}$




วัดพิกัด D ได้เป็น (1.6, 1.5)

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

**หมายเหตุ** สัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ในตัวเลือก 2. และ 4. มีค่าเกิน 2 ดังนั้นตัดทิ้งได้เลย แต่ $\frac{41}{25} = 1.64$ , $\frac{38}{25} = 1.52$

5. ตอบ 2.

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right| \geq 0$

เพราะฉะนั้น $-4000 < \sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$

สรุป $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ ไม่ใช่ค่าน้อยสุด ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\sum_{i=1}^{N} X_i = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right]$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots + (1-\frac{1}{N+1}) = 1-\frac{1}{N+1} = \frac{N+1-1}{N+1}$$

$$= \frac{N}{N+1}$$

ดังนั้น $\overline{X}$ ของ $X_1, X_2, \ldots.., X_N$ เท่ากับ $\frac{(\frac{N}{N+1})}{N} = \frac{1}{N+1}$

จากคุณสมบัติของ $\overline{X}$ พบว่า $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(x_i - k)^2$ ทุกค่า k

สรุป $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N+1})^2 \leq \sum_{i=1}^{N}(x_i - \frac{1}{N})^2$ เสมอ เพราะฉะนั้นข้อความ (1) เป็นจริง

N เป็นเลขคู่ ให้ N = 2k , k เป็นจำนวนเต็ม $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots., x_{2k}$

$$\text{มัธยฐาน} = \frac{x_k + x_k + 1}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(k+2)+k}{k(k+1)(k+2)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2k+2}{k(k+1)(k+2)}\right]$$

$$= \frac{2(k+1)}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)}$$

$$= \frac{4}{4k(k+2)} = \frac{4}{(2k)(2k+4)} = \frac{4}{N(N+4)}$$

จากคุณสมบัติของมัธยฐาน $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right| \leq \sum_{i=1}^{N}|x_i - k|, \forall k \in R$

อย่างไรก็ตามข้อความ “ $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ มีค่าน้อยที่สุด”

ถือว่าเป็นประโยคเปิดซึ่ง N อาจเป็น 2, 4, 6, 8, ….ก็ได้

ดังนั้น สรุปข้อความ (2) ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จไม่ได้

**หมายเหตุ** U เป็นเซตของจำนวนเต็มคู่

" $\forall N \in U$ [ $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i - \frac{4}{N(N+4)}\right|$ เป็นค่าน้อยที่สุด]" มีค่าความเป็นเท็จ

เพราะว่า เมื่อ N = 2 จะได้ $\sum_{i=1}^{2}\left|x_i - \frac{4}{2(2+4)}\right| = \sum_{i=1}^{2}\left|\frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

$\sum_{i=1}^{2}\left|x_i - \frac{4}{2(2+4)}\right| = \frac{1}{3}$ ไม่เป็นค่าน้อยที่สุด เพราะว่ามี $0 < \frac{1}{3}$

**6. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ดังนี้ $0 < x < y$

จะได้ว่า $0 < y - x < y + x$ ดังนั้น $0 < \frac{y-x}{y+x} < 1$ เสมอ

เพราะว่า $0 < Q_1 < Q_3$ เพราะฉะนั้น $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} < 1$ เสมอ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

| ช่วงคะแนน | ความถี่ | ความถี่สะสม |
|---|---|---|
| 30 – 39 | 4 | 4 |
| 40 – 49 | 7 | 11 $\leftarrow Q_1$ |
| 50 – 59 | 10 | 21 |
| 60 – 69 | 3 | 24 $\leftarrow Q_2$ |
| 70 – 79 | 2 | 26 |
| 80 – 89 | 4 | 30 |

$N = 30 \quad \frac{N}{4} = 7.5, \frac{3N}{4} = 22.5$

$$Q_1 = L + \left[\frac{\frac{N}{4} - \sum f_L}{f_r}\right] I \quad = 39.5 + \left[\frac{7.5 - 4}{7}\right](10) \quad = 39.5 + 5 = 44.5$$

$$Q_3 = L + \left[\frac{\frac{3N}{4} - \sum f_L}{fr}\right] I \quad = 59.5 + \left[\frac{22.5 - 21}{3}\right](10) \quad = 59.5 + 5 = 64.5$$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{64.5 - 44.5}{64.5 + 44.5} = \frac{20}{109} = 0.1835$

**7. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ให้ลำดับเลขคณิตคือ a, a + d, a + 2d, a + 3d, .......

**โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของตัว** r และ s แทนค่า r = 1 ; ผลบวก 1 พจน์แรก คือ a แทนค่า s = 2 ; ผลบวก 2 พจน์แรก คือ a+ (a+d)

เพราะว่า $\dfrac{\sum \text{r terms}}{\sum \text{s terms}} = \dfrac{r^2}{s^2}$ เพราะฉะนั้น $\dfrac{a}{a+(a+d)} = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$ และ 4a = 2a + d

เพราะฉะนั้น d = 2a ทำให้ $\dfrac{a_7}{a_{20}} = \dfrac{a+6d}{a+19d} = \dfrac{a+12a}{a+38a} = \dfrac{13a}{39a} = \dfrac{1}{3}$

สรุปตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ให้ a เป็นพจน์แรก, d เป็นผลต่างร่วม

ผลบวก r พจน์แรก = $\dfrac{r}{2}(2a+(r-1)d)$ ผลบวก s พจน์แรก = $\dfrac{s}{2}(2a+(s-1)d)$

เพราะว่า $\dfrac{\frac{r}{2}(2a+(r-1)d)}{\frac{s}{2}(2a+(s-1)d)} = \dfrac{r^2}{s^2}$ เพราะฉะนั้น $\dfrac{2a+(r-1)d}{2a+(s-1)d} = \dfrac{r}{s}$

$$\begin{aligned} 2as + rds - ds &= 2ar + rds - dr \\ 2as - 2ar &= ds - dr \\ 2a(s-r) &= d(s-r) \end{aligned}$$

$s - r \neq 0$ ; เพราะฉะนั้น d = 2a สรุป $\dfrac{a_7}{a_{20}} = \dfrac{a+6d}{a+19d} = \dfrac{a+12a}{a+19a} = \dfrac{13a}{39a} = \dfrac{1}{3}$

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ตัวเลขตั้งแต่ 1 – 100 ที่หารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัว คือ 1, 3, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 29, 31, 33, 37, 39, 41, 43, 47, 49, 51, 53, 57, 59, 61, 67, 69, 71, 73, 77, 79, 83, 87, 89, 91, 93, 97 ดังนั้นหากทำโดยการแจงตัวเลขจาก 1, 3, 7, ...ก็ตัดตัวเลือกทิ้งไปได้เรื่อยๆ จนถึงตัวเลข 57 ก็ได้คำตอบเป็นตัวเลือก 4.

**วิธีจริง** U = $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$A = \{x \in U \mid 2 \mid x\} = \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$ $n(A) = 50$

$B = \{x \in U \mid 5 \mid x\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$ $n(B) = 20$

$C = \{x \in U \mid 9 \mid x\} = \{9, 18, 27, \ldots, 99\}$ $n(C) = 11$

$A \cap B = \{x \in U \mid 2 \mid x$ และ $5 \mid x\} = \{x \in U \mid 10 \mid x\} = \{10, 20, \ldots, 100\}$ $n(A \cap B) = 10$

$A \cap C = \left\{ x \in U \,\middle|\, 2 \mid x \text{ และ } 9 \mid x \right\} = \left\{ x \in U \,\middle|\, 18 \mid x \right\} = \left\{ 18, 36, \ldots, 90 \right\}$

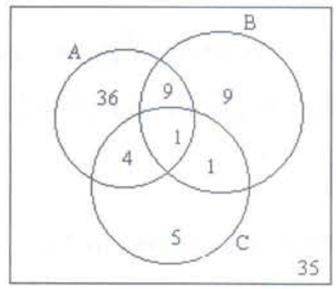
$B \cap C = \left\{ x \in \cup \,\middle|\, 5 \mid x \text{ และ } 9 \mid x \right\} = \left\{ x \in \cup \,\middle|\, 45 \,\middle|\, x \right\} = \left\{ 45, 90 \right\}$

$A \cap B \cap C = \left\{ x \in U \,\middle|\, 2 \mid x \text{ และ } 5 \mid x \text{ และ } 9 \mid x \right\} = \left\{ x \in U \,\middle|\, 90 \mid x \right\} = \left\{ 90 \right\}$

$n(A \cap C) = 5$ , $n(B \cap C) = 2$ , $n(A \cap B \cap C) = 1$

แผนภาพของเวนน์แสดงสมาชิกแต่ละส่วน

ดังนั้น $n(A \cup B \cup C) = 65$




$P \;= \{x \in U \mid 2 \mid x \text{ และ } 3 \mid x \text{ และ } 9 \mid x\}$

$\quad = \{x \in U \mid x \in A' \text{ และ } x \in B' \text{ และ } x \in C'\}$

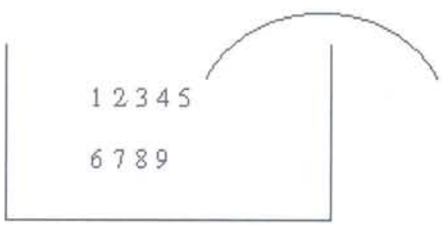
$\quad = A' \cap B' \cap C'$

$\quad = (A \cup B \cup C)'$

$n(P) = n(U) - n(A \cup B \cup C) = 100 - 65 = 35$

**9. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือกแบบที่ 1**




1, 2, 3, 4, 5 หยิบที่ละ 1 ใบแล้ว
6, 7, 8, 9 คืนก่อนหยิบครั้งถัดไป
ทำแบบนี้ n ครั้ง

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n ดังนั้นแทนค่า n = 1

จะเห็นว่า P(ตัวเลขนั้นหารด้วย 10 ลงตัว) = 0 ต่อไปแทนค่า n = 1 ในทุกตัวเลือก

**ตัวเลือก 1.** $1 - \frac{8}{9} - \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = -\frac{8}{9} \neq 0$ **ตัวเลือก 2.** $1 - \frac{8}{9} - \frac{5}{9} + \frac{4}{9} = 0$

**ตัวเลือก 3.** $1 - \frac{8}{9} + \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9} \neq 0$ **ตัวเลือก 4.** $1 + \frac{8}{9} - \frac{5}{9} - \frac{4}{9} = \frac{8}{9} \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** ใช้เหตุผลว่าความน่าจะเป็นต้องเป็นเลขบวกเสมอ ดังนั้นหากแทนค่า n บางค่าแล้วค่าในตัวเลือกเป็นเลขลบ ก็จะตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

เช่น n = 1 ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง แบบที่ 1**เหตุการณ์ที่จะได้ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว เป็นเหตุ การณ์ที่ตรงกันข้ามกับ (เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัว หรือ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5)

A = เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขคี่ทุกครั้งของการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ ทุกครั้ง

$P(A) = \left(\frac{5}{9}\right)^n$

B = เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้เลข 5 ทุกครั้งจากการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$

$P(B) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้เลขจาก $\{1, 3, 7, 9\}$ ทุกครั้งที่หยิบ

$P(A \cap B) = \left(\frac{4}{9}\right)^n$

E = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว

$E'$ = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ไม่ลงตัว

= เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัวหรือเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5

$= A \cup B$

$$P(E') = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$P(E) = 1 - P(E') = 1 - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n \quad = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

**วิธีจริงแบบที่ 2.** เหตุการณ์ที่ผลคูณของตัวเลขจะหารด้วย 10 ลงตัว คือเหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อย 1 ตัว และได้เลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

ให้ X = เหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อยหนึ่งตัว

Y = เหตุการณ์ที่ได้เลขคู่อย่างน้อยหนึ่งตัว

$$\begin{aligned} P(\text{ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว}) &= P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y) \\ &= \big(1 - P(X')\big) + \big(1 + P(Y')\big) - \big(1 - P((X \cup Y)')\big) \\ &= 1 - P(X') + 1 - P(Y') - 1 + P\big((X' \cap Y')\big) \\ &= 1 - P(X') - P(Y') + P(X' \cap Y') \end{aligned}$$

$P(X') = P(\text{ไม่ได้เลข 5 เลยแม้แต่ตัวเดียว}) = \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$P(Y') = P($ ไม่ได้เลขคู่เลยแม้แต่ตัวเดียว$) = \left(\frac{5}{9}\right)^n$

$P(X' \cap Y') = P($ไม่ได้เลขคู่และไม่ได้เลข 5$) = \left(\frac{4}{9}\right)^n$

สรุป P(ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว) $= 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$

**10. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**คำนวณค่าบางค่าแล้วค่อย ๆ ตัดตัวเลือก

$$f(0) = \lfloor 4.5\cos 0 \rfloor = \lfloor 4.5 \rfloor = 4$$
$$f(\pi) = \lfloor 4.5\cos\pi \rfloor = \lfloor -4.5 \rfloor = -5$$
$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \lfloor 4.5\cos\tfrac{\pi}{2} \rfloor = \lfloor 0 \rfloor = 0$$
$$f(\tfrac{\pi}{3}) = \lfloor 4.5\cos\tfrac{\pi}{3} \rfloor = \lfloor \tfrac{4.5}{2} \rfloor = 2$$

ดังนั้น $n(R_f) > 3$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$$f(\tfrac{2\pi}{3}) = \lfloor 4.5\cos\tfrac{2\pi}{3} \rfloor = \lfloor \tfrac{4.5}{-2} \rfloor = \lfloor -2.25 \rfloor = -3$$
$$f(\tfrac{\pi}{6}) = \lfloor 4.5\cos\tfrac{\pi}{6} \rfloor = \lfloor 4.5(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) \rfloor = \lfloor 3.89 \rfloor = 3$$

ดังนั้น $n(R_f) > 5$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $-\pi \le x \le \pi$

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-4.5 \le 4.5\cos x \le 4.5$$

ดังนั้น $\{4.5\cos x \mid -\pi \le x \le \pi\} = [-4.5, 4.5]$

เพราะฉะนั้น $\{\lfloor 4.5\cos x \rfloor \mid -\pi \le x \le \pi\} = \{-5, -4, -3, \ldots, 4\}$

เพราะว่า $n(\{-5, -4, -3, \ldots, 4\}) = 10$ เพราะฉะนั้น $n(R_f) = 10$

**11. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**เพราะว่า $f(x) = 2^{-2x} = (2^{-2})^x = (\frac{1}{4})^x > 0$

เพราะฉะนั้น – 64, – 2 ไม่เป็นค่าต่ำสุดของ f ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปสมมติ $f(x) = \frac{1}{64} = \frac{1}{2^6} = 2^{-6}$

$$2^{-2x} = 2^{-6}$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

และ $3 \in D_f$ และ $\frac{1}{64} < \frac{1}{2}$ ดังนั้นค่าต่ำสุดของ f เท่ากับ $\frac{1}{64}$

**วิธีจริง** $D_f = \{x \in R \mid 2x^2 \leq 7x - 3\}$

$$2x^2 \leq 7x - 3$$

$$2x^2 - 7x + 3 \leq 0$$

$$(2x - 1)(x - 3) \leq 0$$

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

สรุป $D_f = [\frac{1}{2}, 3]$

เพราะว่า $f(x) = 2^{-2x} = (2^{-2})^x = (\frac{1}{4})^x$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{2}, 3]$

ดังนั้น $f(x) \geq f(3)$ ทุกค่า $x \in [\frac{1}{2}, 3]$ สรุปค่าต่ำสุดของ f คือ $f(3) = 2^{-2(3)} = \frac{1}{64}$

**12.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x และ y ให้ x = 1 จะได้ $\frac{1}{y} = \frac{2y}{1+y}$

$$1 + y = 2y^2$$

$$2y^2 - y - 1 = 0$$

$$(2y + 1)(y - 1) = 0$$

$$y = -\frac{1}{2}, 1$$

ดังนั้น $\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, 1$ เพราะฉะนั้น $-\frac{1}{2}, 1 \in A$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\frac{x}{y} = \frac{2y}{x+y}$ จะได้ $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{2y} = \frac{1}{2}\frac{x}{y} + \frac{1}{2}$

$$2\frac{y}{x} = \frac{x}{y} + 1$$

ให้ $V = \frac{y}{x}$ จะได้ $2V = \frac{1}{v} + 1$

$$2V^2 = 1 + V$$

$$2V^2 - V - 1 = 0$$

$$(2V+1)(V-1) = 0$$
$$V = -\frac{1}{2}, 1$$
$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{2}, 1$$

สรุป $A = \left\{\frac{y}{x} \middle| \frac{x}{y} = \frac{2y}{x+y}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

**13.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

ดังนั้นสมมติ a, b, c, d เป็น 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับดีกว่า $a = 1 < b = 2 < c = 3 < d = 4$

$m(d, b) = m(4, 2) = 2 \qquad M\big(c, m(d, b)\big) = m(3, 2) = 3$

$M(a, c) = M(1, 3) = 3 \qquad m\big(M(a, c), d\big) = m(3, 4) = 3$

$M\big(m(M(a, c), d), M(c, m, (d, b))\big) = M(3, 3) = 3 = c$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $M(x, y) = Max(x, y)$ = ค่ามากสุดระหว่าง x, y

$m(x, y) = Min(x, y)$ = ค่าต่ำสุดระหว่าง x, y

เมื่อ$a < b < c < d$ $M\big(m(M(a, c)\ d, ), M(c, m(d, b))\big) = M(m(c, d), M(c, b)) = M(c, c) = c$

**14.ตอบ 1.**

**แนวคิด** ในขณะที่นักเรียนกำลังทำข้อสอบขอแนะนำให้ทำข้อความ 2 ก่อนดีกว่า

โดยการเลือก $0 < a = 1 < b = 2 < = 3 < d = 10$ จะเห็นว่า$a - c = -2 < -8 = b - d$

ดังนั้นข้อความ (2) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ข้อความ (1) เป็นจริงแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ $0 < a < b < c < d$

จาก$b < c$ $\qquad 0 < a + b < a + c$ ....(1)

จาก$b < c$ $\qquad 0 < b + d < c + d$

$$0 < \frac{1}{c+d} < \frac{1}{b+d} \qquad \text{....(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a+c}{b+d}$

**15. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้ค่าความจริงในการตัดตัวเลือก **โจทย์** "จำนวนจริงบวกทุกจำนวนสามารถเขียนเป็นกำลังสองของจำนวนจริงบวกบางจำนวนได้" มีค่าความจริงเป็นจริง

**ตัวเลือก 1.** $\forall x\,[\,x > 0 \wedge \exists y\,[\,y > 0 \wedge x = y^2]]$

เป็นเท็จเพราะว่า $x = -4$ ทำให้ $-4 > 0$ เป็นเท็จ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

**ตัวเลือก 2.** เพราะว่า $[\forall x\,[x > 0]\,]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $[\forall x\,[\,x > 0\,]] \wedge [\,\exists y\,[\,y > 0 \wedge x = y^2]]$ เป็นเท็จ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**ตัวเลือก 3.** และ 4 มีลักษณะคล้ายกันแต่เมื่อสังเกตให้ดีจะพบว่า $[\,\exists y\,[\,y > 0 \wedge x = y^2]]$ เป็นประโยคเปิด ดังนั้น $[\forall x\,[\,x > 0\,]] \rightarrow [\,\exists y\,[\,y > 0 \wedge x = y^2]]$

จึงสรุปค่าความจริงไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ (1)** $\tan 45^\circ = \tan(61^\circ - 16^\circ)$

$$1 = \frac{\tan 61^\circ - \tan 16^\circ}{1 + \tan 16^\circ \tan 61^\circ}$$

$$1 + \tan 16^\circ \tan 61^\circ = \tan 61^\circ - \tan 16^\circ$$

ดังนั้น $\tan 61^\circ - \tan 16^\circ \tan 61^\circ - \tan 16^\circ = 1 < 1$ สรุปข้อความ (1) เป็นเท็จ

**หมายเหตุ** ทำได้แค่นี้ก็ควรตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ (2)** จากสูตร $2\arctan x = \arctan(\frac{2x}{1-x^2})$

จะได้ $2\arctan(\frac{1}{3}) = \arctan(\frac{2(\frac{1}{3})}{1-(\frac{1}{3})^2}) = \arctan(\frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{8}{9})}) = \arctan\frac{3}{4}$ สรุปตัวเลือก (2) เป็นจริง

**17. ตอบ 3.**

**แนวคิด วิธีที่ 1** $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \frac{3\pi}{2}$

$$\arcsin(x + y) = \frac{3\pi}{2} - \arccos(x - y)$$

เพราะว่า $\sin(\frac{3\pi}{2} - A) = -\cos A$ เพราะฉะนั้น $\sin(\arcsin(x + y)) = \sin(\frac{3\pi}{2} - \arccos(x - y))$

$$x + y = -\cos(\arccos(x - y))$$

$$x + y = -(x - y) = -x + y$$
$$x = -x$$
$$x = 0$$

ดังนั้น $\arcsin(0 + y) + \arccos(0 - y) = \frac{3\pi}{2}$

$\arcsin y + \arccos(-y) = \frac{3\pi}{2}$

เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin y \le \frac{\pi}{2}$ , $0 \le \arccos(-y) \le \pi$ เพราะฉะนั้น $\arcsin y = \frac{\pi}{2}$ และ $\arccos(-y) = \pi$

สรุป $\arcsin y + \arccos x = \frac{\pi}{2} + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

**วิธีที่ 2** เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin k \le \frac{\pi}{2}$ และ $0 \le \arccos t \le \pi$

ดังนั้น $\arcsin k + \arccos t = \frac{3\pi}{2}$ ก็ต่อเมื่อ $\arcsin k = \frac{\pi}{2}$ และ $\arccos t = \pi$

ก็ต่อเมื่อ $k = 1$ และ $t = -1$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\arcsin(x + y)}{\frac{\pi}{2}} + \dfrac{\arccos(x - y)}{\pi} = \dfrac{3\pi}{2}$ ก็ต่อเมื่อ

$x + y = 1$ ....(1)

$x - y = -1$ ....(2)

(1) + (2) ; $2x = 0$ ดังนั้น $x = 0$ และ $y = 1$

สรุป $\arcsin y + \arccos x = \arcsin 1 + \arccos 0 = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

**18. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เซตคำตอบตรงกับตัวเลือกใดให้ใช้การนำสมาชิกในเซตของตัวเลือกขึ้นมาแทนค่า โดยเลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้ และคิดเลขได้ง่าย เช่น $x = 30.01^\circ$ และใช้การประมาณค่าเพื่อดูว่า $30.01^\circ \in B$ หรือไม่

$2\sin 2x - 1 = 2\sin 2(30.01^\circ) - 1 = 2\sin 60.02^\circ - 1 \approx 2(\frac{1}{2}) - 1 = 0$

$2\cos x - 2\sin x = 2\cos 31.01^\circ - 2\sin 31.01^\circ \approx 2(\frac{\sqrt{3}}{2}) - 2(\frac{1}{2}) = \sqrt{3} - 1 = 0.7$

ดังนั้น $30.01^\circ \notin B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**คำแนะนำ** เปลี่ยนเรเดียนเป็นองศาอาจทำให้นักเรียนคิดเลขง่ายขึ้น

1. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right) = [45^\circ, 120^\circ)\cup(150^\circ, 240^\circ)$
2. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right) = (30^\circ, 120^\circ)\cup(150^\circ, 240^\circ)$
3. $\left[\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right) = [45^\circ, 120^\circ)\cup(150^\circ, 225^\circ]$
4. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6},\frac{5\pi}{4}\right) = (30^\circ, 120^\circ)\cup(150^\circ, 225^\circ]$

ต่อไปเลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 4. เช่นเลือก $x = 225.01^\circ$

$$
\begin{aligned}
2\sin 2x - 1 &= 2\sin 2(225.01^\circ) - 1 \\
&= 2\sin(450.02^\circ) - 1 \\
&= 2\sin(360^\circ + 90.02^\circ) - 1 \\
&= 2\sin(90.02^\circ) - 1 \approx 2(1) - 1 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\cos(225.01^\circ) - 2\sin(225.01^\circ) \\
&= 2\cos(180^\circ + 45.01^\circ) - 2\sin(180^\circ - 45.01^\circ) \\
&= -2\cos(45.01^\circ) - 2\sin(45.01^\circ) \\
&\approx -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) < 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $2\sin 2(225.01^\circ) - 1 > 2\cos(225.01^\circ) - 2\sin(225.01^\circ)$

เพราะฉะนั้น $225.01 \in B$ แต่ $225.01 \notin (30^\circ, 120^\circ)\cup(150^\circ, 225^\circ]$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ใช้การแก้อสมการ $2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x$

$$
\begin{aligned}
2(2\sin x\cos x) - 1 &> 2\cos x - 2\sin x \\
4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 &> 0 \\
2\sin x\,(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) &> 0 \\
(2\sin x - 1)(2\cos x + 1) &> 0
\end{aligned}
$$

จำแนกกรณีต่างๆ ออกเป็น 2 กรณี

คือ 1. $(2\sin x - 1) > 0$ และ $(2\cos x + 1) > 0$

และ 2. $(2\sin x - 1) < 0$ และ $(2\cos x + 1) < 0$

**กรณีที่ 1** $2\sin x - 1 > 0$ และ $2\cos x + 1 > 0$

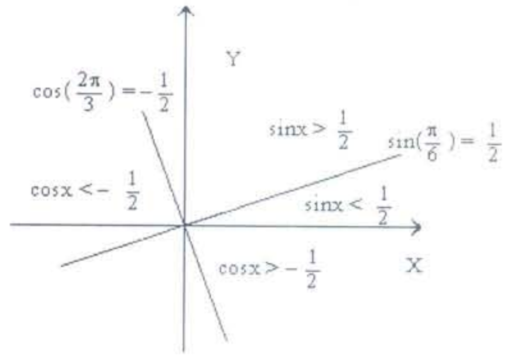
$\sin x > \frac{1}{2}$ และ $\cos x > \frac{1}{2}$

ดูจากกราฟ $\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \sin x>\frac{1}{2}\right\}=(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$

$\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \cos x>-\frac{1}{2}\right\}=[0,\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},2\pi]$

เพราะฉะนั้น $\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \sin x>\frac{1}{2},\ \cos x>-\frac{1}{2}\right\}$

$=(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})\cap([0,\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{4\pi}{3},2\pi))\ =\ (\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})$




**หมายเหตุ**

ทำมาได้แค่นี้ก็ควรจะตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

**กรณีที่ 2** $2\sin x-1<0$ และ $2\cos x+1<0$

$\sin x<\frac{1}{2}$ และ $\cos x<-\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \sin x<\frac{1}{2}\right\}=[0,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{5\pi}{6},2\pi]$ และ $\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \cos x<-\frac{1}{2}\right\}=\left(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$

$\left\{x\in[0,2\pi]\ \middle|\ \sin x<\frac{1}{2},\cos x<-\frac{1}{2}\right\}=\ ([0,\frac{\pi}{6})\cup(\frac{5\pi}{6},2\pi])\cap(\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3})=\ (\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3})$

สรุป $B=\{x\mid x\in[0,2\pi]\ ,\ 2\sin 2x-1>2\cos x-2\sin x\}\ =\ (\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3})$

**19.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เมื่อ $x=1$ และ $y=1$ จะได้ว่า $(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y})$ จะเหลือแค่พจน์ $(1+1)=2$ เท่านั้น และ $(1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x})$ จะเหลือแค่พจน์ $(1+1)=2$ เท่านั้น ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปเมื่อแทนค่า $x=13$ และ $y=13$ ก็จะได้เท่ากันอีกดังนั้นต้องตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

$$\begin{aligned}(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y}) &= \frac{(1+x)}{1}\cdot\frac{(2+x)}{2}\cdot\frac{(3+x)}{3}\cdot\ldots\frac{(y+x)}{y}\\ &= \frac{(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(y+x)}{y!}\\ &= \frac{(1\cdot2\cdot3\ldots x)(1+x)(2+x)(3+x)\ldots(y+x)}{(1\cdot2\cdot3\ldots x)y!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x}) &= \frac{(1+y)}{1}\cdot\frac{(2+y)}{2}\cdot\frac{(3+y)}{3}\cdot\ldots\frac{(x+y)}{x}\\ &= \frac{(1+y)(2+y)(3+y)\ldots(x+y)}{x!}\\ &= \frac{(1\cdot2\cdot3\ldots y)(1+y)(2+y)(3+y)\ldots(x+y)}{(1\cdot2\cdot3\ldots y)x!}=\frac{(x+y)!}{x!y!}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้นทุกค่า x, y จะได้ $(1+x)(1+\frac{x}{2})(1+\frac{x}{3})\ldots(1+\frac{x}{y})=(1+y)(1+\frac{y}{2})(1+\frac{y}{3})\ldots(1+\frac{y}{x})$

สรุป x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกใดก็ได้

**20. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $f(x) = g(x) + h(x)$ ------------- (1)

$f(-x) = g(-x) + h(-x)$

$= g(x) - h(x)$ ------------- (2)

(1) - (2) ; $f(x) - f(-x) = 2h(x)$

$h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $h(0) = \frac{f(0)-f(0)}{2} = 0$

**ตัวเลือก 1.** $e^{\sin x} = e^{\sin x} = e^{0} = 1 \neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

**ตัวเลือก 2.** $(\sin x)\, e^{\sin x} = \sin 0\, e^{\sin 0} = 0$

**ตัวเลือก 3.** $\frac{1}{2}(e^{\sin x} - e^{-\sin x}) = \frac{1}{2}(e^{0} - e^{0}) = 0$

**ตัวเลือก 4.** $e^{\sin x} - e^{-\sin x} + x\tan x^{2} = e^{0} - e^{0} + 0 = 0$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $h(1) = \frac{f(1)-f(-1)}{2} = \frac{(\cos 1+\tan 1+e^{\sin 1})-(\cos 1+\tan 1+e^{\sin(-1)})}{2}$

$= \frac{e^{\sin 1}-e^{\sin(-1)}}{2} = \frac{e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2}$

**ตัวเลือก 2.** $\sin 1\ e^{(\sin 1)^2} \neq \frac{e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**ตัวเลือก 3.** ถูกต้อง

**ตัวเลือก 4.** $e^{\sin 1} - e^{-\sin 1} + \tan 1 \neq \frac{e^{\sin 1}-e^{-\sin 1}}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** ใช้การจัดรูป $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

$= \frac{(x^2\cos x+\tan x^2+e^{\sin x})-(-x)^2\cos(-x)+\tan(-x)^2+e^{\sin(-x)}}{2}$

$= \frac{x^2\cos x+\tan x^2+e^{\sin x}-x^2\cos x-\tan x^2-e^{-\sin x}}{2}$

$= \frac{e^{\sin x}-e^{-\sin x}}{2}$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 10.

1. ให้ A , B , C เป็นเซตใดๆ $(A \cap C) - (B \cup D)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(A - B) \cap (D - C)$
   2. $(A - B) \cap (C - D)$
   3. $(A - B) \cup (D - C)$
   4. $(A - B) \cup (C - D)$

2. นิเสธของข้อความ $\exists x \forall y\, [\, xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\forall x \exists y\, [\, (xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   2. $\exists x \forall y\, [\, (xy < 0) \wedge (x \geq 0 \vee y \geq 0)]$
   3. $\exists x \forall y\, [\, (xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$
   4. $\forall x \exists y\, [\, (xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

3. ถ้า $A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 \}$ และ $B = \{ a , b \}$ แล้วจำนวนของฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B เท่ากับเท่าใด

   1. 14
   2. 63
   3. 126
   4. 252

4. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin \frac{A}{2} \ \sin \frac{5A}{2}$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{11}{32}$
   2. $\frac{11}{16}$
   3. $\frac{9}{16}$
   4. $\frac{9}{12}$

5. ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับเท่าใด

   1. $-1$
   2. $1$
   3. $\frac{4}{3}$
   4. $-\frac{4}{3}$

6. เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 5$ มีสมการเป็นดังข้อใด

   1. $4x - 3y + 12 = 0$
   2. $4x - 3y - 12 = 0$
   3. $4x - 3y - 36 = 0$
   4. $4x - 3y + 36 = 0$

7. กำหนดให้ $f(x) = \log(1 + x)$ สำหรับ $x \in R$

ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับเท่าใด

1. $f(n + 1)$
2. $f(n)$
3. $f(\frac{1}{n})$
4. $f(\frac{1}{n+1})$

8. เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0 , 3]$
2. $[2 , 4]$
3. $[-3 , -2] \cup [2 , 3]$
4. $[-2, -1] \cup [1 , 2]$

9. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี D เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB ออกเป็นอัตราส่วน $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3 : 2$ และ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ , $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{15}$
2. $\frac{11}{5}$
3. $\frac{13}{5}$
4. $\frac{14}{5}$

10. กำหนดให้ A , B , C คือจุดที่มีพิกัดเป็น $A(-5,0)$ , $B(3,6)$ , $C(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ ตามลำดับ ถ้า $D(a,b)$ เป็นจุดที่ทำให้ CD มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ และมีขนาดเท่ากับ 2 แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 6
3. $\frac{29}{5}$
4. $\frac{71}{5}$

11. กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2 - 16)$ และ $A = \{x \in R \mid f'(x) > 0\}$

ดังนั้น A คือเซตในข้อใด

1. $(-\infty , -2) \cup (0 , 2)$
2. $(-2 , 0) \cup (2 , \infty)$
3. $(-\infty , -2)$
4. $(2 , \infty)$

12. ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้วความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{31}{36}$
3. $\frac{1}{9}$
4. $\frac{5}{36}$

13. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+4}} \geq 1\}$

$B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-4$
2. $-3$
3. $-2$
4. $-1$

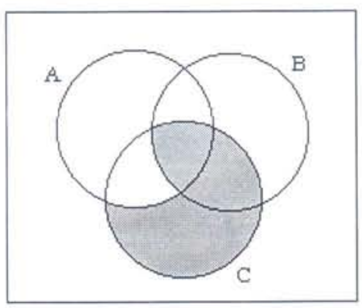
14. ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ แล้วสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าของ $g(|x|-x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x|-x)$
2. $x(x-|x|)$
3. $2x(|x|-x)$
4. $2x(x-|x|)$

15. ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{v} = 5$ , $|\bar{u}| = 2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา แล้ว $|\bar{u}+\bar{v}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7
2. 12
3. $\sqrt{29}$
4. $\sqrt{39}$

16.




ส่วนที่แรเงา คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $C-(A \cup B)$
2. $C-(B' \cap A)$
3. $A' \cap C$
4. $B' \cap C$

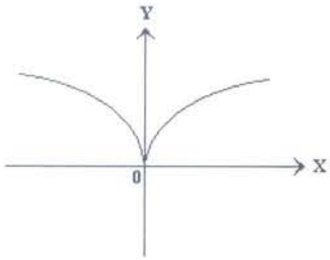
17. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า 5 หาร m เหลือเศษ 4 และ 5 หาร n เหลือเศษ 2 แล้ว 5 หาร $m+n$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

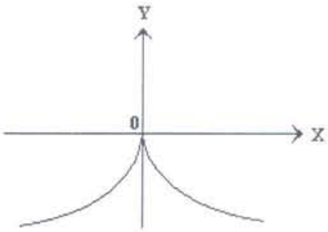
1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

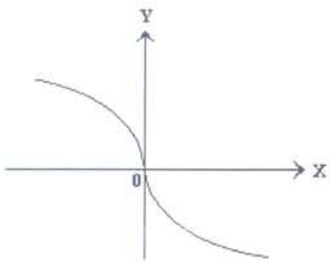
18. เรนจ์ของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-5}\}$ คือข้อใดต่อไปนี้

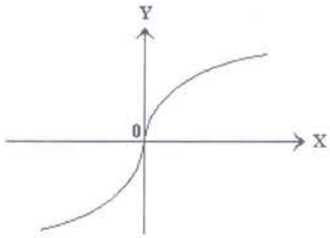
1. $\{y \in R \mid y \neq 5\}$  2. $\{y \in R \mid y \neq -2\}$
3. $\{y \in R \mid y \neq 1\}$  4. $\{y \in R \mid y \neq -5\}$

19. ฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ มีกราฟเป็นรูปใดต่อไปนี้

1. 


2. 


3. 


4. 


20. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-1}$ , $g(x) = x^2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $(gof)(x) = x - 1$  2. $(gof)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3. $(fog)(x) = x - 1$  4. $(fog)(x) = x^2 - 1$

⇐⊕⊗®⊕♣♦♥♠⊕⊗®⊕⇒

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 10.

**1. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ สมาชิก ใช้การสมมติเซต A , B , C บางตัวก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{1, 2\}$

$C = \{3\}$

$D = \{4\}$

จากโจทย์ $(A \cap C) - (B \cup D) = \{3\} - \{1, 2, 4\} = \{3\}$

**ตัวเลือก 1.** $(A - B) \cap (D - C) = \{3, 4\} \cap \{4\} = \{4\}$

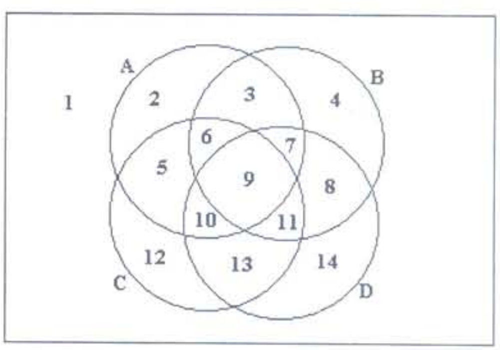
**ตัวเลือก 2.** $(A - B) \cap (C - D) = \{3, 4\} \cap \{3\} = \{3\}$

**ตัวเลือก 3.** $(A - B) \cup (D - C) = \{3, 4\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$

**ตัวเลือก 4.** $(A - B) \cup (C - D) = \{3, 4\} \cup \{4\} = \{3, 4\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของสมาชิก ใช้การสมมติ เซต A , B , C บางตัว ก็สามารถตัดตัวเลือกได้ หากไม่มั่นใจว่าจะเลือกเซตอย่างไรดี ให้นักเรียนใช้แผนภาพมาตรฐานของเวนน์ต่อไปนี้ก็ได้




จากแผนภาพ

$A \cap C = \{5, 6, 9, 10\}$

$B \cup D = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

$(A \cap C) - (B \cup D) = \{5\}$

**ตัวเลือก 1.** $(A - B) \cap (D - C) = \{2, 5, 10\} \cap \{7, 8, 14\} = \varnothing$

**ตัวเลือก 2.** $(A - B) \cap (C - D) = \{2, 5, 10\} \cap \{5, 6, 12\} = \{5\}$

**ตัวเลือก 3.** $(A-B)\cup(D-C)=\{2,5,10,7,8,14\}$

**ตัวเลือก 4.** $(A-B)\cup(C-D)=\{2,5,10,6,12\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** สูตรที่สำคัญในเรื่องเซตคือ $X-Y=X\cap Y'$

$$(A\cap C)-(B\cup D) = (A\cap C)\cap(B\cup D)' \quad = (A\cap C)\cap(B'\cap D')'$$
$$= (A\cap B')\cap(C\cap D')'$$
$$= (A-B)\cap(C-D)$$

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\sim\exists x\forall y$ คือ $\forall x\exists y$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** นิเสธของข้อความ $\exists x\forall y\,[xy<0\longrightarrow(x<0\vee y<0)]$

$\approx \sim(\exists x\forall y\,[xy<0\longrightarrow(x<0\vee y<0)])$

$\approx \forall x\exists y\,[\sim(xy<0\longrightarrow(x<0\vee y<0))])$

$\approx \forall x\exists y\,[\sim(\sim(xy<0)\vee(x<0)\vee(y<0))]$

$\approx \forall x\exists y\,[(xy<0)\wedge(\sim((x<0)\vee(y<0))]$ ....(1)

$\approx \forall x\exists y\,[(xy<0)\wedge(\sim(x<0)\wedge(\sim(y<0))]$

$\approx \forall x\exists y\,[(xy<0)\wedge(x\geq 0)\wedge(y\geq 0)]$

**หมายเหตุ** จาก (1) หากนักเรียนสังเกตให้ดีโดยการเปรียบเทียบสูตรกับตัวเลือกเราก็จะสามารถตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**3. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

สมาชิก 3 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนทีเหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{3}=35$ ฟังก์ชัน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

สมาชิก 4 ตัวของ A ส่งไปที่ a และส่วนทีเหลือส่งไปที่ b ทำได้ $\binom{7}{4} = 35$ ฟังก์ชัน

เพราะฉะนั้นจำนวนของฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B มีมากขึ้นเป็น 70 ฟังก์ชัน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**วิธีจริง** สมาชิกแต่ละตัวของ A เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

เพราะว่าสมาชิกของ A มี 7 ตัว

เพราะฉะนั้นจำนวนฟังก์ชันจาก A ไปยัง B เท่ากับ $2^7 = 128$

เพราะว่าฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ที่ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึงคือ

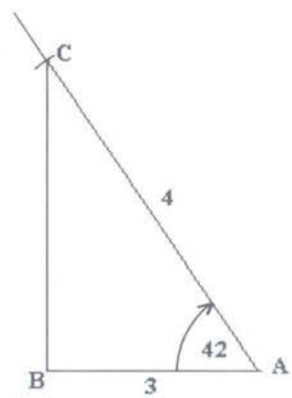
$f = \{ (1, a), (2, a), (3, a), (4, a), (5, a), (6, a), (7, a) \}$

$f = \{ (1, b), (2, b), (3, b), (4, b), (5, b), (6, b), (7, b) \}$

เพราะฉะนั้นจำนวนฟังก์ชันจาก A ทั่วถึง B = 128 – 2 = 126

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** หาขนาดของมุม A โดยใช้รูปดังนี้




1. ลาก AB ยาว 3 cm
2. เขียนวงกลมรัศมี 4 cm จุดศูนย์กลางที่ A
3. ลาก BC ตั้งฉากและตัดเส้นโค้งที่จุด C

ขณะนี้เราได้สามเหลี่ยม ABC ที่มี $\cos A = \frac{3}{4}$

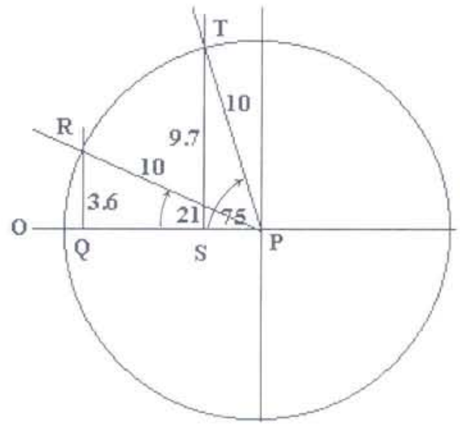
วัดมุม A ด้วยไม้บรรทัดครึ่งวงกลมได้ขนาดมุม A = 42 องศา

$\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2} = \sin 21\ \sin 105$

$\sin 105 = \sin(180 - 75) = \sin 75$

การประมาณค่า sin21 และ sin 75 ด้วยวงกลมหนึ่งหน่วย

1. ลาก OP
2. เขียนวงกลมรัศมี 10 cm จุดศูนย์กลางที่จุด P
3. ลาก RP ทำมุม 21 องศากับ OP , ลาก TP ทำมุม 75 องศากับ OP
4. ลาก PQ ตั้งฉากกับ OP , ลาก TSตั้งฉากกับ OP




จากสามเหลี่ยม PQR $\sin 21 = \frac{RQ}{PR} = \frac{3.6}{10} = 0.36$

จากสามเหลี่ยม PST $\sin 75 = \frac{ST}{PT} = \frac{9.7}{10} = 0.97$

เพราะฉะนั้น $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2} = \sin 21\ \sin 75$

$= (0.36)(0.97) = 0.349$

ค่าแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{11}{32} = 0.34$ 2. $\frac{11}{16} = 0.69$

3. $\frac{9}{16} = 0.56$ 4. $\frac{9}{12} = 0.75$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

**วิธีจริง** **แบบที่ 1.** $2\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2}$

$$= \cos(\frac{A}{2}-\frac{5A}{2}) - \cos(\frac{A}{2}+\frac{5A}{2}) = \cos(-2A) - \cos(3A)$$

$$= \cos(2A) - \cos(3A) = 1 - 2\cos^2 A - 4\cos^3 A + 3\cos A$$

$$= 1 - 2(\frac{3}{4})^2 - 4(\frac{3}{4})^3 + 3(\frac{3}{4})$$

$$= \frac{11}{16}$$

$$\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$$

**แบบที่ 2.** $2\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2} = 2\sin\frac{A}{2}\ \sin(2A + \frac{A}{2})$

$$= 2\sin\frac{A}{2}(\sin 2A\cos\frac{A}{2} + \cos 2A\sin\frac{A}{2}) = 2\sin\frac{A}{2}\sin 2A\cos\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos 2A\sin\frac{A}{2}$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin 2A + 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}\cos 2A = \sin A\sin 2A + 2\sin^2\frac{A}{2}\cos 2A$$

$$= \sin A\sin 2A + (1-\cos A)\cos 2A = \sin A(2\sin A\cos A) + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2\sin^2 A\cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1) = 2(1-\cos^2 A)\cos A + (1-\cos A)(2\cos^2 A - 1)$$

$$= 2(1-(\frac{3}{4})^2)(\frac{3}{4}) + (1-(\frac{3}{4}))(2(\frac{3}{4})^2 - 1)$$

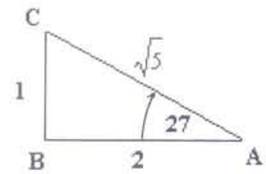
$$= \frac{22}{32}$$

เพราะฉะนั้น $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2} = \frac{11}{32}$

5. ตอบ 1.

**แนวคิด** สูตรตรีโกณมิติที่ควรท่องได้คือ $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ , $\tan(-x) = -\tan x$

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = \tan(-2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\tan(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$



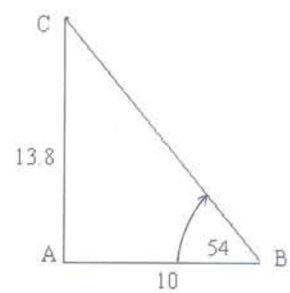

จากรูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ว่า $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) = \arctan(\frac{1}{2}) = 27$ องศา

เพราะฉะนั้น $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = -\tan(54) < 0$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

**การประมาณค่า tan(54) โดยใช้รูปสามเหลี่ยม**

1. ลาก AB ยาว 10 cm
2. ลาก BC ทำมุม 54 องศา
3. ลาก AC ตั้งฉาก AB
4. วัดระยะ AC ได้ 13.8 cm




เพราะฉะนั้น $\tan 54 = \frac{13.8}{10} = 1.38$

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $-1$ 2. 1 3. 1.333 4. $-1.333$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}})) = \tan(-2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))$

เพราะว่า $0 \le \frac{1}{\sqrt{5}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ และ arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $\arcsin 0 \le \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) \le \arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$0 \le \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) \le \frac{\pi}{4}$$

$$-\frac{\pi}{4} \le -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) \le 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \le -2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) \le 0$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \leq 0$$

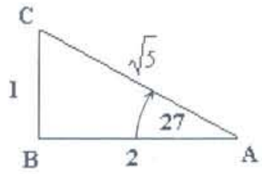
$$\tan\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) \leq \tan 0$$

$$-\infty \leq \tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) \leq 0$$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\tan\left(2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = \tan\left(-2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$$= -\tan\left(2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\tan\left(2\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$




$$= -\frac{2\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{1-\tan^2\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)\right)}$$

$$= -\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{4}{3}$$

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด** จัดรูปสมการวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$$

$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

$$\frac{(x-6)^2}{6^2} + \frac{(y+4)^2}{4^2} = 1$$

จุดศูนย์กลางวงรีคือ (6 , –4)

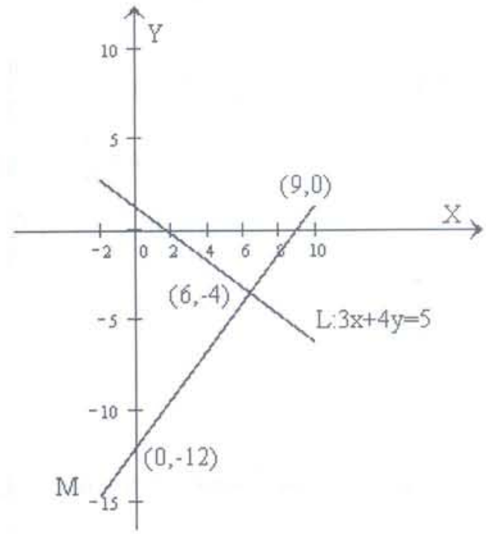
**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** โจทย์บอกว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด (6 , –4)
เพราะฉะนั้นนำจุด (6 , –4) ไปแทนค่าในตัวเลือกเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $4x - 3y + 12 = 4(6) - 3(-4) + 12 \neq 0$
2. $4x - 3y - 12 = 4(6) - 3(-4) + 12 \neq 0$
3. $4x - 3y - 36 = 4(6) - 3(-4) - 36 = 0$
4. $4x - 3y + 36 = 4(6) - 3(-4) + 36 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** วาดรูปดูระยะตัดแกนของเส้นตรง ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ขั้นตอนการวาดรูป




1. เขียนจุด (6,–4)
2. ลากเส้นตรง L : $3x + 4y = 5$
3. ลากเส้นตรง M ผ่านจุด (6,–4)

   และตั้งฉากกับเส้นตรง L

สังเกตระยะตัดแกนของแต่ละตัวเลือก

1. จุดตัดแกน X คือ (–3,0) จุดตัดแกน Y คือ (0,4)
2. จุดตัดแกน X คือ (3,0) จุดตัดแกน Y คือ (0,–4)
3. จุดตัดแกน X คือ (9,0) จุดตัดแกน Y คือ (0,–12)
4. จุดตัดแกน X คือ (–9,0) จุดตัดแกน Y คือ (0,12)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริงต่อไปเราใช้เหตุผลดังนี้

เพราะว่า เส้นตรง $3x + 4y = 5$ มีความชัน $= -\frac{3}{4}$

เพราะฉะนั้น ความชันของเส้นตรงที่ต้องการ ต้องมีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$

โจทย์บอกว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด (6 , –4)

สมการเส้นตรงคือ $(y + 4) = \frac{4}{3}(x - 6)$

$$4x - 3y - 36 = 0$$

**7. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n

แทนค่า $n = 1$ ; ค่าของโจทย์ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n}) = f(1)$

ค่าของตัวเลือกเป็น 1. $f(2)$ 2. $f(1)$ 3. $f(1)$ 4. $f(\frac{1}{2})$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า $n = 2$ ; ค่าของโจทย์ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n}) = f(1) + f(\frac{1}{2})$

เพราะว่า $f(1) = \log(2) \neq 0$ เพราะฉะนั้น $f(1) + f(\frac{1}{2}) \neq f(\frac{1}{2})$

ค่าของตัวเลือกที่เหลือเป็น 2. $f(2)$ 3. $f(\frac{1}{2})$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n}) = \log(1+1) + \log(\frac{1}{2}+1) + \log(\frac{1}{3}+1) + \ldots + \log(\frac{1}{n}+1)$

$$= \log(2) + \log(\frac{3}{2}) + \log(\frac{4}{3}) + \ldots + \log(\frac{n+1}{n})$$

$$= \log((2)(\frac{3}{2})(\frac{4}{3})\ldots(\frac{n+1}{n}))$$

$$= \log(n+1)$$

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากเงื่อนไข $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ จะเห็นว่า $x = 1$ ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $(\sqrt{|x|})^{x^2} \geq 0$ เพราะฉะนั้น $x^3$ 0 ดังนั้น $x \geq 0$

เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของ $[0, \infty)$

เพราะฉะนั้นเราสนใจเฉพาะช่วงที่เป็นบวกก็พอ

เพราะฉะนั้นตัวเลือกแต่ละตัวคือ 1. $[0, 3]$ 2. $[2, 4]$ 3. $[2, 3]$ 4. $[1, 2]$

เพราะว่า $[2, 3] \subset [0, 3]$ และ $[1, 2] \subset [0, 3]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า (หากตัวเลือก 3. , 4. ถูกแล้วโจทย์ข้อนี้ก็ผิดแน่นอน)

**วิธีจริง** $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$

$(\sqrt{x})^{x^2} = x^3$ (เพราะว่า $x \geq 0$)

$x^{\frac{x^2}{2}} = x^3$

เพราะฉะนั้น $x = 1$ หรือ $\frac{x^2}{2} = 3$

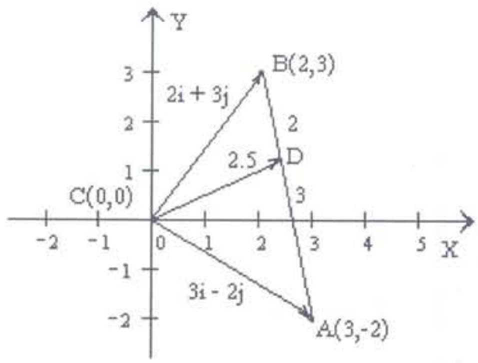
$x = 1$ $x^2 = 6$

$x = 1$ $x = \sqrt{6}$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ คือ $\{1, \sqrt{6}\}$ เป็นสับเซตของ $[0, 3]$

**9. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ , $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$




วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ วัดความยาว CD ได้ 2.5 cm

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\frac{9}{15} = 1.8$ 2. $\frac{11}{5} = 2.2$ 3. $\frac{13}{5} = 2.6$ 4. $\frac{14}{5} = 2.8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ , $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$

เพราะว่า $\overrightarrow{CA} \bullet \overrightarrow{CB} = (3)(2) - (2)(3) = 0$ เพราะฉะนั้น CA ตั้งฉากกับ CB

$|\overrightarrow{CA}| = |3\bar{i} - 2\bar{j}| = \sqrt{13} = 3.6$ , $|\overrightarrow{CB}| = |2\bar{i} + 3\bar{j}| = \sqrt{13} = 3.6$

วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีด้าน AC และ BC ยาวด้านละ 3.6 cm
2. แบ่งเส้นตรง $\overrightarrow{AB}$ ออกเป็น 5 ส่วนด้วยไม้บรรทัด
3. เขียนจุด D โดยที่ $|\overrightarrow{BD}| : |\overrightarrow{DA}| = 2 : 3$

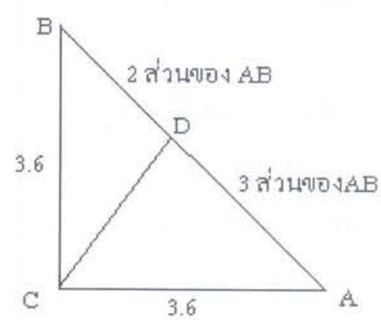
วัดความยาว CD ได้ 2.5 cm

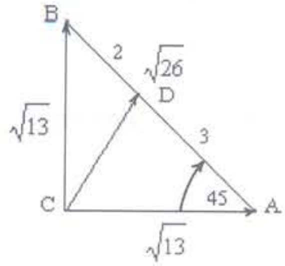
ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\frac{9}{15} = 1.8$ 2. $\frac{11}{5} = 2.2$

3. $\frac{13}{5} = 2.6$ 4. $\frac{14}{5} = 2.8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้






**วิธีจริง แบบที่ 1.** $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

$= \overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}(-\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

$= \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{5}(3\bar{i} - 2\bar{j}) + \frac{3}{5}(2\bar{i} + 3\bar{j}) = \frac{1}{5}(12\bar{i} + 5\bar{j})$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{5}\sqrt{144+25} = \frac{13}{5}$

**วิธีจริง แบบที่ 2.** ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{13+13} = \sqrt{26}$

$|\overrightarrow{CD}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}|\cos(CAD) = |\overrightarrow{AC}|^2 + |\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}||\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}|\cos(45)$

$= 13 + \frac{9}{25}|\overrightarrow{AB}|^2 - 2\sqrt{13}\,|\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}|(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 13 + \frac{9}{25}(26) - 2\sqrt{13}\,(\frac{3}{5})(\sqrt{26})(\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= 13 + \frac{9}{25}(26) - 2\sqrt{13}\,(\frac{3}{5})(\sqrt{26})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 13 + \frac{234}{25} + \frac{78}{5}$

$= \frac{325+234-390}{25} = \frac{169}{25}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{CD}| = \frac{13}{5}$

**10.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

1. เขียนจุด $A(-5,0)$ , $B(3,6)$ , $C(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$
2. ลากเส้นตรง $\overrightarrow{AB}$
3. ลากเส้นตรง CD

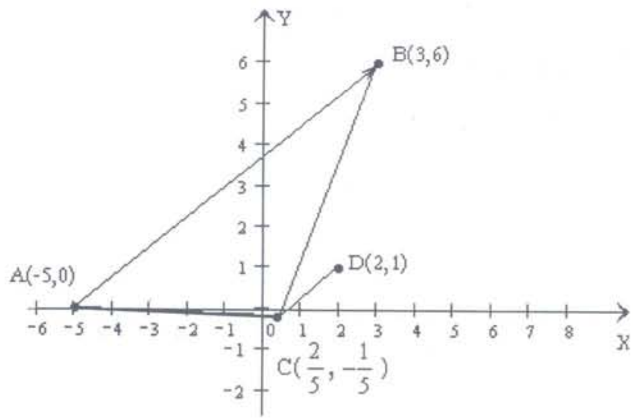
   ให้ $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\overrightarrow{AB}$

   และ $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับ 2 หน่วย

   4. วัดพิกัด D ได้เป็น (2,1)

เพราะฉะนั้น $(a,b) = (2,1)$ , $a + b = 3$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า



**วิธีจริง** สมมติ D(a,b)

เพราะว่า A(–5,0) , B(3,6) , C($\frac{2}{5}$ , $-\frac{1}{5}$)

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} = (3-(-5))\bar{i} + (6-0)\bar{j} = 8\bar{i} + 6\bar{j}$

$$\overrightarrow{CD} = (a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b-(-\frac{1}{5}))\bar{j} = (a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b+\frac{1}{5})\bar{j}$$

เพราะว่า $\overrightarrow{CD}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ และมีขนาดเท่ากับ 2

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{CD} = 2(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|})$

$$|\overrightarrow{AB}|\ \overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{AB}$$

$$\sqrt{64+36}\ \overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{AB}$$

$$10\ \overrightarrow{CD} = 2\ \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{5}\ \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}$$

$$(a-\frac{2}{5})\bar{i} + (b+\frac{1}{5})\bar{j} = \frac{8}{5}\bar{i} + \frac{6}{5}\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น a = 2 , b = 1 สรุป a + b = 3

**11.ตอบ 2.**

**แนวคิด** $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x^2-16) = x^{\frac{8}{3}} - 16x^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} - \frac{32}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-4)$$

$$= \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$$

**การตัดตัวเลือก** พิจารณาเงื่อนไข $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2) > 0$ จะเห็นว่า x = 10 ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า x = – 1 ทำให้ $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2) > 0$ เพราะฉะนั้นx = – 1 ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริงต่อไปทำโดยดูเครื่องหมายของ $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$

| | $x<-2$ | $x=-2$ | $-2<x<0$ | $x=0$ | $0<x<2$ | $x=2$ | $x>2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^{-\frac{1}{3}}$ | – | – | – | $\infty$ | + | + | + |
| $x-2$ | – | – | – | – | – | 0 | + |
| $x+2$ | – | 0 | + | + | + | + | + |
| $\frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x-2)(x+2)$ | – | 0 | + | $\infty$ | – | 0 | + |

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid f'(x) > 0\} = (-2, 0) \cup (2, \infty)$

**12.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์ไม่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{12}{36}$

ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์ไม่สอบผ่านวิชาเคมี $= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = \frac{20}{36}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้ต้องมีค่าต่ำกว่า $\frac{12}{36}$

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ 2. $\frac{31}{36}$ 3. $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ 4. $\frac{5}{36}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** M = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

C = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาเคมี

จากโจทย์ $P(M) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{4}{9}$, $P(M \cap C) = \frac{1}{4}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้ต้องมีค่า

$$= P((M \cup C)')$$

$$= 1 - P(M \cup C)$$

$$= 1 - (P(M) + P(C) - P(M \cap C))$$

$$= 1 - \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{5}{36}$$

**13. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่า $B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2\} = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2 \}$ และ $A \cap B \subset B$

เพราะฉะนั้น ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ มีค่า $\leq -2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\dfrac{1}{\sqrt{(-3)^2 + 4(-3) + 4}} = 1 \geq 1$

เพราะฉะนั้น $-3 \in A$ และ $-3 \in A \cap B$

เพราะฉะนั้น $-4$ ไม่เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $\dfrac{1}{\sqrt{(-2)^2 + 4(-2) + 4}}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-2 \notin A$ และ $-2 \notin A \cap B$

**วิธีจริง**

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} \geq 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2}} \geq 1$$

$$\frac{1}{|x+2|} \geq 1$$

$$1 \geq |x+2| \qquad x \neq -2$$

$$-1 \leq x + 2 \leq 1$$

$$-3 \leq x \leq -1$$

เพราะฉะนั้น $A = [-3,-1] - \{-2\} = [-3, -2) \cup (-2,-1]$

เพราะว่า $B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2\} = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2 \}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{ \ldots, -5, -4, -3, -2 \} \cap ([-3, -2) \cup (-2,-1]) = \{-3\}$

**14. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ข้อนี้ตรงกับหลัดสูตรโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

แทนค่า $x = -1$ จะได้ว่าค่าของโจทย์ $g(|x| - x) = g(|-1| - 1) = g(2) = 4$ ค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $x(|x|-x) = (-1)(|(-1)|-(-1)) = -2$ 2. $x(x-|x|) = (-1)((-1)-|(-1)|) = 2$

3. $2x(|x|-x) = 2(-1)(|(-1)|-(-1)) = -4$ 4. $2x(x-|x|) = 2(-1)((-1)-|(-1)|) = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $x = 0$ $g(|x|-x) = g(|0|-0) = g(0) = 0$

$x > 0$ $g(|x|-x) = g(x-x) = g(0) = 0$

$x < 0$ $g(|x|-x) = g(-x-x) = g(-2x)$

$= (-2x)^2$ (เพราะว่า $-2x > 0$)

$= 2x2x$ $= 2x(x+x)$

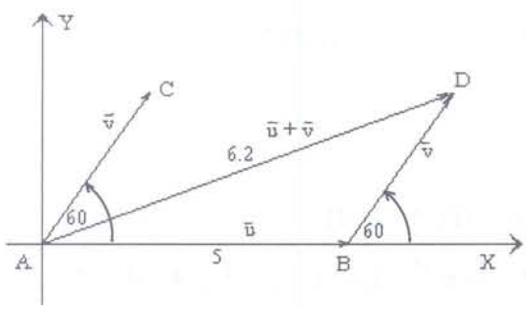
$= 2x(x-(-x))$ $= 2x(x-|x|)$

สรุป $g(|x|-x) = 2x(x-|x|)$

**15.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

1. ลากเส้นตรง AB ยาว 5 cm
2. ลาก AC ทำมุม CAB = 60 องศา และ AC ยาว 2 cm
3. ลาก BD ขนานกับ AC และ CD ขนานกับ AB




4. ให้ $AB = \bar{u}$ และ $AC = \bar{v}$

จะได้ $|\bar{u}| = 5$ และ $|\bar{v}| = 2$ และ ความยาว AD เท่ากับ $|\bar{u}+\bar{v}|$

วัดความยาว AD ได้ 6.2 cm

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ 1. 7 2. 12 3. $\sqrt{29} < 6$ 4. $\sqrt{39} = 6.2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\vec{u}\cdot\vec{v} = 5$ , $|\vec{u}| = 2$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos 60$$

$$5 = 2|\vec{v}|\frac{1}{2}$$

$$|\vec{v}| = 5$$

**หมายเหตุ** ขณะนี้ตัดตัวเลือกได้อีกแล้ว เพราะว่า $|\vec{u}+\vec{v}| < |\vec{u}|+|\vec{v}| = 7$

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ 1. 7 2. 12 3. $\sqrt{29} < 6$ 4. $\sqrt{39} = 6.2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริงต่อไป $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = (\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}$

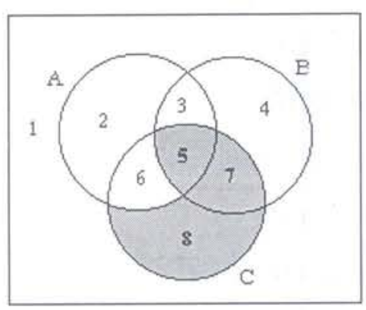
$= |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2 = 2^2 + 10 + 5^2 = 39$

เพราะฉะนั้น $|\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{39}$

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของสมาชิกและเซต

สมมติสมาชิกดังนี้




เซตบริเวณที่แรเงาคือ $\{5, 7, 8\}$

เซตแต่ละตัวเลือกคือ

1. $C - (A \cup B) = \{5, 6, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{8\}$
2. $C - (B' \cap A) = \{5, 6, 7, 8\} - \{2, 6\} = \{5, 7, 8\}$
3. $A' \cap C = \{1, 4, 7, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{7, 8\}$
4. $B' \cap C = \{1, 2, 6, 8\} \cap \{5, 6, 7, 8\} = \{6, 8\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เซตบริเวณที่แรเงาคือ $(C-(A\cup B))\cup(B\cap C)$

$= (C\cap(A\cup B)')\cup(B\cap C)$

$= (C\cap(A'\cap B'))\cup(B\cap C)$

$= ((C\cap A')\cap(C\cap B'))\cup(B\cap C)$

$= ((C\cap A')\cup(B\cap C))\cap((C\cap B')\cup(B\cap C))$

$= (C\cap(A'\cup B))\cap(C\cap(B'\cup B))$

$= (C\cap(A'\cup B))\cap C$

$= C\cap(A'\cup B)$

$= C\cap(A\cap B')'$

$= C-(B'\cap A)$

**17.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ m , n

แทนค่า $m = 4$ , $n = 2$

เพราะฉะนั้น $m + n = 6$ หารด้วย 5 เหลือเศษ 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** 5 หาร m เหลือเศษ 4 $m = 5k + 4$

5 หาร n เหลือเศษ 2 $n = 5t + 2$

$m + n = 5k + 4 + 5t + 2 = 5(k + t) + 5 + 1$

เพราะฉะนั้น 5 หาร $m + n$ เหลือเศษเท่ากับ 1

**18.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้การแทนค่าดูว่า $y = 5 , -2 , 1 , -5$ ได้หรือไม่ จะเห็นได้ว่า

ถ้า $y = 1$ จะทำให้ $1 = \frac{x+2}{x-5}$

$x - 5 = x + 2$

$-5 = 2$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นเลือก 3. เป็นคำตอบเลย

**วิธีจริง** $y = \frac{x+2}{x-5}$

$$y-1 = \frac{x+2}{x-5} - 1$$

$$y-1 = \frac{x+2-x+5}{x-5}$$

$$y-1 = \frac{7}{x-5}$$

$$x-5 = \frac{7}{y-1}$$

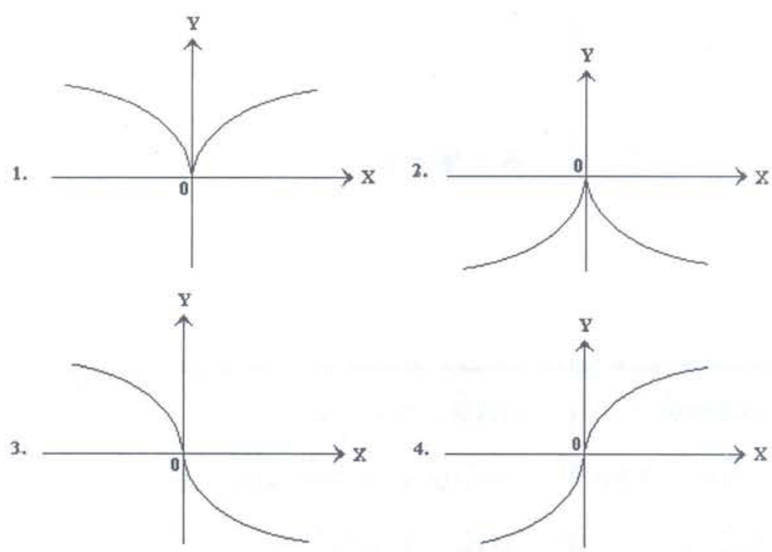
$$x = \frac{7}{y-1} + 5$$

เพราะฉะนั้น $y \neq 1$

เพราะฉะนั้น เรนจ์ของความสัมพันธ์ $\{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{x+2}{x-5}\}$ คือ $\{y \in R \mid y \neq 1\}$

**19.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากสูตร $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$




เพราะว่า $f(1) = 1$ เพราะฉะนั้นต้องมีจุด (1 , 1) บนกราฟ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $f(-1) = -1$

เพราะฉะนั้นต้องมีจุด $(-1, -1)$ บนกราฟ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** นักเรียนต้องจำกราฟของ $y = \sqrt{x}$ และ $y = -\sqrt{-x}$ ได้

**20. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่าหาของที่ผิดดีกว่า จากโจทย์ $f(x) = \sqrt{x-1}$ , $g(x) = x^2$

1. $(gof)(x) = x - 1$
2. $(gof)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
3. $(fog)(x) = x - 1$
4. $(fog)(x) = x^2 - 1$

เพราะว่า $(gof)(2) = g(f(2)) = g(1) = 1 \neq \sqrt{2^2 - 1}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2

เพราะว่า $(fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = \sqrt{3} \neq 2 - 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

เพราะว่า $(fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = \sqrt{3} \neq 2^2 - 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

**วิธีจริง** $(gof)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1}) = x - 1$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{x^2 - 1}$

⇐⊕⊗®⊕♣♦♥♠⊕⊗®⊕⇒

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 11.

1. เซตคำตอบของอสมการ $x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > |x + 1|$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (4, \infty)$
   2. $(0, 2) \cup (3, \infty)$
   3. $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, 4)$
   4. $(1, \frac{3}{2}) \cup (4, \infty)$

2. ให้ A คือเซตคำตอบของสมการ $2 \cdot 2^{1+x+x^2+x^3+\cdots} = 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A = \varnothing$
   2. $A \cap [-1, 5] = \{2\}$
   3. $A \cup [1, 3] = (-1, 3]$
   4. $A - (3, 6) = \{3\}$

3. กำหนดให้ $f(x) = 2 - (x - 1)^{\frac{4}{3}}$ ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วง $(0, \infty)$
   2. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 2 เมื่อ $x = 1$
   3. f เป็นฟังก์ชันลดในช่วง $(-\infty, 0)$
   4. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 2 เมื่อ $x = 1$

4. ให้ $M = \{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a, b$ เป็นจำนวนจริง และ $a \neq 0, b \neq 0\}$

   สำหรับเมทริกซ์ A , B ใดๆ ใน M ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

   1. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \in M$
   2. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \notin M$
   3. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \in M$
   4. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \notin M$

5. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|4iz - 1 + 9\bar{z}| = 6\sqrt{2}$ ดังนั้น $|z|$ มีค่าอยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(0, \frac{1}{2})$
   2. $(\frac{1}{2}, 1]$
   3. $(1, \frac{3}{2}]$
   4. $(\frac{3}{2}, 2]$

6. สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x - 3y - 11 = 0$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 5y - 7 = 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $x - 3y + 1 = 0$
   2. $x - 3y - 1 = 0$
   3. $x - 3y + 7 = 0$
   4. $x - 3y - 7 = 0$

ถา F(x) เปนปฏิยานุพนธของ f(x) และ F(0) = 0 แลว F(1) + F(−1) มคาเทากบขอ ใดตอ ไปน

1. 0
2. p

2. q
4. r

18. จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะมีจำนวนทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

1. 350 2. 380
3. 470 4. 500

19. ค่าของ $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{\pi}{23}$
3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{6}$

20. ค่าของ $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ + \cot 9^\circ$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4
3. 6 4. 8

⇐ ⊗⊕©®♣♥♠♦®©⊕⊗ ⇒

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 11.

1. ตอบ 2.

**แนวคิด** การตัดตัวเลือก คำถามแบบเซตคำตอบของอสมการเป็นสับเซตของเซตในข้อใด ให้เลือกค่า x บางค่าที่สอดคล้องอสมการ แล้วดูว่า x ไม่อยู่ในตัวเลือกใด ให้ตัดตัวเลือกนั้นทิ้งไป เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้จะตัดตัวเลือกได้เร็วที่สุดเช่น แทนค่า $x = 4$ ในอสมการของโจทย์

จะได้ $x^3 - 6x^2 + 12x - 5 = 64 - 96 + 48 - 5 = 11 > 5 = |4 + 1|$

เพราะฉะนั้น $x = 4$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีลัด** $x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > |x + 1|$

$$|x + 1| < x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$-(x^3 - 6x^2 + 12x - 5) < x + 1 < x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$-x^3 + 6x^2 - 12x + 5 < x + 1 < x^3 - 6x^2 + 12x - 5$$

$$-x^3 + 6x^2 - 13x + 4 < 0 < x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$-x^3 + 6x^2 - 13x + 4 < 0$ และ $0 < x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

เพราะฉะนั้น $\{x \in R \mid x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > |x + 1|\}$

$= \{x \in R \mid -x^3 + 6x^2 - 13x + 4 < 0$ และ $0 < x^3 - 6x^2 + 11x - 6\}$

$\subset \{x \in R \mid 0 < x^3 - 6x^2 + 11x - 6\}$

$\subset \{x \in R \mid 0 < (x - 1)(x - 2)(x - 3)\}$

$= (1, 2) \cup (3, \infty) \subset (0, 2) \cup (3, \infty)$

**หมายเหตุ** ขนาดวิธีลัดยังเลี่ยงการแยกตัวประกอบของ $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ ไม่ได้เลย

**วิธีจริง** การหาเซต $\{x \in R \mid x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > |x + 1|\}$ ยากกว่าวิธีลัดขึ้นไปอีก

$x > -1$; $\quad x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > |x + 1|$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 5 > x + 1$$

**2. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $A = \{x \mid 2 \cdot 2^{1+x+x^2+x^3+\dots} = 1\}$

พิจารณาว่าหากตัวเลือก 2. , 3. และ 4. เป็นจริงจะเกิดอะไรขึ้น

2. $A \cap [-1, 5] = \{2\} \rightarrow 2 \in A$

$\rightarrow 2 \cdot 2^{1+2+2^2+2^3+\dots} = 1$ เป็นไปไม่ได้

3. $A \cup [1, 3] = (-1, 3] \rightarrow 0 \in A$

$\rightarrow 2 \cdot 2^{1+0+0^2+0^3+\dots} = 1$ เป็นไปไม่ได้

4. $A - (3, 6) = \{3\} \rightarrow 3 \in A$

$\rightarrow 2 \cdot 2^{1+3+3^2+3^3+\dots} = 1$ เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $2 \cdot 2^{1+x+x^2+x^3+\dots} = 1$

$$2^{1+x+x^2+x^3+\dots} = 2^{-1}$$

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = -1 \qquad \text{เมื่อ } |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = -1$$

$$x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \mid 2 \cdot 2^{1+x+x^2+x^3+\dots} = 1\} = \varnothing$

**3. ตอบ 2.**

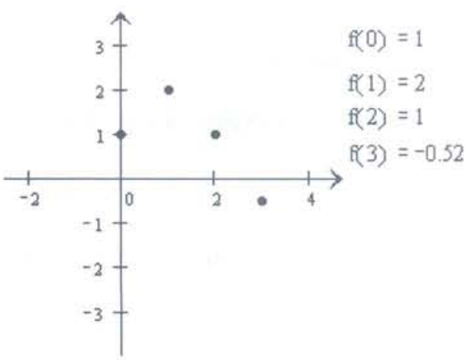
**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์ถามว่าข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง เพราะฉะนั้นหาของผิดทิ้งไปก่อนง่ายกว่า โดยการแทนค่าบางค่าและเขียนกราฟ

$f(x) = 2 - (x-1)^{\frac{4}{3}}$

$f(0) = 1$

$f(1) = 2$

$f(2) = 1$




จากกราฟที่แสดงบางจุดจะได้ข้อสรุปว่า

$$\left|\frac{4i+9z^2}{z}\right| = 6\sqrt{2}$$

$$|4i + 9z^2| = 6\sqrt{2}\,|z|$$

$$\sqrt{16+81z^4} = 6\sqrt{2}\,|z|$$

$$16 + 81z^4 = 72z^2$$

$$81z^4 - 72z^2 + 16 = 0$$

$$(9z^2 - 4)^2 = 0$$

$$9z^2 - 4 = 0$$

$$z^2 = \frac{4}{9}$$

$$|z| = \frac{2}{3}$$

**วิธีจริง** ต้องจำรูปพีชคณิตเหมือนกัน $|4iz^{-1} + 9\bar{z}| = 6\sqrt{2}$

$$|4i\frac{1}{z} + 9z| = 6\sqrt{2}$$

$$\left|\frac{4i+9z\bar{z}}{z}\right| = 6\sqrt{2}$$

$$|4i + 9|z|^2| = 6\sqrt{2}\,|z|$$

$$\sqrt{16+81|z|^4} = 6\sqrt{2}\,|z|$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $|z| = \frac{2}{3}$

**6. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** โดยการหาจุดตัด $x - 5y - 9 = 0$ ...(1)

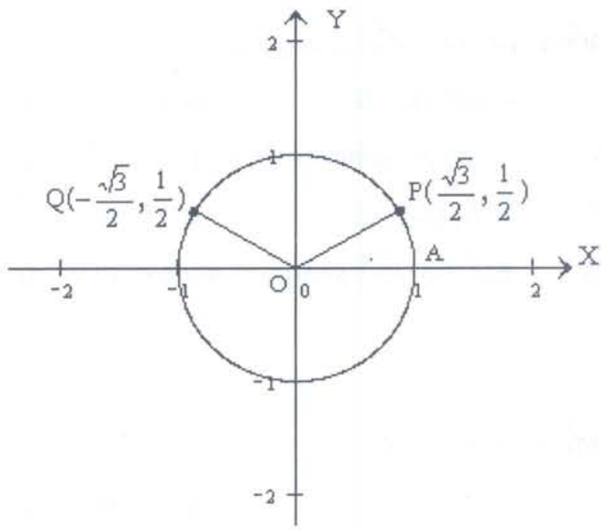
$3x + 5y - 7 = 0$ ...(2)

จุดตัดของเส้นตรง $x - 5y - 9 = 0$ กับเส้นตรง $3x + 5y - 7 = 0$ คือ $(4, -1)$

แทนค่า $x = 4$, $y = -1$ ในตัวเลือกแต่ละตัว

1. $x - 3y + 1 = 4 - 3(-1) + 1 \neq 0$
2. $x - 3y - 1 = 4 - 3(-1) - 1 \neq 0$
3. $x - 3y + 7 = 4 - 3(-1) + 7 \neq 0$
4. $x - 3y - 7 = 4 - 3(-1) - 7 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้




**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** ทำการวัดมุม POQ ได้ 120 องศา

เพราะฉะนั้นความยาวส่วนโค้ง PQ เท่ากับ $\frac{2\pi}{360}(120) = \frac{2\pi}{3}$

**วิธีจริง** เพราะว่า $\cos AOP = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น AOP = 30 องศา

เพราะว่า $\cos AOQ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น AOQ = 150 องศา

เพราะฉะนั้น POQ = 120 องศา เพราะฉะนั้นความยาวส่วนโค้ง PQ เท่ากับ $\frac{2\pi}{360}(120) = \frac{2\pi}{3}$

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์เป็นสูตรในเทอมของจำนวนคน

สมมติ จำนวนพนักงาน = 1 คน

จำนวนคนงาน = 3 คน

เพราะฉะนั้นลูกจ้างของบริษัทนี้มีค่าจ้างรายวันเฉลี่ยต่อคน $= \frac{(1)(440)+(3)(120)}{1+3} = 200$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จำนวนพนักงาน = n คน

จำนวนคนงาน = 3n คน

เพราะฉะนั้นลูกจ้างของบริษัทนี้มีค่าจ้างรายวันเฉลี่ยต่อคน $= \frac{(n)(440)+(3n)(120)}{n+3n} = 200$

3. $\{(-3,1),(1,2),(1,0)\}$ โดเมน = $\{-3,1\}$ ตัดตัวเลือก 3 ทิ้ง

4. $\{(-3,1),(1,2),(-3,0)\}$ โดเมน = $\{-3,1\}$ ตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**การตัดตัวเลือก โดยดูเรนจ์ของตัวเลือก**

เรนจ์ = $B = \{x \mid x(x-1)(x-2) = 0\} = \{0,1,2\}$

1. $\{(3,0),(-1,1)\}$ เรนจ์ = $\{0,1\}$ ตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

2. $\{(3,2),(1,-1)\}$ เรนจ์ = $\{-1,2\}$ ตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

3. $\{(-3,1),(1,2),(1,0)\}$ เรนจ์ = $\{0,1,2\}$

4. $\{(-3,1),(1,2),(-3,0)\}$ เรนจ์ = $\{0,1,2\}$

**วิธีจริง** 1. $\{(3,0),(-1,1)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

2. $\{(3,2),(1,-1)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะว่าใน A ไม่มี 1

3. $\{(-3,1),(1,2),(1,0)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะมี $(1,2),(1,0)$

4. $\{(-3,1),(1,2),(-3,0)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะมี $(-3,1),(-3,0)$

**12. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่าความจริงเพื่อทำการตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = T, q = T, r = F$ ค่าความจริงของโจทย์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r = (\sim T \vee T) \rightarrow F = F$

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(r \wedge p) \wedge (\sim r \wedge q) = (F \wedge T) \wedge (\sim F \wedge T) = T$

2. $(r \wedge p) \vee (r \vee \sim q) = (F \wedge T) \vee (F \vee \sim T) = F$

3. $(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q) = (F \vee T) \wedge (\sim F \vee T) = T$

4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q) = (F \vee T) \wedge (F \vee \sim T) = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $p = F, q = F, r = F$ ค่าความจริงของโจทย์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r = (\sim F \vee F) \rightarrow F = F$

ค่าความจริงของตัวเลือกที่เหลือคือ

2. $(r \wedge p) \vee (r \vee \sim q) = (F \wedge F) \vee (F \vee \sim F) = T$

4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q) = (F \vee F) \wedge (F \vee \sim F) = F$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่าไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ มีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโท

เพราะฉะนั้น b ของไฮเพอร์โบลามีค่าเท่ากับ 4

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ มีค่า $b=3$ 2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ มีค่า $b=4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** วงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ มีแกนเอกขนานแกน X และค่า $a=5$ , $b=4$

เพราะว่าไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ มีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโท

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง (0 , 0) , $b=4$ และ $a=3$ แกนตามขวางทับแกน X

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

**14. ตอบ 1.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** วาดรูปเพื่อดูพิกัดของจุดศูนย์กลางของวงกลม ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด

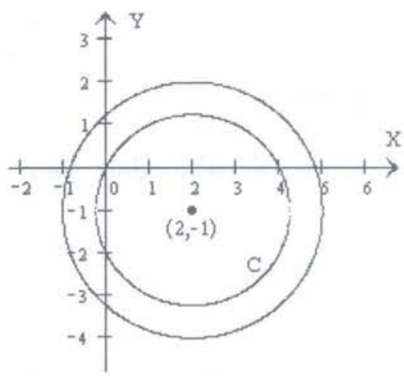
และตัดแกน X ที่จุด (4 , 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0 , –2)

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับ

วงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ต้องการ

อยู่ในควอดรันท์ที่ 4




1. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ จุดศูนย์กลาง (2 , –1) อยู่ในควอดรันท์ที่ 4

2. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$ จุดศูนย์กลาง (–2 , 1) อยู่ในควอดรันท์ที่ 2

3. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ จุดศูนย์กลาง (1 , –2) อยู่ในควอดรันท์ที่ 4

4. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ จุดศูนย์กลาง (–1 , 2) อยู่ในควอดรันท์ที่ 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

จากรูป (1 , –2) ห่างจาก (4 , 0) , (0 , –2) ไม่เท่ากัน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

17.ตอบ 3.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ p , q , r

แทนค่า p = 1 , q = 2 , r = 3 โจทย์และตัวเลือกจะเป็น

กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 2x + 3$

เพราะว่า F(x) เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f(x)

เพราะฉะนั้น $F(x) = \int (x^2 + 2x + 3)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + K$

เพราะว่า $F(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $K = 0$ ดังนั้น $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x$

เพราะฉะนั้น $F(1) + F(-1) = (\frac{1}{3} + 1 + 3) + (-\frac{1}{3} + 1 - 3) = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $f(x) = px^2 + qx + r$

$$F(x) = \int (px^2 + qx + r)dx$$

$$F(x) = p\frac{x^3}{3} + q\frac{x^2}{2} + rx + K$$

เพราะว่า $F(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $K = 0$ เพราะฉะนั้น $F(x) = p\frac{x^3}{3} + q\frac{x^2}{2} + rx$

$$F(1) + F(-1) = (\frac{p}{3} + \frac{q}{2} + r) + (-\frac{p}{3} + \frac{q}{2} - r) = q$$

18.ตอบ 1.

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 มี 450 ตัวเท่านั้น

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** A = เซตของจำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยเป็นจำนวนเฉพาะ

| หลักร้อย | หลักสิบ | หลักหน่วย |
|---|---|---|
| 1–9 | 0–9 | 3 , 5 , 7 |
| 9 วิธี | 10 วิธี | 3 วิธี |

เพราะฉะนั้น n(A) = (9)(10)(3) = 270

ในทำนองเดียวกัน $\arctan\frac{1}{5} = 11$ องศา

$\arctan\frac{1}{7} = 8$ องศา

$\arctan\frac{1}{8} = 7$ องศา

เพราะฉะนั้น $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$ มีค่าประมาณเท่ากับ 44 องศา

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งดีกว่า

**วิธีจริง** การพิสูจน์ว่า $\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

ให้ $A = \arctan x$ , $B = \arctan y$

เพราะฉะนั้น $\tan A = x$ , $\tan B = y$

เพราะว่า $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A \tan B} = \frac{x+y}{1-xy}$

เพราะฉะนั้น $A + B = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

สรุป $\arctan x + \arctan y = \arctan(\frac{x+y}{1-xy})$

เพราะฉะนั้น $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-(\frac{1}{3})(\frac{1}{5})}\right) + \arctan\left(\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-(\frac{1}{7})(\frac{1}{8})}\right)$$

$$= \arctan(\frac{8}{14}) + \arctan(\frac{15}{55})$$

$$= \arctan(\frac{4}{7}) + \arctan(\frac{3}{11})$$

$$= \arctan\left(\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-(\frac{4}{7})(\frac{3}{11})}\right)$$

$$= \arctan(\frac{44+21}{77-12})$$

$$= \arctan(1)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 12.

1. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$ แล้วโดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\varnothing$ 2. $(-\infty, 2]$
   3. $(-3, 2)$ 4. $(-3, 2]$

2. ถ้า $r = \{(x, y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 2x\}$ แล้ว เรนจ์ของ $r^{-1}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $[0, 2]$ 2. $[0, 4]$
   3. $(-\infty, 0] \cup [2, \infty)$ 4. $(-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

3. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ $(3, 2)$ และ $(3, -4)$ โฟกัสที่ $(3, -6)$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\dfrac{(y+1)^2}{16} - \dfrac{(x-3)^2}{9} = 1$ 2. $\dfrac{(y-1)^2}{16} - \dfrac{(x+3)^2}{9} = 1$
   3. $\dfrac{(y-1)^2}{9} - \dfrac{(x+3)^2}{16} = 1$ 4. $\dfrac{(y+1)^2}{9} - \dfrac{(x-3)^2}{16} = 1$

4. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 6)$ และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 - 4y - 4x = 8$

   1. $3x - 4y + 21 = 0$ 2. $4x - 3y + 14 = 0$
   3. $7x + 2y - 19 = 0$ 4. $2x + 7y - 44 = 0$

5. ให้ $a_n$ เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม
   ถ้า $\dfrac{a_1}{a_1 + a_2} + \dfrac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_n + a_{n+1}} = 2n$ แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $-\dfrac{1}{2}$ 2. $\dfrac{1}{2}$
   3. $-2$ 4. $2$

6. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ ที่จุด $x = 5$ คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $10x - 27y + 31 = 0$ 2. $5x - 13y + 14 = 0$
   3. $27x - 10y - 105 = 0$ 4. $13x - 5y - 50 = 0$

12. เซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0, 0 \leq x \leq 2\pi$

เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$
2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$
4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

13. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$ โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2, 3)$
2. $(2, 3]$
3. $(2, \frac{\pi}{2})$
4. $(2, \frac{\pi}{2}]$

14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ถ้า $X = (B + C)A$ แล้ว $X^{-1}$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

15. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

| อายุ (ปี) | จำนวนเด็ก |
|---|---|
| 1 – 3 | 3 |
| 4 - 6 | a |
| 7 – 9 | 6 |
| 10 – 12 | 4 |

ถ้ามัธยฐานของอายุเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 7 ปี แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 4
3. 5
4. 6

16. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ทำให้ประพจน์ $\forall x [x^2 + 2x - 3 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(-\infty, -3)$
2. $(-2, 1)$
3. $(0, 10)$
4. $(1, \infty)$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 12.

**1. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่าโดเมนของ fg คือ $D_f \cap D_g$ คำถามนี้เหมือนกับการถามว่าเซตคำตอบคือตัวเลือกใดผสมกับโดเมนคือเซตใด

เพราะว่า $f(2) = 0$ และ $g(2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ เพราะฉะนั้น $2 \in D_f \cap D_g$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $g(-3) = \frac{1}{\sqrt{0}}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $-3 \notin D_g$ และ $-3 \notin D_f \cap D_g$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$$
\begin{aligned}
\text{โดเมน } fg &= D_f \cap D_g \\
&= \{x \mid (3+x)(2-x) \geq 0 \text{ และ } x+3 > 0\} \\
&= \{x \mid (x+3)(x-2) \leq 0 \text{ และ } x > -3\} \\
&= \{x \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ และ } x > -3\} \\
&= (-3, 2]
\end{aligned}
$$

**2. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** หาสมาชิกที่อยู่ใน r ก็ตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $0 \leq (-1)^2$ และ $0 \geq 2(-1)$ เพราะฉะนั้น $(-1, 0) \in r$ ดังนั้น $(0, -1) \in r^{-1}$

เพราะฉะนั้น $-1$ ต้องอยู่ในเรนจ์ของ $r^{-1}$ แต่ตัวเลือก 1. และ 2. ไม่มี $-1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $4 \leq (2)^2$ และ $4 \geq 2(2)$ เพราะฉะนั้น $(2, 4) \in r$ ดังนั้น $(4, 2) \in r^{-1}$

เพราะฉะนั้น 2 ต้องอยู่ในเรนจ์ของ $r^{-1}$ แต่ตัวเลือก 4. ไม่มี 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $a = 3$ แต่ค่า a ของตัวเลือกที่เหลือคือ 1. $a = 4$ 2. $a = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

เพราะว่าไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ $(3, 2)$ และ $(3, -4)$ โฟกัสที่ $(3, -6)$

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางคือ $(3, -1)$ , $a = 3$ , $c = 5$ และ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$

เพราะฉะนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

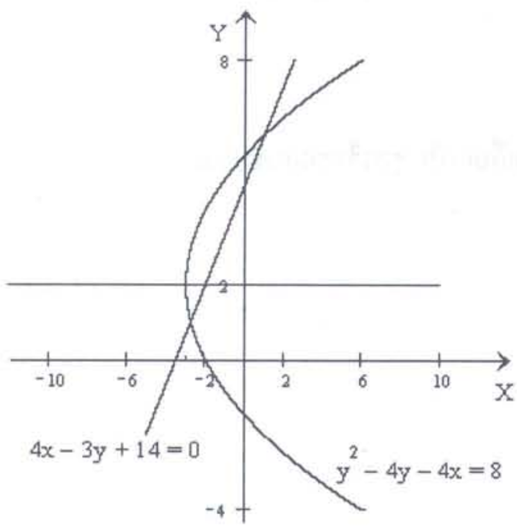
**4. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เขียนรูปตามโจทย์กำหนด

จัดรูปสมการพาราโบลา $y^2 - 4y - 4x = 8$

$$(y-2)^2 = 4(1)(x+3)$$

เป็นพาราโบลาเปิดด้านขวา จุดยอด $(-3, 2)$ , $c = 4$ , โฟกัส $(-2, 2)$




จาดรูปเส้นตรงที่ต้องการต้องมีความชันเป็นลบ และความชันของแต่ละตัวเลือกคือ

1. ความชัน $= \frac{3}{4}$ 2. ความชัน $= \frac{4}{3}$ 3. ความชัน $= -\frac{7}{2}$ 4. ความชัน $= -\frac{2}{7}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

$$\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1+r}+\ldots+\frac{1}{1+r} = 2n$$
$$n(\frac{1}{1+r}) = 2n$$
$$\frac{1}{1+r} = 2$$
$$r = -\frac{1}{2}$$

**6. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ใช้ความชันช่วยตัดตัวเลือก $y = \sqrt[3]{x^2+2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2x)$$
$$\frac{dy}{dx}(x=5) = \frac{1}{3}(5^2+2)^{-\frac{2}{3}}(2(5)) = \frac{10}{27}$$

เพราะฉะนั้นความชันของเส้นตรงที่ต้องการคือ $\frac{10}{27}$ ต่อไปหาความชันของแต่ละตัวเลือก

1. $10x-27y+31=0$ ความชัน $=\frac{10}{27}$ 2. $5x-13y+14=0$ ความชัน $=\frac{5}{13}$
3. $27x-10y-105=0$ ความชัน $=\frac{27}{10}$ 4. $13x-5y-50=0$ ความชัน $=\frac{13}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $x=5$ จะได้ $y=\sqrt[3]{x^2+2}=\sqrt[3]{5^2+2}=3$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (5 , 2) และมีความชัน $\frac{10}{27}$ คือ $(y-3)=\frac{10}{27}(x-5)$

$$27y-81 = 10x-50$$
$$10x-27y+31=0$$

**7. ตอบ 1.**

**แนวคิด** $|\bar{a}| = |3\bar{i}+4\bar{j}| = 5$ , $\bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|^2 = 25$

เพราะว่า $\bar{a}\cdot(\bar{a}-\bar{b}) = 23$

$$\bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}) = 23$$
$$25-\bar{a}\cdot\bar{b} = 23$$
$$\bar{a}\cdot\bar{b} = 2$$

$r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x + \sqrt{y^2 - 9} \leq 0$ และ $y \geq 3\}$

$= \{(-1, 3), (0, 3), (-1, \sqrt{10}), \ldots\}$

เพราะว่า $(3, 0) \in r_1$ และ $(3, 0) \notin r_2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

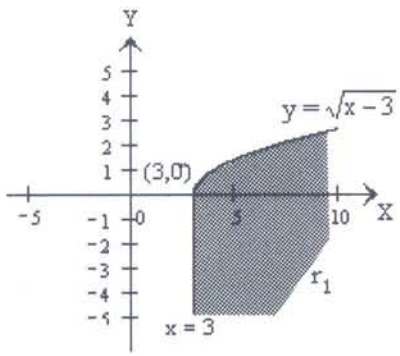
เพราะว่า $(0, 3) \in r_2$ และ $(0, 3) \notin r_1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า $(1, 4) \notin r_2$ เพราะฉะนั้น $(4, 1) \notin r_2^{-1}$

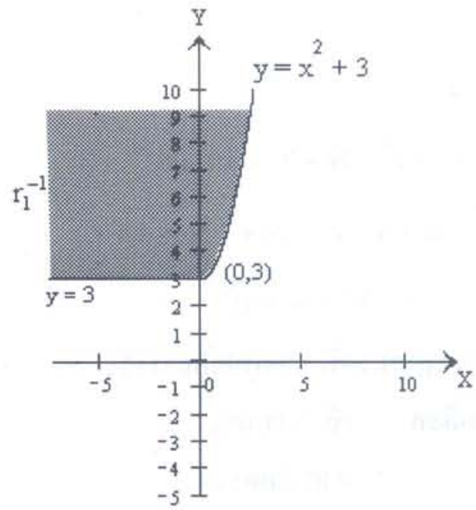
เพราะว่า $(4, 1) \in r_1$ และ $(4, 1) \notin r_2^{-1}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

**วิธีจริง** ยากมากตรงที่นักเรียนต้องเขียนกราฟความสัมพันธ์ $r_1$, $r_2^{-1}$, $r_2$, $r_1^{-1}$ ได้

**กราฟแสดงบริเวณของ $r_1$**




**กราฟแสดงบริเวณของ $r_1^{-1}$**




พิจารณา $x + \sqrt{y^2 - 9} = 0$

$$x = -\sqrt{y^2 - 9}$$

$$x^2 = y^2 - 9$$

$$y^2 - x^2 = 9$$

เพราะฉะนั้นพิจารณากราฟแสดงบริเวณ $r_2$ จากไฮเพอร์โบลา $y^2 - x^2 = 9$ ดังนี้

3. วัดระยะจาก C มาตั้งฉากกับ L ได้ 3 cm

4. AB ยาว 6 cm

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}(6)(3) = 9$ โดยการประค่าดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4 ทิ้ง

**วิธีจริง** สมการเส้นตรง L คือ $y + 1 = (-\frac{4}{3})(x - 2)$

$$4x + 3y - 5 = 0$$

เพราะว่า L ผ่านจุด (2 , –1) เพราะฉะนั้น AB ยาว 6 cm

ระยะทางจาก C(–1,–2) มายัง L เท่ากับ $= \frac{|(4)(-1)+(3)(-2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3$

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม = $\frac{1}{2}(6)(3) = 9$

**11.ตอบ 1.**

**แนวคิด** พิกัดของจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานคือ $(\frac{-1+3+5}{3}, \frac{2+0+4}{3}) = (\frac{7}{3}, 2)$

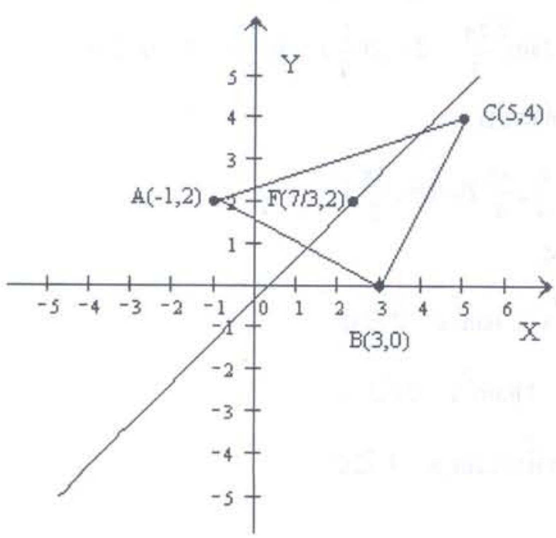
**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** แทนค่า $x = \frac{7}{3}$ , $y = 2$ ในแต่ละตัวเลือกจะได้ว่า

1. $3x - 3y - 1 = 0$ ผ่านจุด $(\frac{7}{3}, 2)$ 2. $3x - 3y + 1 = 0$ ไม่ผ่านจุด $(\frac{7}{3}, 2)$

3. $3x - 3y - 2 = 0$ ไม่ผ่านจุด $(\frac{7}{3}, 2)$ 4. $3x - 3y + 2 = 0$ ไม่ผ่านจุด $(\frac{7}{3}, 2)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

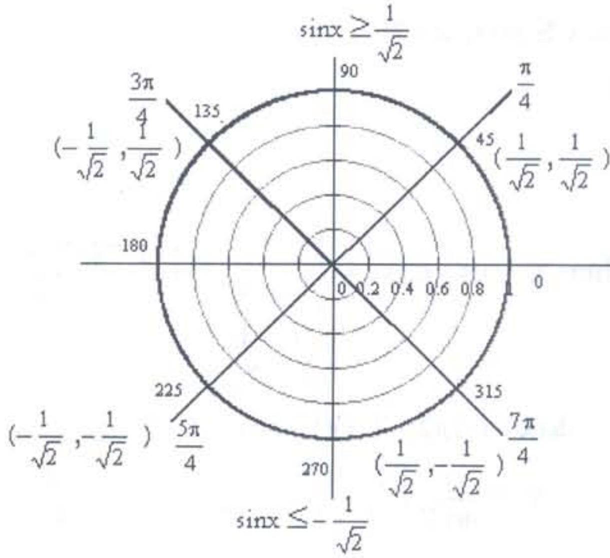
**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** ตัดตัวเลือกโดยดูจากระยะตัดแกน



$$\sin^2 x \geq \frac{1}{2}$$

$$\sin x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ หรือ } \sin x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

พิจารณาจากกราฟของวงกลมหนึ่งหน่วยจะได้ว่า




เพราะฉะนั้น $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$ มีเซตคำตอบเป็น $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

ซึ่งเป็นสับเซตของ $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$

**13. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\frac{\pi}{2} = \frac{3.14}{2} = 1.57 < 2$

เพราะฉะนั้น 3. $(2, \frac{\pi}{2}) = \varnothing$ 4. $(2, \frac{\pi}{2}] = \varnothing$

ถ้าตัวเลือก 3. , 4. นี้ถูกข้อสอบข้อนี้ก็ต้องผิด

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. , 4. ทิ้งดีกว่า

จาก $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$

$$f(3) = \sqrt{\arcsin(\log_3 3)} + \log_5(3-2) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

เพราะฉะนั้น 3 ต้องอยู่ในโดเมนของ f

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

มัธยฐานอยู่ในชั้นที่ 3 มัธยฐาน $= L + \left[\dfrac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_M}\right] = 6.5 + \left[\dfrac{\frac{16}{2} - 6}{6}\right] = 6.5 + 1 = 7.5 \neq 7$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เมื่อ $a = 4$ , $N = 17$

| อายุ (ปี) | จำนวนเด็ก | ความถี่สะสม |
|---|---|---|
| 1 – 3 | 3 | 3 |
| 4 - 6 | a = 4 | 7 |
| 7 – 9 | 6 | 13 |
| 10 – 12 | 4 | 17 |

มัธยฐานอยู่ในชั้นที่ 3 มัธยฐาน $= L + \left[\dfrac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_M}\right] = 6.5 + \left[\dfrac{\frac{17}{2} - 7}{6}\right] = 6.5 + 0.75 = 7.25 \neq 7$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เมื่อ $a = 6$ , $N = 19$

| อายุ (ปี) | จำนวนเด็ก | ความถี่สะสม |
|---|---|---|
| 1 – 3 | 3 | 3 |
| 4 - 6 | a = 6 | 9 |
| 7 – 9 | 6 | 15 |
| 10 – 12 | 4 | 19 |

มัธยฐานอยู่ในชั้นที่ 3 มัธยฐาน $= L + \left[\dfrac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_M}\right] = 6.5 + \left[\dfrac{\frac{19}{2} - 9}{6}\right] = 6.5 + 0.5 = 7$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบ

**วิธีจริง** นักเรียนต้องรู้เองว่ามัธยฐานอยู่ในชั้นที่ 3

| อายุ (ปี) | จำนวนเด็ก | ความถี่สะสม |
|---|---|---|
| 1 – 3 | 3 | 3 |
| 4 - 6 | a | 3 + a |
| 7 – 9 | 6 | 9 + a |
| 10 – 12 | 4 | 13 + a |

**17.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a , b

ลองแทนค่า $a = 2$ , $b = -1$

1. $2^2 - (-1)^2 = 3 > 0$ แล้ว $|2| > |-1|$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $2^2 + (-1)^2 = 5 \geq 2(2)(-1)$ มีค่าความจริงเป็นจริง
3. $|2-(-1)| = 3 \geq |2| - |-1|$ มีค่าความจริงเป็นจริง

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ลองคิดต่ออีกก็ได้ 4. $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \leq |2+(-1)|$

มีค่าความจริงเป็นเท็จ ตัวเลือกนี้เป็นคำตอบได้เลย

**วิธีจริง** จำคุณสมบัติของจำนวนจริงได้เป็นวิธีจริงที่ดีที่สุด

**18.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** แทนค่า $x = -0.5$ $\frac{(-0.5)^2}{-0.5+1} = 0.5 > -0.5$

เพราะฉะนั้น $-0.5$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

แต่ $(-\infty, -2)$ , $(-10, -1)$ , $(1, \infty)$ ไม่มี $-0.5$ เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\frac{x^2}{x+1} > x$

$$\frac{x^2}{x+1} - x > 0$$

$$\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} > 0$$

$$\frac{-x}{x+1} > 0$$

$$\frac{x}{x+1} < 0$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $(-1\ ;\ 0)$ เป็นสับเซตของ $(-2, 1)$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 13.

1. ถ้า $3\log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$ แล้ว x มีค่าในช่วงใดต่อไปนี้

   1. $(-1, 9)$ 2. $(-2, 7)$

   3. $(1, 10)$ 4.$(2, 12)$

2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{2x+1}$ และ g เป็นอนุพันธ์ของ f ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $D_f = D_g$ 2. $D_g \subset D_f$ และ $D_g \neq D_f$

   3. $D_f \subset D_g$ และ $D_g \neq D_f$ 4. $D_g \cap D_f = \{-\frac{1}{2}\}$

3. กำหนดให้ $f(x) = x^4 - 2x^2$ $f(x)$ มีค่าลดลงในช่วงใดต่อไปนี้

   1. $(-1, 0)$ 2. $(0, 1)$

   3. $(1, 2)$ 4. $(2, \infty)$

4. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยตัวเลข 5 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ a ค่ามัธยฐานเท่ากับ b ถ้าให้ $X_i$ แทนค่าที่ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ และ $A = \sum_{i=1}^{5}(X_i - a)^2$ , $B = \sum_{i=1}^{5}(X_i - b)^2$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. $A \geq B$ 2. $A \geq B$

   3. $A < B$ 4. $A > B$

5. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2 - x - x^2$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x^2} = x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. $A \cup B = R$ 2. $A \cap B = (0, 1)$

   3. $A - B = \varnothing$ 4. $B - A = (1, \infty)$

6. เซตคำตอบของอสมการ $2x + 2 < |x| < 7x + 8$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

   1. $(-1, 0)$ 2. $(-\frac{2}{3}, 1)$

   3. $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ 4. $(0, 2)$

13. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $2x + y - 7 = 0$ และ ผ่านจุด $(6, -1)$ แกนพาราโบลามีสมการ $y - 3 = 0$ คือข้อใด

1. $2y^2 + 12y - x + 16 = 0$
2. $y^2 + 6y - x + 11 = 0$
3. $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$
4. $y^2 - 6y - 2x + 13 = 0$

14. สมการวงรี มีจุดศูนย์กลางและโฟกัสจุดหนึ่งห่างจากเส้นตรง $y - 10 = 0$ เท่ากับ 8 และ 11 หน่วย ตามลำดับ แกนเอกของวงรีมีสมการ $x + 4 = 0$ และถ้าวงรีผ่านจุด $(-8, 2)$ แล้วสมการของวงรีคือข้อใด

1. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$
2. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{18} = 1$
3. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$
4. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{21} = 1$

15. กำหนดให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล n จำนวน มีค่าเป็น M และผลบวกของ $(n - 9)$ จำนวน มีค่าเป็น S แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ 9 จำนวนที่เหลือเท่ากับเท่าไร

1. $\frac{nS + M}{9}$
2. $\frac{nS - M}{9}$
3. $\frac{nM + S}{9}$
4. $\frac{nM - S}{9}$

16. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|x| \neq \pi$ และ $|y| \neq \pi$ และ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{x + y + \pi}$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $|x| = |y|$
2. ถ้า $x < 3$ แล้ว $y < -3$
3. $x + y = 0$
4. ถ้า $x = 2^{10}$ แล้ว $y < \frac{1}{2^{10}}$

17. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid x^2 - 3|x| + 2 \geq 0\}$ และ $B = (-2, 1]$ แล้ว $A \cap B'$ คือเซตใด

1. $\{-2\} \cup [2, \infty)$
2. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
3. $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$
4. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

18. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2y + x^2 + 2x - y = 0\}$ $R_r - D_r$ คือเซตใด

1. $\varnothing$
2. $\{-1\}$
3. $\{1\}$
4. $\{-1, 1\}$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 13.

**1. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $x = 1$ เป็นคำตอบของสมการ $3\log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$

แต่ $x = 1$ ไม่มีในตัวเลือก 3. $(1, 10)$ 4. $(2, 12)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** แทนค่า $v = \log_4 x$

เพราะฉะนั้น
$$3\log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$$
$$6\log_4 x = 4(\log_4 x)^2$$
$$6v = 4v^2$$
$$4v^2 - 6v = 0$$
$$2v(2v-3) = 0$$

เพราะฉะนั้น
$$v = 0, 1.5$$
$$\log_4 x = 0, 1.5$$
$$x = 1, 4^{1.5} = 1, 8 \in (-1, 9)$$

**2. ตอบ 2.**

**แนวคิด** เพราะว่า
$$f(x) = \sqrt{2x+1}$$
$$g(x) = f'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{1}{2}}(2x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}}$$

**การตัดตัวเลือก** เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2} \notin D_g$ และ $x = -\frac{1}{2} \in D_f$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1. $D_f = D_g$

3. $D_f \subset D_g$ และ $D_g \neq D_f$ 4. $D_g \cap D_f = \{-\frac{1}{2}\}$

**วิธีจริง** $\sum_{i=1}^{5}(X_i - M)^2$ น้อยสุดเมื่อ M = ค่าเฉลี่ย

เพราะฉะนั้น $A = \sum_{i=1}^{5}(X_i - a)^2 \leq \sum_{i=1}^{5}(X_i - b)^2 = B$

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** โดยการแทนค่า x บางค่าจะเห็นว่า

$A = \{x \mid \sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2-x-x^2\} = \{0, 1, -2, .....\}$

และ $B = \{x \mid \sqrt{x^2} = x\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น $0 \in A \cap B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่าโดยการแทนค่า $x = -3$ จะได้ว่าสมการ $\sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2-x-x^2$ และ $\sqrt{x^2} = x$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A$ และ $-3 \notin B$ ทำให้ $A \cup B \neq R$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่าโดยการแทนค่า $x = -2$ จะได้ว่าสมการ $\sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2-x-x^2$ จริง

แทนค่า $x = -2$ จะได้ว่าสมการ $\sqrt{x^2} = x$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น $-2 \in A$ และ $-2 \notin B$ ทำให้ $-2 \in A - B$ เพราะฉะนั้น $A - B \neq \varnothing$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

**วิธีจริง**
$$\begin{aligned}
A &= \{x \mid \sqrt{(2-x-x^2)^2} = 2-x-x^2\} \\
&= \{x \mid |2-x-x^2| = 2-x-x^2\} \\
&= \{x \mid 2-x-x^2 \geq 0\} \\
&= \{x \mid x^2+x-2 \leq 0\} \\
&= \{x \mid (x+2)(x-1) \leq 0\} \\
&= \{x \mid -2 \leq x \leq 1\} = [-2, 1] \\
B &= \{x \mid \sqrt{x^2} = x\} \\
&= \{x \mid |x| = x\} \\
&= \{x \mid x \geq 0\} = [0, \infty)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $A \cup B = [-2, \infty)$, $A \cap B = [0, 1]$, $A - B = [-2, 0)$, $B - A = (1, \infty)$

$= (7x)[(7y+3)+(7z+5)]+(7y)(7z+5)+(3)(7z+5)$

$= (7x)[(7y+3)+(7z+5)]+(7y)(7z+5)+(3)(7z)+15$

$= (7x)[(7y+3)+(7z+5)]+(7y)(7z+5)+(3)(7z)+7+7+1$

เพราะว่า 7 หาร $(7x)[(7y+3)+(7z+5)]+(7y)(7z+5)+(3)(7z)+7+7$ ลงตัว

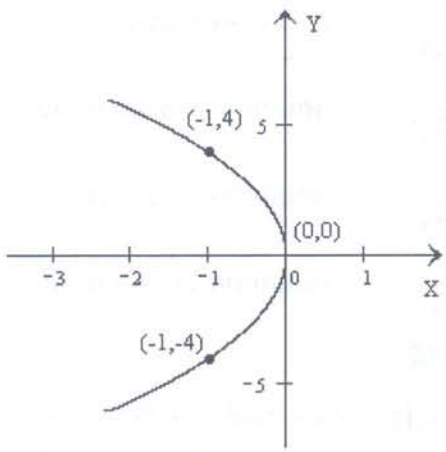
เพราะฉะนั้น 7 หาร $a(b+c)$ เหลือเศษ 1

**8. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เส้นตรง $4x+3y=8$ กับ $2x+y=2$ ตัดกันที่จุด $(-1, 4)$

เพราะว่าพาราโบลามีจุดยอดที่ (0,0) มีแกน X เป็นแกนสมมาตรและผ่านจุด $(-1, 4)$

เพราะฉะนั้นพาราโบลาต้องผ่านจุด $(-1, -4)$ เขียนกราฟของพาราโบลาคราวๆ ได้เป็น




เพราะฉะนั้นพาราโบลาไม่ผ่านควอดรันท์ 1 และ 4. แต่

1. $(\frac{1}{4}, -2)$ อยู่ในควอดรันท์ 1 3. $(2, -\frac{1}{4})$ อยู่ในควอดรันท์ 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.ทิ้งได้

เพราะว่าถ้า $x=-2$ ค่า y ที่อยู่บนพาราโบลาต้องมากกว่า 4

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. $(-2, \frac{1}{4})$ ทิ้งได้

**วิธีจริง** สมการพาราโบลาคือ $y^2 = 4cx$

เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด $(-1, 4)$ เพราะฉะนั้น $16 = 4c(-1)$, $c = -4$

ดังนั้นสมการพาราโบลาคือ $y^2 = -16x$ ซึ่งผ่านจุด $(-\frac{1}{4}, 2)$

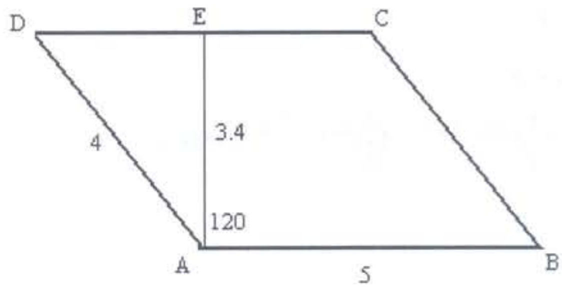
**10.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** สมมติเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมรูปนี้มีความยาวเท่ากับ 18

เพราะฉะนั้น $AB + BC + CD + DA = 18$

$5 + BC + 5 + BC = 18$

เพราะฉะนั้น $BC = 4$




วาดรูปตามเงื่อนไขที่ได้วัดระยะความสูง AE ได้ เท่ากับ 3.4

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $ABCD = (5)(3.4) \neq 20$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** พื้นที่ $ABCD = |AB|\,|AE| = 20$ เพราะฉะนั้น $|AE| = 4$

เพราะว่า มุม D = 60 องศา เพราะฉะนั้น

$$\sin D = \frac{AE}{AD}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{4}{AD}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{AD}$$

$$AD = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

เพราะฉะนั้นเส้นรอบรูปเท่ากับ $AB + BC + CD + DA = 5 + \frac{8}{\sqrt{3}} + 5 + \frac{8}{\sqrt{3}} = 10 + \frac{16}{\sqrt{3}}$

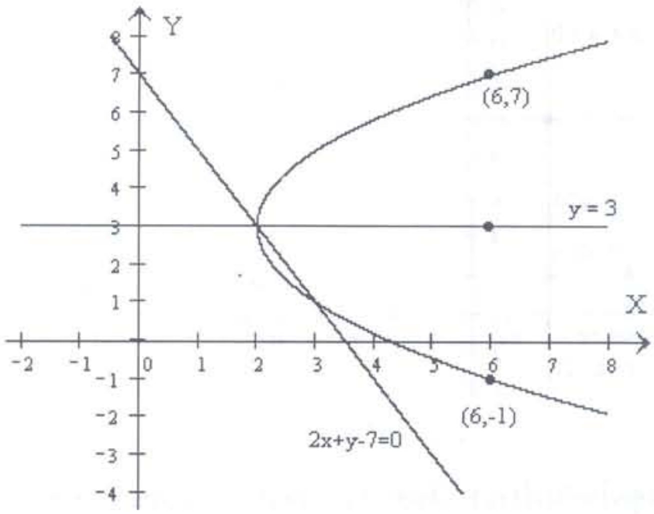
**11.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $x = -10$ ทำให้ $\log_2(4x-1) = \log_2(-10)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = -10$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

13. ตอบ 3.

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามโจทย์กำหนด




เพราะว่า $y = 3$ เป็นแกนสมมาตร และ $(6,-1)$ อยู่บนพาราโบลา

เพราะฉะนั้น $(6 , 7)$ ต้องอยู่บนพาราโบลาด้วย แทนค่า $x = 6$ , $y = 7$ ในตัวเลือก

1. $2(7)^2 + 12(7) - 6 + 16 \neq 0$ 2. $(7)^2 + 6(7) - 6 + 11 \neq 0$

3. $(7)^2 - 6(7) - 4(6) + 17 = 0$ 4. $(7)^2 - 6(7) - 2(6) + 13 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $(6 , 7)$ ไม่อยู่บนพาราโบลาของตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เส้นตรง เส้นตรง $2x + y - 7 = 0$ ตัดกับเส้นตรง $y = 3$ ที่จุด $(2 , 3)$

เพราะว่าแกนพาราโบลามีสมการ $y - 3 = 0$ เพราะฉะนั้นจุด $(2 , 3)$ ต้องเป็นจุดยอดของพาราโบลา

สมการพาราโบลาคือ $(y - 3)^2 = 4c(x - 2)$

เพราะว่าพาราโบลาผ่านจุด $(6 , -1)$ เพราะฉะนั้น $(-1 - 3)^2 = 4c(6 - 2)$ , $c = 1$

เพราะฉะนั้นสมการพาราโบลาคือ

$$
\begin{aligned}
(y - 3)^2 &= 4(1)(x - 2) \\
y^2 - 6y + 9 &= 4x - 8 \\
y^2 - 6y - 4x + 17 &= 0
\end{aligned}
$$

**15.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของข้อมูล

เลือกข้อมูลเป็น $n = 10$ ข้อมูลคือ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 และ 11

เพราะฉะนั้น $M = 2$ ผลบวกของ $(10 - 9) = 1$ จำนวนคือ 11 มีค่าเป็น $S = 11$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ 9 จำนวนที่เหลือคือ 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 , 1 เท่ากับ = 1

แทนค่า $n = 10$ , $M = 2$ , $S = 11$ ทุกตัวเลือก

1. $\frac{nS+M}{9} = \frac{(10)(11)+2}{9} \neq 1$ 2. $\frac{nS-M}{9} = \frac{(10)(11)-2}{9} \neq 1$

3. $\frac{nM+S}{9} = \frac{(10)(2)+1}{9} \neq 1$ 4. $\frac{nM-S}{9} = \frac{(10)(2)-11}{9} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากข้อมูลที่โจทย์กำหนดสรุปในรูปแบบตารางได้ดังนี้

| | ข้อมูลกลุ่มที่ 1 | ข้อมูลกลุ่มที่ 2. | ข้อมูลรวม |
|---|---|---|---|
| **จำนวนข้อมูล** | $n - 9$ | 9 | n |
| **ผลบวก** | S | **nM – S** | **nM** |
| **ค่าเฉลี่ย** | | $\frac{nM-S}{9}$ | M |

เพราะฉะนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ 9 จำนวนที่เหลือเท่ากับ $\frac{nM-S}{9}$

**16.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ y แทนค่า x และ y ที่คิดเลขง่ายๆ เช่น $x = 1$ , $y = -1$

จะได้ว่าเงื่อนไขของโจทย์ $|1| \neq \pi$ และ $|-1| \neq \pi$ และ $\frac{1}{1}+\frac{1}{-1}+\frac{1}{\pi} = \frac{1}{1-1+\pi}$ เป็นจริง แต่ตัวเลือก 2. ไม่ถูก เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบ

**วิธีจริง**
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\pi} = \frac{1}{x+y+\pi}$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{x+y+\pi}-\frac{1}{\pi}$$

**วิธีจริง** $A = \{x \in R \mid x^2 - 3|x| + 2 \geq 0\}$

$= \{x \in R \mid x^2 - 3x + 2 \geq 0$ หรือ $x^2 + 3x + 2 \geq 0\}$

$= \{x \in R \mid (x-2)(x-1) \geq 0$ หรือ $(x+2)(x+1) \geq 0\}$

$= \{x \in R \mid -\infty < x \leq 1$ หรือ $2 \leq x < \infty$ หรือ $-\infty < x \leq -2$ หรือ $-1 \leq x < \infty\}$

$= (-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty)$

$B = (-2, 1]$

$B' = (-\infty, -2] \cup (1, \infty)$

$A \cap B' = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

**18. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ทำโดยนำค่าในตัวเลือกมาพิจารณาความเป็นไปได้

$x = 1$ ทำให้ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$y + 1 + 2 - y = 0$

$3 = 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $1 \notin D_r$

$y = 1$ ทำให้ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$x^2 + x^2 + 2x - 1 = 0$

$2x^2 + 2x - 1 = 0$

$x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{4}$ เป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $1 \in R_r$

เพราะฉะนั้น $1 \in R_r - D_r$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

$x = -1$ ทำให้ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$y + 1 - 2 - y = 0$

$-1 = 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะฉะนั้น $-1 \notin D_r$

$y = -1$ ทำให้ $x^2y + x^2 + 2x - y = 0$

$2x + 1 = 0$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 14.

1. สำหรับสับเซต A , B , C ใด ๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ U
   ถ้า $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$ แล้วข้อความใดต่อไปนี้ ผิด
   1. $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = B'$
   2. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cup C)$
   3. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
   4. $A \cap (A \cup B) \subset A$
2. ห.ร.ม. ของ –504 และ 450 มีค่าเท่ากับเท่าใด
   1. 18      2. –18
   3. 72      4. ไม่มีค่า ห.ร.ม.
3. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$
   $X = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B และ $f(1) = a\}$ X มีจำนวนสมาชิกเท่ากับเท่าใด
   1. 12      2. 24
   3. 60      4. 81
4. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง
   (1) $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน
   (2) $f \cap g$ เป็นฟังก์ชัน
   (3) $f - g$ เป็นฟังก์ชัน
   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
   1. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ
   2. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ
   3. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ
   4. ข้อ (1) – (3) ผิดทุกข้อ

5. ให้ R เป็นเซตจำนวนจริง f และ g เป็นฟังก์ชันจากสับเซตของ R ไป R

กำหนดโดย $f(x) = \sqrt{x+2}$

$g(x) = x^2 - 2$ ข้อใดต่อไปนี้ ผิด

1. $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$ ทุก $x \geq 0$
2. $R_{g \circ f} = R_{f \circ g} = [0, \infty)$
3. $D_{g \circ f} = D_f$
4. $D_{f \circ g} = D_g$

6. สมการของวงรีที่ผ่านจุดกำเนิดและมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-1, 1)$ กับ $(1, 1)$ คือสมการในข้อใด

1. $2x^2 + y^2 + 4x = 0$
2. $2x^2 + y^2 - 4x = 0$
3. $x^2 + 2y^2 + 4y = 0$
4. $x^2 + 2y^2 - 4y = 0$

7. จุดต่อไปนี้จุดใดอยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และเส้นสัมผัสนั้นขนานกับเส้นตรง $x + y = 0$

1. $(2, -1)$
2. $(3, -5)$
3. $(4, -7)$
4. $(5, -9)$

8. ให้ O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 4x = 0$ ลาก OP ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง OP พิกัดของ Q สอดคล้องสมการข้อใด

1. $x^2 + y^2 + 2x = 0$
2. $x^2 + y^2 - 2x = 0$
3. $x^2 + y^2 + 8x = 0$
4. $x^2 + y^2 - 8x = 0$

9. ไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3 - 3\sqrt{13}, 1)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 1)$ อัตราส่วนของระยะทางครึ่งแกนตามขวางต่อระยะครึ่งแกนสังยุคเป็น 2 : 3

สมการของไฮเพอร์โบลานี้คือสมการในข้อใด

1. $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{81} = 1$
2. $\frac{(y-1)^2}{81} - \frac{(x+3)^2}{36} = 1$
3. $\frac{(x+3)^2}{117} - \frac{(y-1)^2}{50} = 1$
4. $\frac{(x+3)^2}{50} - \frac{(y-1)^2}{117} = 1$

10. ให้ O เป็นจุดกำเนิด ลากเส้นตรง OA และ OB ทำให้จุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $2x + y = a$ โดยมี OA = OB และมุม AOB เป็นมุมฉาก พื้นที่สามเหลี่ยม OAB จะมีค่าเป็นเท่าใด

1. $\frac{a^2}{2}$
2. $\frac{a^2}{3}$
3. $\frac{a^2}{4}$
4. $\frac{a^2}{5}$

11. รูปสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรง AB คือ $3x + 2y = 12$ M เป็นจุดที่เส้นตั้งฉากลากจากจุดยอด A , B และ C มาตั้งฉากกับฐานพบกัน สมการเส้นตรง BM คือ $x + 2y = 4$ และสมการเส้นตรง AM คือ $4x + y = 6$ สมการของเส้นตรง AC คือ สมการในข้อใด

1. $2x - y + 6 = 0$
2. $2x - y + 8 = 0$
3. $x - 2y + 6 = 0$
4. $x - 2y + 8 = 0$

12. กำหนด $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n , \dots$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \dots + a_{2535} = 3170$ และ $a_{1269} + a_{1270} + a_{1271} + \dots + a_{1308} = a_{2088}$ แล้ว $a_1$ เท่ากับเท่าใด

1. $-1267$ 2. $-1268$
3. $-6335$ 4. $-6337$

13. ผลคูณของคำตอบของสมการ $\arctan(3x^2 + 1) = 2 \arctan\frac{1}{2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{9}$ 2. $-\frac{4}{3}$
3. $\frac{1}{9}$ 4. $\frac{4}{3}$

14. ค่าของ $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5})$ เท่ากับเท่าไร

1. $\frac{48}{65}$ 2. $\frac{52}{65}$
3. $\frac{56}{65}$ 4. $\frac{63}{65}$

15. ถ้ากำหนดจำนวนเชิงซ้อน $2 + i$ และ $1 - 3i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เมื่อ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด

1. 15 2. 17
3. 23 4. 29

16. กำหนด $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ และ $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

ถ้า $a = z_1^5 + z_2^5$ และ $b = z_1^6 + z_2^6$ แล้วจะได้ว่า $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $-1$ 2. 2
3. 4 4. 5

17. ถ้า $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ และ $B = \{z - 2 \mid z \in A\}$ โดยที่ C คือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $A \cap B$ เป็นสับเซตของข้อใด

1. $\{(x + yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 9\}$
2. $\{(x + yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 64\}$
3. $\{(x + yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 65\}$
4. $\{(x + yi) \in C \mid x, y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 81\}$

18. ให้ k เป็นจำนวนจริง และ $f_k : R - \{2\} \to \mathbf{R}$

กำหนดโดย $f_k(x) = \dfrac{k|x^2 - 4|}{x - 2}$ ทุกค่า $x \in R - \{2\}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) สำหรับทุก $k \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x) = -4k$ และ $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x) = 4k$

(2) สำหรับทุก $k \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x) = |4k|$

(3) สำหรับทุก $k \in \mathbf{R}$ $\lim\limits_{x \to 2^+} f_k(x)$ ไม่มีค่า

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ
2. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ
3. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ
4. ข้อ (1) – (3) ผิดทุกข้อ

19. กำหนด $A = \{x \in R \mid \dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{1}{x+2}\}$ สมาชิกของ A ที่มีค่าต่ำที่สุดเท่ากับเท่าใด

1. 3
2. 2
3. 0
4. –3

20. ผลบวก $1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \cos^4 2x - \cos^5 2x + \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่าใด

1. $\dfrac{\cos^2 x}{2}$
2. $\dfrac{\sin^2 x}{2}$
3. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{2}$
4. $\dfrac{\tan^2 x}{2}$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 14.

**1. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์ข้อนี้ถือได้ว่า คำตอบเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่าที่เหมาะสมจะสามารถตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งได้ เช่น $U = \{1, 2\}$ , $A = \{1\}$ , $B = \{1\}$ และ $C = \phi$

1. $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = (\{1\} \cap \{2\}) \cup (\{1\} \cup \{1\})'$

$= \phi \cup \{2\}$

$= \{2\}$

$= B'$

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 1. อาจจะถูกต้อง

2. $(A - C) \cap (B - C) = (\{1\} - 0) \cap (\{1\} - \phi)$

$= \{1\} \cap \{1\}$

$= \{1\}$

แต่ $(A \cap B) - (A \cup C) = (\{1\} \cap \{1\}) - (\{1\} \cup \phi) = \{1\} - \{1\}$

$= \phi$

เพราะฉะนั้น สูตรในตัวเลือก 2. ผิดแน่นอน เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ถามว่าข้อใดผิด เราจึงเลือกข้อ 2. เป็นคำตอบได้เลยโดยไม่ต้องสนใจ 1. , 3. และ 4. อีก

**วิธีจริง** ข้อ 1. ถูก เพราะว่า $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = (A \cap B') \cup (A' \cap B')$

$= (A \cup A') \cap B'$

$= U \cap B'$

$= B'$

ข้อ 2. ผิด เพราะว่า $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (A \cap C')$

$= A \cap B \cap C'$

แต่ $(A \cap B) - (B \cup C) = (A \cap B) \cap (A \cup C)'$

$= (A \cap B) \cap (A' \cap C')$

$= \phi$

ซึ่ง $A \cap B \cap C'$ อาจไม่เป็นเซตว่างก็ได้ เช่น $A = \{1\}$ , $B = \{1\}$ และ $C = \phi$

จะได้ว่า $A \cap B \cap C' = \{1\} \neq \phi$

ข้อ 3. ถูก เพราะว่า $(A - C \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C')$

$$= A \cap B \cap C'$$

$$= (A \cap B) - C$$

ข้อ 4. ถูก เพราะว่า $A \cap (A \cup B) = A \subset A$

**2. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

เพราะว่าจำนวนเต็มบวกหรือลบ 2 จำนวนใด ๆ ต้องหา ห.ร.ม. ได้ เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 2.

เพราะว่า ห.ร.ม. (a , b) ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น ตัวเลือก 4.

เพราะว่า 72 หาร 450 ไม่ลงตัว เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. $(450 , 504) \neq 72$

เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีกแล้ว

**วิธีจริง แบบที่ 1** เพราะว่า ห.ร.ม. (–504 , 450) = ห.ร.ม. (504 , 450)

เพราะฉะนั้น เราจึงหา ห.ร.ม. (504 , 450)

เพราะว่า 504 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

และ 450 $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. (504 , 450) = 18

**แบบที่ 2** โดยขั้นตอนวิธีของยุคลิด

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 450 | 504<br>450 | 1 |
| 8 | 450<br>432 | 54 | |
| | 18 | 54<br>54 | 3 |

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. (504 , 450) = 18

3. ตอบ 3.

**แนวคิด** การนับสมาชิกของ A จำแนกเป็น 2 กรณี ดังนี้

**กรณีที่ 1** มีสมาชิกบางตัวใน {2 , 3 , 4 , 5} ส่งไปยัง a

เนื่องจาก {2 , 3 , 4 , 5} และ {a , b , c , d} เป็นเซตจำกัดที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จึงสามารถนับ

จำนวนฟังก์ชัน $f \in X$ ได้จากฟังก์ชัน g ซึ่ง $g : \{2 , 3 , 4 , 5\} \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} \{a , b , c , d\}$

การนับจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ของ g มีวิธีการนับดังนี้

**ขั้นที่ 1** 2 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 4 วิธี

**ขั้นที่ 2** 3 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 3 วิธี

**ขั้นที่ 3** 4 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 2 วิธี

**ขั้นที่ 4** 5 เลือกจับคู่กับสมาชิกของ B ได้ 1 วิธี

ดังนั้นมีฟังก์ชัน g ทั้งหมดเท่ากับ $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ฟังก์ชัน

เนื่องจาก $g \cup \{(1 , a)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

ดังนั้น f ที่นิยามโดย $f = g \cup \{(1 , a)\}$ จะเป็นสมาชิกของ X

เพราะฉะนั้น f ตามกรณีที่ 1 มีได้ทั้งหมด 24 ฟังก์ชัน

**กรณีที่ 2** ไม่มีสมาชิกใน {2 , 3 , 4 , 5} ส่งไปยัง a

พิจารณาการส่งค่าจาก {2 , 3 , 4 , 5} ไปทั่วถึง {b , c , d}

จะเห็นว่าจำนวนสมาชิกในเซต {2 , 3 , 4 , 5} มากกว่าจำนวนสมาชิกในเซต {b , c , d} อยู่ 1 ตัว จึงต้องมีสมาชิกสองตัวในเซต {2 , 3 , 4 , 5} ไปจับคู่กับสมาชิกในเซต {b , c , d} ตัวเดียวกัน จึงมีการพิจารณาดังนี้

**ขั้นที่ 1** เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก {2 , 3 , 4 , 5} ที่จะส่งค่าไปที่เดียวกันทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

**ขั้นที่ 2** สมาชิก 2 ตัวที่เลือกมาจากขั้นที่ 1 เลือกส่งค่าได้ 3 วิธี

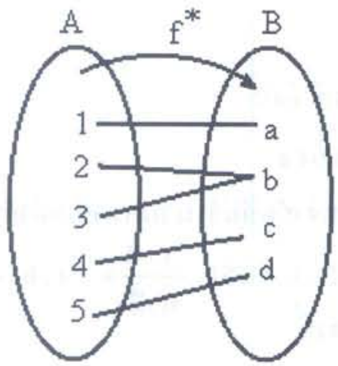
**ขั้นที่ 3** สมาชิกตัวถัดไปที่เหลือ เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

**ขั้นที่ 4** สมาชิกตัวสุดท้าย เลือกส่งค่าได้ 1 วิธี

สรุปมีจำนวนฟังก์ชันในกรณีที่ 2 ทั้งหมด $= 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36$

จากทั้งสองกรณีจะได้ว่า X มี จำนวนสมาชิก $= 24 + 36 = 60$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเราทราบว่า กรณีที่ 1 มีสมาชิก 24 ตัว แล้วแสดงว่าตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้ แต่ตัวเลือก 2. ยังไม่แน่ว่าจะถูกหรือไม่ เมื่อพิจารณาการส่งค่าบางแบบ เช่น




จะเห็นว่า $f^* \in X$ และ $f^*$ ไม่อยู่ในกรณีที่ 1 เพราะฉะนั้น $n(X) > 24$ แน่นอน
ดังนั้น ตัวเลือก 2. ผิดแล้ว เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่เหลือ 3. กับ 4. เดาจากสองตัวเลือกก็ยังดี

**4. ตอบ 2.**

**แนวคิด** 1. ผิดเช่น $f = \{(1, a), (2, b)\}$

$g = \{(1, a), (2, c)\}$

จะได้ $f \cup g = \{(1, a), (2, b), (2, c)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

เพราะว่า สับเซตของฟังก์ชันต้องเป็นฟังก์ชันด้วย

เพราะฉะนั้น เมื่อ $f \cap g \subset f$ และ $f - g \subset f$ จะได้ว่า $f \cap g$ และ $f - g$ เป็นฟังก์ชัน

สรุปได้ว่า 2. ถูก และ 3. ถูก

**หมายเหตุ** การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชัน และ $g \subset f$ แล้ว g เป็นฟังก์ชัน

ให้ $(x, y_1), (x, y_2) \in g$ ดังนั้น $(x, y_1), (x, y_2) \in f$

แต่ f เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น $y_1 = y_2$ เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชัน

**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด วิธีจริง** $f(x) = \sqrt{x+2}$, $D_f = [-2, \infty)$ และ $R_f = [0, \infty)$

$g(x) = x^2 - 2$, $D_g = R$ และ $R_g = [-2, \infty)$

**พิจารณา g o f**

เนื่องจาก $R_f \cap D_g = [0, \infty) \neq \phi$ ดังนั้น g o f มีความหมาย นอกจากนี้ $R_f \subset D_g$ จะได้ $D_{g \circ f} = D_f$

สำหรับ $x \in [-2, \infty)$ จะได้

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x+2}) = (\sqrt{x+2})^2 - 2 = x + 2 - 2 = x$$

จะได้ $(g \circ f)(x) = x$ , $D_{g \circ f} = R_{g \circ f}$

**พิจารณา f o g**

เนื่องจาก $R_g \cap D_f = [-2, \infty) \neq \phi$ ดังนั้น g o f มีความหมาย นอกจากนี้ $R_g \subset D_f$ จะได้ $D_{f \circ g} = D_g$

สำหรับ $x \in R$ จะได้ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 2) = \sqrt{x^2 - 2 + 2} = \sqrt{x^2} = |x|$

ดังนั้น $(f \circ g)(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ และ $R_{f \circ g} = [0, \infty)$

สรุป 1. ถูก เพราะเมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $(g \circ f)(x) = x$ และ $(f \circ g)(x) = x$

ดังนั้น $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x)$ ทุก $x \geq 0$

2. ผิด $R_{g \circ f} = [-2, \infty)$ และ $R_{f \circ g} = [0, \infty)$

3. ถูก

4. ถูก

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเราทราบว่า $R_f = [0, \infty)$ , $R = D_g$

แสดงว่า g o f มีความหมาย และ $(g \circ f)(x)$ หาค่าได้ทุก $x \in D_f$ นั่นคือ $D_{g \circ f} = D_f$ แน่นอน

ในทำนองเดียวกัน เมื่อ $R_g = [-2, \infty) = D_f$ แสดงว่า $(f \circ g)(x)$ หาค่าได้ทุก $x \in D_g$

นั่นคือ $D_{f \circ g} = D_g$ แน่นอน ขณะนี้ตัวเลือก 3. และ 4. ถูกต้อง เราจึงตัดทิ้งได้แล้ว

การได้คำตอบแบบเร็วที่สุดของข้อนี้ทำได้โดยการแทนค่ากับตัวเลขที่คิดง่าย ๆ เช่น $x = -1$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(1) = -1$$

ดังนั้น $-1 \in R_{g \circ f}$ แต่ $-1 \notin [0, \infty)$ เพราะฉะนั้น 2. ผิดแน่นอนเลือกได้เลย

**6. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** จากโจทย์ เพราะว่า $(-1, 1)$ และ $(1, 1)$ เป็นจุดโฟกัส เพราะฉะนั้นวงรีมีแกนเอกขนานแกน X จากตัวเลือกพบว่า

1. แกนเอกขนานแกน Y 2. แกนเอกขนานแกน Y

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

เพราะว่าจุดศูนย์กลางวงรีคือ $(0, 1)$ แต่ ตัวเลือก 3. จุดศูนย์กลางเป็น $(0, -1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** เมื่อรู้ว่า $F_1(-1\ ,\ 1)$ และ $F_2(1\ ,\ 1)$ เป็นโฟกัส

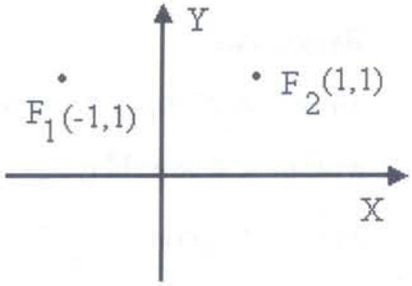
เพราะฉะนั้นแกนเอกขนานแกน X และ $c = 1$

เพราะว่าวงรีผ่านจุด $(0\ ,\ 0)$ ดังนั้น $b = 1$

ผลที่ตามมาคือ $a = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้นวงรีผ่านจุด $(-\sqrt{2}\ ,\ 1)$ และ $(\sqrt{2}\ ,\ 1)$

โดยการแทนค่าในตัวเลือกด้วย $x = \sqrt{2}$ และ $y = 1$




1. $4+1+4\sqrt{2} \neq 0$ 2. $4+1-4\sqrt{2} \neq 0$

3. $2+2+4 \neq 0$ 4. $2+2-4 = 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1.,2. และ 3. ตัดทิ้ง

**วิธีจริง** เนื่องจากจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่จุดโฟกัสทั้งสองคือ $(\frac{-1+1}{2}+\frac{1+1}{2})$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกึ่งกลางของจุดโฟกัสทั้งสองคือ จุด $(0\ ,\ 1)$ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส $c = 1$

สมการของวงรีอยู่ในรูป $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2})$ ...(1)

จาก $a^2 = b^2 + c^2$ แทนค่า $c = 1$ จะได้ $a^2 = b^2 + 1$

วงรีผ่าน $(0\ ,\ 0)$ ดังนั้นแทน x ด้วย 0 แทน y ด้วย 0 ในสมการ (1)

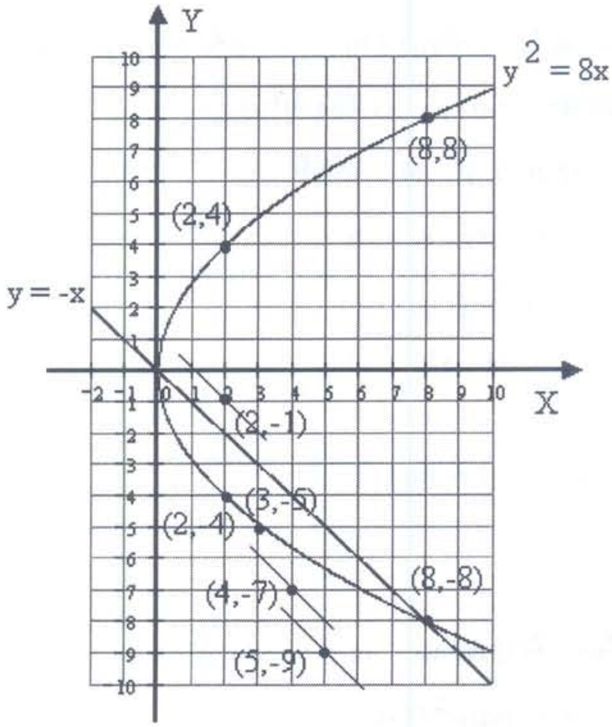
จะได้ $\frac{1}{b^2} = 1$ เพราะฉะนั้น $b = 1$ ดังนั้น $a^2 = 1+1 = 2$

สมการของวงรีคือ

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-1)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{(y-1)^2}{1} &= 1 \\ x^2+2y^2-4y+2 &= 2 \\ x^2+2y^2-4y &= 0 \end{aligned}$$

**7. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** ด้วยการเขียนกราฟของ $y^2 = 8x$ และ $y = -x$ บนช่วง $[0\ ,\ 8]$ เมื่อลากเส้นตรงขนานกับ $y = -x$ และผ่านจุด $(2\ ,\ -1)$ พบว่า เส้นตรงตัดพาราโบลา 2 จุด เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง เมื่อลากเส้นตรงขนานกับ $y = -x$ และผ่านจุด $(4\ ,\ -7)$ จะไม่สัมผัสกับพาราโบลา เราจึงตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง ในทำนองเดียวกันก็ตัดข้อ 4. ทิ้งได้ด้วย




**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** จาก $y^2 = 8x$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(8x)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{y}$$

ความชันเส้นสัมผัสพาราโบลาต้องเท่ากับความชันเส้นตรง $x + y = 0$

เพราะว่า $\frac{dy}{dx} = -1$

$$\frac{4}{y} = -1$$

$$y = -4$$

เมื่อ $y = -4$ จะได้ $x = 2$

เพราะฉะนั้นจุดบนพาราโบลาที่มีความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ $-1$ คือจุด $(2, -4)$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y - (-4) = (-1)(x - 2)$

$$x + y + 2 = 0$$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรง $x + y + 2 = 0$ ผ่านจุด $(3, -5)$

**วิธีจริง** เพราะว่า สมการเส้นตรงที่ขนานกับ $x + y = 0$ ต้องอยู่ในรูป $x + y = c$

ดังนั้น สมการเส้นสัมผัสพาราโบลา $y^2 = 8x$ ต้องอยู่ในรูป $x + y = c$

แทนค่า $x = c - y$ ลงในสมการ $y^2 = 8x$ จะได้ $y^2 = 8(c - y)$

หรือ $y^2 + 8y - 8c = 0$

y มีรากค่าเดียวกันเมื่อ $8^2 - 4(1)(-8c) = 0$

$$64 + 32c = 0$$

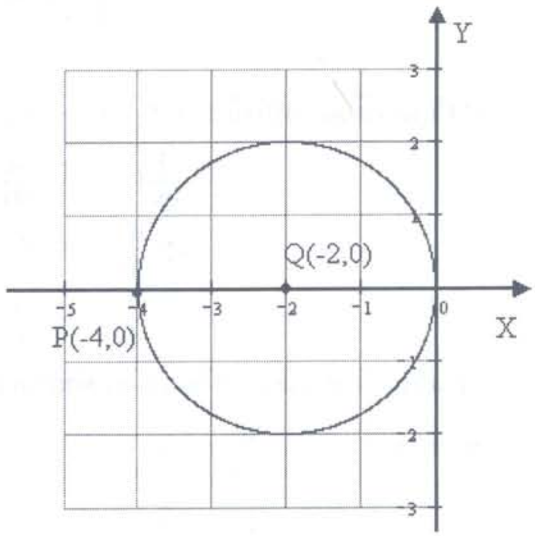
$$c = -2$$

สมการเส้นสัมผัสคือ $x + y = -2$ ผ่านจุด $(3, -5)$

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เขียนวงกลม $x^2 + y^2 + 4x = 0$

$(x + 2)^2 + y^2 = 4$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง $(-2, 0)$ และรัศมี 2 เลือกหาจุด Q ที่สอดคล้องตามโจทย์เช่นเมื่อ $P(-4, 0)$ จะได้ $Q(-2, 0)$




ต่อไปแทนค่า $x = -2, y = 0$ ในตัวเลือก

1. $4 + 0 - 4 = 0$
2. $4 + 0 + 4 \neq 0$
3. $4 + 0 - 16 \neq 0$
4. $4 + 0 + 16 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $x^2 + y^2 + 4x = 0$ ...(1)

ให้ $(x, y)$ เป็นพิกัดของจุด Q เพราะฉะนั้นพิกัดของจุด P คือ $(2x, 2y)$

เพราะว่า P อยู่บนวงกลมของสมการ (1) ดังนั้นแทน x ด้วย 2x และแทน y ด้วย 2y ในสมการ (1)

จะได้ $(2x)^2 + (2y)^2 + 4(2x) = 0$

$$4x^2 + 4y^2 + 8x = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x = 0$$

**9. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เราสามารถนำเงื่อนไขของโจทย์คือ a : b = 2 : 3 มาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ดังนี้

| ตัวเลือก | a | b | a : b | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 6 | 9 | 2 : 3 | |
| 2. | 9 | 6 | 3 : 2 | **ตัดตัวเลือก 2.** |
| 3. | $\sqrt{117}$ | $\sqrt{50}$ | $\sqrt{117} : \sqrt{50}$ | **ตัดตัวเลือก 3.** |
| 4. | $\sqrt{50}$ | $\sqrt{117}$ | $\sqrt{50} : \sqrt{117}$ | **ตัดตัวเลือก 4.** |

**วิธีจริง** จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ (–3 , 1)

โฟกัสจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ $(-3 , -3\sqrt{13} , 1)$ และแกนตามขวางขนานกับแกน X

เพราะฉะนั้นสมการอยู่ในรูป $\frac{(x+3)^2}{x^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1$

เนื่องจาก $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ , $a^2 + b^2 = c^2$ และ $c = 3\sqrt{13}$ จะได้ $a^2 + \frac{9}{4}a^2 = 117$

$$a^2 = 36$$

$$a = 6$$

ดังนั้น b = 9 เพราะฉะนั้น สมการของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+3)^2}{36} - \frac{(y-1)^2}{81} = 1$

**10.ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

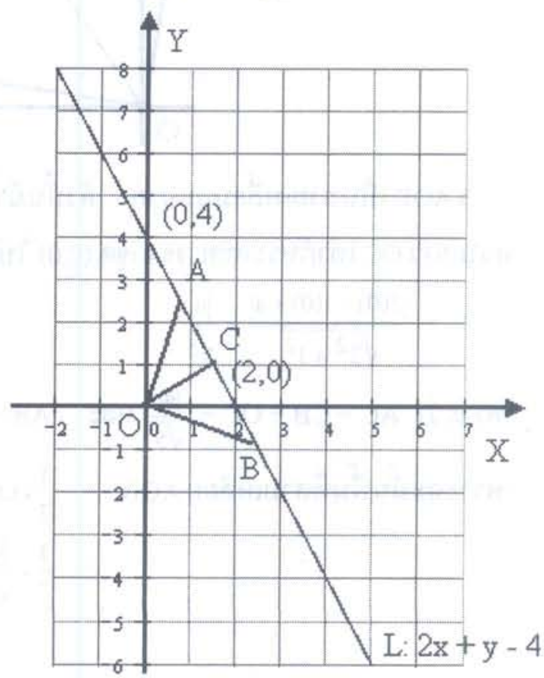
ข้อนี้เข้าลักษณะโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ดังนั้นโดยการวาดรูปประกอบและการวัดด้วยไม้บรรทัดก็จะสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้ เช่น a = 4 จะได้ 2x + y = 4

ลาก OC ตั้งฉากกับ L

วัดระยะตั้งฉากจาก O ไปยังเส้นตรง L ได้ 1.8

เพราะว่า OA = OB และ $A\hat{O}B = 90^\circ$

ดังนั้นมีวงกลมผ่านจุด O , A และ B



โดยมี C เป็นจุดศูนย์กลาง

เพราะฉะนั้น AB ยาวเท่ากับ 2 เท่าของ OC

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}$.ฐาน . สูง

$= \frac{1}{2}.AB.OC$

$= \frac{1}{2}(1.8)(1.8) = 3.24$

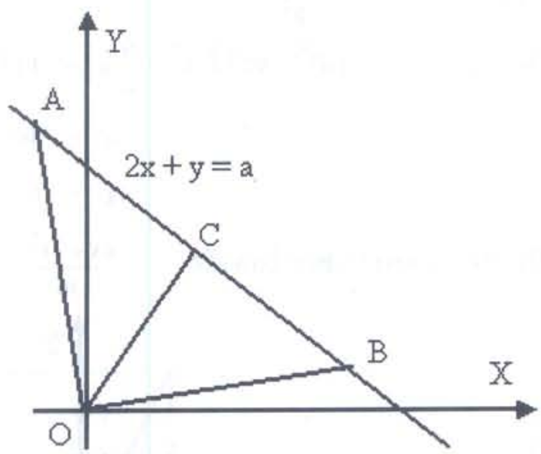
เมื่อ a = 4 แทนค่าในตัวเลือกจะได้

1. 8　　2. 5.33

3. 4　　4. 3.2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง**




$\Delta$ AOB เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก　ดังนั้นมีวงกลมผ่านจุด A , O , B

ความยาว OC เท่ากับระยะทางจากจุด (0,0) ไปยังเส้นตรง 2x + y = a มีค่าเท่ากับ

$$= \frac{|2(0)+1(0)+a|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$$

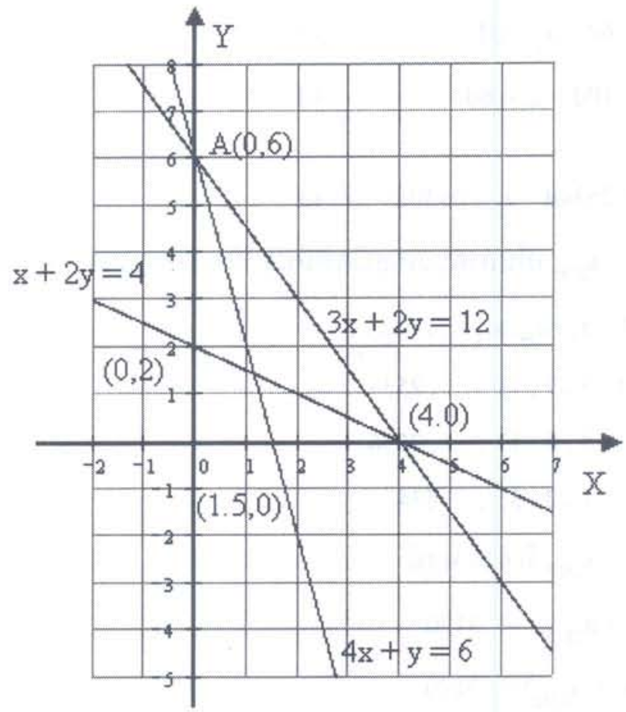
เพราะว่า $AC = CB = OC = \frac{|a|}{\sqrt{5}}$ และ $AB = \frac{2|a|}{\sqrt{5}}$

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม AOB $= \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{|a|}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2|a|}{\sqrt{5}} = \frac{a^2}{5}$$

**11.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์ทำนองนี้ควรจะวาดกราฟดูก่อน




เส้นตรง ; $3x + 2y = 12$ และ เส้นตรง AM ; $4x + y = 6$

ตัดกันที่จุด (0 , 6) ดังนั้น A มีพิกัดเป็น (0 , 6) แทนค่า $x = 0$ , $y = 6$ ในตัวเลือกทุกตัวจะได้

1. $0 - 6 + 6 = 0$
2. $0 - 6 + 8 \neq 0$
3. $0 - 12 + 6 \neq 0$
4. $0 - 12 + 8 \neq 0$

เพราะว่า A(0 , 6) ต้องอยู่บนเส้นตรงในตัวเลือก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** สมการของเส้นตรง AB คือ $3x + 2y = 12$ ...(1)

สมการของเส้นตรง AM คือ $4x + y = 6$ ...(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = 0$ และ $y = 6$ ดังนั้นพิกัดของจุด A คือ (0 , 6)

เส้นตรง AC ตั้งฉากกับเส้นตรง BM และเส้นตรง MB มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{2}$

ดังนั้นเส้นตรง AC มีสมการอยู่ในรูป $y = 2x + c$

เนื่องจากจุด A(0 , 6) อยู่บนเส้นตรง AC จะได้ว่า $6 = 2(0) + c$ นั่นคือ $c = 6$

ดังนั้น เส้นตรง AC มีสมการเป็น $y = 2x + 6$ หรือ $2x - y + 6 = 0$

**12.ตอบ 3.**

**แนวคิด** ให้ d เป็นผลต่างร่วมของลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$

เพราะว่า $a_7 - a_3 = a_1 + 6d - a_1 - 2d = 4d$

$a_{11} - a_7 = a_1 + 10d - a_1 - 6d = 4d$

$\vdots$

$a_{2535} - a_{2531} = a_1 + 2534d - a_1 - 2530d = 4d$

เพราะฉะนั้น $a_3, a_{7.} a_{11}, \ldots, a_{2535}$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเป็น $a_3$ และผลต่างร่วมเท่ากับ 4d

เราพิจารณาจำนวนพจน์ของ $a_3, a_7, a_{11}, \ldots, a_{2535}$

เทียบเท่ากับจำนวนพจน์ของ $3, 7, 11, \ldots, 2535$

(1 บวกตลอด) $4, 8, 12, \ldots, 2536$

(4 หารตลอด) $1, 2, 3, \ldots, 634$

เพราะฉะนั้น $a_3, a_7, a_{11}, \ldots, a_{2535}$ มี 634 พจน์

ดังนั้น $a_3 + a_7 + a_{11} + \ldots + a_{2535} = 3170$

$$\frac{634}{2}(a_3 + a_{2535}) = 3170$$

$$a_3 + a_{2535} = 10$$

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 2534d) = 10$$

$$a_1 + 1268d = 5$$

เพราะฉะนั้น $a_{1269} = 5$

เพราะว่า $a_{2088} = a_1 + 2087d = a_1 + 1268d + 819d = 5 + 819d$

เพราะฉะนั้น $a_{1269} + a_{1270} + \ldots + a_{1308} = a_{2088}$

$$5 + 819d = \frac{40}{2}(a_{1269} + a_{1308}) = 20(5 + a_1 + 11307d)$$

$$= 20(5 + a_1 + 1268d + 39d) = 20(5 + 5 + 39d) = 200 + 780d$$

$$39d = 195$$

$$d = 5$$

เพราะฉะนั้น $a_1 = 5 - 1268d = 5 - 1268(5) = -6335$

**13.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** จากลักษณะของสมการ $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan(\frac{1}{2})$ จะมีราก 2 ตัว นั้นคือ x และ –x เป็นรากของสมการผลคูณของราก 2 ตัวนั้นต้องเป็นจำนวนลบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** $\arctan(3x^2+1) = 2\arctan\frac{1}{2}$

$\tan(\arctan(3x^2+1)) = \tan(2\arctan\frac{1}{2})$

เพราะฉะนั้น $3x^2+1 = \tan(2\arctan\frac{1}{2}) = \dfrac{2\tan(\arctan\frac{1}{2})}{1-(\tan(\arctan\frac{1}{2}))^2} = \dfrac{2(\frac{1}{2})}{1-(\frac{1}{2})^2} = \dfrac{4}{3}$

ดังนั้น

$$3x^2+1 = \frac{4}{3}$$

$$x^2 = \frac{1}{9}$$

$$x = \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$$

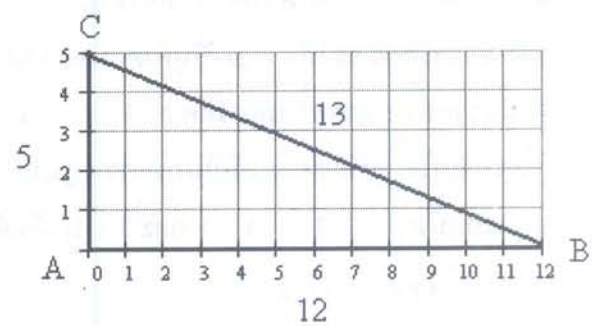
เพราะฉะนั้น ผลคูณของคำตอบของสมการข้างต้นคือ $-\frac{1}{9}$

**14.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก**

ลองใช้ไม้โปรช่วยในการหาคำตอบบ้าง

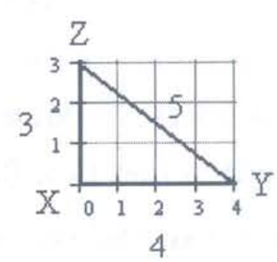
สร้างสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังรูป




เพราะว่า $\sin\hat{B} = \dfrac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \dfrac{5}{13}$

จะได้ $\hat{B} = \arcsin(\frac{5}{13})$ โดยการวัดมุมจะได้ $\hat{B} = 21°$

สร้างสามเหลี่ยม XYZ ดังรูป



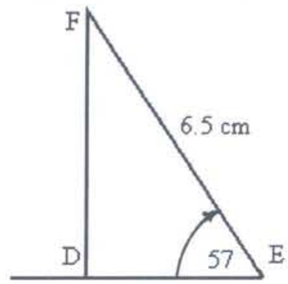

เพราะว่า $\cos\hat{Y} = \dfrac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \dfrac{4}{5}$

จะได้ $\hat{Y} = \arccos(\frac{4}{5})$ โดยการวัดมุมจะได้ $\hat{Y} = 36°$

$\hat{B} + \hat{Y} = 21° + 36° = 57°$

สร้างสามเหลี่ยม DEF โดย $\hat{D} = 90°$ EF ยาว 6.5 และ $\hat{E} = 57°$ ต่อไปวัดความยาว FD ได้ 5.6 cm.

เพราะฉะนั้น $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5})$




$= \sin(\hat{B} + \hat{Y}) = \sin 57° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$ (จาก $\Delta$ DEF)

$= \frac{5.6}{6.5}$ สรุปเลือกข้อ 3. ดีที่สุด

**วิธีจริง** ให้ $\arcsin\frac{5}{13} = \alpha$ และ $\arccos\frac{4}{5} = \beta$

พิจารณา $\alpha$ และ $\beta$ เป็นมุมแหลมที่เป็นบวก $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ และ $\cos\beta = \frac{4}{5}$

$$\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{4}{5}) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= \sin\alpha\cos\beta + \sqrt{1-\sin^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta}$$

$$= (\frac{5}{13})(\frac{4}{5}) + \sqrt{1-\frac{25}{169}}\sqrt{1-\frac{16}{25}} = (\frac{5}{13})(\frac{4}{5}) + (\frac{12}{13})(\frac{3}{5}) = \frac{56}{65}$$

**15. ตอบ 2.**

**แนวคิด** เนื่องจากสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้นเมื่อ $2 + i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $2 - i$ เป็นคำตอบของสมการ และเมื่อ $1 - 3i$ เป็นคำตอบของสมการ จะได้ $1 + 3i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

ดังนั้นรากทั้ง 4 ตัวของสมการคือ $2 + i$ , $2 - i$ , $1 - 3i$ และ $1 + 3i$

เนื่องจากสมการที่กำหนดให้เป็นสมการพหุนามกำลัง 4

เพราะฉะนั้น $2 + i$ , $2 - i$ , $1 - 3i$ และ $1 + 3i$ เป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ และ

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

$$= (x-(2+i))(x-(2-i))(x-(1-3i))(x-(1+3i))$$

$$= (x^2-4x+5)(x^2-2x+10) = x^4-6x^3+23x^2-50x+50$$

นั่นคือ $a = -6$ , $b = 23$ , $c = -50$ และ $d = 50$ สรุป $a + b + c + d = 17$

**วิธีลัด** เพราะว่า $2 + i$ และ $1 - 3i$ เป็นราก เพราะฉะนั้น $2 - i$ และ $1 + 3i$ เป็นราก

ให้ $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ จะได้ $f(x) = c$ เพราะว่า $f(1) = 1 + a + b + c + d$

เพราะฉะนั้น $a + b + c + d = f(1) - 1 = (1-(2+i))(1-(2-i))(1-(1-3i))(1-(1+3i))$

$$= (-1-i)(-1+i)(3i)(-3i) - 1 = (1+1)(9) - 1 = 17$$

**16. ตอบ 4.**

**แนวคิด** เขียน $z_1$ และ $z_2$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว $z_1 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$\tan\theta_1 = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{1}{2})} = (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{-2}{1}) = -\sqrt{3}$ เพราะว่า $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ อยู่ในควอรันท์ที่ 2

เพราะฉะนั้น $\theta_1 = 120°$ , $r_1 = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$ และ $z_1 = \cos120° + i\sin120°$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $z_2 = \cos240° + i\sin240°$

$$a = z_1^5 + z_2^5 = (\cos120° + i\sin120°)^5 + (\cos240° + i\sin240°)^5$$
$$= (\cos600° + i\sin600°) + (\cos1200° + i\sin1200°)$$
$$= (\cos240° + i\sin240°) + (\cos120° + i\sin120°)$$
$$= -\cos60° - i\sin60° - \cos60° + i\sin120°) = -2\cos60° = -1$$

$$b = z_1^6 + z_2^6 = (\cos120° + i\sin120°)^6 + (\cos240° + i\sin240°)^6$$
$$= (\cos720° + i\sin720°) + (\cos1440° + i\sin1440°)$$
$$= \cos0° + i\sin0° + \cos0° + i\sin0° = 1+0+1+0 = 2$$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = (-1)^2 + (2)^2 = 5$

**วิธีลัด** เพราะว่า $z_1 = \cos120° + i\sin120°$ จะได้ว่า $z_1^3 = \cos360° + i\sin360° = 1$

$z_2 = \cos240° + i\sin240°$ จะได้ว่า $z_2^3 = \cos720° + i\sin720° = 1$

$z_1z_2 = \cos360° + i\sin360° = 1$

เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 = (z_1^5 + z_2^5) + (z_1^6 + z_2^6) = ((z_1^3 + z_1^2 + z_2^3 + z_2^2)^2 + (1+1)^2$

$$= (z_1^2 + z_2^2)^2 + 4 = z_1^4 + 2z_1^2z_2^2 + z_2^4 + 4$$
$$= z_1 + 2(1) + z_2 + 4 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i + 2 - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 4 = 5$$

**17 ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ให้ $z = x + yi$ ; $x, y \in \mathbf{R}$

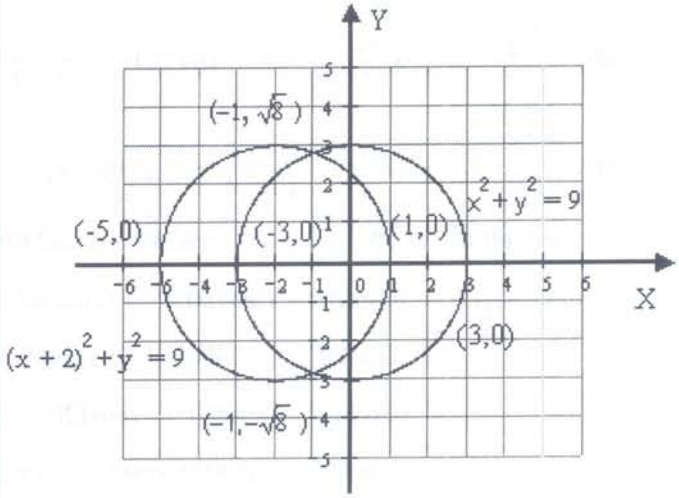
เพราะว่า $|z| = 3$ เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 9$

ดังนั้นเซตของจุดใน $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ คือ จุดบนวงกลมรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ (0 , 0)

เมื่อ $z \in A$ จะได้ว่า $z - 2$ เป็นการเลื่อนจุดทุกจุดบนเซต A ไปทางซ้ายมือ 2 หน่วย นั่นคือจุดในเซต B คือจุดบนวงกลม รัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ $(-2, 0)$ จุดตัดของ A และ B ได้จากการแก้สมการ

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$(x+2)^2 + y^2 = 9$$




ได้จุดตัดเป็น $(-1, \sqrt{8})$ และ $(-1, -\sqrt{8})$

เพราะว่า $(-1)^4 + (\sqrt{8})^4 = 1 + 64 = 65$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

**วิธีจริง** ให้ $z = (a, b)$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง

จะได้ว่า $|z| = 3$ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$

หรือ $|z| = 3$ ก็ต่อเมื่อ $a^2 + b^2 = 9$

ดังนั้น $A = \{(a, b) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid a^2 + b^2 = 9\}$

พิจารณา $(c, d) \in B$ ก็ต่อเมื่อ $(c, d) = (a - 2, b)$ และ $(a, b) \in A$

ก็ต่อเมื่อ $c = a - 2$ และ $d = b$ และ $a^2 + b^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $(c + 2)^2 + d^2 = 9$

ดังนั้น $B = \{(c, d) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid (c + 2)^2 + d^2 = 9\}$

พิจารณา $(x, y) \in A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ $(x, y) \in A$ และ $(x, y) \in B$

ก็ต่อเมื่อ $x^2 + y^2 = 9$ และ $(x + 2)^2 + y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $x^2 + y^2 = 9$ และ $x^2 + 4x + 4 + y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $4x + 4 = 0$ และ $x^2 + y^2 = 9$

ก็ต่อเมื่อ $x = -1$ และ $y = \pm\sqrt{8}$

เพราะฉะนั้น $A \cap B = \{(-1, \sqrt{8}), (1, -\sqrt{8})\}$

เนื่องจาก $x^4 + y^4 = 65$ สำหรับทุก ๆ $(x, y)$ ใน $A \cap B$

ดังนั้น $A \cap B$ เป็นสับเซตของ $\{x + yi \in C \mid x^4 + y^4 = 65\}$

**18. ตอบ 1.**

**แนวคิด วิธีจริง** เพราะว่า $f_k(x) = \dfrac{k|x^2-4|}{x-2} = \dfrac{k|x-2|\cdot|x+2|}{x-2} = \begin{cases} k|x+2| & ,x>2 \\ -k|x+2| & ,x<2 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} -k|x+2| = -4k$

และ $\lim\limits_{x\to 2^+} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} k|x+2| = 4k$ เพราะฉะนั้น ข้อ (1) ถูกต้อง

นอกจากนี้จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to 2^-} f_k(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f_k(x)$ ก็ต่อเมื่อ $-4k = 4k$

ก็ต่อเมื่อ $k = 0$

เพราะฉะนั้น ข้อ (2) และข้อ (3) ผิด

**การตัดตัวเลือก** โจทย์ข้อนี้เป็นสูตรในพจน์ของ k อีกแล้ว

เลือก $k = 0$ จะได้ $f_k(x) = f_o(x) = 0$ ทุกค่า $x \in R-\{2\}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f_o(x) = 0$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น (3) ผิด ซึ่งทำให้เราต้องเลือก 3. ทิ้งได้

เลือก $k = 1$ จะได้ $f_k(x) = f_1(x) = \dfrac{k|x^2-4|}{x-2}$ ทุกค่า $x \in R-\{2\}$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{k|x^2-4|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{k|x-2|\cdot|x+2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -|x+2| = -4 \neq |4(1)|$

เพราะฉะนั้น (2) ผิด ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ ตอนนี้ก็เหลือตัวเลือก 1. กับ 4. เท่านั้นเดาจาก 2 ข้อมีโอกาสถูก 50% ย่อมดีกว่าเดาจาก 4 ข้อซึ่งมีโอกาสถูกแค่ 25% แค่นั้นเอง

**19. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าเพื่อดูว่า 3 , 2 , 0 , –3 อยู่ใน A หรือไม่

เพราะว่า $\dfrac{2}{3+1} = \dfrac{1}{2} \geq \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{3+2}$ เพราะฉะนั้น $3 \in A$

เพราะว่า $\dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3} \not\geq \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2+2}$ เพราะฉะนั้น $2 \notin A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\dfrac{2}{0+1} = 2 \geq \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{x+2}$ เพราะฉะนั้น $0 \in A$

เพราะว่า $\dfrac{2}{-3+1} = -1 \geq -1 = \dfrac{1}{-3+2}$ เพราะฉะนั้น $-3 \in A$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง**

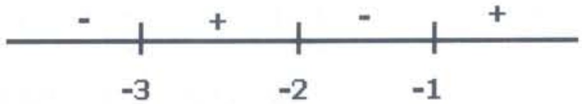
$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{2(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{2x+4-x-1}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} \geq 0$$




เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid \frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}\} = [-3\ ,-2) \cup (-1, \infty)$ สมาชิกของ A ที่มีค่าต่ำที่สุด $= -3$

**20. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ จะได้ว่า $1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \cos^4 2x - \cos^5 2x + \ldots$

$$= 1 - \cos 2(\frac{\pi}{4}) + \cos^2 2(\frac{\pi}{4}) - \cos^3 2(\frac{\pi}{4}) + \cos^4 2(\frac{\pi}{4}) - \cos^5 2(\frac{\pi}{4}) + \ldots \quad = 1$$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $\frac{\cos^2 x}{2} = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{4}$

2. $\frac{\sin^2 x}{2} = \frac{\sin^2(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{4}$

3. $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2} = \frac{\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{4})}{2} = 1$

4. $\frac{\tan^2 x}{2} = \frac{\tan^2(\frac{\pi}{4})}{2} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \cos^4 2x - \cos^5 2x + \ldots \quad = \frac{1}{1-(-\cos 2x)}$

$$= \frac{1}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2(\frac{1+\cos 2x}{2})} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2}$$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 15.

1. พื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรงสามเส้นที่มีสมการ $x + y + 1 = 0$ , $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 16      2. 18

   3. 20      4. 22

2. กำหนดให้ $L(x, y) = 2x + 6y + 412$ และ x, y สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$y \leq 15$$
$$x + y \geq 10$$
$$y - x \leq 5$$
$$5x - y \leq 45$$

   แล้ว L(x, y) มีค่าน้อยสุดอยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงคู่ใดต่อไปนี้

   1. $y = 15$ และ $y - x = 5$      2. $y = 15$ และ $5x - y = 45$

   3. $x + y = 10$ และ $y - x = 5$      4. $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

3. กำหนดให้ $\bar{u} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (1) $|\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{u} - \bar{v}|$

   (2) $5\bar{u} + 2\bar{v} = 29\bar{i}$

   (3) $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. เป็นจริงเพียงข้อความเดียว      2. เป็นจริงเพียงสองข้อความ

   3. เป็นจริงทั้งสามข้อความ      4. เป็นเท็จทั้งสามข้อความ

4. กำหนดให้จุด A(0 , 1) , B(3 , 2) และ C(2 , 3) พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (1) $A\hat{B}C = 60^\circ$

   (2) $A\hat{C}B = 90^\circ$

   (3) พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC = 2 ตารางหน่วย

   (4) เส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ABC = $\sqrt{2}(3+\sqrt{5})$ หน่วย

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) และ (3) เท่านั้นเป็นจริง
3. ข้อ (2) (3) และ (4) เท่านั้นเป็นจริง
4. ทั้งสี่ข้อความต่างก็เป็นจริง

5. ใน $\Delta$ ABC ถ้าอัตราส่วน cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12
แล้ว sinA : sinB : sinC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 : 9 : 2      2. 3 : 2 : 1
3. 9 : 7 : 5      4. 6 : 5 : 4

6. arcsin(cos(arcsinx)) + arccos(sin(arccosx)) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0      2. 1
3. $\frac{\pi}{2}$      4. $\frac{\pi}{4}$

7. กล่องใบหนึ่งมีเหรียญอยู่ 3 ชนิด ชนิดที่ 1 มี 3 เหรียญ แต่ละเหรียญมีหน้าหัวทั้ง 2 ด้าน ชนิดที่ 2 มี 4 เหรียญ แต่ละเหรียญมีหน้าก้อยทั้ง 2 ด้าน ชนิดที่ 3 มี 2 เหรียญแต่ละเหรียญเป็นเหรียญปกติมาตรฐาน คือมีหน้าหัวและหน้าก้อยอย่างละ ด้าน และโอกาสขึ้นหน้าหัวและหน้าก้อยเท่ากัน ถ้าสุ่มหยิบเหรียญจากกล่องใบนี้ 1 เหรียญ แล้วโยนเหรียญนั้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว

1. $\frac{4}{9}$      2. $\frac{5}{9}$
3. $\frac{4}{18}$      4. $\frac{5}{18}$

8. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน n ลูก 1 ครั้ง
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม j จำนวน $n_j$ ลูก (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = n$

1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n\ 6!\ n!}$
2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6!\ n!}$
3. $\frac{n!}{6^n\ 6!\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$
4. $\frac{n!}{6^n\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

9. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าดังนี้ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ค่ามัธยฐาน เมื่อ n เป็นเลขคู่ คือ $3(2^{-\frac{n}{2}-2})$

(2) ค่ากึ่งกลางพิสัย คือ $\frac{2^n+2}{2^{n+2}}$

(3) ค่าเฉลี่ยเลขคณิต คือ $\frac{2^n-1}{n^2 \cdot 2^n}$

(4) ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต คือ $2^{-(\frac{n+1}{2})}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. เป็นจริงเพียงข้อความเดียว
2. เป็นจริงเพียงสองข้อความ
3. เป็นจริงเพียงสามข้อความ
4. เป็นจริงทั้งสี่ข้อความ

10. นักเรียนห้องหนึ่งมี 60 คน เป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน ในการสอบวิชาภาษาไทย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนหญิงเป็น 3 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชาย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนหญิงและของคะแนนนักเรียนชายเท่ากับ 5 และ 4 ตามลำดับ ความแปรปรวนรวมมีค่าอยู่ระหว่าง 16 และ 25 คะแนน คะแนนแต่ละกลุ่มมีการแจกแจงแบบปกติ ให้ $x_1$, $x_2$, $x_3$ แทนคะแนนที่เป็น ตำแหน่งเปอร์เซนต์ไทล์ที่ 95 ของคะแนนนักเรียนหญิง ของคะแนนนักเรียนชายและของคะแนนนักเรียนทั้งห้องตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x_1 < x_2 < x_3$
2. $x_1 < x_3 < x_2$
3. $x_2 < x_3 < x_1$
4. $x_3 < x_2 < x_1$

11. กำหนดให้ A, B, C, D และ E เป็นรูปแบบของประพจน์ ถ้า A และ B ต่างก็มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงข้อใดต่อไป

1. $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
2. $(E \vee D) \leftrightarrow (A \vee \sim C)$
3. $(A \vee \sim E) \leftrightarrow (E \vee \sim D \vee B)$
4. $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge E)$

12. ผลบวกของค่า x ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ $2^{\frac{-2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+\ldots} = 0$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1, -\frac{2}{3})$
2. $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$
3. $(\frac{2}{3}, 1)$
4. $(1, 3)$

13. ถ้า x แ ละ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $2^{x+y} + i(x - y) = 3 + 2i$

แล้ว $4^x + 4^y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{4}$
2. 6
3. 12
4. $\frac{51}{4}$

14. ให้ $a_n = e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})}$ และ $b_n = \log_{\frac{1}{3}}(a_n)$ ทุก $n \in N$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

15. ให้ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{\frac{1}{2}} a)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
3. มี $x \in R$ ที่ $\sec x = a$
4. ไม่มี $x \in R$ ที่ $e^x = a$

16. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\right] = 1$

(2) $\lim_{x \to -2^-} \frac{|x^2 - 4| + |x + 2|}{x^2 - 3x - 10} = \frac{5}{7}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

17. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ และ $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(2) g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

18. ให้ $y = 3^{\ln(x^2+1)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ คือข้อใด

1. $\frac{2x\, 3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
2. $\frac{3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
3. $\frac{2x(\ln 3)\, 3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
4. $\frac{2x\, 3^{\ln(x^2+1)}}{(x^2+1)\, \ln 3}$

19. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\, dx = \pi$

(2) $\int_{0}^{1} (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\, dx = \frac{1}{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

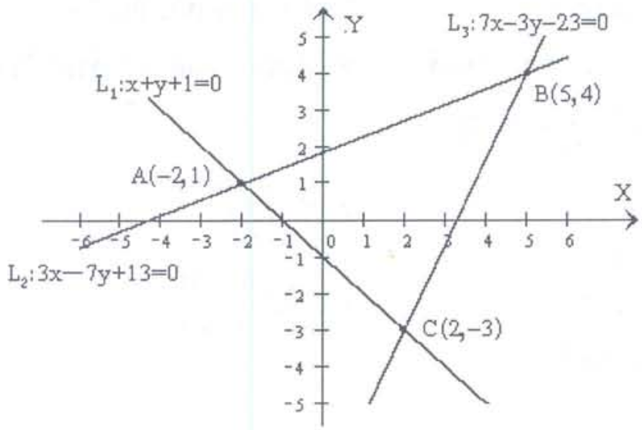
20. ถ้าวงกลมผ่านจุด A(2, –2) และ B(3, 4) มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ แล้วสมการของวงกลมคือข้อใดต่อไปนี้

1. $(2x-11)^2 + (2y+7)^2 = 58$
2. $(2x+7)^2 + (2y-11)^2 = 346$
3. $(10x-7)^2 + (10y-13)^2 = 1258$
4. $(3x-5)^2 + (3y-1)^2 = 50$

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 15.

**1. ตอบ 3.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** วาดรูปเส้นตรงตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทาง




วาดรูปโดยใช้สเกล 1 cm / หน่วยเขียนเส้นตรง $L_1$ , $L_2$ และ $L_3$ โดยไม่ต้อง **คำนวณหาจุดตัด** เมื่อได้จุดตัดแล้ววัดระยะทาง AB และความสูงด้วยไม้บรรทัดได้ AB = 7.6 และ h = 5.3

ดังนั้นพื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}(7.6)(5.3) = 20.14$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งดีกว่า

**วิธีจริง** คำนวณหาจุดตัดของเส้นตรง

จุดตัด $L_1$ และ $L_2$ ได้จากการแก้สมการ $x + y + 1 = 0$ ....(1)

$3x - 7y + 13 = 0$ ....(2)

ได้จุดตัดเป็น A(−2 , 1)

จุดตัด $L_2$ และ $L_3$ ได้จากการแก้สมการ $3x - 7y + 13 = 0$ ....(2)

$7x - 3y - 23 = 0$ ....(3)

ได้จุดตัดเป็น B(5 , 4)

จุดตัด $L_1$ และ $L_3$ ได้จากการแก้สมการ $x + y + 1 = 0$ ....(1)

$7x - 3y - 23 = 0$ ....(3)

ได้จุดตัดเป็น C(2 , −3)

**การหาพื้นที่ $\Delta$ ABC วิธีที่ 1**

ความยาว $AB = \sqrt{(5+2)^2+(4-1)^2} = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

ความสูงจากจุด C มายังแนว AB = ระยะทางจากจุด C ไปยังเส้นตรง $L_2$

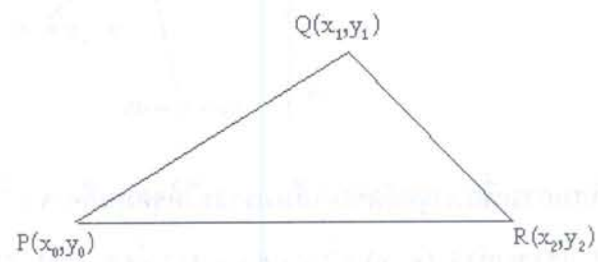
$h$ = ระยะทางจาก $(2\ ,-3)$ ไปยัง $L_2 : 3x - 7y + 13 = 0$

$$= \frac{|3(2)-7(-3)+13|}{\sqrt{3^2+(-7)^2}}$$

$$= \frac{40}{\sqrt{58}}$$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2}(AB)(h) = \frac{1}{2}(\sqrt{58})(\frac{40}{\sqrt{58}}) = 20$

**การหาพื้นที่ $\Delta$ ABC วิธีที่ 2**




พื้นที่ $\Delta PQR = \left|\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{bmatrix}\right|$

เพราะฉะนั้น พื้นที่ $\Delta ABC = \left|\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 5-(-2) & 4-1 \\ 2-(-2) & -3-1 \end{bmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}\right| = |\frac{1}{2}(-28-12)|$

$= 20$

**2. ตอบ 4.**

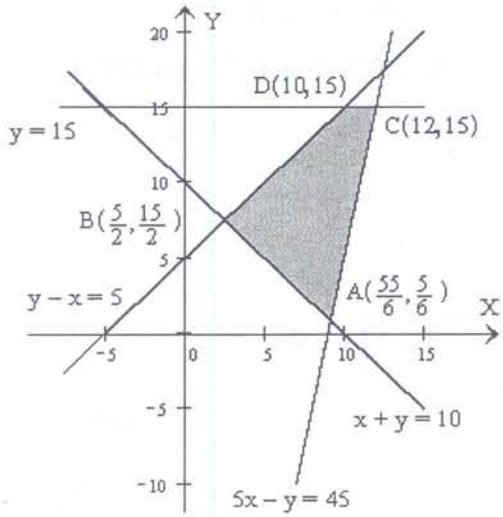
**แนวคิด การตัดตัวเลือก** หาจุดตัดของเส้นตรงแต่ละตัวเลือกแล้วดูค่า L

| ตัวเลือก | จุดตัด | 2x + 6y |
|---|---|---|
| 1. $y = 15$ และ $y - x = 5$ | D (10 , 15) | 110 |
| 2. $y = 15$ และ $5x - y = 45$ | C (12 , 15) | 114 |
| 3. $x + y = 10$ และ $y - x = 5$ | B $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$ | 50 |
| 4. $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$ | A $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$ | 23.3 |

เพราะว่า 412 เป็นค่าคงตัว เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะค่า 2x + 6y ก็พอ

สรุป L มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

**วิธีจริง** เขียนกราฟและหาจุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลย




โดยการแก้สมการเพื่อหาจุดตัดของเส้นตรงจะได้จุดมุมคือ A $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$ , B $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$ , C (12 , 15) และ D (10 , 15) หาค่า L (x , y) = 2 x + 6 y + 412 ที่จุด A , B , C , D

| (x , y) | 2x + 6y | L = 2x + 6y + 412 |
|---|---|---|
| A $(\frac{55}{6},\frac{5}{6})$ | $\frac{140}{6}$ | 435.33 |
| B $(\frac{5}{2},\frac{15}{2})$ | 50 | 462 |
| C (12 , 15) | 114 | 526 |
| D (10 , 15) | 110 | 522 |

เพราะฉะนั้น L มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 435.3 เมื่อ $x = \frac{55}{6}$ และ $y = \frac{5}{6}$ ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข x + y = 10 และ 5x – y = 45 เพราะว่า 412 เป็นค่าคงตัว เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะค่า 2x + 6y ก็พอ

สรุป L มีค่าต่ำสุดเมื่อ x + y = 10 และ 5x – y = 45

**3. ตอบ 3.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ (1)** $\bar{u} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$ , $\bar{v} = 2\bar{i} + 5\bar{j}$

$|\bar{u} + \bar{v}| = |(5\bar{i} - 2\bar{j}) + (2\bar{i} + 5\bar{j})| = |7\bar{i} + 3\bar{j}| = \sqrt{49+9} = \sqrt{58}$

$|\bar{u} - \bar{v}| = |(5\bar{i} - 2\bar{j}) - (2\bar{i} + 5\bar{j})| = |3\bar{i} + 7\bar{j}| = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$

สรุปข้อความ (1) ถูกต้อง ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**พิจารณาข้อความ (2)** $5\bar{u} + 2\bar{v} = 5(5\bar{i} - 2\bar{j}) + 2(2\bar{i} + 5\bar{j})$

$= 25\bar{i} - 10\bar{j} + 4\bar{i} + 10\bar{j}$

$= 29\bar{i}$

สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

**พิจารณาข้อความ (3)** เพราะว่า $\bar{u} \cdot \bar{v} = (5\bar{i} - 2\bar{j}) \cdot (2\bar{i} + 5\bar{j})$

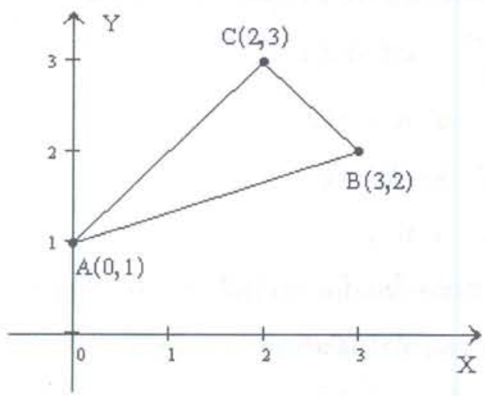
$= (5)(2) + (-2)(5)$

$= 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ สรุปข้อความ (3) ถูกต้อง

**4. ตอบ 3.**

**แนวคิด**




วาดรูปโดยใช้สเกล 1 เซนติเมตร/หน่วย แล้ววัดมุม $A\hat{B}C = 63^\circ$

ดังนั้นข้อความ (1) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้ก่อน

ต่อไปวัดมุม $A\hat{C}B$ จะเห็นว่าใกล้เคียง $90^\circ$ ดังนั้นต้องคำนวณต่อ

$\overrightarrow{AC} = (2-0)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = 2\bar{i} + 2\bar{j}$

$\overrightarrow{BC} = (2-3)\bar{i} + (3-2)\bar{j} = -\bar{i} + \bar{j}$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = (2)(-1) + (2)(1) = 0$

ดังนั้น $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC}$ นั่นคือ $A\hat{C}B = 90^\circ$ สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง

$|\overrightarrow{AC}| = |2\bar{i} + 2\bar{j}| = \sqrt{8}$

และ $|\overrightarrow{BC}| = |\bar{i} + \bar{j}| = \sqrt{2}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(3-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{10}$

พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times \left|\overrightarrow{AC}\right| \times \left|\overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left(\sqrt{8}\right)\left(\sqrt{2}\right) = 2$

ดังนั้นข้อความ (3) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ความยาวเส้นรอบรูป ABC $= \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right|$

$$= \sqrt{10} + \sqrt{8} + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{5} + 3\sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2}(\sqrt{5}+3)$$

ดังนั้นข้อความ (4) ถูกต้อง

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** คำถามและตัวเลือกแบบนี้ใช้เหตุผลการตัดตัวเลือกจะได้คำตอบเร็วกว่า

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k$ ค่าคงตัว

เพราะฉะนั้น $\sin A = ka$ , $\sin B = kb$ , $\sin C = kc$

และ $\sin A : \sin B : \sin C = ka : kb : kc$

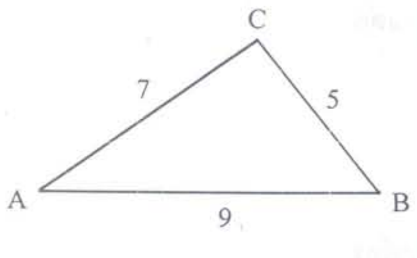
สรุป $\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

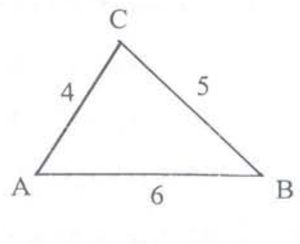
โดยการใช้เหตุผลว่าด้านสองด้านของสามเหลี่ยมเมื่อรวมกันต้องยาวกว่าด้านที่ 3

ดังนั้น 12 : 9 : 2 ไม่เป็นอัตราส่วนของ a:b:c ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน $1 + 2 > 3$ ดังนั้นตัดเลือก 2. ทิ้งได้

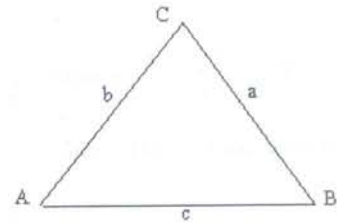
ต่อไปลองวาดรูปที่มีอัตราส่วนของด้านเป็น 9: 7 : 5 และ 6 : 5 : 4 และวัดมุมโดยประมาณ




เพราะว่า $\cos A : \cos B : \cos C = 2 : 9 : 12$ เพราะฉะนั้น $\cos A > 0$

แต่อัตราส่วน 9 : 7 : 5 ทำให้ $\hat{A} > 90^\circ$ ดังนั้น $\cos A < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้




**การตัดตัวเลือกแบบที่ 2**

$\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ และ $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

เพราะว่า cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12 เพราะฉะนั้น

$$\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)} = \frac{2}{9} \rightarrow \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+c^2-b^2} = \frac{2b}{9a} \quad \text{...(1)}$$

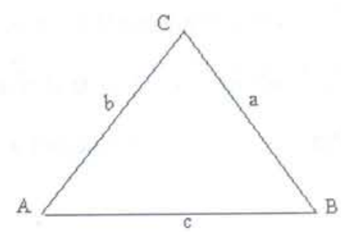
ทำมาได้แค่จะใช้แทนค่าเพื่อตัดตัวเลือกก็ได้ เช่น a : b : c = 3 : 2 : 1 ได้หรือไม่

ลองแทนค่า c = k , b = 2k และ a = 3k ในสมการ (1) จะได้

$$\frac{(2k)^2+(k)^2-(3k)^2}{(3k)^2+(k)^2-(2k)^2} = \frac{-4k^2}{6k^2} = -\frac{2}{3} \neq \frac{2(2k)}{9(3k)}$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ ในทำนองเดียวกันตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากโจทย์ cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12 ให้ cosA = 2k , cosB = 9k และ cosC = 12k




เพราะว่า

$$\begin{aligned}
A + B + C &= 180 \\
\cos(A+B) &= \cos(180 - C) \\
\cos A \cos B - \sin A \sin B &= -\cos C \\
(2k)(9k) - \sqrt{1-\cos^2 A}\sqrt{1-\cos^2 B} &= -12k \\
-\sqrt{1-4k^2}\sqrt{1-81k^2} &= -12k - 18k^2 \\
(1-4k^2)(1-81k^2) &= (-12k-18k^2)^2 \\
1 - 85k^2 + 324k^4 &= 144k^2 + 432k^3 + 324k^4 \\
432k^3 + 229k^2 - 1 &= 0 \quad \text{....(*)}
\end{aligned}$$

**หมายเหตุ** การแยกตัวประกอบตรงนี้จะยากมาก อย่างไรก็ตามจะได้ $(16k-1)(27k^2+16k+1) = 0$

$k = \dfrac{1}{16}$ หรือ $k = \dfrac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4(27)(1)}}{2(27)}$

แต่ $k = \dfrac{-8 \pm \sqrt{37}}{27} < 0$ และ cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12

เพราะฉะนั้น cosA > 0 , cosB > 0 , cosC > 0

นั่นคือ k > 0 เพราะฉะนั้น $k = \dfrac{1}{16}$ ค่าเดียวเท่านั้น

สรุป $\cos A = \dfrac{2}{16} = \dfrac{1}{8} \rightarrow \sin A = \sqrt{1-\dfrac{1}{64}} = \sqrt{\dfrac{63}{64}}$

$\cos B = \dfrac{9}{16} \rightarrow \sin B = \sqrt{1-\dfrac{81}{256}} = \sqrt{\dfrac{175}{256}}$

$$\cos C = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \rightarrow \sin C = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{7}{16}}$$

เพราะฉะนั้น sinA : sinB : sinC $= \sqrt{\frac{63}{64}}:\sqrt{\frac{175}{256}}:\sqrt{\frac{7}{16}} = \sqrt{\frac{252}{256}}:\sqrt{\frac{175}{256}}:\sqrt{\frac{112}{256}}$

$= \sqrt{252}:\sqrt{175}:\sqrt{112} = 6\sqrt{7}:5\sqrt{7}:4\sqrt{7}$

$= 6 : 5 : 4$

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า x = 0 ก็ได้คำตอบ

$\arcsin 0 = 0 \longrightarrow \cos(\arcsin 0) = \cos 0 = 1$

$\longrightarrow \arcsin(\cos(\arcsin 0)) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin(\arccos 0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\longrightarrow \arccos(\sin(\arccos 0)) = \arccos 1 = 0$

สรุป $\arcsin(\cos(\arcsin 0)) + \arccos(\sin(\arccos 0)) = \frac{\pi}{2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $\arcsin(\cos(\arcsin x)) = \arccos(\cos(\arccos\sqrt{1-x^2}))$

$= \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

$\arccos(\sin(\arccos x)) = \arccos(\sin(\arcsin\sqrt{1-x^2}))$

$= \arccos(\sqrt{1-x^2})$

$\arcsin(\cos(\arcsin x)) + \arccos(\sin(\arccos x)) = \arcsin(\sqrt{1-x^2}) + \arccos(\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$

**หมายเหตุ** สูตรตรีโกนมิติสำคัญที่ใช้คือ $\sin(\arcsin k) = k$ , $\cos(\arccos k) = k$

$\arcsin k = \arccos(\sqrt{1-k^2})$ , $\arccos k = \arcsin(\sqrt{1-k^2})$ , $\arcsin k + \arccos k = \frac{\pi}{2}$

**7. ตอบ 1.**

**แนวคิด** ให้ A = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่หนึ่งและโยนแล้วได้หัว

B = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่สองและโยนแล้วได้หัว

C = เหตุการณ์ที่ได้เหรียญชนิดที่สามและโยนแล้วได้หัว

E = เหตุการณ์ที่โยนแล้วได้หัว

เพราะฉะนั้น $E = A \cup B \cup C$ และ $A \cap B = \varnothing$ , $B \cap C = \varnothing$ , $A \cap C = \varnothing$

ดังนั้น $P(E) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

เพราะว่าเหรียญชนิดที่สองไม่มีด้านหัว เพราะฉะนั้น $P(B) = 0$ ดังนั้น $P(E) = P(A) + P(C)$

เพราะว่าจำนวนเหรียญทั้งหมด $= (3) + (4) + (2) = 9$ และมีเหรียญชนิดหนึ่ง

จำนวน 3 เหรียญ และเป็นหัวทั้งสองด้าน เพราะฉะนั้น $P(A) = (\frac{3}{9})(\frac{1}{1}) = \frac{1}{3}$

**การตัดตัวเลือก** ขอให้นักเรียนสังเกตว่าเมื่อทำมาได้แค่นี้ก็มีเหตุผลเพียงพอที่จะตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $P(E) = P(A) + P(C) \geq P(A) \geq \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$ และค่าแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\frac{4}{9} = \frac{8}{18}$ 2. $\frac{5}{9} = \frac{10}{18}$ 3. $\frac{4}{18}$ 4. $\frac{5}{18}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

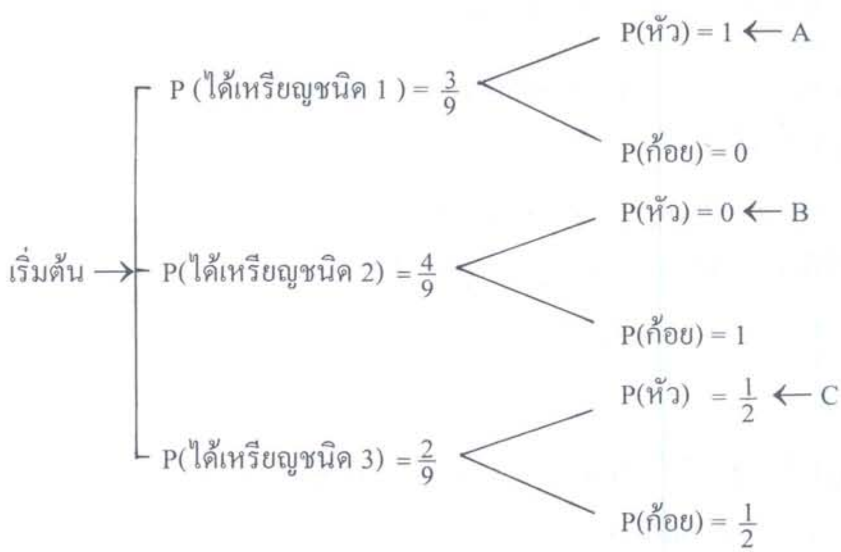
$$P(C) = (\frac{2}{9})(\frac{1}{2}) = \frac{1}{9}$$

มาจากแต่ละเหรียญโอกาสขึ้นหัว $= \frac{1}{2}$

มีเหรียญชนิดที่สาม 2 จาก 9

สรุป $P(E) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$

**การคำนวณแบบที่ 2** ใช้แผนภูมิต้นไม้แสดงค่าของความน่าจะเป็น



P(ได้หัว) = P(A∪B∪C)

$= P(A) + P(B) + P(C)$

$= (\frac{3}{9})(1) + (\frac{4}{9})(0) + (\frac{2}{9})(\frac{1}{2})$

$= \frac{3}{9} + 0 + \frac{1}{9}$

$= \frac{4}{9}$

**8. ตอบ 4.**

**แนวคิด** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ $n, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$

ดังนั้นแทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้

แทนค่า $n = 1, n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{6}$

แทนค่า $n, n_1, n_2, \ldots, n_6$ ในทุกตัวเลือก

**ตัวเลือก 1.** $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 6!1!} = \frac{1}{6\cdot 6!} \neq \frac{1}{6}$

**ตัวเลือก 2.** $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!0!0!0!0!0!}{6^1 \cdot 1!} = \frac{1}{6}$

**ตัวเลือก 3.** $\frac{n!}{6^n 6!n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 \cdot 6!1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{6\cdot 6!} \neq \frac{1}{6}$

**ตัวเลือก 4.** $\frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1 1!0!0!0!0!0!} = \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $n = 2, n_1 = 1, n_2 = 1, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

P(โยนลูกเต๋าสองลูกแล้วได้แต้ม 1 และ 2 อย่างละลูก) $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

**ตัวเลือก 2.** $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!1!0!0!0!0!}{6^2 \cdot 2!} = \frac{1}{72} \neq \frac{1}{18}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จำนวนวิธีที่โยนลูกเต๋า n ลูกแล้วได้แต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6 เท่ากับ $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ เท่ากับการจัดลำดับของ n สิ่ง ที่มีการซ้ำกันเป็น 1, 2, ....., 6 เป็น $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ มีค่าเท่ากับ

$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก มีผล 6 วิธี การโยนลูกเต๋า n ลูก มีผล $6^n$ วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 , 2 , 3 , ….. , 6 เป็น $n_1, n_2, \ldots, n_6$

$$= \left(\frac{\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}}{6!}\right)$$

$$= \frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$$

**9. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกและข้อความเป็นสูตรขึ้นอยู่กับค่าของ n

แทนค่า $n = 2$ จะได้ข้อมูลเป็น $\frac{1}{2}$ , $\frac{1}{4}$

มัธยฐาน $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} = 3(2^{-\frac{2}{2}-2})$

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{\max+\min}{2} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} = \frac{2^2+2}{2^{2+2}}$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{3}{16} = \frac{2^2-1}{2^2 \cdot 2^2}$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{2}}} = 2$

ดังนั้นข้อความ (3) ผิด ทำให้ต้องเลือก 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** n เป็นเลขคู่ จะได้จำนวนเทอมเป็นเลขคู่และ $\frac{n}{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}, \frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}, \ldots, \frac{1}{2^n}$$

มัธยฐาน $= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}+\frac{1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2+1}{2^{\frac{n}{2}+1}}\right] = \frac{3}{2^{\frac{n}{2}+2}} = 3(2^{-\frac{n}{2}-2})$

ดังนั้นข้อความ (1) ถูกต้อง

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}}{2} = \frac{2^{n-1}+1}{2^{n+1}} = \frac{2^n+2}{2^{n+2}}$ ดังนั้นข้อความ (2) ถูกต้อง

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt[n]{(\frac{1}{2})(\frac{1}{4})(\frac{1}{8})\ldots(\frac{1}{2^n})} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{1+2+3+\ldots+n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\frac{n}{2}(n+1)}}} = \left[2^{-\frac{n}{2}(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{1}{2}(n+1)}$

ดังนั้นข้อความ (4) ถูกต้อง

**10.ตอบ 3.**

**แนวคิด** ให้ค่าเฉลี่ยคะแนนนักเรียนชาย = k ,

ค่าเฉลี่ยคะแนนนักเรียนหญิง = k , $s^2$ = ความแปรปรวนรวมทั้งหมด

จากข้อมูลของโจทย์สรุปเป็นตารางดังนี้

| นักเรียน | จำนวน | ค่าเฉลี่ย | ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน |
|---|---|---|---|
| ชาย | 30 | k | 4 |
| หญิง | 30 | 3k | 5 |
| รวม | 60 | | s |

คำถามแบบนี้จัดว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ k ดังนั้นสมมุติ k = 1 ก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว

ให้ z เป็นค่าที่ตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 95 ของคะแนนมาตรฐาน

หญิง ; $z = \frac{x_1 - \bar{x}_F}{s_F} = \frac{x_1 - 3k}{5} = \frac{x_1 - 3}{5} \longrightarrow x_1 = 3 + 5z$

ชาย ; $z = \frac{x_2 - \bar{x}_M}{s_M} = \frac{x_2 - k}{4} = \frac{x_2 - 1}{4} \longrightarrow x_2 = 1 + 4z$

รวม ; $z = \frac{x_3 - \bar{x}_{Total}}{s_{Total}} \longrightarrow \bar{x}_{Total} = \frac{(30)(k) + (30)(3k)}{30 + 30} = \frac{120k}{60} = 2k = 2$

$z = \frac{x_3 - 2}{s} \longrightarrow x_3 = 2 + sz$

เพราะว่า $4 < s < 5 \longrightarrow 4z < sz < 5z$

เพราะฉะนั้น $1 + 4z < 2 + sz$ และ $2 + sz < 3 + 5z$

นั้นคือ $x_2 < x_3$ และ $x_3 < x_1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2.และ 4. ทิ้งได้

**หมายเหตุ** ความหมายของคำว่าโจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ k

ดังนั้นหากเราสมมุติ k = 1 , 2 , 10…..ก็จะได้ผลเหมือนกัน

**วิธีจริง** จะได้ $x_1 = 3k + 5z$ , $x_2 = k + 4z$ , $x_3 = 2k + sz$

$4 < s < 5 \longrightarrow 4z < sz < 5z$

$k + 4z < 2k + sz < 3k + 5z$

สรุป $x_2 < x_3 < x_1$

**11.ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของค่าความจริง

แทนค่า A = T , B = T จะได้

$[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E = [(C \rightarrow T) \wedge (\sim T \rightarrow \sim T)] \vee E = [T \wedge T] \vee E = T$

สรุป $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$ เป็นจริง

พิจารณาตัวเลือกที่สรุปค่าความจริงได้ง่ายเช่น $A \vee \sim E = T \vee \sim E = T$

$E \vee \sim D \vee B = E \vee \sim D \vee T = T$

สรุป $(A \vee \sim E) \leftrightarrow (E \vee \sim D \vee B) = T \leftrightarrow T = T$ ดังนั้นเลือก 3. เป็นคำตอบได้

**หมายเหตุ** 1. $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D) = (T \wedge T) \rightarrow (C \vee D) = T \rightarrow (C \vee D)$

มีค่าความจริงเปลี่ยนเป็น $C \vee D$

2. $(E \vee D) \leftrightarrow (A \vee \sim C) = (E \vee D) \leftrightarrow (T \vee \sim C) = (E \vee D) \leftrightarrow T$ มีค่าความจริงเปลี่ยนตาม $E \vee D$

3. $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge E) = (T \wedge C) \rightarrow (T \wedge E) = C \rightarrow E$ มีค่าความจริงเปลี่ยนตาม C และ E

**12.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** $1 + x^2 + x^4 + \ldots$ เป็นผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a = 1$ , $r = x^2$

ดังนั้น $1 + x^2 + x^4 + \ldots\ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-x^2}$ เมื่อ $|x^2| < 1$

จะเห็นได้ว่า $|x^2| < 1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า

$$
\begin{aligned}
2^{-\frac{2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+\ldots\ldots} &= 0 \\
2^{-\frac{2}{3x}} &= 2^{1+x^2+x^4+\ldots\ldots} \\
-\frac{2}{3x} &= 1 + x^2 + x^4 + \ldots\ldots \\
-\frac{2}{3x} &= \frac{1}{1-x^2} \\
2x^2 - 3x - 2 &= 0 \\
(2x+1)(x-2) &= 0 \\
x &= -\frac{1}{2}, -2
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $|x^2| < 1$ เพราะฉะนั้น $x = -\frac{1}{2}$ เท่านั้น สรุป $x = -\frac{1}{2} \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

**13. ตอบ 4.**

**แนวคิด** $2^{x+y} + i(x-y) = 3 + 2i$

เพราะว่าส่วนจริงต้องเท่ากันและส่วนจินตภาพต้องเท่ากัน เพราะฉะนั้น $2^{x+y} = 3$ และ $x - y = 2$

แทนค่า $x = 2 + y$ จะได้ $2^{2+y+y} = 3$

$$2^{2+2y} = 3$$

$$2^2 \cdot 2^{2y} = 3$$

$$(2^2)^y = \frac{3}{4}$$

$$4^y = \frac{3}{4}$$

แทนค่า $y = x - 2$ จะได้ $2^{x+x-2} = 3$

$$2^{2x} \cdot 2^{-2} = 3$$

$$\frac{4^x}{4} = 3$$

สรุป $4^x + 4^y = \frac{3}{4} + 12 = \frac{51}{4}$

**หมายเหตุ** การตัดตัวเลือกข้อสอบข้อนี้ต้องอาศัยความโชคดีบ้างเช่น หากเราได้ค่า $4^x = 12$ ก่อนก็สามารถตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้ โดยยังไม่ต้องคำนวณ $4^y$

เพราะว่า $4^y > 0$ ดังนั้น $4^x + 4^y > 12$

เพราะฉะนั้น $4^x + 4^y > \frac{17}{4}$ , 6 , 12 ทำให้ตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

จะเห็นได้ว่าการตัดตัวเลือกด้วยเหตุผลแบบนี้ จะใช้เวลาน้อยกว่าการคำนวณ $4^y$ และ $4^x + 4^y$ แน่นอน

**14. ตอบ 2.**

**แนวคิด** เพราะว่า $a_n = e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})}$

$$= e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= (3^{-n})^{\frac{1}{2}} = (3^{-\frac{1}{2}})^n = (\frac{1}{\sqrt{3}})^n$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{3}})^n = \frac{(\frac{1}{\sqrt{3}})}{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \frac{\sqrt{3}+1}{3-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

สรุป $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $b_n = \log_{\frac{1}{3}}(a_n)$ และ $a_n = (3^{-1})^{\frac{n}{2}} = (\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} (\frac{1}{3})^{\frac{n}{2}} = \frac{n}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2}$

เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

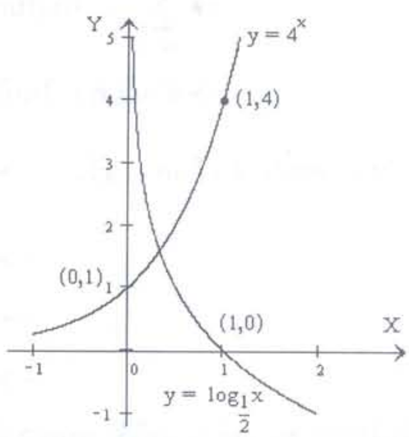
**15. ตอบ 1.**

**แนวคิด** $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ หาค่า a โดยการจัดรูปทางพีชคณิตจะยากมาก การหาค่า a ที่ทำให้ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$

ให้พิจารณาจากจุดตัดของ $y = 4^x$ และ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$

การพิจารณาค่า a ให้ดูจากตารางคำนวณดังนี้

| x | $y = 4^x$ | $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\frac{1}{4}$ | $4^{\frac{1}{4}} = \sqrt{2}$ | 2 |
| $\frac{1}{2}$ | 2 | 1 |
| 1 | 4 | 0 |




เพราะฉะนั้นรากของสมการ $4^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ มีค่าระหว่าง $\frac{1}{4}$ กับ $\frac{1}{2}$ สรุป $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a}$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

**หมายเหตุ** เพื่อประโยชน์ของนักเรียนจะแสดงตัวเลือกอื่นๆผิดดังต่อไปนี้

เพราะว่า $(\frac{1}{2})^2 < a < \frac{1}{2}$ และ $\log_{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะฉะนั้น $$\log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2})^2 > \log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

$$2 > \log_{\frac{1}{2}} a > 1$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{\frac{1}{2}} a)^n$ ไม่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

เพราะว่าเรนจ์ของ sec คือ $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ และ $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นต้องไม่มี x ที่ทำให้ $\sec x = a$

เพราะว่า $f(x) = e^x$ มีเรนจ์ $= (0, \infty)$ และ $a \in (0, \infty)$ เพราะฉะนั้นต้องมี $x \in R$ ที่ทำให้ $e^x = a$

**การตัดตัวเลือก** จะเห็นได้ว่าการทำโจทย์ข้อนี้เหตุผลการหาค่า a ต้องใช้กราฟ และการไขว้กันของกราฟบนช่วง $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ จึงจะ ได้ว่า $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

หากนักเรียนอ่านตัวเลือกทุกข้อก่อนก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. และตัวเลือก 3. มีลักษณะขัดแย้งกัน กล่าวคือ

ตัวเลือก 3. จริง $\rightarrow a \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty] \rightarrow |a| \geq 1$

$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ ไม่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$\rightarrow$ ตัวเลือก 1. ไม่เป็นจริง

ในทางกลับกัน ตัวเลือก 1. จริง $\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

$\rightarrow |a| < 1 \rightarrow a \notin (-\infty, -1] \cup [1, \infty]$

$\rightarrow$ ไม่มี $x \in R$ ที่ $\sec x = a$

$\rightarrow$ ตัวเลือก 3. ไม่เป็นจริง

ดังนั้นหากจะเดาคำตอบก็ต้องเป็น 2 ตัวนี้แน่นอน ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเรามาฝึกการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์กันอีก

จากโจทย์จะเห็นว่ามีการกล่าวถึง $\log_{\frac{1}{2}} a$ ดังนั้น $a > 0$ แน่นอน ดังนั้น a อยู่ในเรนจ์ของ $e^x$

ดังนั้นต้องมี $x \in R$ ที่ $e^x = a$ แน่นอน ตัวเลือก 4. จึงผิดตัดทิ้งได้ด้วยเหตุผล $a > 0$

**คำแนะนำ** ข้อสอบที่ชอบถามว่าตัวเลือกใดถูกหรือผิด ควรจะอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วจึงเลือกตัวเลือกที่ง่ายมาพิจารณา

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด** (1) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right] = \lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{(x-2)(x-1)}\right]$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2(x-2)+1}{(x-2)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{x^3-x^2+1}{(x-2)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(x^2-x-1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-x-1}{x-2}\right) = \frac{1-1-1}{1-2} = 1$$

ดังนั้นข้อความ (1) เป็นเท็จ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

(2) $x \longrightarrow -2^-$ ดังนั้นเราพิจารณาเมื่อ $x < -2$

$$\begin{aligned} |x^2-4| &= |(x-2)(x+2)| \\ &= |x-2|\,|x+2| \\ &= (-(x-2))(-(x+2)) \\ &= (x-2)(x+2) \\ &= x^2-4 \end{aligned}$$

$$|x+2| = -(x+2)$$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{|x^2-4|+|x+2|}{x^2-3x-10} = \lim_{x\to -2^-}\frac{(x^2-4)-(x+2)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to -2^-}\frac{x^2-x-6)}{(x-5)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to -2^-}\frac{(x-3)(x+2)}{(x-5)(x+2)} = \lim_{x\to -2^-}\frac{x-3}{x-5}$$

$$= \frac{-2-3}{-2-5} = \frac{5}{7}$$

ดังนั้นข้อความ (2) ถูกต้อง

**17.ตอบ 3.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ(1)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}\dfrac{dx}{dx} - x\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}}{x^2+1} = \frac{\sqrt{x^2+1} - x(\frac{1}{2})(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ ทุกค่า x

สรุป f เป็นฟังชั่นเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ข้อความ (1) ถูกต้อง ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ(2)** $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}} - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}$ ; $x > 0$

$$g(x) = 2x^{1/2} - 3x^{-1/3}$$

$$g'(x) = 2(-\tfrac{1}{2})x^{-3/2} - 3(-\tfrac{1}{3})x^{-4/3} = -x^{-3/2} + x^{-4/3}$$

$$g''(x) = \tfrac{3}{2}x^{-5/2} - \tfrac{4}{3}x^{-7/3}$$

การหาค่าวิกฤต $g'(x) = 0 \longrightarrow -x^{-\frac{3}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} = 0$

$\longrightarrow x^{-\frac{4}{3}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$x \neq 0$ ; $x^{-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} = 1$ $\longrightarrow x^{\frac{1}{6}} = 1$

$\longrightarrow x = 1$

$$g'(1) = \tfrac{3}{2}(1)^{-5/2} - \tfrac{4}{3}(1)^{-7/3} = \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{9-8}{6} = \tfrac{1}{6} > 0$$

เพราะฉะนั้น g(1) เป็นค่าต่ำสุดสัมพันธ์ สรุปข้อความ (2) ถูกต้อง

**18.ตอบ 3.**

**แนวคิด** $y = 3^{\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{\ln 3}$ $(\because A^{\log_C B} = B^{\log_C A}$ เสมอ)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2+1)^{\ln 3} = (\ln 3)(x^2+1)^{(\ln 3)-1}\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$\frac{dy}{dx} = (\ln 3)(x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x)$ ...(*)

$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(\ln 3)(x^2+1)^{\ln 3}}{x^2+1} = \frac{2x(\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$

จากสมการ (*) $\frac{dy}{dx} = (\ln 3)\,(x^2+1)^{(\ln 3)-1}(2x)$ เราสามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แต่สูตรในตัวเลือก 2. ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{3^{\ln(0+1)}}{0+1} = 1 \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ในทำนองเดียวกันแทน $x = 1$ จะตัดตัวเลือก 1. และ 4. ได้

**หมายเหตุ** การแสดงว่า $A^{\log_C B} = B^{\log_C A}$

เพราะว่า $\log_C A \log_C B = \log_C B \log_C A$ เพราะฉะนั้น $\log_C B^{\log_C A} = \log_C A^{\log_C B}$

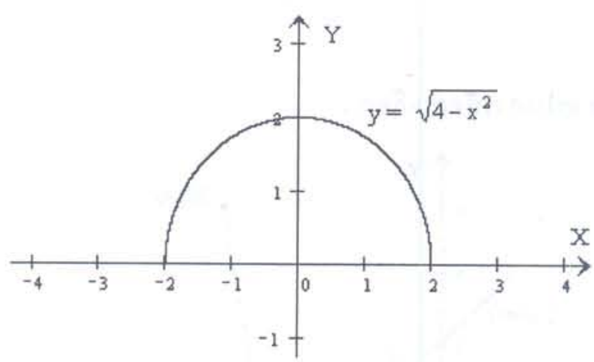
เพราะว่า $\log_C$ เป็นฟังก์ชั่น 1 – 1 เพราะฉะนั้น $B^{\log_C A} = A^{\log_C B}$

**19. ตอบ 4.**

**แนวคิด พิจารณาข้อความ (1)** $y = \sqrt{4-x^2} \longrightarrow y^2 = 4 - x^2 \longrightarrow x^2 + y^2 = 4$

มีกราฟเป็นวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลาง (0 , 0)

เพราะฉะนั้น $y = \sqrt{4-x^2}$ เป็นครึ่งวงกลมรัศมี 2 เหนือแกน X




$\int_{-2}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx =$ พื้นที่ใต้โค้ง $y = \sqrt{4-x^2}$ บนช่วง $[-2, 2]$

= พื้นที่ครึ่งวงกลมรัศมี 2

$= \frac{1}{2}(\pi 2^2) = 2\pi$

ดังนั้นข้อความ (1) ผิด ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

**พิจารณาข้อความ (2)** $\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\,dx = \int_0^1 1dx + \int_0^1 (\sqrt{x^4-2x^2}+1)dx$

เพราะว่า $\int_0^1 1dx = (x]_0^1 = 1$ และ $\int_0^1 (\sqrt{x^4-2x^2}+1)dx > 0$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\,dx > 1$ สรุปข้อความ (2) ผิด

**หมายเหตุ** $\int_0^1 (1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\,dx = \int_0^1 (1+\sqrt{(x^2-1)^2})\,dx$

$$= \int_0^1 (1+|x^2-1|)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1+(-(x^2-1))dx \qquad (\because x^2-1<0)$$

$$= \int_0^1 (2-x^2)\,dx$$

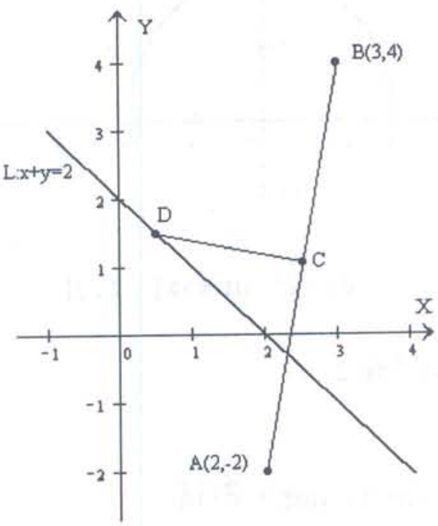
$$= (2x-\frac{x^3}{3}]_0^1$$

$$= 2-\frac{1}{3} = \frac{5}{3} \neq \frac{1}{3}$$

สรุปข้อความ (2) ผิด

**20.ตอบ 3.**

**แนวคิด** ใช้การวาดรูปช่วยในการตัดตัวเลือก



1. เขียนจุด A(2 , – 2) , B(3 , 4)
2. ลากเส้นตรง L : x + y = 2
3. แบ่งครึ่ง AB ที่จุด C
4. ลากเส้น CD ตั้งฉากกับ L ที่จุด D

เพราะว่า DC แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับคอร์ด AB

เพราะฉะนั้น D เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

วัดพิกัด D ได้เป็น ( 0.7 , 1.3 )

จากตัวเลือกทั้ง 4 จะได้

| ตัวเลือก | จุดศูนย์กลาง |
|---|---|
| 1. $(2x-11)^2+(2y+7)^2=58$ | $(\frac{11}{2},-\frac{7}{2})$ |
| 2. $(2x+7)^2+(2y-11)^2=346$ | $(-\frac{7}{2},\frac{11}{2})$ |
| 3. $(10x-7)^2+(10y-13)^2=1258$ | $(\frac{7}{10},\frac{13}{10})$ |
| 4. $(3x-5)^2+(3y-1)^2=50$ | $(\frac{5}{3},\frac{1}{3})$ |

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** แบบที่ 1. หาจุดกึ่งกลางของ A , B ได้เป็น $(\frac{2+3}{2},\frac{4-2}{2})=(\frac{5}{2},1)$

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{4-(-2)}{3-2}=6$

เพราะว่า DC $\perp$ AB เพราะฉะนั้นความชัน DC เท่ากับ $-\frac{1}{6}$

สมการเส้นตรงที่ผ่าน DC คือ $y-y_0=m(x-x_0)$

$$y-1=(-\frac{1}{6})(x-\frac{5}{2})$$

$$6y-6=-x+\frac{5}{2} \quad \text{....(1)}$$

แทนค่า $y=2-x$ $\quad 6(2-x)-6=-x+\frac{5}{2}$

$$12-6x-6=-x+\frac{5}{2}$$

$$-5x=\frac{5}{2}-6=-\frac{7}{2}$$

$$x=\frac{7}{10}$$

เพราะว่า $y=2-x$ เพราะฉะนั้น $y=2-\frac{7}{2}=\frac{13}{10}$ สรุปพิกัด $D(\frac{7}{10},\frac{13}{10})$

**หมายเหตุ** ทำมาได้แค่นี้ หากตัดตัวเลือกก็จะทำได้เหมือนกับเหตุผลจากการวาดรูปเหมือนกัน รัศมีวงกลม = ความยาว DA

$$= \sqrt{(\frac{7}{10}-2)^2+(\frac{13}{10}+2)^2}$$

$$= \sqrt{(-\frac{14}{10})^2+(\frac{33}{10})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{196+1089}{100}}$$

$$= \sqrt{\frac{1285}{100}}$$

สมการวงกลมคือ $(x-\frac{7}{10})^2+(y-\frac{13}{10})^2 = \frac{1285}{100}$

$$(10x-7)^2+(10y-13)^2 = 1285$$

**วิธีจริง แบบที่ 2** สมมุติพิกัด D คือ (h , k) เพราะว่า AD = BD เพราะฉะนั้น

$$\sqrt{(h-3)^2+(k-4)^2} = \sqrt{(h-2)^2+(k+2)^2}$$

$$(h-3)^2+(k-4)^2 = (h-2)^2+(k+2)^2$$

$$h-6h+9+k^2-8k+16 = h^2-4h+4+k^2-4k+4$$

$$-2h-12k = -17$$

$$2h+12k = 17 \qquad ....(1)$$

เพราะว่า (h , k) อยู่บนเส้นตรง L : x + y = 2 เพราะฉะนั้น h + k = 2 หรือ

$$2h+2k = 4 \qquad ....(2)$$

( 1 ) – (2) ; 10k = 13

$k = \frac{13}{10}$ และ $h = \frac{7}{10}$

ในทำนองเดียวกับแบบที่ 1 ก็จะได้ตัวเลือก 3. เหมือนกัน

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂⊄∈∉°∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥→↑ X Y
❶❷❸❹①②③④

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 16.

1. ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

   1. $(p \rightarrow q) \vee \sim r$ 2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
   3. $\sim(p \vee q) \vee r$ 4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

2. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ $A = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$

   $B = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 \leq 4y\}$

   $C = \{(x, y) \in R \times R \mid -4 \leq x \leq 4, y = 4\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $A \cap (B \cap C) = \{(0, 4)\}$ 2. $A - B \neq \phi$
   3. $(B - A) \cap C = C$ 4. $C - B = \phi$

3. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

   ถ้า $A = \{x \in I \mid \left|x^2 - 2\right| < 8\}$ และ $B = \{x \in R \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

   แล้วเซตของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

   1. $\{(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$
   2. $\{(-3, 0), (-2, 1), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$
   3. $\{(-3, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
   4. $\{(-3, 1), (-2, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 1)\}$

4. ถ้า $f(x) = x - 1$ และ $(gof^{-1})(x) = 4x^2 - 1$

   แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) = 0$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

   1. $[-4, -1]$ 2. $[-1, 0]$
   3. $[0, 4]$ 4. $[4, 6]$

5. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $x < y$ ห.ร.ม. ของ x , y เท่ากับ 9 ค.ร.น. ของ x , y เท่ากับ 28215 และ จำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวนค่าของ $y - x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 36 2. 45
   3. 9 4. 18

6. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m , n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x + 3$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ ลงตัว และ $x - 1$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $m = 4 , n = -4$　　　2. $m = 2 , n = -2$

   3. $m = -4 , n = 4$　　　4. $m = -2 , n = 2$

7. ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต

   $\{ \frac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} \mid$ n เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ ใน R เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $-1$　　　2. $-\frac{1}{2}$

   3. $-\frac{1}{4}$　　　4. $0$

8. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่ทำมุม 45° กับแกน X และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2 - 4x + 3y^2 - 2 = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $2\sqrt{2}$　　　2. $4\sqrt{2}$

   3. $2$　　　4. $4$

9. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$ แล้วสมการของเส้นตรง OP และสมการของวงกลมที่มี OP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือข้อใด

   1. $y = 4x$　และ　$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$

   2. $y = -4x$　และ　$x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$

   3. $y = 2x$　และ　$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 10$

   4. $y = -2x$　และ　$x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$

10. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$ และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E มีจุดยอดกับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้คือสมการของไฮเพอร์โบลา

    1. $x^2 - 5y^2 - 2x - 20y + 14 = 0$

    2. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 14 = 0$

    3. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 18 = 0$

    4. $5x^2 - y^2 - 2x + 20y + 18 = 0$

11. ถ้า $A = \{(x, y) \mid 0 < x \le \pi, 0 < y \le \pi, \cos(x+y) \ge 0, \sin(x+y) \le 0\}$

แล้ว A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \le y \le 2\pi - x, x \le \pi\}$
2. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \le y \le \pi, x \le \pi\}$
3. $\{(x, y) \mid 0 \le y \le 2\pi - x, x > 0\}$
4. $\{(x, y) \mid \frac{3\pi}{4} \le x \le \pi, \frac{3\pi}{4} \le y \le \pi\}$

12. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ $(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$

และ $3^{y-1} = 2^{2y-3}$ แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < y < x$ 2. $0 < x < y$
3. $y < 0 < x$ 4. $0 < x = y$

13. ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + \ldots < 1$

คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0 < x < \sqrt{3}$ 2. $x > \sqrt{3}$
3. $0 < x < 3\sqrt{3}$ 4. $x > 3\sqrt{3}$

14. กำหนดให้ $y = \sqrt{2^{2x} + 2^{-2x} + 2}$ เมื่อ $x \ge 0$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$ 2. $\log_2(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2})$
3. $\log(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$ 4. $\log(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2})$

15. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \ldots + \frac{1}{\log_9 x} + \frac{1}{\log_{10} x} \le 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, 1)$ 2. $[10!, \infty)$
3. $(0, 1) \cup [10!, \infty)$ 4. $(0, 1) \cup [1, \infty)$

16. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$ ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง

แล้วจะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$ 2. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = -1$
3. $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$ 4. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

17. ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(3 , – 1) และ B(– 1 , 3) แล้วเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-4\bar{i} + 4\bar{j}$
2. $4\bar{i} - 4\bar{j}$
3. $-4\sqrt{2}\bar{i} + 4\sqrt{2}\bar{j}$
4. $4\sqrt{2}\bar{i} - 4\sqrt{2}\bar{j}$

18. กำหนดให้ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{v} - \bar{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. $\frac{\pi}{5}$
3. $\frac{4\pi}{5}$
4. $\frac{6\pi}{5}$

19. กำหนดให้ค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

| ค่าจ้าง (บาท) | จำนวนคนงาน |
|---|---|
| 81–85 | 1 |
| 86–90 | 3 |
| 91–95 | x |
| 96–100 | 5 |
| 101–105 | 8 |
| 106–110 | y |
| 111–115 | 10 |
| 116–120 | 4 |

ถ้าข้อมูลชุดนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้วจำนวนคนงานที่ได้ค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 คน
2. 22 คน
3. 28 คน
4. 42 คน

20. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ และ E ที่ทำให้ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$ ถ้า $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA}$ เมื่อ a , b เป็นค่าคงตัว แล้ว b – a คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. –1
2. 2
3. 3
4. 5

(ข้อนี้มาจาก คณิตศาสตร์ 1 Entrance ระบบใหม่ มีนาคม 2542)

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 16.

**1. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของค่าความจริง

แทนค่า $p = T$ , $q = F$ และ $r = F$

จะได้ค่าความจริงของโจทย์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) = (T \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow F) = T$

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(p \wedge q) \vee \sim r \;=\; (T \wedge F) \vee \sim F \;=\; T$
2. $(p \wedge q) \rightarrow r \;=\; (T \wedge F) \rightarrow F \;=\; T$
3. $\sim(p \vee q) \vee r \;=\; \sim(T \vee F) \vee F \;=\; F$
4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r \;=\; \sim(T \vee F) \rightarrow F = \; T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**หมายเหตุ** การตัดตัวเลือกแบบนี้คิดเหมือนกับการตีตารางแสดงค่าความจริง แต่เมื่อพบว่าตัวเลือกใดผิด เราก็ไม่ต้องคิดประพจน์ในตัวเลือกนั้นอีก

**วิธีจริง** **แบบที่ 1** ตีตารางแสดงค่าความจริง

**แบบที่ 2** โดยใช้สูตร

$$\begin{aligned}(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) &= (\sim p \vee r) \wedge (q \vee r) \\ &= (\sim p \wedge \sim q) \vee r \\ &= \sim(p \vee q) \vee r\end{aligned}$$

**2. ตอบ 3.**

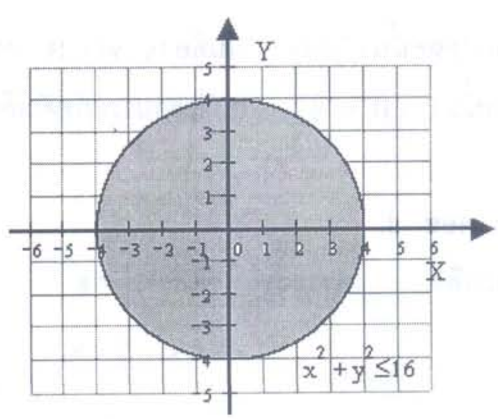
**แนวคิด**

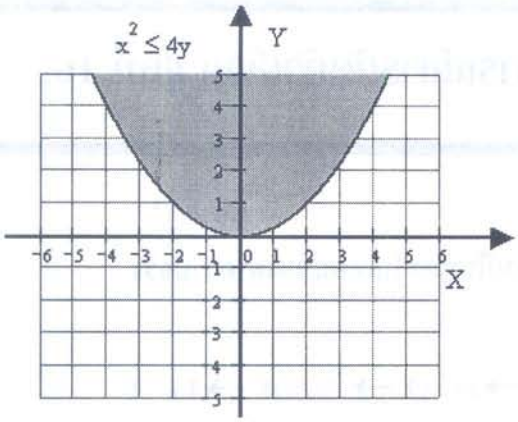
$A = \{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$

กราฟแสดงจุด $(x , y)$ ในเซต A

คือจุดภายในวงกลมรัศมี 4

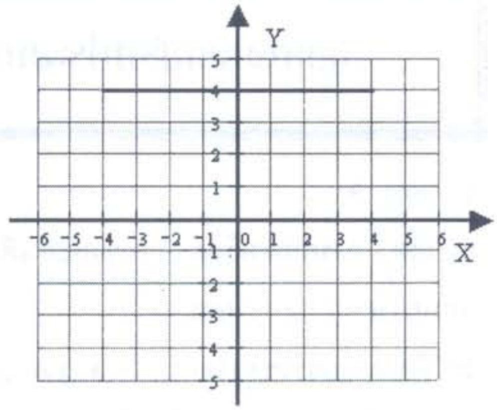
จุดศูนย์กลางที่ $(0 , 0)$






กราฟแสดงบริเวณของเซต B

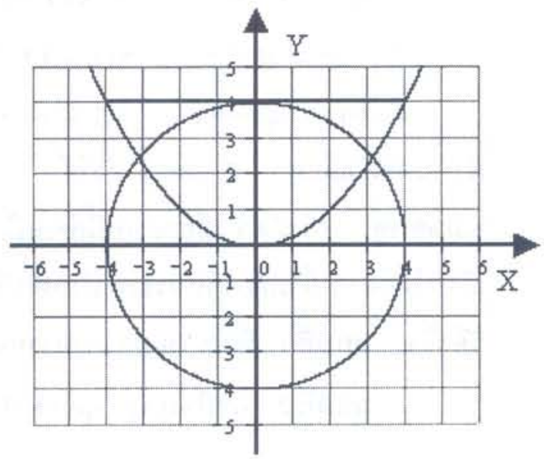
$B = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 \le 4y\}$




กราฟแสดงบริเวณของเซต C

$C = \{(x, y) \in R \times R \mid -4 \le x \le 4, y = 4\}$

นำกราฟของ A , B และ C มาเขียนพร้อมกันจะได้




เพราะฉะนั้น $A \cap (B \cap C) = A \cap C$

$= \{(0, 4)\}$

เพราะว่า $(0, -4) \in A$ และ $(0, -4) \notin B$

เพราะฉะนั้น $A - B = \phi$

เพราะว่า $(0, 4) \notin B - A$

เพราะฉะนั้น $(0, 4) \notin B - A \cap C$

แต่ $(0, 4) \in C$ เพราะฉะนั้น $B - A \cap C \neq C$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อ $(x, y) \in C$ จะได้ $-4 \le x \le 4$ และ $y = 4$

$0 \le x^2 \le 16$ และ $4y = 16$

เพราะฉะนั้น $x^2 \le 4y$ นั่นคือ $(x, y) \in B$ เพราะฉะนั้น $C \subset B$

ดังนั้น $C - B = \phi$ เราจึงสามารถตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

**3. ตอบ 4.**

**แนวคิด** เพราะว่า $|x^2 - 2| < 8$

$-8 < x^2 - 2 < 8$

$$-6 < x^2 < 10$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in I \mid |x^2 - 2| < 8\} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\}$

เพราะว่า $1 + \frac{1}{x} > 0$

$$\frac{x+1}{x} > 0$$

$x < -1$ หรือ $x > 0$

เพราะฉะนั้น $B = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$

ดังนั้น $A \cap B = \{1, 2, -2, 3, -3\}$

เพราะฉะนั้น $\{(3, 1), (2, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 1)\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป $B$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเราทราบว่า $A \cap B = \{1, 2, -2, 3, -3\}$ และโดเมนแต่ละตัวเลือกคือ

ตัวเลือก 1. $D_1 = \{-3, -2, -1, 1, 2\} \neq A \cap B$ ตัวเลือก 2. $D_2 = \{-3, -2, 1, 2, 3\} = A \cap B$

ตัวเลือก 3. $D_3 = \{-3, 0, 1, 2, 3\} \neq A \cap B$ ตัวเลือก 4. $D_4 = \{-3, -2, 1, 2, 3\} = A \cap B$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ผิดแน่นอน

เพราะว่า $0 \notin B$ ดังนั้น $(-3, 0) \notin A \cap B \times B$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

จากการที่เราทราบว่า $B = (-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ โดยการพิจารณา เรนจ์ของแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $R_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\} \subset B$ ตัวเลือก 2. $R_2 = \{0, 1, -1, -2, -3\} \not\subset B$

ตัวเลือก 3. $R_3 = \{1, 2, 3, 4\} \subset B$ ตัวเลือก 4. $R_4 = \{1, 4, 5, 2\} \subset B$

ดังนั้นตัวเลือก 2. ผิด

**4. ตอบ 3.**

**แนวคิด** เมื่อ $f(x) = x - 1$

ดังนั้น $f^{-1}(x) = x + 1$

จะได้ $(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = g(x + 1) = 4x^2 - 1$

ดังนั้น $g(x) = g((x - 1) + 1) = 4(x - 1)^2 - 1$

เพราะว่า $4(x - 1)^2 = 0$

$$(x - 1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x-1 = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{3}{2},\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid g(x)=0\} = \{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\} \subset [0\ ,4]$

**การตัดตัวเลือก** ขณะที่เรารู้ว่า $g(x+1) = 4x^2-1$

เมื่อพิจารณา $4x^2-1 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = \pm\frac{1}{2}$

ดังนั้น $g(\frac{3}{2}) = g(\frac{1}{2}+1) = 0$

$g(\frac{1}{2}) = g(-\frac{1}{2}+1) = 0$

สรุป $\{x \mid g(x) = 0\} = \{\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{2}\}$

**5. ตอบ 4.**

**แนวคิด** ห.ร.ม. $(x\ ,y) = 9$ และ ค.ร.น. $(x\ ,y) = 28215 = 3^3.5.11.19$

เพราะฉะนั้น $xy =$ [ห.ร.ม. $(x\ ,y)$][ค.ร.น. $(x\ ,y)$]

$= (9)(28215) = 253935$

เพราะว่า $253935 = 3.3.5.3.3.3.11.19 = 3^5.5.11.19$ และมีจำนวนเฉพาะที่แตกต่างกันที่หาร x ลงตัว มี 3 จำนวน

เพราะฉะนั้น $x = 3^2.5.11 = 495$ และ $y = 3^3.19 = 513$ ดังนั้น $y-x = 18$

**การตัดตัวเลือก** จาการที่เราทราบว่า $xy = 253935$ เราสามารถนำตัวเลขในตัวเลือกมาพิจารณาเพื่อตัดตัวเลือกได้เช่น $y-x = 18$ จะได้ $\frac{253935}{x} - x = 18$

$$x^2+18x-253935 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{-18\pm\sqrt{324+4(253935)}}{2} = \frac{-18\pm\sqrt{1016064}}{2} = \frac{-18\pm1008}{2} = -513\ ,495$

เพราะว่า x เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $x = 495$ และ $y = 495+18 = 513$

ส่วนตัวเลือกอื่นเช่น 36 จะได้ $\frac{253935}{x} - x = 36$

$$x^2+36x-253935 = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{-36\pm\sqrt{1296+4(253935)}}{2} = \frac{-36\pm\sqrt{1017036}}{2} = \frac{-36\pm1008.482}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

ในทำนองเดียวกัน $y-x = 9$ และ $y-x = 45$ ไม่ได้

**6. ตอบ 2.**

**แนวคิด** ให้ $f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$

ถ้า $x + 3$ หาร $f(x)$ ลงตัวจะได้ว่า $f(-3) = 0$ และ 3 หาร p ลงตัว

เพราะว่า p เป็นจำนวนเฉพาะบวก เพราะฉะนั้น $p = 3$ และจะได้ $-27 + 9m - 3n + 3 = 0$

$$9m - 3n = 24 \qquad ...(1)$$

เพราะว่า $x - 1$ หาร $f(x)$ เหลือเศษ 4 เพราะฉะนั้น $f(-1) = 4$ ดังนั้น $1 + m + n + 3 = 4$

$$m + n = 0 \qquad ...(2)$$

เพราะฉะนั้น $m = 2$ และ $n = -2$

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** จากสมการ (1) เมื่อทราบว่า $9m - 3n = 24$ แล้วเราเอาค่า m , n จากตัวเลือกมาแทนก็จะได้ว่า ตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ผิด

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** นอกจากนี้เมื่อเราทราบว่า $p = 3$ และ $f(-3) = 0$ และ $f(1) = 4$

พิจารณาแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $m = 4 , n = -4$ จะได้ $f(x) = x^3 + 4x^2 - 4x + 3$ และ $f(-3) \neq 0$

ตัวเลือก 3. $m = -4 , n = 4$ จะได้ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ และ $f(-3) \neq 0$

ตัวเลือก 4. $m = -2 , n = 2$ จะได้ $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$ และ $f(-1) \neq 0$

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้เหมือนกัน

**7. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $\dfrac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} = \dfrac{-n(n+1)}{2n^2} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n} \le -\dfrac{1}{2}$ ทุกค่า $n \in I^+$

ให้ k เป็นค่าขอบเขตบน ดังนั้นทุกค่า $n \in I^+$

$$\frac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} \le k$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \le k$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2n}\right) \le k$ นั่นคือ $-\dfrac{1}{2} \le k$ เพราะฉะนั้น ค่าขอบเขตบนน้อยสุดคือ $-\dfrac{1}{2}$

**การตัดตัวเลือก** ให้ $S = \left\{\dfrac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} \mid n \in I^+\right\}$

โดยการแทนค่า $n = 1 , 2 , 3 , ...$ จะได้ $S = \{-1 , \dfrac{-3}{4} , \dfrac{-2}{3} , \dfrac{-5}{8} , ...\}$

ดังนั้น $-1$ ไม่เป็นขอบเขตบน เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด** จัดรูป $x^2 - 4x + 3y^2 - 2 = 0$

$$(x-2)^2 + 3y^2 = 6$$

$$\frac{(x-2)^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

เป็นวงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (2 , 0) และแกนเอกขนานกับแกน X จะได้ $a = \sqrt{6}$ , $b = \sqrt{2}$

ดังนั้น $c = \sqrt{6-2} = 2$ เพราะฉะนั้นจุดโฟกัสอยู่ที่ (0 , 0) และ (4 , 0) เส้นที่ทำมุม 45 องศากับแกน X มีความชันเท่ากับ tan 45 = 1

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $y = x$ และ $y = x - 4$

$x - y = 0$ และ $x - y - 4 = 0$

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองมีค่าเท่ากับระยะระหว่างจุด (0 , 0) กับเส้นตรง $x - y - 4 = 0$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{|0-0-4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

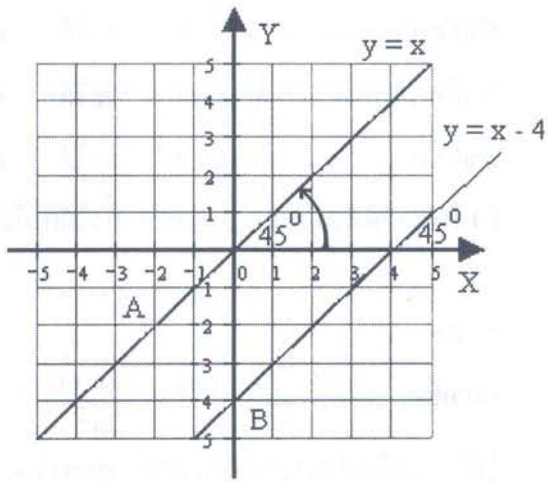
**การตัดตัวเลือก** เมื่อทราบจุดโฟกัสของวงรีคือ (0 , 0) และ (4 , 0) แล้วเขียนเส้นตรงจริงๆ และวัดระยะตั้งฉาก ก็จะได้คำตอบเหมือนกัน

ความยาว AB = 2.9

จากค่าจริงและค่าประมาณในตัวเลือก

1. $2\sqrt{2} = 2.82$
2. $4\sqrt{2} = 5.66$
3. 2
4. 4

เลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 1. $2\sqrt{2}$ ดีกว่า




**9. ตอบ 4.**

**แนวคิด** จัดรูป $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 9$$

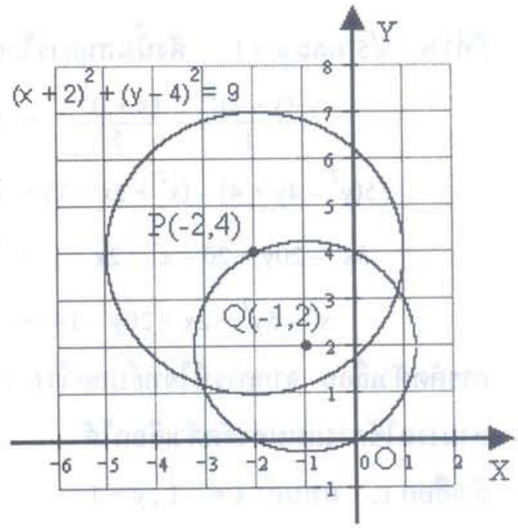
ดังนั้นพิกัดของจุดศูนย์กลางวงกลมคือ P(– 2 , 4) เพราะฉะนั้นจุดกึ่งกลาง OP คือ Q(– 1 , 2)

สมการเส้นตรง OP คือ $\frac{y}{x} = \frac{4}{-2} = -2$ หรือ $y = -2x$

ความยาว OQ เท่ากับ $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

สมการวงกลมที่ต้องการคือ $(x+1)^2+(y-2)^2 = 5$

$$x^2+2x+y^2-4y = 0$$




**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1** เมื่อเราได้พิกัด P(– 2 , 4) จะรู้ทันทีว่าความชันเส้นตรง OP ต้องเป็นลบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง ต่อไปเอาจุด (– 2 , 4) แทนค่าในสมการวงกลม เราก็จะตัดตัวเลือก 2. ทิ้งไปได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** จากรูปจะเห็นว่า ความชัน OP เท่ากับ –2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**10.ตอบ 2.**

**แนวคิด** จัดรูปสมการวงรี

$$6x^2+5y^2+12x-20y-4 = 0$$

$$6(x^2+2x+1)+5(y^2-4y+4) = 4+6+20$$

$$6(x+1)^2+5(y-2)^2 = 30$$

$$\frac{(x+1)^2}{5}+\frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

วงรีมีจุดศูนย์กลางที่ (–1 , 2)

แกนเอกขนานแกน Y

โดยมีค่า $a=\sqrt{6}$ , $b=\sqrt{5}$ ดังนั้น c = 1

เพราะฉะนั้นจุดของวงรีคือ

$(-1, 2+\sqrt{6})$ และ $(-1, 2-\sqrt{6})$

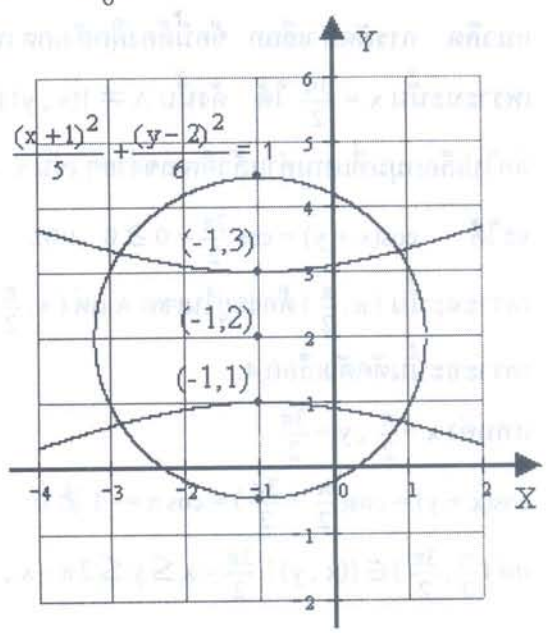
จุดโฟกัสของวงรีคือ (–1 , 3) และ (–1 , 1)

เพราะฉะนั้นไฮเพอร์โบลา H

จะมีจุดศูนย์กลางที่ (– 1 , 2)

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y

มีจุดยอดที่ (–1 , 3) และ (–1 , 1)



มีค่า $b = \sqrt{5}$ และ $a = 1$ ดังนั้นสมการไฮเพอร์โบลาคือ

$$\frac{(y-2)^2}{1} - \frac{(x+1)^2}{5} = 1$$
$$5(y^2 - 4y + 4) - (x^2 + 2x + 1) = 5$$
$$5x^2 - 20y + 20 - x^2 - 2x - 1 = 5$$
$$x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 14 = 0$$

**การตัดตัวเลือก** จากการที่โจทย์บอกว่า $(-1, 3)$, $(-1, 1)$ เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลาทำให้เราสามารถใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. แทนค่า $x = -1$, $y = 1$

$$x^2 - 5y^2 - 2x - 20y + 14 = 1 - 5 + 2 - 20 + 14 \neq 0$$

ตัวเลือก 3. แทนค่า $x = -1$, $y = 3$

$$x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 18 = 1 - 45 - 2 + 60 - 18 \neq 0$$

ตัวเลือก 4. แทนค่า $x = -1$, $y = 1$

$$5x^2 - y^2 - 2x + 20y + 18 = 5 - 1 - 2 + 20 + 8 \neq 0$$

เพราะฉะนั้น 1. , 3. และ 4. ผิดตัดทิ้งได้

**11. ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ข้อนี้ต้องฝึกสังเกต เพราะว่าตัวเลือก 3. มีเงื่อนไข $x > 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{3\pi}{2}$ ได้ ดังนั้น $A \neq \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2\pi - x, x > 0\}$

ต่อไปเลือกมุมที่แทนค่าแล้วคิดเลขง่ายๆ เช่น $x = \pi$ , $y = \frac{\pi}{2}$

จะได้ $\cos(x + y) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0 \geq 0$ และ $\sin(x + y) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \leq 0$

เพราะฉะนั้น $(\pi, \frac{\pi}{2})$ ต้องอยู่ในเซต A แต่ $(\pi, \frac{\pi}{2}) \notin \{(x, y) \mid \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi, \frac{3\pi}{4} \leq y \leq \pi\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ , $y = \frac{3\pi}{2}$

$\cos(x + y) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) = \cos\pi = -1 \ngeq 0$ เพราะฉะนั้น $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \notin A$

แต่ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \in \{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq 2\pi - x, x \leq \pi\}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

**วิธีจริง** $0 < x \leq \pi$ ...(1)

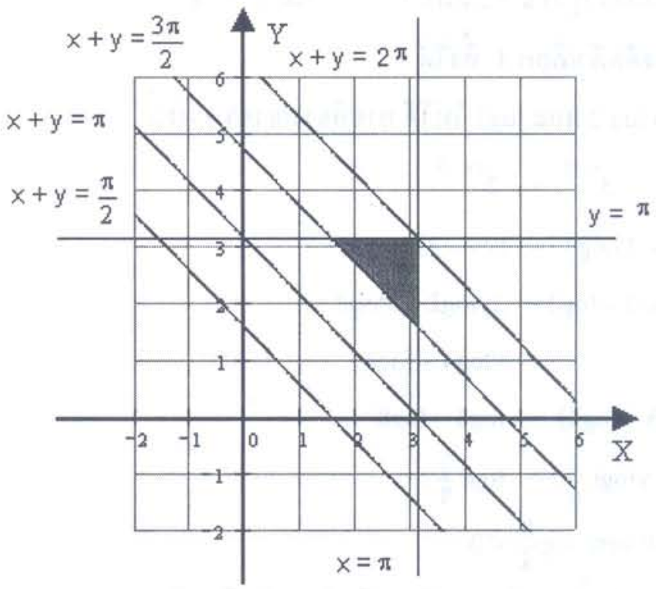
จะได้ว่า $0 < x + y \leq 2\pi$ ...(2)

จาก $\cos(x+y) \geq 0$ จะได้

$0 < x + y \leq \frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2} \leq x + y \leq 2\pi$ ...(3)

จาก $\sin(x+y) \leq 0$ จะได้ $\pi \leq x + y \leq 2\pi$ ...(4)

จากอสมการ (1) , (2) , (3) และ (4) เมื่อนำไปเขียนกราฟจะได้บริเวณแรเงาคือ บริเวณที่สอดคล้องเงื่อนไขของเซต A




สรุป $A = \{(x, y) \mid 0 < x \leq \pi, 0 < y \leq \pi, \cos(x+y) \geq 0, \sin(x+y) \leq 0\}$

$= \{(x, y) \mid \frac{3\pi}{2} - x \leq y \leq \pi, x \leq \pi\}$

**12. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $(2\log_3 0.5)\log_{0.5} x = \log_3 4$

$$\frac{2\log 0.5}{\log 3}\,\frac{\log x}{\log 0.5} = \log_3 4$$

$$\log_3 x^2 = \log_3 4$$

$$x^2 = 4$$

เพราะว่า $x = -2$ ไม่ได้ ดังนั้น $x = 2$

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$

$$(y-1)(0.477) = (2y-3)(0.301)$$

$$0.477y - 0.477 = 0.426$$

$$y = 3.408$$

เพราะฉะนั้น $0 < x < y$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเรารู้ว่า $x = 2$ และ $3^{2-1} = 3 \neq 2 = 2^{4-3}$

ดังนั้น $y \neq 2$ แน่จึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ในกรณีที่เราจำค่า log 2 และ log3 ไม่ได้ อาจพิจารณาค่า y ดังนี้

$$3^{y-1} = 2^{2y-3}$$

$$(y-1)\log 3 = (2y-3)\log 2$$

$$y\log 3 - \log 3 = 2y\log 2 - 3\log 2$$

$$= y\log 4 - \log 8$$

$$y(\log 3 - \log 4) = \log 3 - \log 8$$

$$y\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{3}{8}\right)$$

เพราะว่า $\log\frac{3}{4} < 0$ และ $\log\frac{3}{8} < 0$

เพราะฉะนั้น $y > 0$ ดังนั้นตัวเลือก 3. ผิดเหลืออีก 2 ตัวเลือกต้องเดา

**13. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โดยการแทนค่า $x = 1$ จะได้ $\log_3 1 - \log_{3^2} 1 + \ldots = 0$

ดังนั้น $x = 1$ ได้ เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

ต่อไปลองแทนค่า $x = 3$ จะได้

$$\log_3 3 - \log_{3^2} 3 + \log_{3^4} 3 - \log_{3^8} 3 + \ldots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} < 1$$

เพราะฉะนั้น $x = 3$ ได้เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

**วิธีจริง** จาก $\log_3 x - \log_{3^2} x + \log_{3^4} x - \log_{3^8} x + ...$

$$= \frac{\log x}{\log 3} - \frac{\log x}{2\log 3} + \frac{\log x}{4\log 3} - \frac{\log x}{8\log 3} + ... = \frac{\log x}{\log 3}\left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\log x}{\log 3}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}\log_3 x$$

พิจารณาอสมการ $\frac{2}{3}\log_3 x < 1 = \log_3 3$

$$\log_3 x < \frac{3}{2}\log_3 3$$

$$\log_3 x < \log_3 3^{\frac{3}{2}}$$

$$x < 3^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{3}\log_3 x < 1$ ก็ต่อเมื่อ $0 < x < 3\sqrt{3}$

**14.ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์ข้อนี้มีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร ดังนั้นการแทนค่าที่ง่ายและเหมาะสมเราก็จะตัดตัวเลือกทิ้งได้ เช่น

$x = 0$ จะได้ $y = \sqrt{1+1+2} = 2$ เอา $y = 2$ แทนค่าในตัวเลือกแต่ละตัว

ตัวเลือก 1. $\log_2(\frac{2+0}{2}) = \log_2 1 = 0$ ใช้ได้

ตัวเลือก 2. $\log(\frac{2+\sqrt{8}}{2}) \neq 0$ ตัดตัวเลือกนี้ทิ้งเลย

ตัวเลือก 3. $\log(\frac{2+0}{2}) = \log 1 = 0$ ยังตัดทิ้งไม่ได้

ตัวเลือก 4. $\log(\frac{2+\sqrt{8}}{2}) \neq 0$ ตัดทิ้งได้เลย

ลองแทนค่าต่อเช่น $x = 1$ จะได้ $y = \sqrt{4+\frac{1}{4}+2} = \sqrt{\frac{16+1+8}{4}} = \frac{5}{2}$

แทนค่าในตัวเลือก 1. และ 3.

ตัวเลือก 1. $\log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}-4}}{2}\right) = \log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) = \log_2 2 = 1$

ตัวเลือก 3. $\log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{25}{4}+4}}{2}\right) = \log_2\left(\frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2}\right) \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

**วิธีจริง** $2^{2x}+2^{-2x}+2= \dfrac{(2^{2x})^2+1+2(2^{2x})}{2^{2x}}=\dfrac{(2^{2x}+1)^2}{2^{2x}}=\left[\dfrac{2^{2x}+1}{2^x}\right]^2$

เพราะฉะนั้น
$$y = \frac{2^{2x}+1}{2^x}$$
$$2^x y = 2^{2x}+1$$
$$(2^x)^2 - y\,2^x + 1 = 0$$
$$2^x = (\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$$
$$x = \log_2(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$$

**15. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.**

เมื่อเราทราบว่า $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+...+\dfrac{1}{\log_9 x}+\dfrac{1}{\log_{10} x} = \log_x 10! \le 1$

จะพบว่า $x = 10!$ ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

และ $x = 0.1$ ได้เพราะว่า $\dfrac{\log 10!}{\log 0.1} = -\log 10! \le 1$ ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** โดยการเลือกค่า x ที่เหมาะสมคือ คิดเลขง่าย และจำแนกตัวเลือกได้เช่น

$x = 10$ จะได้ $\log_{10}10 = 1$ และ $\log_n 10 > 0$ , $n = 2, 3, ..., 9$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{1}{\log_2 10}+\dfrac{1}{\log_3 10}+...+\dfrac{1}{\log_{10} 10} > 1$

นั่นคือเซตคำตอบต้องไม่มี 10 เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

**วิธีจริง** $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+...+\dfrac{1}{\log_9 x}+\dfrac{1}{\log_{10} x} = \log_x 2+\log_x 3+...+\log_x 9+\log_x 10 = \log_x 10!$

เพราะว่า $\log_x 10! \le 1$ เพราะฉะนั้น $\dfrac{\log_x 10!}{\log x} \le 1$

เมื่อ $0 < x < 1$ จะได้ $\log x < 0$ ดังนั้น $\dfrac{\log_x 10!}{\log x} \le 1$ แน่นอน

เมื่อ $x > 1$ จะได้ $\log x > 0$
$$\log 10! \le \log x$$
$$10! \le x$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $(0, 1) \cup [10!, \infty)$

**16.ตอบ 2.**

**แนวคิด** $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 1} = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = x - 2$ เมื่อ $x \neq \pm 1$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x - 2 = -1$

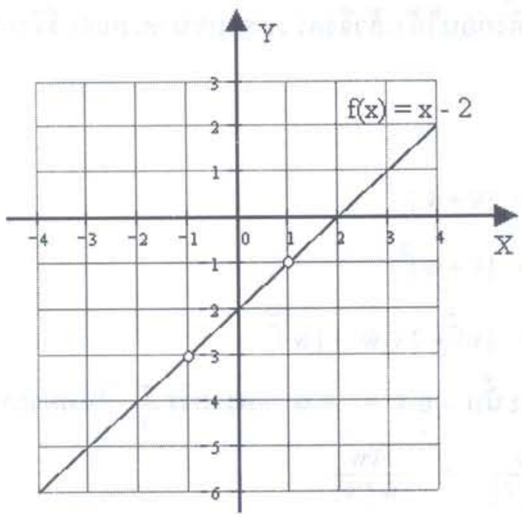
$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} x - 2 = -3$

เพื่อให้ฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 1$ และ $x = -1$

ต้องกำหนดให้ $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = -1$

และ $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = -3$

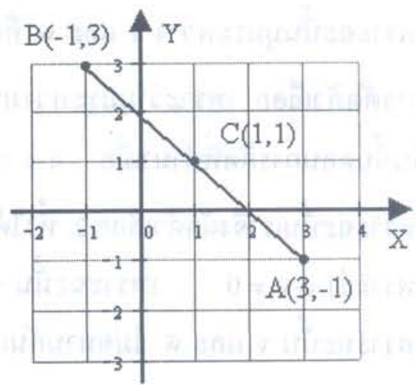
**การตัดตัวเลือก** จากกราฟของ $f(x) = x - 2$ เมื่อ $x \neq \pm 1$ มีกราฟเป็น




เพื่อให้ f(x) ต่อเนื่องต้องกำหนด $f(1) = -1$ และ $f(-1) = -3$

**17.ตอบ 3.**

**แนวคิด**




จุดกึ่งกลาง A และจุด B คือ $(\frac{-1+3}{2}, \frac{3-1}{2}) = (1, 1)$

$\overrightarrow{AB} = (-1-3)\bar{i} + (3+1)\bar{j} = -4\bar{i} + 4\bar{j}$

$\overrightarrow{AC} = (1-3)\bar{i} + (1+1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$

$\overrightarrow{CB} = (-1-1)\bar{i} + (3-1)\bar{j} = -2\bar{i} + 2\bar{j}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = (-2)(-2)+(2)(2) = 8$

เวกเตอร์ที่ต้องการคือ $\dfrac{8\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{8}{\sqrt{16+16}}(-4\bar{i}+4\bar{j}) = \dfrac{32}{\sqrt{32}}(-\bar{i}+\bar{j}) = -4\sqrt{2}\bar{i}+4\sqrt{2}\bar{j}$

**การตัดตัวเลือก 1.** เมื่อรู้ว่า $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB} = 8$ เราคิดต่อดังนี้ ดังนั้นเวกเตอร์ที่ต้องการต้องมีขนาดเท่ากับ 8 แต่ $|-4\bar{i}+4\bar{j}| = \sqrt{32} = |4\bar{i}+4\bar{j}| \neq 8$ เราจึงตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

เพราะว่าเวกเตอร์ที่ต้องการมีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ ต้องเป็นเลขบวกเหมือนของ $\overrightarrow{AB}$ เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

**การตัดตัวเลือก 2.** เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i}+4\bar{j}$ เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ ต้องมีสัมประสิทธิ์ของ $\bar{i}$ เป็นลบ และสัมประสิทธิ์ของ $\bar{j}$ เป็นบวก

ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งก่อนได้ แล้วจึงตรวจสอบขนาดเวกเตอร์ทีหลัง

**18. ตอบ 3.**

**แนวคิด วิธีจริง**

$$|\bar{u}-\bar{v}| = |\bar{v}+\bar{w}|$$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{v}+\bar{w}|^2$$

$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{v}|^2 + 2\bar{v}\cdot\bar{w} + |\bar{w}|^2$$

เพราะว่า $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ เพราะฉะนั้น $-\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$ เพราะว่า $\frac{\pi}{5}$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้น

$$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{u}\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = \frac{-\bar{v}\bar{w}}{|\bar{w}||\bar{v}|}$$

$$-\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\bar{v}\bar{w}}{|\bar{w}||\bar{v}|}$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{\bar{v}\bar{w}}{|\bar{w}||\bar{v}|}$$

เพราะฉะนั้นมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ คือ $\frac{4\pi}{5}$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่ามุมระหว่างเวกเตอร์ต้องอยู่ในช่วง $[0, \pi]$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

ในขั้นตอนการคิดที่ทำมาเมื่อ $-\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$ แสดงว่ามุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ไม่เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แน่นอน

เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\bar{v}\cdot\bar{w} \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ ไม่ขนานกันแน่นอน เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

**19.ตอบ 2.**

**แนวคิด** จำนวนคนงาน $N = 1+3+x+5+8+y+10+4 = 31+x+y$

$P_{25}$ ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{N}{4}$ เพราะว่า $P_{25} = 100.5$ ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 96 – 100

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{31+x+y}{4}$

$$36+4x = 31+x+y$$

$$3x - y = -5 \qquad \ldots(1)$$

$Q_3$ ตรงกับข้อมูลตัวที่ $\frac{3N}{4}$

เพราะว่า $Q_3 = 110.5$ ตรงกับขีดจำกัดบนของชั้น 106 – 110

เพราะฉะนั้น $1+3+x+5+8+y = \frac{3N}{4} = \frac{3}{4}(31+x+y)$

$$4(17+x+y) = 3(31+x+y)$$

$$68+4x+4y = 93+3x+3y$$

$$x+y = 25 \qquad \ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) ได้ $x = 5$ และ $y = 20$

เพราะฉะนั้นคนงานที่ได้ค่าจ้างต่ำกว่า 105.5 บาท มี $1+3+x+5+8 = 22$ คน

**ข้อสังเกต** เมื่อ $N$ = จำนวนคนทั้งหมด

เพราะว่า $P_{25} = 100.5$ เพราะฉะนั้น $1+3+x+5 = \frac{N}{4}$

เพราะว่า $Q_3 = 110.5$ เพราะฉะนั้น $\frac{N}{4} = 10+4$

ดังนั้น $9+x = 14$ เพราะฉะนั้น $x = 5$ โดยไม่จำเป็นต้องหาค่า y ก็จะได้คนที่มีรายได้ต่ำกว่า 105.50 บาท เท่ากับ 22 คนเหมือนกัน

**การตัดตัวเลือก** **พิจารณาตัวเลือก 1.**

ถ้า $8+5+x+3+1 = 16$ แล้ว $x = -1$

ดังนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้ง

**พิจารณาตัวเลือก 3.**

ถ้า $8+5+x+3+1 = 28$ แล้ว $x = 11$

จะขัดแย้งกับ $1+3+11+5 = 20 = \frac{N}{4} \neq 14$

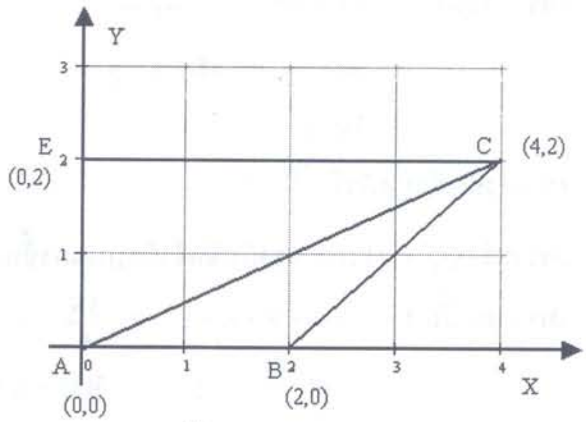
ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 4. ผิดด้วย

**20. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรวาดรูปให้สอดคล้องกับโจทย์ก็จะหาค่า a , b ได้ ตัวอย่างเช่น A(0,0) , B(2,0) , C(2,4) และ E(0,2) จะได้ว่า $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$

จากรูป $\overrightarrow{BE} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

$\overrightarrow{CB} = -2\bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\overrightarrow{CA} = -4\bar{i} - 2\bar{j}$




$$\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA}$$

$$-4\bar{i} + 2\bar{j} = a(-2\bar{i} - 2\bar{j}) + b(-4\bar{i} - 2\bar{j})$$

$$= (-2a - 4b)\bar{i} + (-2a - 2b)\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น $-2a - 4b = -4$

$-2a - 2b = 2$

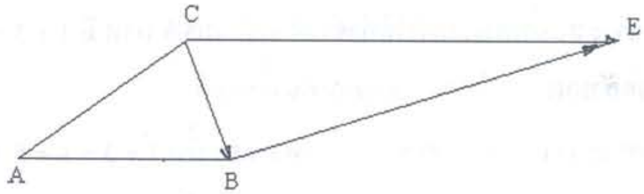
ดังนั้น $a = -3$ , $b = 2$ และ $b - a = 5$

จากตัวอย่างเพียงเท่านี้ทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้ทันที

**วิธีจริง** ต้องใช้การจัดรูปพีชคณิตแน่นอน

เพราะว่า $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB}$




เพราะว่า $a\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$

$$= \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB}$$

$$= 2\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CB}$$

$$(a+1)\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BA}$$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BA} = (\frac{a+1}{2})\overrightarrow{CB} + \frac{b}{2}\overrightarrow{CA}$

เพราะว่า $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = (\frac{a+1}{2})\overrightarrow{CB} + \frac{b}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{b}{2}\overrightarrow{CA} + (\frac{a+1}{2})\overrightarrow{CB}$

$\frac{a+1}{2} = -1$ และ $\frac{b}{2} = 1$

เพราะฉะนั้น $a = -3$ และ $b = 2$ ทำให้ $b - a = 5$

∩∅∪⊂∈∉≥≤↔←≠≡×±°∞→θ≥≮≰≯≱

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 17.

1. กำหนดให้ $A' \cap B = (A \cap B')'$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A \neq B'$   2. $A' \neq B$

   3. $A \cup B' \subset B'$   4. $A \not\subset A \cap B$

2. ให้ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ และ $X = \{x \in U \mid$ ห.ร.ม.$(x, 100) = 1\}$

   ผลบวกของสมาชิกในเซต X เท่ากับเท่าใด

   1. 5050   2. 3000

   3. 2000   4. 1050

3. ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $x = \frac{a-b}{a+b}$ , $y = \frac{b-c}{b+c}$ และ $z = \frac{c-a}{c+a}$ เป็นจำนวนจริง

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $x + y + z \geq 0$   2. $x + y + z < 0$

   3. $xyz < 0$   4. $(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$

4. กำหนดให้ $U = \{f \mid f : \{1, 2, 3, 4\} \xrightarrow{1-1} \{1, 2, 3, 4\}\}$   $E \subset U$ มีคุณสมบัติดังนี้

   $f \in E$ ก็ต่อเมื่อ   (1) $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$

   และ   (2) ถ้า $f(3) \neq 4$ แล้ว $[f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)]$

   จำนวนสมาชิกของเซต E เท่ากับเท่าใด

   1. 8   2. 10

   3. 12   4. 16

5. กำหนดให้   $U = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน และ $f \subset \{1, 2, 3, 4\} \times \{a, b\}\}$

   $A = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $R_f = \{a, b\}\}$   จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด

   1. 12   2. 14

   3. 16   4. 56

6. ให้ $a = 0.9$ , $b = a^a$ และ $c = a^b$   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $a < b < c$   2. $b < a < c$

   3. $a < c < b$   4. $b < c < a$

7. ให้ $\ell$ แทนเส้นตรงที่มีสมการ $y = 2x$ พิกัดของจุด $P_0$ คือ $(0, 2)$
ถ้า $P_1$ เป็นโพรเจกชันของ $P_0$ บน $\ell$ , $P_2$ เป็นโพรเจกชันของ $P_1$ บนแกน Y
และ $P_3$ เป็นโพรเจกชันของ $P_2$ บน $\ell$ พิกัดของ $P_3$ คือคู่อันดับใด

1. $(0.5, 1)$ 2. $(0.64, 1.28)$
3. $(0.8, 1.6)$ 4. $(0.84, 1.68)$

8. ให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0, 0)$ และมีเส้นตรง $x + y + 2\sqrt{2} = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์ค่าของ $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{2}$ 2. $-2\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{2}$ 4. $-4\sqrt{2}$

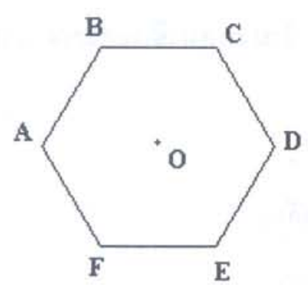
9. กำหนด $\Delta ABC$ มี $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$ ค่าของ $\dfrac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$ 2. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$
3. $3\sqrt{3}$ 4. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

10. กำหนด $U = [-8, 12]$
$A = \{x \in U \mid \sin|x| = 1\}$
$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$
$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap C \neq C \cap B$ 2. $A - B \subset C - B$
3. $C - B \subset C - A$ 4. $A - B \neq A - C$

11. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และมี O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยมดังรูป กำหนดความยาว AO เท่ากับ 2 เซนติเมตร เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดใหญ่กว่า 4 เซนติเมตร




1. $\overline{AD} + \overline{FD}$
2. $\overline{AB} + \overline{ED}$
3. $\overline{FO} + \overline{DO}$
4. $\overline{OD} + \overline{OB}$

12. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $A = \sqrt{\frac{3}{5}}a + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3}a + \frac{4a}{\sqrt{3}}$ จะได้ว่า $A^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{5}a$
2. $\sqrt{5}\,a$
3. $\frac{\sqrt{5}}{3}a^2$
4. $\frac{3}{5}a^2$

13. ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = tx^2 + 8x + 10 - t$ และ $t \in R\}$ A เป็นเซตของ t ที่ทำให้ $R_f \subset R^+$ ถ้า R เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $B = (-2, 4)$ แล้ว $A' \cap B$ เท่ากับข้อใด

1. $(2, 4)$
2. $(-2, 2)$
3. $(-2, 4]$
4. $(-2, 2] \cup (4, 8)$

14. ถ้า $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = \frac{6}{x}$ แล้ว $(fog)^{-1}(x)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{12}{x} - 1$
2. $\frac{12}{x+1}$
3. $12 - \frac{1}{x}$
4. $\frac{12}{x-1}$

15. สามเหลี่ยม ABC มี M เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดไปยังฐาน ถ้าพิกัดของจุด A(–4 , 3) , B(4 , –1) และ M(3 , 3) แล้วพิกัดของ C เท่ากับพิกัดในข้อใด

1. (3 , 5)
2. (4 , 5)
3. (5 , 4)
4. (6 , 4)

16. $F_1$ และ $F_2$ เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 = 144$ กำหนด $F_1$ อยู่ทางซ้ายมือของ $F_2$ และ M เป็นจุดแบ่งของเส้นตรง $F_1F_2$ ที่ทำให้ $F_1M : F_2M = 2 : 3$ ลากเส้นตรงผ่านจุด M ทำมุม 135° กับแกน X ระยะตั้งฉากจากจุดกำเนิดมายังเส้นตรงเส้นนี้จะยาวกี่หน่วย

1. $\sqrt{2}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
3. 1
4. $\frac{1}{2}$

17. ถ้า (a , b) เป็นพิกัดของจุดสัมผัสที่ได้จากการลากเส้นตรงผ่านจุด (0 , 4) ไปสัมผัสกราฟของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 30 = 0$ แล้ว a + b มีค่าเท่าไร

1. 6
2. $\frac{2}{5}$
3. $\frac{24}{5}$
4. $\frac{26}{5}$

18. ให้ $r_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y - 2 \leq 0\}$

$r_2 = \{(x, y) \mid \ln|y - x^2| \geq 0\}$

เรนจ์ของ $r_1 \cap r_2$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[1, 2]$
2. $(-\infty, 0]$
3. $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, 1]$
4. $(-\infty, \frac{1}{2}] \cup [1, 2]$

19. กำหนดให้ $\sin(45^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = a$

ค่าของ $2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $a^2 + 1$
2. $a^2 - 1$
3. $1 - a^2$
4. $\sqrt{1 - a^2}$

20. ถ้า $\tan x = \frac{1}{3}$ แล้ว $\sin 4x$ มีค่าเท่ากับค่าใดต่อไปนี้

1. $-1$
2. $1$
3. $-\frac{24}{25}$
4. $\frac{24}{25}$

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂⊄∈∉°∞∧∨ ≤↔≠→±≥ → ↑ X Y≮≯≤≵≰≱
❶❷❸❹①②③④

**สนใจเทคนิคการตัดตัวเลือกเพิ่มเติมหาอ่านได้ใน**

**คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7**

**คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10**

**คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16**

**หาซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย**

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 17.

**1. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ลักษณะของโจทย์ข้อนี้เราสามารถใช้การแทนค่าเซต A และ B ที่เหมาะสมแล้วทำการตัดตัวเลือกได้ เช่น $U = \{1, 2\}$ เลือก $A = \{1\}$ และ $B = \{2\}$ เพื่อให้สอดคล้องกับเงื่อนไขของโจทย์ เพราะฉะนั้น $A' \cap B = \{2\}$ และ $(A \cap B')' = \{2\}$ ตัวเลือกแต่ละตัวเป็นดังนี้

1. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$
2. ผิด เพราะว่า $A' = \{2\}$ และ $B = \{2\}$
3. ถูก เพราะว่า $A \cup B' = \{1\}$ และ $B' = \{1\}$
4. ผิด เพราะว่า $A = \{1\}$ และ $A \cap B' = \{1\}$

**วิธีจริง** จาก $A' \cap B = (A \cap B')'$ จะได้ $A' \cap B = A' \cup B$

เพราะฉะนั้น $A' = B$ ตามผลที่ตามมาคือ

1. $A \neq B'$ เป็นข้อความที่ผิด
2. $A' \neq B$ เป็นข้อความที่ผิด
3. $A \cup B' = B'$ ดังนั้น $A \cup B' \subset B'$ ถูกต้อง
4. $A \cap B' = A$ ดังนั้น $A \not\subset A \cap B'$ เป็นข้อความที่ผิด

**หมายเหตุ** การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

$a \in X \rightarrow a \in X \cup Y \rightarrow a \in X \cap Y \rightarrow a \in Y$

เพราะฉะนั้น $X \subset Y$ ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $Y \subset X$ สรุป ถ้า $X \cap Y = X \cup Y$ แล้ว $X = Y$

**2. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เนื่องจากจำนวนสมาชิกของ U มีไม่มากและจำนวน x ที่ ห.ร.ม.(x , 100) = 1 คือตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับ 100 ซึ่งเราสามารถแจงนับได้ดังนี้

| สมาชิกที่ใช้ได้ | ผลบวก |
|---|---|
| 1 , 3 , 7 , 9 | 20 |
| 11 , 13 , 17 , 19 | 60 |
| 21 , 23 , 27 , 29 | 100 |
| 31 , 33 , 37 , 39 | 140 |

| | |
|---|---|
| 41 , 43 , 47 , 49 | 180 |
| 51 , 53 , 57 , 59 | 220 |
| 61 , 63 , 67 , 69 | 260 |
| 71 , 73 , 77 , 79 | 300 |
| 81 , 83 , 87 , 89 | 340 |
| 91 , 93 , 97 , 99 | 380 |
| | **รวม 2000** |

**วิธีจริง** $U = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

$$\sum_{x \in U} x = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{100}{2}(1 + 100) = 5050$$

$X = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 100) = 1\}$

$X' = \{x \in U \mid \text{ห.ร.ม.}(x, 100) \neq 1\}$

เพราะว่า $100 = 2^2.5^2$

เพราะฉะนั้น $x \in U$ และ ห.ร.ม.$(x, 100) \neq 1$ คือตัวเลข x ที่ 2 หารลงตัว หรือ 5 หารลงตัว

ให้ $A = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\}$

$= \{2, 4, 6, \ldots, 100\}$

จะได้ $\sum_{x \in A} x = 2 + 4 + 6 + \ldots + 100 = \frac{50}{2}(2 + 100) = 2550$

ให้ $B = \{x \in U \mid 5 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว}\} = \{5, 10, 15, \ldots, 100\}$

จะได้ $\sum_{x \in B} x = 5 + 10 + 15 + \ldots + 100 = \frac{20}{2}(5 + 100) = 1050$

$A \cap B = \{x \in U \mid 2 \text{ หาร } x \text{ ลงตัว และ } 5 \text{ หาร } X \text{ ลงตัว}\}$

$= \{10, 20, 30, \ldots, 100\}$

$$\sum_{x \in A \cap B} x = 10 + 20 + 30 + \ldots + 100 = \frac{10}{2}(10 + 100) = 550$$

เพราะว่า $X' = A \cup B$

และ $\sum_{x \in A \cup B} x = \sum_{x \in A} x + \sum_{x \in B} x - \sum_{x \in A \cap B} x$

เพราะฉะนั้น $\sum_{x \in X'} x = 2550 + 1050 - 550 = 3050$

สรุป $\sum_{x \in X} x = \sum_{x \in U} x - \sum_{x \in X'} x = 5050 - 3050 = 2000$

**3. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a , b , c

แทนค่า $a = 1, b = 1$ และ $c = 1$ จะได้ $x = 0, y = 0$ และ $z = 0$ พิจารณาแต่ละตัวเลือก

1. $x + y + z = 0 \geq 0$ ใช้ได้
2. $x + y + z = 0 < 0$ ผิดแน่นอน
3. $xyz = 0 < 0$ ผิดอีกเหมือนกัน
4. $(1 - 0(1 - 0)(1 - 0) = (1 + 0)(1 + 0)(1 + 0)$ ใช้ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปแทนค่า $a = 1$ $b = 2$ และ $c = 3$ จะได้ $x = -\frac{1}{3}$ $y = -\frac{1}{5}$ และ $z = \frac{2}{4}$

เพราะว่า $x + y + z = -\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{2}{4} = -\frac{2}{60}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิดอีก

สรุปเหลือตัวเลือกเดียวคือ 4. เลือกเป็นคำตอบเลย

**วิธีจริง**

$$1 - x = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \frac{2b}{a+b}$$

$$1 - y = 1 - \left(\frac{b-c}{b+c}\right) = \frac{2c}{b+c}$$

$$1 - z = 1 - \left(\frac{c-a}{c+a}\right) = \frac{2a}{c+a}$$

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$1 + x = 1 + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2a}{a+b}$$

$$1 + y = 1 + \frac{b-c}{b+c} = \frac{2b}{b+c}$$

$$1 + z = 1 + \frac{c-a}{c+a} = \frac{2c}{c+a}$$

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

สรุป $(1 - x)(1 - y)(1 - z) = (1 + x)(1 + y)(1 + z)$

**4. ตอบ 1.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เนื่องจากเงื่อนไขสมาชิกของเซต E มี <u>และ</u> มากถึง 3 เงื่อนไข ดังนั้นการคิดบางเงื่อนไขก็จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เช่น

ให้ $F = \{f \in U \mid f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4\}$

การนับจำนวนสมาชิก F พิจารณาดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกเลข 2 ตัวจาก {1 , 2 , 3} เพื่อจับคู่กับ {1 , 2} ซึ่งทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

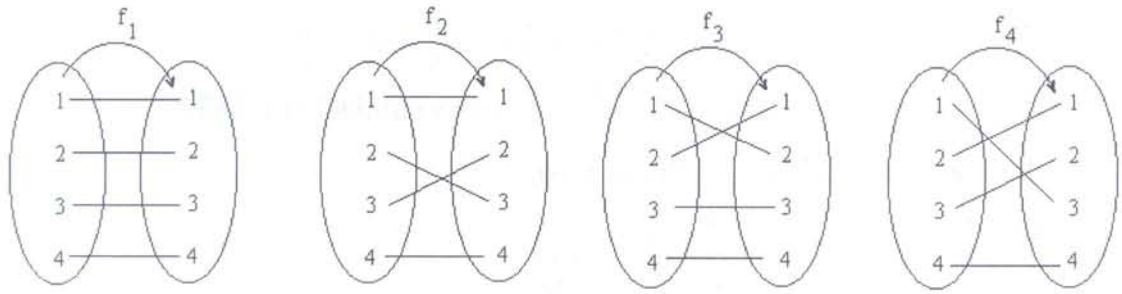
ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่าง {1 , 2} กับตัวเลขที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ 1 ทำได้ 2! วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของ {3 , 4} กับส่วนที่เหลือทำได้ 2! วิธี

เพราะฉะนั้น $n(F) = (3)(2!)(2!) = 12$

เพราะว่า $E \subset F$ เพราะฉะนั้น $n(E) \leq 12$ ดังนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้

เมื่อเราคิดเฉพาะสมาชิกใน F ที่ไม่อยู่ใน E คือ




เพราะฉะนั้น $n(E) \leq 12 - 4 = 8$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้เลย

**วิธีจริง** การนับจำนวนสมาชิก $f \in E$

**กรณี 1** $f(3) = 4$

ขั้นที่ 1 การส่งค่า 1 ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่า 2 ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่า 4 ทำได้ 1 วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ (3)(2)(1) = 6 วิธี

**กรณี 2** $f(3) \neq 4$

ขั้นที่ 1 เพราะว่า $f(3) < f(1)$ และ $f(3) < f(2)$

เพราะฉะนั้นการส่งค่าของ 3 ทำได้วิธีเดียวคือ $f(3) = 1$

ขั้นที่ 2 เพราะว่า $f(1) \neq 4$ และ $f(2) \neq 4$ เพราะฉะนั้น $f(4)$ ต้องเท่ากับ 4 ซึ่งทำได้ 1 วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าระหว่าง {1 , 2} กับ {1 , 2} ทำได้ 2! = 2 วิธี

วิธีทั้งหมดเท่ากับ (1)(1)(2) = 2 วิธี

สรุป $n(E) = 6 + 2 = 8$

5. **ตอบ 4.**

**แนวคิด** การนับจำนวนสมาชิกของ A จำแนกเป็น 3 กรณี

**กรณีที่ 1** $n(D_f) = 2$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก {1 , 2 , 3 , 4} ทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 การส่งค่าระหว่างสมาชิก 2 ตัวที่เลือกได้กับ {a , b} ทำได้ $2! = 2$ วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6)(2) = 12$ วิธี

**กรณีที่ 2** $n(D_f) = 3$

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก {1 , 2 , 3 , 4} ทำได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 3 ตัวที่เลือกได้เพื่อส่งค่าไปที่เดียวกันทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

ขั้นที่ 3 การส่งค่าของสมาชิกในขั้นที่ 2 ไปยัง {a , b} ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 4 ตัวเลขที่เหลือ 1 ตัว ส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(3)(2)(1) = 24$ วิธี

**กรณีที่ 3** $n(D_f) = 4$

กรณีที่ 3.1 สมาชิก 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 3 ตัวจาก 4 ตัวเพื่อส่งค่าทำได้ $\binom{4}{3} = 4$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิกที่เหลือกมาได้ทั้ง 3 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกันคือ a หรือ b ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกส่วนที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(4)(2)(1) = 8$

กรณีที่ 3.2 สมาชิก 2 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกัน

ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก 2 ตัวจาก 4 ตัวเพื่อส่งค่าทำได้ $\binom{4}{2} = 6$ วิธี

ขั้นที่ 2 สมาชิกที่เหลือกได้ทั้ง 2 ตัวส่งค่าไปที่เดียวกันคือ a หรือ b ทำได้ 2 วิธี

ขั้นที่ 3 สมาชิกส่วนที่เหลือส่งค่าได้ 1 วิธี

จำนวนวิธีทั้งหมดเท่ากับ $(6)(2)(1) = 12$ วิธี

สรุป จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับ $12 + 24 + 8 + 12 = 56$

**หมายเหตุ** โดยการฝึกสังเกตจากกรณีที่ 1 และ 2 เราจะได้จำนวนสมาชิก $n(A) \geq 12 + 24 = 36$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,2. และ 3. ทิ้งได้แล้ว

**6. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f(1) < f(b)$ เพราะฉะนั้น $a = f(1) < a^b = f(b) = c$

**หมายเหตุ** การจำค่า log2 ให้ดูที่หน้าของกรรมการคุมสอบ หู(3) ตา(0) จมูก(1) ตา(0) หู(3)

$\log 2 = 0.30103$ , $\log 4 = 2\log 2 = 0.30206$ , log3 มีค่าประมาณเท่ากับ $\frac{0.30103 + 0.60206}{2} = 0.4515$

เราสามารถนำมาใช้ประโยชน์ได้ดังนี้

$$\log a = \log 0.9 = \log 9 - 1 = 2\log 3 - 1 = 2(0.4515) - 1 = -0.097$$

$$\log b = \log a^a = a\log a = (0.9)(-0.097) = -0.0873$$

เพราะว่า $-0.0873 > -0.097$

$$\log b > \log a$$

เพราะฉะนั้น $b > a$ ซึ่งทำให้เราตัดตัวเลือก 1.,2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เปรียบเทียบ $(.9)^1$ กับ $(0.9)^{0.9}$ เนื่องจาก $f(x) = (0.9)^x$ เป็นฟังก์ชันลด และ $1 > 0.9$

เพราะฉะนั้น $f(1) < f(0.9)$ นั่นคือ $(0.9)^1 < (0.9)^{0.9}$ สรุป $a < b$

ขณะนี้ หากเราจะใช้วิธีตัดตัวเลือกก็สามารถตัดข้อ 2. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันลด และ $a < b$ เพราะฉะนั้น $f(a) > f(b)$

นั่นคือ $a^a > a^b$

$$b > c$$

สรุปตัวเลือกที่ถูกต้องคือ 3.

**7. ตอบ 2.**

**แนวคิด** $\ell$ มีสมการเป็น $y = 2x$ ซึ่งมีความชันเท่ากับ 2

เพราะว่า $P_0P_1$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $\ell$ เพราะฉะนั้น ความชัน $P_0P_1$ เท่ากับ $-\frac{1}{2}$

สมการเส้นตรง $P_0P_1$ คือ $y - 2 = (-\frac{1}{2})(x - 0)$

$$y = -\frac{x}{2} + 2$$

แทนค่า $y = 2x$

จะได้ $2x = -\frac{x}{2} + 2$ , $x = 0.8$

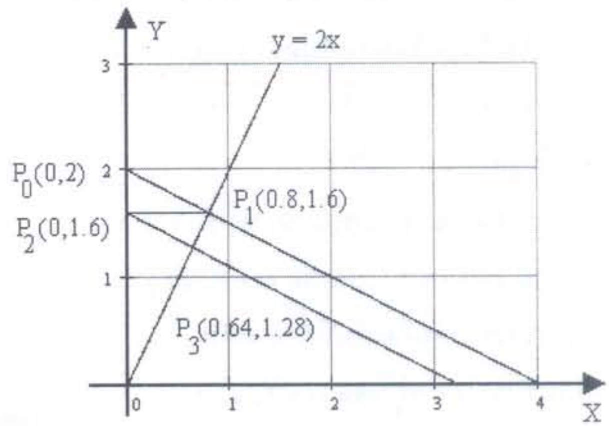
เพราะฉะนั้น $y = 1.6$

เพราะฉะนั้นพิกัด $P_1(0.8 , 1.6)$

$P_2$ เป็นโพรเจกชันของ $P_1$ บนแกน Y

ดังนั้น พิกัด $P_2$ คือ $(0 , 1.6)$

เพราะว่า $P_2P_3 \perp \ell$




เพราะฉะนั้นความชันของเส้น $P_2P_3 = -\frac{1}{2}$

และมีสมการเส้นตรง $P_2P_3$ เป็น $(y - 1.6) = (-\frac{1}{2})(x - 0)$

$$y - 1.6 = -\frac{x}{2}$$

แทน $y = 2x$ เพื่อหาจุดตัด $P_3$ จะได้ $2x - 1.6 = -\frac{x}{2}$, $x = 0.64$ และ $y = 1.28$

สรุปพิกัดของ $P_3$ คือ $(0.64 , 1.28)$

**การตัดตัวเลือก** โดยการวาดรูปตามข้อกำหนดของโจทย์โดยใช้สเกล 1 นิ้ว จะได้คำตอบเหมือนกัน

1. ลากเส้นตรง $\ell$
2. เขียนจุด $P_0(0. 2)$ และลากมาตั้งฉากกับ $\ell$ ที่ $P_1$
3. ลากเส้นจาก $P_1$ มาตั้งฉากกับแกน Y ที่จุด $P_2$
4. ลากเส้นจากจุด $P_2$ มาตั้งฉากกับ $\ell$ ที่ $P_3$
5. วัดพิกัดของจุด $P_3$ ได้ค่าพิกัดโดยประมาณ $(0.65 , 1.3)$

เพราะฉะนั้นเลือกคำตอบเป็นตัวเลือก 2. ดีกว่า

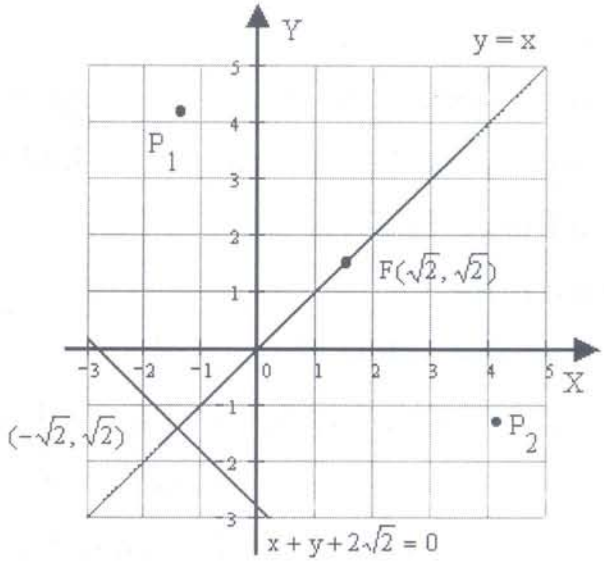
**หมายเหตุ** หากใช้ไหวพริบนิดหน่อย เราวัดพิกัด $P_3$ เฉพาะค่า $x = 0.65$ หรือ ค่า $y = 1.3$ เพียงค่าเดียวก็พอ

**8. ตอบ 3.**

**แนวคิด** ระยะทางจากจุด (0 , 0) ไปยังเส้นตรง $x + y + 2\sqrt{2} = 0$ มีค่าเท่ากับ $\frac{|0 + 0 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$

เพราะฉะนั้นค่า $c = 2$

เพราะว่าแกนพาราโบลาตัดกับเส้นไดเรกตริกซ์
ที่จุดซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง $y = x$
และ $x + y + 2\sqrt{2} = 0$
ซึ่งคือจุด $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
ด้วยลักษณะของการสมมาตรจะได้ว่า
จุดโฟกัสของพาราโบลาคือ $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
เส้นเรตัสเรกตัมคือเส้นที่ตั้งฉากกับ
แกนพาราโบลาผ่านจุด $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$
และมีความยาวเท่ากับ $|4c| = 8$
และความชันเท่ากับ $-1$
นั่นคือ $|FP_1| = 4 = |EP_2|$
และความชัน $EP_1$ = ความชัน $EP_2 = -1$




ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดที่ทำให้ $|PF| = 4$ และความชัน $PF = -1$

จะได้สมการ (1) และ (2) ดังนี้ $\quad (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 = 16 \quad$ ...(1)

$$\frac{y-\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}} = -1 \quad \text{...(2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\quad 2(x-\sqrt{2})^2 = 16$

$$x = \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}, -\sqrt{2}$$

เมื่อ $x = -\sqrt{2}$ จะได้ $y = 3\sqrt{2}$

เมื่อ $x = 3\sqrt{2}$ จะได้ $y = -\sqrt{2}$

ให้ $P_1(x_1, y_1) = P_1(-\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$, $P_2(x_2, y_2) = P_2(3\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

สรุป $\quad x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 4\sqrt{2}$

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** จากภาพพิกัด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$
โดยสังเกตค่าตัวเลขโดยประมาณ จะได้ว่า $x_1 + y_1 > 0$ และ $x_2 + y_2 > 0$
เพราะฉะนั้น $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 > 0$ ดังนั้น ตัวเลือก 2. และ 4. ตัดทิ้งได้

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** จากภาพประกอบที่วาดเมื่อรู้ว่า $F(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ เป็นจุดโฟกัสแล้วลากเส้นตั้งฉากกับแกนพาราโบลาที่จุด F และยาว 4 หน่วย ไปที่จุด $P_1$ และ $P_2$

ต่อไปเราวัดระยะทางด้วยไม้บรรทัดจะได้พิกัดโดยประมาณของ $P_1$ และ $P_2$ เป็น $P_1(-1.4 , 4 , 2)$ และ $P_2(4.2 , -1.4)$ ดังนั้น $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 = 5.4$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง เพราะว่า $2\sqrt{2} = 2.8$ และ $4\sqrt{2} = 5.6$ เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

**9. ตอบ 1.**

**แนวคิด** จาก $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$ เพราะฉะนั้น $\hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B} = 60^\circ$

$$\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C} = \sin40^\circ + \sin80^\circ + \sin60^\circ = 2\sin60^\circ\cos20^\circ + \sin60^\circ$$

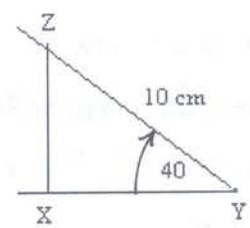
$$= \sin60^\circ(2\cos20^\circ + 1)$$

$$\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C} = \cos40^\circ + \cos80^\circ + \cos60^\circ = 2\cos60^\circ\cos20^\circ + \cos60^\circ$$

$$= \cos60^\circ(2\cos20^\circ + 1)$$

$$\frac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}} = \frac{\sin60^\circ(2\cos20^\circ + 1)}{\cos60^\circ(2\cos20^\circ + 1)} = \tan60^\circ = \sqrt{3}$$

**การตัดตัวเลือก** เขียนสามเหลี่ยมมุมฉาก XYZ โดยมี




$\hat{X} = 90^\circ$ , YZ ยาว 10 cm.

และ $\hat{Y} = 40^\circ$

โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 6.6 cm. และ XY ยาว 7.3 cm.

$$\sin40^\circ = \sin\hat{Y} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{6.6}{1.0} = 0.66$$

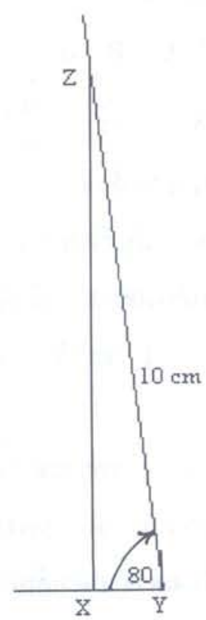
$$\cos40^\circ = \cos\hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{7.3}{1.0} = 0.73$$

เขียนสามเหลี่ยม XYZ

โดยมี $\hat{X} = 90^\circ$ , YZ ยาว 10 cm.

และ $\hat{Y} = 80^\circ$

โดยการวัดจะได้ XZ ยาว 9.8 , XY ยาว 1.7




$$\sin80^\circ = \sin\hat{Y} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{9.8}{1.0} = 0.98$$

$$\cos80^\circ = \cos\hat{Y} = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{1.7}{1.0} = 0.17$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}}{\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}} = \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ + \sin 60^\circ}{\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 60^\circ} = \frac{0.66+0.98+0.87}{0.73+0.17+0.5} = \frac{2.51}{1.4} = 1.79$$

เมื่อเปรียบเทียบกับค่าจากตัวเลือก 1. $\sqrt{3} = 1.73$ 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2} = 1.365$

3. $3\sqrt{3} = 5.19$ 4. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2.732}{2.83} = 0.965$

สรุปเลือกข้อ 1. ดีกว่า

**10. ตอบ** 4.

**แนวคิด** พิจารณาสมการ $\sin|x| = 1$ จะได้ $|x| = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \frac{13\pi}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \pm\frac{13\pi}{2}$

เพราะว่า $U = [-8, 12]$ เพราะฉะนั้น $A = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

จากสมการ $|\sin x| = 1$ จะได้ $\sin x = 1$ หรือ $\sin x = -1$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\} = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\} = \{-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}$

เพราะฉะนั้น เราสามารถพิจารณาแต่ละตัวเลือกได้ดังนี้

1. $A \cap C = \{\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\}, C \cap B = C$ นั่นคือ $A \cap C \neq C \cap B$
2. $A - B = \phi, C - B = \phi$ นั่นคือ $A - B \subset C - B$ ถูกต้อง
3. $C - A = \{-\frac{3\pi}{2}\}, C - B = \phi$ นั่นคือ $C - B \subset C - A$ ถูกต้อง
4. $A - B = \phi, A - C = \{-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}, A - B \neq A - C$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า ถ้า $\sin x = 1$ แล้ว $|\sin x| = 1$

เพราะฉะนั้น $C \subset B$ นั่นคือ $B \cap C = C$ และ $C - B = \phi$

ดังนั้นตัวเลือก 3. ถูกต้องเสมอ เราจึงตัดตัวเลือกนี้ทิ้งก่อน

เพราะว่า ถ้า $\sin|x| = 1$ จะได้ $\sin(x) = 1$ หรือ $\sin(-x) = 1$

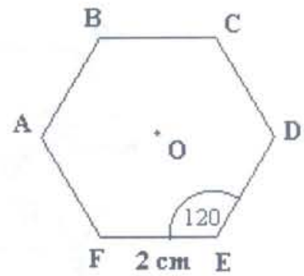
$\sin x = 1$ หรือ $-\sin x = 1$

นั่นคือ $|\sin x| = 1$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$ แน่นอน

ดังนั้น $A \cap B = A$ และ $A - B = \phi$ ดังนั้น ตัวเลือก 2. ถูกต้องจึงตัดทิ้งได้อีก

ตัวเลือกที่เหลือเราต้องเดาจากตัวเลือก 1. หรือ 4.

**11.ตอบ 1.**




**แนวคิด** มุม FED เท่ากับ 120 องศา และจากกฎของ cosine จะได้ว่า

$|\overline{FD}|^2 = |\overline{FE}|^2 + |\overline{ED}|^2 - 2|\overline{FE}||\overline{ED}|\cos 120^\circ = 4+4+4 = 12$

เพราะว่า $\overline{OA} + \overline{OD}$ เพราะฉะนั้น $|\overline{AD}| = 4$

เพราะว่ามุมที่ $\overline{AD}$ ทำกับ $\overline{FD}$ มีค่าเท่ากับ 150 องศา

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{FD}|^2 - 2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{FD}|\cos 150^\circ = 16 + 12 - 2(4)(\sqrt{12})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 52$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FD}| > 4$

เพื่อเป็นประโยชน์ต่อการศึกษาพิจารณาเพิ่มเติมกับตัวเลือกที่เหลือดังนี้

2. เพราะว่า ABO เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า เพราะฉะนั้น $|\overline{AB}| = |\overline{AO}| = 2$

ในทำนองเดียวกัน $|\overline{ED}| = 2$ เพราะว่า $\overline{AB} = \overline{ED}$ เพราะฉะนั้น $|\overline{AB} + \overline{ED}| = 2|\overline{AB}| = 4$

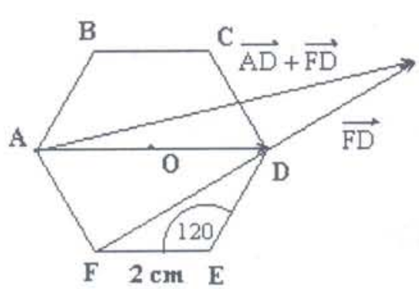
3. $|\overline{FO} + \overline{DO}|^2 = |\overline{FO}|^2 + |\overline{DO}|^2 - 2|\overline{FO}|.|\overline{DO}|.\cos 60^\circ = 4 + 4 - 2(2)(2)(\frac{1}{2}) = 4$

เพราะฉะนั้น $|\overline{FO} + \overline{OB}| = 2$

4. ในทำนองเดียวกันกับข้อ 3. $|\overline{OD} + \overline{OB}| = 2\sqrt{3}$

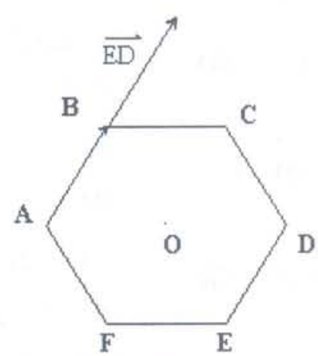
**การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** โดยการเขียนภาพประกอบและวัดขนาดของเวกเตอร์จะได้

1.



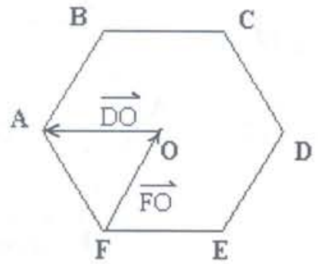

$|\overline{AD} + \overline{FD}| = 7.2$

2.




$|\overline{AB} + \overline{ED}| = 4$

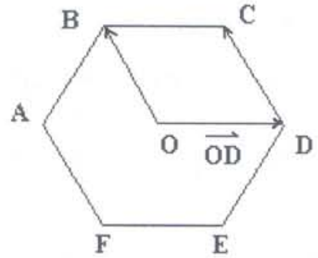
3.




$\overline{FO} + \overline{DO} = \overline{FO} + \overline{OA} = \overline{FA}$

ดังนั้น $|\overline{FO} + \overline{DO}| = 2$

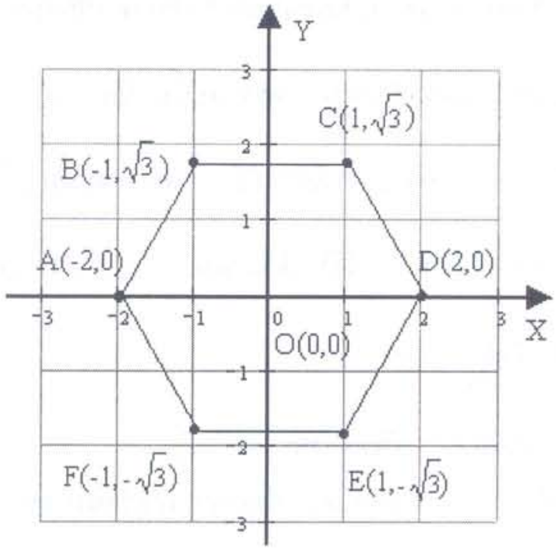
4.




$\overline{OD} + \overline{OB} = \overline{OD} + \overline{DC} = \overline{OC}$

เพราะฉะนั้น $|\overline{OD} + \overline{OB}| = |\overline{OC}| = 2$

**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** โดยการวางตำแหน่ง O ทับจุด (0 , 0) และ D ทับจุด (2 , 0) บนระนาบ XY จะได้พิกัดของจุดอื่น ๆ ดังนี้




ตัวเลือก 1. $\overline{AD} = \begin{bmatrix} 2-(-2) \\ 2-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\overline{FD} = \begin{bmatrix} 2-(-1) \\ 2-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overline{AD} + \overline{FD} = \begin{bmatrix} 4+3 \\ 0+\sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ , $|\overline{AD} + \overline{FD}| = \sqrt{49+3} = \sqrt{52} = 7.21$

ตัวเลือก 2. $\overline{AB} = \begin{bmatrix} -1-(-2) \\ \sqrt{3}-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ , $\overline{ED} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$\overline{AB} + \overline{ED} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2\sqrt{3} \end{bmatrix}$ , $|\overline{AB} + \overline{ED}| = \sqrt{4+12} = 4$

ตัวเลือก 3. $\overline{FO} = \begin{bmatrix} 0-(-1) \\ 0-(-\sqrt{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$ , $\overline{DO} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\overline{FO} + \overline{DO} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad , \quad |\overline{FO} + \overline{DO}| = \sqrt{1+3} = 2$$

ตัวเลือก 4. $\overline{OD} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\overline{OB} = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$

$$\overline{OD} + \overline{OB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad , \quad |\overline{OD} + \overline{OB}| = \sqrt{1+3} = 2$$

สรุปตัวเลือก 1. มีขนาดยาวกว่า 4 เซนติเมตร

**12.ตอบ 4.**

**แนวคิด** $A = \sqrt{\frac{3}{5}}\,a + \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3} + \frac{4a}{\sqrt{3}} \quad = a(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{75}}{3} + \frac{4}{\sqrt{3}})$

$$= a(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}) \quad = a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

เพราะฉะนั้น $A^2 = \frac{3}{5}a^2$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า A มี a เป็นตัวร่วม ดังนั้น $A^2$ มี $a^2$ เป็นตัวร่วม

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

**13.ตอบ 2.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $A' \cap B \subset B$

เพราะฉะนั้นเซตในตัวเลือกต้องเป็นสับเซตของ $(-2, 4)$ ดังนั้น ตัวเลือก 3. และ 4. ตัดทิ้ง

เลือกตัวเลขที่ไม่อยู่ร่วมกันใน $(-2, 2)$ กับ $(2, 4)$ เช่น 0 พบว่า เมื่อ $t = 0$ จะได้ $y = 8x + 10$

แต่ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 8x + 10\}$ นั้น $D_f \not\subset R^+$ เพราะฉะนั้น $t = 0 \notin A$ ดังนั้น $0 \in A'$

เพราะฉะนั้น 0 ต้องเป็นสมาชิกของ $A' \cap B$ แต่ตัวเลือก 1. ไม่มี 0 เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

**วิธีจริง** **การหาเซต A** ถ้ากราฟของพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$ อยู่เหนือแกน X

แสดงว่า $ax^2 + bx + c = 0$ ไม่มีราก นั่นคือ ถ้า $ax^2 + bx + c > 0$ แล้ว $b^2 - 4ac < 0$

พิจารณาจาก $R_f \subset R^+$ ดังนั้น $y = tx^2 + 8x + 10 - t > 0$

เพราะฉะนั้น $b^2 - 4ac = 8^2 - 4(t)(10-t) > 0$

$$4t^2 - 40t + 64 < 0$$

$$t^2 - 10t + 16 < 0$$

$$(t-8)(t-2) < 0$$

เพราะฉะนั้น $A = (2, 8)$ สรุป $A' \cap B = ((-\infty, 2] \cup [8, \infty)) \cap (-2, 4) = (-2, 2)$

**14. ตอบ 2.**

**แนวคิด** เพราะว่า $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{6}{x}) = \frac{12}{x} - 1$

ให้ $y = \frac{12}{x} - 1$ จะได้ $y + 1 = \frac{12}{x}$

$$x = \frac{12}{y+1}$$

เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{12}{x+1}$

**การตัดตัวเลือก** ปัญหาข้อนี้มีลักษณะของโจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x เราสามารถพิจารณาการส่งค่าของสมาชิกบางตัวของ g เพื่อนำมาช่วยในการตัดตัวเลือก เช่น $x = 12$

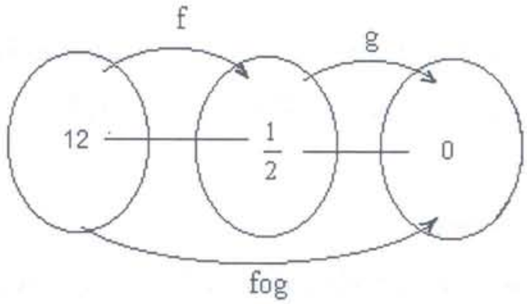
เพราะฉะนั้น $(f \circ g)^{-1}(x) = 12$

เมื่อนำ $x = 0$ แทนในสูตรของตัวเลือก

จะได้ว่าค่าที่ได้จากสูตร

ตัวเลือก 1., 3. และ 4. ไม่เท่ากับ 12

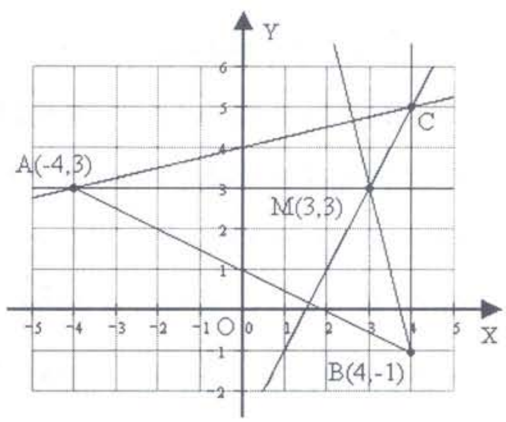
เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1., 3. และ 4. ผิดแน่นอน




**15. ตอบ 2.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** โดยการวาดรูปด้วยสเกล 1 นิ้ว/หน่วย ลากเส้นผ่าน BM และ CM จาก A ลากเส้นตั้งฉากกับ BM และจาก B ลากเส้นตั้งฉากกับ AM ตัดกันที่จุด C วัดระยะห่างของ C กับแกน Y ได้ 4

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1.,3. และ 4. ผิด



**การตัดตัวเลือก แบบที่ 2.** นอกจากนั้นเราสามารถใช้เหตุผลว่า เมื่อ A(–4 , 3) และ M(3 , 3) ดังนั้น AM ต้องขนานแกน X และ BC ต้องตั้งฉากกับ AM นั้นคือ BC ต้องขนานกับแกน Y ด้วย เพราะฉะนั้นพิกัดตัวแรกของจุด C ต้องเป็น 4 ซึ่งเป็นเหตุผลที่จะตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** ความชัน $AB = \frac{(-1-3)}{(4+4)} = -\frac{1}{2}$ และ $AB \perp CM$

เพราะฉะนั้น ความชัน CM เท่ากับ 2 และสมการเส้นตรง CM คือ $y-3 = 2(x-3)$ ...(1)

ความชัน $BM = \frac{(-1-3)}{(4+3)} = -4$ และ $BM \perp AC$

เพราะฉะนั้นความชัน AC เท่ากับ $\frac{1}{4}$ และสมการเส้นตรง AC คือ $y-3 = \frac{1}{4}(x+4)$ ...(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $2(x-3) = \frac{1}{4}(x+4)$ เพราะฉะนั้น $x = 4$

ผลที่ตามมา y คือ 5 เพราะฉะนั้น พิกัด C คือ (4 , 5)

**16. ตอบ 2.**

**แนวคิด** สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

เพราะฉะนั้น a = 4 และ b = 3 ดังนั้น c = 5

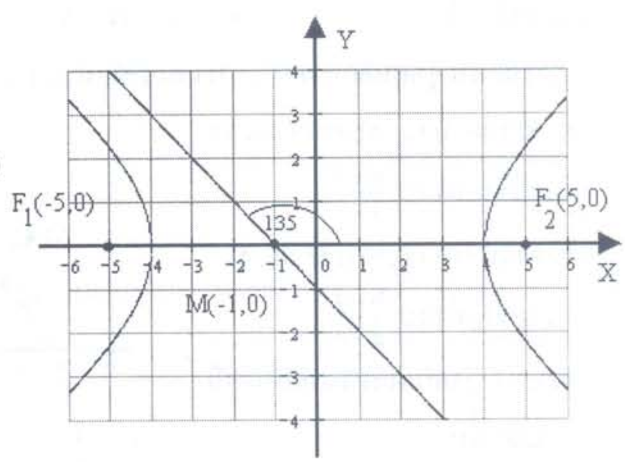
ดังนั้น (–5 , 0) และ (5 , 0)

เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $F_1(-5, 0)$

และ $F_2(5, 0)$ จะได้ความยาว $F_1F_2$ เท่ากับ 10

ให้พิกัด M(x , 0)

เพราะว่า $F_1M : F_2M = 2 : 3$




เพราะฉะนั้น $\frac{x+5}{5+x} = \frac{2}{3}$

$$3x + 15 = 10 - 2x$$

$$x = -1$$

พิกัด M เท่ากับ (–1 , 0) ความชันของเส้นตรงที่กำหนดคือ $m = \tan 135° = -1$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นตรงคือ $y = (-1)(x+1) = -x-1$

$$x + y + 1 = 0$$

ระยะตั้งฉากจาก (0 , 0) ไปยังเส้นตรง $x + y + 1 = 0$ เท่ากับ $\frac{|0+0++1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเราทราบว่า $F_1(-5, 0)$ และ $F_2(5, 0)$ และ $F_1F_2$ ยาว 10 โดยใช้กราฟ

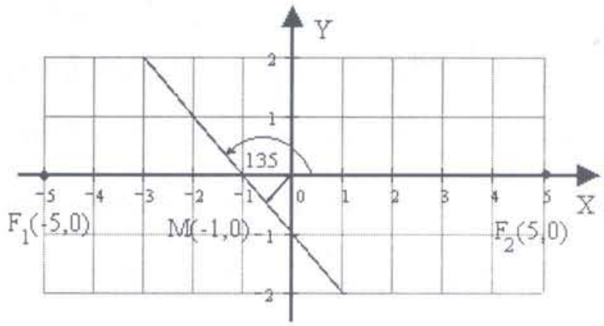
การแบ่งสัดส่วน $F_1M : F_2M = 2 : 3$

จะได้ $M(-1, 0)$ ลากเส้นตรงผ่าน M

ทำมุม 135° กับแกน X

วัดระยะตั้งฉากจากจุด O มายังเส้นตรง

จะได้ค่าเท่ากับ 0.8




ค่าจากตัวเลือกแต่ละตัวคือ

1. 1.414  2. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1.414}{2} = 0.707$  3. 1  4. 0.5

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 3. ตัดทิ้งได้ เมื่อมั่นใจว่ารูปเราวาดถูกต้องเลือกคำตอบเป็นข้อ 2. ดีกว่า

**17.ตอบ 1.**

**แนวคิด** เพราะว่า (a , b) อยู่บนวงกลม เพราะฉะนั้น $a^2 + b^2 - 2a + 6b - 30 = 0$ ...(1)

จากสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 30 = 0$

จัดรูปแล้วได้ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 40$

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลาง (1 , –3) และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{40}$

เส้นตรงที่ผ่าน (a , b) และ (1 , –3)

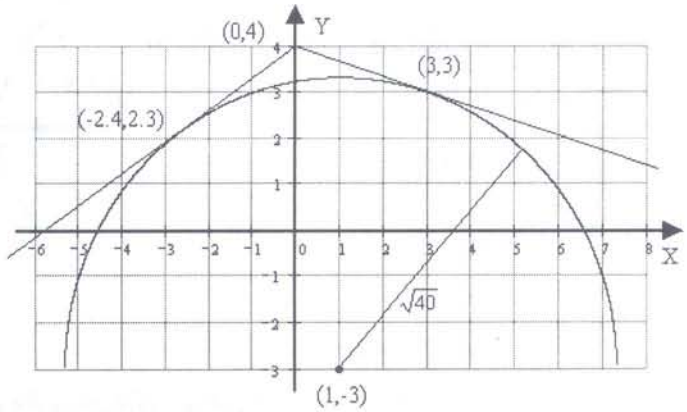
มีความชันเท่ากับ $\frac{b+3}{a-1}$

เส้นตรงที่ผ่าน (a , b) และ (0 , 4)

มีความชันเท่ากับ $\frac{b-4}{a-0}$

เพราะว่า เส้นสัมผัสตั้งฉากกับรัศมี

เพราะฉะนั้น




$$\left(\frac{b+3}{a-1}\right)\left(\frac{b-4}{a}\right) = -1$$

จัดรูปได้ $a^2 + b^2 - a - b - 12 = 0$ ...(2)

(1) – (2) ; $-a + 7b - 18 = 0$

$$a = 7b - 18$$

แทนค่าใน (2) จะได้ $(7b-18)^2 + b^2 - (7b-18) - b - 12 = 0$

$$5b^2 - 26b + 33 = 0$$

$$(5b - 11)(b - 3) = 0$$

$$b = \frac{11}{5}, 3$$

ดังนั้น a $= -\frac{13}{5}, 3$ เพราะฉะนั้น (a , b) คือ $(-\frac{13}{5}, \frac{11}{5}), (3, 3)$ ทำให้ $a + b = \frac{-2}{5}$ หรือ 6

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเขียนวงกลมและลากเส้นสัมผัสจะได้ (a , b) อยู่ในควอดรันท์ 1 และ 2 วัดพิกัดของจุดโดยประมาณได้ (–2.4 , 2.3) , (3 , 3) ดังนั้น $a + b = -2.4 + 2.3$ หรือ $3 + 3 = -0.1$ หรือ 6 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งดีกว่า

**18.ตอบ 3.**

**แนวคิด** $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$

$$= \frac{(\cos x + \sin x)(\cos x + \sin x)}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$$

$$= \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \sec 2x + \tan 2x$$

เพราะฉะนั้น $a\sec 2x + b\tan 2x = \sec 2x + \tan 2x$ สรุป $a = 1$ , $b = 1$ ดังนั้น $a + b = 2$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = a\sec 2x + b\tan 2x$ เป็นสูตรในพจน์ของ x ดังนั้นแทนค่า x บางค่าก็จะได้ a และ b เช่น $x = 0$ จะได้ $\tan(\frac{\pi}{4} + 0) = a\sec 0 + b\tan 0$ เพราะฉะนั้น $1 = a$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{6}$ จะได้ $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}) = (1)\sec\frac{\pi}{3} + b\tan\frac{\pi}{3} = 2 + b\sqrt{3}$

$$2 + b\sqrt{3} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = 2 + \sqrt{3}$$

เพราะฉะนั้น $b = 1$ สรุป $a + b = 2$

**19.ตอบ 2.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

แทนค่า $x = 0$ จะได้ $a = \sin(45^\circ + 0) + \sin(45^\circ - 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

ค่าของโจทย์ $2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x) = 2\sin(45^\circ + 0)\sin(45^\circ - 0) = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$

ตัวเลือกที่เป็นสูตรถูกต้องจะต้องมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $a = \sqrt{2}$ ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $a^2 + 1 = 3$ 2. $a^2 - 1 = 1$ 3. $1 - a^2 = -1$ 4. $\sqrt{1-a^2}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** จากสูตร $\sin A + \sin B = 2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})$

$$\sin(45^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 2\sin(\frac{(45^\circ + x)+(45^\circ - x)}{2})\cos(\frac{(45^\circ + x)-(45^\circ - x)}{2})$$

$$a = 2\sin 45^\circ \cos x = 2(\frac{1}{\sqrt{2}})\cos x$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

จากสูตร $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

เพราะฉะนั้น $2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x) = \cos(45^\circ + x - 45^\circ + x) - \cos(45^\circ + x + 45^\circ - x)$

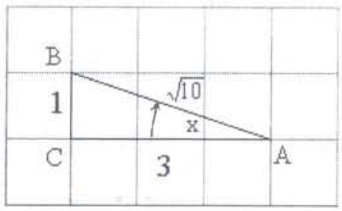
$$= \cos(2x) - \cos(90^\circ) = \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 2(\frac{a}{\sqrt{2}})^2 - 1 = a^2 - 1$$

**20. ตอบ 4.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

โดย AC = 3 , BC = 1 จะได้ $\tan A = \frac{1}{3}$

$$A = \arctan(\frac{1}{3})$$




เราประมาณ A โดยการวัดมุม A ได้ 18 องศา

เพราะฉะนั้น $\sin(4x) = \sin(4(18^\circ)) = \sin 72^\circ > 0$

และ $\sin 72^\circ \neq 1$ แน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

**วิธีจริง** เพราะว่า $\tan x = \frac{1}{3}$ เพราะฉะนั้น $\sin x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ , $\cos x = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x = 2\,2\sin x\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$= 4(\frac{1}{\sqrt{10}})(\frac{3}{\sqrt{10}})((\frac{3}{\sqrt{10}})^2 - (\frac{1}{\sqrt{10}})^2) = 4(\frac{3}{10})(\frac{9}{10} - \frac{1}{10})$$

$$= 4(\frac{3}{10})(\frac{8}{10}) = \frac{24}{25}$$

# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 18.

1. เซตคำตอบของสมการ $\log(x^2 - 3x - 4) - \log(x+1) = 1$
   เป็นเซตเดียวกับเซตคำตอบของสมการในข้อใด
   1. $(x - 5)(x+14) = 0$
   2. $(x - 14)(x + 1) =$
   3. $(x - 14)(x^2+1) = 0$
   4. $(x + 14)(x - 1) = 0$

2. ให้ $A = \{x \in R \mid |x - 1| < 4\}$
   $B = \{x \in R \mid \frac{x+2}{x-1} \geq 0\}$
   C = เซตของจำนวนเต็ม แล้ว $A \cap B \cap C$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้
   1. $\{-2, 2, 3, 4\}$
   2. $\{-3, -2, 2, 3, 4\}$
   3. $\{-3, -2, 1, 2, 3, 4\}$
   4. $\{-3, -2, 1, 2, 3, 4, 5\}$

3. เซตคำตอบของอสมการ $3 \leq |x + 1| \leq 7$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้
   1. $(-10, 4)$
   2. $(-9, -2) \cup (1, 7)$
   3. $(-5, 8)$
   4. $(-10, -3) \cup (3, 8)$

4. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ที่กำหนดโดย
   $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x^2 + xy + y^2 = 75\}$
   แล้วโดเมนของ r คือข้อใดต่อไปนี้
   1. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
   2. $\{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$
   3. $\{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$
   4. $\{-15, -14, -13, \ldots, 13, 14, 15\}$

5. ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ โดเมนและเรนจ์ของ fog ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้
   1. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
   2. $\{x \mid x > 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$
   3. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x \neq 0\}$
   4. $\{x \mid x \neq 0\}$ และ $\{x \mid x > 0\}$

6. กำหนดให้ $f(x) = 4x$ และ $g(x) = \frac{2}{x-1}$ ค่าของ x ที่ทำให้ $f(g(x)) = g(f(x))$ คือค่าในข้อใดต่อไปนี้
   1. $-\frac{1}{30}$
   2. $0$
   3. $\frac{1}{30}$
   4. $\frac{1}{5}$

7. พื้นที่สี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดทั้งสี่อยู่ที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ และจุดโฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30      2. 40

3. 48      4. 60

8. ถ้าวงกลมผ่านจุด (0 , 0) และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดโฟกัสของวงรี $3y^2 + 4x^2 = 48$ แล้ววงกลมมีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 4y = 0$ และ $x^2 + y^2 + 4y = 0$

2. $x^2 + y^2 - 4y + 12 = 0$ และ $x^2 + y^2 + 4y + 12 = 0$

3. $x^2 - 4x + y^2 + 12 = 0$ และ $x^2 + 4x + y^2 + 12 = 0$

4. $x^2 - 4x + y^2 = 0$ และ $x^2 + 4x + y^2 = 0$

9. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$ กับจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = -6y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{17}}{2}$      2. $\frac{\sqrt{25}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{29}}{2}$      4. $\frac{\sqrt{41}}{2}$

10. กำหนดให้เส้นโค้ง $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ แล้วเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด $x = \frac{2}{3}$ จะขนานกับเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้

1. $6x + 3y - 7 = 0$      2. $8x + 3y + 5 = 0$

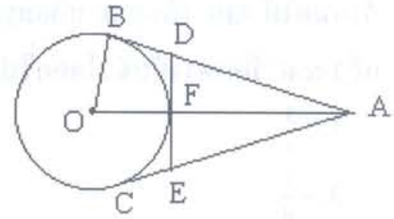
3. $8x - 3y - 4 = 0$      4. $4x + 3y - 11 = 0$

11. กล่องใบหนึ่งมีบัตร n ใบ บัตรแต่ละใบเขียนเลขไม่ซ้ำกันกำกับไว้เริ่มจาก 1 จนถึง n $(n > 3)$ ถ้าหยิบบัตร 2 ใบออกมาโดยการสุ่มความน่าจะเป็นที่ได้บัตร 2 ใบโดยที่ใบหนึ่งเป็นเลข 3 และอีกใบหนึ่งน้อยกว่า 3 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{n(n-1)}$      2. $\frac{2}{n^2}$

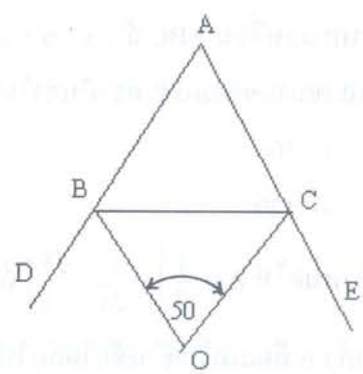
3. $\frac{4}{n(n-1)}$      4. $\frac{4}{n^2}$

12. กำหนดให้ A เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ลาก $\overline{AO}$ ตัดวงกลมที่ F และจากจุด F ลากเส้นสัมผัสวงกลมตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่ จุด D และ E ตามลำดับ ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 7 เซนติเมตร และ AF ยาว 18 เซนติเมตร แล้วความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ADE มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้




1. 24 เซนติเมตร
2. 25 เซนติเมตร
3. 48 เซนติเมตร
4. 50 เซนติเมตร

13. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ รูปหนึ่ง ต่อด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ออกไปทาง B และ C ถึง D และ E ตามลำดับ $\overline{OB}$ และ $\overline{OC}$ เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $C\hat{B}D$ และ $B\hat{C}E$ ถ้า $B\hat{O}C = 50^{\circ}$ แล้วขนาดของ $B\hat{A}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้




1. $80^{\circ}$
2. $70^{\circ}$
3. $60^{\circ}$
4. $45^{\circ}$

14. ถ้า $3x^2 - 13x + 4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3 + ax^2 + bx - 8$ ค่าของ $a + b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-49$
2. $-11$
3. 22
4. 49

15. $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\pi}{4}$
2. $-\frac{3\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{3\pi}{4}$

16. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid 3^{x-6} = 2^{x-3} . 3^{-x}\}$

A เป็นสับเซตของเซตคำตอบของอสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\log(x-2) < 0$
2. $\log(x+2) < -1$
3. $\log(x-1) < 0$
4. $\log(x+1) < 1$

17. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$

แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $-\frac{1}{4}$
4. $-\frac{3}{4}$

18. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$

มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-1$
2. $3$
3. $-3$
4. $5$

19. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a - b + c)(a + b + c) = ac$

แล้วขนาดของมุม B ตรงกับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 30
2. 60
3. 120
4. 150

20. กำหนดให้ $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ $2 \times 2$ ที่สอดคล้องสมการ $BA^{-1} = A^{t}$

แล้ว B คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂⊄∈∉°∞∧∨ ≤↔≠→±≥ → ↑ X Y≮≯≤≢≰≢

# เฉลยโจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก ชุดที่ 18.

**1. ตอบ 3.**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

จากตัวเลือก 1. เอา $x = 5$ แทนค่าในโจทย์ $\log(5^2 - 3(5) - 4) - \log(5+1) = \log 6 - \log 6 = 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1. ตัดทิ้งได้ จากตัวเลือก 2. เพราะว่า log0 หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = -1$ ไม่เป็นคำตอบแน่นอน เพราะฉะนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ลองข้ามไปตัวเลือก 4. บ้าง เมื่อแทนค่า $x = 1$ ในโจทย์ จะได้ $\log(1 - 3 - 4)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ตัดทิ้งได้อีก เหลือตัวเลือก 3. ข้อเดียวเลือกได้เลย

**วิธีจริง**

$$\begin{aligned}
\log(x^2 - 3x - 4) - \log(x+1) &= 1 \\
\log(x^2 - 3x - 4) - \log(x+1) &= \log 10 \\
\log(x^2 - 3x - 4) &= \log 10 + \log(x + 1) = \log(10(x + 1)) \\
x^2 - 3x - 4 &= 10(x + 1) \\
x^2 - 13x - 14 &= 0 \\
(x - 14)(x + 1) &= 0
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\{x \mid \log(x^2 - 3x - 4) - \log(x+1) = 1\} = \{x \mid (x - 14)(x + 1) = 0\}$

**2. ตอบ 1.**

**แนวคิด วิธีจริง** พิจารณา

$$\begin{aligned}
|x - 1| &< 4 \\
-4 < x - 1 &< 4 \\
-3 < x &< 5
\end{aligned}$$

ดังนั้น $A = \{x \in R \mid |x - 1| < 4\} = (-3, 5)$

พิจารณา $\dfrac{x+2}{x-1} \geq 0$ จะได้ $x - 2$ หรือ $x > 1$ ดังนั้น B $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

เพราะว่า $A \cap B = (-3, -2] \cup (1, 5)$ เพราะฉะนั้น $A \cap B \cap C = \{-2, 2, 3, 4\}$

**การตัดตัวเลือก** เมื่อเราทราบว่า $A = (-3, 5)$ นั่นคือ $-3 \notin A$ เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cap B \cap C$

เนื่องจากมี $-3$ อยู่ในเซตของตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 2.,3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือกทำให้เราได้คำตอบโดยไม่ต้องหาเซต B

**3. ตอบ 2.**

**แนวคิด วิธีจริง** จาก $3 \leq |x-1| \leq 7$ จะได้

$$-7 \leq x+1 \leq -3 \quad \text{หรือ} \quad 3 \leq x+1 \leq 7$$

$$-8 \leq x \leq -4 \quad \text{หรือ} \quad 2 \leq x \leq 6$$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบคือ $[-8, -4] \cup [2, 6]$ เป็นสับเซตของ $(-9, -2) \cup (1, 7)$

**การตัดตัวเลือก** พิจารณาจากการแทนค่า

เมื่อ $x = 3$ จะได้ $3 \leq |3+1| \leq 7$ แต่ $3 \notin (-10, -3) \cup (3, 8)$ จึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เมื่อ $x = 4$ จะได้ $3 \leq |4+1| \leq 7$ แต่ $4 \notin (-10, 4)$ จึงตัดตัวเลือก 1. ได้อีก

เมื่อ $x = -5$ จะได้ $3 \leq |-5+1| \leq 7$ แต่ $-5 \notin (-5, 8)$ ดังนั้นตัวเลือก 3. ทิ้งได้

**4. ตอบ ไม่มีตัวเลือก** **(มาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ก. 2538)**

**แนวคิด การตัดตัวเลือก** ดูตามโจทย์แล้วตัดตัวเลือกทิ้งได้ทุกตัว เพราะว่าสมาชิกของโดเมนของความสัมพันธ์ r ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

**วิธีจริง** กำหนด $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x \in I \text{ และ } x^2 + xy + y^2 = 75\}$

พิจารณา
$$x^2 + xy + y^2 = 75$$
$$y^2 + xy + (x^2 - 75) = 0$$

สูตร y ในพจน์ของ x คือ $y = \dfrac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4(x^2 - 75)}}{2}$

ดังนั้น $y \in R$ ก็ต่อเมื่อ $x^2 - 4(x^2 - 75) \geq 0$ นั่นคือ $-3x^2 + 300 \geq 0$

$$x^2 \leq 100$$

เพราะฉะนั้นค่า $x \in I$ ที่เป็นไปได้คือ $-10 \leq x \leq 10$ สรุป $D_r$ คือ $\{-10, -9, -8, \ldots, 8, 9, 10\}$

**5. ตอบ 2.**

**แนวคิด วิธีจริง** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ จะได้ $D_f = R - \{0\} = R_f$

$g(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $D_g = [0, \infty) = R_g$

เพราะฉะนั้น $R_g \subset D_f$ ซึ่งจะทำให้ f o g มีความหมาย และ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

เพราะฉะนั้น $D_{fog} = (0, \infty) = \{x \mid x > 0\}$ และ $R_{fog} = (0, \infty) = \{x \mid x > 0\}$

**การตัดตัวเลือก** เพราะว่า g(– 2) หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $-2 \notin D_{fog}$ แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $(f \circ g)(x) = > 0$ ดังนั้น $-1 \notin R_{fog}$ จึงทำให้ ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

**6. ตอบ 4.**

**แนวคิด วิธีจริง** เพราะว่า $f(g(x)) = g(f(x))$ เพราะฉะนั้น

$$f\left(\frac{2}{x-1}\right) = g(4x)$$

$$4\left(\frac{2}{x-1}\right) = \frac{2}{4x-1}$$

$$4(4x-1) = x-1$$

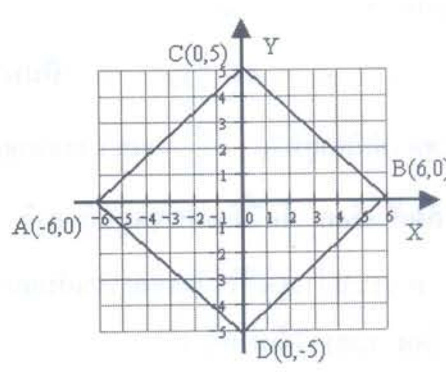
$$x = \frac{1}{5}$$

**การตัดตัวเลือก** โจทย์ถามว่า x เท่ากับเท่าใด และตัวเลือกเป็นตัวเลขด้วย ดังนั้นจับแทนค่าเลย เช่น $f(g(0)) = f(-2) = -8$ แต่ $g(f(0)) = g(0) = -2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

**7. ตอบ 4.**

**แนวคิด วิธีจริง** ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ มีค่า a = 4 , b = 3 เพราะฉะนั้น $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ ดังนั้นไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลาง (0 , 0) แกนไฮเพอร์โบลาทับแกน Y มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (0 , –5) และ (0 , 5)

สมการวงรี $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{64} = 1$ มีค่า a = 10 , b = 8 และ c = 6 เป็นวงรีจุดศูนย์กลาง (0 , 0) แกนเอกทับแกน X และมีจุดโฟกัสที่ (–6 , 0) และ (6 , 0)




เนื่องจากความชัน AD เท่ากับความชัน BC

และความชัน AC เท่ากับความชัน BD

เพราะฉะนั้น ACBD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน

พื้นที่สี่เหลี่ยม ACBD

= 2 เท่าของพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

$= 2(\frac{1}{2} AB\ OC) = 2(\frac{1}{2}(12)(5)) = 60$

**การตัดตัวเลือก** พิจารณาจากรูปได้จะพบว่า ACBD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน วัดความยาวฐาน AD ยาว 7.6 หน่วย และวัดส่วนสูงจาก AD ไปยังด้าน BC ได้ยาว 7.8 หน่วย
ดังนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยมมีค่าประมาณ (7.6) (7.8) = 59.28 ตารางหน่วย สรุปเลือกข้อ 4. ดีกว่า

**8. ตอบ 1.**

**แนวคิด วิธีจริง** จากสมการ $3y^2 + 4x^2 = 48$ จะได้ $\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{12} = 1$
เป็นวงรีจุดศูนย์กลาง (0 , 0) แกนเอกทับแกน Y $a = 4$ , $b = 2\sqrt{3}$ และ $c = 2$
จุดโฟกัสของวงรีคือ (0,–2) และ (0,2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (0 , – 2) ผ่านจุด (0 , 0) คือ

$$(x-0)^2 + (y+2)^2 = (0-0)^2 + (0+2)^2$$
$$x^2 + y^2 + 4y = 0$$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(x-0)^2 + (y+2)^2 = (0-0)^2 + (0+2)^2$

$$x^2 + y^2 + 4y = 0$$

**การตัดตัวเลือก** โจทย์บอกว่าจุด (0 , 0) อยู่บนวงกลม แต่ (0 , 0) ไม่อยู่ในสมการวงกลมของตัวเลือก 2. และ 3. จึงตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งไป
เนื่องจากจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 - 4x + y^2$ คือ (2 , 0) ดังนั้นเราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

**9. ตอบ 4.**

**แนวคิด วิธีจริง** $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 4$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$ เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลาง (– 2 , 1) และรัศมี 3

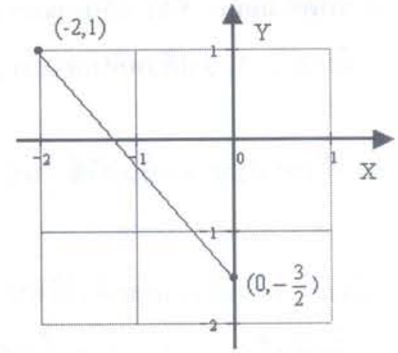
พาราโบลา $x^2 = -6y$

$x^2 = 4(-\frac{3}{2})y$ เป็นพาราโบลาคว่ำมีจุดยอด (0 , 0) แกนพาราโบลาทับแกน Y

และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0 , -\frac{3}{2})$ ระยะทางจากจุด (– 2 , 1) กับ $(0 , -\frac{3}{2}) = \sqrt{(-2-0)^2 + (1+\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$

**การตัดตัวเลือก** ข้อนี้ต้องหาจุดศูนย์กลาง (– 2 , 1) และจุดโฟกัส $(0 , -\frac{3}{2})$ ได้ก่อนแต่ถ้าลืมสูตรระยะทางระหว่างจุดก็ใช้วัดระยะทางกันเลย
เมื่อวัดความยาวได้เท่ากับ 3.2

พิจารณาตัวเลือกว่าเลือกได้หรือยังปรากฏว่า ตัวเลือกอยู่ในรูปของรากที่ 2 ทั้งนั้นอย่าท้อถอย ทำต่ออีกนิดโดยเอา $(3.2)^2 = 10.24$ แล้วเอาตัวเลือกยกกำลัง 2 ด้วยทุกตัว




1. $(\frac{\sqrt{17}}{2})^2 = \frac{17}{4} = 4.25$ 2. $(\frac{\sqrt{25}}{2})^2 = \frac{25}{4} = 6.25$

3. $(\frac{\sqrt{29}}{2})^2 = \frac{29}{4} = 7.25$ 4. $(\frac{\sqrt{41}}{2})^2 = \frac{41}{4} = 10.25$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีที่สุด

**10.ตอบ 2.**

**แนวคิด วิธีจริง** $y = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3x - 6$

ที่จุด $x = \frac{2}{3}$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3(\frac{2}{3})^2 + 3(\frac{2}{3}) - 6 = \frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3}$

ดังนั้นเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ $x = \frac{2}{3}$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{8}{3}$

ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรงที่มีสมการเป็น $8x + 3y + 5 = 0$

**การตัดตัวเลือก** พิจารณาความชันเส้นตรงของโจทย์คือ $-\frac{8}{3}$ และความชันเส้นตรงของตัวเลือก

1. ความชัน $= -2$ 2. ความชัน $= -\frac{8}{3}$ 3. ความชัน $= \frac{8}{3}$ 4. ความชัน $= -\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.,3. และ 4. ทิ้ง

**11.ตอบ 3.**

**แนวคิด วิธีจริง** จำนวนวิธีหยิบบัตร 2 ใบ จาก n ใบทำได้ $\binom{n}{2}$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้ใบหนึ่งเป็นหมายเลข 3 และอีกใบหนึ่งน้อยกว่า 3 พิจารณาดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การได้เลข 3 ทำได้ $\binom{1}{1} = 1$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 การได้เลข 1 หรือ 2 ทำได้ $\binom{2}{1} = 2$ วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีได้ 3 หนึ่งใบ และอีกใบเป็น 1 หรือ 2 เท่ากับ (1) (2) = 2 วิธี

ความน่าจะเป็นที่ต้องการ $= \frac{2}{\binom{n}{2}} = \frac{4}{n(n-1)}$

**การตัดตัวเลือก** ข้อนี้มีลักษณะของโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตร โดยการแทนค่า $n = 3$ จะได้ว่ามีเลข 1 , 2 , 3 แล้วหยิบออกมา 2 ตัว

จะได้ว่าความน่าจะเป็นที่ได้ 3 หนึ่งใบ และอีกใบน้อยกว่า 3 = $\dfrac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$

เมื่อ $n = 3$ ตัวเลือกแต่ละตัวให้ค่าดังนี้ 1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{9}$ 3. $\frac{2}{3}$ 4. $\frac{4}{9}$

ดังนั้นตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้เลย

**12. ตอบ 3.**

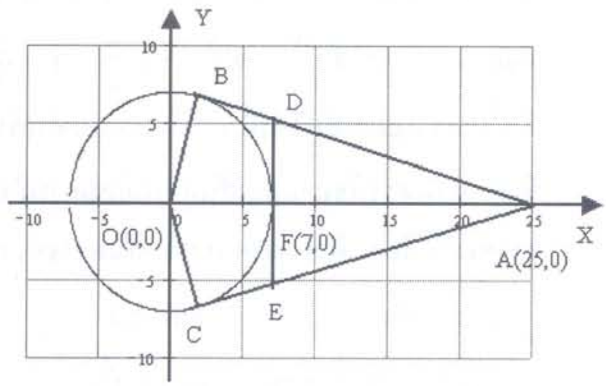
**แนวคิด** วาดรูปบนพิกัดมุมฉากโดยให้ O (0 , 0) , F(7 , 0) และ A(25 , 0)

**การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

เพราะว่า AF สั้นกว่า AD เพราะฉะนั้น ความยาวเส้นรอบรูป ADE จะต้องยาวกว่า 2 เท่าของ AF นั่นคือ ความยาวเส้นรอบรูป $\Delta$ADE ต้องมากกว่า 2(18) = 36

ดังนั้น ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

โดยการวัดจริงเลือกตัวเลือก 3 เป็นคำตอบได้เลย




**วิธีจริง** เพราะว่า $\overline{BD} = \overline{DF}$ และ $\overline{EF} = \overline{EC}$ และ AB = AC

เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ADE เท่ากับ $\overline{AD} + \overline{DF} + \overline{FE} + \overline{EA}$

$= \overline{AD} + \overline{BD} + \overline{EC} + \overline{EA} = \overline{AB} + \overline{AC} = 2\,\overline{AB}$

เพราะว่า $O\hat{B}A = 90^\circ$, $\overline{OB} = 7$ และ $\overline{OA} = 25$ เพราะฉะนั้น $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OB}^2 = 625 - 49 = 576$

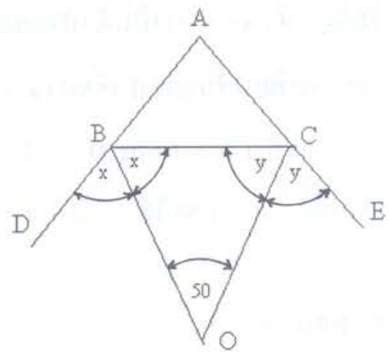
นั่นคือ $\overline{AB} = 24$ สรุปความยาวเส้นรอบรูป $\Delta$ADE เท่ากับ 48

**13 ตอบ 1.**

**แนวคิด วิธีจริง** ให้ $C\hat{B}O = x$ และ $O\hat{C}B = y$ ดังนั้น $x + y + 50 = 180$

$x + y = 130 \qquad \ldots(1)$

เพราะว่า $A\hat{B}C = 180 - 2x$ และ $A\hat{C}B = 180 - 2y$




เพราะฉะนั้น $(180-2x)+(180-2y)+B\hat{O}C = 180$

$$\hat{A}-2x-2y = -180$$

จาก (1) ; $\hat{A}-2(x+y) = -180$

$$\hat{A}-2(130) = -180$$

$$\hat{A} = -180+260$$

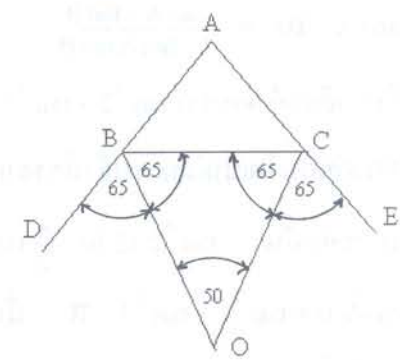
$$\hat{A} = 80$$

**การตัดตัวเลือก** โจทย์เป็นสูตรในเทอมของมุมด้าน

เราเลือกให้ OBC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วโดยมี $B\hat{O}C = 50^\circ$ , $C\hat{B}O = O\hat{C}B = 65^\circ$ได้

ต่อไปวาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก $O\hat{C}E$ กาง $65^\circ$
2. ลาก $O\hat{B}D$ กาง $65^\circ$
3. ลาก DB และ EC มาตัดกันที่ A
4. วัดมุม BAC ได้ 80 องศา




สรุปเลือกตัวเลือก 1 เป็นคำตอบ

**14.ตอบ 3.**

**แนวคิด** **วิธีจริง** เพราะว่า $3x^2-13x+4=(3x-1)(x-4)$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3+ax^2+bx-8$

เพราะฉะนั้นรากของ $(3x-1)(x-4)=0$ ซึ่งคือ $x=\frac{1}{3}$ , 4 ต้องเป็นรากของ $3x^3+ax^2+bx-8=0$

ดังนั้นเมื่อแทนค่า $x=\frac{1}{3}$ จะได้ $3(\frac{1}{3})^2+a(\frac{1}{3})^2+b(\frac{1}{3})-8 = 0$

$$\frac{1}{9}+\frac{a}{9}+\frac{b}{3}-8 = 0$$

$$1+a+3b-72 = 0$$

$$a+3b = 71 \qquad \ldots(1)$$

แทนค่า $x=4$ จะได้ $3(4)^3+a(4)^2+b(4)-8 = 0$

$$4a+b = -46 \qquad \ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $a=-19$ และ $b=30$

เพราะฉะนั้น $a+b=11$

**วิธีลัด** ให้ $(Ax + B)$ เป็นตัวประกอบที่ทำให้ $(3x^2 - 13x + 4)(Ax + B) = (3x^3 + ax^2 + bx - 8)$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของ $x^3$ และค่าคงตัวจะได้ $3A = 3$ และ $4B = -8$

เพราะฉะนั้น $A = 1$ และ $B = -2$ ดังนั้น $(3x^2 + ax^2 + bx - 8) = (3x^3 - 13x + 4)(x - 2)$

และเมื่อ $x = 1$ จะได้ $3 + a + b - 8 = (3 - 13 + 4)(1 - 2)$ เพราะฉะนั้น $a + b = 11$

**15. ตอบ 4.**

**แนวคิด วิธีจริง** โจทย์ข้อนี้ขอให้สังเกตวิธีทำต่อไปนี้แล้วลองดูว่า ผิดที่ใด ด้วยเหตุผลอย่างไร

ให้ $A = \tan^{-1}2$ และ $B = \tan^{-1}3$ จะได้ $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$

$\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \dfrac{2+3}{1-(2)(3)} = -1$ เพราะฉะนั้น $A + B = \tan^{-1}(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$

ถ้าเราเลือกคำตอบว่า $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 = -\dfrac{\pi}{4}$ จะผิดทันที การทำโจทย์ทำนองนี้ต้องระวังเรื่องเหตุผล

เกี่ยวกับกับโดเมนและเรนจ์ เนื่องจาก $\tan^{-1} : (-\infty, \infty) \rightarrow (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$

เพราะฉะนั้น $\tan^{-1}2 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ และ $\tan^{-1}3 \in (0, \dfrac{\pi}{2})$

ดังนั้น $0 < \tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 < \pi$ นั่นคือ $0 < A + B < \pi$

เพราะว่า $\tan(A + B) = -1$ และ $0 < A + B < \pi$ เพราะฉะนั้น $A + B$ ต้องเท่ากับ $\dfrac{3\pi}{4}$

**การตัดตัวเลือก** ในการทำข้อสอบถ้าเราจำได้ว่า $\tan^{-1}2 > 0$ และ $\tan^{-1}3 > 0$

จะทำให้ $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3 > 0$ ดังนั้นตัวเลือก 1 และ 2 ตัดทิ้งได้

**16. ตอบ 4**

**แนวคิด วิธีจริง** เพราะว่า $3^{x-6} = 2^{x-3} \cdot 3^{-x}$ เพราะฉะนั้น

$$
\begin{aligned}
3^{2x-6} &= 2^{x-3} \\
(3^2)^{x-3} &= 2^{x-3} \\
9^{x-3} &= 2^{x-3}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $x - 3 = 0$ นั่นคือ $x = 3$ หรือ $A = \{3\}$ พิจารณาเซตคำตอบของตัวเลือก

1. $\{x \mid \log(x-2) < 0\} = (2, 3)$ 2. $\{x \mid \log(x+2) < -1\} = (-2, -\dfrac{19}{10})$

3. $\{x \mid \log(x-1) < 0\} = (1, 2)$ 4. $\{x \mid \log(x+1) < 1\} = (-1, 9)$

เพราะฉะนั้น A เป็นสับเซตของเซตคำตอบในตัวเลือก 4

**การตัดตัวเลือก** เมื่อได้ $x = 3$ เราเอาไปแทนค่าจะทำให้ได้ตัวเลือกเร็วกว่า

1. $\log(3-2) = \log 1 = 0 \quad 0$  2. $\log(3+2) = \log 5 = 0.699 \quad 1$

3. $\log(3-1) = \log 2 = 0.301 \quad 0$  4. $\log(3+1) = \log 4 = 0.603 < 1$ เป็นจริง

ดังนั้นตัวเลือก 1., 2.และ 3.ตัดทิ้งได้

**หมายเหตุ** ค่า $\log 2 = 0.30103$ ให้ดูที่หน้ากรรมการคุมสอบ 3 **หู** 0 **ตา** 1 **จมูก** 0 **ตา** 3 **หู**

**17.ตอบ 2**

**แนวคิด** จากสมการ $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ จะได้ $\dfrac{\sin A}{2} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{4}$ ....(1)

เพราะว่าสามเหลี่ยมที่มีอัตราส่วนตามสมการ (1) จะมี cosC เท่ากันทุกรูป

เพราะฉะนั้น $\cos C = \dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$ หาได้โดยการแทนค่า $a = 2$ , $b = 3$ และ $c = 4$

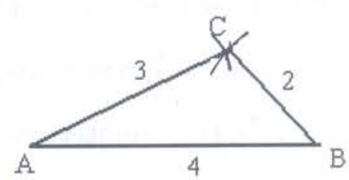
นั่นคือ $\cos C = \dfrac{9+4-16}{2(2)(3)} = -\dfrac{1}{4}$

**การตัดตัวเลือก** จากการที่เราทราบว่าสามเหลี่ยม ABC ที่มีสัดส่วนเป็น $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$

จะได้ $\dfrac{\sin A}{2} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{4}$ นั้นอัตราส่วนของด้าน $a : b : c = 2 : 3 : 4$

โดยการวาดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มี $a = 2$ , $b = 3$ และ $c = 4$ ตามขั้นตอนดังนี้

1. ลาก AB ยาว 4 cm.
2. เขียนวงกลมรัศมี 3 จุดศูนย์กลางที่ A เขียนวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลางที่ B และวงกลมตัดกันที่ C




3. โดยการวัดมุมโดยประมาณจะได้ $\hat{C} \cong 104^\circ$

เพราะฉะนั้น $\cos\hat{C} < 0$ แน่นอน ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $\cos 104^\circ = -\sin 14^\circ$ และ $\sin 30^\circ > \sin 14^\circ$ เพราะฉะนั้น $-\sin 30^\circ < -\sin 14^\circ$

นั่นคือ $-(\frac{1}{2}) = -\sin 30^\circ < -\sin 14^\circ = \cos 104^\circ$ เพราะฉะนั้นเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

**18.ตอบ 1.**

**แนวคิด** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

$$\det(A - xI_3) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 0\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix} - x\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 0\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix} - x\begin{bmatrix}x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & x\end{bmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix}1-x & 0 & 3\\ 5 & 4-x & 0\\ 3 & 4 & -6-x\end{bmatrix}\right) \qquad = (1-x)[(4-x)(-6-x)] + 3[20 - 3(4-x)]$$

$$= (1-x)(-24 + 2x + x^2) + 3(20 - 12 + 3x) = -24 + 2x + x^2 + 24x - 2x^2 - x^3 + 60 - 36 + 9x$$

$$= 35x - x^2 - x^3$$

พิจารณาสมการ $\quad x^3 + x^2 - 35x = x(x^2 + x - 35) = 0$

จะได้ $\quad x = 0, \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-35)}}{2} = 0, \dfrac{-1+\sqrt{141}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{141}}{2}$

เพราะฉะนั้นผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$ คือ $-1$

**วิธีลัด 1** พิจารณาในลักษณะของสูตรทั่วไป ให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นรากของสมการ และ

$(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$

จะได้ว่า $\quad a_n = (-1)^n x_1x_2\dots x_n \qquad$ และ $\qquad a_1 = -(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

ดังนั้นจากสมการ $\quad x^3 + x^2 - 35x = 0 \quad$ เราสรุปได้ว่าผลบวกของราก $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1 = -1$

**วิธีลัด 2** คำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$ เรียกว่า**ค่าเจาะจงของเมตริกซ์ A**

ถ้า $x_1, x_2, x_3$ เป็นค่าเจาะจงของ A และ $\det(A - xI_3) = a_3 + a_2x + a_1x^2 + x^3$

แล้วจะได้ว่า $\qquad$ ผลคูณของราก $x_1\,x_2\,x_3 = \det A$

และ $\qquad$ ผลบวกของราก $x_1 + x_2 + x_3$ = ผลบวกแนวทแยงมุมของเมตริกซ์

เพราะฉะนั้น $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 5 & 4 & 0\\ 3 & 4 & -6\end{bmatrix}$ เราสามารถตอบได้ว่าผลบวกของรากคือ $(1) + (4) + (-6) = -1$

**19. ตอบ 3.**

**แนวคิด วิธีจริง** $\quad$ จาก $\quad (a - b + c)(a + b + c) = ac$ จะได้ $a^2 + 2ac + c^2 - b^2 = ac$

$$a^2 + c^2 - b^2 = -ac$$

ดังนั้น $\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ เพราะฉะนั้น $\cos B = -\dfrac{1}{2}$ $\quad$ ซึ่งจะได้ว่า $\quad B = 120$

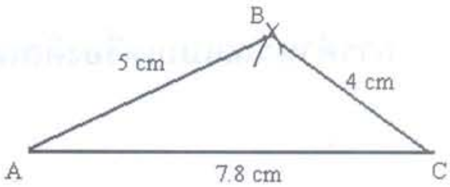
**การตัดตัวเลือก** ถึงแม้เราลืมสูตร $\cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ก็ยังมีแนวทางอื่นที่จะหามุม B ได้ดังนี้

เลือก $a = 4$ , $c = 5$ จะได้ $(4-b+5)(4+b+5) = 20$

$$81 + b^2 = 20$$

$$b^2 = 61$$

$$b = \sqrt{61} \cong 7.8$$




ต่อไปวาดรูปสามเหลี่ยม $a = 4$ , $b = 7.8$ และ $c = 5$

วัดมุม B จากรูปสามเหลี่ยมจะได้ $B = 120$ ดังนั้นเลือกข้อ 3. ดีกว่า

**20.ตอบ 3.**

**แนวคิด** **การตัดตัวเลือก** ใช้ค่ากำหนดช่วยในการตัดตัวเลือก $BA^{-1} = A^t$

$$\det(BA^{-1}) = \det(A^t)$$

$$\det(B)\det(A^{-1}) = \det(A^t)$$

$$\frac{\det(B)}{\det(A)} = \det(A)$$

เพราะว่า $\det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}) = 1$ เพราะฉะนั้น $\det(B) = 1$

ค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\det(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) = -1$ 2. $\det(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}) = -1$

3. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = 1$ 4. $\det(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

**วิธีจริง** $BA^{-1} = A^t$

$$BA^{-1}A = A^tA$$

$$B = A^tA = (\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix})^t(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix})$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## ความสามารถของโปรแกรม MATHCAD

การคำนวณแบบเครื่องคิดเลข $2\cdot 3+5-2=9$

$$\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4}}}=2.058$$

การแยกตัวประกอบ $x^4-x^3-x^2-x-2$

$$(x-2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+1\right)$$

การกระจายพหุนาม $(a+b)^4$

$$a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$$

หาอนุพันธ์เป็นสูตรได้ $\frac{d}{dx}\left[x^2+(3\cdot x-4)\right]$

$$2\cdot x+3$$

อินทิเกรตเป็นสูตรก็ได้ $\int x^2+3\,dx$

$$\frac{1}{3}\cdot x^3+3\cdot x$$

หาค่าลิมิตได้ $\lim_{x\to 4} x^2+4$

$$20$$

สนใจความสามารถในการประยุกต์ทางคณิตศาสตร์และต้องการใช้งานโปรแกรม **MATHCAD** หาอ่านได้จาก คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป **MATHCAD** เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

# คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20
# โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก
# ข้อสอบคณิตศาสตร์ ENTRANCE ระบบใหม่
# คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒


**คำถาม** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คืออะไร

**คำตอบ** การตัดตัวเลือกข้อสอบคณิตศาสตร์คือการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เล็ก ๆ น้อย ๆ ที่เหมาะสมกับโจทย์และตัวเลือกเพื่อตัดตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนทิ้งไป

**คำถาม** เทคนิคการตัดตัวเลือกมีอะไรบ้าง

**คำตอบ** เทคนิคการตัดตัวเลือกมีมากมายหลายแบบขึ้นอยู่กับลักษณะของโจทย์และตัวเลือกโดยสามารถจำแนกเทคนิคบางส่วนได้โดยย่อดังนี้

| เนื้อหาตามหลักสูตร | เทคนิคการตัดตัวเลือก |
|---|---|
| 1 เซต ตรรกศาสตร์ | ♠ ใช้แผนภาพเวนน์ แทนค่า T & F |
| 2 ภาคตัดกรวย | ✹ คว่ำหงาย เปิดซ้ายขวา ความชัน |
| 3 ความสัมพันธ์ ฟังก์ชัน | ◉ แทนค่า x เพื่อดูว่า x อยู่ในโดเมนหรือไม่ |
| 4 ระบบจำนวน สมการ อสมการ | ➼ x = 0 , 1 อยู่ในเซตคำตอบหรือไม่ |
| 5 ตรีโกณมิติ sinx cosx tanx ... | ➝ ค่าบวกหรือลบของ sinx cosx |
| 6 ลำดับ อนุกรม ลิมิต อนุพันธ์ อินทิเกรต | ● แทนค่า n = 1 , 2 , ... |
| 7 สถิติ | ▲ โจทย์เป็นและตัวเลือกเป็นสูตร |
| 8 เวกเตอร์ จำนวนเชิงซ้อน | ↗ วัดความยาวหรือดูจุดปลายของเวกเตอร์ |
| 9 เมทริกซ์ กำหนดการเชิงเส้น | ✲ ค่า detA เป็นบวกหรือลบ |
| 10 Log & Exponential | ▼ โดเมน Log ต้องเป็นเลขบวก |
| 11 การนับจำนวนวิธี ความน่าจะเป็น | Φ เปรียบเทียบ มากกว่า หรือ น้อยกว่า |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

ท่านที่สนใจหนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย** ทุกเล่ม
ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330
ศาลาพระเกี้ยว โทร. 2554433 โทรสาร 2554441
สยามสแควร์ โทร. 2516141 โทรสาร 2549495
e-mail : cubook@chula.ac.th
http://www.cubook.chula.ac.th

คณิตศาสตร์ปรนัย (ล. 20)
ISBN 974-332-284-1
9 789743 322846
C112
7010 195.00 บาท