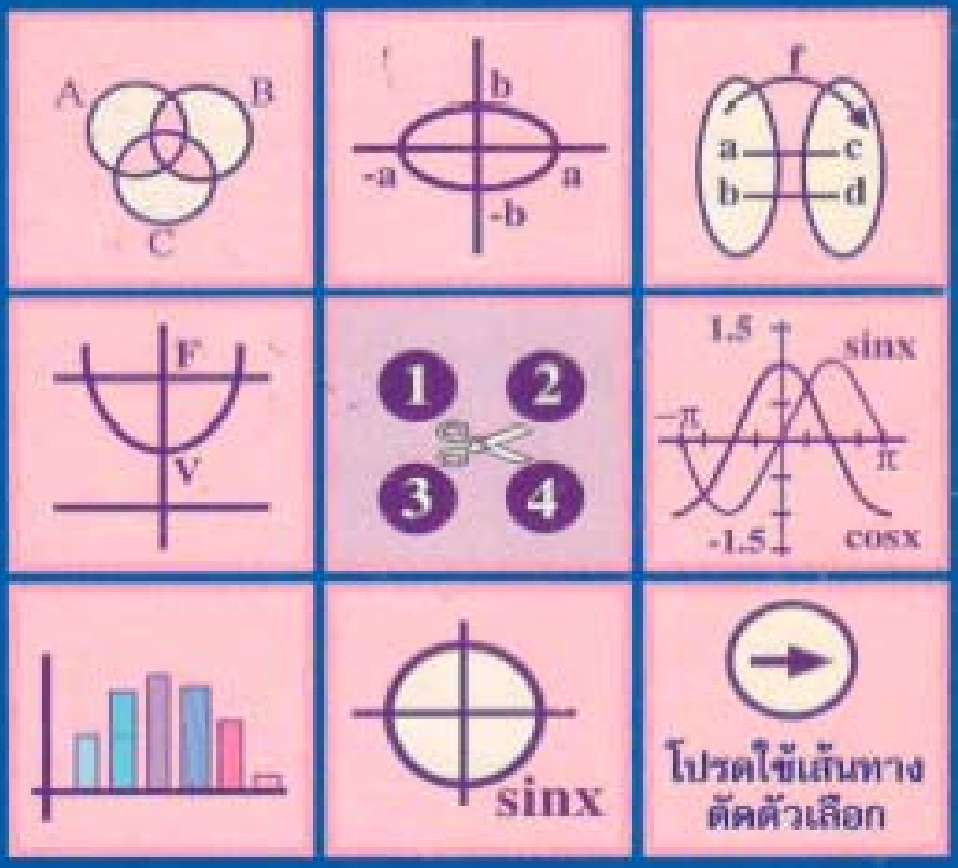
คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. 4

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 4



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21

คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. 4

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 4

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21
คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 4 สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 4

ผู้เขียน **รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา**

พิมพ์ครั้งที่ 1 สิงหาคม พ.ศ. 2542

สงวนลิขสิทธิ์ตามพระราชบัญญัติลิขสิทธิ์

ข้อมูลทางบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21 -- – กรุงเทพฯ : โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2542.

272 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง

510

ISBN 974 – 332 – 760 – 6

จัดจำหน่ายโดย *ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย*

ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 255-4433 โทรสาร 255-4441

สยามสแควร์ โทร. 251-6141 โทรสาร 254-9495

email: cubook@chula.ac.th

http://www.cubook.com

พิมพ์ที่ *โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 218-3563-4, 215-3612*

คำนำ

หนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21 คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 4** ผู้เขียนได้ทำการสรุปเนื้อหาจากหนังสือ คณิตศาสตร์ ค. 011 และ ค. 012 โดยมีเรื่องต่างๆ เช่น เซต ระบบจำนวนจริง ตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ สถิติเบื้องต้น โดยในแต่ละเรื่องจัดทำในรูปแบบ

- ♠ สรุปเนื้อหาแต่ละเรื่อง
- ♥ เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมตามเนื้อหา
- ♦ ตัวอย่างการทำโจทย์ข้อสอบโดยใช้ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
- ♣ โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกอีก 180 ข้อเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกหัดทำ ตัวอย่างข้อสอบต่างๆ รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ

หนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์มากที่สุด โดยที่นักเรียนต้องดู **วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก** ทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่า การตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้น แต่วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป

พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

เตรียมความพร้อมสู่โอลิมปิกคณิตศาสตร์

ด้วยการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์จากง่ายไปยาก ควรอ่านบทความและความรู้ทางคณิตศาสตร์ในหนังสือชุด คณิตศาสตร์ปรนัย ตัวอย่างปัญหาที่น่าสนใจ

1. 100! ลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว
2. k มากสุดที่ทำให้ 3^k หาร 2000! ลงตัว
3. จงแสดงว่า $11^{2n} - 1$ หารด้วย 20 ลงตัวทุกค่า n = 1 , 2 , ...
4. $x^2 + x + 1$ หาร $x^{2545} + x^{2002} + 1$ เหลือเศษเท่าใด
5. $x^{100} + x^{90} + x^{80} + \ldots + x^{20} + x^{10} + 1$ หารด้วย $x^4 - 1$ เหลือเศษเท่าใด
6. $x^{2541} - 1$ หารด้วย $x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด
7. $x^3 + 1$ หาร $x^{120} + x^{80} + x^{40} + 1$ เหลือเศษเท่าใด
8. $x^{12} + 1$ หาร $x^{2541} + x^{254} + x^{25} + x^3 + 1$ เหลือเศษเท่าใด
9. จงหาสัมประสิทธิ์ x^{18} ในพหุนาม $(x^2 + x^3 + \ldots + x^7)^4$
10. กำหนด $0 \le x \le 1$ จงหาค่าสูงสุดของ $x(1 - x^3)$
11. กำหนดให้ xy = 1 และ x , y > 0 จงหาขอบเขตล่างค่ามากสุดของ $\frac{x^4 + y^4}{x + y}$
12. กำหนดให้ x , y > 0 และ xy = 1

    $\frac{x^2 + y^2 + x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ มีขอบเขตล่างค่ามากสุดเท่ากับเท่าใด
13. กำหนดให้ x , y , z > 0 , xyz = 1

    จงหาจำนวนเต็มบวก k มากที่สุดที่ทำให้ $k \le \frac{x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}$
14. จงแสดงว่า $11 \mid (n^{11} - n)$
15. จงแสดงว่า $3 \mid n(n^2 + 2)$
16. จงแสดงว่า $24 \mid (2n - 1)((2n - 1)^2 - 1)$
17. จงแสดงว่า $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$

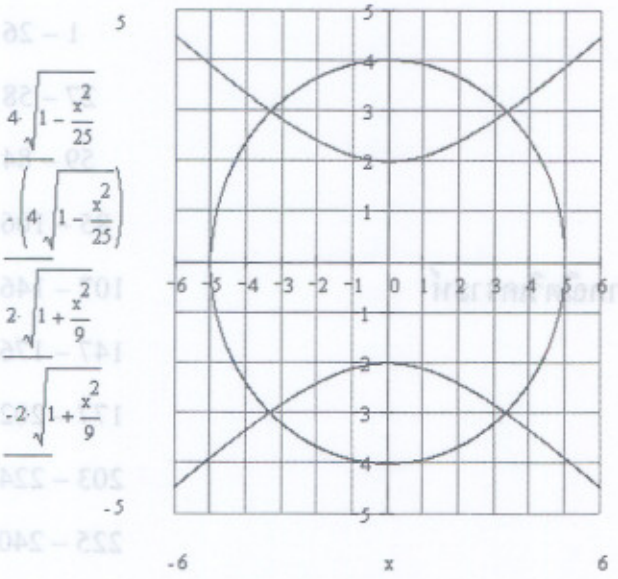
หนังสือชุด คณิตศาสตร์ปรนัยทุกเล่ม
สั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สารบัญ

บทที่ 1 เซต	1 – 26
บทที่ 2 ระบบจำนวนจริง	27 – 58
บทที่ 3 ตรรกศาสตร์	59 – 84
บทที่ 4 ความสัมพันธ์	85 – 106
บทที่ 5 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์	107 – 146
บทที่ 6 ภาคตัดกรวย	147 – 176
บทที่ 7 ฟังก์ชัน	177 – 202
บทที่ 8 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	203 – 224
บทที่ 9 สถิติเบื้องต้น	225 – 240
โจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก	241 – 264

MATHCAD กับปัญหาภาคตัดกรวย

MATHCAD สามารถเขียนกราฟของภาคตัดกรวยได้ เช่น กราฟของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ กับ ไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$



นอกจากวาดกราฟได้แล้วยัง สามารถหาพิกัดของจุดตัดได้

$x := 1$

$y := 1$

Given

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{9}=1$

$\text{Find}(x,y)=\begin{bmatrix}3.326\\2.986\end{bmatrix}$

โดยการคำนวณของ MATHCAD ได้พิกัดของจุดตัดคือ (3.326 , 2.986) โดยหลักการสมมาตรจะได้พิกัดจุดตัดอีกสามจุดคือ (–3.326 , 2.986) , (3.326 , –2.986) และ (–3.326 , – 2.986)

สนใจความสามารถและการใช้งานของ MATHCAD เพื่อประยุกต์ใช้กับคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย หาอ่านได้จากหนังสือ **คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป** MATHCAD เขียนโดย **รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา**

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

บทที่ 1
เซต

1.1 สรุปเนื้อหา

1. **เซต** หมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่างๆ เช่น

   เซตของแต้มลูกเต๋า = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

   เซตของพยัญชนะไทย = {ก , ข , ค , . . . , ฮ}

   เซตของตัวเลขหนึ่งหลัก = {0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9}

2. **สมาชิก** ของเซตหมายถึงสิ่งที่อยู่ในเซต เช่น

   4 เป็นสมาชิกของเซตของแต้มลูกเต๋า

   ก เป็นสมาชิกของเซตของพยัญชนะไทย

3. การเขียนเซตทำได้ 2 วิธี

   3.1 การเขียนแบบแจงสมาชิก

   3.2 การเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิกของเซต

ตัวอย่างเช่น $\{x \mid x \text{ เป็นแต้มลูกเต๋า}\} = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6\}$

$\{x \mid x \text{ เป็นสระของภาษาอังกฤษ}\} = \{A , E , I , O , U\}$

$\{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}\} = \{1 , 2 , 3 , \ldots\}$

4. **เซตว่าง** หมายถึง เซตที่ไม่มีสมาชิกแทนด้วย $\varnothing$ หรือ {}

5. **เซตจำกัด** หมายถึง เซตที่มีจำนวนสมาชิกเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ เช่น

   {1 , 2 , 3} , {1 , 2 , 3 , 4} , $\varnothing$ เป็นเซตจำกัด

6. A เป็นเซตจำกัด , n(A) หมายถึงจำนวนสมาชิกในเซต A

   $n(\varnothing) = 0$

$A = \{1, 2, 4\}$ $n(A) = 3$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$ $n(B) = 4$

7. **เซตอนันต์** หมายถึงเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด ตัวอย่างเช่น

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

$\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็ม และ 3 หาร x ลงตัว$\}$

$\{x \mid x$ เป็นจำนวนตรรกยะ$\}$

8. A เป็น**สับเซต**ของ B ก็ต่อเมื่อ ทุกสมาชิกของ A ต้องเป็นสมาชิกของ B เขียนแทนด้วย $A \subset B$

ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$ $A \subset B$

$A = \{a, b\}, B = \{a, b, c, \ldots, z\}$ $A \subset B$

ข้อควรจำ เซตว่างเป็นสับเซตทุกเซต

9. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B$ และ $B \subset A$

10 **P(A) เรียกว่าเพาเวอร์เซตของ A** หมายถึงเซตของสับเซตของ A ตัวอย่างเช่น

$A = \{1\}$ $P(A) = \{\varnothing, \{1\}\}$

$B = \{a, b\}$ $P(B) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

11. เมื่อ A เป็นเซตจำกัด จำนวนสมาชิกของ P(A) เท่ากับ $2^{n(A)}$

ข้อควรจำ จำนวนสมาชิกของ P(A) ต้องเป็นเลขคู่เสมอ เราสามารถใช้เหตุผลนี้ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

12. แผนภาพที่ใช้เขียนเซตเรียกว่า **แผนภาพของเวนน์ – ออยเลอร์**

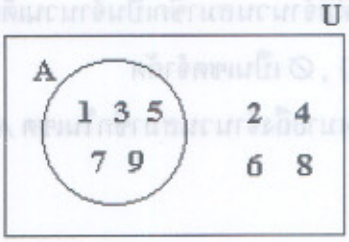
แทนเอกภาพสัมพัทธ์ U ด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า

แทนเซต A, B, ... ด้วยวงกลมหรือวงรีปิด

ตัวอย่างเช่น $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

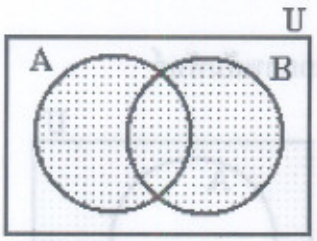
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ คือ



13. $A \cup B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$



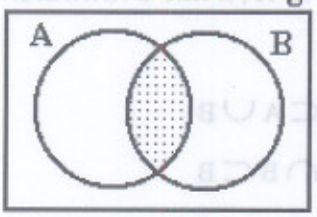
ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

14. $A \cap B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในเซต A และ B

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$



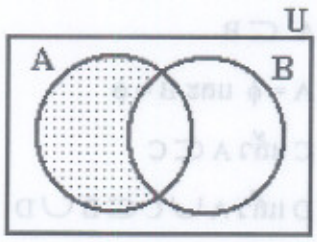
ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A \cap B = \{2\}$

15. $A - B$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และไม่อยู่ใน B

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$

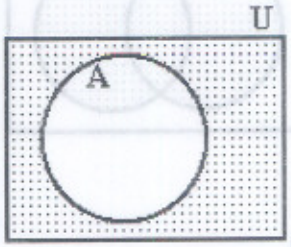


ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

$A - B = \{1, 3\}$

และ $B - A = \{4, 6, 8\}$

16. A' หมายถึงเซต $U - A$ เมื่อ U คือเอกภพสัมพัทธ์



ตัวอย่างเช่น $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$A' = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

17. คุณสมบัติเกี่ยวกับเซตที่สำคัญ ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ U

(1) $\phi \subset A$ และ $A \subset U$

(2) $A \subset A \cup B$ และ $B \subset A \cup B$

(3) $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

(4) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

(5) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

(6) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = A \cap B$

(7) $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $B' \subset A'$

(8) $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A' = B'$

(9) $A \cap B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A \subset B'$

(10) $A \cup B = U$ ก็ต่อเมื่อ $A' \subset B$

(11) $A \cup B = \phi$ ก็ต่อเมื่อ $A = \phi$ และ $B = \phi$

(12) ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

(13) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cup C \subset B \cup D$

(14) ถ้า $A \subset B$ และ $C \subset D$ แล้ว $A \cap C \subset B \cap D$

(15) $A \cup A = A$

(16) $A \cap A = A$

(17) $A \cup \phi = A$

(18) $A \cap \phi = \phi$

(19) $A \cup U = U$

(20) $A \cap U = A$

(21) $A \cup B = B \cup A$

(22) $A \cap B = B \cap A$

(23) $A \cup A' = U$

(24) $A \cap A' = \phi$

(25) $(A')' = A$

(26) $U' = \phi$

(27) $\phi' = U$

(28) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

(29) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(30) $A - B = A \cap B'$

(31) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(32) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(33) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

(34) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

(35) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - C$

(36) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(37) $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

(38) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$

(39) $A - B \subseteq A$

(40) $(A \cap B \cap C)' = (A' \cup B' \cup C')$ และ $(A \cup B \cup C)' = (A' \cap B' \cap C')$

18. คุณสมบัติเกี่ยวกับเพาเวอร์เซต กำหนดให้ A , B เป็นเซตจำกัด

1. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \subset P(B)$
2. $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$
3. $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$
4. $n(P(A)) = 2^{n(A)}$
5. $P(A) - P(B) \subset P(A - B)$
6. $n(P(\phi)) = 1$

19. คุณสมบัติเกี่ยวกับจำนวนสมาชิกในเซต

(1) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + N(B) - n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

(3) ถ้า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subset B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

(4) ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $B \subset A$ แล้ว B เป็นเซตจำกัด

(5) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(A) \leq n(B)$

(6) $n(\varnothing) = 0$

(7) $n(A) - n(B) \leq n(A - B)$

(8) $n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$

(9) ถ้า $A \subset B$ แล้ว $n(B - A) = n(B) - n(A)$

(10) $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

แนวคิดของการตัดตัวเลือกหาอ่านได้ใน
คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7
คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10
คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16
โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

1.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. จำนวนสมาชิกของ P(A) ต้องอยู่ในรูป 2 ยกกำลังจำนวนเต็มบวกหรือ 0

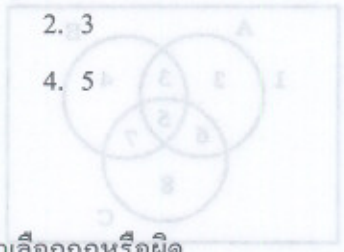
   ตัวอย่างเช่น $A = \{1, 2, 3, 4\}$

   $B = \{2, 3, 5\}$

   จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B)$ เท่ากับเท่าใด

   1. 2
   2. 3
   3. 4
   4. 5

   เราสามารถตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้



2. ยกตัวอย่างให้สอดคล้องกับโจทย์แล้วดูว่าตัวเลือกถูกหรือผิด

   ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ A และ B ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

   ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A - B = B'$
   2. $A - B = A$
   3. $A \cap B = A$
   4. $A \cap B = B$

   โดยการยกตัวอย่าง $U = \{1, 2, 3\}$

   $A = \{1\}$

   $B = \{2\}$

   จะได้ว่า A , B สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้ว

   1. $A - B = \{1\} \neq \{1, 3\} = B'$
   2. $A - B = \{1\} = A$
   3. $A \cap B = \varnothing \neq A$
   4. $A \cap B = \varnothing \neq B$

   ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

3. ใช้วิธีสมมติสมาชิกใส่ในแผนภาพของเวนน์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

   ตัวอย่างเช่น เซต $(A - B) \cap C$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

   1. $(A \cup C) \cap (B \cup C)$
   2. $(A \cap C) - B$
   3. $(A - B) \cap B$
   4. $(A \cap B) - C$

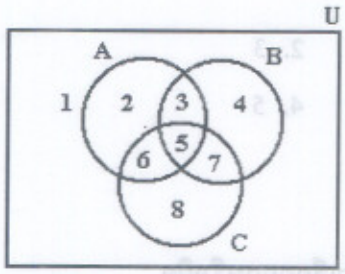
ทำการสมมติสมาชิกใส่ในแผนภาพของเวนน์ดังนี้

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A = \{2, 3, 5, 6\}$

$B = \{3, 4, 5, 7\}$

$C = \{5, 6, 7, 8\}$



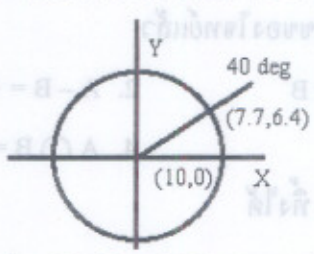
โจทย์ $(A - B) \cap C = \{6\}$

1. $(A \cup C) \cap (B \cup C) = \{3, 5, 7\}$ 2. $(A \cap C) - B = \{6\}$

3. $(A - C) \cap B = \{3\}$ 4. $(A \cap B) - C = \{3\}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

เชื่อหรือไม่ วงกลมรัศมี 10 cm. ช่วยในการประมาณค่า sin cos tan ได้



จากรูป ค่า sin40 = 0.64 , cos40 = 0.77

หาอ่านแนวคิดเพิ่มเติมได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

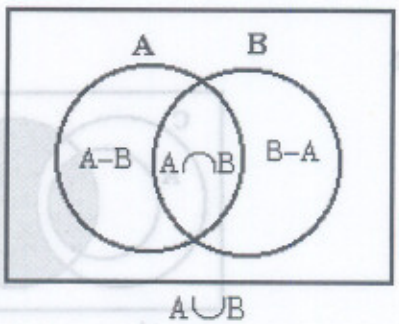
1.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 1.1 เซต $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(A\cap B)'$
2. $(A'\cup B')'$
3. A
4. $(A'\cap B')'$

ตอบ 4.

แนวคิด **วิธีที่ 1** โดยใช้แผนภาพของเวนน์



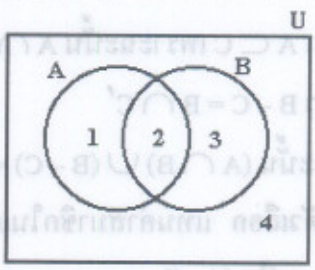
จากแผนภาพจะได้ว่า $(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B) = A\cup B = (A'\cap B')'$

วิธีที่ 2 ใช้คุณสมบัติของเซต $A-B=A\cap B'$ และ $B-A=B\cap A'$

$$(B-A)\cup(A\cap B) = (B\cap A')\cup(A\cup B) = B\cap(A'\cup A)$$
$$= B\cap U = B$$

$$(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B) = (A-B)\cup B = (A\cap B')\cup B$$
$$= (A\cup B)\cap(B'\cup B) = (A\cup B)\cap U$$
$$= A\cup B = (A'\cap B')'$$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $U=\{1,2,3,4\}$



$A=\{1,2\}$

$B=\{2,3\}$

$A-B=\{1\}$

$B-A=\{3\}$

$A\cap B=\{2\}$

$(A-B)\cup(B-A)\cup(A\cap B) = \{1\}\cup\{3\}\cup\{2\} = \{1,2,3\}$

ตัวเลือก 1. $(A \cap B)' = \{2\}' = \{1,3,4\}$

ตัวเลือก 2. $(A' \cup B')' = (\{1,2\}' \cup \{2,3\}')' = (\{3,4\} \cup \{1,4\})'$

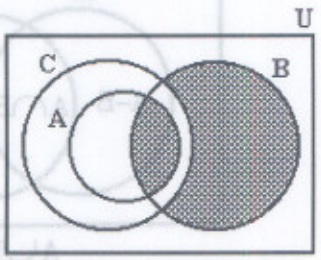
$= \{1,3,4\}' = \{2\}$

ตัวเลือก 3 $A = \{1,2\}$

จะเห็นได้ว่าตัวเลือก 1. , 2. , 3. ไม่เท่ากับ $\{1,2,3\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.2



เซตส่วนที่แรเงาจากแผนภาพเวนน์ที่กำหนดให้ ตรงกับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(A \cap B) \cup (B - A)$
2. $(A \cap B \cap C) \cup (C - B)$
3. $(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C')$
4. $(A \cap B) \cup (B - (C \cap A))$

ตอบ 3.

แนวคิด จากแผนภาพของเวนน์ในโจทย์จะเห็นว่าส่วนของเซตที่แรเงามี 2 ส่วน

ส่วนที่ 1 คือส่วนที่ A ตัดกับ B นั่นคือ $A \cap B$

ส่วนที่ 2 คือส่วนที่อยู่ใน B และไม่อยู่ใน C และไม่อยู่ใน A ตรงกับ $B - C$

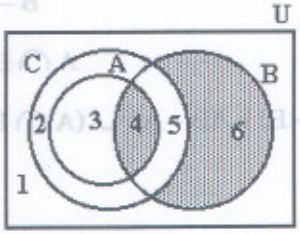
ดังนั้นส่วนแรเงาทั้ง 2 รวมกันคือ $(A \cap B) \cup (B - C)$ ต่อไปต้องจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือก

เพราะว่า $A \subset C$ เพราะฉะนั้น $A \cap B \subset C$ และ $A \cap B = A \cap B \cap C$

เพราะว่า $B - C = B \cap C'$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \cup (B - C) = (A \cap B \cap C) \cup (B \cap C')$ ตรงกับตัวเลือก 3

การตัดตัวเลือก แทนค่าสมาชิกในแต่ละส่วนของแผนภาพดังรูป



ส่วนแรเงาคือ $\{4,6\}$

ตัวเลือก 1. $A \cap B = \{4\}$

$B - A = \{5,6\}$

$(A \cap B) \cup (B - A) = \{4, 5, 6\} \neq \{4, 6\}$

ตัวเลือก 2. $A \cap B \cap C = \{4\}$

$C - B = \{2, 3\}$

$(A \cap B \cap C) \cup (C - B) = \{2, 3, 4\} \neq \{4, 6\}$

ตัวเลือก 3. $B \cap C' = B - C = \{6\}$

$(A \cap B \cap C) \cup (B \cap C') = \{4, 6\}$

ตัวเลือก 4 $C \cap A = A = \{3, 4\}$

$B - (C \cap A) = \{5, 6\}$

$(A \cap B) \cup (B - (C \cap A)) = \{4, 5, 6\} \neq \{4, 6\}$

สรุปตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.3 ถ้า $A \cup B$ มี 5 สมาชิก และ $A \cap B$ มี 3 สมาชิก แล้ว $P(A - B)$ จะมีสมาชิกกี่ตัว เมื่อกำหนดให้ A และ B มีสมาชิกเท่ากัน

1. 1 ตัว
2. 2 ตัว
3. 3 ตัว
4. 4 ตัว

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่า $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$ และ $A - B$, $A \cap B$, $B - A$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน เพราะฉะนั้น $n((A \cup B) = n((A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A))$

$5 = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$ ...(1)

สมมติ $n(A) = k = n(B)$ เพราะว่า $n(A \cap B) = 3$

เพราะฉะนั้น $n(A) = n((A - B) \cup (A \cap B)) = n(A - B) + n(A \cap B)$

$k = n(A - B) + 3$

$n(A - B) = k - 3$

$n(B) = n((B - A) \cup (A \cap B))$

$k = n(B - A) + n(A \cap B) = n(B - A) + 3$

$n(B - A) = k - 3$

แทนค่าในสมการ (1) จะได้ $5 = (k-3)+3+(k-3) = 2k+3$

$k = 1$

เพราะฉะนั้น $n(A-B)=1$ สรุป $n(P(A-B)) = 2^1 = 2$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $n(P(A-B))$ ต้องอยู่ในรูปของ 2 ยกกำลังจำนวนเต็มบวกหรือ 0 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

เพราะว่า $n(A \cup B) = 5$ และ $n(A \cap B) = 3$ เพราะฉะนั้น $A - B \neq \varnothing$

ดังนั้น $n(P(A-B)) \neq 2^0 = 1$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

หมายเหตุ ลองคิดอีกแบบก็ได้ สมมติ $A - B \neq \varnothing$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

ดังนั้น $A \cap B = A$ และ $A \cup B = B$ ซึ่งจะได้ว่า $n(A) = 3$, $n(B) = 5$ ทำให้ $n(A) \neq n(B)$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดว่า $n(A) = n(B)$ เพราะฉะนั้น $A - B \neq \varnothing$

จากตัวอย่างที่เหลือ $n(P(A-B)) = 2$ หรือ $n(P(A-B)) = 4$

เพราะฉะนั้น $n(A-B) = 1$ หรือ $n(A-B) = 2$

สมมติ $n(A-B) = 2$ จาก $n(A \cup B) = n(A-B) + n(A \cap B) + n(B-A)$

$5 = 2 + 3 + n(B-A)$

$n(B-A) = 0$

$B - A = \varnothing$

$B \subset A$

ดังนั้น $A \cap B = B$ และ $A \cup B = A$ ทำให้ $n(B) = n(A \cap B) = 3$ และ $n(A) = n(A \cup B) = 5$

ขัดแย้งกับ $n(A) = n(B)$ เพราะฉะนั้น $n(A-B) \neq 2$

สรุป $n(A-B) = 1$ และ $n(P(A-B)) = 2$ แน่นอน

ตัวอย่างที่ 1.4 ให้ $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ A และ B เป็นสับเซตของ U โดยที่

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{x \mid x^3 + x^2 - 6x = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \cup B = \{-3, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $(A \cap B)' = \{0, 2\}$
3. $B - A = \{-3\}$
4. $A' \cap B' = \{6, 7\}$

ตอบ 4.

แนวคิด พิจารณาเซต B $x^3+x^2-6x=0$

$x(x^2+x-6)=0$

$x(x+3)(x-2)=0$

$x=0,2,-3$

เพราะว่า $B \subset U$ เพราะฉะนั้น $B=\{0,2\}$

สรุป $A \cup B=\{0,1,2,3,4,5\}$

$B-A=\varnothing$

$A \cap B=\{0,2\}$

$(A \cap B)'=\{1,3,4,5\} \neq \{0,2\}$

$A'=\{6,7\}$

$B'=\{1,3,4,5,6,7\}$

$A' \cap B'=\{6,7\}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่ถูกต้องคือตัวเลือก 4.

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \subset U, B \subset U$ และ $-3 \notin U$

เพราะฉะนั้น $-3 \notin A \cup B$ และ $-3 \notin B-A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.5 ถ้า A , B เป็นเซตใดๆ ข้อใดที่ผิด

1. $A \cup B=A \cap B$ ก็ต่อเมื่อ $A=B$
2. $(A \cap B) \cap (A-B)$ เป็นเซตว่าง
3. $A \in P(A)$ และ $B \in P(B)$
4. $(A \cap B) \subset (A-B)$

ตอบ 4.

แนวคิด เพราะว่า $A \in P(A)$ และ $B \in P(B)$ เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

สำหรับตัวเลือก 1. ก็เป็นจริงซึ่งแสดงข้อพิสูจน์โดยง่ายดังนี้

$A \subset A \cup B=A \cap B \subset B$ ดังนั้น $A \subset B$

$B \subset A \cup B=A \cap B \subset A$ ดังนั้น $B \subset A$

เพราะฉะนั้น $A=B$

ตัวเลือก 2. เป็นจริงแสดงข้อพิสูจน์ได้ดังนี้ เพราะว่า $A - B = A \cap B'$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \cap (A - B) = (A \cap B) \cap (A \cap B') = A \cap (B \cap B')$

$= A \cap \varnothing = \varnothing$

การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้ขอแนะนำให้ลองแทนค่า

เช่น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{4, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{4, 5\}$

$A - B = \{1, 2, 3\}$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \not\subset (A - B)$ สรุปตัวเลือก 4. ผิดแน่นอน

ตัวอย่างที่ 1.6 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องที่สุด

1. ถ้า A , B เป็นเซตจำกัด และ $A \cap B \neq \varnothing$ แล้ว $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$
2. $((A \cap B) \cup (B \cap C))' \subset (B' \cup (A' \cap C'))$
3. ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $A = B$
4. ถ้า $A \cap B' = \varnothing$ แล้ว $A \cup B' = B'$

ตอบ 2.

แนวคิด คำถามแบบนี้ถ้าทำตามวิธีจริงจะยากเพราะว่าต้องคิดว่าข้อความในตัวเลือกใดน่าจะถูกต้องแล้วจึงแสดงข้อพิสูจน์ และข้อใดคาดว่าน่าจะเป็นเท็จก็ยกตัวอย่างแสดงว่าข้อความนั้นเป็นเท็จ อย่างไรก็ตามการยกตัวอย่างสำหรับคำถามแบบนี้เป็นวิธีที่ดีที่สุด

เพราะว่าจะตัดตัวเลือกทิ้งได้ ตัวอย่างเช่น $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 2, 3, 4\}$

จะได้ว่า $A - B = \varnothing$ แต่ $A \neq B$

$B' = \{5\}$

$A \cap B' = \varnothing$ แต่ $A \cup B' = \{1, 2, 3, 5\} \neq B'$

เพราะฉะนั้นขณะนี้เราตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

ต่อไปเลือก $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ จะได้ $A \cup B = \{1, 2\}$

เพราะว่า $\{1,2\} \in P(A \cup B)$ แต่ $\{1,2\} \notin (P(A) \cup P(B))$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 1.7 กำหนดให้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$, $n(U) = 10$
ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $n(A - B) = 1$
2. $n((A \cap B)') = 8$
3. $n((A \cup B)') = 2$
4. $n(A' \cup B) = 7$

ตอบ 4.

แนวคิด การหาคำตอบใช้แผนภาพเวนน์ดีที่สุด

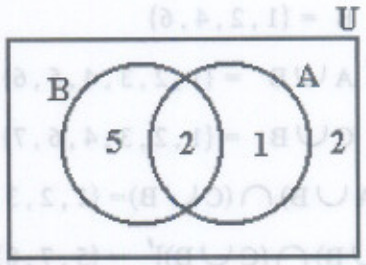
(**หมายเหตุ** แผนภาพแสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณเหมาะสำหรับทำโจทย์ข้อนี้)

จากแผนภาพ $n(A - B) = 1$

$n((A \cap B)') = 8$

$n((A \cup B)') = 2$

$n(A' \cup B) = 9$



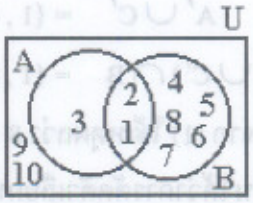
ดังนั้นตัวเลือก 4 ไม่ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก เลือกเซตที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่น

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,4,5,6,7,8\}$

$A \cap B = \{1,2\}$



จะได้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 10$ และ

$A - B = \{3\}$ $n(A - B) = 1$

$(A \cap B)' = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ $n((A \cap B)') = 8$

$(A \cup B)' = \{9,10\}$ $n((A \cup B)') = 2$

$A' \cup B = \{1,2,4,5,6,7,8,9,10\}$ $n(A' \cup B) = 9$

สรุปตัวเลือก 4. ผิด

ตัวอย่างที่ 1.8 กำหนด A , B และ C เป็นเซตใดๆ จงพิจารณาข้อใดต่อไปนี้ผิด

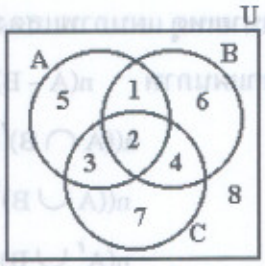
1. ถ้า $A \subset B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$
2. $[(A \cup B) \cap (C \cup B)]' = [(A' \cup C') \cap B]$
3. ถ้า $A \subset C$ และ $C \subset A$ แล้ว $A = C$
4. ถ้า $A \subset C$ แล้ว $C' \subset A'$

ตอบ 2.

แนวคิด คำถามข้อนี้จะว่าง่ายก็ได้ เพราะว่าตัวเลือก 1. , 3. , และ 4. เป็นคุณสมบัติเกี่ยวกับเซต จะว่ายากก็ได้เพราะว่าการจะแสดงว่า ตัวเลือก 1. และ 4. ถูกต้องนั้นต้องใช้วิธีพิสูจน์ ส่วนตัวเลือก 3. เป็นบทนิยามของเซตเท่ากัน อย่างไรก็ตามขอแนะนำการยกตัวอย่างของเซตดังนี้

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $A = \{1, 2, 3, 5\}$

$B = \{1, 2, 4, 6\}$ $C = \{2, 3, 4, 7\}$



จะได้ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$C \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$

$(A \cup B) \cap (C \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

$[(A \cup B) \cap (C \cup B)]' = \{5, 7, 8\}$ ...(1)

$A' = \{4, 6, 7, 8\}$ $C' = \{1, 5, 6, 8\}$

$A' \cup C' = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$(A' \cup C') \cap B = \{1, 4, 6\} \neq \{5, 7, 8\}$ ดังนั้นตัวเลือก 2. ผิด

หมายเหตุ จาก (1) ใช้เหตุผลว่า $8 \notin B$ ดังนั้น $[(A \cup B) \cap (C \cup B)'] \neq [(A' \cup C') \cap B]$ แน่นอน จะเห็นได้ว่าการตัดตัวเลือกนั้นต้องสังเกตที่ตัวเลือกด้วย และด้วยเหตุผลเล็กๆ น้อยๆ จะทำให้เราคิดเลขน้อยลงอย่างเช่นในตัวอย่างนี้

ตัวอย่างที่ 1.9 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. $P(\{\varnothing\}) - P(\varnothing) = P(\{\varnothing\})$
2. ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $P(A) - P(B) = \varnothing$
3. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ และ $A \cap C = \varnothing$ แล้ว $A \cap (B \cup C) = \varnothing$
4. ถ้า $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ และ $A \cap B = \varnothing$ แล้วจะได้ $A' - B' = B$

ตอบ 1.

แนวคิด ตัวเลือก 1. ผิด $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

$P(\varnothing) = \{\varnothing\}$

$P(\{\varnothing\}) - P(\varnothing) = \{\{\varnothing\}\} \neq P(\{\varnothing\})$

ตัวเลือก 2. ถูกต้อง ถ้า $A - B = \varnothing$ จะได้ $A \subset B$ และ $P(A) \subset P(B)$

เพราะฉะนั้น $P(A) - P(B) = \varnothing$

ตัวเลือก 3. ถูกต้อง ถ้า $A \cap B = \varnothing$ และ $A \cap C = \varnothing$

จะได้ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

ตัวเลือก 4. ถูกต้อง เพราะว่า $A \cap B = \varnothing$ เพราะฉะนั้น $B \subset A'$ และ $A \subset B'$

เพราะฉะนั้น $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B$

การตัดตัวเลือก เหตุผลที่จะใช้ในการตัดตัวเลือกคือ ทุกเซต A, B $\varnothing \in P(A)$ และ $\varnothing \in P(B)$ เพราะฉะนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$ นั่นคือ $P(A) - P(B) \neq P(A)$ เสมอ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1 ผิด

ตัวอย่างที่ 1.10 ให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ A, B เป็นสับเซตของ U แล้ว $(A')' - B'$ จะเท่ากับเซตในข้อใด

1. $B' - A$
2. $(B')' \cap A'$
3. $U - (A' \cup B')$
4. $\varnothing' - A'$

ตอบ 3.

แนวคิด $(A')' - B' = A - B' = A \cap (B')'$

$= A \cap B = (A' \cup B')' = U - (A' \cup B')$

ดูจากวิธีทำจะเห็นว่าเราต้องรู้ว่าควรจะจัดสูตรของเซตให้ไปตรงกับตัวเลือกใด จึงจะได้สูตรที่ต้องการ

การตัดตัวเลือก เราจะใช้การแทนค่าเซต $U = \{1, 2, 3\}$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$

$(A')' = A$

$$B' = \{1\}$$

$$(A')' - B' = \{1, 2, \} - \{1\} = \{2\}$$

พิจารณาเซตในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $B' - A = \{1\} - \{1, 2\} = \varnothing$

ตัวเลือก 2. $(B')' \cap A' = \{2, 3\} \cap \{3\} = \{3\}$

ตัวเลือก 3. $U - (A' \cup B') = \{1, 2, 3\} - (\{3\} \cup \{1\}) = \{2\}$

ตัวเลือก 4. $\varnothing' - A' = U - \{3\} = \{1, 2\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.11 กำหนดให้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 10$ ข้อใดไม่ถูกต้อง

1. $A - B$ มีสมาชิก 1 ตัว
2. $(A \cap B)'$ มีสมาชิก 8 ตัว
3. $(A \cup B)'$ มีสมาชิก 2 ตัว
4. $A' \cup B$ มีสมาชิก 7 ตัว

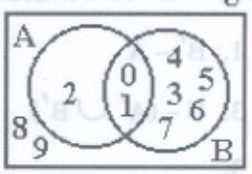
ตอบ 4

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติเซต A , B , U ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{0, 1, 2\}$

$B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{0, 1\}$



จะได้ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 10$

เพราะว่า $A - B = \{2\}$

$A \cap B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$(A \cup B)' = \{8, 9\}$

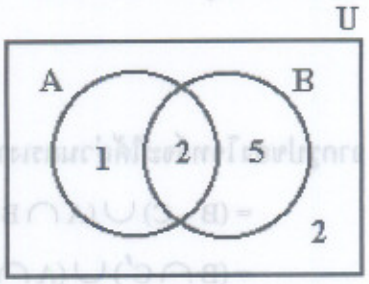
$A' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A' \cup B = \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ มีสมาชิก 9 ตัว

สรุปตัวเลือก 4. ผิด เราเลือกเป็นคำตอบข้อนี้ได้

วิธีจริง จากโจทย์ $n(A) = 3$, $n(B) = 7$, $n(A \cap B) = 2$ และ $n(U) = 10$

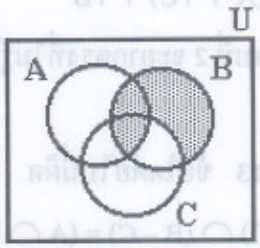
ใช้แผนภาพเวนน์แสดงจำนวนสมาชิกในแต่ละบริเวณได้ดังนี้



1. $A - B$ มีสมาชิก 1 ตัว ถูกต้อง
2. $(A \cap B)'$ มีสมาชิก 8 ตัว ถูกต้อง
3. $(A \cup B)'$ มีสมาชิก 2 ตัว ถูกต้อง
4. $A' \cup B$ มีสมาชิก 7 ตัว ผิด

จากแผนภาพเวนน์ $A' \cup B$ ต้องมีสมาชิก 9 ตัวเท่านั้น

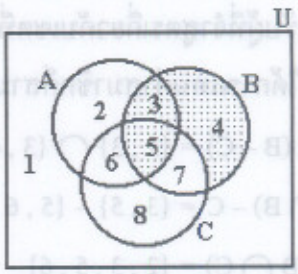
ตัวอย่างที่ 1.12 ส่วนที่แรเงารูปหมายถึงเซตใด



1. $(C - A)' \cap B$
2. $C' \cap (A \cup B)$
3. $(A - C) \cup B$
4. $A - (B \cup C)$

ตอบ 1.

แนวคิด คำถามแบบนี้ใช้การสมมติสมาชิกแต่ละบริเวณช่วยในการตัดตัวเลือกดีกว่า



ส่วนแรเงาคือเซต $\{3, 4, 5\}$

ตัวเลือก 1. $(C - A)' \cap B = \{7, 8\}' \cap \{3, 4, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 7\}$

$= \{3, 4, 5\}$

ตัวเลือก 2. $C' \cap (A \cup B) = \{5, 6, 7, 8\}' \cap (\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} = \{2, 3, 4\}$

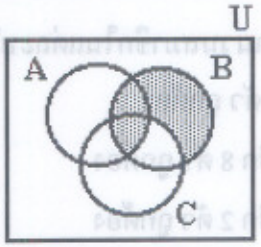
ตัวเลือก 3. $(A - C) \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 7\} = \{2, 3, 4, 5, 7\}$

ตัวเลือก 4. $A - (B \cup C) = \{2\}$

สรุปตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1. วาดรูปแผนภาพของเวนน์แสดงเซตของแต่ละตัวเลือก

แบบที่ 2. จัดรูปทางพีชคณิต



จากรูปของโจทย์จะได้ส่วนแรกเงา

$= (B - C) \cup (A \cap B \cap C)$ ...(*)

$= (B \cap C') \cup (A \cap B)$ (ดูจากรูป)

$= (A \cap B) \cup (C' \cap B)$ $= (A \cup C') \cap B$

$= (A' \cap C)' \cap B$ $= (C - A)' \cap B$

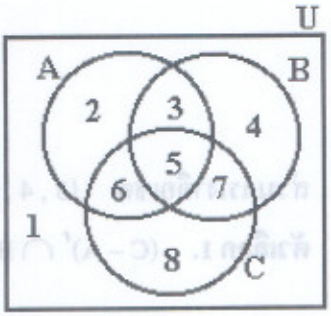
หมายเหตุแบบที่ 2 จะยากตรงที่ไม่รู้ว่าจะเริ่มต้นสูตร (*) อย่างไร และต้องจัดรูปไปหาตัวเลือกใด

ตัวอย่างที่ 1.13 ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
2. $A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ตอบ 2.

แนวคิด สำหรับผู้ที่จำสูตรเกี่ยวกับเซตที่เท่ากันจะรู้ได้ทันทีว่าตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ถูกต้อง แต่หากจำสูตรไม่ได้การแทนค่าสมาชิกก็สามารถตัดตัวเลือกได้



$(A - C) \cap (B - C) = \{2, 3\} \cap \{3, 4\} = \{3\}$

$(A \cap B) - C = \{3, 5\} - \{5, 6, 7, 8\} = \{3\}$

$A - (B \cap C) = \{2, 3, 5, 6\} - \{5, 7\} = \{2, 3, 6\}$

$(A - B) \cap (A - C) = \{2, 6\} \cap \{5, 6\} = \{6\}$

ดังนั้น $A - (B \cap C) \neq (A - B) \cap (A - C)$

เราเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง นักเรียนต้องจำสูตร หรือ ต้องแสดงข้อพิสูจน์เป็น

ตัวอย่างที่ 1.14 ถ้า $A = \{0, 1, \{0\}\}$ และ $B = \{\varnothing, 0\}$ แล้ว $P(B) - P(A)$ เท่ากับข้อใด

1. $\varnothing$
2. $\{\varnothing\}$
3. $\{\varnothing, 0\}$
4. $\{\{\varnothing\}, \{\varnothing, 0\}\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \not\subset B$ เพราะฉะนั้น $P(A) \not\subset P(B)$

ดังนั้น $P(A) - P(B) \neq \varnothing$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $\varnothing \in P(A)$, $\varnothing \in P(B)$ ดังนั้น $\varnothing \notin P(A) - P(B)$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $A = \{0 , 1 , \{0\}\}$

$P(A) = \{\varnothing , \{0\} , \{1\} , \{\{0\}\} , \{0 , 1\} , \{0 , \{0\}\} , \{1 , \{0\}\} , A\}$

$B = \{\varnothing , 0\}$

$P(B) = \{\varnothing , \{\varnothing\} , \{0\} , \{\varnothing , 0\}\}$

$P(B) - P(A) = \{\{\varnothing\} , \{\varnothing , 0\}\}$

ตัวอย่างที่ 1.15 กำหนดให้ $A = \{0 , \varnothing\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $P(A) = \{A , \{0\} , \varnothing\}$
2. $\{\varnothing\} \in P(A)$
3. $A \subset P(A)$
4. $\varnothing \notin P(A)$

ตอบ 2.

แนวคิด เพราะว่าจำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตต้องเป็นเลขคู่หรือ 1 เท่านั้น

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิด เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

เพราะว่า $\varnothing$ เป็นสมาชิกของเพาเวอร์เซตเสมอ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง เพราะว่า $\varnothing \in A$

เพราะฉะนั้น $\{\varnothing\} \in P(A)$ จึงถูกต้อง

หมายเหตุ $P(A) = \{\varnothing , \{0\} , \{\varnothing\} , \{0 , \varnothing\}\}$ ดังนั้น $A \not\subset P(A)$

ตัวอย่างที่ 1.16 กำหนด $A = \{1, \{1\} , 2 , \{1 , 2\} , 3 , \{1 ,2 ,3\}\}$และ $P(A)$ แทนเพาเวอร์เซตของ A จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $\{1 , 2 , 3\} \in P(A)$
2. $\varnothing \in P(A)$ และ $\{\varnothing\} \subset P(A)$
3. $A \subset P(A)$ และ $\{A\} \in P(A)$
4. $\{\{\{1 , 2\} , 3\}\} \subset P(A)$

ตอบ 3.

แนวคิด คำถามแบบนี้ควรอ่านตัวเลือกทุกตัวก่อนแล้วดูว่าตัวเลือกใดคิดง่ายกว่าเช่น $\varnothing \in P(A)$ และถ้า $x \in X$ แล้ว $\{x\} \subset X$ เสมอ ดังนั้นตัวเลือก 2. ถูกต้อง จึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $1, 2, 3 \in A$ ดังนั้น $\{1, 2, 3\} \subset A$ และ $\{1, 2, 3\} \in P(A)$

ดังนั้นตัวเลือกที่ 1. ถูกต้อง เราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $3 \in A$

$\{1, 2\} \in A$

$\{\{1, 2\}, 3\} \subset A$

$\{\{1, 2\}, 3\} \in P(A)$

เพราะฉะนั้น $\{\{\{1, 2\}, 3\}\} \subset P(A)$ จึงถูกต้อง สรุปเราตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

ตัวอย่างที่ 1.17 ถ้า $A \cup B$ มีสมาชิก 5 ตัว และ $A \cap B$ มีสมาชิก 3 ตัวแล้ว $P(A - B)$ จะมีสมาชิกกี่ตัว เมื่อ A และ B มีจำนวนสมาชิกเท่ากัน

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5

ตอบ 1.

แนวคิด จำนวนสมาชิกของ $P(x)$ ต้องเป็นเลขคู่เสมอ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้ ต่อไปสมมติสมาชิกของ A และ B ให้สอดคล้องกับโจทย์เช่น

$A \cap B = \{1, 2, 3\}$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A - B = \{4\}$

$P(A - B) = \{\varnothing, \{4\}\}$ มีสมาชิก 2 ตัว ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 1.18 U เป็นเซตที่มีสมาชิก 50 ตัว เซต A มีสมาชิก 12 ตัว เซต B มีสมาชิก 15 ตัว $A \cup B$ มีสมาชิก 22 ตัว แล้ว $P(A \cap B)$ มีสมาชิกกี่ตัว

1. 2^5
2. 2^3
3. 2^2
4. 2

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติสมาชิกของ A , B ให้สอดคล้องกับโจทย์ก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 20, 21, 22\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

$B = \{22, 21, 20, \ldots, 13, 12, 11, 10, 9, 8\}$

จะได้ว่า $n(A \cup B) = 22$, $n(A) = 12$, $n(B) = 15$

$A \cap B = \{12, 11, 10, 9, 8\}$

ดังนั้น $n(P(A \cap B)) = 2^5$

ทำให้ตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้แน่นอน

วิธีจริง จากสูตร $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

จะได้ $22 = 12 + 15 - n(A \cap B)$ ดังนั้น $n(A \cap B) = 5$

สรุป $n(P(A \cap B)) = 2^5$

ตัวอย่างที่ 1.19 กำหนด $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$C = \{1, 3\}$

$A \cup B = \{2, 3, 4\}$

$B \cup C = \{1, 2, 3\}$

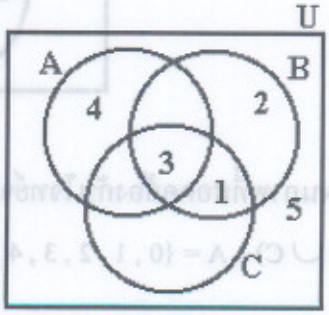
$A \cap B = \{3\}$

เซต $(A - C) \cup (C - A)$ ตรงกับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{1, 4\}$
2. $\{2, 4\}$
3. $\{1, 3\}$
4. $\{1, 5\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การหาคำตอบของคำถามแบบนี้ควรใช้แผนภาพของเวนน์ และใส่สมาชิกตามข้อกำหนดของโจทย์



จะได้ $(A - C) \cup (C - A) = \{4\} \cup \{1\} = \{1, 4\}$

ตัวอย่างที่ 1.20 กำหนด $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$

$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap C = \{0, 1\}$

$B \cap C = \{0, 1, 5\}$

$A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$

เซต $(B \cup C) - A$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $\{4\}$
2. $\{5\}$
3. $\{4, 5\}$
4. $\varnothing$

ตอบ 3.

แนวคิด เพราะว่า $B \cap C = \{0, 1, 5\}$ เพราะฉะนั้น $5 \in B$

เพราะว่า $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$

เพราะฉะนั้น $5 \notin A$

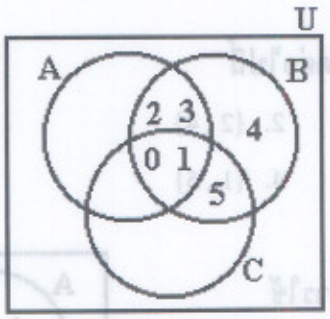
ดังนั้น $5 \in (B \cup C) - A$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

$A \cup C = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ ดังนั้น $4 \notin A$ และ $4 \notin C$

เพราะว่า $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ แต่ $4 \notin A$ ดังนั้น $4 \in B$

สรุป $4 \in (B \cup C) - A$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

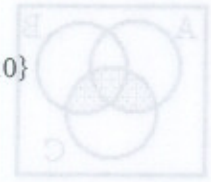
วิธีจริง ใช้แผนภาพของเวนน์และใส่สมาชิกตามข้อกำหนดของโจทย์



จากแผนภาพที่สอดคล้องกับโจทย์จะได้

$(B \cup C) - A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} - \{0, 1, 2, 3\} = \{4, 5\}$

1.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก



1. กำหนดให้ $A = \{-5, -3, -1, 0, 1, 5, 10\}$

   $B = \{-6, -3, 1, 3, 6\}$

   $C = \{-4, -3, -2, 1, 2, 4\}$

   เซต $A \cap (B \cup C)$ เท่ากับเซตใด

   1. $\{x \in R \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
   2. $\{x \in R \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$
   3. $\{x \in N \mid x^2 + 2x - 3 = 0\}$
   4. $\{x \in N \mid x^2 - 2x - 3 = 0\}$

2. กำหนดให้ $U = \{0, 1, 2, \{2\}, \{1, 2\}\}$

   $A = \{0, 1, 2\}$

   $B = \{1, 2, \{2\}\}$

   ตัวเลือกในข้อใดถูกต้อง

   1. $(A \cap B') \cup (A' \cap B) = A \cup B$
   2. $(A' \cap B') - A = B'$
   3. $A - (A \cap B) = A - B$
   4. $P(A) \subset P(B)$

3. A , B , C เป็นเซตใดๆ และ $A \cap B = B \cap C$ แล้วข้อใดถูกต้อง

   1. $A - C = C - B$
   2. $A \cup C = B \cup C$
   3. $A - C = B - C$
   4. $(A \cap B) - A = (B \cap C) - C$

4. กำหนด A , B เป็นเซตใดๆ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

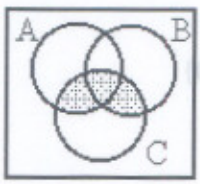
   1. $A - B = B - (B \cup A)$
   2. $A - B = A - (B - A)$
   3. $A - B = A - (A \cup B)$
   4. $A - B = A - (A \cap B)$

5. กำหนดให้ $n(P(A \cap B)) = 4$, $n(P(A \cup B)) = 64$

   ถ้า $n(P(A)) = n(P(B))$ แล้ว $n(A - B)$ เท่ากับเท่าใด

   1. 2
   2. 8
   3. 16
   4. 24

6. จากแผนภาพที่กำหนดให้ส่วนที่แรเงาคือเซตใด

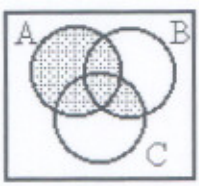


1. $(A' \cup B') \cap C$
2. $(A \cap B) \cap C$
3. $(A \cup B) \cap C$
4. $(A \cup B) \cup C$

7. กำหนดให้ A , B , C เป็นเซต ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

1. $A - (A \cap B') = A \cap B$
2. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
3. $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$
4. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

8. จากแผนภาพที่กำหนดให้ ส่วนที่แรเงาคือเซตในตัวเลือกใด



1. $A \cap (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap (B \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C)$
4. $(A \cup B) \cap (B \cap C)$

9. กำหนดให้ A , B เป็นเซต และ $A - B = B - A$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \cup B \neq A \cap B$
2. $A \cap B' \neq \varnothing$
3. $A \cup B = B$
4. $A - B = A$

10. A , B , C เป็นเซตใดๆ และ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์

กำหนดให้ $A * B = A' \cup B$ ตัวเลือกใดไม่ถูกต้อง

1. $U * U = \varnothing * \varnothing$
2. $B \cup (A * \varnothing) = A' \cup B$
3. $(A * B) * C = (A \cup C) \cap (B * C)$
4. $A' * B \neq B' * A$

เฉลย 1. (1) 2. (3) 3. (4) 4. (4) 5. (1)
6. (3) 7. (2) 8. (3) 9. (3) 10. (4)

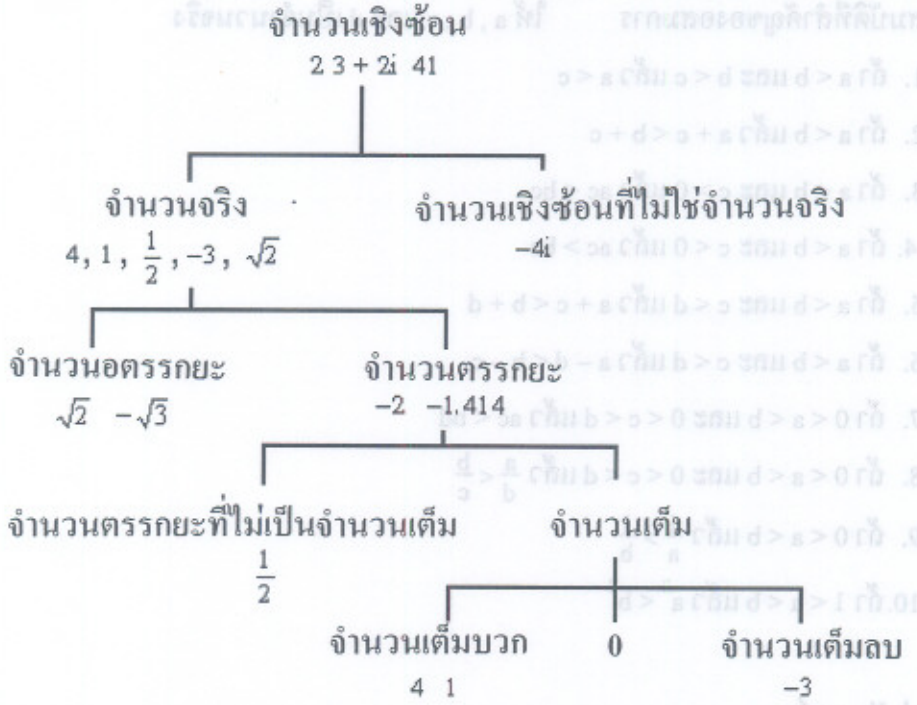
บทที่ 2

ระบบจำนวนจริง

2.1 สรุปเนื้อหา

1. โครงสร้างระบบจำนวน

จำนวนเลขต่างๆ ที่เราศึกษากันประกอบด้วย ระบบจำนวนเชิงซ้อน ระบบจำนวนจริง ระบบจำนวนตรรกยะ ระบบจำนวนอตรรกยะ ระบบจำนวนเต็ม โดยมีโครงสร้างที่สำคัญพอสรุปได้ดังนี้



หมายเหตุ เซตของจำนวนจริงแทนด้วย $R = (-\infty, \infty)$

เซตของจำนวนเต็มแทนด้วย $I = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

เซตของจำนวนนับ หรือจำนวนเต็มบวก แทนด้วย $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

2. สมบัติของระบบจำนวนจริง ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริง

สมบัติ	การบวก	การคูณ
ปิด	$a + b \in R$	$ab \in R$
การสลับที่	$a + b = b + a$	$ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่ม	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์	มี 0 เป็นเอกลักษณ์ โดยที่ $a + 0 = 0 + a = a$	มี 1 เป็นเอกลักษณ์โดยที่ $1 \times a = a \times 1 = a$
การมีอินเวอร์ส	อินเวอร์สของจำนวนจริง a คือ $-a$ โดยที่ $a + (-a) = (-a) + a = 0$	อินเวอร์สของจำนวนจริง $a \neq 0$ คือ $\frac{1}{a}$ โดยที่ $a(\frac{1}{a}) = (\frac{1}{a})a = 1$
การแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$	

3. สมบัติที่สำคัญของอสมการ ให้ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
3. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a + c < b + d$
6. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - d < b - c$
7. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $ac < bd$
8. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$
9. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
10. ถ้า $1 < a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

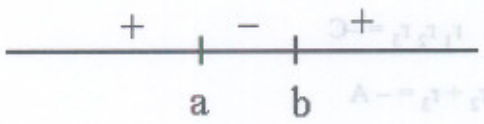
4. **ค่าสัมบูรณ์**

ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง x คือ $|x|$ โดยที่ $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

5. สมบัติของค่าสัมบูรณ์ ให้ a , b เป็นจำนวนจริงใดๆ

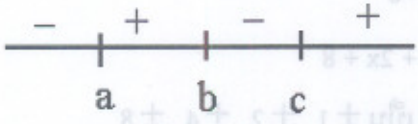
   1. $|a| \geq 0$
   2. $|a| \geq a$
   3. $|a| = |-a|$
   4. $|ab| = |a||b|$
   5. $\sqrt{a^2} = |a|$
   6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ เมื่อ $b \neq 0$
   7. $|a+b| \leq |a| + |b|$
   8. $|a-b| \geq |a| - |b|$

6. เซตคำตอบของอสมการ $(x-a)(x-b) < 0 \; ; a < b$



$$\{x \mid (x-a)(x-b) < 0\} = (a, b)$$

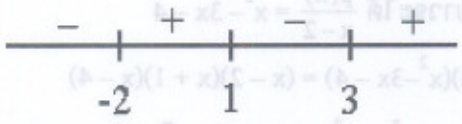
$$(x-a)(x-b)(x-c) < 0 \; ; a < b < c$$



$$\{x \mid (x-a)(x-b)(x-c) < 0\} = (-\infty, a) \cup (b, c)$$

ตัวอย่าง $\{x \mid (x-1)(x-2) < 0\} = (1, 2)$

$$\{x \mid \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} < 0\}$$



$$\{x \mid \frac{(x-1)(x+2)}{x-3} < 0\} = (-\infty, -2) \cup (1, 3)$$

ข้อสังเกต เครื่องหมายของ $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e) \ldots$ เมื่อ $a < b < c < d < e < \ldots$ จะมีเครื่องหมาย + ขึ้นต้นทางขวามือแล้วสลับกันระหว่างบวกกับลบไปเรื่อยๆ ตามจำนวนวงเล็บ

7. รากของสมการพหุนาม $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

ทฤษฎีบท $(x - a)$ หาร $p(x)$ เหลือเศษ $p(a)$

ตัวอย่างเช่น $p(x) = x^2 - 4x + 3$

$x - 2$ หาร $x^2 - 4x + 3$ เหลือเศษ $p(2) = -1$

ทฤษฎีบท $x - a$ หาร $p(x)$ ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $p(a) = 0$

ตัวอย่างเช่น $x - 3$ หาร $x^2 - 4x + 3$ ลงตัว

เมื่อ $p(x) = x^2 - 4x + 3$ จะได้ $p(3) = 9 - 12 + 3 = 0$

8. สมบัติของรากสมการพหุนาม

ทฤษฎีบท r_1, r_2 เป็นรากของสมการ $x^2 + Ax + B = 0$ จะได้ว่า $r_1 r_2 = B$ และ $r_1 + r_2 = -A$

ทฤษฎีบท r_1, r_2, r_3 เป็นรากของสมการ $x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

จะได้ว่า $r_1 r_2 r_3 = -C$

$r_1 + r_2 + r_3 = -A$

$r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 = B$

9. ขั้นตอนการแยกตัวประกอบ $p(x)$

ตัวอย่าง $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$

ให้ $p(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบ 8 เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

ขั้นที่ 2 ลองแทนค่า x เพื่อให้ $p(x) = 0$ เช่น

$p(2) = 8 - 20 + 4 + 8 = 0$ จะได้ $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบ

ขั้นที่ 3 แทนค่า $p(x)$ ต่อไปด้วยบางค่าของ x หรือทำการตั้งหารยาว

เมื่อทำการตั้งหารยาวจะได้ $\frac{p(x)}{x-2} = x^2 - 3x - 4$

สรุป $p(x) = (x - 2)(x^2 - 3x - 4) = (x - 2)(x + 1)(x - 4)$

ดังนั้นรากของสมการ $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0$ คือ $x = -1, 2, 4$

ตัวอย่าง $12x^3 + 16x^2 - 5x - 3 = 0$

ให้ $p(x) = 12x^3 + 16x^2 - 5x - 3$

ขั้นที่ 1 แยกตัวประกอบ 12 เป็น $\pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 4 , \pm 6 , \pm 12$

แยกตัวประกอบ 3 เป็น $\pm 1 , \pm 3$

ขั้นที่ 2 ลองแทนค่า $x = \frac{\text{factor of } 3}{\text{factor of } 12}$ เช่น $x = \frac{1}{3} , -\frac{1}{3} , -\frac{3}{2}$

ในสมการ $p(x)$ ซึ่งต้องอาศัยความโชคดีเหมือนกับจึงจะได้ $p(x) = 0$ เช่น

$p(\frac{1}{2}) = 12(\frac{1}{8}) + 16(\frac{1}{4}) - 5(\frac{1}{2}) - 3 = 0$

เพราะฉะนั้น $2x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

ต่อไปแนะนำการตั้งหารยาวดีกว่า

โดยการหารยาวจะได้ $\frac{12x^3 + 16x^2 - 5x - 3}{2x - 1} = 6x^2 + 11x + 3$

เพราะฉะนั้น $12x^3 - 16x^2 - 5x - 3 = (2x - 1)(6x^2 + 11x + 3)$

$= (2x - 1)(3x + 1)(2x + 3)$

สรุปรากของสมการ $12x^2 - 16x^2 - 5x - 3 = 0$ คือ $x = \frac{1}{2} , -\frac{1}{3} , -\frac{3}{2}$

ข้อสังเกต ผลบวกราก $\frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) + (-\frac{3}{2}) = -\frac{4}{3}$

ผลคูณราก $(\frac{1}{2})(-\frac{1}{3})(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$

10. ขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

u เป็น**ขอบเขตบน**ของเซต A ก็ต่อเมื่อ $x \leq u$ ทุกค่า $x \in A$

ℓ เป็น**ขอบเขตล่าง**ของเซต A ก็ต่อเมื่อ $\ell \leq x$ ทุกค่า $x \in A$

หมายเหตุ 1. ขอบเขตบน u และขอบเขตล่าง ℓ ของ A มีได้หลายตัว

2. ขอบเขตบน u , ขอบเขตล่าง ℓ ของ A อาจเป็นสมาชิกของ A หรือไม่ก็ได้

ตัวอย่าง $A = (1 , 4)$ มี 4 , 5 , 6 และจำนวนจริงทุกค่าที่มากกว่า 4 เป็นขอบเขตบน มี 1 และเลขที่น้อยกว่า 1 เป็นขอบเขตล่าง

u เป็น**ขอบเขตบนค่าน้อยสุด**ของ A ก็ต่อเมื่อ (1) u เป็นขอบเขตบนของ A

และ (2) ถ้า w เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $u \leq w$

ℓ เป็น**ขอบเขตล่างค่ามากสุด**ของ A ก็ต่อเมื่อ (1) ℓ เป็นขอบเขตล่างของ A

และ (2) ถ้า m เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $m \leq \ell$

ตัวอย่าง $A = (-4 , 3]$ มี 3 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และมี -4 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

11. สมบัติของจำนวนเต็ม

1. m หาร n ลงตัว แทนด้วย $m \mid n$
2. m หาร n ลงตัว ก็ต่อเมื่อมีจำนวนเต็ม k ที่ทำให้ $n = mk$
3. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$
4. ถ้า a , b เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$
5. $p \neq 0$, $p \neq 1$, p เป็นจำนวนเฉพาะก็ต่อเมื่อ มี $1, -1, p, -p$ เท่านั้นที่หาร p ลงตัว
   ตัวอย่างจำนวนเฉพาะเช่น 2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , ...
6. ขั้นตอนการหาร m , n เป็นจำนวนเต็ม , $n \neq 0$, จะมี q และ r ชุดเดียวที่ทำให้ $m = nq + r$
   โดย $0 \leq r < |n|$ q เรียกว่า**ผลหาร** , r เรียกว่า**เศษเหลือ**
   ตัวอย่างเช่น $10 = (4)(2) + 2$
   $-12 = (-4)(4) + 3$
7. กำหนด $a^2 + b^2 \neq 0$ d เป็นตัวหารร่วมมาก(ห.ร.ม.) ของ a , b ก็ต่อเมื่อ
   (1) $d \mid a$ และ $d \mid b$
   และ (2) ถ้า $c \mid a$ และ $c \mid b$ แล้ว $c \mid d$
   เราใช้สัญลักษณ์ (a , b) แทน ห.ร.ม. (a , b)
   กำหนด $a^2 + b^2 \neq 0$ c เป็นตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น) ของ a , b ก็ต่อเมื่อ
   (1) $a \mid c$ และ $b \mid c$
   และ (2) ถ้า $a \mid x$ และ $b \mid x$ แล้ว $c \mid x$
   เราใช้สัญลักษณ์ [a , b] แทน ค.ร.น. (a , b)

ตัวอย่าง ห.ร.ม. (10 , 12) = 2 ห.ร.ม. (100 , 120) = 20
ค.ร.น. (12 , 10) = 60 ค.ร.น. (100 , 120) = 600

หมายเหตุ (ค.ร.น. (a , b))(ห.ร.ม. (a , b)) = ab

การหา ห.ร.ม. (a , b) โดยการแยกตัวประกอบ
ตัวอย่างเช่น การหา ห.ร.ม. (100 , 120)
$100 = 2 . 2 . 5 . 5$
$120 = 2 . 2 . 2 . 3 . 5$
เลือกเฉพาะตัวที่ซ้ำมา ห.ร.ม.(100 , 120) = (2) . (2) . (5) = 20

8. **ขั้นตอนวิธียุคลิดในการหา ห.ร.ม. (m , n)**

ถ้า $m = nq + r ; 0 < r < |n|$

$u = rq_1 + r_1 ; 0 < r_1 < r$

$r = r_1q_2 + r_2 ; 0 < r_2 < r_1$

$r_1 = r_2q_3 + r_3 ; 0 < r_3 < r_2$

:

$r_{k-2} = r_{k-1}q_k + r_k ; 0 < r_k < r_{k-1}$

$r_{k-1} = r_kq_{k+1}$

แล้ว $(m , n) = r_k$

ตัวอย่างเช่น $0 = (1)(100) + 20$

$100 = (20)(5)$

เพราะฉะนั้น ห.ร.ม. (120 , 100) = 20

9. ถ้า ห.ร.ม. (m , n) = 1 แล้ว m , n เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

10. ถ้า d = ห.ร.ม. (m , n) แล้วต้องมี x , y ที่ $d = xm + yn$

ตัวอย่างเช่น ห.ร.ม. (120 , 100) = 20 จะได้ว่า $20 = (120)(1) + (-1)(100)$

11. ถ้า d = ห.ร.ม.(m , n) และ m = ad , n = bd แล้ว ห.ร.ม. (a , b) = 1

12. ห.ร.ม.(m , n) ≤ ค.ร.น.(m , n) ทุกค่า m และ n

13. ห.ร.ม.(m , n) ≤ min{m , n} ทุกค่า m และ n

14. max{m , n} ≤ ค.ร.น.(m , n) ทุกค่า m และ n

สนใจการแก้ปัญหา

❶ จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{16} จากอนุกรม $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$

❷ 1000! ลงท้ายด้วย 0 กี่ตัว

ต้องอ่าน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18 และ 19

2.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. นำคำตอบในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่างเช่น เซตคำตอบของอสมการ $-2x - 9 \leq |x + 3|$ คือข้อใด

1. $[-6, -3]$ 2. $[-6, -4]$

3. $[-6, \infty)$ 4. $[-4, \infty)$

การตัดตัวเลือก

แทนค่า $x = 1$ ในโจทย์จะได้ว่า $(-2)(1) - 9 \leq |-1 + 3|$

แสดงว่า $x = 1$ ได้ $\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $x = -6$ ในโจทย์ $(-2)(-6) - 9 = 3 \leq 3 = |-6 + 3|$

แสดงว่า $x = -6$ ได้ $\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

2. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใช้การแทนค่าบางค่าในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างเช่น เซตของเศษที่เป็นไปได้ในการหาร $a^4 + b^4$ ด้วย 8

เมื่อ a , b เป็นจำนวนเต็มคือข้อใด

1. $\{0, 1, 2\}$ 2. $\{0, 1, 2, 3\}$

3. $\{0, 1, 4, 5\}$ 4. $\{0, 1, 3, 7\}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า a , b บางค่าแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก

$a = 1, b = 1 \longrightarrow a^4 + b^4 = 2$

$\longrightarrow a^4 + b^4$ หารด้วย 8 เหลือเศษ 2

$\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง

เพราะว่าทุกจำนวนเต็ม x จะได้ว่า 8 หาร x^4 เหลือเศษ 0 หรือ 1 เท่านั้น

เพราะฉะนั้น 8 หาร $a^4 + b^4$ หรือเศษ 0 , 1 หรือ 2 เท่านั้น

3. เลือกตัวเลขที่เหมาะสมในโจทย์หรือตัวเลือกนำมาแทนค่า

ตัวอย่างเช่น $[1, \infty)$ เป็นเซตคำตอบของอสมการในข้อใด

1. $x^2 - 2x + 2 > 0$ 2. $x^3 + x^2 \geq 0$

3. $(x+1)^2(1-x) \leq 0$ 4. $2 - x \leq ||x-2|+2|$

การตัดตัวเลือก $x^3 + x^2 \geq 0 \rightarrow x = 0$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

$x^2 - 2x + 2 > 0 \rightarrow x = 0$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1.

$2 - x \leq ||x-2|+2| \rightarrow x = 0$ ได้ $\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $(x+1)^2(1-x) \leq 0$

เมื่อ $x \neq -1$, $(x+1)^2 \neq 0$; $1 - x \leq 0$

$1 \leq x$

เพราะฉะนั้น $x \in [1, \infty)$

สรุป $\{x \mid (x+1)^2(1-x) \leq 0\} = [1, \infty)$

4. นำค่าที่โจทย์กำหนดไปแทนค่าในตัวเลือก

ตัวอย่างเช่น กำหนด $|x+4| < 5$ และ $|y-5| < 4$ ข้อความใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $0 \leq |x+y| < 10$ 2. $0 < |x-y| < 18$

3. $0 \leq |x-y^2| < 90$ 4. $\left|\frac{x^2}{y^2}\right| < 1$

การตัดตัวเลือก เลือก $x = -8$ ได้ $|-8+4| = 4 < 5$ จริง แทนค่า $x = -8$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $0 \leq |-8+y| < 10$ 2. $0 < |-8-y| < 18$

3. $0 \leq |-8-y^2| < 90$ 4. $\left|\frac{64}{y^2}\right| < 1$

เมื่อ $y = 2$ จะได้ $|2-5| < 4$ จริง แต่ $\left|\frac{64}{y^2}\right| < 1$ เป็นเท็จเมื่อ $x = -8$, $y = 2$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ก็จะได้คะแนนแล้ว

2.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 2.1 อินเวอร์สการบวกและอินเวอร์สการคูณของ $P-\frac{1}{q}$ ตามลำดับคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1-Pq}{q}\ ;\ \frac{-q}{1-Pq}$
2. $P+\frac{1}{q}\ ;\ \frac{1}{P}-q$
3. $\frac{Pq-1}{q}\ ;\ \frac{q}{Pq-1}$
4. $\frac{1-Pq}{q}\ ;\ \frac{q}{1-Pq}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้อยู่ในรูปแบบโจทย์เป็นสูตรและตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นใช้การแทนค่าดีกว่า เลือกแทนค่า $P=3$, $q=1$ จะได้ $P-\frac{1}{q}=3-\frac{1}{1}=2$

เพราะว่า 2 มีอินเวอร์สการบวกเป็น –2 และอินเวอร์สการคูณเป็น $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น แทนค่า $P=3$ และ $q=1$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{1-Pq}{q}=\frac{1-(3)(1)}{(1)}=-2$

และ $\frac{-q}{1-Pq}=\frac{-(1)}{1-(3)(1)}=\frac{1}{2}$

หมายเหตุ ขณะนี้ยังไม่ถือว่าตัวเลือกเป็นคำตอบ เพราะว่าสูตรอาจจะเป็นจริงเมื่อ $P=3$ และ $q=1$ เท่านั้น

ตัวเลือก 2. $P+\frac{1}{q}=3+\frac{1}{1}=4\neq -2$ คิดแค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้แล้ว

ตัวเลือก 3. $\frac{Pq-1}{q}=\frac{(3)(1)-1}{1}=2\neq -2$ ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

ตัวเลือก 4. $\frac{1-Pq}{q}=\frac{1-(3)(1)}{1}=-2$ และ $\frac{q}{1-Pq}=\frac{1}{1-(3)(1)}=-\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

สรุปเหลือตัวเลือก 1. ตัวเดียวจึงเลือกเป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง อินเวอร์สการบวกของ $P-\frac{1}{q}$ คือ $-(P-\frac{1}{q})=\frac{1}{q}-P=\frac{1-Pq}{q}$

อินเวอร์สการคูณของ $P-\frac{1}{q}$ คือ $(P-\frac{1}{q})^{-1}=(\frac{Pq-1}{q})^{-1}=\frac{q}{Pq-1}=\frac{-q}{1-Pq}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ถูกต้อง

จะเห็นว่าวิธีจริงนั้นยุ่งยากเกินจำเป็น เพราะว่าได้อินเวอร์สการบวก และการคูณแล้วต้องมาทำการจัดรูปให้ตรงกับตัวเลือกอีก

ตัวอย่างที่ 2.2 เซตคำตอบของอสมการ $x^4 + x^3 - 6x^2 < 0$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $\{x \mid -3 < x < 2\}$
2. $\{x \mid -3 < x < 2 \text{ และ } x \neq 0\}$
3. $\{x \mid x < -3 \text{ หรือ } x > 2\}$
4. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2 \text{ และ } x \neq 0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้วิธีเลือกค่า x ที่คิดเลขได้ง่ายๆ และจำแนกตัวเลือกได้ก็จะทำให้ตัดตัวเลือกได้เร็วขึ้น ตัวอย่างเช่นจากโจทย์ $x = 0$ ไม่ได้ แต่ 0 อยู่ในเซตของตัวเลือก 1. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

เลือก $x = 1$ จะได้ $1 + 1 - 6 = -4 < 0$ แสดงว่า 1 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

แต่ $x = 1$ ไม่อยู่ในตัวเลือก 3. ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

ดูจากตัวเลือก 2. และ 4. จะเห็นว่า $x = 2$ จำแนกตัวเลือกได้

เพราะว่า $2^4 + 2^3 - 6(2^2) = 16 + 8 - 24 = 0 \not< 0$ เพราะฉะนั้น 2 ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

$$x^4 + x^3 - 6x^2 < 0$$

$$x^2(x^2 + x - 6) < 0$$

$$x^2(x+3)(x-2) < 0$$

เพราะว่าเราสนในกรณี $x^2(x+3)(x-2) < 0$

เพราะฉะนั้น $x^2 \neq 0$ และ $x \neq 0$

ดังนั้น

$$(x+3)(x-2) < 0$$

$$-3 < x < 2$$

สรุปเซตคำตอบคือ $\{x \mid -3 < x < 2 \text{ และ } x \neq 0\}$

ตัวอย่างที่ 2.3 $-14 < x - 1 < -2$ สามารถเขียนในรูปค่าสัมบูรณ์ได้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $|x + 7| < 6$
2. $|x + 7| > 6$
3. $|x - 7| < 6$
4. $|x - 7| > 6$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้วิธีแทนค่า x บางค่าที่เป็นจริงตามเงื่อนไขของโจทย์เช่น $x = -2$ จะได้ $-14 < -2 - 1 = -3 < -2$ แสดงว่าเงื่อนไขของโจทย์ $x = -2$ ได้ แทนค่า $x = -2$ ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $|-2+7| = 5 < 6$ แสดงว่า $x = -2$ ได้

ตัวเลือก 2. $|-2+7| = 5 \not> 6$ แสดงว่า $x = -2$ ไม่ได้

ตัวเลือก 3. $|-2-7| = 9 \not< 6$ แสดงว่า $x = -2$ ไม่ได้

ตัวเลือก 4. $|-2-7| = 9 > 6$ แสดงว่า $x = -2$ ได้

จากเหตุผลขณะนี้ทำให้เราตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปลองแทนค่าแบบย้อนกลับดูบ้างเช่นจากตัวเลือก 4. พบว่า $x = 20$ ทำให้ $|20-7| = 13 > 6$ แสดงว่า $x = 20$ เป็นสมาชิกของเซตในตัวเลือก 4. แต่ $20 - 1 = 19 \not< -2$ นั่นคือ $x = 20$ ในอสมการของโจทย์ใช้ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

หมายเหตุ คำถามของโจทย์ข้อนี้ความหมายที่แท้จริงคือเซตคำตอบของอสมการ $-14 < x - 1 < -2$ ตรงกับตัวเลือกได้ เพราะว่า

$$-14 < x - 1 < -2$$
$$-13 < x < -1$$
$$x \in (-13, -1)$$

จากตัวเลือก 1.

$$|x + 7| < 6$$
$$-6 < x + 7 < 6$$
$$-13 < x < -1$$
$$x \in (-13, -1)$$

ดังนั้นถ้าทำได้การจำแนกคำถามใช้ดีก็จะได้คำตอบเร็วขึ้น

วิธีจริง เพราะว่าตัวเลือกเป็นสิ่งที่แนะนำการคำนวณดังนั้นเราจึงจัดพจน์ของ $x - 1$ เป็น $x + 7$ หรือ $x - 7$ เท่านั้น

$$-14 < x - 1 < -2$$
$$-14 - 6 < x - 1 - 6 < -2 - 6$$
$$-20 < x - 7 < -8$$
$$-14 < x - 1 < -2$$
$$-14 + 8 < x - 1 + 8 < -2 + 8$$
$$-6 < x + 7 < 6$$
$$|x + 7| < 6$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 2.4 เซตคำตอบของอสมการ $||12-x|-4|<2$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(6, 10)$
2. $(14, 18)$
3. $[5, 8] \cup (15, 18)$
4. $(6, 10) \cup (14, 18)$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สำหรับข้อสอบที่ถามแบบนี้จะใช้วิธีทำโดยการนำค่าในตัวเลือกมาแทนในโจทย์หรือนำค่า x จะสอดคล้องกับโจทย์ไปตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น $x = 7 \in (6, 10)$ ทำให้ $||12-7|-4| = ||5|-4| = 1 < 2$

แสดงว่า $x = 7$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

หมายเหตุ ถ้าเราคิดถึงค่า x ที่จำแนกตัวเลือกได้ด้วยก็จะให้ได้คำตอบเร็วขึ้น

เช่น $x = 9$ จะได้ว่า $||12-9|-4| = ||3|-4| = 1 < 2$

แสดงว่า 9 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ได้พร้อมกัน

ต่อไปต้องเลือกให้ดีๆ เช่น $15 \notin (6, 10)$ แต่ $15 \in (6, 10) \cup (14, 18)$

ดังนั้นลองแทนค่า $x = 15$ ในโจทย์ดีกว่า $||12-15|-4| = ||-3|-4| = 1 < 2$

แสดงว่าเซตคำตอบต้องมี $x = 15$ เป็นสมาชิก แต่ 15 ไม่เป็นสมาชิกของตัวเลือก 1.

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $||12-x|-4|<2$

$$-2 < |12-x|-4 < 2$$

$$2 < |12-x| < 6$$

กรณีที่ 1 $x < 12$ จะได้ว่า $|12-x| = 12-x$

เพราะฉะนั้น

$$2 < |12-x| < 6$$

$$2 < 12-x < 6$$

$$-10 < -x < -6$$

$$6 < x < 10$$

เพราะฉะนั้น $x \in (-\infty, 12) \cap (6, 10) = (6, 10)$

กรณีที่ 2 $x \geq 12$ จะได้ว่า $|12-x| = -(12-x)$

เพราะฉะนั้น

$$2 < |12-x| < 6$$

$$2 < -(12-x) < 6$$

$$2 < -12 + x < 6$$

$$14 < x < 18$$

เพราะฉะนั้น $x \in [12, \infty) \cap (14, 18) = (14, 18)$

สรุปจากทั้ง 2 กรณีจะได้เซตคำตอบของเซตสมการ $||12 - x| - 4| < 2$ คือ $(6, 10) \cup (14, 18)$

ตัวอย่างที่ 2.5 เซตคำตอบของสมการ $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$
2. $(-2, 5)$
3. $[-2, 5]$
4. $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าที่จำแนกตัวเลือกได้เช่น $x = 5$ แทนค่าในสมการของโจทย์จะได้

$|10 + 3(5) - 5^2| = |10 + 15 - 25| = 0$ และ $5^2 - 3(5) - 10 = 25 - 15 - 10 = 0$

แสดงว่า $x = 5$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ แต่ตัวเลือก 2. และ 4. ไม่มี 5 เป็นสมาชิก

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือก $x = 0$ แทนค่า $|10 + 3(0) - (0)^2| = 10$

$$(0)^2 - 3(0) - 10 = -10$$

แสดงว่า $x = 0$ ไม่ได้ แต่ตัวเลือก 3. มี 0 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากเหตุผลของค่าสัมบูรณ์จะได้ว่า $|y| = -y$ ก็ต่อเมื่อ $y \leq 0$

ให้ $y = 10 + 3x - x^2$ จะได้ $-y = x^2 - 3x - 10$

เพราะฉะนั้น $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$

$$|y| = -y$$

$$y \leq 0$$

$$10 + 3x - x^2 \leq 0$$

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

$$(x - 5)(x + 2) \geq 0$$

$$x \leq -2 \text{ หรือ } x \geq 5$$

$$x \in (-\infty, -2] \cup [5, \infty)$$

สรุปเซตคำตอบของอสมการ $|10 + 3x - x^2| = x^2 - 3x - 10$ คือ $(-\infty, -2] \cup [5, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2.6 ถ้า $|x-7|<8$ และ $|y-7|<5$ แล้ว $|x-y|$ ตรงกับข้อใด

1. $|x-y|>3$
2. $|x-y|>13$
3. $|x-y|<13$
4. $|x-y|<3$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขที่ให้คิดเลขได้ง่ายๆ เช่น แทนค่า $x=7$ และ $y=7$ ทำให้

$|x-7|=|7-7|=0<8$ และ $|y-7|=|7-7|=0<5$

เพราะฉะนั้น $|x-y|=|7-7|=0$ ได้

แต่จากตัวเลือก 1. $|x-y|=|7-7|=0$ ไม่มากกว่า 3

และตัวเลือก 2. $|x-y|=|7-7|=0$ ไม่มากกว่า 13

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปใช้เหตุผลทางด้านตรรกศาสตร์พบว่า ถ้า $|x-y|<3$ แล้ว $|x-y|<13$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า แต่ถ้ายังไม่มั่นใจลองเลือก $x=1$, $y=6$ จะได้ว่า

$|1-7|=6<8$ และ $|6-7|=1<5$

แต่ $|x-y|=|1-6|=5$ ไม่น้อยกว่า 3 ดังนั้นเราตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

หมายเหตุ ถ้าเลือก $x=1$, $y=6$ ตั้งแต่แรกก็จะตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $|x-7|<8$ และ $|y-7|<5$

$$-8<x-7<8 \qquad -5<y-7<5$$

$$-1<x<15 \qquad 2<y<12$$

$$-12<-y<-2$$

เพราะฉะนั้น $(-1)+(-12)<x-y<(15)+(-2)$

$$-13<x-y<13$$

สรุป $|x-y|<13$

ตัวอย่างที่ 2.7 เซตคำตอบของอสมการ $|x-1||x-2|\geq|x+2|$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty,0]\cup[4,\infty)$
2. $(0,4)$
3. $[-4,5)$
4. $(0,\infty)\cup(-5,-4)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $x = 0$ ทำให้ $|0-1||0-2| = 2 \geq |0+2|$ ดังนั้น $x = 0$ ได้

แต่เมื่อดูจากตัวเลือก 2. และ 4. จะเห็นว่า

ตัวเลือก 2. $0 \notin (0, 4)$ ตัวเลือก 4. $0 \notin (0, \infty) \cup (-5, -4)$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือก $x = 1$ จะได้ $|0-1||0-2| = 0 \ngeq |0+2|$

ดังนั้น $x = 1$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบ แต่ $1 \in [-4, 5)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

วิธีจริง โดยการแจกแจงกรณีตามค่าของ x

กรณีที่ 1 $-\infty < x \leq -2$

$$|x-1||x-2| \geq |x+2|$$
$$[-(x-1)][-(x-2)] \geq -(x+2)$$
$$(x-1)(x-2) \geq -x-2$$
$$x^2-3x+2 \geq -x-2$$
$$x^2-2x+4 \geq 0$$
$$(x^2-2x+1)+3 \geq 0$$
$$(x-1)^2+3 \geq 0$$
$$x \in (-\infty, \infty)$$

จากกรณีที่ 1 จะได้ $x \in (-\infty, -2]$

ข้อสังเกต ทำได้ถึงขั้นนี้ควรจะตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้แล้ว

กรณีที่ 2 $-2 < x \leq 1$

$$|x-1||x-2| \geq |x+2|$$
$$[-(x-1)][-(x-2)] \geq x+2$$
$$(x-1)(x-2) \geq x+2$$
$$x^2-3x+2 \geq x+2$$
$$x^2-4x \geq 0$$
$$x(x-4) \geq 0$$
$$x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$$

จากกรณีที่ 2 จะได้ $x \in (-2, 1] \cap ((-\infty, 0] \cup [4, \infty)) = (-2, 0]$

กรณีที่ 3 $1 < x \leq 2$

$$|x-1||x-2| \geq |x+2|$$
$$[(x-1)][-(x-2)] \geq (x+2)$$
$$-(x^2-3x+2) \geq x+2$$
$$-x^2+2x-4 \geq 0$$
$$x^2-2x+4 \leq 0$$
$$(x-1)^2+3 \leq 0$$
$$x \in \varnothing$$

จากกรณีที่ 3 จะได้ว่า $x \in (1, 2] \cap \varnothing = \varnothing$

ข้อสังเกต จากการคำนวณขณะนี้แสดงว่า $x \notin (1, 2]$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

กรณีที่ 4 $2 < x < \infty$

$$|x-1||x-2| \geq |x+2|$$
$$(x-1)(x-2) \geq x+2$$
$$x^2-3x+2 \geq x+2$$
$$x^2-4x \geq 0$$
$$x(x-4) \geq 0$$
$$x \in (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$$

จากกรณีที่ 4 จะได้ $x \in (2, \infty) \cap [(-\infty, 0] \cup [4, \infty)] = [4, \infty)$

สรุปจากทั้ง 4 กรณีจะได้ว่าเซตคำตอบของอสมการ $|x-1| . |x-2| \geq |x+2|$ คือ

$(-\infty, -2] \cup (-2, 0] \cup \varnothing \cup [4, \infty) = (-\infty, 0] \cup [4, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2.8 เซตคำตอบของอสมการ $x^3-3x^2-10x+24 \geq 0$ เท่ากับเซตในตัวเลือกใด

1. $[-3, 2] \cup [4, \infty)$
2. $(-3, 2) \cup [4, \infty)$
3. $[-3, 2] \cup (4, \infty)$
4. $[-3, 2) \cup (4, \infty)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้มาแทนค่าในโจทย์ เช่น $x = 2$ จะได้ $2^3 - (2)^2 - 10(2) + 24 = 8 - 12 - 10 + 24 = 0 \geq 0$ แสดงว่าเซตคำตอบต้องมี 2 เป็นสมาชิก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือกแทนค่า $x = 4$ จะได้ $4^3 - 3(4)^2 - 10(4) + 24 = 64 - 48 - 40 + 24 = 0 \geq 0$ แสดงว่า $x = 4$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

วิธีจริง พิจารณาการแยกตัวประกอบของ $x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

ให้ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$

แยกตัวประกอบของ 24 ได้เป็น $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$

เพราะว่า $f(2) = 8 - 12 - 20 + 24 = 0$

เพราะฉะนั้น $x - 2$ หาร $f(x)$ ลงตัว และ $f(x) = (x - 2)(x^2 - x - 12)$

สรุป $f(x) = (x - 2)(x - 4)(x + 3)$

พิจารณาตารางเครื่องหมายของ $f(x)$ ได้ดังนี้

	$-\infty < x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < 4$	$x = 4$	$4 < x < \infty$
$x + 3$	–	0	+	+	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+	+	+
$x - 4$	–	–	–	–	–	0	+
$f(x)$	–	0	+	0	–	0	+

$$f(x) \geq 0$$

$$(x - 2)(x - 4)(x + 3) \geq 0$$

$$x \in [-3, 2] \cup [4, \infty)$$

ตัวอย่างที่ 2.9 ค่า x ในอสมการ $\frac{x^2(x^2 + 4)(x - 5)}{x + 7} \geq 0$ ตรงกับข้อใด

1. $(-\infty, -7) \cup (5, \infty)$
2. $(-\infty, -7) \cup (5, \infty) \cup \{0\}$
3. $(-\infty, -7] \cup [5, \infty)$
4. $(-\infty, -7) \cup [5, \infty) \cup \{0\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สังเกตจากสมการ $\frac{x^2(x^2+4)(x-5)}{x+7} \geq 0$ จะเห็นว่า $x = 0$ ได้

ดังนั้น $x = 0$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

จากตัวประกอบ $x - 5$ จะได้ว่า $x = 5$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสมการ $\frac{x^2(x^2+4)(x-5)}{x+7} \geq 0$

เพราะว่า $x^2 + 4 \neq 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{x^2(x-5)}{x+7} \geq 0$

$x = 0$ อยู่ในเซตคำตอบแน่นอน ถ้า $x \neq 0$ จะได้ $\frac{x-5}{x+7} \geq 0$ ซึ่งจะได้ค่า x เป็น $x < -7$ หรือ $x \geq 5$

สรุปเซตคำตอบคือ $(-\infty, -7) \cup [5, \infty) \cup \{0\}$

ตัวอย่างที่ 2.10 กำหนดให้ $|a - b| < 5$ และ $|a - c| < 4$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $|a^2 + ac - ab + bc| < 20$
2. $\left|\frac{a-b}{a-c}\right| < \frac{5}{4}$
3. $|b - c| < 1$
4. $|2a - b - c| < 10$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ยากตรงที่ไม่รู้ว่าจะแสดงว่าตัวเลือกใดถูกต้อง

ดังนั้นเราทำการตัดตัวเลือกเลยดีกว่า ลองแทนค่า $a = 0, b = 1, c = 2$

จะได้ว่า $|a - b| = |0 - 1| = 1 < 5$

$|a - c| = |0 - 2| = 2 < 4$

แสดงว่า $a = 0, b = 1, c = 2$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ ลองแทนค่าที่ตัวเลือก

1. $|a^2 + ac - ab + bc| = 2 < 20$
2. $\left|\frac{0-1}{0-2}\right| = \frac{1}{2} < \frac{5}{4}$
3. $|1 - 2| = 1$ ไม่น้อยกว่า 1
4. $|0 - 1 - 2| = 3 < 10$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ลองแทนค่า $a = 4, b = 2, c = 3$

จะได้ $|a - b| = |4 - 2| = 2 < 5$ และ $|a - c| = |4 - 1| = 3 < 4$

1. $|a^2 + ac - ab + bc| = |16 + 12 - 8 + 6| = 26 \not< 20$

2. $\left|\frac{a-b}{a-c}\right| = \left|\frac{4-2}{4-1}\right| = 2 \not< \frac{5}{4}$

4. $|2a-b-c| = |2(4)-2-3| = 3 < 10$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

หมายเหตุ การพิสูจน์ว่า ถ้า $|a-b| < 5$ และ $|a-c| < 4$ แล้ว $|2a-b-c| < 10$ ทำได้โดยง่ายดังนี้

$$\begin{aligned} |2a-b-c| &= |a-b+a-c| \\ &= |(a-b)+(a-c)| \\ &\leq |a-b|+|a-c| \\ &< 5+4 \\ &< 10 \end{aligned}$$

สรุป $|2a-b-c| < 10$

ตัวอย่างที่ 2.11 ถ้า $a, b, c, d \in R$ โดยที่ $0 < a < b$ และ $c < d$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $ac < bd$
2. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ เมื่อ $c \neq 0$ และ $d \neq 0$
3. $a^2+c^2 < b^2+d^2$
4. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$ เมื่อ $c > 0$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้แทนค่าแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือกอาจจะเป็นวิธีที่ได้คะแนนง่ายกว่าวิธีจริง ลองเลือก $a = 2, b = 3, c = -4, d = -3$ จะได้ว่า a, b, c และ d สอดคล้องกับโจทย์ ต่อไปลองนำไปแทนค่าในตัวเลือก

1. $ac = -8$ และ $bd = -9$ ดังนั้น $ac \not< bd$
2. $\frac{a}{c} = -\frac{2}{4} = -0.5$ และ $\frac{b}{d} = \frac{3}{-3} = -1$ ดังนั้น $\frac{a}{c} \not< \frac{b}{d}$
3. $a^2+c^2 = 4+16 = 20$ และ $b^2+d^2 = 9+9 = 18$ ดังนั้น $a^2+c^2 \not< b^2+d^2$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากคุณสมบัติของจำนวนจริงจะได้ว่า

ถ้า $c < d$ และ $c > 0$ แล้ว $\frac{1}{c} > \frac{1}{d} > 0$

จาก $0 < \frac{1}{d} < \frac{1}{c}$ และ $0 < a < b$ จะได้ $\frac{a}{d} < \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

ดังนั้นตัวเลือก 4. ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.12 กำหนด $-5 \le x \le 8$ และ $-9 \le y \le 6$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $|xy| \le 72$
2. $|x+y| \le 17$
3. $-11 \le x-y \le 1$
4. $\left|\frac{x}{y}\right| \le \frac{8}{y}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เนื่องจากตัวเลือก 4. อยู่ในรูปแบบการหาร

ดังนั้นเราเลือก $y = 0$ จะได้ $-9 \le y \le 6$ แต่ตัวเลือก 4. $|\frac{x}{0}|$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้นข้อสรุปของตัวเลือก 4. จึงผิด

วิธีจริง $-5 \le x \le 8 \rightarrow -8 \le x \le 8 \rightarrow |x| \le 8$

$-9 \le y \le 6 \rightarrow -9 \le y \le 9 \rightarrow |y| \le 9$

ดังนั้น $|xy| = |x||y| \le (8)(9) = 72$

และ $|x+y| \le |x| + |y| \le 8 + 9 = 17$

เพราะว่า $-5 \le x \le 8$

$-9 \le y \le 6$

$-6 \le -y \le 9$

เพราะฉะนั้น $(-5) + (-6) \le x + (-y) \le 8 + 9$

$-11 \le x - y \le 1$

สรุปตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.13 กำหนดให้ $|x+4| < 5$ และ $|y-5| < 4$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ตัวเลือกใดต่อไปนี้ผิด

1. $0 \le |x+y| < 10$
2. $0 < |x-y| < 18$
3. $0 < |x^2 - y^2| < 90$
4. $0 < |x^2 + y^2| < 162$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = -3$, $y = 3$ จะได้ว่า $|x+4| < 5$ และ $|y-5| < 4$

และ $|x^2 - y^2| = 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. $0 < |x^2 - y^2| < 90$ ผิด

วิธีจริง $|x+4|<5$ และ $|y-5|<4$

$-5<x+4<5$ $\quad -4<y-5<4$

$-9<x<1$ $\quad 1<y<9$

เพราะฉะนั้น $(-9)+1<x+y<1+9$

$-8<x+y<10$

$-10<-8<x+y<10$

$0\leq|x+y|<10$

ดังนั้นตัวเลือก 1 ถูกต้อง

จาก $-9<x<1$ และ $1<y<9$ จะได้ $-9<-y<-1$

ดังนั้น $(-9)+(-9)<x-y<1+(-1)$

$-18<x-y<0$

เพราะฉะนั้น $0<|x-y|<18$ ดังนั้นตัวเลือก 2 ถูกต้อง

การแสดงว่า $0<|x^2+y^2|<162$

เพราะว่า $|x^2+y^2|\leq|x^2|+|y^2|$ และ $0\leq x^2<81$, $1<y^2<81$

เพราะฉะนั้น $|x^2+y^2|<81+81=162$ สรุปตัวเลือก 4. $0<|x^2+y^2|<162$ ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.14 เซตคำตอบของอสมการ $-5\leq\frac{2x^2-x-3}{|x+1|}\leq 9$ คือตัวเลือกใด

1. $[-3,6]$
2. $[-3,-1)\cup(-1,6]$
3. $[-2,-1)\cup(-1,6]$
4. $(-3,-1)\cup(-1,5]$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|x+1|$ เป็นตัวหาร เพราะฉะนั้น $x\neq-1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งไปก่อน

เลือกค่า x ที่ จำแนกตัวเลือกได้ไปแทนค่าในโจทย์ เช่น $x=-3$ จะได้ว่า

$$-5\leq\frac{2(-3)^2-(-3)-3}{|-3+1|}=\frac{18+3-3}{2}=9\leq 9$$

ดังนั้น $x=-3$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่าอสมการมีตัวประกอบ $|x+1|$ เป็นตัวหาร

เพราะฉะนั้นเราจำแนกออกเป็น 2 กรณีคือ $x < -1$, $x > -1$

กรณีที่ 1 $x < -1$ จะได้ $|x+1| = -(x+1)$

ดังนั้น
$$-5 \le \frac{2x^2 - x - 3}{|x+1|} \le 9$$
$$-5 \le \frac{(2x-3)(x+1)}{-(x+1)} \le 9$$
$$-5 \le -(2x-3) \le 9$$
$$-9 \le 2x - 3 \le 5$$
$$-6 \le 2x \le 8$$
$$-3 \le x \le 4$$
$$x \in [-3, 4]$$

จากกรณีที่ 1 จะได้ $x \in (-\infty, -1) \cap [-3, 4] = [-3, -1)$

กรณีที่ 2 $x > -1$ จะได้ $|x+1| = x+1$

ดังนั้น
$$-5 \le \frac{2x^2 - x - 3}{|x+1|} \le 9$$
$$-5 \le \frac{(2x-3)(x+1)}{x+1} \le 9$$
$$-5 \le 2x - 3 \le 9$$
$$-2 \le x \le 12$$
$$-1 \le x \le 6$$
$$x \in [-1, 6]$$

จากกรณีที่ 2 จะได้ $x \in (-1, \infty) \cap [-1, 6] = (-1, 6]$

สรุปจากทั้งสองกรณีจะได้เซตคำตอบของอสมการเป็น $[-3, -1) \cup (-1, 6]$

ตัวอย่างที่ 2.15 กำหนดให้ $A = \left\{ x \in R \middle| \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \ge \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right\}$ A' ตรงกับเซตใด

1. $[-1, 2]$
2. $[-1, 3]$
3. $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$
4. $(-1, 3)$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หาค่า x ในตัวเลือกที่แทนค่าแล้วคิดเลขง่ายๆ เพื่อดูว่า x จากตัวเลือกนั้นอยู่ใน A หรือไม่ ตัวอย่างเช่น $x = -1$

$$2x^2 - 3x - 2 = 2(-1)^2 - 3(-1) - 2 = 2 + 3 - 2 = 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = (-1)^2 - 2(-1) - 3 = 1 + 2 - 3 = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2(-1)^2 - 3(-1) - 2} \geq \sqrt{(-1)^2 - 2(-1) - 3}$

แสดงว่า $-1 \in A$

ดังนั้น $-1 \notin A'$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $A = \left\{ x \in R \middle| \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right\}$

$A' = \left\{ x \in R \middle| \sqrt{2x^2 - 3x - 2} < \sqrt{x^2 - 2x - 3} \right\}$

พิจารณาอสมการ $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

$$2x^2 - 3x - 2 \geq x^2 - 2x + 3$$

$$x^2 - x + 1 \geq 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \geq 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ เป็นจริงทุกค่า x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$ และ $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

การหาเซต A พิจารณาอสมการ $2x^2 - 3x - 2 \geq 0$

$$(2x + 1)(x - 2) \geq 0$$

$$x \in (-\infty , -\frac{1}{2}] \cup [2 , \infty) \quad \ldots(1)$$

จากอสมการ $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$$(x - 3)(x + 1) \geq 0$$

$$x \in (-\infty , -1] \cup [3 , \infty) \quad \ldots(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $A = [(-\infty , -\frac{1}{2}] \cup [2 , \infty)] \cap [(-\infty , -1] \cup [3 , \infty)]$

$$A = (-\infty , -1] \cup [3 , \infty)$$

$$A' = (-1 , 3)$$

ตัวอย่างที่ 2.16 ให้ $A = \{x \in R \mid |x-4|+|x-3| = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต A

1. $(3, 4)$
2. $\{x \in R \mid |x-\frac{7}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$
3. $(-\infty, 4]$
4. $[3, \infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากสมการ $|x-4|+|x-3| = 1$ จะเห็นได้ว่า $x = 4$ หรือ $x = 3$ ได้

ดังนั้น $3 \in A$ และ $4 \in A$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $|0-4|+|0-3| = 7 \neq 1$ ดังนั้น $0 \notin A$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เลือก $x = 10$ แทนค่าจะได้ $|10-4|+|10-3| = 13 \neq 1$ เพราะฉะนั้น $10 \notin A$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

วิธีจริง $|x-4|+|x-3| = 1$ ก็ต่อเมื่อ $(|x-4| = -(x-4)$ และ $|x-3| = x-3)$

เพราะว่า $|x-4| = -(x-4)$ ก็ต่อเมื่อ $(x-4) \leq 0$

ก็ต่อเมื่อ $x \leq 4$

$|x-3| = x-3$ ก็ต่อเมื่อ $(x-3) \geq 0$

ก็ต่อเมื่อ $x \geq 3$

เพราะฉะนั้น $|x-4|+|x-3| = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq 4$ และ $x \geq 3$

ก็ต่อเมื่อ $x \in [3, 4]$

สรุป $A = [3, 4]$

เพราะว่า $|x-\frac{7}{2}| \leq \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2} \leq x-\frac{7}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$3 \leq x \leq 4$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid |x-\frac{7}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$

ตัวอย่างที่ 2.17 ถ้า $a \in R^+$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a^3+1 > a^2+a$
2. $a^3+1 \geq a^2+a$
3. $a^3+1 < a^2+a$
4. $a^3+1 \leq a^2+a$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้วิธีทำที่ดีที่สุดคือการแทนค่าแล้วตัดตัวเลือก เช่น $a = 1$

1. $1^3 + 1 \not> 1^2 + 1$
2. $1^3 + 1 \geq 1^2 + 1$
3. $1^3 + 1 \not< 1^2 + 1$
4. $1^3 + 1 \leq 1^2 + 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้ แทนค่า $a = 2$ ในตัวเลือกที่เหลือ

2. $2^3 + 1 = 9 \geq 6 = 2^2 + 2$
4. $2^3 + 1 = 9 \not\leq 6 = 2^2 + 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การแสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^3 + 1 \geq a^2 + a$

วิธีที่ 1 $a > 0$

$$a + 1 > 0 \text{ และ } (a-1)^2 \geq 0$$
$$(a+1)(a-1)^2 \geq 0$$
$$(a+1)(a^2 - 2a + 1) \geq 0$$
$$a^3 - 2a^2 + a + a^2 - 2a + 1 \geq 0$$
$$a^3 - a^2 - a + 1 \geq 0$$
$$a^3 + 1 \geq a^2 + a$$

หมายเหตุ เบื้องหลังของแนวคิดวิธีที่ 1 ได้มาจากการที่เรารู้ว่า

$$a^3 + 1 \geq a^2 + a$$
$$a^3 - a^2 - a + 1 \geq 0$$
$$(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) - 4a^2 - 4a \geq 0$$
$$(a+1)^3 - 4a(a+1) \geq 0$$
$$(a+1)[(a+1)^2 - 4a] \geq 0$$
$$(a+1)(a^2 + 2a + 1 - 4a) \geq 0$$
$$(a+1)(a^2 - 2a + 1) \geq 0$$
$$(a+1)(a-1)^2 \geq 0$$

แล้วจึงแสดงข้อพิสูจน์ในลักษณะจัดรูปแบบย้อนกลับ

วิธีที่ 2 ใช้แคลคูลัสตามหลักสูตร ม. 6

ให้ $f(x) = x^3 + 1 - x^2 - x \quad , x > 0$

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f''(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0$

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$(3x + 1)(x - 1) = 0$

จาก $x > 0 , 3x + 1 \neq 0$ ดังนั้น $x - 1 = 0$

$x = 1$

เมื่อ $0 < x < 1 , f'(x) < 0$

$1 < x < \infty , f'(x) > 0$

เพราะฉะนั้น $f(1)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ ดังนั้น $f(x) \geq f(1)$ ทุกค่า $x > 0$

$x^3 + 1 - x^2 - x \geq 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

$x^3 + 1 \geq x^2 + x$

สรุปถ้า $a > 0$ แล้ว $a^3 + 1 \geq a^2 + a$

ตัวอย่างที่ 2.18 ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $3x^2 + 5x + 2 < 0$ และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{2x+1}{x-3} \geq 0$ แล้ว $(A \cup B)'$ คือข้อใด

1. $\varnothing$
2. $[-1 , -\frac{2}{3})$
3. $(-\frac{1}{2} , 3]$
4. $(-\infty , -1] \cup [-\frac{2}{3} , -\frac{1}{2}) \cup [3 , \infty)$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ควรจะจัดรูปแบบของคำถามให้ง่ายลงก่อนเพื่อจะได้ตัดตัวเลือกได้ง่าย

$A = \{x \mid 3x^2 + 5x + 2 < 0\}$

$A' = \{x \mid 3x^2 + 5x + 2 \geq 0\}$

$B = \{x \mid \frac{2x+1}{x-3} \geq 0\}$

$$B' = \{x \mid \frac{2x+1}{x-3} < 0\} \cup \{3\}$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$= \{x \mid 3x^2 + 5x + 2 \geq 0 \text{ และ } \frac{2x+1}{x-3} < 0\} \cup \{3\}$$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2.

แทนค่า x บางค่าก็จะรู้ว่าตัวเลือกใดสามารถตัดทิ้งได้อีก เช่น $x = 0$ ทำให้

$$3x^2 + 5x + 2 = 2 \geq 0 \text{ และ } \frac{2x+1}{x-3} = -\frac{1}{3} < 0$$

ดังนั้น $0 \in (A \cup B)'$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง การหาเซต A

$$3x^2 + 5x + 2 < 0$$

$$(3x + 2)(x + 1) < 0$$

$$-1 < x < -\frac{2}{3}$$

$$A = (-1 , -\frac{2}{3})$$

การหาเซต B $\frac{2x+1}{x-3} \geq 0$

$$-\infty < x \leq -\frac{1}{2} \text{ หรือ } x > 3$$

$$B = (-\infty , -\frac{1}{2}] \cup (3 , \infty)$$

การหา $(A \cup B)'$

$$A \cup B = [-1 , -\frac{2}{3}] \cup ((-\infty , -\frac{1}{2}] \cup (3 , \infty)) = (-\infty , -\frac{1}{2}] \cup (3 , \infty)$$

$$(A \cup B)' = (-\frac{1}{2} , 3]$$

ตัวอย่างที่ 2.19 จงหาค่า m ที่ทำให้ $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| \leq m$ เมื่อ $|x - 2| \leq 1$

1. $m = 3$
2. $m = 4$
3. $m = 5$
4. $m = 6$

ตอบ 3. และ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไข $|x - 2| \leq 1$ ทำให้เราได้ว่า $1 \leq x \leq 3$ เราสามารถนำค่า x ในช่วง [1 , 3] ไปใช้ในการตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $x = 3$ จะได้ $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| = \left|\frac{3+2}{3-4}\right| = 5$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า ถ้า $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| \leq 5$ จะได้ $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| \leq 6$ ด้วย

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. $m = 6$ ดีกว่า

วิธีจริง แบบที่ 1 เมื่อ $|x-2| \leq 1$

$$-1 \leq x-2 \leq 1$$

$$1 \leq x \leq 3$$

ดังนั้น $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| = \frac{|x+2|}{|x-4|} = \frac{x+2}{-(x-4)} = -1 - \frac{6}{x-4} = -1 + \frac{6}{4-x}$

เพราะว่า $1 \leq x \leq 3$

เพราะฉะนั้น $-1 + \frac{6}{4-x}$ มีค่ามากที่สุด ก็ต่อเมื่อ $\frac{6}{4-x}$ มีค่ามากที่สุด

ก็ต่อเมื่อ $4-x$ มีค่าน้อยที่สุด

ก็ต่อเมื่อ x มีค่ามากที่สุด (เมื่อ $1 \leq x \leq 3$)

สรุป $x = 3$ ทำให้ $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| = \left|\frac{3+2}{3-4}\right| = 5$ เป็นค่ามากที่สุด

เพราะฉะนั้น $m = 5$ หรือ $m = 6$ ก็ได้

หมายเหตุ ถ้าคำถามถามว่าค่า m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left|\frac{x+2}{x-4}\right| \leq m$ เมื่อ $|x-2| \leq 1$

ต้องตอบว่า $m = 5$

วิธีจริง แบบที่ 2 โดยใช้แคลคูลัส เมื่อ $x \in [1, 3]$

ให้ $f(x) = \left|\frac{x+2}{x-4}\right| = \frac{x+2}{4-x}$

$$f'(x) = \frac{(4-x)(1)-(x+2)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{6}{(4-x)^2}$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in [1, 3]$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และ ทุกค่า $x \in [1, 3]$

$$f(1) \leq f(x) \leq f(3)$$

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

สรุป $A = \{f(x) \mid 1 \leq x \leq 3\} = [1, 5]$

นั่นคือ $1 \leq \left|\frac{x+2}{x-4}\right| \leq 5$ เมื่อ $|x-2| \leq 1$

ตัวอย่างที่ 2.20 เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{\sqrt{x+2}} < \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x > -2\}$
2. $\{x \mid x > 0\}$
3. $\{x \mid x \geq 0\}$
4. $\{x \mid -\frac{1}{2} \leq x < 0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = 0$ ทำได้ $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \not< \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบของอสมการต้องไม่มี 0 เป็นสมาชิก

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 4. ได้คือ $x = -\frac{1}{2}$

จะได้ $\sqrt{\frac{2x+1}{2}} = 0$ และ $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}+2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \not< 0$

ดังนั้น $x = -\frac{1}{2}$ ต้องไม่อยู่ในเซตคำตอบของอสมการ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\frac{1}{\sqrt{x+2}} < \sqrt{\frac{2x+1}{2}}$

เพราะว่า ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < a^2 < b^2$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x+2} < \frac{2x+1}{2}$

เพราะว่า $x + 2 > 0$

เพราะฉะนั้น $2 < (2x + 1)(x + 2)$

$2 < 2x^2 + 5x + 2$

$2x^2 + 5x > 0$

$x(2x + 5) > 0$

$x \in (-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (0, \infty)$ ...(1)

จากเงื่อนไข $x + 2 > 0$ จะได้ $x \in (-2, \infty)$ ...(2)

จากเงื่อนไข $2x + 1 > 0$ จะได้ $x \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ ...(3)

จาก (1), (2), (3) จะได้ว่า $x \in [(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (0, \infty)] \cap (-2, \infty) \cap (-\frac{1}{2}, \infty) = (0, \infty)$

สรุปเซตคำตอบของอสมการคือ $\{x \mid x > 0\}$

2.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{4x^2+3x+1} > \sqrt{3x^2+5x-2}$ คือข้อใด

   1. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$
   2. $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{3}, \infty)$
   3. $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{4}, \infty)$
   4. $(-\infty, -2] \cup [\frac{1}{3}, 1) \cup (1, \infty)$

2. ค่าของ $\sqrt{4x^4-12x^3+9x^2}$ เท่ากับข้อใด

   1. $\pm(2x^2-3x)$
   2. $x\,|2x-3|$
   3. $|2x^2-3x|$
   4. $\pm x\sqrt{4x^4-12x+9}$

3. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{\sqrt{x+2}} < \sqrt{\frac{x-1}{4}}$ คือข้อใด

   1. $(-2, \infty)$
   2. $(2, \infty)$
   3. $[2, \infty)$
   4. $[-\frac{1}{2}, 0]$

4. $a \geq 1$ และ $x \in R$ ผลบวกของรากของสมการ $\sqrt{a-\sqrt{a+x}} = x$ มีค่าเท่าใด

   1. $\sqrt{a}-1$
   2. $\frac{\sqrt{a-1}}{2}$
   3. $\frac{\sqrt{2a-3}-1}{2}$
   4. $\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$

5. ให้ a , b เป็นจำนวนจริง ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $|a-b|^2 \geq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2$
   2. $|a-b| \leq ||a|-|b||$
   3. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก
   4. $(\sqrt{72}+3\sqrt{5})-(3\sqrt{20}+\sqrt{50})-(\sqrt{2}-3\sqrt{5}) = 0$

6. ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a > b$, $a + b = 15$, $ab < 50$ แล้ว ตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. $a - b > 7$
   2. $a - b < 5$
   3. $a - b > 5$
   4. $a - b < 6$

7. กำหนดให้ $|x| \leq 2$ แล้วค่ามากที่สุดของ $|2x^3 - x + 5|$ เท่ากับข้อใด

   1. 15
   2. 17
   3. 19
   4. 21

8. เซตคำตอบของอสมการ $|x-1| \cdot |x-2| \leq |x+2|$ คือข้อใด

1. $[-2, 0)$
2. $[0, 4]$
3. $[4, \infty)$
4. $(-\infty, -2]$

9. ถ้า $|x-1| < 1$ แล้ว $|x^2-1| < m$ ค่า m เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5

10. ห.ร.ม.ของ 810 และ 450 เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

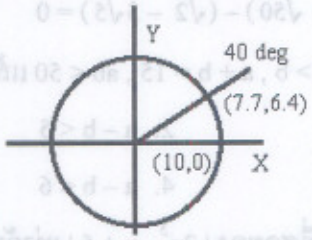
1. 15
2. 35
3. 45
4. 90

เฉลย 1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (4) 5. (4)
6. (3) 7. (3) 8. (2) 9. (2) 10. (4)

$\cap \varnothing \cup x \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin ^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow X Y \not< \not> \leq \not\geq \not\leq \not\geq$

❶❷❸❹①②③④

เชื่อหรือไม่ วงกลมรัศมี 10 cm. ช่วยในการประมาณค่า sin cos tan ได้



จากรูป ค่า sin40 = 0.64 , cos40 = 0.77

หาอ่านแนวคิดเพิ่มเติมได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

บทที่ 3
ตรรกศาสตร์

3.1 สรุปเนื้อหา

1. **ประพจน์** คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ตัวอย่างเช่น

   " 3 เท่ากับ 4 " เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   "$\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ " เป็นประพจน์ มีค่าความจริงเป็นจริง

2. **ประโยคเปิด** คือ ประโยคหรือข้อความที่เป็นคำถาม คำสั่ง คำขอร้อง คำอุทาน หรือข้อความที่มีตัวแปร ตัวอย่างเช่น " $x + 4 = 0$ ", " $x > 0$ "

3. ค่าความจริงของประพจน์ที่มีตัวเชื่อม **ตารางค่าความจริง**

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	T	F
F	F	F	F	T	T

ข้อควรจำ

1. $p \vee q$ เป็นเท็จ เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ , นอกนั้นเป็นจริง
2. $p \wedge q$ เป็นจริง เมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง , นอกนั้นเป็นเท็จ
3. $p \rightarrow q$ เป็นเท็จเมื่อ หน้าเป็นจริง หลังเป็นเท็จ , นอกนั้นเป็นจริง
4. $p \leftrightarrow q$ เป็นเท็จเมื่อ หน้าหลังต่างกัน

หมายเหตุ ตารางค่าความจริงนี้นักเรียนควรจำให้ได้เพราะเป็นประโยชน์มากทำข้อสอบทั้งวิธีจริง และในการตัดตัวเลือก

4. **นิเสธ**ของประพจน์ p คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	F
F	T

5. ประพจน์สมมูล ($\equiv$)

ประพจน์**สมมูล**กันหมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงเหมือนกันทุกค่าความจริงของประพจน์ย่อย ตัวอย่างเช่น 1. $p \wedge q \equiv q \wedge p$

2. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

3. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

4. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

5. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

หมายเหตุ สูตรทั้ง 5 สูตรนี้นิยมออกข้อสอบมากที่สุด

6. **สัจนิรันดร์** หมายถึงประพจน์ที่มีค่าความจริงเสมอทุกค่าความจริงของประพจน์ย่อย

ตัวอย่างเช่น $p \rightarrow (p \vee q)$, $(p \wedge q) \rightarrow q$

ข้อควรจำ 1. ประพจน์ที่สมมูลกันมาเชื่อมด้วย $\leftrightarrow$ จะเป็นสัจนิรันดร์

2. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ และ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ และชอบออกสอบเสมอ

3. ให้ T แทนประพจน์ที่เป็นจริงเสมอ จะได้ว่า $p \wedge T$ มีค่าความจริงเหมือน p นั่นคือ $p \equiv p \wedge T$

4. ให้ F แทนประพจน์ที่เป็นเท็จเสมอ จะได้ว่า $p \vee F$ มีค่าความจริงเหมือนกับ p นั่นคือ $p \equiv p \vee F$

สัจนิรันดร์ที่พบบ่อยในข้อสอบนักเรียนสามารถอ้างได้เลย

1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p)$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
3. $\sim (\sim p) \leftrightarrow p$
4. $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
5. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
6. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$
7. $(\sim p) \vee p$
8. $\sim \forall x\,[P(x)] \leftrightarrow \exists x\,[\sim P(x)]$
9. $\forall x\,[P(x)] \rightarrow \exists x\,[P(x)]$
10. $\forall x\,[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow (\forall x\,[P(x)] \wedge \forall x\,[Q(x)])$
11. $\exists x\,[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow \exists x\,[P(x)] \vee \exists x\,[Q(x)]$
12. $(\forall x\,[P(x)] \vee \forall x\,[Q(x)] \rightarrow \forall x\,[P(x) \vee Q(x)]$

7. การตรวจสอบว่าประพจน์เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีที่ 1 ตีตารางค่าความจริง

วิธีที่ 2 ใช้การสมมติว่าเป็นเท็จแล้วพยายามหาข้อขัดแย้ง

ตัวอย่างเช่น 1. $p \vee q \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

ตอบ ไม่เป็น เพราะว่า $q = F$, $p = T$ จะได้ว่า $p \vee q \rightarrow q = F$

2. $p \wedge q \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

สมมติ $p \wedge q \rightarrow p$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \wedge q$ เป็นจริง และ p เป็นเท็จ

เพราะว่า $p \wedge q$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นจริง

ดังนั้นเราได้ข้อขัดแย้งแล้ว

สรุป $p \wedge q \rightarrow p$ ต้องเป็นจริงเสมอ

8. **ตัวบ่งปริมาณ**

$\forall$ แทนคำว่า "ทุกทุกตัว" , "สำหรับแต่ละตัว" , "ทุกค่าของ"

$\exists$ แทนคำว่า "บางตัว" , "มีอย่างน้อยหนึ่งตัว" , "สำหรับบางตัว"

ตัวอย่างเช่น "ทุกจำนวนจริง x จะได้ว่า $x^2 \geq 0$" $\equiv \forall x \in R\,[x^2 \geq 0]$

" ต้องมีจำนวนจริง x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ $x^2 = -1$" $\equiv \exists x \in R\,[x^2 = -1]$

8. ค่าความจริงของ $\forall x \in U\,[P(x)]$

$\forall x \in U\,[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ P(x) เป็นจริงทุกค่า x

$\forall x \in U\,[P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มี x บางค่าที่ทำให้ P(x) เป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น $\forall x \in R\,[x^2 \geq 0]$ เป็นจริง

$\forall x \in R\,[x > 0]$ เป็นเท็จ เพราะว่า $0 > 0$ ไม่จริง

$\forall x \in R\,[x^2 + 1 > 0]$ เป็นจริง

9. ค่าความจริงของ $\exists x \in U\,[P(x)]$

$\exists x \in U\,[P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวที่ทำให้ P(x) จริง

$\exists x \in U\,[P(x)]$ เป็นเท็จก็ต่อเมื่อ ทุกค่า x , P(x) เป็นเท็จ

ตัวอย่างเช่น $\exists x \in R\,[x^2 + 1 = 0]$ เป็นเท็จ

$\exists x \in R\ [x^2 - 3x - 4 = 0]$ เป็นจริง

$\exists x \in R\ [x^2 + 4 = 0]$ เป็นเท็จ

10. นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณ

$\sim [\forall x \in U\ [P(x)] = \exists x \in U\ [\sim P(x)]$

$\sim [\exists x \in U\ [P(x)] = \forall x \in U\ [\sim P(x)]$

ข้อสังเกต จำง่าย ๆ $\sim(\forall P) = \exists \sim P$, $\sim (\exists P) = \forall \sim P$

11. ความสัมพันธ์ระหว่าง $\exists x\ [P(x)]$ และ $\forall x\ [P(x)]$

1. $\forall x\ [P(x)]$ เป็นจริง $\rightarrow$ $\exists x\ [P(x)]$ เป็นจริง
2. $\exists x\ [P(x)]$ เป็นเท็จ $\rightarrow$ $\forall x\ [P(x)]$ เป็นเท็จ

12. ประพจน์ที่มีวลีบอกปริมาณสองตัวและความหมาย

1. $\forall x\ \forall y\ [P(x, y)] \equiv \forall x\ [\forall y\ [P(x, y)]]$
2. $\forall x\ \exists y\ [P(x, y)] \equiv \forall x\ [\forall y\ [P(x, y)]]$
3. $\exists x\ \forall y\ [P(x, y)] \equiv \exists x\ [\forall y\ [P(x, y)]]$
4. $\exists x\ \exists y\ [P(x, y)] \equiv \exists x\ [\exists y\ [P(x, y)]]$

ตัวอย่างเช่น

"ทุกจำนวนจริง x และทุกจำนวนจริง y , $x^2 + y^2 \geq 0$" แทนด้วย $\forall x \in R\ \forall y \in R\ [x^2 + y^2 \geq 0]$

"ทุกจำนวนจริง x ต้องมีจำนวนจริง y ที่ทำให้ $x + y = 0$" แทนด้วย $\forall x \in R\ \exists y \in R\ [x+y = 0]$

"ทุกจำนวนจริง x ต้องมีจำนวนจริง y ที่ทำให้ $xy = 0$" แทนด้วย $\forall x \in R\ \exists y \in R\ [xy = 0]$

13. นิเสธของประพจน์ที่มีวลีบ่งปริมาณ 2 ตัว

1. $\sim (\forall x\ \forall y\ P) \equiv \exists x\ \exists y \sim P$
2. $\sim (\forall x\ \exists y\ P) \equiv \exists x\ \forall y \sim P$
3. $\sim (\exists x\ \forall y\ P) \equiv \forall x\ \exists y \sim P$
4. $\sim (\exists x\ \exists y\ P) \equiv \forall x\ \forall y \sim P$

14. การอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ เป็นประพจน์เหตุ , Q เป็นประพจน์ของผลลัพธ์ ถ้า $P_1, P_2, \ldots, P_n$ แล้ว Q **สมเหตุสมผล** ก็ต่อเมื่อ $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างเช่น เหตุ 1. $p \rightarrow q$

2. p

ผล q

เป็นการอ้างที่สมเหตุสมผล เพราะว่า $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

เหตุ 1. $p \rightarrow r$

2. $q \rightarrow s$

3. $p \vee q$

ผล $r \vee s$

เป็นการอ้างที่สมเหตุสมผลเพราะว่า $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็นสัจนิรันดร์

การอ้างที่สมเหตุสมผลที่ข้อสอบชอบถาม

1. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
2. $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
3. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. $((p \vee q) \wedge \sim p) \rightarrow q$
5. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (r \vee s)$

15. การตรวจสอบคำอ้างว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

แบบที่ 1 ตีตารางค่าความจริงของ $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$

แบบที่ 2 สมมุติว่า $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow Q$ เป็นเท็จแล้วดูว่ามีข้อขัดแย้งหรือไม่

ตัวอย่างเช่น $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (r \vee s)$ สมเหตุสมผลหรือไม่

สมมติ $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น

$p \rightarrow r$ เป็นจริง , $q \rightarrow s$ เป็นจริง , $p \vee q$ เป็นจริง และ $r \vee s$ เป็นเท็จ

ดังนั้น r เป็นเท็จ และ s เป็นเท็จ ผลที่ได้ตามมาคือ p เป็นเท็จ และ q เป็นเท็จ

ดังนั้น $p \vee q$ เป็นเท็จ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

สรุป $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s) \wedge (p \vee q)) \rightarrow (r \vee s)$ เป็นจริงเสมอนั้นคือการอ้างสมเหตุสมผล

3.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. แทนค่าความจริงในโจทย์และตัวเลือก

ตัวอย่าง ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

1. $(p \wedge q) \vee \sim r$
2. $(p \wedge q) \rightarrow r$
3. $\sim (p \vee q) \vee r$
4. $\sim (p \vee q) \rightarrow r$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $p = T, q = F, r = F$ จะได้

ค่าความจริงของโจทย์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (T \rightarrow F) \wedge (F \rightarrow F) = F$

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือก

1. $(p \wedge q) \vee \sim r = (T \wedge F) \vee (\sim F) = T$
2. $(p \wedge q) \rightarrow r = (T \wedge F) \rightarrow F = T$
3. $\sim (p \vee q) \vee r = \sim (T \vee F) \vee F = F$
4. $\sim (p \vee q) \rightarrow r = \sim (T \vee F) \rightarrow F = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2., และ 4. ทิ้งได้

2. แทนค่า T, F ไปเรื่อยๆ แล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง ประพจน์ใดเป็นสัจนิรันดร์

1. $p \wedge \sim p$
2. $p \wedge p \leftrightarrow \sim p$
3. $(p \rightarrow p) \rightarrow \sim p$
4. $(p \wedge \sim p) \rightarrow p$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $p = T$ ในทุกตัวเลือกเพื่อดูค่าความจริง

1. $p \wedge \sim p = T \wedge (\sim T) = T \wedge F = F$
2. $(p \wedge p) \leftrightarrow \sim p = (T \wedge T) \leftrightarrow (\sim T) = F$
3. $(p \rightarrow p) \rightarrow \sim p = (T \rightarrow T) \rightarrow (\sim T) = F$
4. $(p \wedge \sim p) \rightarrow p = (T \wedge \sim T) \rightarrow T = T$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

3. ยกตัวอย่างที่ทำให้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

ตัวอย่าง กำหนด R เป็นเซตของจำนวนจริง

$U = \{x \in R \mid |2^{x+2} - 10| > 6\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\exists x \in U [3^x = (\frac{1}{3})^x]$
2. $\forall x \in U [3^x > (\frac{1}{3})^x]$

3. $\exists x \in U[3^x < (\frac{1}{3})^x]$ 4. $\exists x \in U[3^x + (\frac{1}{3})^x = 2]$

การตัดตัวเลือก เลือกค่าที่คิดเลขได้ง่ายๆ เช่น $|2^{-1+2} - 10| = 8 > 6$

ดังนั้น $x = -1 \in U$ แต่ $3^{-1} > (\frac{1}{3})^{-1}$ เป็นเท็จ

ดังนั้น $\forall x \in U[3^x > (\frac{1}{3})^x]$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้ง

เพราะว่า $|2^{0+2} - 10| = 6 > 6$ เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น $0 \notin U$

เพราะว่า $3^x = (\frac{1}{3})^x$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ เท่านั้น ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้ง

หมายเหตุ ขณะที่เราได้ว่า $-1 \in U$ จะได้ว่า $\exists x \in U[3^x < (\frac{1}{3})^x]$ เป็นจริงทันที

4. แทนค่าตัวแปรด้วยตัวเลขแล้วดูค่าความจริง

ตัวอย่าง นิเสธของข้อความ " ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ " คือข้อใด

1. $a \neq b$ และ $a \geq b$ และ $a \leq b$ 2. $a \neq b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$
3. $a = b$ และ $a > b$ และ $a < b$ 4. $a = b$ หรือ $a < b$ หรือ $a > b$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a = 1, b = 2$ จะได้ " ถ้า $1 \neq 2$ แล้ว $1 < 2$ " เป็นจริง

ดังนั้นนิเสธของโจทย์ต้องได้เป็นเท็จ เราจึงดูค่าความจริงของตัวเลือกแต่ละตัว

1. $1 \neq 2$ และ $1 \geq 2$ และ $1 \leq 2$ เป็นเท็จ
2. $1 \neq 2$ หรือ $1 < 2$ หรือ $1 > 2$ เป็นจริง
3. $1 = 2$ และ $1 > 2$ และ $1 < 2$ เป็นเท็จ
4. $1 = 2$ หรือ $1 < 2$ หรือ $1 > 2$ เป็นจริง

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง ให้ P แทนข้อความ " $a \neq b$"

Q แทนข้อความ " $a < b$" จะได้ $\sim Q =$ "$a \geq b$"

R แทนข้อความ " $a > b$" จะได้ $\sim R =$ "$a \leq b$"

$\sim$(ถ้า $a \neq b$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$) $\equiv \sim(P \rightarrow (Q \vee R)) \equiv \sim(\sim P \vee (Q \vee R))$

$\equiv P \wedge \sim(Q \vee R) \equiv P \wedge (\sim Q \wedge \sim R)$

$\equiv P \wedge (\sim Q) \wedge (\sim R)$

$\equiv a = b$ และ $a \geq b$ และ $a \leq b$

3.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 3.1 ประพจน์ $\sim (p \vee q)$ มีค่าความจริงตรงกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \vee \sim q$
2. $\sim p \wedge \sim q$
3. $\sim p \wedge q$
4. $p \wedge \sim q$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ถ้านักเรียนจำสูตรไม่ได้ให้ใช้การแทนค่าความจริงช่วยในการตัดตัวเลือก ดังนี้

ให้ $p = F$ และ $q = T$ จะได้ประพจน์ของโจทย์มีค่าความจริงเป็น $\sim (p \vee q) = \sim (F \vee T) = F$

และค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

ตัวเลือก 1. $\sim p \vee \sim q = \sim F \vee \sim T = T$

ตัวเลือก 2. $\sim p \wedge \sim q = \sim F \wedge \sim T = F$

ตัวเลือก 3. $\sim p \wedge q = \sim F \wedge T = T$

ตัวเลือก 4. $p \wedge \sim q = F \wedge \sim T = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า $p = T$ และ $q = F$ จะได้ประพจน์ของโจทย์มีค่าความจริงเป็น $\sim (p \vee q) = \sim (T \vee F) = F$

และค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกที่เหลือเป็นดังนี้

ตัวเลือก 2. $\sim p \wedge \sim q = \sim T \wedge \sim F = F$

ตัวเลือก 4. $p \wedge \sim q = T \wedge \sim F = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

วิธีจริง จากสูตร $\sim (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ ตรงกับตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้ $(p \rightarrow r) \wedge (\sim (q \vee r))$ เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ค่าความจริงของประพจน์ p , q และ r ตามลำดับคือตัวเลือกใด

1. T , T , T
2. T , T , F
3. F , F , F
4. T , F , T

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้เราใช้วิธีนำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $p = T , q = T , r = T$

$(p \rightarrow r) \wedge (\sim (q \vee r)) = (T \rightarrow T) \wedge (\sim (T \vee T)) = T \wedge (\sim T) = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. $p = T , q = T , r = F$

$(p \rightarrow r) \wedge (\sim (q \vee r)) = (T \rightarrow F) \wedge (\sim (T \vee F)) = F \wedge (\sim T) = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $p = F , q = F , r = F$

$(p \rightarrow r) \wedge (\sim (q \vee r)) = (F \rightarrow F) \wedge (\sim (F \vee F)) = T \wedge (\sim F) = T$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3 เป็นคำตอบใดเลย

วิธีจริง $(p \rightarrow r) \wedge (\sim (q \vee r))$ เป็นจริงจะได้

$p \rightarrow r$ เป็นจริงและ $\sim (q \vee r)$ เป็นจริง ดังนั้น $q \vee r$ เป็นเท็จ

$q \vee r$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ q เป็นเท็จ และ r เป็นเท็จ ...(*)

เพราะว่า $p \rightarrow r$ เป็นเท็จและ r เป็นเท็จ เพราะฉะนั้น p เป็นเท็จ

สรุป $p = F , q = F$ และ $r = F$ ตรงกับตัวเลือก 3.

หมายเหตุ จากเหตุผล (*) เราตัดตัวเลือก 1 , 2 , และ 4 ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 3.3 ประพจน์ $(p \wedge (r \wedge \sim r)) \vee (r \wedge (q \vee \sim q))$ มีค่าความจริงตรงกับประพจน์ในข้อใด

1. r
2. p
3. q
4. $p \vee q$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่าความจริงบางค่าของ p , q , r ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

เช่น $p = T , q = T$ และ $r = F$ จะได้

$(p \wedge (r \wedge \sim r)) \vee (r \wedge (q \vee \sim q)) = (T \wedge (F \wedge \sim F)) \vee (F \wedge (T \vee \sim T))$

$= (T \wedge F) \vee (F \wedge T) \quad = F \vee F \quad = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่าตัวเลือก 4. $p \vee q = T \vee T = T$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง เพราะว่า $r \wedge \sim r$ เป็นเท็จเสมอ เพราะฉะนั้นค่าความจริงของประพจน์ $p \wedge (r \wedge \sim r)$ เป็นเท็จเสมอ ดังนั้นค่าความจริงของ $(p \wedge (r \wedge \sim r) \vee (r \wedge (q \vee \sim q))$ จึงขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์ $r \wedge (q \vee \sim q)$

เพราะว่า $q \vee \sim q$ เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้นค่าความจริง $r \wedge (q \vee \sim q)$ จึงขึ้นอยู่กับค่าความจริงของ r เท่านั้น

สรุป $(p \wedge (r \wedge \sim r) \vee (r \wedge (q \vee \sim q))$ สมมูลกับ r

เพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากขึ้นขอเขียนในลักษณะของประพจน์สมมูลดังนี้

$(p \wedge (r \wedge \sim r) \equiv p \wedge F \equiv F$

$r \wedge (q \vee \sim q) \equiv r \wedge T \equiv r$

ดังนั้น $(p \wedge (r \wedge \sim r)) \vee (r \wedge (q \vee \sim q)) \equiv F \vee r \equiv r$

ตัวอย่างที่ 3.4 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sim (p \wedge q)$ สมมูลกับ $\sim p \wedge \sim q$
2. $\sim (p \vee q)$ สมมูลกับ $\sim p \vee \sim q$
3. $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$
4. $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim (p \vee q)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่าความจริงบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้เช่น $p = T$ และ $q = F$

ตัวเลือก 1. $\sim (p \wedge q) = \sim (T \wedge F) = T$

$\sim p \wedge \sim q = \sim T \wedge \sim F = F$

เพราะฉะนั้น $\sim (p \wedge q)$ และ $\sim p \wedge \sim q$ ไม่สมมูลกัน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

ตัวเลือก 2. $\sim (p \vee q) = \sim (T \vee F) = F$

$\sim p \vee \sim q = \sim T \vee \sim F = T$

เพราะฉะนั้น $\sim (p \vee q)$ และ $\sim p \vee \sim q$ ไม่สมมูลกัน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

ตัวเลือก 3. $p \vee q = T \vee F = T$

$q \vee p = F \vee T = T$

ตัวเลือก 4. $p \rightarrow q = T \rightarrow F = F$

$\sim(p \vee q) = \sim (T \vee F) = F$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. และ 4. ต้องเก็บไว้ก่อน ต่อไปแทนค่า $p = F$, $q = T$

ตัวเลือก 3. $p \vee q = F \vee T = T$

$q \vee p = T \vee F = T$

ตัวเลือก 4. $p \rightarrow q = F \rightarrow T = T$

$\sim (p \vee q) = \sim (F \vee T) = F$

เพราะฉะนั้น $p \rightarrow q$ ไม่สมมูลกับ $\sim (p \vee q)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง คำถามนี้วิธีดีที่สุดและได้คำตอบเร็วที่สุดคือจำสูตรได้ ซึ่งจะได้ว่า $p \vee q$ สมมูลกับ $q \vee p$

ตัวอย่างที่ 3.5 ประพจน์ใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$
3. $((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \vee (p \vee \sim q)$
4. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ถ้าจำสูตรสัจนิรันดร์ได้ก็จะได้คำตอบเร็วที่สุดแต่ถ้าจำไม่ได้การแทนค่าความจริงบางค่าของ p , q ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $p = T$, $q = F$ ในทุกตัวเลือกเพื่อดูค่าความจริง

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) = (T \rightarrow F) \leftrightarrow (T \wedge \sim F) = F \leftrightarrow T = F$
2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow q) = (T \leftrightarrow F) \leftrightarrow (\sim T \leftrightarrow F) = F \leftrightarrow T = F$
3. $((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \vee (p \vee \sim q) = ((\sim T \rightarrow F) \wedge F) \vee (T \vee \sim T) = (T \wedge F) \vee T = T$
4. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) = (\sim T \wedge \sim F) \leftrightarrow (\sim T \vee \sim F) = F \leftrightarrow T = F$

ขณะนี้เรามีเหตุผลเพียงพอว่าตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ไม่เป็นสัจนิรันดร์

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \vee (p \vee \sim q) = ((p \vee q) \wedge q) \vee (p \vee \sim q)$

$= ((p \wedge q) \vee q) \vee (p \vee \sim q)$

$= (p \wedge q) \vee q \vee p \vee \sim q$

$= (p \wedge q) \vee p \vee (q \vee \sim q)$

เพราะว่า $q \vee \sim q$ เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้น $(p \wedge q) \vee p \vee (q \vee \sim q)$ เป็นจริงเสมอ

สรุป $((\sim p \rightarrow q) \wedge q) \vee (p \vee \sim q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 3.6 ข้อความ

" จำนวนจริง x ทุกตัวจะมีจำนวนจริง y บางตัวซึ่งทำให้ 2 เท่าของ x มากกว่า 3 เท่าของ y อยู่ 15 " คือตัวเลือกใด

1. $\forall x \exists y [2x + 15 \geq 3y]$
2. $\forall x \exists y [2x - 15 = 3y]$
3. $\exists x \forall y [2x \geq 3y - 15]$
4. $\forall x \exists y [2x - 3y > 15]$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าจำนวนจริง x ทุกตัว คือ $\forall x$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง เพราะว่า " 2 เท่าของ x มากกว่า 3 เท่าของ y อยู่ 15 " ไม่มีความหมายของคำว่าเท่ากับ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

วิธีจริง จำนวนจริง x ทุกตัว คือ $\forall x$

มีจำนวนจริง y บางตัว คือ $\exists y$

2 เท่าของ x มากกว่า 3 เท่าของ y อยู่ 15 คือ $2x - 3y > 15$

ดังนั้นข้อความ

" จำนวนจริง x ทุกตัวจะมีจำนวนจริง y บางตัวซึ่งทำให้ 2 เท่าของ x มากกว่า 3 เท่าของ y อยู่ 15 "

คือ $\forall x \exists y [2x - 3y > 15]$

ตัวอย่างที่ 3.7 $\forall x [x^2 + 1 \leq 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือเซตในตัวเลือกใด

1. เซตของจำนวนเต็มบวก
2. เซตของจำนวนจริง
3. เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ –2 ถึง 2
4. เซตของจำนวนเต็ม

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ให้การยกตัวอย่างของเลขที่ทำให้ $x^2 + 1 \leq 5$ เป็นเท็จ

เลือก $x = 100$; $100^2 + 1 \leq 5$ ดังนั้น $\forall x\,[x^2 + 1 \leq 5]$ เป็นเท็จ เมื่อ $x = 100$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $x^2 + 1 \leq 5$

$$x^2 \leq 4$$

$$-2 \leq x \leq 2$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $-2 \leq x \leq 2$ แล้ว $x^2 + 1 \leq 5$

ดังนั้นเอกภพสัมพัทธ์ $U = [-2 , 2]$ ทำให้ $\forall x\,[x^2 + 1 \leq 5]$ เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 3.8 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง

ข้อใดเป็นนิเสธของประพจน์ $\exists x\,\exists y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$

1. $\forall x\,\forall y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$
2. $\forall x\,\exists y\,[xy \leq -\sqrt{2} \wedge xy \geq \sqrt{2}\,]$
3. $\exists x\,\forall y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$
4. $\forall x\,\forall y\,[xy \leq -\sqrt{2} \vee xy \geq \sqrt{2}\,]$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\sim(\exists x\,\exists y\,[P(x, y)]) = \forall x\,\forall y\,[\sim P(x, y)]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่าค่าความจริงของ $\exists x\,\exists y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่างเช่น $x = 0$, $y = 0$

แต่ $[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริงเมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$

ดังนั้นตัวเลือก 1. $\forall x\,\forall y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$ ไม่เป็นนิเสธของ $\exists x\,\exists y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

วิธีจริง $\sim(\exists x\,\exists y\,[-\sqrt{2} < xy < \sqrt{2}\,]) = \forall x\,\forall y\,[\sim(-\sqrt{2} < xy \wedge xy < \sqrt{2}\,)]$

$$= \forall x\,\forall y\,[\sim((-\sqrt{2} < xy) \wedge (xy < \sqrt{2}\,))]$$

$$= \forall x\,\forall y\,[-\sqrt{2} \geq xy \vee xy \geq \sqrt{2}\,]$$

$$= \forall x\,\forall y\,[xy \leq -\sqrt{2} \vee xy \geq \sqrt{2}\,]$$

ตัวอย่างที่ 3.9 ถ้าค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ เป็นเท็จ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(p \wedge q) \wedge r$
2. $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$
3. $\sim (p \wedge q) \vee r$
4. $(p \wedge \sim q) \vee \sim r$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติตัวเลือก 1. $(p \wedge q) \wedge r$ เป็นจริง ดังนั้น $p = T, q = T, r = T$

แต่ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)) = (T \rightarrow T) \rightarrow (T \rightarrow (T \wedge T) = T \neq F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้งได้

สมมติตัวเลือก 2. สมมติ $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r$ เป็นจริง ดังนั้น $p = T, \sim q = T, \sim r = T$

เพราะฉะนั้น $p = T, q = F, r = F$

แต่ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r)) = (T \rightarrow F) \rightarrow (T \rightarrow (F \wedge F)) = F \rightarrow F = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $X \rightarrow Y$ เป็นเท็จก็ต่อเมื่อ X เป็นจริง Y เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้นเมื่อ $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ เป็นเท็จ เราจะได้ว่า $p \rightarrow q$ เป็นจริง

$p \rightarrow (q \wedge r)$ เป็นเท็จ ผลที่ได้ตามมาอีกคือ p เป็นจริง $q \wedge r$ เป็นเท็จ

นั่นคือ q เป็นจริง และ r เป็นเท็จ

สรุป $p = T, q = T$ และ $r = F$

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $(p \wedge q) \wedge r = (T \wedge T) \wedge F = F$

2. $(p \wedge \sim q) \wedge \sim r = (T \wedge \sim T) \wedge \sim F = F$

3. $\sim (p \wedge q) \vee r = \sim (T \wedge T) \vee F = F$

4. $(p \wedge \sim q) \vee \sim r = (T \wedge \sim T) \vee \sim F = T$

หมายเหตุ การหาค่าความจริงของประพจน์นักเรียนอาจฝึกสังเกต ดังนี้

เพราะว่า $r = F$

ดังนั้น $(p \wedge q) \wedge r = F$ แน่นอนโดยไม่สนใจ p และ q

เพราะว่า $\sim r = T$

ดังนั้น $(p \wedge \sim q) \vee \sim r = T$ แน่นอน

ตัวอย่างที่ 3.10 ประพจน์ในข้อใดเป็นนิเสธซึ่งกันและกัน

1. $\sim(p \vee q)$ กับ $\sim p \wedge \sim q$
2. $\sim p \vee q$ กับ $p \rightarrow q$
3. $p \leftrightarrow q$ กับ $\sim p \leftrightarrow \sim q$
4. $\sim p \leftrightarrow q$ กับ $p \leftrightarrow q$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า p , q บางค่าแล้วนำค่าความจริงของแต่ละตัวมาดูเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก เช่น แทนค่า $p = T , q = F$ จะได้ค่าความจริงในแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. $\sim(p \vee q) = \sim(T \vee F) = F$ $\quad \sim p \wedge \sim q = \sim T \wedge \sim F = F$
2. $\sim p \vee q = \sim T \vee F = F$ $\quad p \rightarrow q = T \rightarrow F = F$
3. $p \leftrightarrow q = T \leftrightarrow F = F$ $\quad \sim p \leftrightarrow \sim q = \sim T \leftrightarrow \sim F = F$

ขณะนี้เราพบว่ามีบางกรณีของ p , q ที่ทำให้ประพจน์แต่ละคู่ในตัวเลือก 1. , 2. และ 3. มีค่าความจริงเหมือนกัน เพราะฉะนั้นประพจน์แต่ละคู่ในตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ไม่เป็นนิเสธกันแน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง ถ้านักเรียนจำสูตรประพจน์สมมูลกันได้ว่า $\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$

$p \rightarrow q = \sim p \vee q$

และ $p \leftrightarrow q = \sim p \leftrightarrow \sim q$

ก็จะตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 3.11 ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $\sim p \vee \sim q , \sim(p \vee q)$
2. $\sim(p \wedge q) , \sim p \wedge \sim q$
3. $\sim(p \vee q) , \sim p \wedge \sim q$
4. $p \vee q , \sim p \vee q$

ตอบ 3.

แนวคิด วิธีจริง คำถามแบบนี้นักเรียนที่จำสูตรได้จะตอบได้เร็วที่จุดคือ ตัวเลือก 3.

การตัดตัวเลือก สำหรับคนที่จำไม่ได้จะใช้การแทนค่าความจริงบางค่าแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือกก็ได้ เช่นให้ $p = T , q = F$ จะได้

$\sim p \vee \sim q = \sim T \vee \sim F = F \vee T = T$

$\sim(p \vee q) = \sim(T \vee F) = \sim T = F$

ดังนั้น $\sim p \vee \sim q$ ไม่สมมูลกับ $\sim(p \vee q)$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

$\sim (p \wedge q) = \sim (T \wedge F) = \sim F = T$

$\sim p \wedge \sim q = \sim T \wedge \sim F = F \wedge T = F$

ดังนั้น $\sim (p \wedge q)$ ไม่สมมูลกับ $\sim p \wedge \sim q$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้

ในทำนองเดียวกัน $p \vee q = T \vee F = T$

$\sim p \vee q = \sim T \vee F = F \vee F = F$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 3.12 นิเสธของประพจน์ " ถ้า 4 ไม่เป็นเลขคู่ แล้ว 4 ต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะ " ตรงกับข้อใด

1. 4 เป็นจำนวนตรรกยะ แต่ 4 ไม่เป็นเลขคู่
2. 4 เป็นเลขคู่ หรือ 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ
3. 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ 4 ไม่เป็นเลขคู่
4. ถ้า 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว 4 เป็นเลขคู่

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ให้ใช้เหตุผลค่าความจริงช่วยในการตัดตัวเลือกดีกว่า

" 4 ไม่เป็นเลขคู่ " มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ดังนั้น " ถ้า 4 ไม่เป็นเลขคู่ แล้ว 4 ต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะ " มีค่าความจริงเป็นจริง

นิเสธของ " ถ้า 4 ไม่เป็นเลขคู่แล้ว 4 ต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะ " มีค่าความจริงเป็นเท็จ

หมายเหตุ ค่าว่า **แต่** เท่ากับคำว่า **และ**

ตัวเลือก 1. " 4 ไม่เป็นเลขคู่ " เป็นเท็จ

" 4 เป็นจำนวนตรรกยะแต่ 4 ไม่เป็นเลขคู่ " เป็นเท็จ

ตัวเลือก 2. " 4 เป็นเลขคู่ หรือ 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ " เป็นจริง

ตัวเลือก 3. " 4 เป็นจำนวนตรรกยะ " เป็นจริง

" 4 ไม่เป็นเลขคู่ " เป็นเท็จ

" 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ 4 ไม่เป็นเลขคู่ " เป็นเท็จ

ตัวเลือก 4. " 4 เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

ดังนั้น " ถ้า 4 ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว 4 เป็นเลขคู่ " เป็นจริง

จะเห็นได้ว่าดูจากค่าความจริงของแต่ละตัวเลือก ทำให้เราต้องตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง p = "4 ไม่เป็นเลขคู่"

q = "4 ต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะ"

" ถ้า 4 ไม่เป็นเลขคู่ แล้ว 4 ต้องไม่เป็นจำนวนตรรกยะ "

$= p \rightarrow q$

$= \sim p \vee q$

$= \sim(\sim p \vee q) = p \wedge \sim q$

= "4 ไม่เป็นเลขคู่ และ 4 เป็นจำนวนตรรกยะ"

= "4 เป็นจำนวนตรรกยะ และ 4 ไม่เป็นเลขคู่"

= "4 เป็นจำนวนตรรกยะ แต่ 4 ไม่เป็นเลขคู่" ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 3.13 ประพจน์ใดที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกกรณี

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$
2. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$
3. $(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
4. $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้คนที่จำสูตรการสมมูลกันของประพจน์หาคำตอบได้โดยง่ายเช่น $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim q \rightarrow \sim p$

ดังนั้น $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ เป็นจริงทุกกรณี เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

อย่างไรก็ตามวิธีการแทนค่าบางค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกก็ยังสามารถใช้กับคำถามทำนองนี้ได้เสมอ ตัวอย่างเช่น แทนค่า p = T , q = F , r = T หากตัวเลือกได้เป็นจริง ก็ตัดตัวเลือกนั้นทิ้งไปก่อน

ตัวเลือก 1. $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p) = (T \rightarrow F) \rightarrow (\sim F \rightarrow \sim T)$

$= F \rightarrow (T \rightarrow F)$

$= F \rightarrow F$

$= T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ตัวเลือก 2. $((p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$

$= ((T \rightarrow T) \wedge (F \rightarrow T)) \leftrightarrow ((T \vee F \rightarrow T))$

$= (T \wedge T) \leftrightarrow T$

$= T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ตัวเลือก 3. $(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q) = (\sim T \rightarrow \sim F) \leftrightarrow (\sim T \wedge F)$

$= (F \rightarrow T) \leftrightarrow F$

$= T \leftrightarrow F$

$= F$

ตัวเลือก 3. ยังต้องเก็บไว้ก่อน

ตัวเลือก 4. $(p \wedge (p \vee q)) \leftrightarrow p = (T \wedge (T \vee F)) \leftrightarrow T$

$= (T \wedge T) \leftrightarrow T$

$= T \leftrightarrow T$

$= T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $(\sim p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q) = (q \rightarrow p) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

$= (\sim q \vee p) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

$= [\sim (\sim p \wedge q)] \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

$= F$ ทุกกรณีของค่าความจริง p และ q

ตัวอย่างที่ 3.14 ประพจน์ในตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$
3. $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
4. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้แทนค่าความจริงบางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่นแทนค่า

$p = T, q = F, r = F$

ตัวเลือก 1. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q) = (T \rightarrow F) \leftrightarrow (T \wedge \sim F)$

$= F \leftrightarrow T$

$= F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ตัวเลือก 2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q) = (T \leftrightarrow F) \leftrightarrow (\sim T \rightarrow F)$

$= F \rightarrow (F \rightarrow F)$

$= F \rightarrow T$

$= T$ ยังตัดตัวเลือก 2. ทิ้งไม่ได้

ตัวเลือก 3. $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r)) = ((T \wedge F) \rightarrow F) \leftrightarrow (T \rightarrow (F \rightarrow F))$

$= (F \rightarrow F) \leftrightarrow (T \rightarrow T)$

$= T \leftrightarrow T$

$= T$ ยังตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไม่ได้

ตัวเลือก 4. $(\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) = (\sim T \wedge \sim F) \leftrightarrow (\sim T \vee \sim F)$

$= (F \wedge T) \leftrightarrow (F \vee T)$

$= F \leftrightarrow T$

$= F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือกค่าความจริงที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 3. ให้ได้ เช่น $p = F, q = F, r = F$

ตัวเลือก 2. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q) = (F \leftrightarrow F) \leftrightarrow (\sim F \rightarrow F)$

$= T \rightarrow (T \rightarrow F)$

$= T \rightarrow F$

$= F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้เลย

วิธีจริง ตีตารางค่าความจริง

p	q	r	$p \wedge q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	T	T
F	F	F	T	T

ดังนั้น $p \wedge q \rightarrow r$ สมมูลกับ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

สรุป $((p \wedge q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 3.15 กำหนดให้ p , q , r , s เป็นประพจน์ และ $(\sim(p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วค่าความจริงของ p , q , r , s ตามลำดับคือข้อใด

1. F , F , T , F
2. F , T , F , F
3. F , T , T , F
4. T , F , F , T

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์จะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1 $(\sim (p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s)) = (\sim (F \vee F) \rightarrow (T \rightarrow F))$

$= (\sim F \rightarrow F)$

$= T \rightarrow F$

$= F$

เป็นความโชคดีของเราที่ได้คำตอบเป็นตัวเลือก 1. เลย

การใช้เหตุผลอาจเป็นเรื่องยากสำหรับนักเรียนแต่ต้องพยายามทำความเข้าใจมิฉะนั้นอาจทำคำถามเพิ่มเติมของข้อนี้ไม่ได้ จาก $X \rightarrow Y$ เป็นเท็จเมื่อ X เป็นจริง และ Y เป็นเท็จ

ดังนั้น $\sim (p \vee q)$ เป็นจริง และ $r \rightarrow s$ เป็นเท็จ

$p \vee q$ เป็นเท็จ r เป็นจริง และ s เป็นเท็จ

หมายเหตุ ทำมาได้แก่นี้ตัดตัวเลือก 2. , 4. ได้อีกแล้ว

ทำต่อไปจะได้ p = F , q = F , r = T และ s = F

คำแนะนำสำหรับอาจารย์ผู้สอน ที่ต้องการรู้ว่านักเรียนทำได้จริงหรือไม่ถามแบบนี้ดีกว่า

ถ้า $(\sim (p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$ เป็นเท็จแล้วตัวเลือกได้มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $p \rightarrow q$
2. $r \vee s \rightarrow p$
3. $\sim q \rightarrow p$
4. $\sim r \wedge s$

ตัวอย่างที่ 3.16 กำหนด p , q , r เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

$(p \rightarrow (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim r \vee (q \vee \sim q))$ มีค่าความจริงตรงกับข้อใด

1. $\sim r$
2. $\sim p$
3. q
4. $p \vee \sim r$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้แทนค่าความจริงบางค่าจะตัดตัวเลือกได้ เช่น

$p = T , q = F , r = F$ ค่าความจริงของประพจน์ที่โจทย์กำหนดคือ

$$(p \rightarrow (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim r \vee (q \vee \sim q)) = (T \rightarrow (F \wedge \sim F)) \wedge (\sim F \vee (F \vee \sim F))$$
$$= (T \rightarrow F) \wedge (T \vee T)$$
$$= F \wedge T$$
$$= F$$

ค่าความจริงแต่ละตัวเลือก คือ

1. T
2. F
3. F
4. $T \vee \sim F = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปเลือกค่าความจริงที่จำแนกตัวเลือก 2. และ 3. ให้ได้เช่น

$r = T , p = T , q = T$ ค่าความจริงของประพจน์ที่โจทย์กำหนดคือ

$$(p \rightarrow (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim r \vee (q \vee \sim q)) = (T \rightarrow (T \wedge \sim T)) \wedge (\sim T \vee (T \vee \sim T))$$
$$= (T \rightarrow F) \wedge (F \vee T)$$
$$= F \wedge T$$
$$= F$$

ค่าความจริงของตัวเลือกที่เหลือคือ ตัวเลือก 2. $\sim p = \sim T = F$ ตัวเลือก 3. $q = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 ตีตารางค่าความจริง

จะได้ว่า $(p \rightarrow (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim r \vee (q \vee \sim q))$ สมมูลกับ $\sim p$

แบบที่ 2 ใช้เหตุผลเกี่ยวกับประพจน์สมมูลกัน เช่น $r \wedge \sim r$ เป็นเท็จเสมอ

ดังนั้น $p \rightarrow (r \wedge \sim r) = p \rightarrow F$ มีค่าความจริงสมมูลกับ $\sim p$

เพราะว่า $q \vee \sim q$ เป็นจริงเสมอ เพราะฉะนั้น $\sim r \vee (q \vee \sim q)$ เป็นจริงเสมอ

เพราะว่า $X \wedge T$ มีค่าความจริงสมมูลกับ X

สรุป $p \rightarrow (r \wedge \sim r)) \wedge (\sim r \vee (q \vee \sim q))$ สมมูลกับ $(\sim p) \wedge T$

สมมูลกับ $\sim p$

ตัวอย่างที่ 3.17 ข้อใดเป็นนิเสธของประพจน์ " 4 น้อยกว่า 5 "

1. 4 มากกว่า 5
2. 5 มากกว่า 4
3. 4 ไม่เท่ากับ 5
4. 4 มากกว่าหรือเท่ากับ 5

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้เป็นตัวอย่างที่ดีสำหรับการใช้ค่าความจริงช่วยในการตัดตัวเลือก ค่าความจริงของ " 4 น้อยกว่า 5 " เป็นจริง นิเสธของ " 4 น้อยกว่า 5 " ต้องเป็นเท็จ แต่ค่าความจริงของตัวเลือก 2. , 3. เป็นจริง ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $\sim$ " 4 น้อยกว่า 5 " = " 4 ไม่น้อยกว่า 5 "
= " 4 มากกว่าหรือเท่ากับ 5 "

ตัวอย่างที่ 3.18 เมื่อประพจน์ $(p \wedge q) \longrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จแล้ว ค่าความจริงของ p , q , r ตามลำดับ ตรงกับข้อใด

1. T , T , T
2. F , T , T
3. F , T , F
4. T , T , F

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าใน โจทย์ก็ได้คำตอบแล้ว

ตัวเลือก 1. $(p \wedge q) \longrightarrow r = (T \wedge T) \longrightarrow T = T$

ตัวเลือก 2. $(p \wedge q) \longrightarrow r = (F \wedge T) \longrightarrow T = T$

ตัวเลือก 3. $(p \wedge q) \longrightarrow r = (F \wedge T) \longrightarrow F = F \longrightarrow F = T$

ตัวเลือก 4. $(p \wedge q) \longrightarrow r = (T \wedge T) \longrightarrow F = T \longrightarrow F = F$

สรุปตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

หมายเหตุ ขอให้ฝึกสังเกตว่า ถ้า Y เป็นจริงแล้ว $X \longrightarrow Y$ เป็นจริงเสมอ

ดังนั้นตัวเลือก 1. และ 2. ทำให้ r = T

ดังนั้น $(p \wedge q) \longrightarrow T$ เป็นจริงแน่นอนจะทำให้ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ได้เร็วขึ้น

วิธีจริง โจทย์กำหนดประพจน์ $(p \wedge q) \longrightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $p \wedge q = T$ $r = F$

ดังนั้น $p = T$, $q = T$, $r = F$

ตัวอย่างที่ 3.19 ประพจน์ " ถ้านายประสงค์ดื่มนม แล้วนายประสงค์อ้วน " มีนิเสธตรงกับข้อใด

1. ถ้านายประสงค์ไม่ดื่มนม แล้วนายประสงค์ไม่อ้วน
2. นายประสงค์ไม่ดื่มนม แต่นายประสงค์อ้วน
3. นายประสงค์ดื่มนมแต่นายประสงค์ไม่อ้วน
4. นายประสงค์ดื่มนมและนายประสงค์อ้วน

ตอบ 3.

แนวคิด p = ประสงค์ดื่มนม

q = ประสงค์อ้วน

" ถ้านายประสงค์ดื่มนม แล้วนายประสงค์อ้วน " = $p \rightarrow q$

เพราะฉะนั้นโจทย์ถามว่า $p \rightarrow q$ มีนิเสธตรงกับตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. $\sim p \rightarrow \sim q$
2. $\sim p \wedge q$
3. $p \wedge \sim q$
4. $p \wedge q$

การตัดตัวเลือก ทำได้โดยการแทนค่าความจริงบางค่าของ p และ q

เช่น $p = T, q = T$ จะได้ $p \rightarrow q = T \rightarrow T = T$ ดังนั้นนิเสธของ $p \rightarrow q$ ต้องเป็น F

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\sim p \rightarrow \sim q = \sim T \rightarrow \sim T = F \rightarrow F = T$
2. $\sim p \wedge q = \sim T \wedge T = F$
3. $p \wedge \sim q = T \wedge \sim T = F$
4. $p \wedge q = T \wedge T = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปแทนค่า $p = T, q = F$ $p \rightarrow q = T \rightarrow F = F$

ค่าความจริงของแต่ละตัวเลือกที่เหลือคือ

ตัวเลือก 2. $\sim p \wedge q = \sim T \wedge F = F$

ตัวเลือก 3. $p \wedge \sim q = T \wedge \sim F = T \wedge T = T$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$\sim (p \rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q)$

$$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim q$$
$$\equiv p \wedge \sim q$$

ตรงกับตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 3.20 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อความที่เป็นเท็จตรงกับข้อใด

1. $\exists x [x^2 + 1 = 0] \vee \forall x [x + x = x^2]$
2. $\forall x [x^3 \geq 0] \rightarrow \forall x [x \geq 0]$
3. $\exists x [x + x = x^2] \rightarrow \forall x [x + 1 \neq x]$
4. $\exists x [x^3 + 5x - 1 < 4] \wedge \forall x [x^2 + 1 > 0 \rightarrow x \geq -2]$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำแนะนำของการทำโจทย์แบบนี้คืออ่านตัวเลือกได้ครบทุกตัวก่อนแล้วเลือกข้อที่ง่ายสำหรับเรามาคิดก่อนเช่น $\forall x [x + 1 \neq x]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists x [x + x = x^2] \rightarrow \forall x [x + 1 \neq x]$ เป็นจริงแน่นอนโดยไม่ต้องสนใจค่าความจริงของตัวหน้า เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $\forall x [x^3 \geq 0]$ เป็นเท็จ

เพราะฉะนั้น $\forall x [x^3 \geq 0] \rightarrow \forall x [x \geq 0]$ เป็นจริงแน่นอนโดยไม่สนใจว่าตัวหลังจะเป็นอะไร เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง $\exists x [x^2 + 1 = 0]$ เป็นเท็จ

$\forall x [x + x = x^2]$ เป็นเท็จ

สรุป $\exists x [x^2 + 1 = 0] \vee \forall x [x + x = x^2]$ เป็นเท็จ

สนใจการแก้ปัญหา

กำหนด $f(x) = x^{10} + x^5 - 130x^3 + 335x^2 - 295x + 88$

k มากที่สุดทำให้ $(x - 1)^k$ **หาร** $f(x)$ **ลงตัวเท่ากับเท่าใด**

ต้องอ่าน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18 และ 19

3.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ประพจน์ $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ สมมูลกับประพจน์ในตัวเลือกใดต่อไปนี้
   1. $p \rightarrow (r \rightarrow q)$
   2. $q \rightarrow (p \rightarrow r)$
   3. $(q \wedge r) \rightarrow p$
   4. $r \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์
   1. $p \vee \sim p$
   2. $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
   3. $p \rightarrow (p \vee q)$
   4. $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
3. ประพจน์ใดต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์
   1. $(p \vee (\sim q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
   2. $((\sim p) \rightarrow (\sim q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
   3. $((\sim p) \vee (\sim q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
   4. $((p \wedge (\sim q)) \rightarrow (\sim p)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
4. นิเสธของประพจน์ $\exists x\,[P(x) \vee \sim Q(x)]$ คือข้อใด
   1. $\sim\forall x\,[\sim(P(x) \rightarrow Q(x)]$
   2. $\forall x\,[\,P(x) \wedge \sim Q(x)]$
   3. $\sim\forall x\,[(P(x) \rightarrow Q(x)]$
   4. $\forall x\,[\sim(\sim P(x) \rightarrow \sim Q(x))]$
5. ประพจน์ใดไม่สมมูลกับ $p \vee \sim p$
   1. $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$
   2. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
   3. $((p \rightarrow q) \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$
   4. $((p \rightarrow q) \wedge \sim p) \rightarrow \sim q$
6. นิเสธของ " สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy \neq 0$ แล้ว $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ " คือข้อใด
   1. สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy \neq 0$ แล้ว ($x = 0$ หรือ $y = 0$)
   2. สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy = 0$ แล้ว ($x = 0$ และ $y = 0$)
   3. มีจำนวนจริง x และ y โดยที่ $xy \neq 0$ และ ($x = 0$ หรือ $y = 0$)
   4. มีจำนวนจริง x และ y โดยที่ $xy \neq 0$ และ $x = 0$ และ $y = 0$
7. ประพจน์ใดเป็นนิเสธของประพจน์ $p \leftrightarrow q$
   1. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
   2. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$
   3. $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
   4. $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

8. กำหนด $U = \{x \in R \mid |x-1| \leq 2\}$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริง

   1. $\forall x [x^2 - 3 < 6]$
   2. $\forall x [1 < x + 2 < 5]$
   3. $\exists x [|x+2| < 2 - x]$
   4. $\exists x [\sqrt{x} > 2]$

9. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. นิเสธของ $(p \vee \sim p)$ คือ $(p \wedge \sim p)$
   2. นิเสธของ $p \rightarrow q$ คือ $\sim q \rightarrow \sim p$
   3. $\sim (p \wedge \sim q) \wedge (r \wedge \sim r)$ สมมูลกับ $p \rightarrow q$
   4. $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ เป็นสัจนิรันดร์

10. จงพิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

   ก. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์

   ข. $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์

   ตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. ก. ถูก และ ข. ผิด
   2. ก. ผิด และ ข. ถูก
   3. ก. ถูก และ ข. ถูก
   4. ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลย 1. (2) 2. (4) 3. (4) 4. (4) 5. (4)
6. (3) 7. (1) 8. (3) 9. (2) 10. (4)

$\cap \varnothing \cup \times \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin ^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow X Y \not< \not> \leq \not\geq \not\leq \not\geq$

❶❷❸❹①②③④

บทที่ 4
ความสัมพันธ์

4.1 สรุปเนื้อหา

1. **ผลคูณคาร์ทีเซียน** ของ A และ B คือ $A \times B$

   $A \times B = \{(a , b) \mid a \in A , b \in B\}$

   ตัวอย่างเช่น $A = \{1 , 2\}$ $B = \{3 , 4 , 5\}$

   $A \times B = \{(1 , 3) , (1 , 4) , (1 , 5) , (2 , 3) , (2 , 4) , (2 , 5)\}$

   สมาชิกของ $A \times B$ คือ (a , b) เรียกว่า **คู่อันดับ**

2. จำนวนสมาชิกของ $A \times B$ เมื่อ A , B เป็นเซตจำกัดจะได้ว่า $n(A \times B) = n(A)n(B)$

3. r เป็น**ความสัมพันธ์**จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $r \subset A \times B$

   ตัวอย่างเช่น $A = \{1 , 2\}$

   $B = \{3 , 4\}$

   $A \times B = \{(1 , 3) , (1 , 4) , (2 , 3) , (2 , 4)\}$

   ตัวอย่างของความสัมพันธ์จาก A ไป B เช่น

   $r_1 = \varnothing$

   $r_2 = A \times B$

   $r_3 = \{(1 , 3) , (2 , 4)\}$

   $r_4 = \{(1 , 4) , (2 , 4)\}$

4. จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B เมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัดจะได้จำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B มีทั้งหมด $= n(P(A \times B))$

   $= 2^{n(A \times B)}$ $= 2^{n(A)n(B)}$

5. โดเมนของความสัมพันธ์ r แทนค่าด้วย D_r

$D_r = \{a \mid (a, b) \in r\}$

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r แทนด้วย R_r

$R_r = \{b \mid (a, b) \in r\}$

6. ตัวอย่างการหาโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์

ตัวอย่าง $r = \{(1, 4), (3, 2), (6, 3)\}$

$D_r = \{1, 3, 6\}$

$R_r = \{4, 2, 3\}$

ตัวอย่าง $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{16 - x^2}\}$

D_r = เซตของ x ที่ทำให้ $\sqrt{16-x^2}$ หาค่าได้

$\sqrt{16-x^2}$ หาค่าได้ $\leftrightarrow$ $16 - x^2 \geq 0$

$\leftrightarrow$ $x^2 - 16 \leq 0$

$\leftrightarrow$ $(x - 4)(x + 4) \leq 0$

$\leftrightarrow$ $x \in [-4, 4]$

สรุป $D_r = [-4, 4]$

เพราะว่า $0 \leq 16 - x^2 \leq 16$ เพราะฉะนั้น $0 \leq \sqrt{16-x^2} \leq 4$

สรุป $R_r = [0, 4]$

ตัวอย่าง $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2 + 1\}$

$D_r = \{x \mid (x, y) \in r\}$

$= \{x \mid y = x^2 + 1$ หาค่าได้$\}$

$= (-\infty, \infty)$

เพราะว่า $x^2 \geq 0$

$x^2 + 1 \geq 1$

เพราะฉะนั้น $R_r = [1, \infty]$

ตัวอย่าง $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = x\}$

$D_r = \{x \mid (x , y) \in r\}$

$= \{x \mid y^2 = x \text{ มีความหมาย}\}$

$= \{x \mid x \geq 0\}$

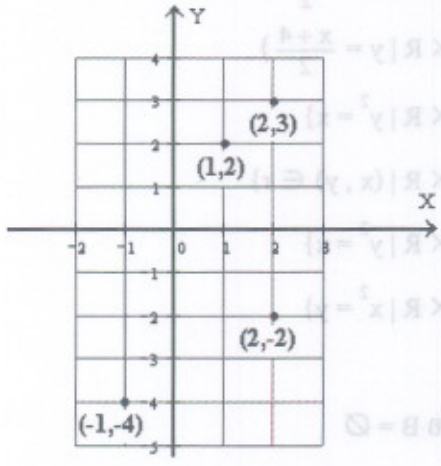
$= [0 , \infty)$

$R_r = \{y \mid y^2 = x \text{ และ } x \in [0 , \infty)\}$

$= (-\infty , \infty)$

7. กราฟของความสัมพันธ์ $r \subset R \times R$ แทนด้วยจุดบนระนาบ XY

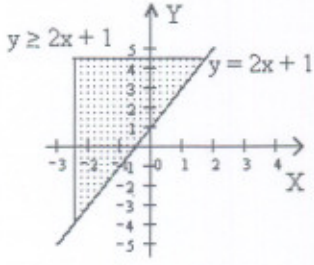
ตัวอย่าง $r = \{(1 , 2) , (2 , 3) , (-1 , -4) , (2 , -2)\}$ มีกราฟเป็น



ตัวอย่าง $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y \geq 2x + 1\}$

ขั้นที่ 1 เขียนกราฟของ $y = 2x + 1$

ขั้นที่ 2 ดูว่า $(0 , 0)$ อยู่ใน r หรือไม่



ถ้า $(0 , 0)$ อยู่ใน r ให้แรเงาด้านที่มีจุด $(0 , 0)$

ถ้า $(0 , 0)$ ไม่อยู่ใน r ให้แรเงาด้านที่ไม่มี $(0 , 0)$

8. **อินเวอร์สของความสัมพันธ์** (r^{-1}) $\quad r^{-1} = \{(x , y) \mid (y , x) \in r\}$

ตัวอย่าง $r = \{(1 , 2) , (3 , 4)\}$

$r^{-1} = \{(2 , 1) , (4 , 3)\}$

ข้อควรจำ $D_{r^{-1}} = R_r$ และ $R_{r^{-1}} = D_r$

9. การหา r^{-1}

ตัวอย่าง $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 2x - 4\}$

$$r^{-1} = \{(y , x) \in R \times R \mid (x , y) \in r\}$$
$$= ((y , x) \in R \times R \mid y = 2x - 4\}$$
$$= \{(y , x) \in R \times R \mid x = \frac{y+4}{2}\}$$
$$= \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x+4}{2}\}$$

ตัวอย่าง $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = x\}$

$$r^{-1} = \{(y , x) \in R \times R \mid (x , y) \in r\}$$
$$= \{(y , x) \in R \times R \mid y^2 = x\}$$
$$= \{(x , y) \in R \times R \mid x^2 = y\}$$

10. ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องเสมอ

1. $A \times B = \varnothing \leftrightarrow A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
3. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
4. ถ้า $A \neq \varnothing$ และ $A \times B = A \times C$ แล้ว $B = C$
5. $\varnothing$ เป็นความสัมพันธ์
6. $(x , y) \in r \leftrightarrow (y , x) \in r^{-1}$
7. ถ้า $r = r^{-1}$ และ $D_r = R_r$
8. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $A \times C \subset A \times B$
9. $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$
10. $U \times U \neq U$

4.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. คำถามที่ถามว่า D_r หรือ R_r คือเซตใด เราจะใช้การแทนค่า x , y บางค่าช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{-x}\}$ โดเมนของ r คือเซตใด

1. $(-\infty , \infty)$
2. $(-\infty , 0) \cup (0 , \infty)$
3. $(-\infty , 0]$
4. $[0 , \infty)$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = 4$ ทำให้ $\sqrt{-4}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $x = 4$ ต้องไม่อยู่ในโดเมนของ r

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

2. คำถามที่กำหนด r มาให้ แล้วถามว่า r^{-1} คือเซตใดเราจะใช้การแทนค่าบางจุด (x , y) ในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = x \text{ และ } x \geq 0\}$ แล้วข้อใดคือ r^{-1}

1. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = \pm \sqrt{x}\}$
2. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$
3. $\{(x , y) \in R \times R \mid x = \pm \sqrt{y}\}$
4. $\{(x , y) \in R \times R \mid x = \sqrt{y}\}$

การตัดตัวเลือก $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = x \text{ และ } x \geq 0\}$

จะเห็นว่า $(4 , -2) , (4 , 2) \in r$ ดังนั้น $(-2 , 4) , (2 , 4) \in r^{-1}$

$(2 , 4) \notin \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x}\}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

$(-2 , 4) \notin \{(x , y) \in R \times R \mid y = \pm \sqrt{x}\}$

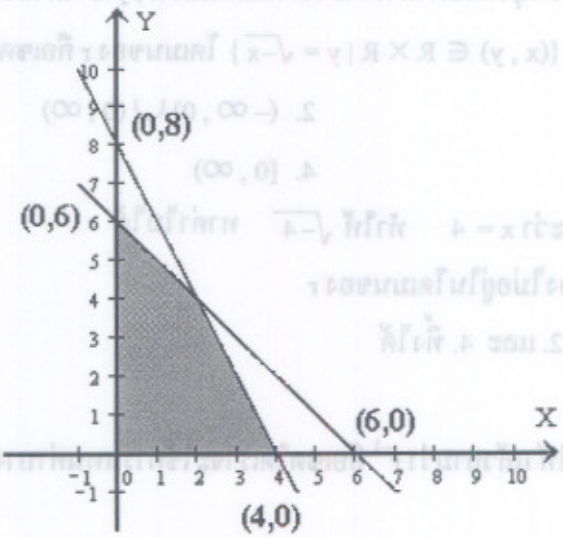
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$(-2 , 4) \notin \{(x , y) \in R \times R \mid x = \sqrt{y}\}$

เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 4.

3. ปัญหาที่ถามว่ากราฟของ r คืออะไรให้นำจุดของกราฟในตัวเลือกขึ้นมาแทนค่าหรือนำสมาชิกของ r ไปตรวจสอบว่าอยู่บนกราฟของตัวเลือกหรือไม่

ตัวอย่าง กราฟที่แรเงาต่อไปนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์ r ในข้อใด



1. $r_1 = \{(x , y) \mid x \geq 0 , y \geq 0 , x + y - 6 \leq 0 , 2x + y - 8 \leq 0\}$
2. $r_2 = \{(x , y) \mid x > 0 , y > 0 , x + y - 6 \leq 0 , 2x + y - 8 \leq 0\}$
3. $r_3 = \{(x , y) \mid x + y - 6 \leq 0 , 2x + y - 8 \leq 0\}$
4. $r_4 = \{(x , y) \mid x + y - 6 \geq 0 , 2x + y - 8 \geq 0\}$

การตัดตัวเลือก จากรูป $(0 , 0) \in r$

$(0 , 0) \notin r_2 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2.

$(0 , 0) \notin r_4 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 4.

จากเงื่อนไขของ r_3 $(-100 , -100) \in r_3$ แต่ $(-100 , -100) \notin r$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

4.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 4.1 กำหนดให้ $S = \{1, 2, 4, 6, 8\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์ใน S ซึ่ง $r = \{(x, y) \mid x = 2y\}$ แล้วจะเขียน r แบบแจกแจงสมาชิกได้ดังข้อใด

1. $\{(1, 2), (2, 4), (4, 8)\}$
2. $\{(2, 1), (4, 2), (8, 4)\}$
3. $\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8)\}$
4. $\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก มีหลายเหตุผลเช่น เพราะว่า $4 \neq 2(8)$ ดังนั้น $(4, 8) \notin r$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะว่า 3 อยู่ในเรนจ์ของตัวเลือก 4. แต่ $3 \notin S$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง
$$\begin{aligned} r &= \{(x, y) \mid x = 2y\} \\ &= \{(x, y) \mid y = \frac{x}{2}\} \\ &= \{(2, 1), (4, 2), (8, 4)\} \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 4.2 กำหนด $A = \{0, 2, 5\}$, $B = \{3, 4\}$ และ $r = \{(x, y) \in B \times A \mid y \leq x - 2\}$ แล้ว r คือข้อใด

1. $\{(3, 0), (4, 0), (4, 2)\}$
2. $\{(3, 0), (3, 2), (4, 0)\}$
3. $\{(3, 0), (3, 2), (4, 0), (4, 2)\}$
4. $\{(3, 0), (3, 2), (3, 5), (4, 0), (4, 2)\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $2 \not\leq 3 - 2$ เพราะฉะนั้น $(3, 2) \notin r$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง
$$\begin{aligned} r &= \{(x, y) \in B \times A \mid y \leq x - 2\} \\ &= \{(x, y) \in B \times A \mid x \geq y + 2\} \\ &= \{(3, 0), (4, 0), (4, 2)\} \end{aligned}$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 4.3 ให้ $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนคู่ตั้งแต่ 0 ถึง 12$\}$

$B = \{x \mid x \in I$ และ $8 < x < 15\}$

จำนวนสมาชิกของ $(A \times A) \cap (B \times B)$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2

3. 3 4. 4

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

โดยการแจงสมาชิกจะได้ว่า $\{(10, 10), (10, 12), (12, 10), (12, 12)\} \subset A \times A$

และ $\{(10, 10), (10, 12), (12, 10), (12, 12)\} \subset B \times B$

เพราะฉะนั้น $\{(10, 10), (10, 12), (12, 10), (12, 12)\} \subset (A \times A) \cap (B \times B)$

เพราะฉะนั้นจำนวนสมาชิกของ $(A \times A) \cap (B \times B)$ มากกว่าหรือเท่ากับ 4 ตัวแน่นอน

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เพื่อประโยชน์ของนักเรียนจะแสดงให้ดูว่า $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B)$

เพราะว่า $A \cap B \subset A$ และ $A \cap B \subset B$

เพราะฉะนั้น $(A \cap B) \times (A \cap B) \subset B \times B$

ดังนั้น $(A \cap B) \times (A \cap B) \subset (A \times A) \cap (B \times B)$

ให้ $(x, y) \in (A \times A) \cap (B \times B)$, $(x, y) \in A \times A$ และ $(x, y) \in B \times B$

$(x \in A$ และ $y \in A)$ และ $(x \in B$ และ $y \in B)$

$x \in A \cap B$ และ $y \in A \cap B$

$(x, y) \in (A \cap B) \times (A \cap B)$

ดังนั้น $(A \times A) \cap (B \times B) \subset (A \cap B) \times (A \cap B)$

สรุป $(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B)$

เพราะว่า $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ $B = \{9, 10, 11, 12, 13, 14\}$

$A \cap B = \{10, 12\}$

เพราะฉะนั้น $n((A \times A) \cap (B \times B)) = n((A \cap B) \times (A \cap B)) = (n(A \cap B))^2 = 4$

ตัวอย่างที่ 4.4 กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3\}$ และ $C = \{1, 2, 6\}$ แล้ว $A \times (B \cap C)$ คือข้อใด

1. $\{(2, 3), (3, 3), (4, 3)\}$
2. $\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$
3. $\{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$
4. $\varnothing$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $A \neq \varnothing$ และ $B \cap C \neq \varnothing$ เพราะฉะนั้น $A \times (B \cap C) \neq \varnothing$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่า $3 \notin B \cap C$ เพราะฉะนั้น $(2, 3) \notin A \times (B \cap C)$ และ $(1, 3) \notin A \times (B \cap C)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

วิธีจริง $B \cap C = \{1\}$

$A \times (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \times \{1\} = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$ ตรงกับตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 4.5 กำหนด $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 5\}$ ความสัมพันธ์ในข้อใดมีจำนวนสมาชิกมากที่สุด

1. $\{(x, y) \in A \times B \mid y \neq x\}$
2. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x\}$
3. $\{(x, y) \in A \times B \mid y > x\}$
4. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ดูจากเงื่อนไขจะเห็นว่ากรณีที่ $y \neq x$ จะมากกว่ากรณีที่ $y = x$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

เพราะว่ากรณี $y \neq x$ หมายถึง $y > x$ หรือ $y < x$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ต้องมีสมาชิกน้อยกว่าตัวเลือก 1. ต่อไปทำการแจกสมาชิกของตัวเลือก 4. ได้ $\{(1, 1), (4, 2)\}$ แต่ตัวเลือก 1. มี $(1, 2), (1, 5), (3, 1)$ เป็นสมาชิก (ไม่ต้องหาหมดก็ได้) ดังนั้นต้องตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\{(x, y) \in A \times B \mid y \neq x\}$ มีสมาชิกมากที่สุดแสดงโดยการแจงสมาชิก

1. $\{(x, y) \in A \times B \mid y \neq x\} = \{(1, 2), (1, 5), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (4, 1), (4, 2), (4, 5)\}$
2. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = x\} = \{(1, 1)\}$
3. $\{(x, y) \in A \times B \mid y > x\} = \{(1, 2), (1, 5), (3, 5), (4, 5)\}$
4. $\{(x, y) \in A \times B \mid y = \sqrt{x}\} = \{(1, 1), (4, 2)\}$

ตัวอย่างที่ 4.6 ให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid \sqrt{x-1}+\sqrt{y+1} = 2\}$ โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ r ตรงกับข้อใด

1. $D_r = [0 , 5] , R_r = [0 , 3]$
2. $D_r = [1 , 5] , R_r = [0 , 3]$
3. $D_r = [1 , 5] , R_r = [-1 , 3]$
4. $D_r = [0 , 5] , R_r = [-1 , 3]$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ตรงกับหลักสูตรการตัดตัวเลือกโดเมนและเรนจ์คือเซตใด ใช้การแทนค่าดีที่สุด

เพราะว่า ในเงื่อนไขของ r มี $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1} = 2$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ ไม่ได้ ดังนั้น $0 \notin D_r$

สรุปตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้ จากตัวเลือกที่เหลือลองดูว่า $y = -1$ ได้หรือไม่

เพราะว่า $y = -1$ ทำให้ $\sqrt{x-1}+\sqrt{-1+1} = 2$

$$\sqrt{x-1} = 2$$
$$x - 1 = 4$$
$$x = 5$$

เพราะฉะนั้น $-1 \in R_r$ เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1} = 2$

เพราะฉะนั้น $0 \le \sqrt{x-1} \le 2$ และ $0 \le \sqrt{y+1} \le 2$

$x - 1 \le 4$ และ $y + 1 \le 4$

$x \le 5$ และ $y \le 3$

เพราะว่า $x - 1 \ge 0$ ดังนั้น $x \ge 1$ ทำให้ $1 \le x \le 5$ เพราะฉะนั้น $D_r = [1 , 5]$

เพราะว่า $y + 1 \ge 0$ ดังนั้น $y \ge -1$ ทำให้ $-1 \le y \le 3$ เพราะฉะนั้น $R_r = [-1 , 3]$

ตัวอย่างที่ 4.7 กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{1+2x}{1-2x}\}$ โดเมนและเรนจ์ของ r คือตัวเลือกใด

1. $D_r = \{x \mid x \in R\}$ และ $R_r = \{y \mid y \neq -1\}$
2. $D_r = \{x \mid x \neq -1\}$ และ $R_r = \{y \mid y \neq \frac{1}{2}\}$
3. $D_r = \{x \mid x \neq -\frac{1}{2}\}$ และ $R_r = \{y \mid y \neq 1\}$
4. $D_r = \{x \mid x \neq \frac{1}{2}\}$ และ $R_r = \{y \mid y \neq -1\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไข $y = \frac{1+2x}{1-2x}$ จะได้ว่า $x = \frac{1}{2}$ ไม่ได้

ดังนั้น $\frac{1}{2}$ ต้องไม่อยู่ในโดเมน r เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. , และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $D_r = \{x \in R \mid y = \frac{1+2x}{1-2x}$ หาค่าได้$\}$

$= \{x \in R \mid 1 - 2x \neq 0\}$

$= \{x \in R \mid x \neq \frac{1}{2}\}$

เพราะว่า $y = \frac{1+2x}{1-2x}$

$1 + y = 1 + \frac{1+2x}{1-2x} = \frac{1-2x+1-2x}{1-2x} = \frac{2}{1-2x}$

$1 - 2x = \frac{2}{1+y}$

$2x = 1 - \frac{2}{1+y} = \frac{1+y-2}{1+y} = \frac{y-1}{y+1}$

$x = \frac{1}{2}(\frac{y-1}{y+1})$

เพราะฉะนั้น $R_r = \{y \in R \mid x = \frac{1}{2}(\frac{y-1}{y+1})$ หาค่าได้ $\}$

$= \{y \in R \mid y + 1 \neq 0\}$

$= \{y \in R \mid y \neq -1\}$

ตัวอย่างที่ 4.8 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid 5x^2y - x^2y^2 - 3 = 0\}$ เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือตัวเลือกใด

1. $\{1 , 2 , 3\}$
2. $(0 , 5)$
3. $(-\infty , 0) \cup (0 , 5)$
4. $[0 , 5]$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $y = 0$ จะทำให้ $5x^2(0) - x^2(0) - 3 = 0$ ดังนั้น $-3 = 0$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง เพราะฉะนั้น $y = 0$ ไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง ต่อไปดูว่า $y = -1$ ได้หรือไม่ โดยการแทนค่า $y = -1$

$5x^2(-1) + x^2(-1)^2 - 3 = 0$

$-4x^2 - 3 = 0$

$-4x^2 = 3$

เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $y = -1$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

ต่อไปลองดูว่า $y = \frac{1}{2}$ ได้หรือไม่ โดยการแทนค่า $y = \frac{1}{2}$

$$5x^2(\tfrac{1}{2}) + x^2(\tfrac{1}{2})^2 - 3 = 0$$

$$\frac{5x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = 3$$

$$\frac{11x^2}{4} = 3$$

$$x^2 = \frac{12}{11}$$

ดังนั้น $(\sqrt{\frac{12}{11}}, \frac{1}{2}) \in r$, $\frac{1}{2}$ อยู่ในเรนจ์ของ r เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง หาค่า x ในพจน์ของ y $5x^2 - x^2y^2 - 3 = 0$

$$x^2(5y - y^2) = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{5y - y^2} > 0$$

ดังนั้น $5y - y^2 > 0$

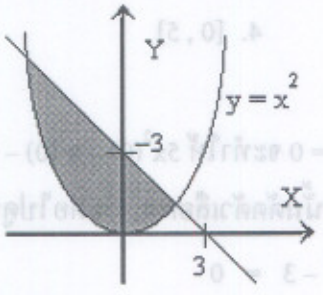
$$y^2 - 5y < 0$$

$$y(y - 5) < 0$$

$$0 < y < 5$$

สรุปเรนจ์ของ r คือ $(0, 5)$

ตัวอย่างที่ 4.9 บริเวณที่แรเงาในกราฟเป็นของความสัมพันธ์ข้อใด



1. $\{(x, y) \mid y \geq x^2$ และ $y \leq x - 3\}$
2. $\{(x, y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq 3 - x\}$
3. $\{(x, y) \mid y \leq x^2$ และ $y \geq x - 3\}$
4. $\{(x, y) \mid y \geq x^2$ และ $y \leq 3 - x\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ให้การแทนค่า (x , y) บางจุดช่วยตัดตัวเลือกเป็นวิธีดีที่สุด

เลือก (x , y) = (0 , 1) จะได้ว่า $1 \nleq 0^2$ และ $1 \nleq 0 - 3$ ดังนั้น (0 , 1) ไม่อยู่ในตัวเลือก 1. , 2. และ 3. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง ต้องดูจากรูปแล้วรู้ว่าสมการเส้นตรงคือ $x + y = 3$ ส่วนแรเงาคือ $x + y \leq 3$

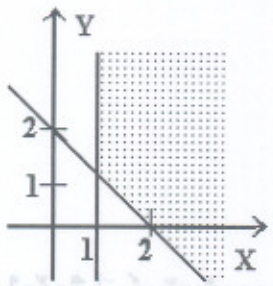
ต่อไปส่วนแรเงาที่ดูจากเส้นโค้งคือ $y \geq x^2$

สรุปส่วนแรเงาคือความสัมพันธ์ $\{(x , y) \mid y \geq x^2$ และ $y \leq 3 - x\}$

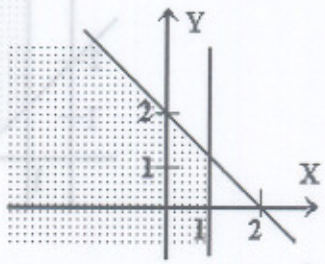
ตัวอย่างที่ 4.10 กราฟของความสัมพันธ์ตรงกับรูปในตัวเลือกใด เมื่อ

$$r = \{(x , y) \in R \times R \mid x \geq 1 \text{ และ } x + y \geq 2\}$$

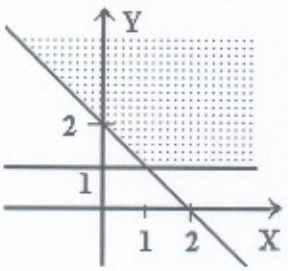
1.



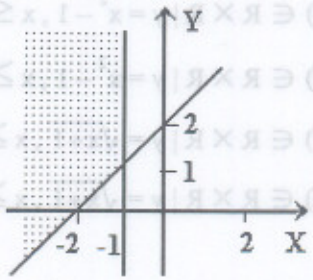
2.



3.



4.



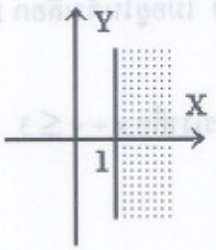
ตอบ 1.

แนวคิด ข้อสอบแบบนี้ใช้ การแทนค่าจุดบางจุดช่วยในการตัดตัวเลือกดีที่สุด

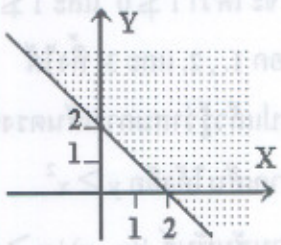
ตัวอย่างเช่น จากเงื่อนไขของ (x , y) ใน r พบว่า $(2 , 2) \in r$ แต่ $(2 , 2)$ ไม่อยู่ในส่วนแรเงาของตัวเลือก 2. และ 4. เพราะฉะนั้นจัดตัวเลือก 2. และ 4.

เลือก $x = 3$ และ $y = -1$ จะได้ว่า $3 \geq 1$ และ $3 - 1 \geq 2$ ดังนั้น $(3 , -1)$ ต้องอยู่ในบริเวณแรเงา เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เขียนกราฟของ $x \geq 1$ กับกราฟของ $x + y \geq 2$ แล้วนำมาอินเตอร์เซคกัน

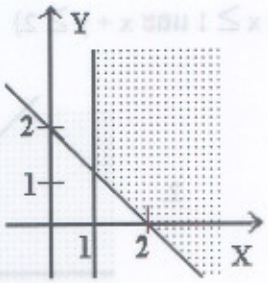


กราฟของ $x \geq 1$



กราฟของ $x + y \geq 2$

เพราะฉะนั้น $r = \{(x , y) \in R \times R \mid x \geq 1 \text{ และ } x + y \geq 2\}$ มีกราฟเป็นดังนี้



ตัวอย่างที่ 4.11 กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1}\}$ ความสัมพันธ์ r^{-1} คือข้อใด

1. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1 , x \leq 0\}$
2. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1 , x \geq 0\}$
3. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1} , x \geq 1\}$
4. $\{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1} , x \geq 1\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้การเลือกสมาชิกจาก r มาช่วยในการตัดตัวเลือกดีกว่า

เช่นเลือก (3 , 2) จะได้ $2 = \sqrt{3+1}$ ดังนั้น $(3 , 2) \in r$ และ $(2 , 3) \in r^{-1}$

เพราะว่า $2 \nleq 0$ เพราะฉะนั้น (2 , 3) ไม่อยู่ในตัวเลือก 1.

เพราะว่า $3 \neq \sqrt{2-1}$ เพราะฉะนั้น (2 , 3) ไม่อยู่ในตัวเลือก 3.

เพราะว่า $3 \neq \sqrt{2+1}$ เพราะฉะนั้น (2 , 3) ไม่อยู่ในตัวเลือก 4.

สรุปตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1}\}$

$r^{-1} = \{(y , x) \in R \times R \mid y = \sqrt{x+1}\}$

$= \{(x , y) \in R \times R \mid x = \sqrt{y+1}\}$

$= \{(x , y) \in R \times R \mid x^2 = y + 1 \text{ และ } x \geq 0\}$

$= \{(x , y) \in R \times R \mid y = x^2 - 1 \text{ และ } x \geq 0\}$

ตรงกับตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 4.12 กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{1+x}\}$ แล้ว r^{-1} คือข้อใด

1. $r_1 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{1-x}\}$
2. $r_2 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{1-|x|}\}$
3. $r_3 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{1+|x|}\}$
4. $r_4 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{x}{1+x}\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ให้การตัดตัวเลือกด้วยการเลือกสมาชิกจาก r ดีกว่า

เพราะว่า $(1 , \frac{1}{2}) \in r$ เพราะฉะนั้น $(\frac{1}{2} , 1) \in r^{-1}$

เพราะว่า $1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ เพราะฉะนั้น $(\frac{1}{2} , 1) \in r_1$

เพราะว่า $1 = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left|\frac{1}{2}\right|}$ เพราะฉะนั้น $(\frac{1}{2} , 1) \in r_2$

เพราะว่า $1 \neq \frac{\frac{1}{2}}{1+\left|\frac{1}{2}\right|}$ เพราะฉะนั้น $(\frac{1}{2} , 1) \notin r_3$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

เพราะว่า $1 \neq \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}$ เพราะฉะนั้น $(\frac{1}{2} , 1) \notin r_4$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่า $(-\frac{1}{2} , -1) \in r$ เพราะฉะนั้น $(-1 , -\frac{1}{2}) \in r^{-1}$

เพราะว่า $-\frac{1}{2}=\frac{-1}{1-(-1)}$ เพราะฉะนั้น $(-1,-\frac{1}{2})\in r_1$

เพราะว่า $-\frac{1}{2}\neq\frac{-1}{1-|-1|}$ เพราะฉะนั้น $(-1,-\frac{1}{2})\notin r_2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $r = \{(x,y)\in R\times R \mid y=\frac{x}{1+x}\}$

$r^{-1} = \{(y,x)\in R\times R \mid y=\frac{x}{1+x}\}$

$= \{(x,y)\in R\times R \mid x=\frac{y}{1+y}\}$

$= \{(x,y)\in R\times R \mid x-1=\frac{y}{1+y}-1=\frac{-1}{1+y}\}$

$= \{(x,y)\in R\times R \mid 1+y=\frac{-1}{x-1}=\frac{1}{1-x}\}$

$= \{(x,y)\in R\times R \mid y=\frac{1}{1-x}-1=\frac{1-1+x}{1-x}\}$

$= \{(x,y)\in R\times R \mid y=\frac{x}{1-x}\}$

ตัวอย่างที่ 4.13 อินเวอร์สของความสัมพันธ์ $r=\{(x,y)\mid y+1=\frac{2x-1}{3}\}$ คือข้อใด

1. $r_1=\{(x,y)\mid y=\frac{3x+4}{2}\}$
2. $r_2=\{(x,y)\mid x=\frac{2y-4}{4}\}$
3. $r_3=\{(x,y)\mid x=\frac{3y+4}{2}\}$
4. $r_4=\{(x,y)\mid y=\frac{2x+4}{3}\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การแทนค่าช่วยในการตัดตัวเลือก

เพราะว่า $(2,0)\in r$ เพราะฉะนั้น $(0,2)\in r^{-1}$

เพราะว่า $2=\frac{3(0)+4}{2}$ เพราะฉะนั้น $(2,0)\in r_1$

เพราะว่า $0=\frac{2(2)-4}{4}$ เพราะฉะนั้น $(0,2)\in r_2$

เพราะว่า $0\neq\frac{3(2)+4}{2}$ เพราะฉะนั้น $(0,2)\notin r_3$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $2\neq\frac{2(0)+4}{3}$ เพราะฉะนั้น $(0,2)\notin r_4$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $(5,2)\in r$ เพราะฉะนั้น $(2,5)\in r^{-1}$

เพราะว่า $5=\frac{3(2)+4}{2}$ เพราะฉะนั้น $(2,5)\in r_1$

เพราะว่า $2\neq\frac{2(5)-4}{4}$ เพราะฉะนั้น $(2,5)\notin r_2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง พิจารณาสมการ $y+1 = \frac{2x-1}{3}$

$$3y+3 = 2x-1$$

$$x = \frac{3y+4}{2}$$

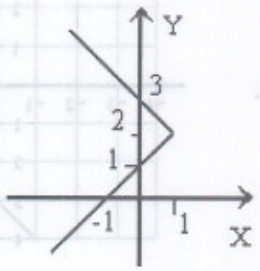
เพราะว่า $r = \{(x,y) \mid y+1 = \frac{2x-1}{3}\}$

เพราะฉะนั้น $r^{-1} = \{(y,x) \mid y+1 = \frac{2x-1}{3}\}$

$$= \{(y,x) \mid x = \frac{3y+4}{2}\}$$

$$= \{(x,y) \mid y = \frac{3x+4}{2}\}$$

ตัวอย่างที่ 4.14 กราฟที่กำหนดให้นี้เป็นกราฟของอินเวอร์สของความสัมพันธ์ใด



1. $r_1 = \{(x,y) \mid y = 1 + |x-2|\}$
2. $r_2 = \{(x,y) \mid y = 1 + |x+2|\}$
3. $r_3 = \{(x,y) \mid y = 1 - |x+2|\}$
4. $r_4 = \{(x,y) \mid y = 1 - |x-2|\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามของโจทย์ข้อนี้เหมือนกับ r^{-1} ตรงกับตัวเลือกใด เมื่อความสัมพันธ์ r มีกราฟตามที่กำหนดให้ ดังนั้นใช้การแทนค่าก็ตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $(0,1) \in r$ เพราะฉะนั้น $(1,0) \in r^{-1}$

เพราะว่า $(1,0) \notin r_1$, $(1,0) \notin r_2$ และ $(1,0) \notin r_3$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $r_4 = \{(x,y) \mid y = 1 - |x-2|\}$

$$r_4^{-1} = \{(y,x) \mid y = 1 - |x-2|\} = \{(x,y) \mid x = 1 - |y-2|\}$$

พิจารณาสมการ $x = 1 - |y-2|$

$-\infty < y < 2$; $x = 1 - |y-2| = 1 - (-(y-2)) = 1 + y - 2$

$y = x + 1$

$y = 2$; $x = 1$

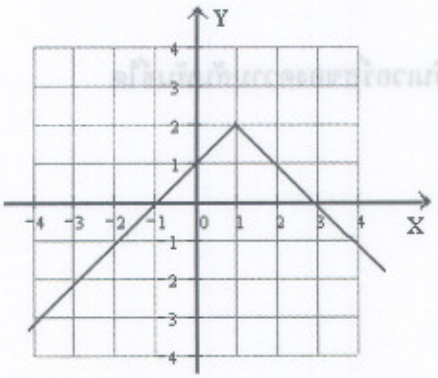
$2 < y < \infty$; $x = 1 - |y - 2\} = 1 - (y - 2)$

$y = 3 - x$

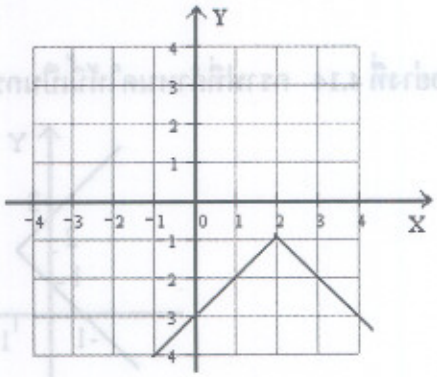
ดังนั้น $r_4^{-1} = \{ (x , y) | \ y = \begin{cases} x+1 & ; \ -\infty < y < 2 \\ 1 & ; \ y = 2 \\ 3-x & ; \ 2 < y < \infty \end{cases} \}$ ซึ่งมีกราฟตรงกับความสัมพันธ์ r

ตัวอย่างที่ 4.15 กำหนดให้ $r = \{(x , y) | \ y = | x - 1 | + 2\}$ กราฟของ r^{-1} ตรงกับตัวเลือกใด

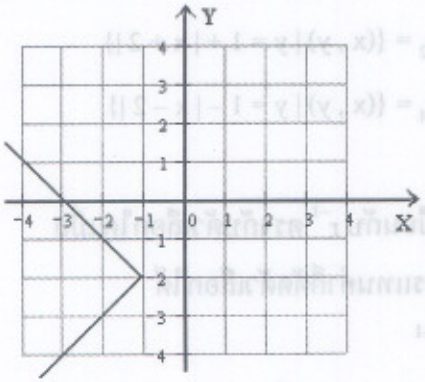
1.



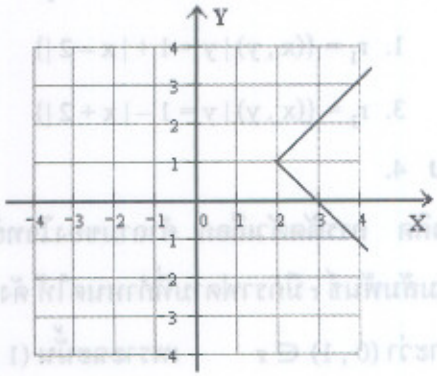
2.



3.



4.



ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้ใช้การเลือกสมาชิกของ r มาช่วยในการตัดตัวเลือกจะได้คำตอบเร็วที่สุด เพราะว่า $(1 , 2) \in r$ เพราะฉะนั้น $(2 , 1) \in r^{-1}$

เพราะว่า $(2 , 1)$ ไม่เป็นจุดบนกราฟของตัวเลือก 2. และ 3. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

เพราะว่า $(2 , 3) \in r$ เพราะฉะนั้น $(3 , 2) \in r^{-1}$

เพราะว่า (3 , 2) ไม่เป็นจุดบนกราฟของตัวเลือก 1. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $r = \{(x , y) \mid y = |x - 1| + 2\}$

$r^{-1} = \{(y , x) \mid y = |x - 1| + 2\}$

$= \{(x , y) \mid x = |y - 1| + 2\}$

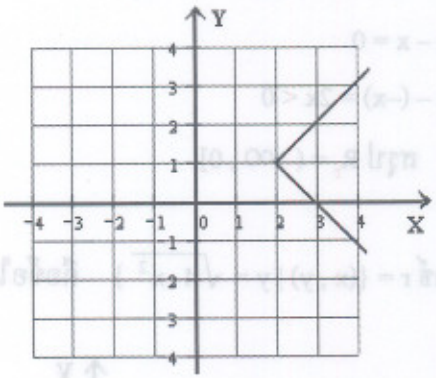
$= \{(x , y) \mid x = (y - 1) + 2$ เมื่อ $y \geq 1$

และ $x = -(y - 1) + 2$ เมื่อ $y < 1\}$

$= \{(x , y) \mid x = y + 1$ เมื่อ $y \geq 1$

และ $x = -y + 3$ เมื่อ $y < 1\}$

มีกราฟดังนี้



ตัวอย่างที่ 4.16 กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2}\}$ โดเมน r คือเซตในตัวเลือกใด

1. $[-2 , 2]$
2. $[0 , 2]$
3. $(-\infty , 0] \cup [2 , \infty)$
4. $(-\infty , -2] \cup [2 , \infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกดีกว่า จากสูตร $x = \sqrt{4 - y^2} \geq 0$ เสมอ ดังนั้น $-2 \notin D_r$ แน่นอน ทำให้ตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $y^2 \geq 0$

$-y^2 \leq 0$

$4 - y^2 \leq 4$

$0 \leq \sqrt{4 - y^2} \leq 2$

$0 \leq x \leq 2$ เพราะฉะนั้น $D_r = [0 , 2]$

ตัวอย่างที่ 4.17 กำหนดให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = x - |x|\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $D_r = R_r = (-\infty , \infty)$
2. $D_r = (-\infty , \infty)$ และ $R_r = (-\infty , 0]$
3. $D_r = [0 , \infty)$ และ $R_r = (-\infty , \infty)$
4. $D_r = [0 , \infty)$ และ $R_r = (-\infty , 0]$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การแทนค่า x และ y บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้เช่น

$x = -4$ จะได้ $y = -4 - |-4| = -8$ แสดงว่า $(-4 , -8) \in r$

ดังนั้น $-4 \in D_r$ และ $-8 \in R_r$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. , 4. ทิ้งได้

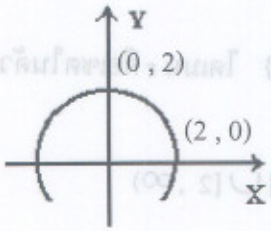
วิธีจริง เพราะว่า $x - |x|$ หาค่าได้ทุกค่า $x \in R$ เพราะฉะนั้น $D_r = (-\infty , \infty)$

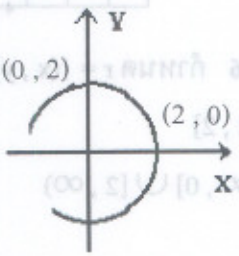
เมื่อ $x \geq 0$ จะได้ $y = x - |x| = x - x = 0$

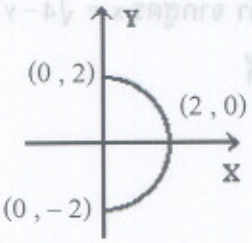
เมื่อ $x < 0$ จะได้ $y = x - |x| = x - (-x) = 2x < 0$

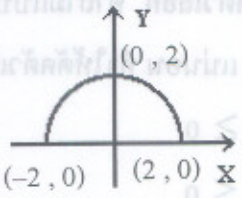
ดังนั้น $y \leq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty , \infty)$ สรุป $R_r = (-\infty , 0]$

ตัวอย่างที่ 4.18 กราฟของความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$ คือข้อใด

1. 

2. 

3. 

4. 

ตอบ 4.

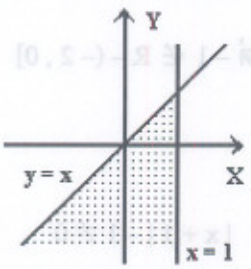
แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การตัดตัวเลือกโดยดูจากสูตร $y = \sqrt{4 - x^2}$

แสดงว่า y เป็นลบไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ลองใช้การแทนค่าในการตัดตัวเลือกก็ได้ เช่น $x = -2$ จะได้ $y = \sqrt{4-(-2)^2} = 0$
ดังนั้น $(-2, 0)$ ต้องอยู่บนกราฟของ r แต่มีตัวเลือก 4. เท่านั้นที่มีจุด $(-2, 0)$ อยู่บนกราฟ
ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง นักเรียนต้องจำได้ว่า $y = \sqrt{4-x^2}$ มีกราฟเป็นครึ่งวงกลมรัศมี 2 จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ เหนือแกน X

ตัวอย่างที่ 4.19 ส่วนที่แรเงาในรูปเงาในรูปเป็นกราฟของความสัมพันธ์ใด



1. $\{(x, y) \mid x - 1 \leq 0$ และ $x - y \geq 0\}$
2. $\{(x, y) \mid x - 1 \leq 0$ และ $x - y \leq 0\}$
3. $\{(x, y) \mid x - 1 \geq 0$ และ $x - y \leq 0\}$
4. $\{(x, y) \mid x - 1 \geq 0$ และ $x - y \geq 0\}$

ตอบ 1.

แนวคิด นำจัดที่อยู่ภายในบริเวณแรเงามาใช้ในการตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น $(\frac{1}{2}, 0)$ อยู่ภายในบริเวณที่แรเงา $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ เพราะว่า $x - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \not\geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.
เพราะว่า $x - y = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \not\leq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 4.20 กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{|x+1|-1}\}$ D_r และ R_r ตรงกับข้อใด

1. $D_r = R - \{-2, 0\}$; $R_r = R - (-2, 0)$
2. $D_r = R - (-2, 0]$; $R_r = R - \{-1, 0\}$
3. $D_r = R$; $R_r = R - (-1, 0]$
4. $D_r = R - \{-2, 0\}$; $R_r = R - (-1, 0]$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $x = 0$ ทำให้ $y = \frac{1}{|0+1|-1} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $0 \notin D_r$ แต่ $0 \in R$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $y = \frac{1}{|x+1|-1} \neq 0$ เพราะฉะนั้น $0 \notin R_r$ แน่นอน

แต่ $0 \in R - (-2, 0)$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $y = \frac{1}{|-1+1|-1} = -1$ ดังนั้น $(-1, -1) \in r$

เพราะฉะนั้น $-1 \in D_r$ และ $-1 \in R_r$ แต่ $-1 \notin R - (-2, 0]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $y = \frac{1}{|x+1|-1}$ หาค่าได้ $\leftrightarrow$ $|x+1|-1 \neq 0$

$\leftrightarrow$ $|x+1| \neq 1$

$\leftrightarrow$ $x+1 \neq \pm 1$

$\leftrightarrow$ $x \neq 0, -2$

ดังนั้น $D_r = R - \{-2, 0\}$

$|x+1|-1 = \frac{1}{y}$

$|x+1| = \frac{1}{y} + 1 = \frac{1+y}{y}$

เพราะว่า $|x+1| \geq 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{1+y}{y} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $-\infty < y \leq -1$ หรือ $y > 0$

สรุป $R_r = (-\infty, -1] \cup (0, \infty) = R - (-1, 0]$

$\cap \varnothing \cup x \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin ^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow X Y \not< \not> \leq \not\geq \not\leq \not\geq$

❶❷❸❹①②③④

4.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนดให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid x = y^2 - 6y + 10\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

   1. $D_{r^{-1}} = R$ และ $R_{r^{-1}} = R^+ \cup \{0\}$
   2. $D_{r^{-1}} = R^+ \cup \{0\}$ และ $R_{r^{-1}} = R$
   3. $D_{r^{-1}} = R$ และ $R_{r^{-1}} = [1 , \infty)$
   4. $D_{r^{-1}} = [1 , \infty)$ และ $R_{r^{-1}} = R$

2. กำหนดความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 1\}$

   $$r_2 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x^2 + 1} - 1\}$$

   $A = D_{r_1}$ และ $B = R_{r_2}$ $A - B$ คือข้อใด

   1. $[0 , 1] \cup \{1\}$
   2. $(0 , 1] \cup \{-1\}$
   3. $(0 , 1]$
   4. $\{-1\}$

3. กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{4}{1 + x^2}\}$ โดเมนและเรนจ์ของ r คือข้อใด

   1. $D_r = R$ และ $R_r = R^+$
   2. $D_r = R^-$ และ $R_r = (0 , 4]$
   3. $D_r = R$ และ $R_r = (0 , 4]$
   4. $D_r = R$ และ $R_r = [0 , 4)$

4. ถ้า r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริง กำหนดให้

   $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{2x - 2}\}$ ข้อใดคือ r^{-1}

   1. $\{(x , y) \in R \times R \mid 2y = x^2 + 2$ เมื่อ $x \geq 0\}$
   2. $\{(x , y) \in R \times R \mid 2y = x^2 + 2\}$
   3. $\{(x , y) \in R \times R \mid 2y = \sqrt{x^2 + 2}$ เมื่อ $x \geq 0\}$
   4. $\{(x , y) \in R \times R \mid 2y = \sqrt{x^2 - 2}$ เมื่อ $x \geq 0\}$

5. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid \frac{x^2 + 4x + y + 2}{x - 2} = 0\}$

   ถ้า A เป็นเรนจ์ของความสัมพันธ์ r แล้วข้อใดถูก

   1. $A \cap (-\infty , 2) = \varnothing$
   2. $A \cup (2 , \infty) = A$
   3. $A \cap (2 , \infty) = \varnothing$
   4. $A' \cup (-\infty , 2) = A'$

6. กำหนด $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = x - |x|\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $D_r = R$ และ $R_r = R$
2. $D_r = R$ และ $R_r = (-\infty , 0]$
3. $D_r = [0 , \infty)$ และ $R_r = R$
4. $D_r = [0 , \infty)$ และ $R_r = (-\infty , 0]$

7. ความสัมพันธ์ r ที่มี $D_r = R_r$ คือความสัมพันธ์ในตัวเลือกใด

1. $r = \{(x , y) \in R \times R \mid x > 0 , y \neq 0\}$
2. $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y < 0 , x \neq 0\}$
3. $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$
4. $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

8. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 3 - \sqrt{x^2 - 16}\}$ ตัวเลือกใดถูกต้อง

1. $D_r = (-\infty , -4] \cup [4 , \infty)$ $R_r = (-\infty , \infty)$
2. $D_r = (-\infty , -4] \cup [4 , \infty)$ $R_r = (-\infty , 3]$
3. $D_r = [4 , \infty)$ $R_r = (-\infty , 3]$
4. $D_r = [-4 , 4]$ $R_r = [0 , \infty)$

9. กำหนดให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = (1 - x)^2$ และ $x \geq 1\}$
กราฟของความสัมพันธ์ r มีกราฟเหมือนกับความสัมพันธ์ในตัวเลือกใด

1. $r_1 = \{(x , y) \in R \times R \mid x = |y| - 1\}$
2. $r_2 = \{(x , y) \in R \times R \mid x = |y| + 1\}$
3. $r_3 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = |x| - 1\}$
4. $r_4 = \{(x , y) \in R \times R \mid y = |x| + 1\}$

10. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in I \times I \mid y = 3 - \frac{4}{(x-2)^2 + 1}\}$
จำนวนสมาชิกของ $D_r \times R_r$ เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8

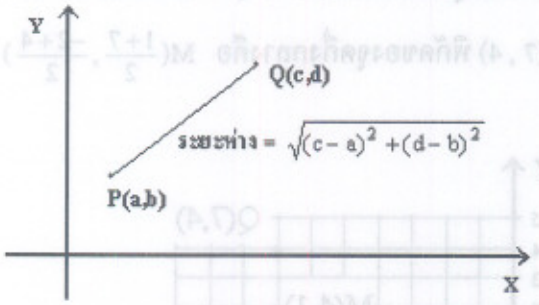
เฉลย 1. (3) 2. (2) 3. (3) 4. (1) 5. (3)
6. (3) 7. (3) 8. (2) 9. (2) 10. (3)

บทที่ 5

ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

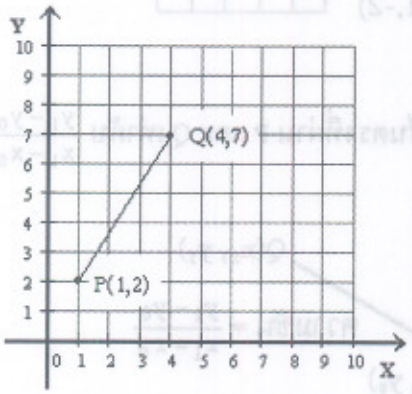
5.1 สรุปเนื้อหา

1. ระยะทางระหว่างจุด P(a , b) และ Q(c , d)



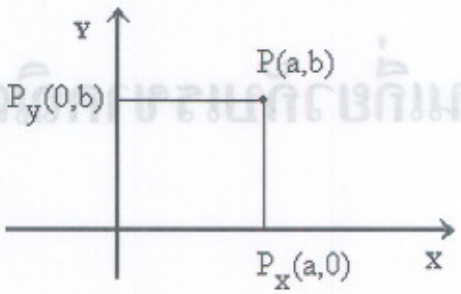
$$|PQ| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$$

ตัวอย่างเช่น ระยะทางระหว่างจุด (4 , 7) และ (1 , 2)



ระยะ $PQ = \sqrt{(4-1)^2+(7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

2. **ภาพฉาย**ของจุด P(a , b) บนแกน X , แกน Y

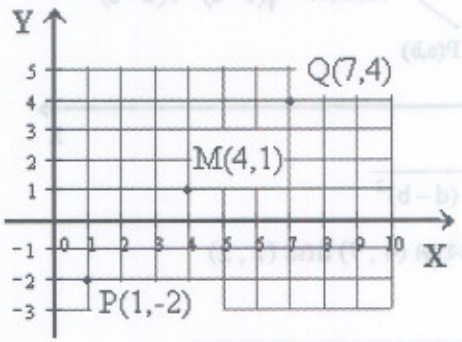


$P_x(a , 0)$ เป็น**ภาพฉายของจุด P(a , b) บนแกน X**

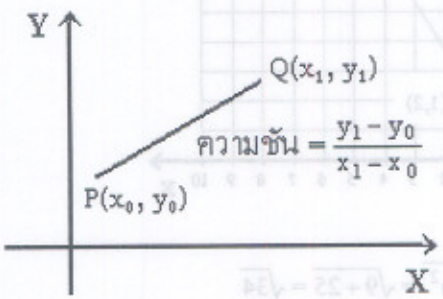
$P_y(0 , b)$ เป็น**ภาพฉายของจุด P(a , b) บนแกน Y**

3. P(a , b) , Q(c , d) M เป็น**พิกัดจุดกึ่งกลางของ** P , Q จะได้ว่าพิกัด M คือ $(\frac{a+c}{2} , \frac{b+d}{2})$

ตัวอย่าง P(1 , –2) , Q(7 , 4) พิกัดของจุดกึ่งกลางคือ $M(\frac{1+7}{2} , \frac{-2+4}{2}) = (4 , 1)$



4. $P(x_0 , y_0) , Q(x_1 , y_1)$ ความชันเส้นตรงที่ผ่าน P และ Q เท่ากับ $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$



5. รูปแบบสมการเส้นตรงที่สำคัญ

5.1 ผ่านจุด $(x_0 , y_0) , (x_1 , y_1)$

สมการเส้นตรงคือ $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

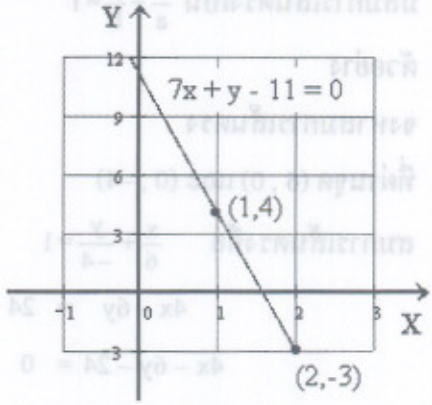
ตัวอย่าง

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1 , 4) , (2 , -3)$

$$\frac{y-4}{x-1} = \frac{-3-4}{2-1}$$

$$y-4 = -7(x-1)$$

$$7x + y - 11 = 0$$



5.2 ผ่านจุด (x_0 , y_0) และมีความชัน m

สมการเส้นตรงคือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

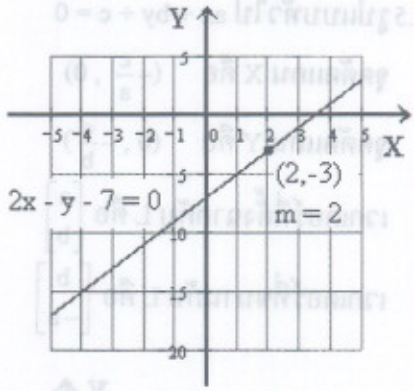
ตัวอย่าง

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2 , -3)$

และมีความชัน 2

$$y - (-3) = (2)(x - 2)$$

$$2x - y - 7 = 0$$



5.3 ระยะตัดแกน Y เท่ากับ c และมีความชัน m

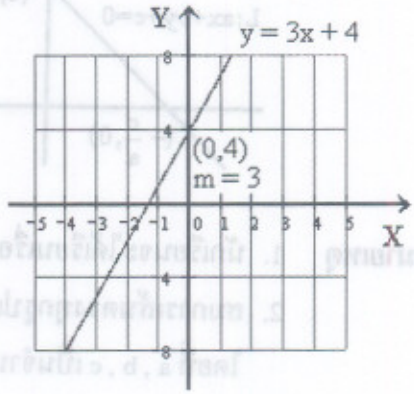
มีสมการเส้นตรงเป็น $y = mx + c$

ตัวอย่าง

จงหาสมการเส้นตรงที่ตัดแกน Y ที่ $(0 , 4)$

และมีความชัน 3

สมการเส้นตรงคือ $y = 3x + 4$



5.4 จุดตัดแกน X คือ (a , 0) จุดตัดแกน Y คือ (0 , b)

มีสมการเส้นตรงเป็น $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ตัวอย่าง

จงหาสมการเส้นตรง

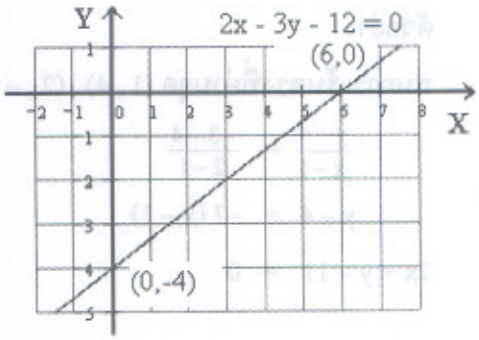
ที่ผ่านจุด (6 , 0) และ (0 , –4)

สมการเส้นตรงคือ $\frac{x}{6}+\frac{y}{-4}=1$

$$4x - 6y = 24$$

$$4x - 6y - 24 = 0$$

$$2x - 3y - 12 = 0$$



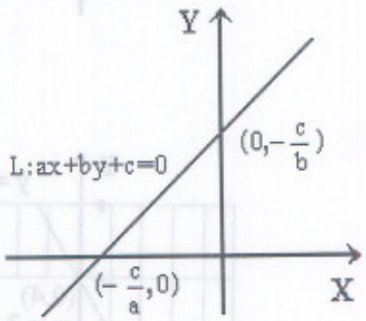
5.5 รูปแบบทั่วไป $ax + by + c = 0$

จุดตัดแกน X คือ $(-\frac{c}{a}, 0)$

จุดตัดแกน Y คือ $(0, -\frac{c}{b})$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ L คือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ที่ขนานกับ L คือ $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$



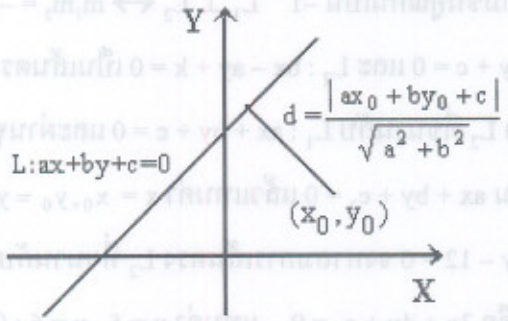
เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ L คือ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ที่ขนานกับ L คือ $\begin{bmatrix} b \\ -a \end{bmatrix}$

หมายเหตุ

1. นักเรียนจะได้เรียนเรื่องเวกเตอร์ในชั้น ม. 5
2. สมการเส้นตรงทุกรูปแบบสามารถจัดรูปได้เป็น $ax + by + c = 0$ โดยที่ a , b , c เป็นจำนวนเต็ม
3. รูปแบบ $ax + by + c = 0$ เป็นรูปแบบของสมการเส้นตรงที่สำคัญที่สุด

6. ระยะทางจากจุด (x_0, y_0) ไปยังเส้นตรง $L : ax + by + c = 0$ มีค่าเท่ากับ $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$



ตัวอย่าง

จงหาระยะทางระหว่าง

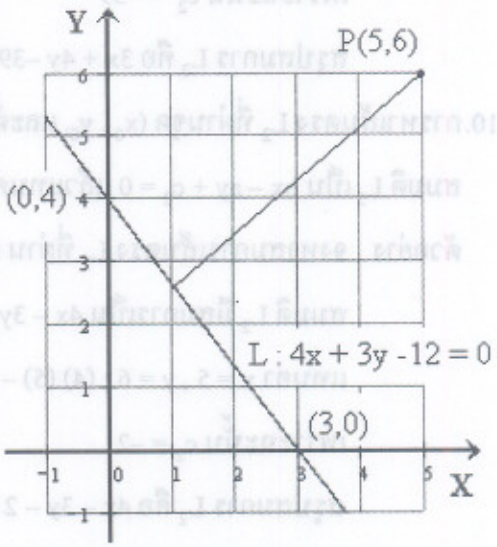
เส้นตรง $L : 4x + 3y - 12 = 0$ กับจุด $P(5, 6)$

ระยะทางจาก P มาตั้งฉากกับ L

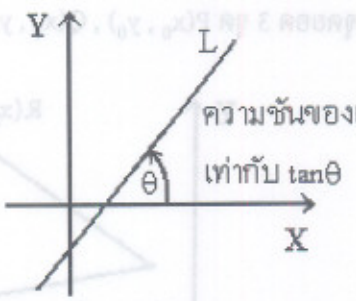
$$= \frac{|(4)(5) + (3)(6) - 12|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$

$$= \frac{26}{5}$$

$$= 5.2$$



7. เส้นตรง L ทำมุมกับแกน X เท่ากับ θ จะได้ว่าความชันของเส้นตรง L เท่ากับ $\tan\theta$



7. เส้นตรงขนานกันความชันเท่ากัน $L_1 // L_2 \leftrightarrow m_1 = m_2$

8. เส้นตรงตั้งฉากกันความชันคูณกันเป็น -1 $\quad L_1 \perp L_2 \leftrightarrow m_1 m_2 = -1$

หมายเหตุ $L_1 : ax + by + c = 0$ และ $L_2 : bx - ay + k = 0$ เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน

9. การหาสมการเส้นตรง L_2 ที่ขนานกับ $L_1 : ax + by + c = 0$ และผ่านจุด (x_0 , y_0) ที่ดีที่สุดคือ

สมมติ L_2 มีสมการเป็น $ax + by + c_2 = 0$ แล้วแทนค่า $x = x_0, y_0 = y_0$ เพื่อหาค่า c_2

ตัวอย่าง $L_1 : 3x + 4y - 12 = 0$ จงหาสมการเส้นตรง L_2 ที่ขนานกับ L_1 และผ่านจุด $(5 , 6)$

สมการ L_2 คือ $3x + 4y + c_2 = 0$ แทนค่า $x = 5 , y = 6 ; (3)(5) + (4)(6) + c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $c_2 = -39$

สรุปสมการ L_2 คือ $3x + 4y - 39 = 0$

10. การหาเส้นตรง L_2 ที่ผ่านจุด (x_0 , y_0) และตั้งฉากกับ $L_2 : ax + by + c = 0$ วิธีที่ดีที่สุดคือ

สมมติ L_2 เป็น $bx - ay + c_2 = 0$ แล้วแทนค่า $x = x_0 , y = y_0$ เพื่อหาค่า c_2

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตรง L_2 ที่ผ่าน $(5 , 6)$ และตั้งฉากกับ $3x + 4y - 12 = 0$

สมมติ L_2 มีสมการเป็น $4x - 3y + c_2 = 0$

แทนค่า $x = 5 , y = 6 ; (4)(5) - (3)(6) + c_2 = 0$

เพราะฉะนั้น $c_2 = -2$

สรุปสมการ L_2 คือ $4x - 3y - 2 = 0$

11. $L_1 : ax + by + c_1 = 0 , L_2 : ax + by + c_2 = 0$ จะได้ $L_1 // L_2$

และระยะห่างระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ $\dfrac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

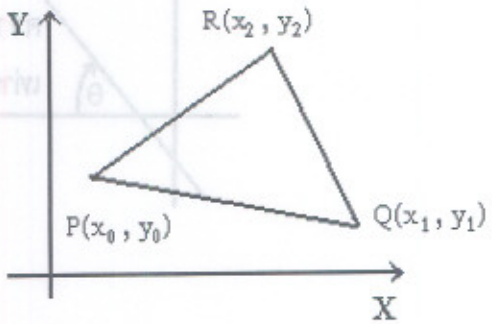
12. การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อรู้พิกัดของจุดยอด 3 จุด $P(x_0 , y_0) , Q(x_1 , y_1) , R(x_2 , y_2)$

พื้นที่สามเหลี่ยม PQR

$$= \left| \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{pmatrix} \right|$$

หมายเหตุ $\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$

นักเรียนจะได้ในชั้น ม. 5



ตัวอย่าง จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอด

P(2 , 1) , Q(4 , 3) , R(3 , 7)

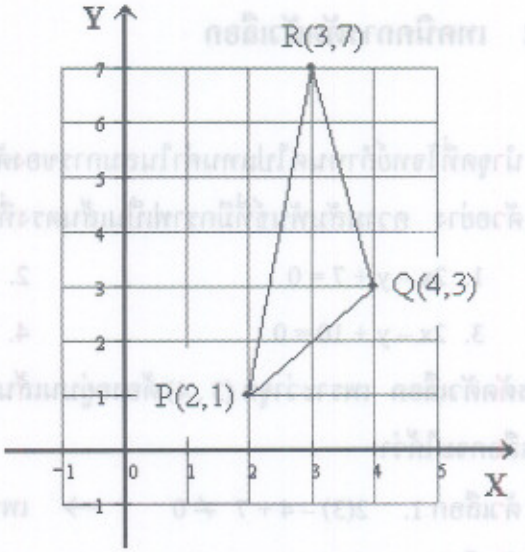
พื้นที่สามเหลี่ยม PQR

$$= \left| \frac{1}{2} \det\left(\begin{bmatrix} 4-2 & 3-1 \\ 3-2 & 7-1 \end{bmatrix}\right) \right|$$

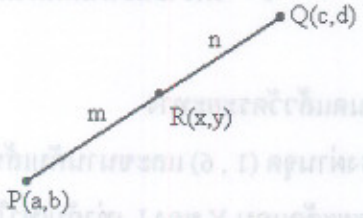
$$= \left| \frac{1}{2} \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{2}(12-2) \right|$$

$$= 5$$



13. P(a , b) , Q(c , d)



R(x , y) เป็นจุดบนเส้น PQ ที่แบ่ง PR : RQ = m : n มีสูตรเป็น $x = a + \frac{m}{m+n}(c-a)$ และ

$y = b + \frac{m}{m+n}(d-b)$

ตัวอย่าง

P(1 , 2) , Q(8 , 10)

R เป็นจุดบนเส้นตรง PQ

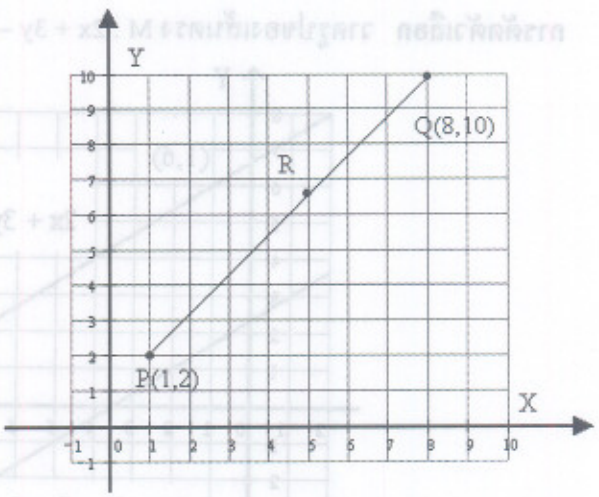
ที่ทำให้ PR : RQ = 4 : 3

$x = 1 + \frac{4}{4+3}(8-1) = 5$

$y = 2 + \frac{4}{4+3}(10-2) = 2 + \frac{32}{7}$

$= \frac{46}{7}$

พิกัด R(5 , $\frac{46}{7}$)



5.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. นำจุดที่โจทย์กำหนดไปแทนค่าในสมการของตัวเลือก

ตัวอย่าง ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด (3 , 4) และมีความชันเท่ากับ 2 คือข้อใด

1. $2x - y + 7 = 0$
2. $2x - y + 1 = 0$
3. $2x - y + 10 = 0$
4. $2x - y - 2 = 0$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าจุด (3 , 4) ต้องอยู่บนเส้นตรง เพราะฉะนั้นแทนค่า $x = 3$, $y = 4$ ในแต่ละตัวเลือกจะได้ว่า

ตัวเลือก 1. $2(3) - 4 + 7 \neq 0$ $\rightarrow$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

ตัวเลือก 2. $2(3) - 4 + 1 \neq 0$ $\rightarrow$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

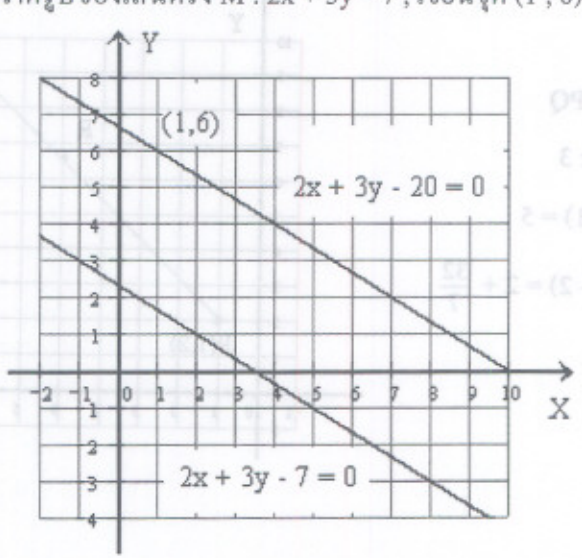
ตัวเลือก 3. $2(3) - 4 + 10 \neq 0$ $\rightarrow$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

2. วาดรูปตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดแล้ววัดระยะทาง

ตัวอย่าง กำหนด L เป็นเส้นตรงผ่านจุด (1 , 6) และขนานกับเส้นตรง $2x + 3y - 7 = 0$ ผลบวกระยะตัดแกน X กับระยะตัดแกน Y ของ L เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{5}{3}$
2. $\frac{3}{2}$
3. $\frac{25}{2}$
4. $\frac{50}{3}$

การตัดตัวเลือก วาดรูปของเส้นตรง M : $2x + 3y - 7$, เขียนจุด (1 , 6)



ลากเส้นตรง L ผ่านจุด (1 , 6) และขนานกับ M จะเห็นว่า L ตัดแกน X และ Y ทางด้านขวา ดังนั้นผลบวกระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y ต้องเป็นบวกทำให้ตัดตัวเลือก 1. ได้

เพราะว่า OP ยาว 9.5 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

เพราะว่า OQ ยาว 6.5 เพราะฉะนั้น OP + OQ > 12.5 ทำให้ต้องตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง สมการ L คือ $2x + 3y + c_2 = 0$ แทนค่า $x = 1 , 9 = 6 ; (2)(1) + (3)(6) + c_2 = 0$

$c_2 = -20$ สมการ L คือ $2x + 3y - 20 = 0$

แทนค่า $x = 0 \longrightarrow y = \frac{20}{3} \longrightarrow$ ระยะตัดแกน $Y = \frac{20}{3}$

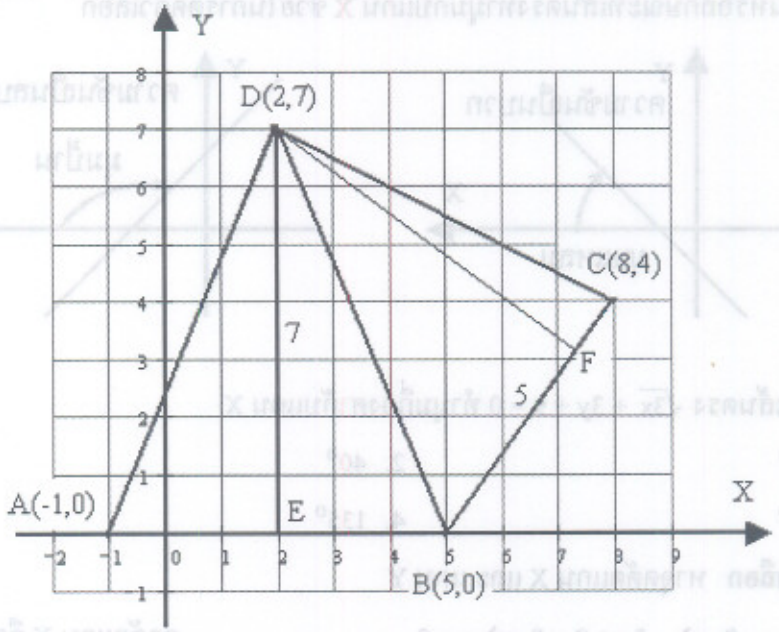
แทนค่า $y = 0 \longrightarrow x = 10 \longrightarrow$ ระยะตัดแกน $X = 10$

สรุประยะตัดแกน X + ระยะตัดแกน $Y = 10 + \frac{20}{3} = \frac{50}{3}$

ตัวอย่าง สี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น (–1 , 0) , (5 , 0) , (2 , 7) , (8 , 4) มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

1. 20
2. 25
3. 30.5
4. 37.25

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขและวัดระยะทาง



เพราะว่าพื้นที่สามเหลี่ยม $ABD = \frac{1}{2}(AB)(ED) = \frac{1}{2}(6)(7) = 21 > 20$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

โดยการวัดระยะทาง BC = 5 , DF = 6.5

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม BCD = $\frac{1}{2}$ (BC)(DF) = $\frac{1}{2}$ (5)(6.5) = 16.25

และพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = 21 + 16.25 = 37.25

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง |AB| = 6 และ |DE| = 7

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม ABD = $\frac{1}{2}$ (AB)(DE) = 21

$|BC| = \sqrt{(8-5)^2 + (4-0)^2} = 5$

สมการเส้นตรง BC คือ $\frac{y-4}{x-8} = \frac{0-4}{5-8} = \frac{4}{3}$

$3y - 12 = 4x - 32$

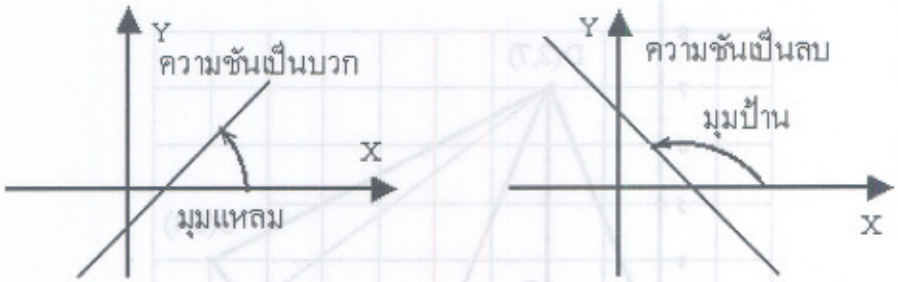
$4x - 3y - 20 = 0$

$|DF| = \frac{|4(2) - 3(7) - 20|}{\sqrt{16+9}} = \frac{33}{5}$

เพราะฉะนั้นพื้นที่สามเหลี่ยม BCD = $\frac{1}{2}$(BC)(DF) = $\frac{1}{2}$(5)($\frac{33}{3}$) = 16.5

สรุปพื้นที่สี่เหลี่ยม ABCD = 21 + 16.5 = 37.5

3. ใช้ความชันหรือลักษณะที่เส้นตรงทำมุมกับแกน X ช่วยในการตัดตัวเลือก



ตัวอย่าง เส้นตรง $\sqrt{3x} + 3y + 9 = 0$ ทำมุมกี่องศากับแกน X

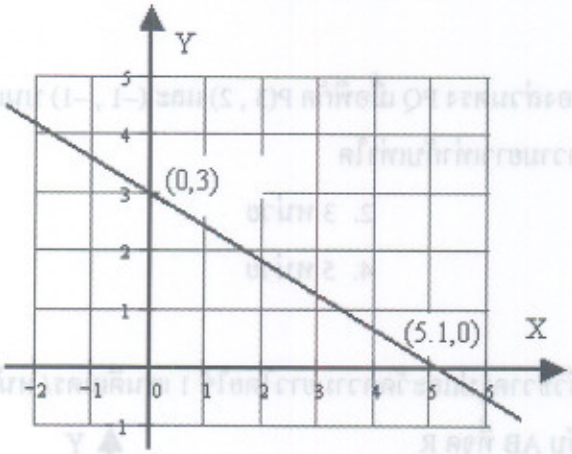
1. 30°
2. 40°
3. 60°
4. 135°

การตัดตัวเลือก หาจุดตัดแกน X และ แกน Y

แทนค่า $x = 0 \longrightarrow -3y + 9 = 0 \longrightarrow y = 3$ จุดตัดแกน X คือ (0 , 3)

แทนค่า $y = 0 \longrightarrow \sqrt{3}x + 9 = 0 \longrightarrow x = 3\sqrt{3} = 3(1.7) = 5.1$ จุดตัดแกน Y คือ (5.1 , 0)

เขียนรูปของเส้นตรง



จากรูปพบว่าเป็นมุมป้าน ดังนั้นเลือก 4. 135° เป็นคำตอบได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 จากสมการ $\sqrt{3}x + 3y + 9 = 0$

$$y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x + 3$$

ความชัน $= \frac{-\sqrt{3}}{3} < 0$

ดังนั้นเส้นตรงต้องทำมุมป้านกับแกน X จึงตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสมการ $\sqrt{3}x + 3y + 9 = 0$

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 3$$

เพราะฉะนั้นความชัน $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan 135^\circ$$

$$\theta = 135^\circ$$

เพราะฉะนั้นเส้นตรง $\sqrt{3}x + 3y + 9 = 0$ ทำมุม 135 องศากับแกน X

5.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 5.1 โปรเจคชันของส่วนตรง PQ เมื่อพิกัด P(3 , 2) และ (–1 , –1) บนเส้นตรงที่ผ่านจุด A (4 , –2) และ B (–2 , –2) มีความยาวเท่ากับเท่าใด

1. 2 หน่วย
2. 3 หน่วย
3. 4 หน่วย
4. 5 หน่วย

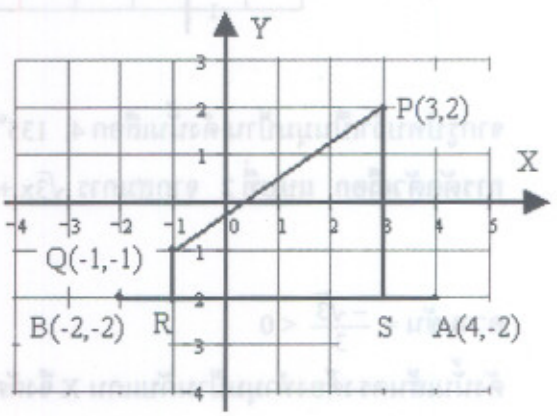
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้วิธีวาดรูปและวัดความยาวโดยใช้ 1 เซนติเมตร/ หน่วย

1. ลากเส้นจาก Q มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด R
2. ลากเส้นจาก P มาตั้งฉากกับ AB ที่จุด S

วัดความยาว RS ได้ 4 เซนติเมตร

สรุปเลือกตัวเลือก 3 ดีกว่า



วิธีจริง ลาก QR และ PS ตั้งฉากกับ AB

เพราะว่า AB ขนานกับแกน X

เพราะฉะนั้น QR และ PS ขนานแกน Y

เพราะว่าจุดบนเส้น AB จะมีค่า y = –2

ให้ R (a , –2) และ S (b , –2) เพราะว่า QR ขนานแกน Y เพราะฉะนั้น a = –1

เพราะว่า PS ขนานแกน Y เพราะฉะนั้น b = 3

สรุป R (–1 , –2) , S (3 , –2) และ RS เป็นโปรเจคชันของ PQ บน AB

ความยาว RS = $\sqrt{(-1-3)^2+(-2-(-2))^2} = \sqrt{16} = 4$

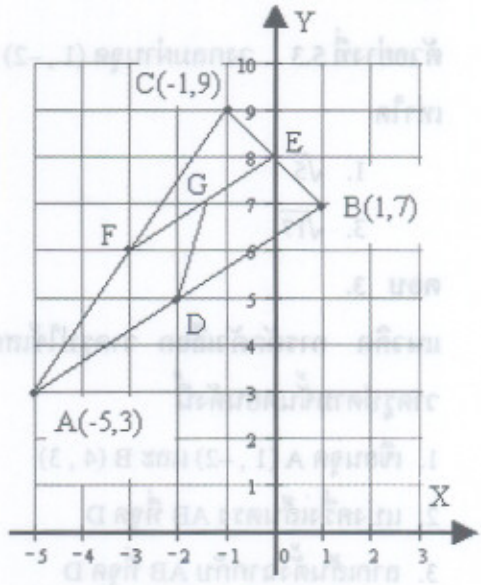
ตัวอย่างที่ 5.2 ABC เป็นสามเหลี่ยมโดยมีพิกัด A(–5 , 3) , B (1 , 7) และ C (–1 , 9) ถ้า D , E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB , BC และ CA ตามลำดับ ความยาวของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม DEF ที่ลากจากจุด D ไปยังด้าน ตรงข้ามยาวกี่หน่วย

1. $\frac{\sqrt{17}}{2}$
2. $\sqrt{17}$
3. $\frac{17}{2}$
4. $\sqrt{\frac{17}{2}}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้ (ใช้เสกล 1 เซนติเมตร / หน่วย)



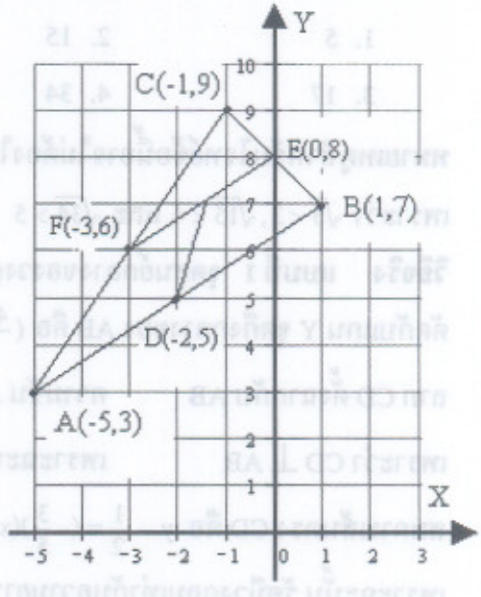
1. เขียนจุด A , B , C และลาก Δ ABC
2. หาจุดกึ่งกลาง D , E และ F ของด้าน AB , BC และ AC ตามลำดับ (แบ่งครึ่งโดยใช้ไม้บรรทัดก็พอ โดยไม่ต้องหาพิกัด)
3. ลากเส้น EF และ แบ่งครึ่ง EF ที่จุด G ด้วยไม้บรรทัดก็พอ
4. วัดความยาว DG ได้ 2.1 เซนติเมตรเปรียบเทียบกับ

ค่าในตัวเลือกซึ่งมีวิธีที่ดีควรจะเปรียบเทียบค่าที่ยกกำลังสองแล้วนักเรียนจะได้ไม่ต้องหาค่า $\sqrt{17}$ จาก $(2.1)^2 = 4.41$ มีค่าในตัวเลือกที่ยกกำลังแล้วคือ

1. $\frac{17}{4} = 4.25$
2. 17
3. $(\frac{17}{2})^2 = 72.25$
4. $\frac{17}{2} = 8.5$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

วิธีจริง การหาพิกัดของจุด D , E และ F



พิกัดของจุด D = $(\frac{-5+1}{2}, \frac{3+7}{2}) = (-2, 5)$

พิกัดของจุด E = $(\frac{-1+1}{2}, \frac{9+7}{2}) = (0, 8)$

พิกัดของจุด F = $(\frac{-1-5}{2}, \frac{9+3}{2}) = (-3, 6)$

ให้ G เป็นจุดกึ่งกลางของ EF

พิกัดของ G = $(\frac{0-3}{2}, \frac{8+6}{2}) = (-\frac{3}{2}, 7)$

DG เป็นเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม DEF

ความยาว DG $= \sqrt{(-2+\frac{3}{2})^2 + (5-7)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{4}+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

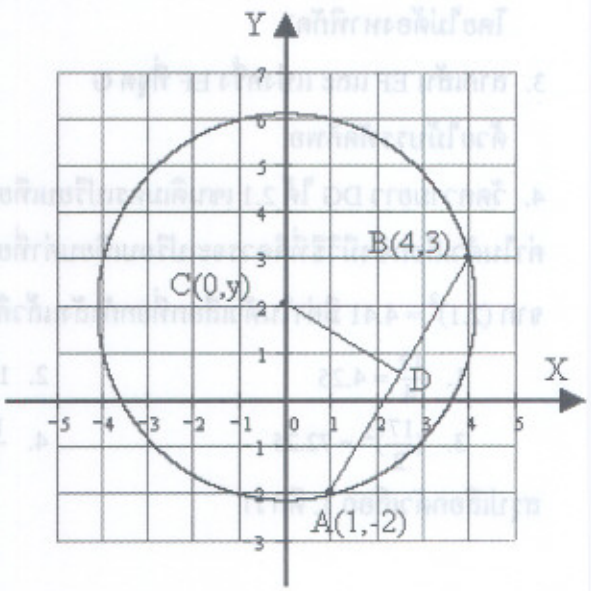
ตัวอย่างที่ 5.3 วงกลมผ่านจุด (1 , –2) และ (4 , 3) และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y มีรัศมีเท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$
2. $\sqrt{15}$
3. $\sqrt{17}$
4. $\sqrt{34}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปใช้เสกล 1 เซนติเมตร / หน่วย

วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้



1. เขียนจุด A (1 , –2) และ B (4 , 3)
2. แบ่งครึ่งเส้นตรง AB ที่จุด D
3. ลากเส้นตั้งฉากกับ AB ที่จุด D ตัดแกน Y ที่จุด C
4. วัดความยาว AC ได้ 4.1 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมที่ต้องการมีค่าประมาณ 4.1 เซนติเมตร

เปรียบเทียบค่า $(4.1)^2 = 16.81$ กับตัวเลือกทั้ง 4 ตัวที่ยกกำลังสองแล้ว

1. 5
2. 15
3. 17
4. 34

สรุปเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

หมายเหตุ สำหรับโจทย์ข้อนี้อาจไม่ต้องใช้ค่า $(4.1)^2$ ก็ได้

เพราะว่า $\sqrt{5} < 3, \sqrt{15} < 4$ และ $\sqrt{34} > 5$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนจุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งและตั้งฉากกับ AB ที่ไปตัดกับแกน Y จุดกึ่งกลางของ AB คือ $(\frac{4+1}{2}, \frac{3-2}{2}) = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$

ลาก CD ตั้งฉากกับ AB ความชัน AB เท่ากับ $\frac{3-(-2)}{4-1} = \frac{5}{3}$

เพราะว่า CD $\perp$ AB เพราะฉะนั้นความชัน CD เท่ากับ $\frac{-3}{5}$

สมการเส้นตรง CD คือ $y - \frac{1}{2} = (-\frac{3}{5})(x - \frac{5}{2})$ แทนค่า $x = 0$ จะได้ $y = 2$ สรุปพิกัด C คือ (0 , 2)

เพราะฉะนั้น รัศมีวงกลมเท่ากับความยาว AC $= \sqrt{(1-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$

วิธีจริง แบบที่ 2 เพราะว่า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่าน A , B

เพราะฉะนั้น $|AC|^2 = |BC|^2$

$$(1-0)^2 + (-2-y)^2 = (4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$1 + 4 + 4y + y^2 = 16 + 9 - 6y + y^2$$

$$10y = 20$$

$$y = 2$$

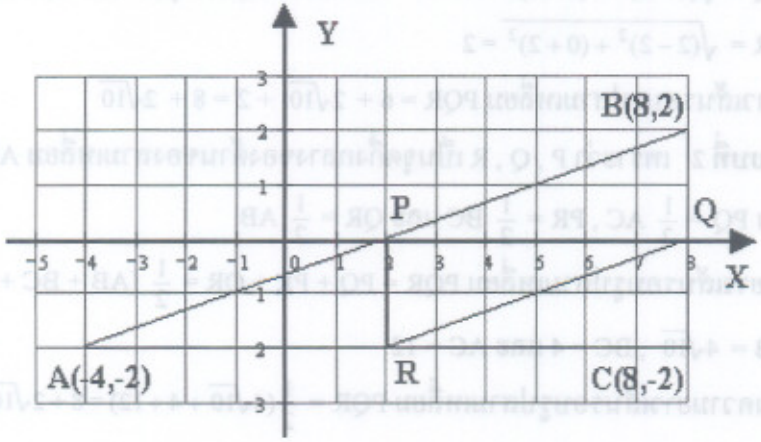
ดังนั้นพิกัด C คือ (0 , 2) และ รัศมีวงกลม $= |AC| = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$

ตัวอย่างที่ 5.4 สามเหลี่ยม ABC มีพิกัด A (–4 , –2) , B (8 , 2) และ C (8 , –2) ถ้า P , Q , R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB , BC และ AC ตามลำดับ แล้วความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม PQR เท่ากับเท่าใด

1. $7 + 3\sqrt{10}$
2. $8 - 2\sqrt{10}$
3. $7 - 3\sqrt{10}$
4. $8 + 2\sqrt{10}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้วิธีวาดรูปจริงโดยใช้เสกล 1 เซนติเมตร / หน่วย



ขั้นตอนการวาดรูป

1. เขียนจุด A (–4 , –2) , B (8 , 2) และ C (8 , –2)
2. แบ่งครึ่งด้าน AB , BC และ AC ที่จุด P < Q < R ตามลำดับ (ใช้ไม้บรรทัดช่วยแบ่งครึ่งก็พอ)
3. วัดความยาว PQ , QR และ PR ได้ PQ = 6 , QR = 6.3 และ PR = 2

สรุปความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม PQR เท่ากับ PQ + QR + PR = 6 + 6.3 + 2 = 14.3

เปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $7 + 3\sqrt{10} = 7 + 3(3.1) = 16.3$
2. $8 - 2\sqrt{10} = 8 - 2(3.1) = 1.9$
3. $7 - 3\sqrt{10} = 7 - 3(3.1) = -2.3$
4. $8 + 2\sqrt{10} = 8 + 2(3.1) = 14.2$

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

หมายเหตุ 1. การจำค่า $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{10} = 3.1$ จะเป็นประโยชน์มากต่อนักเรียนในการสอบ

2. ถ้านักเรียนประมาณค่าในตัวเลือกตั้งแต่แรกก็จะได้ว่า $7 - 3\sqrt{10} < 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไปได้

3. หากนักเรียนใช้เหตุผลตามวิธีที่ 2 จะได้ว่า AB + BC + AC = 28.6 โดยไม่ต้องหาจุด P , Q และ R ก็จะได้ว่าความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม PQR มีค่าเท่ากับ 14.3 เหมือนกัน

วิธีจริง แบบที่ 1 พิกัด $P = (\frac{8-4}{2}, \frac{2-2}{2}) = (2, 0)$ พิกัด $Q = (\frac{8+8}{2}, \frac{2-2}{2}) = (8, 0)$

พิกัด $R = (\frac{-4+8}{2}, \frac{-2-2}{2}) = (2, -2)$

ความยาว $PQ = \sqrt{(8-2)^2 + (0-0)^2} = 6$ ความยาว $QR = \sqrt{(8-2)^2 + (0+2)^2} = 2\sqrt{10}$

ความยาว $PR = \sqrt{(2-2)^2 + (0+2)^2} = 2$

สรุปความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม $PQR = 6 + 2\sqrt{10} + 2 = 8 + 2\sqrt{10}$

วิธีจริง แบบที่ 2 เพราะว่า P , Q , R เป็นจุดกึ่งกลางของด้านของสามเหลี่ยม ABC

เพราะฉะนั้น $PQ = \frac{1}{2}$ AC , $PR = \frac{1}{2}$ BC และ $QR = \frac{1}{2}$ AB

ดังนั้นความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม $PQR = PQ + PR + QR = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$

เพราะว่า $AB = 4\sqrt{10}$, $BC = 4$ และ $AC = 12$

เพราะฉะนั้นความยาวเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม $PQR = \frac{1}{2}(4\sqrt{10} + 4 + 12) = 8 + 2\sqrt{10}$

ตัวอย่างที่ 5.5 จุด 3 จุดในตัวเลือกใดต่อไปนี้เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมมุมฉาก

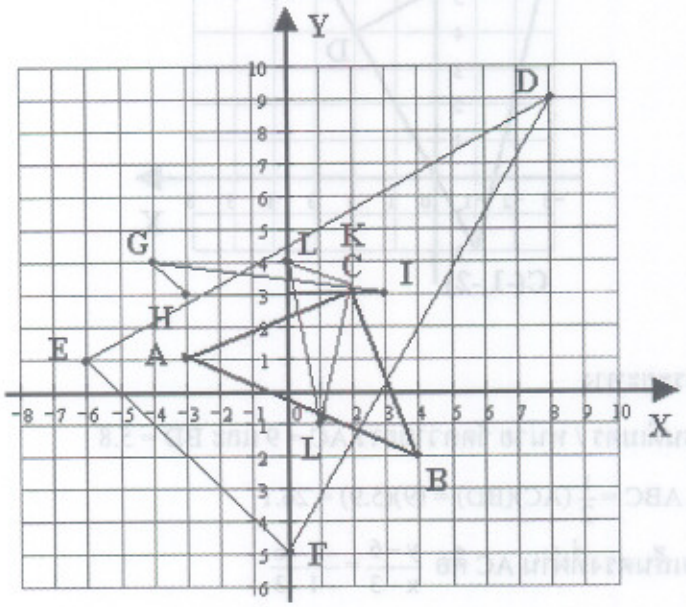
1. (–3 , 1) , (4 , –2) , (2 , 3)
2. (8 , 9) , (–6 , 1) , (0 , –5)
3. (–4 , 4) , (–3 , 3) , (3 , 3)
4. (–1 , 1) , (2 , 3) , (0 , 4)

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วิธีที่ดีที่สุดคือวาดรูปตามพิกัดของตัวเลือก

ตัวเลือก 1. A(–3 , 1) , B(4 , –2) , C(2 , 3) ตัวเลือก 2. D(8 , 9) , E(–6 , 1) , F(0 , –5)

ตัวเลือก 3. G(–4 , 4) , H(–3 , 3) , I(3 , 3) ตัวเลือก 4. J(–1 , 1) , K(2 , 3) , L(0 , 4)



จากรูป DEF , GHI , JKL ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากแน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $A\hat{C}B = 90^{o}$ เพราะฉะนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีจริง ใช้ความชันของ AC และ BC มาช่วยในการหาคำตอบ

ความชัน AC $= \frac{3-1}{2-(-3)} = \frac{2}{5}$ ความชัน BC $= \frac{3-(-2)}{2-4} = \frac{-5}{2}$

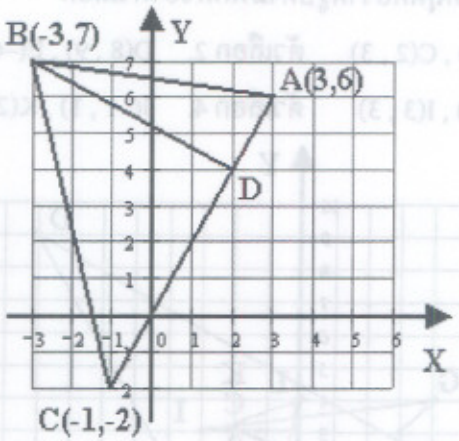
เพราะว่า (ความชัน AC) (ความชัน BC) = –1 เพราะฉะนั้น $A\hat{C}B = 90^{o}$

ตัวอย่างที่ 5.6 กำหนด A (3 , 6) , B (–3 , 7) , C (–1 , –2) สามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่เท่าใด

1. $\frac{13\sqrt{83}}{2}$
2. $\frac{13\sqrt{83}}{5}$
3. $\frac{13\sqrt{83}}{\sqrt{10}}$
4. $\frac{13\sqrt{83}}{2\sqrt{5}}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก



วาดรูปแล้วใช้วัดระยะทาง

โดยใช้เสกล 1 เซนติเมตร / หน่วย วัดความยาว AC = 9 และ BD = 5.8

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}(AC)(BD) = (9)(5.9) = 26.1$

วิธีจริง สมการเส้นตรงที่ผ่าน AC คือ $\frac{y-6}{x-3} = \frac{-2-6}{-1-3}$

$$2x - y = 0$$

ความยาว AC $= \sqrt{(3-(-1))^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{83}$

ระยะทางจาก B มายังแนว AC เท่ากับระยะทางจากจุด B มายังเส้นตรง $2x - y = 0$ เท่ากับ

$$\frac{|2(-3) - 1(7)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{5}}$$

พื้นที่สามเหลี่ยม ABC $= \frac{1}{2}(AC)(ED) = \frac{1}{2}(\sqrt{83})(\frac{13}{\sqrt{5}})$

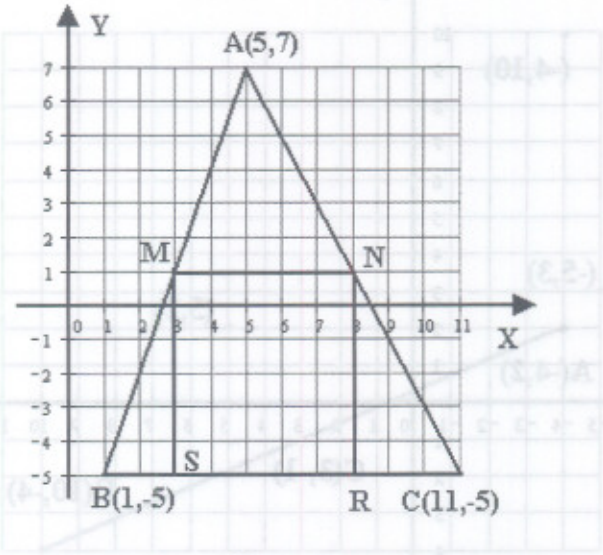
$$= \frac{13\sqrt{83}}{2\sqrt{5}}$$

ตัวอย่างที่ 5.7 กำหนดให้ A(5 , 7) , B(1 , –5) , C(11 , –5) MNRS เป็นสี่เหลี่ยมบรรจุอยู่ในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ M , N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ AC และ R , S อยู่บนด้าน BC พื้นที่ สี่เหลี่ยม MNRS เท่ากับเท่าใด

1. 22
2. 24
3. 28
4. 30

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปแล้ววัดระยะทางตามขั้นตอนดังนี้



1. เขียนจุด A , B และ C แล้ว ลากสามเหลี่ยม ABC
2. แบ่งครึ่งด้าน AB และ AC ด้วยไม้บรรทัดที่จุด M , N ตามลำดับ
3. ลาก MS ตั้งฉากกับ BC
4. วัดความยาวได้ MN = 5 และ MS = 6 พื้นที่สี่เหลี่ยม MNRS = (MN)(MS) = (5)(6) = 30

   สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง เพราะว่า M , N เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AB และ AC เพราะฉะนั้น MN ขนานกับ BC และ

พิกัด M = $(\frac{5+1}{2}, \frac{7-5}{2})$ = (3 , 1) พิกัด N = $(\frac{5+11}{2}, \frac{7-5}{2})$ = (8 , 1)

เพราะว่า MNRS เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า เพราะฉะนั้น S , R อยู่บนเส้นตรง BC และ

พิกัดของ S และ R คือ S (3 , –5) และ R (8 , –5) ดังนั้น MN = 6 และ SR = 5

สรุปพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้า MNRS เท่ากับ (MN)(SR) = (6)(5) = 30

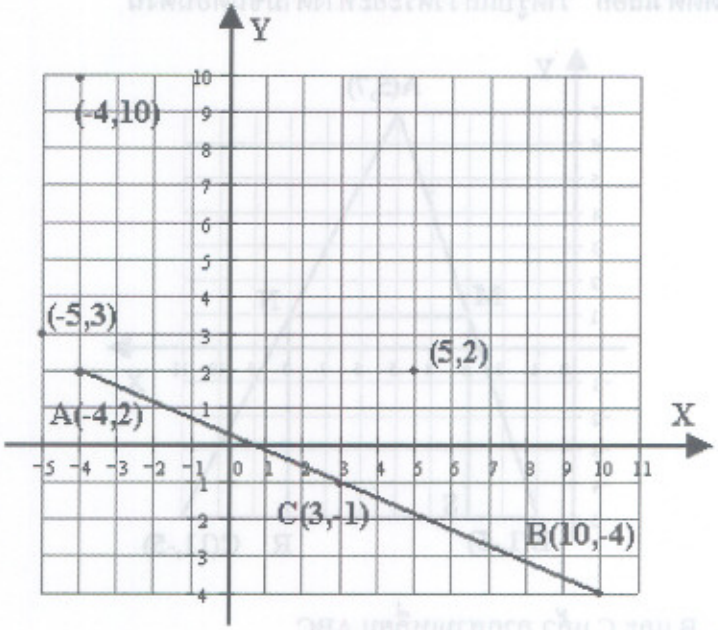
ตัวอย่างที่ 5.8 กำหนดให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรง AB

ถ้าพิกัดของ A(–4 , 2) และ C(3 , –1) แล้วพิกัดของจุด B คือข้อใด

1. (10 , – 4)
2. (– 4 , 10)
3. (– 5 , 3)
4. (5 , 2)

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก



เขียนรูปและจุด A (–4 , 2) ,C (3 , –1) กับจุดในทุกตัวเลือก ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว จากรูปเลือกพิกัด B เป็น (10 , –4) ดีกว่า

วิธีจริง ให้ A (–4 , 10) , C (3 , –1) สมมติ B มีพิกัดเป็น (x , y)

เพราะว่า C เป็นจุดกึ่งกลางของ AB

เพราะฉะนั้น $(3 , -1) = (\frac{x+(-4)}{2}, \frac{y+2}{2})$

ดังนั้น $3 = \frac{x-4}{2}$ และ $-1 = \frac{y+2}{2}$ จะได้ $x = 10$ และ $y = -4$

สรุปพิกัด B คือ (10 , – 4)

ตัวอย่างที่ 5.9 สามเหลี่ยม PQR มีมุม $P\hat{Q}R$ เป็นมุมฉากและด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ 10 cm. ถ้าพิกัด P และ Q คือ (–4 , 3) และ (–1 , 2) ตามลำดับ พิกัดของจุด R คือตัวเลือกใด

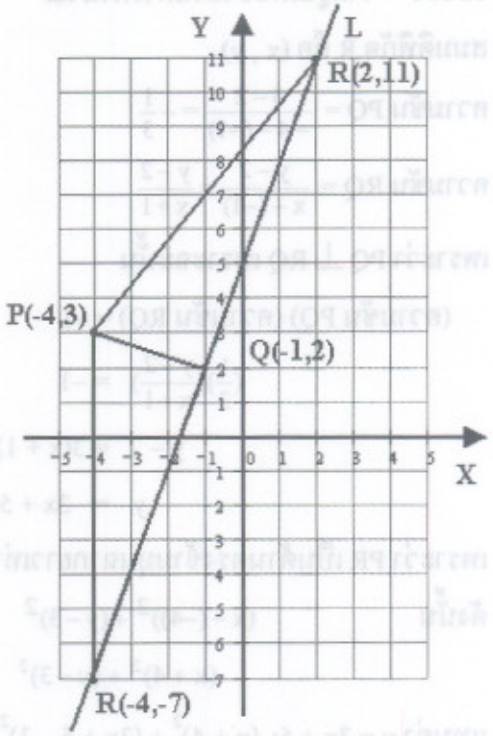
1. (– 4 , 11)
2. (4 , 17)
3. (–2 , –1)
4. (2 , 11)

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

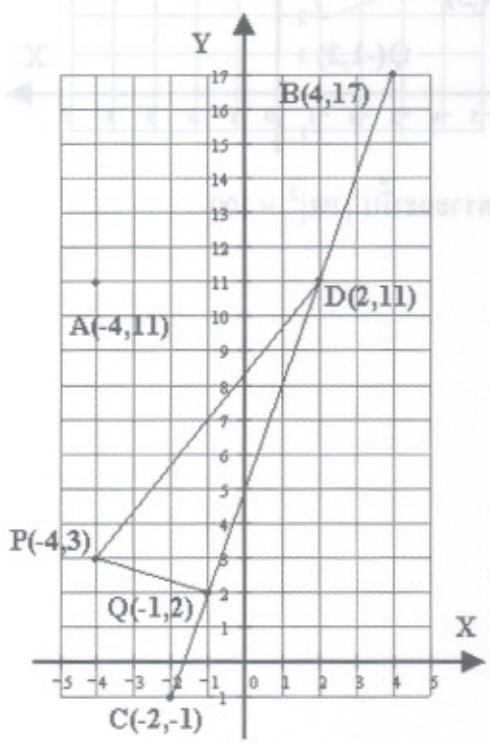
วาดรูปตามขั้นตอนดังนี้

1. เขียนจุด P(–4 , 3) และ (–1 , 2)
2. ลากเส้นตรง L ผ่านจุด Q และตั้งฉากกับ PQ
3. กางวงเวียนรัศมี 10 cm จุดศูนย์กลางที่ P
   และตัดเส้นตรง L ที่จุด R(ด้านบนหรือล่าง)
   แล้ววัดพิกัดของจุดจะได้ R
   มีพิกัดเป็น (2 , 11) หรือ (–4 , –7)
   สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า



การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เขียนจุด P , Q และ
จุดในตัวเลือกทุกตัวเลือก
วัดระยะทางด้วยไม้บรรทัด
จะได้ PD เท่านั้นที่ยาวเท่ากับ 10 cm.
สรุปเลือกพิกัด R คือ (2 , 11) ดีกว่า



การตัดตัวเลือก แบบที่ 3

คำนวณเฉพาะระยะทางระหว่างจุดในตัวเลือกกับจุด P(–4 , 3)

ตัวเลือก 1. A(–4 , 11) ; $|AP| = 8$

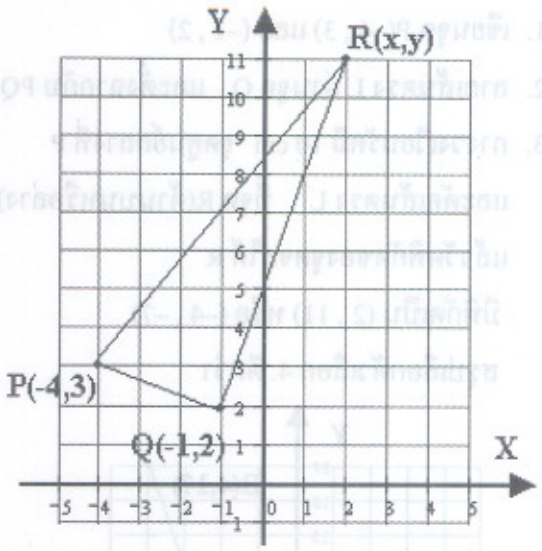
ตัวเลือก 2. B(4 , 17) ; $|BP| = \sqrt{(4-(-4))^2 + (17-3)^2} \neq 10$

ตัวเลือก 3. C(–2 , –1) ; $|CP| = \sqrt{(-2-(-4))^2 + (-1-3)^2} \neq 10$

ตัวเลือก 4. D(2 , 11) ; $|DP| = \sqrt{(2-(-4))^2 + (11,3)^2} = 10$

เพราะว่า PR ต้องยาวเท่ากับ 10 cm. เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 3 ทิ้งได้

วิธีจริง วาดรูปเพื่อช่วยในการคำนวณ



สมมติพิกัด R คือ (x , y)

ความชัน $PQ = \frac{3-2}{-4-(-1)} = -\frac{1}{3}$

ความชัน $RQ = \frac{y-2}{x-(-1)} = \frac{y-2}{x+1}$

เพราะว่า PQ $\perp$ RQ เพราะฉะนั้น

(ความชัน PQ) (ความชัน RQ) $= -1$

$$(\tfrac{1}{3})(\tfrac{y-2}{x+1}) = -1$$

$$y - 2 = 3(x + 1)$$

$$y = 3x + 5$$

เพราะว่า PR เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่ากับ 10 เพราะฉะนั้น $|PR|^2 = 100$

ดังนั้น $$(x-(-4))^2 + (y-3)^2 = 100$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 100$$

แทนค่า $y = 3x + 5$; $$(x+4)^2 + (3x+5-3)^2 = 100$$

$$(x+4)^2 + (3x+2)^2 = 100$$

$$x^2 + 8x + 16 + 9x^2 + 12x + 4 = 100$$

$$10x^2 + 20x + 20 = 100$$

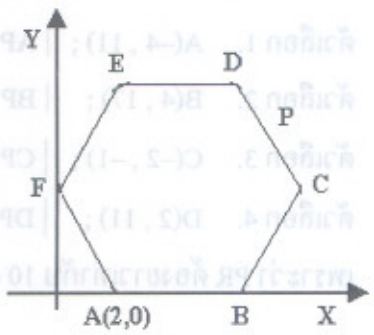
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x+4)(x-2) = 0$$

$$x = -4 , 2$$

จาก $y = 3x + 5$ จะได้ $y = -7 , 11$ สรุปพิกัด R คือ $(-4 , -7)$ หรือ $(2 , 11)$

ตัวอย่างที่ 5.10 ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่า ดังรูป ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน CD แล้วพิกัดจุด P ตรงกับตัวเลือกใด

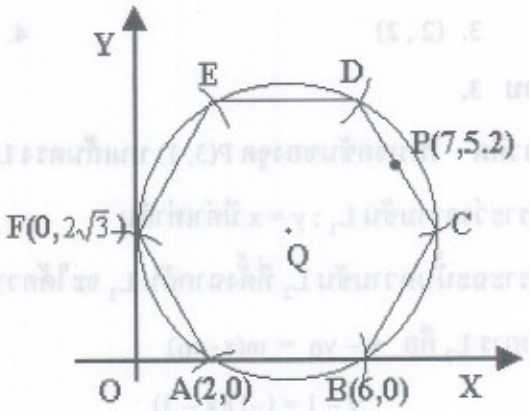


1. $(8 , 3\sqrt{3})$
2. $(8 , 2\sqrt{3})$
3. $(7 , 3\sqrt{3})$
4. $(7 , 2\sqrt{3})$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทาง

1. เขียนจุด A(2 , 0) และลากเส้น AF เพื่อให้ $O\hat{A}F = 60^\circ$
2. วัดความยาว AF ได้ 4 หน่วย
3. กางวงเวียนรัศมี 4 หน่วย จุดศูนย์กลางที่ A , F ตัดกันที่จุด Q จะได้ Q เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่าน AF
4. กางวงเวียนรัศมี 4 หน่วยแล้วแบ่งวงกลมในข้อ 3 ออกเป็น 6 ส่วนเท่าๆ กันที่ B , C , D , E จะได้ ABCDEF เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่าตามข้อกำหนดของโจทย์



5. แบ่งครึ่งด้าน CD ด้วยไม้บรรทัด ที่จุด P วัดพิกัดจุด P ได้เป็น (7 , 5.2)

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

เพราะว่า $3\sqrt{3} = 3(1.7) = 5.1$ และ $2\sqrt{3} = 2(1.7) = 3.4$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. $P(7 , 3\sqrt{3})$ ดีกว่า

วิธีจริง เพราะว่า ABCDEF เป็นหกเหลี่ยมด้านเท่า เพราะฉะนั้น $B\hat{A}F = 120^\circ$

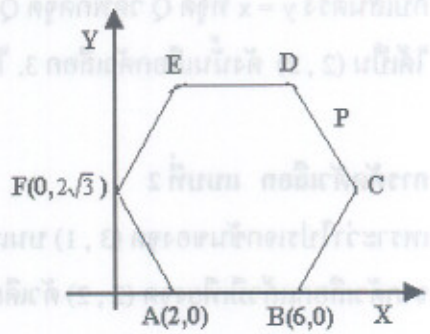
ดังนั้น $O\hat{A}F = 60^\circ$ เพราะว่า $\cos O\hat{A}F = \frac{OA}{AF}$

และ $\tan O\hat{A}F = \frac{OF}{OA}$

เพราะฉะนั้น $AF = \frac{OA}{\cos O\hat{A}F} = \frac{2}{\cos 60^\circ} = \frac{2}{(\frac{1}{2})} = 4$

และ $OF = (OA)\tan O\hat{A}F = (2)\tan 60 = 2\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นพิกัด F คือ $(0 , 2\sqrt{3})$



เพราะว่า AB = AF = 4 เพราะฉะนั้นพิกัด B คือ (6 , 0)

เพราะว่า FC = 2(AF) = 2(4) = 8 เพราะฉะนั้นพิกัด C คือ $(8 , 2\sqrt{3})$

เพราะว่า $BD = 2(OF) = 2(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$ เพราะฉะนั้นพิกัด D คือ $(6 , 4\sqrt{3})$

เพราะว่า P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน CD

เพราะฉะนั้นพิกัด P คือ $(\frac{6+8}{2} , \frac{4\sqrt{3}+2\sqrt{3}}{2}) = (7 , 3\sqrt{3})$

ตัวอย่างที่ 5.11 โปรเจคชันของจุด (3 , 1) บนเส้นตรง y = x คือข้อใด

1. (0 , 2)
2. (2 , 0)
3. (2 , 2)
4. (1 , 2)

ตอบ 3.

แนวคิด โปรเจคชันของจุด P(3, 1) บนเส้นตรง L_1 คือจุดตัดของ L_2 ที่ตั้งฉากกับ L_1 และผ่านจุด P

เพราะว่าความชัน L_1 : y = x มีค่าเท่ากับ 1

เพราะฉะนั้นความชัน L_2 ที่ตั้งฉากกับ L_1 จะได้ความชัน L_2 เท่ากับ –1

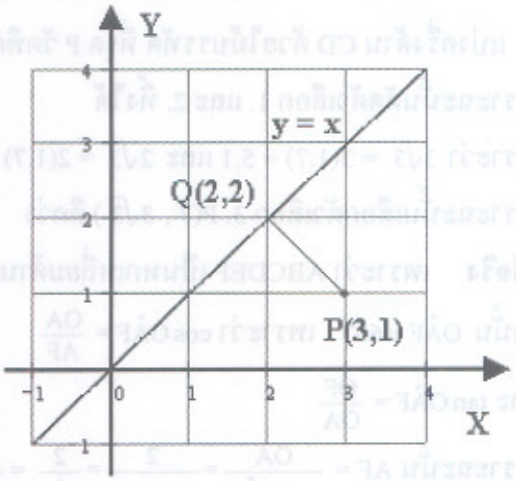
สมการ L_2 คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 1 = (-1)(x - 3)$$

แทนค่า y = x เพื่อหาจุดตัด $x - 1 = (-1)(x - 3) = -x + 3$ จะได้ x = 2 และ y = 2 สรุปโปรเจคชันจุด P(3 , 1) บนเส้นตรง y = x คือ (2 , 2)

การตัดตัวเลือก แบบที่ 1

ใช้การวาดรูปและวัดพิกัดของจุด ลากเส้นจากจุด P(3 , 1) มาตั้งฉากกับเส้นตรง y = x ที่จุด Q วัดพิกัดจุด Q ได้เป็น (2 , 2) ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. ได้



การตัดตัวเลือก แบบที่ 2

เพราะว่าโปรเจกชันของจุด (3 , 1) บนเส้นตรง y = x ต้องมีพิกัดตัวหน้าและตัวหลังเท่ากัน ซึ่งเมื่อดูจากตัวเลือกแล้วมีเพียงจุด (2 , 2) ตัวเดียวเท่านั้น ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 4 ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 5.12 ถ้า A(–7 , –5) , B (3 , 7) , C (6 , 1) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุด B ไปยังด้าน AC ยาวเท่ากับเท่าใด

1. 9
2. $\frac{\sqrt{149}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{273}}{2}$
4. $\frac{\sqrt{373}}{2}$

ตอบ 4.

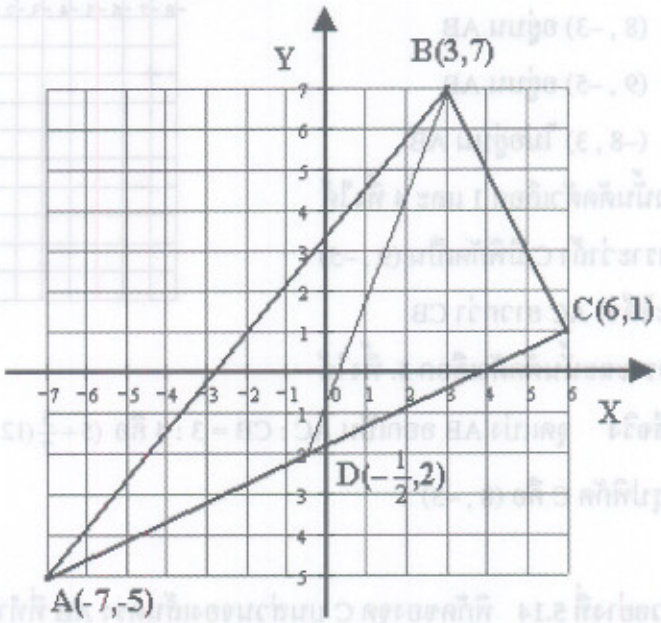
แนวคิด การตัดตัวเลือก เขียนรูปช่วยในการคำนวณ

1. วาดรูปจริงโดยใช้สเกล 1 เซนติเมตรต่อหน่วย
2. แบ่งครึ่งด้าน AC
3. วัดความยาว BD ได้ 9.7

เปรียบเทียบค่า $(9.7)^2 = 94.09$

กับทุกตัวเลือก

1. $(9)^2 = 81$
2. $(\frac{\sqrt{149}}{2})^2 = \frac{149}{4} = 37.25$
3. $(\frac{\sqrt{273}}{2})^2 = \frac{273}{4} = 68.25$
4. $(\frac{\sqrt{373}}{2})^2 = \frac{373}{4} = 93.25$



สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง หาจุดกึ่งกลาง AC

ได้เป็น $(\frac{-7+6}{2}, \frac{-5+1}{2}) = (-\frac{1}{2}, -2)$

ให้ D $(-\frac{1}{2}, -2)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ AC ความยาว BD เท่ากับ

$$= \sqrt{(3-(-\frac{1}{2}))^2 + (7-(-2))^2} = \sqrt{(\frac{7}{2})^2 + 81}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4} + 81} = \sqrt{\frac{49+324}{4}} = \sqrt{\frac{373}{4}} = \frac{\sqrt{373}}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5.13 จุด A(5 , 3) และ B(12 , –11) เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรง AB C เป็นจุดที่แบ่ง AC : CB เป็น 3 : 4 พิกัด C เท่ากับเท่าใด

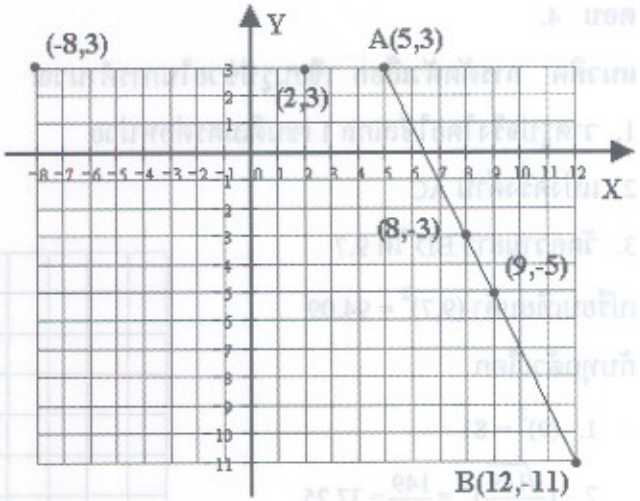
1. (2 , 3)
2. (8 , –3)
3. (9 , –5)
4. (–8 , 3)

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

เขียนจุดตามโจทย์กำหนด

และเขียนจุดแต่ละตัวเลือก



1. (2 , 3) ไม่อยู่บน AB
2. (8 , –3) อยู่บน AB
3. (9 , –5) อยู่บน AB
4. (–8 , 3) ไม่อยู่บน AB

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 4 ทิ้งได้

เพราะว่าถ้า C มีพิกัดเป็น (9 , –5)

จะได้ว่า AC ยาวกว่า CB

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จุดแบ่ง AB ออกเป็น AC : CB = 3 : 4 คือ $(5+\frac{3}{7}(12-5), 3+\frac{3}{7}(-11-3)) = (8,-3)$

สรุปพิกัด C คือ (8 , –3)

ตัวอย่างที่ 5.14 พิกัดของจุด C บนส่วนของเส้นตรง AB ที่ทำให้ $5\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ เมื่อ A (–2 , –1) และ B (3 , 3) คือพิกัดในตัวเลือกใด

1. $(-1, \frac{-1}{5})$
2. $(2, \frac{11}{5})$
3. $(1, \frac{1}{5})$
4. $(2, \frac{-11}{5})$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปและเขียน

จุดในแต่ละตัวเลือกจากรูป $(1, \frac{1}{5})$ และ $(2, \frac{-11}{5})$

ไม่อยู่บนเส้นตรง AB

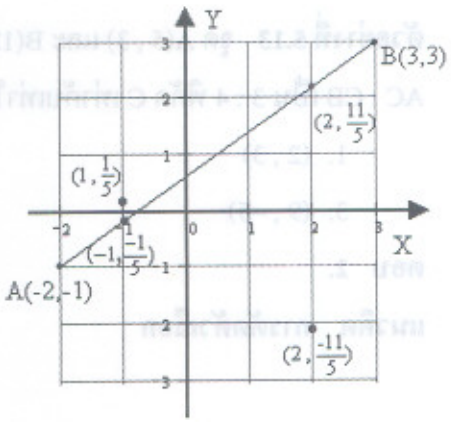
ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง จากเงื่อนไข

$5\left|\overline{BC}\right| = \left|\overline{AB}\right|$ จะได้ว่า $\left|\overline{BC}\right| < \left|\overline{AC}\right|$

เพราะว่าถ้า C มีพิกัดเป็น $(-1, \frac{-1}{5})$

จะได้ว่า $|\overline{BC}| \not< |\overline{AC}|$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้



วิธีจริง เพราะว่า $5\left|\overline{BC}\right|=\left|\overline{AB}\right|$ เพราะฉะนั้น $\left|\overline{BC}\right|=\frac{1}{5}\left|\overline{AB}\right|$ ดังนั้น $\left|\overline{AC}\right|:\left|\overline{CB}\right|=4:1$

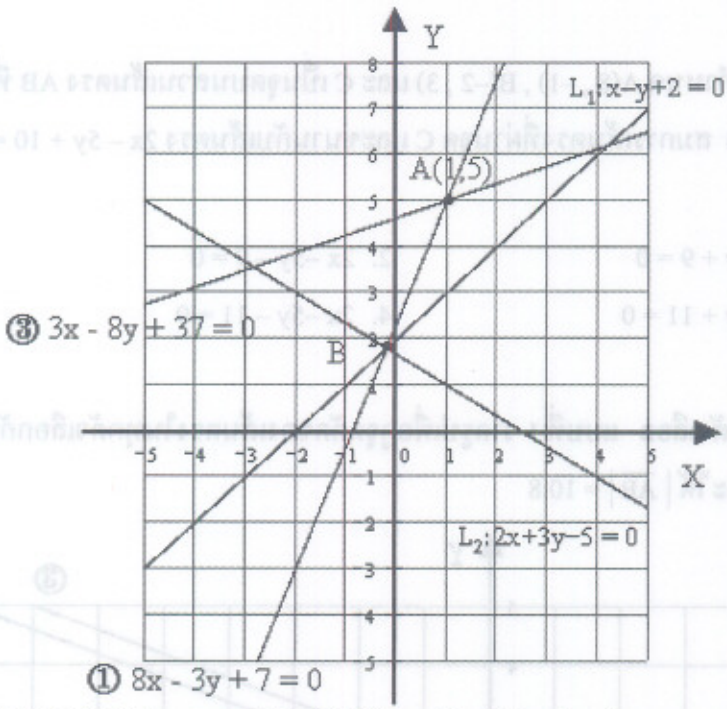
พิกัดของจุด C คือ $(-2+\frac{4}{(4+1)}(3-(-2)),-1+\frac{4}{(4+1)}(3-(-1)))=(-2+4,-1+\frac{16}{5})=(2,\frac{11}{5})$

ตัวอย่างที่ 5.15 เส้นตรงที่ผ่านจุด A(1,5) และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x-y+2=0$ กับเส้นตรง $2x+3y-5=0$ คือเส้นตรงในตัวเลือกใด

1. $8x-3y+7=0$
2. $8x+3y-23=0$
3. $3x-8y+37=0$
4. $3x+2y-43=0$

ตอบ 1.

แนวคิด



ให้ B เป็นจุดตัดของเสนตรง $L_1: x-y+2=0$ และ $L_2: 2x+3y-5=0$

โดยการแก้สมการ $x-y+2=0$ และ $2x+3y-5=0$ จะได้ $x=\frac{-1}{5}$ และ $y=\frac{9}{5}$

ดังนั้นพิกัดของจุด B คือ $(\frac{-1}{5},\frac{9}{5})$ เส้นตรงที่ผ่านจุด A , B มีสมการเป็น $\frac{y-5}{x-1}=\frac{\frac{9}{5}-5}{\frac{-1}{5}-1}=\frac{-16}{-6}$

$$6y-30 = 16x-16$$
$$16x-6y+14 = 0$$
$$8x-3y+7 = 0$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก เขียนรูปและดูจุดตัดจากรูปจะเห็นว่าเส้นตรง AB มีความชันเป็นบวก ต่อไปดูจากตัวเลือกจะเห็นว่าตัวเลือกแต่ละตัวมีความชันเป็น

1. ความชัน $= \frac{8}{3}$
2. ความชัน $= \frac{-8}{3}$
3. ความชัน $= \frac{3}{8}$
4. ความชัน $= \frac{-3}{8}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งไปก่อน

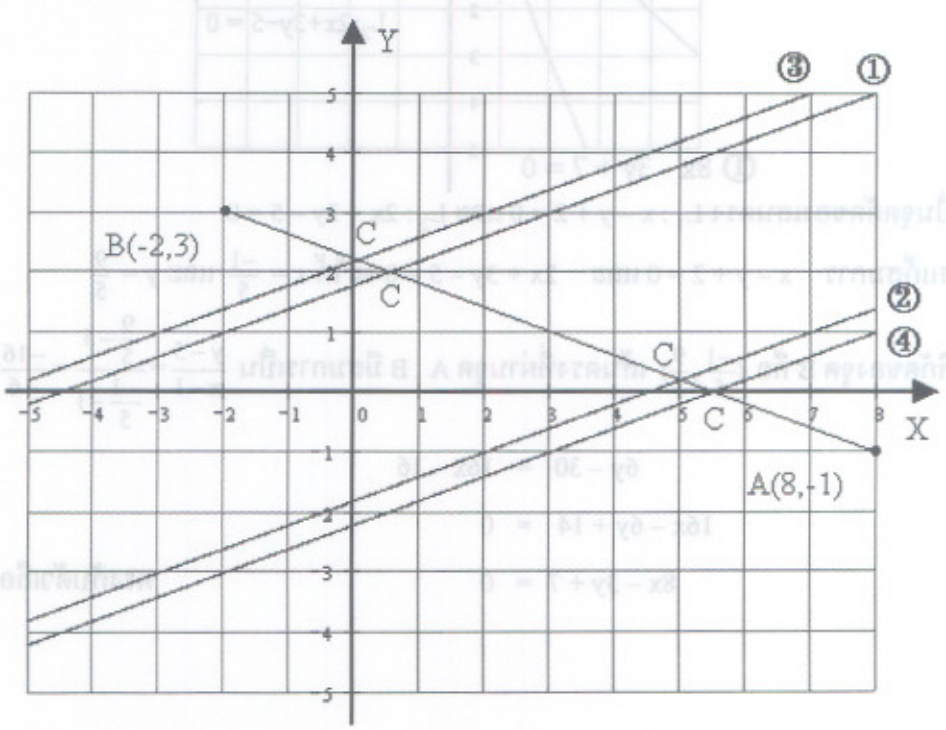
จากรูปจะเห็นว่าเส้นตรงจากตัวเลือก 3. $3x - 8y + 37 = 0$ ไม่ผ่านจุดตัดของ L_1 และ L_2 ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 5.16 กำหนด A(8 , –1) , B(–2 , 3) และ C เป็นจุดบนส่วนเส้นตรง AB ที่ทำให้ $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 3:4$ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด C และขนานกับเส้นตรง $2x - 5y + 10 = 0$ คือสมการในตัวเลือกใด

1. $2x - 5y + 9 = 0$
2. $2x - 5y - 9 = 0$
3. $2x - 5y + 11 = 0$
4. $2x - 5y - 11 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 วาดรูปเพื่อดูจุดตัดของเส้นตรงในทุกตัวเลือกกับเส้น AB โดยการวัดระยะทางจะได้ $|\overline{AB}| = 10.8$



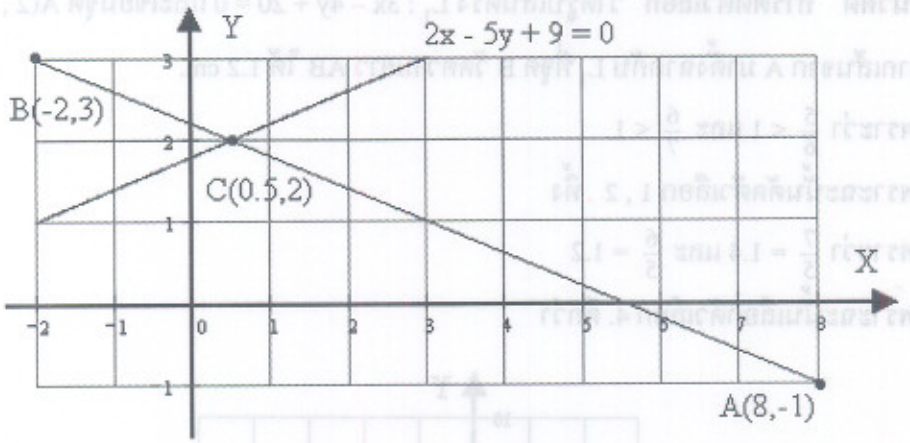
เพราะว่า $|\overline{AB}| = 10.8$ และ $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 3:4$ เพราะฉะนั้น $|\overline{AC}| = \frac{3}{4}|\overline{AB}| = \frac{3}{4}(10.8) = 8.1$

วัดระยะทาง $|\overline{AC}|$ จากจุดตัดของแต่ละตัวเลือกกับเส้น AB จะได้

1. $|\overline{AC}| = 8.1$
2. $|\overline{AC}| = 3.3$
3. $|\overline{AC}| = 8.7$
4. $|\overline{AC}| = 2.8$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. ดีกว่า

วิธีจริง



เพราะว่า $|\overline{AC}| : |\overline{AB}| = 3:4$ เพราะฉะนั้น $|\overline{BC}| : |\overline{CA}| = 1:3$

พิกัดของ C เท่ากับ $(-2+\frac{1}{1+3}(8-(-2)), 3+\frac{1}{1+3}(-1-3)) = (-2+\frac{10}{4}, 3-1) = (\frac{1}{2}, 2)$

เส้นตรง $2x - 5y + 10 = 0$ มีความชันเท่ากับ $\frac{2}{5}$

สมการเส้นตรงที่ต้องการคือ

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$
$$y - 2 = (\tfrac{1}{2})(x - \tfrac{1}{2})$$
$$5y - 10 = 2x - 1$$
$$2x - 5y + 9 = 0$$

ตรงกับตัวเลือก 1.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เมื่อใดพิกัด $C(\frac{1}{2}, 2)$ ให้นำพิกัด C ไปแทนค่าในทุกตัวเลือกเพื่อดูว่าจุด C อยู่บนเส้นตรงของตัวเลือกใด

1. $2(\frac{1}{2}) - 5(2) + 9 = 0$
2. $2(\frac{1}{2}) - 5(2) - 9 = -18 \neq 0$
3. $2(\frac{1}{2}) - 5(2) + 11 = 2 \neq 0$
4. $2(\frac{1}{2}) - 5(2) - 11 = -20 \neq 0$

เพราะฉะนั้นจุด C ไม่อยู่บนเส้นตรงของตัวเลือก 2. , 3. และ 4. เราจึงตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 5.17 เส้นตรงที่ผ่านจุด A(2 , 8) และขนานกับเส้นตรง $L_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ จะห่างจากเส้นตรง L_1 เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{5}{6}$
2. $\frac{6}{7}$
3. $\frac{7}{5}$
4. $\frac{6}{5}$

ตอบ 4.

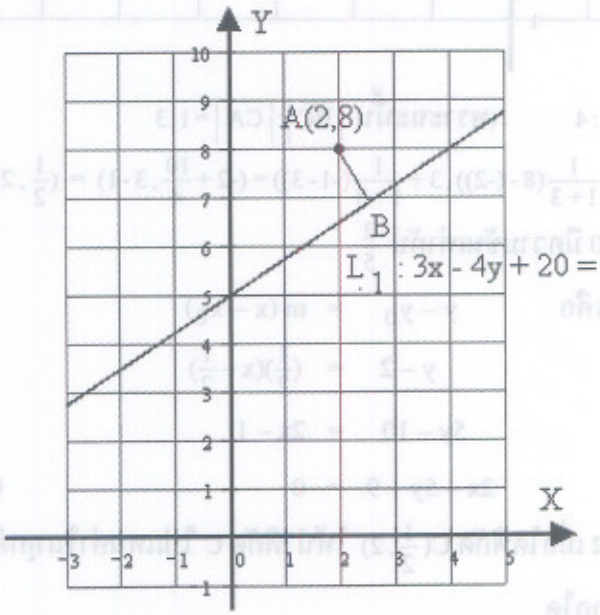
แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปเส้นตรง $L_1 : 3x - 4y + 20 = 0$ และเขียนจุด A(2 , 8) ลากเส้นจาก A มาตั้งฉากกับ L_1 ที่จุด B วัดความยาว AB ได้ 1.2 cm.

เพราะว่า $\frac{5}{6} < 1$ และ $\frac{6}{7} < 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 ทิ้ง

เพราะว่า $\frac{7}{5} = 1.4$ และ $\frac{6}{5} = 1.2$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า



วิธีจริง เพราะว่าระยะห่างของเส้นตรงที่ผ่านจุด A ที่ขนานกับ L_1 มีค่าเท่ากับระยะห่างจากจุด A ไปยังเส้นตรง L_1 ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|(3)(2) - (4)(8) + 20|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{5}$

ตัวอย่างที่ 5.18 สมการเส้นตรง L ที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $L_1 : x - 7y - 11 = 0$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $L_1 : x - 7y - 11 = 0$ กับ $L_2 : 3x + 5y - 7 = 0$ คือข้อใด

1. $x - 7y - 27 = 0$
2. $x + 7y + 27 = 0$
3. $7x - y - 27 = 0$
4. $7x + y - 27 = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามในแนวนี้ใช้การวาดรูปและเหตุผลเรื่องความชัน และ ระยะตัดแกน X กับระยะตัดแกน Y ช่วยในการตัดตัวเลือกได้เป็นอย่างดี

จากรูป เพราะว่าความชัน L_1 มีค่าเป็นบวก

เพราะฉะนั้นความชัน L ต้องมีค่าเป็นลบ คำนวณค่าความชันแต่ละตัวเลือกได้เป็น

1. $m = \frac{1}{7}$
2. $m = \frac{-1}{7}$
3. $m = 7$
4. $m = -7$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

เพราะว่า (ความชัน L) (ความชัน L_1) $= -1$ และ ความชัน $L_1 = \frac{1}{7}$

เพราะฉะนั้นความชัน L ต้องเท่ากับ -7

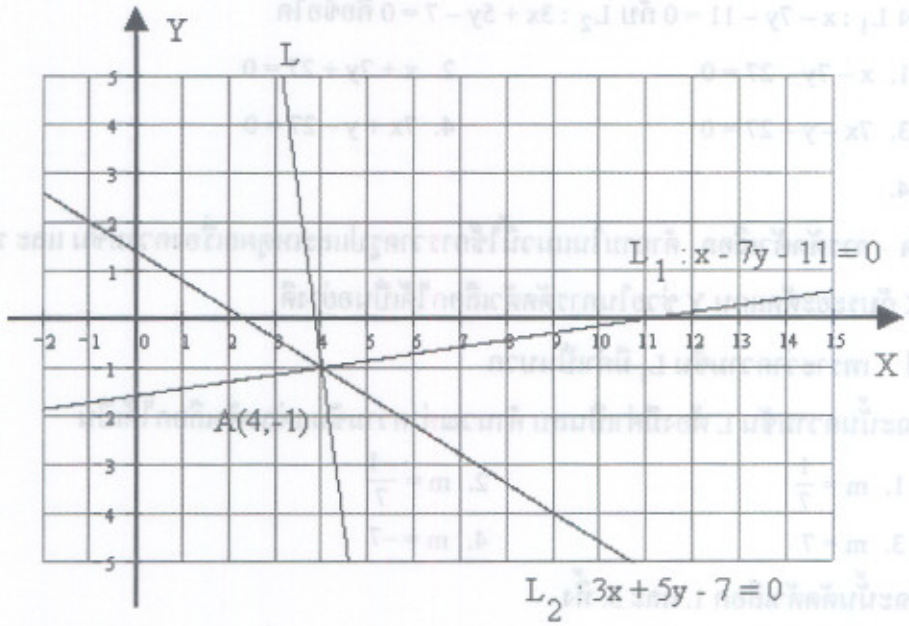
ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

หมายเหตุ ดูจากรูปจะเห็นว่าเส้นตรง L ตัดแกน X ทางด้านบวกและตัดแกน Y ทางด้านบวกดังนั้นดูจากจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ก็ตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก	จุดตัดแกน X.	จุดตัดแกน Y
1	(+ , 0)	(0 , –)
2	(– , 0)	(0 . –)
3	(+ , 0)	(0 , –)
4	(+ , 0)	(0 , +)

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 , และ 3 ทิ้งได้

เขียนรูปช่วยในการคำนวณเป็นวิธีที่ดีที่สุด



จุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2 หาจากการแก้สมการ $L_1 : x - 7y - 11 = 0$

$L_2 : 3x + 5y - 7 = 0$

จะได้ $x = 4$ และ $y = -1$ ให้ $A(4, -1)$ เป็นจุดตัดของ L_1 กับ L_2

เพราะว่า L ตั้งฉากกับ L_1 และความชัน L_1 เท่ากับ $\frac{1}{7}$

เพราะฉะนั้นความชัน L เท่ากับ -7

ดังนั้นสมการของเส้นตรง L คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - (-1)) = (-7)(x - 4)$$

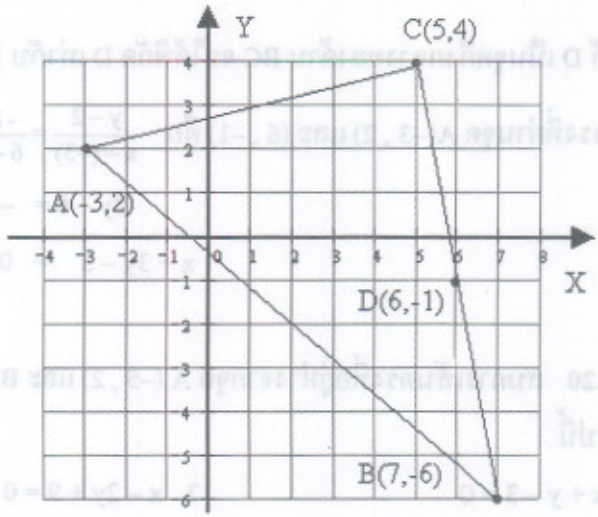
$$7x + y - 27 = 0$$

ตัวอย่างที่ 5.19 สามเหลี่ยม ABC มีพิกัดของจุดยอดเป็น $A(-3, 2)$, $B(7, -6)$ และ $C(5, 4)$ จะมีสมการของเส้นมัธยฐานที่ลากจุด A ไปยังด้าน BC ตรงกับสมการเส้นตรงในตัวเลือกใด

1. $3x + y - 3 = 0$
2. $x + 3y - 3 = 0$
3. $3x - y - 9 = 0$
4. $x + 3y - 9 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก



วาดรูปและเขียนจุด A(–3 , 2) , B(7 , –6) , C(5 , 4) และแบ่งครึ่งด้าน BC ที่จุด D (แบ่งครึ่งด้วยไม้บรรทัดก็ได้) ต่อไปลากเส้นตรง AD มีความชันเป็นลบ ต่อไปดูค่าความชันแต่ละตัวเลือก

1. $m = -3$
2. $m = \frac{-1}{3}$
3. $m = 3$
4. $m = \frac{-1}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งไปก่อน

โดยการวัดระยะจุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y จะได้ (3 , 0) เป็นจุดตัดแกนX และ (0 , 1) เป็นจุดตัดแกน Y ต่อไปดูจุดตัดแกนของแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y
1.	(1 , 0)	(0 , 3)
2.	(3 , 0)	(0 , 1)
3.	(3 , 0)	(0 , –9)
4.	(9 , 0)	(0 , 3)

สรุปเลือกตัวเลือก 2 ดีกว่า

หมายเหตุ เพียงนำจุด A แทนค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้แล้ว

1. $3x + y - 3 = 3(-3) + 2 - 3 = -10 \neq 0$
2. $x + 3y - 3 = -3 + 3(2) - 3 = 0$
3. $3x - y - 9 = 3(-3) - 2 - 9 = -20 \neq 0$
4. $x + 3y - 9 = (-3) + 3(2) - 9 = -6 \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC จะได้พิกัด D เท่ากับ $\left(\frac{5+7}{2}, \frac{4-6}{2}\right) = (6, -1)$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A(–3 , 2) และ (6 , –1) คือ $\frac{y-2}{x-(-3)} = \frac{-1-2}{6-(-3)} = \frac{-1}{3}$

$$3y - 6 = -x - 3$$

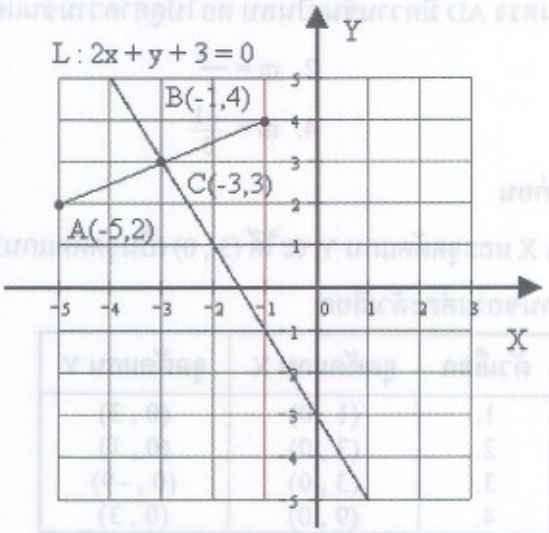
$$x + 3y - 3 = 0$$

ตัวอย่างที่ 5.20 สมการเส้นตรงที่อยู่ห่างจากจุด A (–5 , 2) และ B (–1 , 4) เท่ากัน คือสมการในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. $2x + y - 3 = 0$
2. $x - 2y + 9 = 0$
3. $2x + 3y - 6 = 0$
4. $2x + y + 3 = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด วิธีจริง



เส้นตรงที่ห่างจาก A และ B เท่ากัน คือเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลาง AB และตั้งฉากกับ AB ให้ C เป็นจุดกึ่งกลางของ A , B จะได้ว่าพิกัดของจุด C คือ $\left(\frac{-5-1}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = (-3, 3)$

ความชัน AB เท่ากับ $\frac{2-4}{-5(-1)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

ให้เส้นตรง L ผ่านจุด C และตั้งฉากกับ AB เพราะฉะนั้นความชัน L เท่ากับ –2

สรุปสมการเส้นตรง L คือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 3 = (-2)(x - (-3))$$

$$2x + y + 3 = 0$$

การตัดตัวเลือก มีเหตุผลมากมายที่จะใช้ในการตัดตัวเลือกโจทย์ข้อนี้เช่น

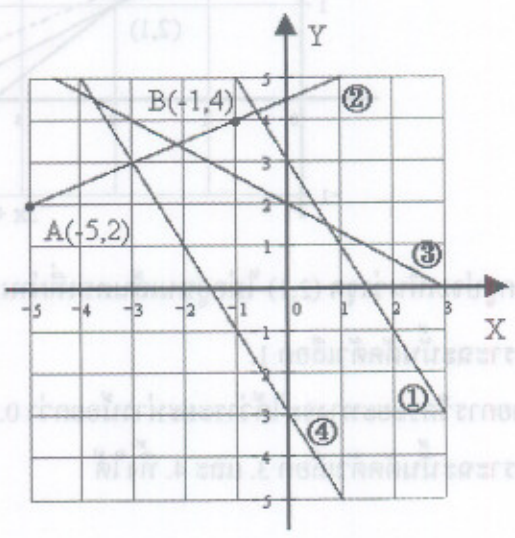
1. จากรูปความชันเส้นตรง L ต้องมีค่าเป็นลบ
   แต่ความชันของเส้นตรงในตัวเลือก 2. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง
2. เพราะว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด (–3 , 3) ดังนั้นนำค่า x =–3, y = 3
   แทนค่าในตัวเลือกเพื่อดูว่าจุด (–3 , 3) อยู่บนเส้นตรงหรือไม่
   1. $2x + y - 3 = 2(-3) + 3 - 3 = -6 \neq 0$
   2. $x - 2y + 9 = -3 - 2(3) + 9 = 0$
   3. $2x + 3y - 6 = 2(-3) + 3(3) - 6 = -3 \neq 0$
   4. $2x + y + 3 = 2(-3) + 3 + 3 = 0$

   ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. ทิ้งได้
3. ใช้จุดตัดแกน X และจุดตัดแกน Y ของรูปที่วาดช่วยในการตัดตัวเลือก โดยการวัดระยะทางจะได้ว่าเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุด (–1.5 , 0) และตัดแกน Y ที่จุด (0 , –3)

ตัวเลือก	จุดตัดแกน X	จุดตัดแกน Y
1.	(1.5 , 0)	(0 , 3)
2.	(–9 , 0)	(0 , –4.5)
3.	(3 , 0)	(0 , 2)
4.	(–1.5 , 0)	(0 , –3)

สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

4. นำเส้นตรงในตัวเลือกมาวาดรูปแล้วดูว่าเส้นใดห่างจาก A และ B เท่ากัน



จากรูปของเส้นตรงทั้ง 4 ตัวเลือก
เราตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้
จากเหตุผลของการวาดรูปจะเห็นว่า
ไม่จำเป็นต้องหาพิกัดของจุด C
เราสามารถตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 5.21 จุดตัดของเส้นตรง $x + 2y - 4 = 0$ และ $3x + 4y - 10 = 0$ อยู่ห่างจากเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และ $(\frac{24}{5}, 0)$ เป็นระยะเท่าใด

1. 0
2. $\frac{2}{13}$
3. $\frac{7}{13}$
4. $\frac{12}{13}$

ตอบ 2.

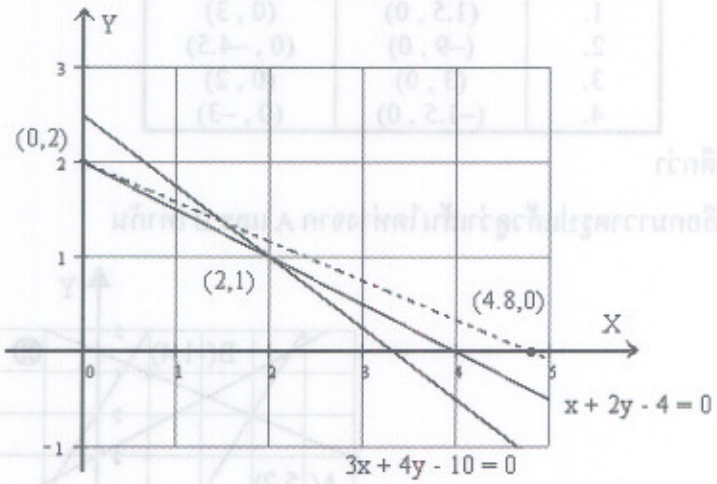
แนวคิด วิธีจริง โดยการแก้สมการหาจุดตัดของเส้นตรง $x + 2y - 4 = 0$ และ $3x + 4y - 10 = 0$ จะได้ว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกันที่จุด $(2, 1)$ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และ $(\frac{24}{5}, 0)$

คือ $\frac{x}{(\frac{24}{5})} + \frac{y}{2} = 1$ จัดรูปใหม่ได้เป็น $5x + 12y - 24 = 0$

ระยะทางจากจุด $(2, 1)$ ไปยังเส้นตรง $5x + 12y - 24 = 0$ มีค่าเท่ากับ

$$\frac{|(5)(2) + (12)(1) - 24|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{2}{\sqrt{169}} = \frac{2}{13}$$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้ววัดระยะทางโดยใช่ 1 cm ต่อ 1 หน่วย



จากรูปจะเห็นว่าจุด $(2,1)$ ไม่อยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 2)$ และ $(\frac{24}{5}, 0)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

โดยการวัดระยะทางจะได้ว่าระยะห่างน้อยกว่า 0.5 cm

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

5.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. จุดที่เส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด A (0 , 0) , B (4 , 0) และ C (2 , 4) ตัดกันคือจุดใด

   1. $(2 , \frac{4}{3})$
   2. $(\frac{4}{3} , 2)$
   3. $(\frac{2}{3} , \frac{4}{3})$
   4. $(\frac{4}{3} , \frac{2}{3})$

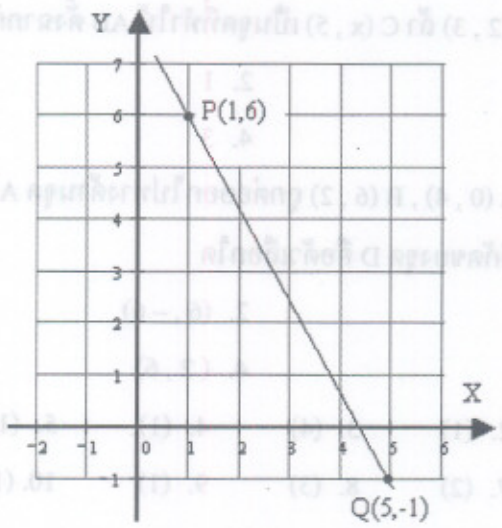
2. กำหนดสี่เหลี่ยม ABCD มีจุดยอดเป็น A(–3 , 0) , B(0 , –4) , C (4 , 0) , D (0 , 6)
   ถ้า M , N , P , R เป็นกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของสี่เหลี่ยม ABCD แล้วความยาวเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยม MNPR เท่ากับเท่าใด

   1. 17
   2. 15
   3. 13
   4. 11

3. สามเหลี่ยม ABC มีพิกัด A (3 , 6) , B (1 , 2) , C (–3 , 4) ความยาวของเส้นมัธยฐานที่ลากจาก A มายังด้านตรงข้ามยาวเท่าใด

   1. $\sqrt{26}$
   2. $\sqrt{35}$
   3. $\sqrt{13}$
   4. $\sqrt{25}$

4. จากรูปที่กำหนด



   สมการเส้นตรง L คือข้อใด

   1. $7x + 4y - 31 = 0$
   2. $5x + 4y + 31 = 0$
   3. $7x - 4y + 31 = 0$
   4. $5x - 4y - 31 = 0$

5. จุด C (–5 , 5) แบ่งส่วนเส้นตรงที่ต่อจุด A(–7 , 4) กับ B (1 , 8) ออกเป็นอัตราส่วน $|\overline{AC}| : |\overline{CB}|$ เท่ากับเท่าใด

   1. 1 : 3 2. 1 : 4
   3. 1 : 9 4. 4 : 1

6. สมการเส้นตรงที่ทุกจุดบนเส้นตรงนั้นห่างจากจุด A(2 , 3) กับ B (5 , 8) เป็นระยะทางเท่ากันคือข้อใด

   1. $6x + 10y - 76 = 0$ 2. $6x - 10y - 76 = 0$
   3. $10x + 6y - 76 = 0$ 4. $10x - 6y - 76 = 0$

7. สามเหลี่ยม ABC มีจุดยอดเป็น A (–2 , 5) , B (4 , 8) และ C (2 , –3) แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของด้านที่สั้นที่สุดของสามเหลี่ยม ABC คือสมการในข้อใด

   1. $4x + 2y - 17 = 0$ 2. $11x - 2y + 2 = 0$
   3. $x - 2y + 2 = 0$ 4. $x + 2y - 8 = 0$

8. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (–2 , 3) และตั้งฉากกับเส้นตรง $2x - 3y + 6 = 0$ คือข้อใด

   1. $3x + 2y - 12 = 0$ 2. $3x - 2y - 12 = 0$
   3. $3x + 2y = 0$ 4. $3x - 2y = 0$

9. กำหนด A (1 , 2) , B (2 , 3) ถ้า C (x , 5) เป็นจุดที่ทำให้ AB ตั้งฉากกับ BC แล้ว x เท่ากับข้อใด

   1. 0 2. 1
   3. 2 4. 3

10. เส้นตรง AB มีพิกัด A (0 , 4) , B (6 , 2) ถูกต่อออกไปทางด้านจุด A จนถึง D ทำให้ $|AD| = |AB|$ พิกัดของจุด D คือตัวเลือกใด

   1. (– 6 , 6) 2. (6 , – 6)
   3. (– 2 , 6) 4. (2 , 6)

เฉลย 1. (1) 2. (1) 3. (4) 4. (1) 5. (1)
6. (1) 7. (2) 8. (3) 9. (1) 10. (1)

$\cap \varnothing \cup \times \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin ^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow$ X Y $\not< \not> \leq \not\geq \not\in \not\leq$

❶❷❸❹①②③④

บทที่ 6
ภาคตัดกรวย

6.1 สรุปเนื้อหา

1. **วงกลม** คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน จุดคงที่เรียกว่า**จุดศูนย์กลาง** , ระยะคงที่เรียกว่า**รัศมี**

   รูปแบบทั่วไป 1. $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

   2. $x^2+y^2=r^2$, จุดศูนย์กลาง $(0,0)$, รัศมี r

   3. $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, จุดศูนย์กลาง (h,k) , รัศมี r

2. การหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของสมการวงกลม พื้นฐานที่สำคัญที่สุดคือ การจัดรูปกำลังสองสัมบูรณ์ ตัวอย่างเช่น $x^2+y^2-8x+10y+5=0$

$$(x^2-8x)+(y^2+10y)=-5$$

$$\left(x^2-8x+(\tfrac{8}{2})^2\right)+\left(y^2+10y+(\tfrac{10}{2})^2\right)=-5+(\tfrac{8}{2})^2+(\tfrac{10}{2})^2$$

$$(x^2-8x+16)+(y^2+10y+25)=-5+16+25$$

$$(x-4)^2+(y+5)^2=6^2$$

   เป็นสมการวงกลมมีจุดศูนย์กลาง $(4,-5)$, รัศมี $r=6$

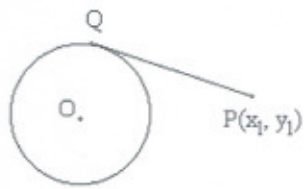
3. สมการ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})$

   และรัศมี $r=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}$ สูตรนี้มีประโยชน์มากในการตัดตัวเลือก

   ตัวอย่างเช่น $x^2+y^2-8x+10y+5=0$ มีจุดศูนย์กลาง $(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2})=(-\frac{-8}{2},-\frac{10}{2})=(4,-5)$

   รัศมี $=\sqrt{\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C}=\sqrt{\frac{64}{4}+\frac{100}{4}-5}=\sqrt{36}=6$

4. ความยาวของเส้นสัมผัสวงกลม ให้ $P(x_1, y_1)$ เป็นจุดภายนอกวงกลม C เป็นวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, PQ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม



จะได้ว่า $|PQ| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C}$

หรือ ถ้า C มีสมการเป็น $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

จะได้ $|PQ| = \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 - r^2}$

5. การหาจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลม ใช้การแทนค่า y ในพจน์ของ x แล้วทำการแก้สมการ

ตัวอย่าง จงหาจุดตัดของเส้นตรง $4x + 3y = 20$ กับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x = 0$

แทนค่า $y = \frac{20-4x}{3}$

$$x^2 + \left(\frac{20-4x}{3}\right)^2 - 10x = 0$$

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 (5-x)^2 - 10x = 0$$

$$x^2 + \frac{16}{9}(25 - 10x + x^2) - 10x = 0$$

$$9x^2 + 400 - 160x + 16x^2 - 90x = 0$$

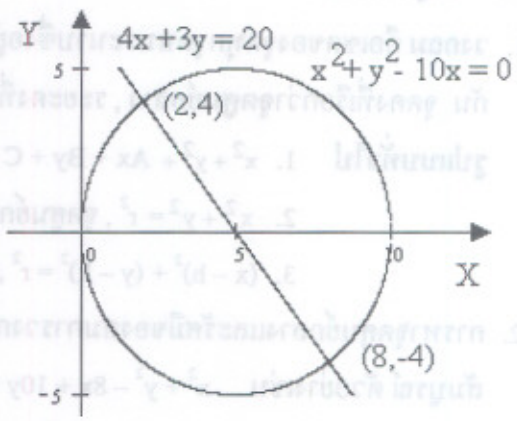
$$25x^2 - 250x + 400 = 0$$

$$x^2 - 10x + 16 = 0$$

$$(x-2)(x-8) = 0$$

$$x = 2, 8$$

$$y = 4, -4$$



สรุปจุดตัดคือ (2 , 4) , (8 , – 4)

6. การหาสมการเส้นสัมผัสวงกลมเมื่อกำหนดจุดบนวงกลม

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ ที่จุด P (6 , 2)

จุดศูนย์กลางวงกลมคือ C (3 , – 2)

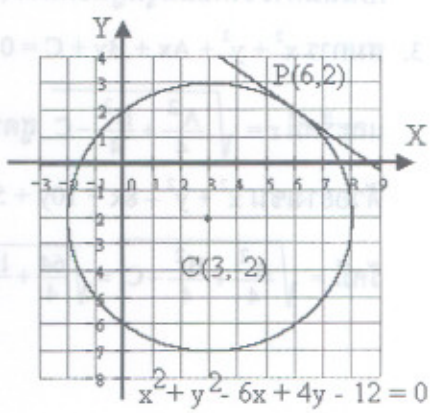
ความชัน $CP = \frac{2-(-2)}{6-3} = \frac{4}{3}$

ความชันเส้นสัมผัส L เท่ากับ $\frac{-3}{4}$

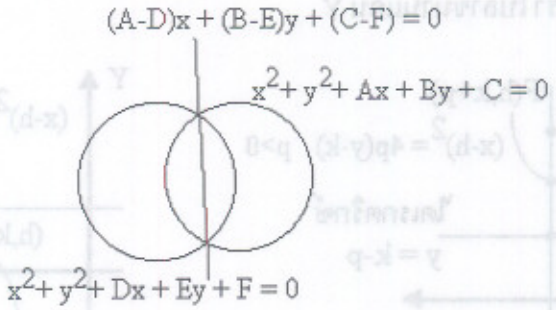
สมการเส้นตรง L คือ $y - 2 = (\frac{-3}{4})(x-6)$

$$4y - 8 = -3x + 18$$

$$3x + 4y - 26 = 0$$

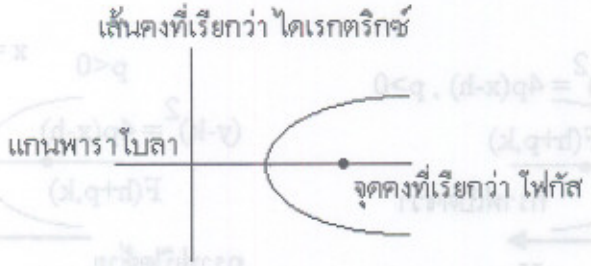


7. สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดตัดของวงกลมสองวงที่ตัดกัน



สมการเส้นตรง L คือ $(A-D)x + (B-E)y + (C-F) = 0$

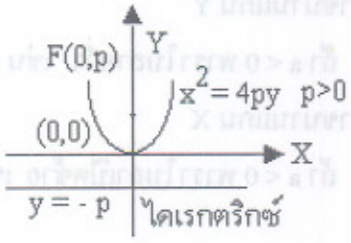
8. **พาราโบลา** คือเซตของจุดบนระนาบ ซึ่งห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งบนระนาบและจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบนอกเส้นตรงคงที่นั้นเป็นระยะทางเท่ากันเสมอ



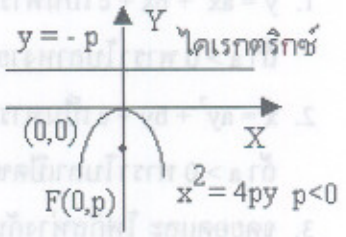
9. พาราโบลาจุดยอด (0 , 0)

9.1 แกนพาราโบลาทับแกน Y

กราฟหงาย

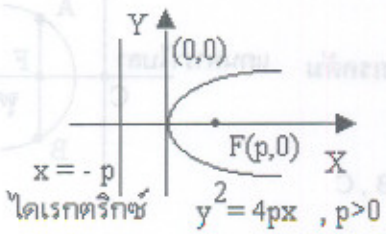


กราฟคว่ำ

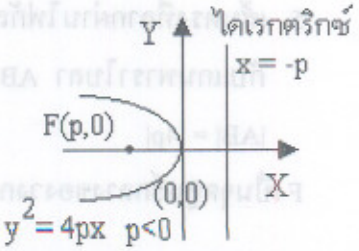


9.2 แกนพาราโบลาทับแกน X

กราฟเปิดขวา

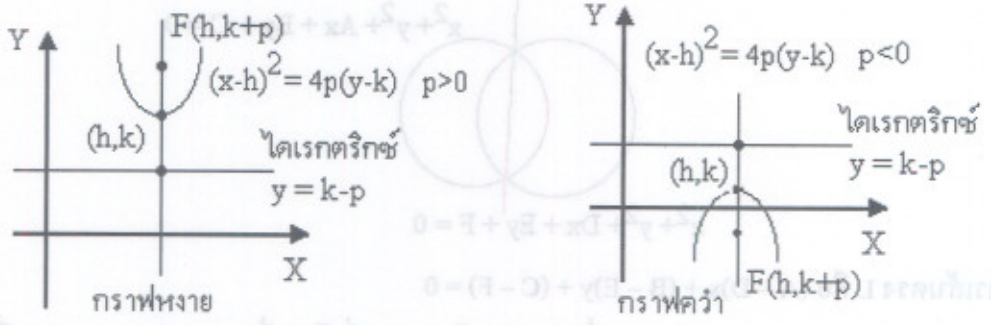


กราฟเปิดซ้าย

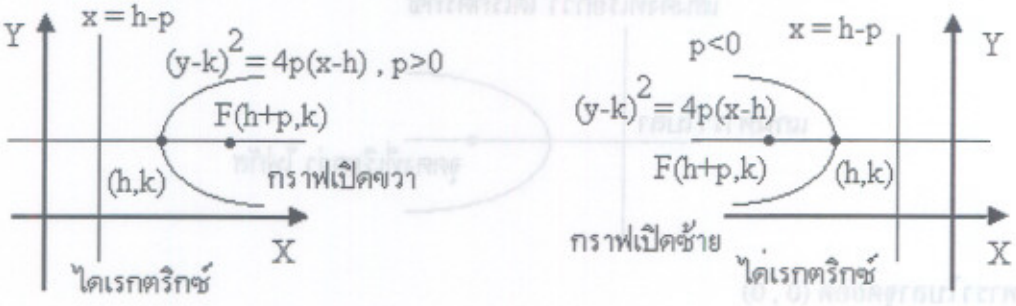


10. พาราโบลาจุดยอด (h , k)

10.1 แกนพาราโบลาขนานแกน Y



10.2 แกนพาราโบลาขนานแกน X



สมบัติที่สำคัญของพาราโบลา

1. $y = ax^2 + bx + c$ เป็นพาราโบลาแกนพาราโบลาขนานแกน Y

   ถ้า $a > 0$ พาราโบลาหงาย เช่น $y = x^2$ ถ้า $a < 0$ พาราโบลาคว่ำ เช่น $y = -x^2$

2. $x = ay^2 + by + c$ เป็นพาราโบลาแกนพาราโบลาขนานแกน X

   ถ้า $a > 0$ พาราโบลาเปิดขวา เช่น $x = y^2$ ถ้า $a < 0$ พาราโบลาเปิดซ้าย เช่น $x = -y^2$

3. จุดยอดและ โฟกัสห่างกันเท่ากับ |p|

4. โฟกัสกับไดเรกตริกซ์ห่างกันเท่ากับ |2p|

5. เส้นตรงที่ลากผ่านโฟกัสและตั้งฉาก กับแกนพาราโบลา AB เรียกว่า **เส้นเรตัสเรกตัม**

   |AB| = |4p|

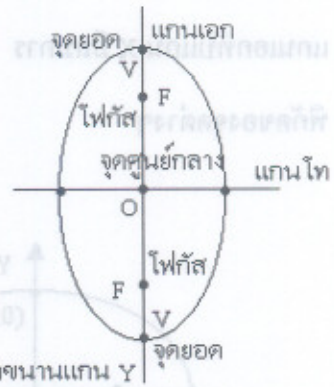


F เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่ผ่านจุด A , B , C

10. **วงรี** คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวโดยที่ค่าคงตัวนั้นมีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่สองจุดนั้น จุดคงที่สองจุดนั้นเรียกว่า **โฟกัส**

จุดต่างๆ ของวงรี

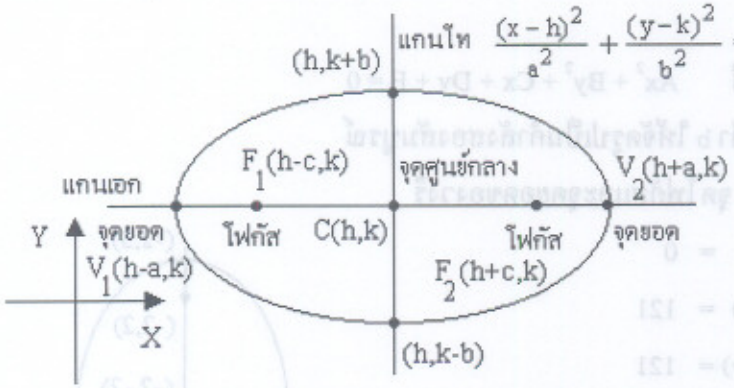




สมการวงรีที่มีแกนเอกขนานแกน X ความยาวแกนเอก = 2a

ความยาวแกนโท = 2b และมีจุดศูนย์กลาง (h , k) คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

พิกัดของจุดต่างเป็นดังนี้



หมายเหตุ $a^2=b^2+c^2$ ในเรื่องของวงรี a ยาวที่สุด

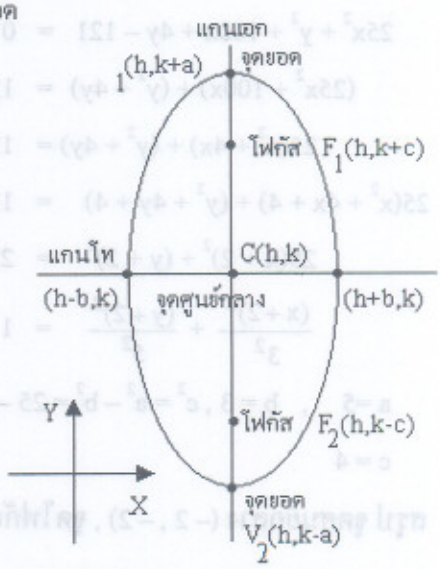
สมการวงรีที่มีแกนเอกขนานแกน Y

ความยาวแกนเอก = 2a

ความยาวแกนโท = 2b และมีจุดศูนย์กลาง (h , k)

คือ $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

พิกัดของจุดต่างเป็นดังนี้

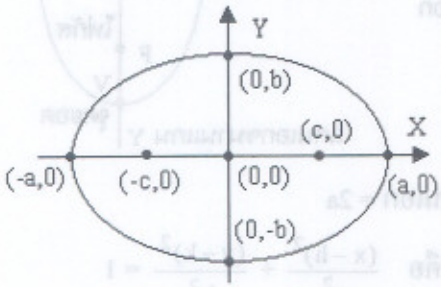


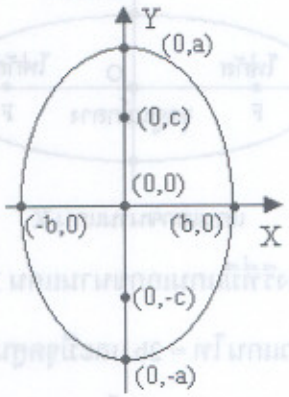
หมายเหตุ ตำแหน่งและสูตรของจุดต่างๆ ของวงรีเป็นเรื่องสำคัญ และมีประโยชน์มากในการตัดตัวเลือก

วงรีจุดศูนย์กลาง (0 , 0)

แกนเอกทับแกน X มีสมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ แกนเอกทับแกน Y มีสมการ $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

พิกัดของจุดต่างๆ





11. รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

การหาจุดศูนย์กลาง , ค่า a , ค่า b ให้จัดรูปเป็นกำลังสองสัมบูรณ์

ตัวอย่าง จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัสและจุดยอดของวงรี

$25x^2 + y^2 + 100x + 4y - 121 = 0$

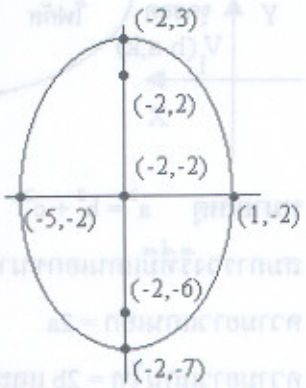
$(25x^2 + 100x) + (y^2 + 4y) = 121$

$25(x^2 + 4x) + (y^2 + 4y) = 121$

$25(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 4y + 4) = 121 + 100 + 4$

$25(x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 225$

$\frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y+2)^2}{5^2} = 1$



$a = 5$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

$c = 4$

สรุป จุดศูนย์กลาง $(-2 , -2)$, จุดโฟกัส $(-2 , -2 \pm 4)$, จุดยอด $(-2 , -2 \pm 5)$

12. สมบัติของวงรีที่สำคัญ

1. ความยาวแกนเอก = 2a , ความยาวแกนโท = 2b
2. ค่าที่สำคัญ 3 ค่าคือ a , b , c ควรจำว่า a มีค่ามากที่สุด และ $a^2 = b^2 + c^2$
3. การจะดูว่าแกนเอกขนานแกน X หรือแกน Y ต้องจัดรูปเข้าสู่รูปแบบมาตรฐาน

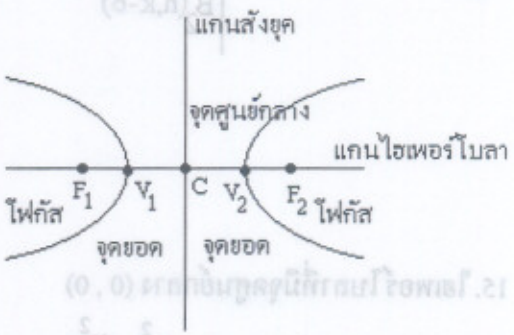
$$\frac{(x-h)^2}{\Delta_x^2} + \frac{(y-k)^2}{\Delta_y^2} = 1$$

ถ้า $\Delta_x > \Delta_y$ แล้วแกนเอกขนานแกน X และ $a = \Delta_x$, $b = \Delta_y$

ถ้า $\Delta_x < \Delta_y$ แล้วแกนเอกขนานแกน Y และ $a = \Delta_y$, $b = \Delta_x$

ถ้า $\Delta_x = \Delta_y$ แล้วจะเป็นสมการวงกลมรัศมี $r = \Delta_y$

13. **ไฮเพอร์โบลา** คือ เซตของจุดทุกจุดในระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดบนระนาบมีค่าคงตัวซึ่งมากกว่าศูนย์แต่น้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ทั้งสอง จุดคงที่นั้นเรียกว่า**โฟกัส**



ข้อควรจำ เกี่ยวกับไฮเพอร์โบลา

1. a = ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด
2. c = ระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส

หมายเหตุ ในเรื่องของไฮเพอร์โบลา c ยาวที่สุด , $c^2 = a^2 + b^2$

3. ความยาวแกนสังยุค = 2b
4. เส้นตรงที่ลากผ่าน F_1 , F_2 เรียกว่า **แกนตามขวาง**
5. การจะดูว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาขนานแกน X หรือแกน Y ต้องจัดรูปก่อนแล้วจึงพิจารณาจากสมการ

ถ้าสมการเป็น $\frac{(x-h)^2}{\Delta_x^2} - \frac{(y-k)^2}{\Delta_y^2} = 1$ แล้วแกนตามขวางขนานแกน X , $a = \Delta_x$ และ $b = \Delta_y$

ถ้าสมการเป็น $\frac{(y-k)^2}{\Delta_y^2} - \frac{(x-h)^2}{\Delta_x^2} = 1$ แล้วแกนตามขวางขนานกับแกน Y , $a = \Delta_y$ และ $b = \Delta_x$

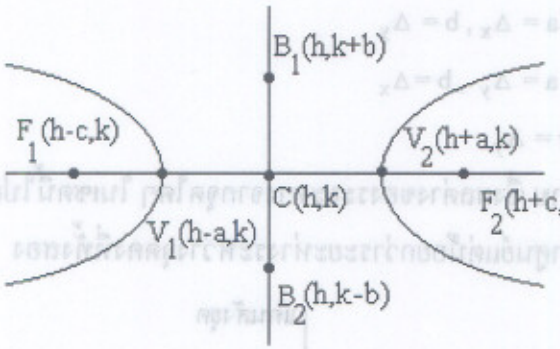
ข้อสังเกต ต้องให้ทางขวาของเท่ากับเป็น 1 เสมอ

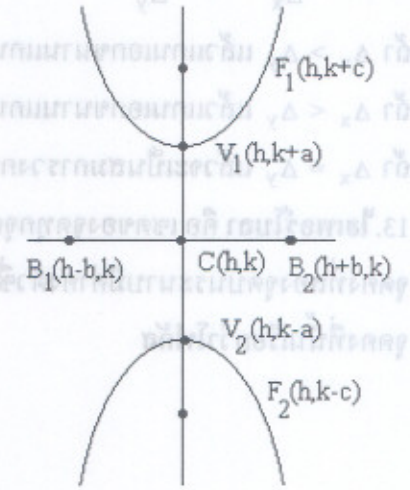
14. ไฮเพอร์โบลาจุดศูนย์กลาง (h , k)

แกนตามขวางขนานกับแกน X มีสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$

แกนตามขวางขนานกับแกน Y มีสมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$

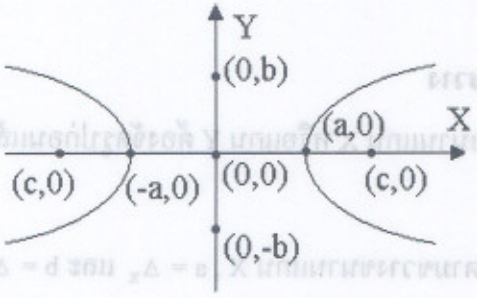
พิกัดของจุดต่างๆ



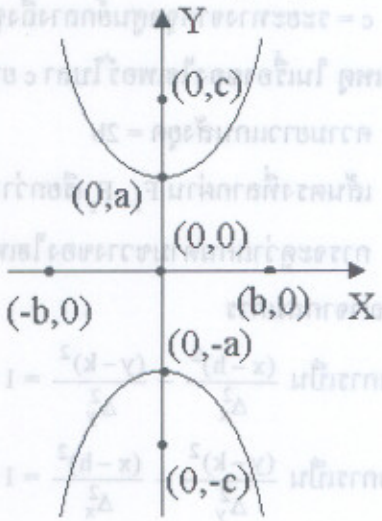


15. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลาง (0 , 0)

แกนตามขวางทับแกน X ; $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

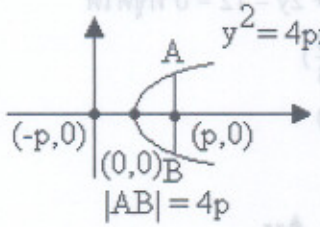


แกนตามขวางทับแกน Y ; $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$



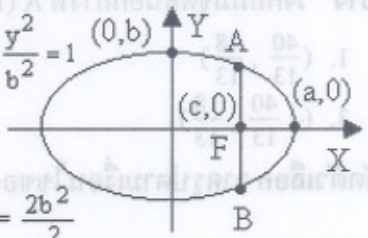
16. ความยาวของเรตัสเรกตัม AB

พาลาโบลา



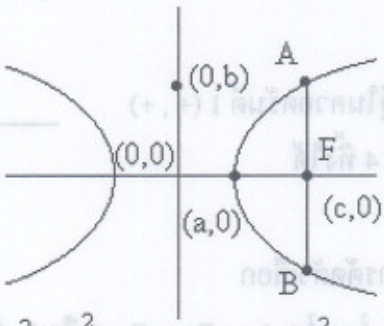
$|AB| = 4p$

วงรี



$|AB| = \frac{2b^2}{a^2}$

ไฮเพอร์โบลา



$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\quad |AB| = \frac{2b^2}{a}$

17. รูปแบบทั่วไปของสมการภาคตัดกรวย $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$A = B = 0 \rightarrow$ เส้นตรง

$A = B \neq 0 \rightarrow$ วงกลม

$AB = 0 \rightarrow$ พาราโบลา , เส้นตรง

$AB < 0 \rightarrow$ ไฮเพอร์โบลา

$AB > 0 \rightarrow$ วงรี

สนใจการแก้ปัญหา

❶ $x^{2541} - 1$ หารด้วย $x^2 + 1$ เหลือเศษเท่าใด

❷ ถ้า $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ จงหาค่าของ $\frac{\cos A \cos B \cos C}{\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C}$

ต้องอ่าน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 18 และ 19

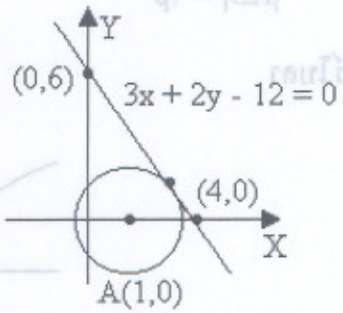
6.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. วาดรูปตามโจทย์แล้วดูพิกัดของจุดว่าอยู่ในควอดรันท์ใด

ตัวอย่าง วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ A (1 , 0) สัมผัสเส้นตรง $3x + 2y - 12 = 0$ ที่จุดใด

1. $(\frac{40}{13} , \frac{18}{13})$
2. $(-\frac{40}{13} , -\frac{18}{13})$
3. $(-\frac{40}{13} , \frac{18}{13})$
4. $(\frac{40}{13} , -\frac{18}{13})$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์



จากรูปจะเห็นว่าจุดสัมผัสอยู่ในควอดรันต์ 1 (+ , +)

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 , 3 และ 4 ทิ้งได้

2. ใช้จุดศูนย์กลางช่วยในการตัดตัวเลือก

จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ คือ $(-\frac{A}{2} , -\frac{B}{2})$

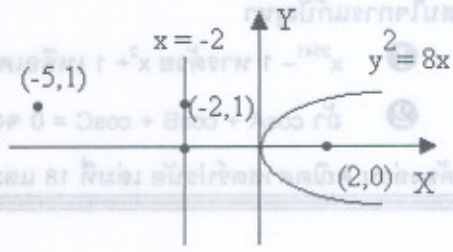
ตัวอย่าง ความสัมพันธ์ที่มีกราฟเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (– 5 , 1) และสัมผัสกับไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาที่มีสมการเป็น $y^2 = 8x$ คือข้อใด

1. $\{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 + 10x - 2y + 17 = 0\}$
2. $\{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0\}$
3. $\{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 + 10x - 2y + 25 = 0\}$
4. $\{(x , y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 - 10x + 2y + 25 = 0\}$

การตัดตัวเลือก จุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละตัวเลือก คือ

1. (– 5 , 1)
2. (5 , – 1)
3. (– 5 , 1)
4. (5 , – 1)

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 และ 4 ทิ้ง



เขียนรูปพาราโบลา $y^2 = 8x = 4 (2) x \longrightarrow p = 2$

สมการเส้นไดเรกตริกซ์คือ $x = -2$

ระยะทางจาก (– 5 , 1) มายังเส้นไดเรกตริกซ์เท่ากับ 3

ดังนั้นรัศมีวงกลมต้องเท่ากับ 3 สมการวงกลมคือ $(x+5)^2+(y-1)^2 = 3^2$

$$x^2+10x+25+y^2-2y+1 = 9$$

$$x^2+y^2+10x-2y+17 = 0$$

ข้อควรจำ การแก้ปัญหาภาคตัดกรวยพยายามวาดรูปจะดีที่สุด

3. นำพิกัดของจุดไปแทนค่าในสมการของตัวเลือก

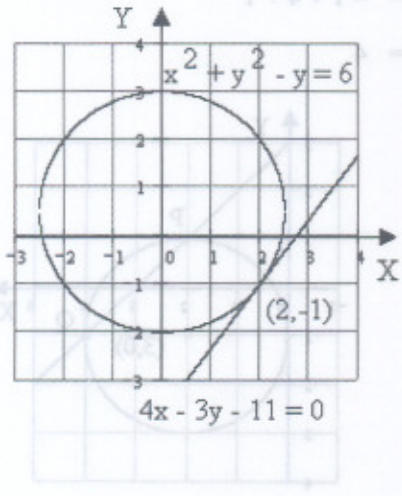
ตัวอย่าง สมการใดเป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y และสัมผัสเส้นตรง $4x-3y-11=0$ ที่จุด $(2,-1)$

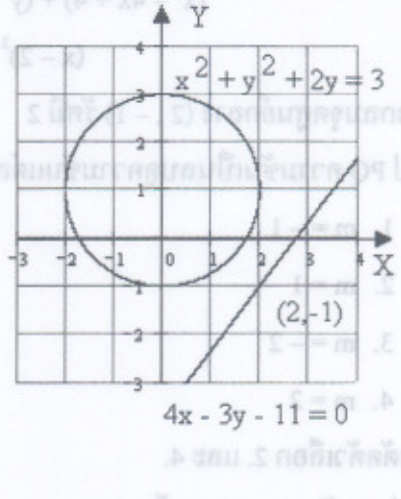
1. $x^2+y^2-y=6$
2. $x^2+y^2+y=5$
3. $x^2+y^2+2y=3$
4. $x^2+y^2-2y=8$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $x=2, y=-1$ ในตัวเลือกจะได้

1. $x^2+y^2-y = 4+1+1 = 6$
2. $x^2+y^2+2y = 4+1-1 = 4 \neq 5$ → ตัดตัวเลือก 2
3. $x^2+y^2+2y = 4+1-2 = 3$
4. $x^2+y^2-2y = 4+1-2(-1) = 7 \neq 8$ → ตัดตัวเลือก 4.

ต่อไปวาดรูปตามที่โจทย์กำหนด และวงกลมของตัวเลือกที่เหลือ





เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

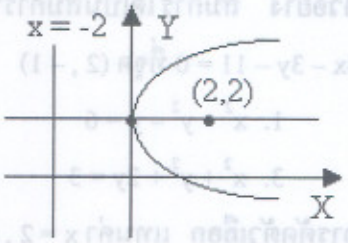
4. ใช้ลักษณะกราฟพาราโบลาคว่ำ , หงาย , เปิดซ้ายหรือเปิดขวา ช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนดพาราโบลามีเส้นตรง $x = -2$ เป็นไดเรกตริกซ์ และ $(2 , 2)$ เป็นโฟกัส สมการพาราโบลาคือ

1. $y^2 = 8x$
2. $x = 8y^2$
3. $y^2 - 4y + 8x + 8 = 0$
4. $y^2 - 4y - 8x + 4 = 0$

การตัดตัวเลือก วาดรูปเพื่อดูลักษณะพาราโบลา

จากรูปของโจทย์ต้องเป็นพาราโบลาเปิดทางขวาจุดยอด $\neq (0 , 0)$



ตัวเลือก 1. พาราโบลาเปิดขวา จุดยอด $(0 , 0)$ ตัดตัวเลือก 1

ตัวเลือก 2. พาราโบลาเปิดขวา จุดยอด $(0 , 0)$ ตัดตัวเลือก 2

ตัวเลือก 3. $x = \frac{-1}{8} y^2 + \frac{1}{2} y - 1$ พาราโบลาเปิดซ้าย ตัดตัวเลือก 3

5. วาดรูปและดูจุดตัดแกน X หรือจุดตัดแกน Y

ตัวอย่าง จุด $A (3 , 0)$ เป็นจุดกึ่งกลางของ PQ ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ สมการเส้นตรง PQ คือสมการข้อใด

1. $x + y = 3$
2. $x - y = 3$
3. $2x + y = 6$
4. $2x - y = 6$

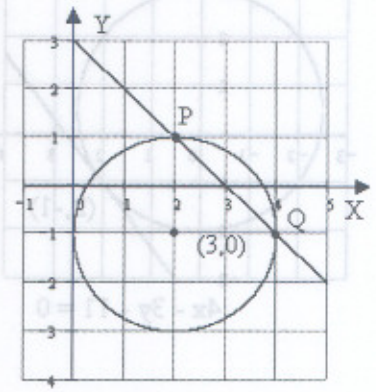
การตัดตัวเลือก วาดรูปวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง $(2 , -1)$ รัศมี 2

จากรูป PQ ความชันเป็นลบดูความชันแต่ละตัวเลือก



1. $m = -1$
2. $m = 1$
3. $m = -2$
4. $m = 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

จากรูป PQ ตัดแกน Y ทางด้านขวา

เพราะฉะนั้นนั้นคือ $x = 0 \longrightarrow y = 3$ แต่ตัวเลือก 3. $x = 0 \longrightarrow y = 6$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

6.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 6.1 สมการวงรีซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-1,-2)$ และ $(3,-2)$ และ มีความยาวแกนเอกเท่ากับ 10 หน่วย คือสมการในตัวเลือกใด

1. $\frac{(x+1)^2}{21}+\frac{(y-2)^2}{25}=1$
2. $\frac{(x-1)^2}{21}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$
3. $\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{21}=1$
4. $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{21}=1$

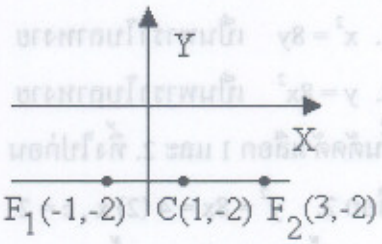
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้ให้เหตุผลการตัดตัวเลือกดีที่สุด

โจทย์บอกว่าวงรีมีจุดโฟกัสที่ $F_1(-1,-2)$ และ $F_2(3,-2)$

ดังนั้นแกนเอกต้องขนานแกน X

และมีจุดศูนย์กลางที่ C $(1,-2)$



ในตัวเลือกแต่ละตัวพิจารณาว่า

แกนเอกขนานแกน X หรือ Y และจุดศูนย์กลาง

อยู่ที่จุดใดก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก	จุดศูนย์กลาง	แกนเอกขนานแกน
1.	$(-1,2)$	Y
2.	$(1,-2)$	Y
3.	$(1,-2)$	X
4.	$(-1,2)$	X

สรุปตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จากโจทย์ $2a$ = ความยาวแกนเอก = 10 ดังนั้น $a=5$

เพราะว่าระยะห่างของ F_1 และ F_2 เท่ากับ 4 เพราะฉะนั้น $2c=4$ และ $c=2$

ดังนั้น $b^2=a^2-c^2=25-4=21$

เพราะว่าจุดศูนย์กลางวงรีอยู่ระหว่าง F_1 , F_2 เพราะฉะนั้น C มีพิกัดเป็น $(1,-2)$

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y+2)^2}{b^2}=1$

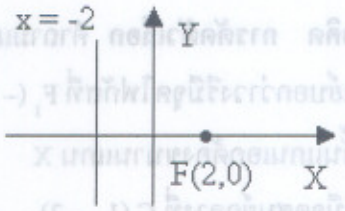
$$\frac{(x-1)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{21}=1$$

ตัวอย่างที่ 6.2 พาราโบลา $x = -2$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์และ $(2, 0)$ เป็นจุดโฟกัส จะได้สมการของพาราโบลาคือข้อใด

1. $x^2 = 8y$
2. $y^2 = 8x$
3. $y = 8x^2$
4. $x = 8y^2$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เขียนรูปเท่าที่โจทย์กำหนดก่อนก็จะตัดตัวเลือกได้แล้ว จากลักษณะของรูปพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์ ต้องเป็นพาราโบลาจุดยอด $(0, 0)$ และเป็นพาราโบลาเปิดขวา



ลักษณะของพาราโบลาในตัวเลือก

1. $x^2 = 8y$ เป็นพาราโบลาหงาย
2. $y = 8x^2$ เป็นพาราโบลาหงาย

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 2. ทิ้งไปก่อน เพราะว่าพาราโบลามีจุดยอดที่ $(0, 0)$ ดังนั้นค่า $c = 2$

ตัวเลือก 2. $y^2 = 8x = 4(2)x$, $c = 2$ ตัวเลือก 4. $x = 8y^2$, $y^2 = \frac{1}{8}x = 4(\frac{1}{16})x$, $c = \frac{1}{16}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

วิธีจริง จากโจทย์จุดยอดต้องอยู่ระหว่างเส้นไดเรกตริกซ์กับจุดโฟกัส ดังนั้นจุดยอดคือ $(0, 0)$ และ $c = 2$ เพราะฉะนั้นสมการพาราโบลาเปิดทางขวามือ

$$(y-0)^2 = 4c(x-0) = 4(2)(x)$$

$$y^2 = 8x$$

ตัวอย่างที่ 6.3 สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ $(-3, -5)$ และสัมผัสกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $8x - 6y - 1 = 0$ คือสมการในตัวเลือกใด

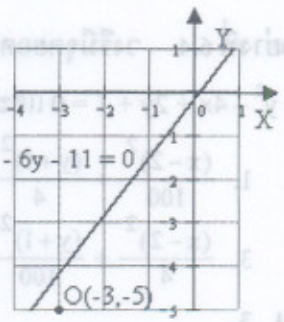
1. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 136 = 0$
2. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 125 = 0$
3. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 97 = 0$
4. $4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 15 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เขียนจุด $O(-3, -5)$ และเส้นตรง $8x - 6y - 1 = 0$ วัดระยะทางจากจุด O มายังเส้นตรง $L : 8x - 6y - 1 = 0$ ได้เท่ากับ 0.5

เพราะฉะนั้น ถ้า r เป็นรัศมีของวงกลม

จะได้ว่า $r^2 = (0.5)^2 = 0.25$



ทบทวนสูตร วงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C}$

การหาค่า A , B , C ของแต่ละตัวเลือกทำโดยการหารตลอดด้วย 4

1. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + \frac{136}{4} = 0$
2. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + \frac{125}{4} = 0$
3. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + \frac{97}{4} = 0$
4. $x^2 + y^2 + 6x + 10y + \frac{15}{4} = 0$

ดังนั้นทุกตัวเลือกมี $A = 6$, $B = 10$ และ $\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} = \frac{36}{4} + \frac{100}{4} = 34$

หารัศมีของวงกลมแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก	$\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C$
1. $C = \frac{136}{4}$	$34 - \frac{136}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$
2. $C = \frac{125}{4}$	$34 - \frac{125}{4} = \frac{11}{4} = 2.75$
3. $C = \frac{97}{4}$	$34 - \frac{97}{4} = \frac{39}{4} = 9.75$
4. $C = \frac{15}{4}$	$34 - \frac{15}{4} = \frac{121}{4} = 30.25$

จากตารางจะเห็นว่ารัศมีวงกลมในตัวเลือก 2 , 3 และ 4 มีค่าเกิน 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2 , 3 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง รัศมีวงกลมเท่ากับระยะทางจากจุด O (– 3 , – 5) ไปยังเส้นตรง

L : $8x - 6y + 1 = 0$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{|8(-3) - 6(-5) - 1|}{\sqrt{8^2 + 6^2}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมคือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = (\frac{1}{2})^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = \frac{1}{4}$$

$$4x^2 + 4y^2 + 24x + 40y + 136 = 0$$

ตัวอย่างที่ 6.4 วงรีมีจุดยอดอยู่ที่ (2 , 3) มีจุดศูนย์กลางร่วมกันกับวงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ และสัมผัสกับวงกลมนี้ด้วย มีสมการดังข้อใด

1. $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
2. $\frac{(x-2)^2}{64} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$
3. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{100} = 1$
4. $\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{64} = 1$

ตอบ 3.

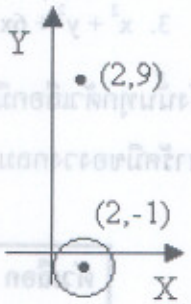
แนวคิด การตัดตัวเลือก จัดรูปสมการวงกลมเพื่อหาจุดศูนย์กลางของวงกลม

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = -1 + 4 + 1$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลาง (2 , – 1) รัศมี 2



วงรีมีจุดยอดที่จุด (2 , 9) จุดศูนย์กลาง (2 , – 1)

เพราะฉะนั้นจุดยอดอีกจุดหนึ่งคือ (2 , – 11) และแกนเอกของวงรีขนานแกน Y

ระยะห่างของจุด (2 , 9) และ (2 , – 1) เท่ากับ 10 , ดังนั้น a = 10

ตัวเลือก	แกนเอกขนานแกน	a	b
1	X	10	2
2	X	8	2
3	Y	10	2
4	Y	8	2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง วงรีมีจุดศูนย์กลาง (2 , – 1) , a = 10 , แกนเอกขนานแกน Y

เพราะว่าวงรีสัมผัสวงกลม เพราะฉะนั้น b = 2

สมการวงรีคือ $\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{10^2} = 1$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{100} = 1$$

ตัวอย่างที่ 6.5 ความสัมพันธ์ข้อใด มีกราฟเป็นวงกลมที่ผ่านจุด $(0,0)$, $(-2,5)$ และ $(0,5)$

1. $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x+5y=0\}$
2. $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x-5y=0\}$
3. $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2+2x+5y=0\}$
4. $\{(x,y)\in R\times R \mid x^2+y^2-2x-5y=0\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่าจุด $(0,5)$; $x=0$, $y=5$ ในสมการทุกตัวเลือก

1. $x^2+y^2-2x+5y=0+25-0+25=50\neq 0$
2. $x^2+y^2+2x-5y=0+25+0-25=0$
3. $x^2+y^2+2x+5y=0+25+0+25=50\neq 0$
4. $x^2+y^2-2x-5y=0+25-0-25=0$

ดังนั้น $(0,5)$ ไม่อยู่บนวงกลมของตัวเลือก 1 และ 3 แน่นอน ตัดตัวเลือก 1 และ 3 ทิ้งได้

แทนค่าจุด $(-2,5)$; $x=2$, $y=5$ ในตัวเลือกที่เหลือ

2. $x^2+y^2+2x-5y=4+25-4-25=0$
4. $x^2+y^2-2x-5y=4+25+4-25=8\neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

วิธีจริง สมมติสมการวงกลมคือ $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ต่อไปแทนค่าจุดที่ผ่าน

$(0,0)$; $C=0$

$(-2,5)$; $4+25-2A+5B=0$ .....(1)

$(0,5)$; $0+25+0+5B=0$ .....(2)

$B=-5$

(2) ; $-2A=-5B-29=-5(-5)-29=-4$

$A=2$

สรุปสมการวงกลมคือ $x^2+y^2+2x-5y=0$

ตัวอย่างที่ 6.6 เส้นสัมผัสวงกลม $x^2+y^2-6x-7=0$ และขนานแกน X จะสัมผัสวงกลมที่จุดใด

1. $(3,4)$ และ $(3,-4)$
2. $(-3,4)$ และ $(-3,-4)$
3. $(4,3)$ และ $(4,-3)$
4. $(0,4)$ และ $(0,-4)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จุดสัมผัสวงกลมต้องอยู่บนวงกลมเราจึงนำประโยชน์ไปใช้ในการแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก ลองดูจากตัวเลขที่คิดง่ายก่อนยิ่งดี

ตัวเลือก 4 $(0,4)$; $0+16-0-7\neq 0$ และ $(0,-4)$; $0+16-0-7\neq 0$

ตัวเลือก 1 $(3,4)$; $9+16-12-7=0$ และ $(3,-4)$; $9+16-12-7=0$

สรุปเลือกตัวเลือก 1 เป็นคำตอบได้เลย

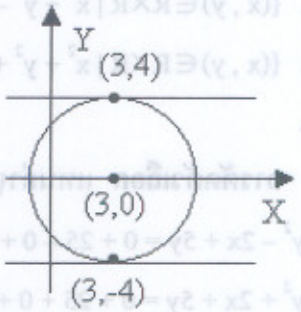
วิธีจริง จัดรูปสมการวงกลม $x^2+y^2-6x-7=0$

$$(x^2-6x+9)+y^2 = 7+9$$

$$(x-3)^2+y^2 = 16$$

จุดศูนย์กลาง $(3,0)$, รัศมี 4 เส้นที่ขนานแกน X

และสัมผัสวงกลมต้องผ่านจุด $(3,4)$ และ $(3,-4)$



ตัวอย่างที่ 6.7 วงรีมีจุดศูนย์กลางที่ $(0,0)$ แกนเอกยาวกว่าแกนโทอยู่ 14 หน่วยและมีจุดโฟกัสอยู่บนแกน Y ห่างกัน 40 หน่วย จะมีสมการตรงกับข้อใด

1. $\frac{x^2}{441}+\frac{y^2}{841}=1$
2. $\frac{x^2}{841}+\frac{y^2}{441}=1$
3. $\frac{x^2}{484}+\frac{y^2}{900}=1$
4. $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{361}=1$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์บอกว่าโฟกัสอยู่บนแกน Y ดังนั้นแกนเอกของวงรีต้องทับแกน Y ดูแกนเอกแต่ละตัวเลือกและค่า a , b

ตัวเลือก	แกนเอกทับแกน	a	b	$c^2=a^2-b^2$
1	Y	29	21	400
2	X	29	21	400
3	Y	30	22	416
4	Y	19	11	240

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้งได้ก่อน

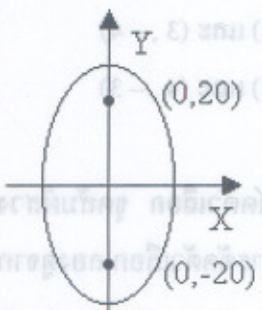
เพราะว่าแกนเอกยาวกว่าแกนโท 16 หน่วย

เพราะฉะนั้น $2a-2b=16$, $a-b=8$

เพราะว่าจุดโฟกัสห่างกัน 40 หน่วย

เพราะฉะนั้น $2c=40$, $c=20$, $c^2=400$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 , 4 ทิ้งได้



วิธีจริง จากโจทย์จะได้แกนเอกทับแกน Y และ $c = 20$, $a = b + 8$

เพราะว่า $a^2 = b^2 + c^2$

$(b+8)^2 = b^2 + 400$

$b^2 + 16b + 64 = b^2 + 400$

$16b = 336$

$b = 21$

ดังนั้น $a = 29$

สรุปสมการวงรีคือ $\frac{x^2}{21^2} + \frac{y^2}{29^2} = 1$

$\frac{x^2}{441} + \frac{y^2}{841} = 1$

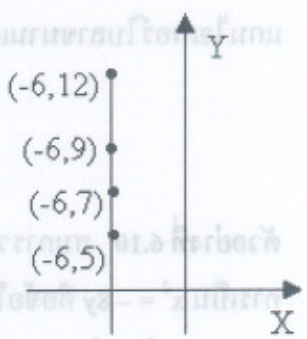
ตัวอย่างที่ 6.8 วงรีมีโฟกัสที่จุด $(-6, 5)$ และ $(-6, 9)$ กับจุดยอดจุดหนึ่งคือ $(-6, 12)$ จะมีสมการดังข้อใด

1. $\frac{(x-7)^2}{3} + \frac{(y+6)^2}{5} = 1$
2. $\frac{(x+6)^2}{3} + \frac{(y+9)^2}{6} = 1$
3. $\frac{(x+6)^2}{21} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$
4. $\frac{(x-6)^2}{16} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากข้อกำหนดของโจทย์และภาพประกอบจะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรี คือ $(-6, 7)$ ลองเปรียบเทียบกับตัวเลือก

ตัวเลือก	จุดศูนย์กลาง
1	$(7, -6)$
2	$(-6, -9)$
3	$(-6, 7)$
4	$(6, 7)$



ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง จากเงื่อนไขของโจทย์ $a = 5$, $c = 2$, $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 4 = 21$

สมการวงรีคือ $\frac{(x+6)^2}{b^2} + \frac{(y-7)^2}{a^2} = 1$

$\frac{(x+6)^2}{21} + \frac{(y-7)^2}{25} = 1$

ตัวอย่างที่ 6.9 สมการไฮเพอร์โบลาซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุด (x , y) ใดๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่ (– 4 , 3) และ (4 , 3) เท่ากับ 6 หน่วย ตรงกับข้อใด

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{7}=1$
2. $\frac{x^2}{7}-\frac{(y-3)^2}{9}=1$
3. $\frac{(x-3)^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$
4. $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

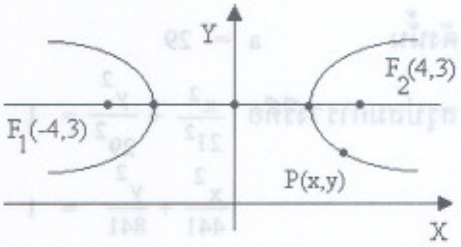
ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

จากโจทย์กำหนดให้ (– 4 , 3) และ (4 , 3) เป็นโฟกัส

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีจุด (0 , 3) เป็นจุดศูนย์กลาง

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน X



ค่า $c = 4$, $c^2 = 16$

เพราะว่า $|PF_1 - PF_2| = 6$ เพราะฉะนั้น $2a = 6$, $a = 3$, $a^2 = 9$

ตัวเลือก	จุดศูนย์กลาง	แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน	a^2	b^2
1	(0 , 3)	X	9	7
2	(0 , 3)	X	7	9
3	(3 , 0)	X	7	9
4	(3 , 0)	X	9	7

สรุปตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จุดศูนย์กลาง (0 , 3) , $a = 3$, $c = 4$, $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 9 = 7$

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน X สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-0)^2}{3^2}-\frac{(y-3)^2}{7}=1$

$$\frac{x^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{7}=1$$

ตัวอย่างที่ 6.10 สมการวงกลมที่ผ่านจุด (4 , – 2) , (– 4 , – 2) และจุดยอดของพาราโบลาที่มีสมการเป็น $x^2 = -8y$ คือข้อใด

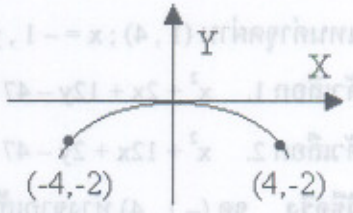
1. $x^2 + y^2 + 10y + 1 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 10x - 1 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 10x = 0$
4. $x^2 + y^2 + 10y = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จุดยอดของพาราโบลา $x^2 = -8y$ คือ (0 , 0)

และเราสามารถนำจุด (0 , 0) มาช่วยใน

การตัดตัวเลือกได้เร็วขึ้น แทนค่า $x = 0$, $y = 0$ ในทุกตัวเลือก



ตัวเลือก 1. $x^2 + y^2 + 10y + 1 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

ตัวเลือก 2. $x^2 + y^2 - 10x - 1 = 0 + 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

ตัวเลือก 3. $x^2 + y^2 + 10x = 0 + 0 + 0 = 0$

ตัวเลือก 4. $x^2 + y^2 + 10y = 0 + 0 + 0 = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. ทิ้งได้

แทนค่าจุด (4 , – 2) ; $x = 4$, $y = -2$ ในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 3. $x^2 + y^2 + 10x = 16 + 4 + 40 = 60 \neq 0$

ตัวเลือก 4. $x^2 + y^2 + 10y = 16 + 4 - 20 = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง สมมติสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ แทนค่าจุดผ่าน

(0 , 0) ; $C = 0$

(4 , – 2) ; $16 + 4 + 4A - 2B = 0$ .....(1)

(– 4 , – 2) ; $16 + 4 - 4A - 2B = 0$ .....(2)

(1) + (2) ; $40 - 4B = 0$ เพราะฉะนั้น $B = 10$

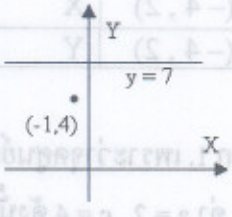
จาก (1) $A = 0$ สรุปสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + 10y = 0$

ตัวอย่างที่ 6.11 สมการในข้อใดมีกราฟเป็นพาราโบลาที่มีจุดยอด (– 1 , 4) และเส้นไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $y = 7$

1. $x^2 + 2x + 12y - 47 = 0$
2. $x^2 + 12x + 2y - 47 = 0$
3. $y^2 + 2y + 12x - 47 = 0$
4. $y^2 + 12y + 2x - 47 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก



เขียนจุด (– 1 , 4) และเส้นไดเรกตริกซ์ จะได้ว่า

พาราโบลาต้องมีลักษณะคว่ำ

ตัวเลือก 1. $12y = -x^2 - 2x + 47$ $y = -\frac{1}{12}x^2 - \frac{2}{12}x + \frac{47}{12}$ เป็นพาราโบลาคว่ำ

ตัวเลือก 2. $2y = -x^2 - 12x + 47$ จะได้ $y = -\frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{47}{2}$ เป็นพาราโบลาคว่ำ

ตัวเลือก 3. มีพจน์ของ y^2 ไม่เป็นพาราโบลาคว่ำ

ตัวเลือก 4. มีพจน์ของ y^2 ไม่เป็นพาราโบลาคว่ำ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่าจุดผ่าน $(1 , 4)$; $x = -1 , y = 4$ ในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 1. $x^2 + 2x + 12y - 47 = 1 - 2 + 48 - 47 = 0$

ตัวเลือก 2. $x^2 + 12x + 2y - 47 = 1 - 12 + 8 - 47 \neq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง จุด $(-1 , 4)$ ห่างจากเส้นไดเรกตริกซ์ $y = 7$ เท่ากับ 3 ดังนั้น $c = -3$

สมการพาราโบลาคือ $(x+1)^2 = 4c(y-4) = -12(y-4)$

$$x^2 + 2x + 1 = -12y + 48$$

$$x^2 + 2x + 12y - 47 = 0$$

ตัวอย่างที่ 6.12 กำหนดจุดศูนย์กลางที่ $(-4 , 2)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งคือ $(-4 , 6)$ และมีจุดยอดอยู่บนแกน X สมการของไฮเพอร์โบลาตรงกับข้อใด

1. $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{12} = 1$
2. $\frac{(y-2)^2}{12} - \frac{(x+4)^2}{4} = 1$
3. $\frac{(x+4)^2}{12} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$
4. $\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1$

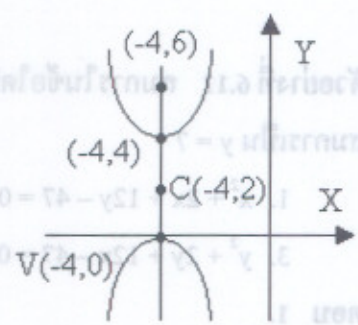
ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากข้อกำหนดของโจทย์จะได้

แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน Y

จุดยอด $V(-4 , 0) , a = 2 , c = 4$

ตัวเลือก	จุดศูนย์กลาง	แกนไฮเพอร์โบลาขนานแกน	a
1	$(2 , -4)$	Y	9
2	$(-4 , 2)$	Y	$\sqrt{12}$
3	$(-4 , 2)$	X	$\sqrt{12}$
4	$(-4 , 2)$	Y	2



ตัดตัวเลือก 1. เพราะว่าจุดศูนย์กลางไม่ตรงกัน ตัดตัวเลือก 2. , 3. เพราะว่าค่า a ไม่เท่ากับ 2

วิธีจริง ค่า $a = 2 , c = 4$ ดังนั้น $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(y-2)^2}{a^2} - \frac{(x+4)^2}{b^2} = 1$

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x+4)^2}{12} = 1$$

ตัวอย่างที่ 6.13 เส้นตรง $y = 2 - 3x$ ตัดกับพาราโบลา $y = x^2 + 2x - 4$ ที่จุด A และ B จะมีสมการวงกลมที่มี AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางคือข้อใด

1. $x^2 + y^2 + 5x - 9y + 26 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 5x - 19y - 26 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 5x - 19y - 21 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 5x - 19y + 21 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด การจุดตัดของเส้นตรง $y = 2 - 3x$ และพาราโบลา $y = x^2 + 2x - 4$

$$2 - 3x = y = x^2 + 2x - 4$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$(x + 6)(x - 1) = 0$$

$$x = -6, 1$$

$$y = 20, -1$$

ให้ $A(-6, 20)$ และ $B(1, -1)$

แทนค่าพิกัดของจุด $B(1, -1)$; $x = 1$, $y = -1$ ก็ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $x^2 + y^2 + 5x - 9y + 26 = 1 + 1 + 5 + 9 + 26 \neq 0$

ตัวเลือก 2. $x^2 + y^2 + 5x - 19y - 26 = 1 + 1 + 5 + 19 - 26 = 0$

ตัวเลือก 3. $x^2 + y^2 + 5x - 19y - 21 = 1 + 1 + 5 + 19 - 21 \neq 0$

ตัวเลือก 4. $x^2 + y^2 + 5x - 19y + 21 = 1 + 1 + 5 + 19 + 21 \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม พิกัด C คือ จุดกึ่งกลาง A , B

$$(\frac{-6+1}{2}, \frac{20-1}{2}) = (\frac{-5}{2}, \frac{19}{2})$$

รัศมีวงกลม $= \sqrt{(\frac{-5}{2} + 6)^2 + (\frac{19}{2} - 20)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{441}{4}} = \sqrt{\frac{490}{4}}$

สมการวงกลมคือ $(x + \frac{5}{2})^2 + (y - \frac{19}{2})^2 = \left(\sqrt{\frac{490}{4}}\right)^2$

$$(2x + 5)^2 + (2y - 19) = 490$$

$$4x^2 + 20x + 25 + 4y^2 - 76y + 361 = 490$$

$$4x^2 + 4y^2 + 20x - 76y + 104 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 5x - 19y - 26 = 0$$

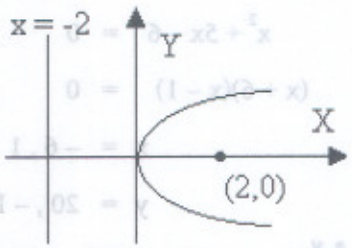
ตัวอย่างที่ 6.14 พาราโบลามีจุด (0 , 0) เป็นจุดยอด และสมการของไดเรกตริกซ์คือ $x = -2$ ถ้าโฟกัสของพาราโบลาเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สัมผัสกับไดเรกตริกซ์แล้ว จงหาจุดตัดของวงกลมกับพาราโบลาคือข้อใด

1. (2 , 6) และ (2 , – 6)
2. (– 6 , 2) และ (– 2 , – 6)
3. (2 , 4) และ (2 , – 4)
4. (– 6 , 4) และ (– 6 , – 4)

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

จุดยอด (0 , 0) ห่างจากเส้นไดเรกตริกซ์เท่ากับ 2 ดังนั้น $c = 2$



สมการพาราโบลาคือ $y^2 = 4cx = 8x$

การตัดตัวเลือกทำได้โดยนำพิกัดของจุดในตัวเลือกมาแทนค่าในสมการที่หาได้

ตัวเลือก 1. $(2 , 6) ; 6^2 = 36 \neq 16 = 8(2)$ ตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

ตัวเลือก 2. $(-6 , 2) ; 2^2 = 4 \neq -48 = 8(-6)$ ตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

ตัวเลือก 4. $(-6 , 4) ; 4^2 = 16 \neq -48 = 8(-6)$ ตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

วิธีจริง จุดศูนย์กลางวงกลมคือ (2 , 0) และรัศมี 4 สมการวงกลมคือ $(x-2)^2 + (y-0)^2 = 16$

แทนค่า $y^2 = 8x$ $\quad (x-2)^2 + 8x = 16$

$(x+6)(x-2) = 0$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = 2$ ทำให้ได้ว่า $y^2 = 16$ นั่นคือ $y = \pm 4$

เพราะฉะนั้นจุดตัดของวงกลมกับพาราโบลาคือ (2 , 4) และ (2 , – 4)

ตัวอย่างที่ 6.15 วงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรง $12x - 5y + 2 = 0$ และมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$ ตรงกับข้อใด

1. $(x-2)^2 + y^2 = 3$
2. $(x-2)^2 + y^2 = 4$
3. $(x-2)^2 + y^2 = 5$
4. $(x-2)^2 + y^2 = 7$

ตอบ 2.

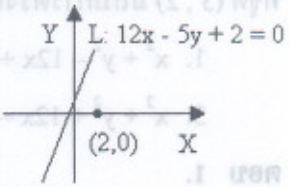
แนวคิด การตัดตัวเลือก เขียนรูปเส้นตรงก่อนแล้ว จัดรูปสมการวงกลม

$x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$

$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 3 + 4$

$(x-2)^2 + y^2 = 7$

จุดศูนย์กลางวงกลมคือ (2 , 0) วัดระยะทางจากจุด (2 , 0)



มายังเส้นตรง L ได้ 2 เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลมต้องเท่ากับ 2

ดูจากรัศมีของแต่ละตัวเลือก เลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง ระยะทางจากจุด (2 , 0) มายังเส้นตรง $L : 12x - 5y + 2 = 0$ มีค่า $= \left|\frac{12(2) - 5(0) + 2}{\sqrt{144 + 25}}\right| = 2$

เพราะฉะนั้นรัศมีวงกลม = 2 เพราะฉะนั้นสมการวงกลมคือ $(x-2)^2 + y^2 = 4$

ตัวอย่างที่ 6.16 เส้นตรง $y = mx$ สัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$ ที่จุด P จงหาค่า m

1. $\pm\frac{4}{3}$
2. $\pm\frac{3}{4}$
3. $\pm\frac{2}{3}$
4. $\pm\frac{3}{2}$

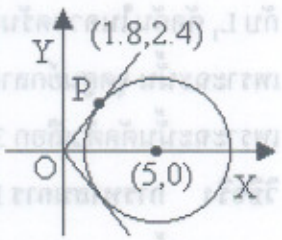
ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เขียนรูปวงกลมและเส้นสัมผัสเพื่อประมาณค่า m

จัดรูปสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

$x^2 - 10x + 25 + y^2 = -9 + 25$

$(x-5)^2 + y^2 = 16$



เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง (5 , 0) รัศมี 4

วัดพิกัดของจุด P ได้ (1.8 , 2.4) เพราะฉะนั้นความชัน $OP = \frac{2.4}{1.8} = \frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง หาค่า m จากจุดตัดของเส้นตรง $y = mx$ กับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 9 = 0$

$x^2 + (mx)^2 - 10x + 9 = 0$

$(1 + m)x^2 - 10x + 9 = 0$

เพราะว่าเราต้องการจุดสัมผัส เพราะฉะนั้นคำตอบของสมการ $(1 + m)x^2 - 10x + 9 = 0$ มีค่าเดียวเมื่อ $(-10)^2 - 4(1 + m^2)(9) = 0$

$100 - 36 - 36m^2 = 0$

$m^2 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$ เพราะฉะนั้น $m = \pm\frac{4}{3}$

ตัวอย่างที่ 6.17 วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ และสัมผัสกับเส้นตรง $x + 1 = 2y$ ที่จุด $(3 , 2)$ มีสมการตรงกับข้อใด

1. $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 12x - 8y - 7 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 12x - 8y + 7 = 0$
4. $x^2 + y^2 + 12x + 8y - 7 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้จุดศูนย์กลางของแต่ละตัวเลือกช่วยในการตัดตัวเลือก

จากสูตรสมการวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$

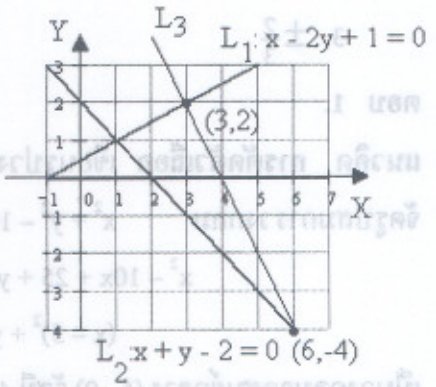
เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมแต่ละตัวเลือกคือ

1. $(6 , -4)$
2. $(6 , 4)$
3. $(-6 , 4)$
4. $(-6 , -4)$

เพราะว่า $(6 , 4)$ และ $(-6 , -4)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

ต่อไปวาดรูปประกอบเพราะว่า $(3 , 2)$ เป็นจุดสัมผัส

เพราะฉะนั้นจุดศูนย์กลางของวงกลมต้องอยู่บนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_2 และผ่านจุด $(3 , 2)$ ที่ตัดกับ L_1



โดยการวาดรูปก็ตัดตัวเลือกได้จะเห็นว่าจุดตัดของ L_3 กับ L_1 ตัดกันในควอดรันท์ที่ 4

เพราะฉะนั้น จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในควอดรันท์ที่ 4

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. $(-6 , 4)$ ทิ้งได้

วิธีจริง การหาสมการ L_3 เพราะว่า L_2 ตั้งฉากกับ L_3 และความชัน $L_2 : x - 2y + 1 = 0$ เท่ากับ $\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นความชัน L_3 เท่ากับ -2 สมการ L_3 คือ $(y - 2) = (-2)(x - 3)$

$$2x + y - 8 = 0 \quad \ldots(1)$$

สมการ L_1; $x + y - 2 = 0 \quad \ldots(2)$

เพราะฉะนั้นจุดตัดของ L_1 & L_3 คือ $(6 , -4)$

ระยะทางจาก $(6 , -4)$ ไปยัง $L_2 : x - 2y + 1 = 0$ คือ $\frac{|1(6) - 2(-4) + 1|}{\sqrt{1+4}} = 3\sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นสมการวงกลมคือ $(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = (3\sqrt{5})^2$

$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 7 = 0$ ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 6.18 สมการวงกลมที่ผ่านจุด A(4 , 4) และผ่านจุดที่วงกลม $x^2+y^2+4x-4y=0$ ตัดกับเส้นตรง $x+y=0$ คือสมการในข้อใด

1. $x^2+y^2+8x=64$ 2. $x^2+y^2-8x=0$
3. $x^2+y^2+8y=64$ 4. $x^2+y^2-8y=0$

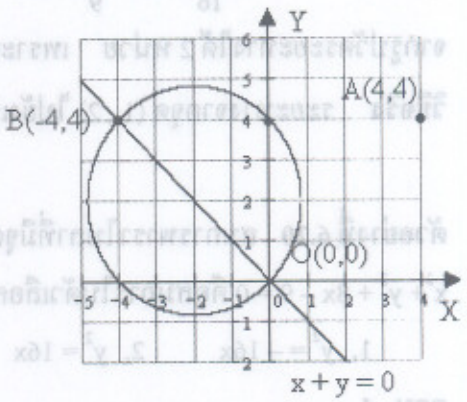
ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จัดรูปสมการวงกลม $x^2+y^2+4x-4y=0$

$$(x^2+4x+4)+(y^2-4y+4)=4+4$$

$$(x+2)^2+(y-2)^2=(2\sqrt{2})^2$$

การหาจุดตัดของวงกลม $x^2+y^2+4x-4y=0$ กับเส้นตรง $x+y=0$ แทนค่า $y=-x$ ในสมการวงกลม



$$x^2+x^2+4x-4(-x)=0$$

$$x(x+4)=0$$

$$x=-4,0$$

$$y=4,0$$

เพราะฉะนั้นจุดตัดคือ (0 , 0) และ (– 4 , 4)

แทนค่า (0 , 0) ในตัวเลือก 1. $(0)^2+(0)^2+8(0)=0\neq 64$ 2. $(0)^2+(0)^2-8(0)=0$

3. $(0)^2+(0)^2+8(0)=0\neq 64$ 4. $(0)^2+(0)^2-8(0)=0$

จะได้ว่าตัวเลือก 1. , 3. ไม่ผ่านจุด (0 , 0) เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3.

แทนค่า (– 4 , 4) ในตัวเลือกที่เหลือ ตัวเลือก 2. $(-4)^2+(4)^2-8(-4)=64\neq 0$

ตัวเลือก 4. $(-4)^2+(4)^2-8(4)=0$

จะได้ว่าตัวเลือก 2. ไม่ผ่านจุด (– 4 , 4) เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง ความชัน OA $=\frac{4}{4}=1$ ความชัน OB $=\frac{4}{-4}=-1$

เพราะฉะนั้น OA ตั้งฉากกับ OB , AOB = 90 องศา

เพราะฉะนั้น AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม และ (0 , 4) เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมี 4

สมการวงกลมคือ $(x-0)^2+(y-4)^2=16$

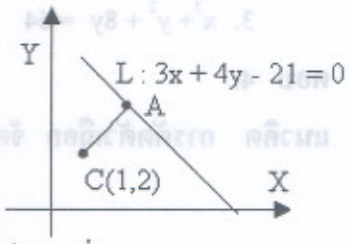
$$x^2+y^2-8y=0$$

ตัวอย่างที่ 6.19 ภาคตัดกรวยมีสมการเป็น $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$ ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของรูปไปยังเส้นตรง $3x + 4y - 21 = 0$ ยาวกี่หน่วย

1. 2 2. 2.2 3. 3 4. 6.4

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปและวัดระยะทางก็ตัดตัวเลือกได้



$$9(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 4y + 4) = 199 + 9 - 64$$

$$9(x-1)^2 + 16(y-2)^2 = 144$$

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$ ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางที่ (1 , 2)

จากรูปวัดระยะทางได้ 2 หน่วย เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1.

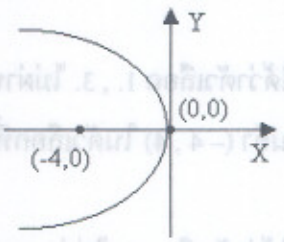
วิธีจริง ระยะทางจากจุด (1 , 2) ไปยังเส้นตรง $3x + 4y - 21 = 0$ เท่ากับ $\frac{|3(1) + 4(2) - 21|}{\sqrt{9+16}} = 2$

ตัวอย่างที่ 6.20 สมการพาราโบลาที่มีจุดยอด (0 , 0) และมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ คือสมการในตัวเลือกใด

1. $y^2 = -16x$ 2. $y^2 = 16x$ 3. $x^2 = -16y$ 4. $x^2 = 16y$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปและดูลักษณะของพาราโบลา



$$x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x^2 + 8x + 16 + y^2 = 9 + 16$$

$$(x+4)^2 + y^2 = 25$$

เป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลาง (– 4 , 0) รัศมี 5

จากรูปพาราโบลาที่โจทย์ต้องการเป็นพาราโบลาเปิดซ้าย ต่อไปพิจารณาตัวเลือกแต่ละตัว

ตัวเลือก 1. $y^2 = -16x$ เป็นพาราโบลาเปิดซ้าย ตัวเลือก 2. $y^2 = 16x$ เป็นพาราโบลาเปิดขวา

ตัวเลือก 3. $x^2 = -16y$ เป็นพาราโบลาคว่ำ ตัวเลือก 4. $x^2 = 16y$ เป็นพาราโบลาหงาย

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง เพราะว่าพาราโบลามีจุดยอด (0 , 0) โฟกัส (– 4 , 0) เพราะฉะนั้น $c = -4$

สมการพาราโบลาคือ $y^2 = 4cx$ นั้นคือ $y^2 = -16x$ ตรงกับตัวเลือก 1.

6.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. เส้นตรง PQ ตัดวงกลม $x^2+y^2-2x+4y-20=0$ โดยที่ P , Q อยู่นอกวงกลมและจุดตัดแบ่ง PQ ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน ถ้า PQ อยู่บนเส้นตรง $4x-3y-10=0$ แล้วพิกัด P , Q เท่ากับเท่าใด

   1. $P(-14,-22)$, $Q(16,18)$
   2. $P(-10,-\frac{50}{3})$, $Q(12,\frac{38}{3})$
   3. $(-8,-14)$, $Q(10,10)$
   4. $P(-6,-\frac{34}{3})$, $Q(8,\frac{22}{3})$

2. วงกลมใดมีจุดศูนย์กลางที่ $(2,-3)$ และรัศมียาว 4 หน่วย

   1. $x^2+y^2-4x+6y-3=0$
   2. $x^2+y^2+4x-6y+3=0$
   3. $x^2+y^2+4x-6y-9=0$
   4. $x^2+y^2-4x+6y+9=0$

3. สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่จุดโฟกัสของวงรี $25x^2+16y^2-100x+96y-156=0$ และความกว้างของไฮเพอร์โบลานี้ ณ. จุดที่ผ่านโฟกัสยาวเท่ากับความยาวแกนโทของวงรี คือข้อใด

   1. $3x^2-4y^2-12x-24y-23=0$
   2. $3x^2-4y^2-12x-24y+12=0$
   3. $3x^2-4y^2+12x+24y-23=0$
   4. $3x^2-4y^2+12x-32y-13=0$

4. สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่เดียวกับจุดศูนย์กลางของวงรีและมีรัศมียาวเท่ากับระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังโฟกัสของวงรีโดยกำหนดให้สมการวงรีคือ $4x^2+9y^2-8x+36y+4=0$

   1. $x^2+y^2-2x+4y=20$
   2. $x^2+y^2-2x+4y=0$
   3. $x^2+y^2+2x-4y=0$
   4. $x^2+y^2+2x-4y=0$

5. สมการไฮเพอร์โบลามีโฟกัสของวงรี $9x^2+16y^2=144$ เป็นจุดยอดและมีจุดยอดของวงรีนั้นเป็นจุดโฟกัส ตรงกับข้อใด

   1. $9x^2-16y^2=144$
   2. $7x^2-9y^2=63$
   3. $9x^2-7y^2=63$
   4. $16x^2-9y^2=144$

6. ถ้า $px^2+qy^2=1$ โดยที่ $0<q<p$ เป็นสมการวงรี แล้วโฟกัสคือข้อใด

   1. $(-\sqrt{\frac{p-q}{pq}},0),(\sqrt{\frac{p-q}{pq}},0)$
   2. $(-\sqrt{\frac{p+q}{pq}},0),(\sqrt{\frac{p+q}{pq}},0)$
   3. $(0,-\sqrt{\frac{p+q}{pq}}),(0,\sqrt{\frac{p+q}{pq}})$
   4. $(0,-\sqrt{\frac{p-q}{pq}}),(0,\sqrt{\frac{p-q}{pq}})$

7. ข้อใดเป็นสมการเส้นโค้งที่มีผลต่างของระยะทางจากจุด (x , y) ใดๆ บนเส้นโค้งนี้ไปยังจุด (– 5 , 1) และ (5 , 1) เท่ากับ 6 หน่วย

1. $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$ 2. $\frac{y^2}{9}-\frac{(x-1)^2}{16}=1$

3. $\frac{(y-1)^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 4. $\frac{(x-1)^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

8. จุด M(3 , – 1) เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของแกนโทของวงรีที่มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง y – 6 = 0 ถ้า a เป็นระยะจากจุดศูนย์กลางของวงรีถึงจุดยอด และ c เป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัสโดยที่ c : a = 1 : $\sqrt{2}$ แล้วสมการวงรีคือข้อใด

1. $\frac{(x-3)^2}{100}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$ 2. $\frac{(x-3)^2}{64}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

3. $\frac{(x-3)^2}{50}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$ 4. $\frac{(x-3)^2}{81}+\frac{(y+6)^2}{25}=1$

9. จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนกราฟของพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ (4 , 2) และมีสมการเส้นไดเรกตริกซ์เป็น x – 2 = 0

1. (0 , 5) 2. (3 , 2)

3. (0 , 0) 4. (4 , 5)

10. เส้นตรง x + y = k สัมผัสกับพาราโบลา $y^2 = 4x$ เมื่อ k เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2

3. – 1 4. – 2

เฉลย 1. (3) 2. (1) 3. (2) 4. (2) 5. (3)

6. (4) 7. (1) 8. (3) 9. (2) 10. (3)

∩∅∪×~∀∃ϕπθθ∝⊂⊄∈∉°∞∧∨≤↔≠→±≥→↑XY∢∡≤≱≰≱

❶❷❸❹①②③④

บทที่ 7
ฟังก์ชัน

7.1 สรุปเนื้อหา

1. **ฟังก์ชัน** คือความสัมพันธ์ซึ่งสองคู่อันดับใดๆ ของความสัมพันธ์นั้น ถ้าสมาชิกตัวหน้าเท่ากันแล้ว สมาชิกตัวหลังต้องเท่ากัน
2. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B หมายความว่า $f \subset A \times B$ โดยมีสมบัติว่า

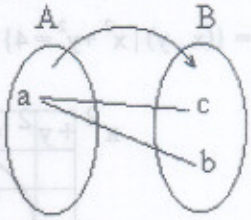
   ถ้า $(x , y) \in f$ และ $(x , z) \in f$ แล้ว $y = z$ หรือ ถ้า $x = z$ แล้ว $f(x) = f(z)$
3. การแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ให้แสดงว่า ถ้า $x = z$ แล้ว $f(x) = f(z)$

   ตัวอย่างเช่น $f = \{(x , y) \mid y = x^2 + x + 1\}$

   นั่นคือ $f(x) = x^2 + x + 1$

   เพราะว่า $x = z$ เพราะฉะนั้น $x^2 + x + 1 = z^2 + z + 1$

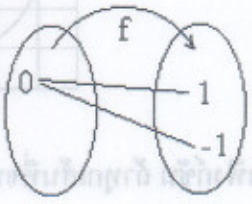
   นั่นคือ $f(x) = f(z)$
4. การแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ให้หาตัวอย่างที่ทำให้เกิดเหตุการณ์ที่สมาชิก 1 ตัวของ A ถูกส่งไป 2 ที่ ที่ต่างกันใน B



   ตัวอย่างเช่น $f = \{(x , y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

   จะเห็นว่า $(0 , 1) , (0 , -1) \in f$

   เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชัน



5. f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ 1. ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

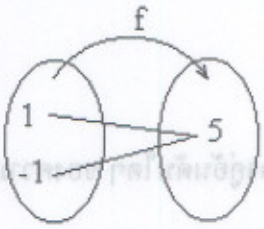
หรือ 2. ถ้า $(x_1, y), (x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = x + 4$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

$f(x) = |x| + 4$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

6. การแสดงว่า f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก A ไป B ให้เลือกสมาชิกของ A และ B ที่ทำให้เกิดเหตุการณ์ที่สมาชิก 2 ตัวที่ต่างกันของ A ถูกส่งค่าไปที่เดียวกัน

ตัวอย่างเช่น $f(x) = |x| + 4$



7. การแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ให้แสดงข้อพิสูจน์ว่า ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x + 3$

ให้ $f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

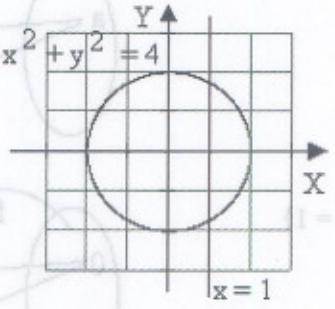
$2x_1 = 2x_2$

$x_1 = x_2$

สรุป $f(x) = 2x + 3$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

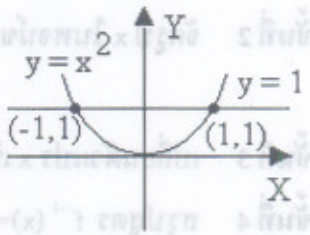
8. การตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยดูจากกราฟ เราใช้เงื่อนไขว่า ถ้ามีเส้นที่ขนานกับแกน Y บางเส้นตัดกราฟมากกว่า 1 จุด แล้วความสัมพันธ์นั้นไม่เป็นฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน



หมายเหตุ f เป็นฟังก์ชัน ถ้าทุกเส้นที่ขนานกับแกน Y ตัดกราฟอย่างมาก 1 จุด

9. การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 หรือไม่ โดยดูจากกราฟ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ก็ต่อเมื่อ ทุกเส้นตรงที่ขนานกับแกน X ตัดกราฟของฟังก์ชัน f อย่างมาก 1 จุด
เพราะฉะนั้นถ้ามีเส้นตรงบางเส้นที่ขนานกับแกน X ตัดกราฟของ f 2 จุด แล้ว f ไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1
ตัวอย่างเช่น



10. f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$

11. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $f : A \xrightarrow[\text{ทั่วถึง}]{1-1} B$ แล้ว $n(A) = n(B)$

12. ถ้า $f : A \xrightarrow{1-1} B$ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันจาก B ไปยัง A

13. การหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = f(x)$ หรือ $f = \{(x , y) \mid y = f(x)\}$

$D_f = \{x \mid f(x)$ หาค่าได้$\}$

$R_f = \{y \mid y = f(x)$ และ $x \in D_f\}$

ตัวอย่าง 1 $f(x) = 2x + 3$ เพราะว่าทุกค่า x , 2x + 3 หาค่าได้ ดังนั้น f(x) หาค่าได้ทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $D_f = (-\infty , \infty)$ เพราะว่า $-\infty < x < \infty$

$-\infty < 2x < \infty$

$-\infty < 2x + 3 < \infty$

$-\infty < f(x) < \infty$ ทุกค่า x

เพราะฉะนั้น $R_f = (-\infty , \infty)$

ตัวอย่าง 2 $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ $\sqrt{x^2 - 4}$ หาค่าได้ $\leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$

$\leftrightarrow (x - 2)(x + 2) \geq 0$

$\leftrightarrow x \in (-\infty , -2] \cup [2 , \infty)$

เพราะฉะนั้น $D_f = (-\infty , -2] \cup [2 , \infty)$ เพราะว่า $x^2 - 4 \geq 0$

$\sqrt{x^2 - 4} \geq 0$, $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in D_f$

เพราะฉะนั้น $R_f = [0 , \infty)$

14. การหา f^{-1} เมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

ตัวอย่าง $f(x) = 2x + 3$

ขั้นที่ 1 สมมติ $y = 2x + 3$

ขั้นที่ 2 จัดรูป x ในพจน์ของ y $\quad 2x = y - 3$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

ขั้นที่ 3 เปลี่ยนตัวแปร x เป็น y และ y เป็น x $\quad y = \frac{x-3}{2}$

ขั้นที่ 4 สรุปสูตร $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$

ตัวอย่าง $f(x) = \sqrt{x^3+4}$

ขั้นที่ 1 สมมติ $y = \sqrt{x^3+4}$

ขั้นที่ 2 จัดรูป x ในพจน์ของ y $\quad y^2 = x^3 + 4$

$$x^3 = y^2 - 4$$

$$x = \sqrt[3]{y^2-4}$$

ขั้นที่ 3 เปลี่ยน x เป็น y และ y เป็น x $\quad y = \sqrt[3]{x^2-4}$

ขั้นที่ 4 สรุป $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x^2-4}$

14. f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่มี A เป็นโดเมนและมีสับเซตของ B เป็นเรนจ์

f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เขียนแทนด้วย $f : A \longrightarrow B$ โดยทั่วไปเมื่อกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชัน จะหมายถึงฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

15. พีชคณิตของฟังก์ชัน

$f+g = \{(x,y) \in R \times R \mid y = f(x) + g(x)\}$ โดยที่ $D_{f+g} = D_f \cap D_g$

$f-g = \{(x,y) \in R \times R \mid y = f(x) - g(x)\}$ โดยที่ $D_{f-g} = D_f \cap D_g$

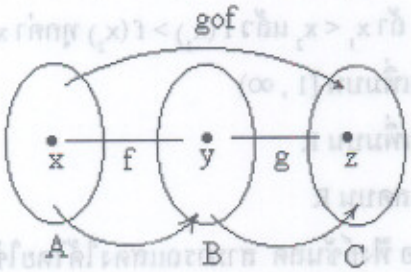
$fg = \{(x,y) \in R \times R \mid y = f(x)\,g(x)\}$ โดยที่ $D_{fg} = D_f \cap D_g$

$\frac{f}{g} = \{(x,y) \in R \times R \mid y = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0\}$

โดยที่ $D_{f/g} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

16. **ฟังก์ชันคอมโพสิต** (Composite function)

ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะการจับคู่ของสมาชิกในเซต ดังรูป



f และ g เป็นฟังก์ชัน $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ **ฟังก์ชันคอมโพสิตของ** f และ g แทนด้วย g o f

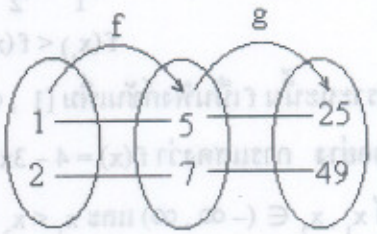
กำหนดโดย $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ ทุกค่า x ที่ $f(x) \in D_g$

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 2x + 3$ $g(x) = x^2$

$f(1) = 5$ $g(5) = 25$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 25$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(7) = 49$



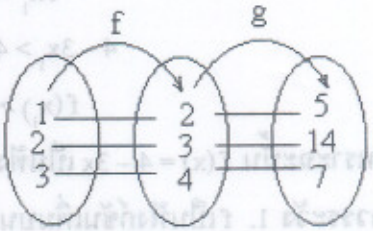
ตัวอย่าง $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

$g = \{(3, 14), (2, 5), (4, 7)\}$

$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 5$

$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(3) = 14$

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(4) = 7$



ข้อควรจำ สำหรับคำถามถูกหรือผิด ข้อความต่อไปนี้ถูกต้องเสมอ

1. $D_{gof} \subset D_f$ $R_{gof} \subset R_g$
2. ถ้า $R_f \subset D_g$ แล้ว $D_{gof} = D_f$
3. ถ้า $f : A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} B$, $g : B \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} C$ แล้ว $gof : A \xrightarrow[\text{onto}]{1\text{-}1} C$
4. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
5. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว $(f \circ f^{-1})(x) = x$

17. $f : R \rightarrow R$ และ $A \subset D_f$

17.1 f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) < f(x_2)$ ทุกค่า $x \in A$

17.2 f เป็นฟังก์ชันลดบน A ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x_1 < x_2$ แล้ว $f(x_1) > f(x_2)$ ทุกค่า $x \in A$

ตัวอย่าง $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[1 , \infty)$

$f(x) = 3x - 4$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R

$f(x) = 4 - 3x$ เป็นฟังก์ชันลดบน R

18. การตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลด สามารถแสดงได้โดยใช้อสมการ

ตัวอย่าง $f(x) = x^2 , x \in [1 , \infty)$

$x_1 , x_2 \in [1 , \infty)$ และ $1 \le x_1 < x_2$

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $[1 , \infty)$

ตัวอย่าง การแสดงว่า $f(x) = 4 - 3x$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty , \infty)$

ให้ $x_1 , x_2 \in (-\infty , \infty)$ และ $x_1 < x_2$

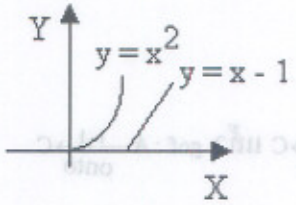
$$-3x_1 > -3x_2$$

$$4 - 3x_1 > 4 - 3x_2$$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 4 - 3x$ เป็นฟังก์ชันลด

ข้อควรระวัง 1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต A และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต B แล้ว f อาจไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนเซต $A \cup B$ ก็ได้ ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; 0 \le x < 1 \\ x - 1 & ; 1 \le x \le 2 \end{cases}$

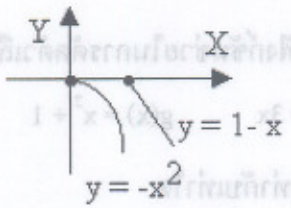


f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0 , 1) , [1 , 2]$

เพราะว่า $0 < 1$ แต่ $f(0) = 0 = f(1)$ เพราะฉะนั้น ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $[0 , 2]$

2. f เป็นฟังก์ชันลดบนเซต A , f เป็นฟังก์ชันลดบนเซต B แต่ f อาจไม่เป็นฟังก์ชันลดบนเซต $A \cup B$ ก็ได้ ตัวอย่างเช่น

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & , \ 0 \le x < 1 \\ 1-x & , \ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



f เป็นฟังก์ชันลดบน $[0 , 1) , [1 , 2]$

เพราะว่า $0 < 1$ แต่ $f(0) = 0 = f(1)$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันลดบน $[0 , 2]$

3. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน A และ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน B แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $A \cap B$ ถูกต้องเสมอ

4. ถ้า f เป็นฟังก์ชันลดบน A และ f เป็นฟังก์ชันลดบน B แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบน $A \cap B$

5. f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ $-f$ เป็นฟังก์ชันลด

   f เป็นฟังก์ชันลด ก็ต่อเมื่อ $-f$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

แนวคิดของการตัดตัวเลือกหาอ่านได้ใน

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

7.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. แผนภาพการส่งค่าของฟังก์ชันช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนด $f(x) = 3x$ $g(x) = x^2 + 1$ และ $h(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 2x-3 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$

$(f \circ (h \circ g))(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $6x^2$
2. $6x^2 - 3$
3. เท่ากับ $\begin{cases} 6x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 6x^2 - 3 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$
4. เท่ากับ $\begin{cases} 6x^2 - 3 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ 6x^2 & \text{เมื่อ } x > 0 \end{cases}$

การตัดตัวเลือก $(f \circ (h \circ g))(0) = f(h(g(0))) = f(h(1)) = f(-1) = -3$

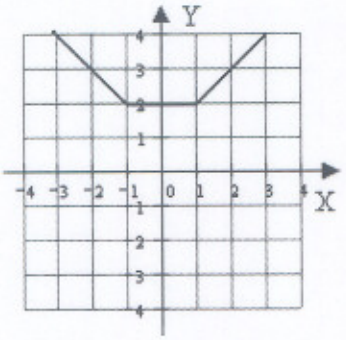
เพราะว่าตัวเลือก 3 และ 4 หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า ตัวเลือก 1 $6x^2 = 0$ เมื่อ $x = 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้ง

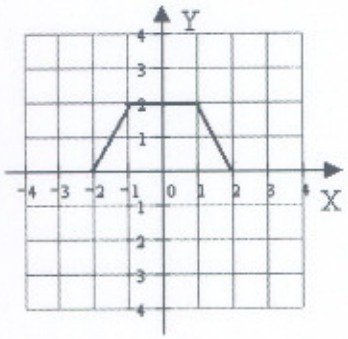
2. แทนค่าจุดบางจุดของฟังก์ชันเพื่อตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กราฟของ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = |x+1| - |x-1|\}$ ตรงกับตัวเลือกใด

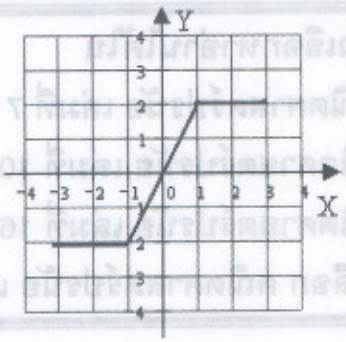
1.



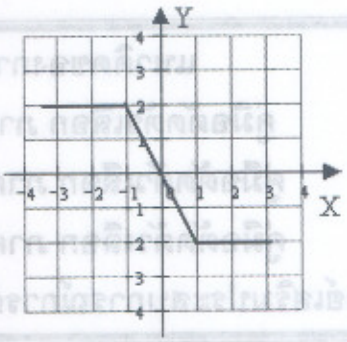
2.



3.



4.



การตัดตัวเลือก $x = 0$ จะได้ว่า $y = |0 + 1| - |0 - 1| = 0$ ดังนั้น $(0 , 0)$ ต้องอยู่บนกราฟ
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.
แทนค่า $x = 2$ จะได้ $y = |2 + 1| - |2 - 1| = 2$ ดังนั้น $(2 , 2)$ ต้องอยู่บนกราฟ
แต่ตัวเลือก 4. ไม่มีจุด $(2 , 2)$ บนกราฟ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

3. ปัญหาเกี่ยวกับโดเมนหรือเรนจ์เราใช้การเลือกค่า x บางค่าว่าอยู่ในเซตของตัวเลือกหรือไม่

ตัวอย่าง กำหนด $f = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}\}$ โดเมนและเรนจ์ของ f คือข้อใด

1. $D_f = [-3 , 3] , R_f = (-\infty,\infty)$
2. $D_f = (-\infty , -3] \cup [3 , \infty) , R_f = (-\infty, 1]$
3. $D_f = [3 ,\infty) , R_f = [3 ,\infty)$
4. $D_f = (-\infty , -3] , R_f = [3 , \infty)$

การตัดตัวเลือก จากสูตร $y = 1 - \sqrt{x^2 - 9}$ $(x = 5 , y = -3) \in f$
เพราะว่า $5 \in D_f$ และ $-3 \in R_f$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1. , 4. และ 3.

4. ใช้เหตุผลว่า ถ้า $(a , b) \in f$ แล้ว $(b , a) \in f^{-1}$ ช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \sqrt{4 - x}\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $f^{-1} = \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = 4 - x\}$
2. $f^{-1} = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 4 - x^2\}$
3. f^{-1} เป็นฟังก์ชันแต่ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
4. $\{(1 , 3) , (3 , -5)\}$ เป็นสับเซตของ f^{-1}

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(x) = \sqrt{4 - x}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ดังนั้น f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง
เพราะว่า $(-5 , 3) , (-5 , -3) \in \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = 4 - x\}$ แต่ $(-3 , -5) \notin f$
เพราะฉะนั้น $f \neq \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = 4 - x\}$ เราจึงตัดตัวเลือก 1.ทิ้งได้
เพราะว่า $(-1 , 3) , (1 , 3) \in \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = 4 - x\}$ และ $(3 , -1) \notin f$
เพราะฉะนั้น $f^{-1} \neq \{(x , y) \in R \times R \mid y^2 = 4 - x\}$ เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้
เพราะว่า $(3 , 1) , (-5 , 3) \in f$ เพราะฉะนั้น $(1 , 3) , (3 , -5) \in f^{-1}$
เพราะฉะนั้น $\{(1 , 3) , (3 , -5)\}$ เป็นสับเซตของ f^{-1} ตัวเลือก 4. ถูกต้อง

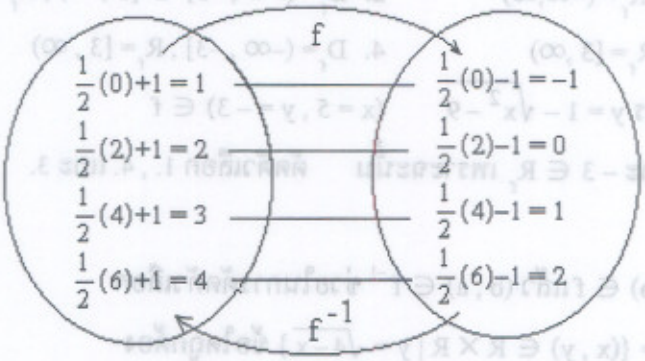
7.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 7.1 กำหนดให้ $f(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{2}x-1$ จะได้ว่า $f^{-1}(2)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 2
3. 4
4. 6

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากสูตร $f(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{2}x-1$ และโดยการแทนค่าจากตัวเลือก



เพราะว่า $f(4)=2$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(2)=4$ ดังนั้นตัวเลือก 3. ถูกต้อง

วิธีจริง
$$f(\tfrac{1}{2}x+1) = \tfrac{1}{2}x-1$$
$$f(\tfrac{1}{2}(2x)+1) = \tfrac{1}{2}(2x)-1$$
$$f(\tfrac{1}{2}(2x-2)+1) = \tfrac{1}{2}(2x-2)-1$$
$$f(x) = x-2$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x)=x+2$ และ $f^{-1}(2)=4$

ตัวอย่างที่ 7.2 กำหนด $f=\{(x,y)\in R\times R \mid y=\frac{4}{1+x^2}\}$ โดเมนและเรนจ์ของ f คือตัวเลือกใด

1. $D_f=[4,\infty)$ และ $R_f=(0,4)$
2. $D_f=R-\{-1\}$ และ $R_f=(0,4]$
3. $D_f=R$ และ $R_f=(0,4]$
4. $D_f=R$ และ $R_f=(1,4]$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x=-1$ ทำให้ $y=\frac{4}{1+(-1)^2}=2$

ดังนั้น $(-1, 2) \in f$ นั่นคือ $-1 \in D_f$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปดูว่า $y = 1$ ได้หรือไม่ก็พอ เพราะว่า $x = \sqrt{3}$ ทำให้ $y = \frac{4}{1+(\sqrt{3})^2} = 1$

ดังนั้น $1 \in R_f$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสูตร $y = \frac{4}{1+x^2}$ แสดงว่าทุกค่า x, $\frac{4}{1+x^2}$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น $D_f = R$

เพราะว่า $1 + x^2 \geq 1$

$$0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$$

$$0 < \frac{4}{1+x^2} \leq 4$$

เพราะฉะนั้น $0 < y \leq 4$ ดังนั้น $R_f = (0, 4]$

ตัวอย่างที่ 7.3 กำหนด $f = \{(x, y) \mid y = \sqrt{3-x}\}$ และ $g = \{(x, y) \mid y = \frac{2}{1-|x+3|}\}$

$D_f \cap D_g$ คือข้อใด

1. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, 3]$
3. $(-\infty, -4) \cup (-4, 3) \cup (3, \infty)$
4. $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกตัวเลขบางตัวที่เหมาะสมนำมาแทนค่าแล้วค่อยๆ ตัดตัวเลือก

เพราะว่า $x = 3$ ทำให้ $y = \sqrt{3-3} = 0$, $(3, 0) \in f$ และ $y = \frac{2}{1-|3+3|} = -\frac{2}{5}$, $(3, -\frac{2}{5}) \in g$

ดังนั้น $3 \in D_f \cap D_g$ สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การหาโดเมน f $3 - x \geq 0$

$$3 \geq x$$

เพราะฉะนั้น $D_f = (-\infty, 3]$

การหาโดเมน g พิจารณาค่า x ที่ทำให้ $1 - |x+3| = 0$

$$|x+3| = 1$$

$$x+3 = 1 \text{ หรือ } x+3 = -1$$

$$x = -2 \text{ หรือ } x = -4$$

ดังนั้น $D_g = R - \{-4, -2\} = (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, \infty)$

เพราะฉะนั้น $D_f \cap D_g = (-\infty, 3] \cap ((-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, \infty))$

$$= (-\infty, -4) \cup (-4, -2) \cup (-2, 3]$$

ตัวอย่างที่ 7.4 ถ้า $f(x) = 2x^2$ และ $g(f(x)) = |x|$ แล้ว $g(x)$ เท่ากับข้อใด

1. $\sqrt{x}$
2. $\sqrt{\frac{x}{2}}$
3. $\sqrt{2}\,|x|$
4. $\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $g(f(x)) = |x|$

$g(2x^2) = |x|$

ดังนั้น $g(2(4)^2) = |4| = 4$ นั่นคือ $g(32) = 4$

ตัวเลือก 1 $\sqrt{x} = \sqrt{32} \neq 4$ ตัวเลือก 2 $\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = 4$

ตัวเลือก 3 $\sqrt{2}\,|x| = \sqrt{2}\,|32| \neq 4$ ตัวเลือก 4 $\frac{|x|}{\sqrt{2}} = \frac{|32|}{\sqrt{2}} \neq 4$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $g(f(x)) = |x|$

$g(2(\sqrt{\frac{x}{2}})^2) = |\sqrt{\frac{x}{2}}| = \sqrt{\frac{x}{2}}$

$g(x) = \sqrt{\frac{x}{2}}$

ตัวอย่างที่ 7.5 กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 5$, $f^{-1}(x)$ ตรงกับข้อใด

1. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 5$
2. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 5$
3. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$
4. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+5}$

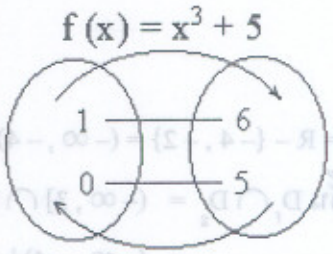
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x

ดังนั้นดูการส่งค่า x บางตัวก็ได้คำตอบแล้ว ตัวอย่างเช่น

ดังนั้น $f^{-1}(5) = 0$ และ $f^{-1}(6) = 1$

ต่อไปดูการส่งค่าของ $f^{-1}(x)$ จากสูตรแต่ละตัวเลือก



ตัวเลือก 1 $f^{-1}(5) = \sqrt[3]{5} - 5 \neq 0$

ตัวเลือก 2 $f^{-1}(5) = \sqrt[3]{5} + 5 \neq 0$

ตัวเลือก 3 $f^{-1}(5) = \sqrt[3]{5-5} = 0$

ตัวเลือก 4 $f^{-1}(5) = \sqrt[3]{5+5} = \sqrt[3]{10} \neq 0$

สรุปตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ผิดแน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง $y = f(x) = x^3 + 5$

$x^3 = y - 5$

$x = \sqrt[3]{y-5}$

สรุป $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5}$

ตัวอย่างที่ 7.6 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ จงหาอินเวอร์สของ f

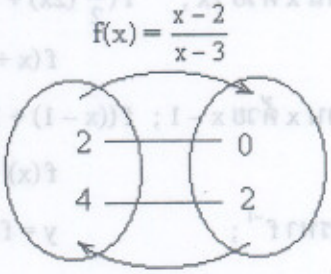
1. $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{x-2}$
2. $f^{-1}(x) = \frac{2-3x}{1+x}$
3. $f^{-1}(x) = \frac{2+3x}{1+x}$
4. $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x

ดังนั้นดูการส่งค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้

ดังนั้น $f^{-1}(0) = 2$ และ $f^{-1}(2) = 4$



พิจารณาค่าของ $f^{-1}(x)$ ในแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1 $f^{-1}(0) = \frac{0-3}{0-2} = 1.5 \neq 2$

ตัวเลือก 2 $f^{-1}(0) = \frac{2-0}{1+0} = 2$; $f^{-1}(2) = \frac{2-6}{1+2} = \frac{-4}{3} \neq 4$

ตัวเลือก 3 $f^{-1}(0) = \frac{2+0}{1+0} = 2$; $f^{-1}(2) = \frac{2+6}{1+2} = \frac{8}{3} \neq 4$

ตัวเลือก 4 $f^{-1}(0) = \frac{0-2}{0-1} = 2$; $f^{-1}(2) = \frac{6-2}{2-1} = 4$

ดังนั้น $f^{-1}(x)$ ในตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ผิดแน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $y = f(x) = \frac{x-2}{x-3}$

$y - 1 = \frac{x-2}{x-3} - 1 = \frac{x-2-x+3}{x-3} = \frac{1}{x-3}$

$x - 3 = \frac{1}{y-1}$

$x = \frac{1}{y-1} + 3 = \frac{1+3y-3}{y-1} = \frac{3y-2}{y-1}$

สรุป $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1}$

ตัวอย่างที่ 7.7 กำหนดให้ $f(\frac{1}{2}x+1)=\frac{1}{2}x-1$, $f^{-1}(x)$ มีค่าเท่าใด

1. $x-1$
2. $x-2$
3. $x+2$
4. $x+1$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า x บางค่าก็ได้คำตอบแล้ว

เพราะว่า $f(x) = f(\frac{1}{2}(0)+1) = \frac{1}{2}(0)-1 = -1$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(-1)=1$

แทนค่า $x=-1$ ในสูตรของ $f^{-1}(x)$ ทุกตัวเลือก จะได้ว่า

1. $f^{-1}(-1)=-2$
2. $f^{-1}(-1)=-3$
3. $f^{-1}(-1)=1$
4. $f^{-1}(-1)=0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง การหาสูตร $f(x)$ และ $f^{-1}(x)$ โดยการจัดรูปทางพีชคณิตทำได้ดังนี้

$$f(\tfrac{1}{2}x+1) = \tfrac{1}{2}x-1$$

แทน x ด้วย 2x ; $f(\frac{1}{2}(2x)+1) = \frac{1}{2}(2x)-1$

$$f(x+1) = x-1$$

แทน x ด้วย $x-1$; $f((x-1)+1) = (x-1)-1$

$$f(x) = x-2$$

การหา f^{-1} ; $y=f(x) = x-2$

$$x = y+2$$

สรุป $f^{-1}(x) = x+2$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(2) = 4$

ตัวอย่างที่ 7.8 กำหนด $f(x)=x^2+1$ เมื่อ $|x|>0$ และ $g(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x} & ; \ x \le 0\\ 6-x & ; \ x>4\end{cases}$

โดเมนของ $\frac{f}{g}$ คือตัวเลือกใด

1. $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$
2. $(-\infty,-2)\cup(4,6)\cup(6,\infty)$
3. $(4,\infty)$
4. $(-\infty,-4)\cup(4,\infty)$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $g(6) = 0$ เพราะฉะนั้น 6 ต้องไม่เป็นสมาชิกโดเมนของ $D_{f/g}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $D_f = (-\infty , 0) \cup (0 , \infty)$

$D_g = (-\infty , 0] \cup (4 , \infty)$

$g(x) = 0$ เมื่อ $x = 6$

$$D_{\frac{f}{g}} = (D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

$$= [((-\infty , 0) \cup (0 , \infty)) \cap ((-\infty , 0] \cup (4 , \infty))] - \{6\}$$

$$= [(-\infty , 0) \cup (4 , \infty)] - \{6\}$$

$$= (-\infty , 0) \cup (4 , 6) \cup (6 , \infty)$$

ตัวอย่างที่ 7.9 กำหนดฟังก์ชัน f และ g จากเซตของจำนวนจริง R ไปยัง R โดย $f(x) = 1 + |x|$ และ $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ จงหา $(g \circ f)(x)$ คือข้อใด

1. $1 + |x|$
2. $2 + |x|$
3. $\frac{1}{1+|x|}$
4. $\frac{1}{2+|x|}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** แทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 1$

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1 + |x|) = g(2)$$

$$= \frac{1}{f(2)} = \frac{1}{1+|2|} = \frac{1}{3}$$

แทนค่า $x = 1$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1 $1 + |x| = 1 + |1| = 2 \neq \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 2 $2 + |x| = 2 + |1| = 3 \neq \frac{1}{3}$

ตัวเลือก 3 $\frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+|1|} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1 + |x|) = \frac{1}{f(1+|x|)} = \frac{1}{1+|1+|x||} = \frac{1}{2+|x|}$

ตัวอย่างที่ 7.10 ถ้า $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$ แล้วโดเมนของความสัมพันธ์ r คือข้อใด

1. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
2. $\{x \mid x \leq -2$ หรือ $x \geq 2\}$
3. $\{-1, 0, 1\}$
4. $\{-2, 0, 2\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อสอบแบบนี้ขอให้สังเกตดีๆ จะเห็นว่า D_r ต้องเป็นสับเซตของ A และ A มีสมาชิกเพียง 7 ตัว แต่เซตในตัวเลือก 1 และ 2 เป็นเซตอนันต์ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 2 ทิ้งได้ ต่อไปเหลือตัวเลือก 3 และ 4 เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือกได้เช่น $x = 2$

แทนค่า $x = 2$ ในสมการ $x^2 + 4y^2 = 4$

$$2^2 + 4y^2 = 4$$
$$4y^2 = 0$$
$$y = 0$$

สรุป $(2, 0) \in r$ เพราะฉะนั้น $2 \in D_r$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $x^2 + 4y^2 = 4$

$$4y^2 = 4 - x^2$$
$$y^2 = \frac{4 - x^2}{4}$$

ค่า x ทำให้ $\frac{4 - x^2}{4}$ เป็นจำนวนเต็มคือ $x = 0, 2, -2$ สรุป $D_r = \{-2, 0, 2\}$

ตัวอย่างที่ 7.11 กำหนด $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}\}$ จะมีเรนจ์ดังข้อใด

1. $(-1, 2)$
2. $[-1, 1]$
3. $[-1, 1)$
4. $[0, 2)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $x = 1$ สามารถจำแนกตัวเลือก 2. และ 3. ได้

สมมติ $y = 1$ จะได้ว่า $1 = \frac{|x| - 1}{|x| + 1}$

$$|x| + 1 = |x| - 1$$
$$1 = -1$$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $y = 1$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้น $1 \notin R_f$ เราจึงตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

เลือก $y = -1$ จำแนกตัวเลือก 1. และ 3.

สมมติ $y = -1$ จะได้ $-1 = \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

$$-|x|-1 = |x|-1$$

$$-|x| = |x|$$

$$x = 0$$

ดังนั้น $(0, -1) \in r, -1 \in D_f$ ดังนั้นตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $y = \dfrac{|x|-1}{|x|+1}$

$$y-1 = \frac{|x|-1}{|x|+1} - 1 = \frac{|x|-1-|x|-1}{|x|+1} = \frac{-2}{|x|+1}$$

$$|x|+1 = \frac{-2}{y-1}$$

$$|x| = \frac{-2}{y-1} - 1 = \frac{-2-y+1}{y-1} = \frac{-1-y}{y-1} = \frac{-(y+1)}{y-1}$$

เพราะว่า $|x| \geq 0$ ดังนั้น $\dfrac{-(y+1)}{y-1} \geq 0$

$$\frac{y+1}{y-1} \leq 0$$

$$-1 \leq y < 1$$

สรุป $R_f = [-1, 1)$

ตัวอย่างที่ 7.12 ถ้ากำหนด $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ จะมีฟังก์ชัน 1 – 1 จาก A ไปบน A ได้ทั้งหมดกี่แบบฟังก์ชัน

1. $2n$
2. $2n!$
3. n^2
4. $n!$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และข้อเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n สมมติ $A = \{1\}, n = 1$ เพราะว่า $f: A \longrightarrow A$ และ f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 มีได้ 1 ตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

สมมติ $A = \{1, 2\}, n = 2$ ฟังก์ชัน 1 – 1 ทุก A ไปบน A มี 2 ตัวคือ

$f = \{(1, 1), (2, 2)\}$ และ $f = \{(1, 2), (2, 1)\}$

เพราะว่าตัวเลือก 3. $2^2 = 4$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$f(1)$ เลือกส่งค่าได้ n วิธี

$f(2)$ เลือกส่งค่าได้ $n-1$ วิธี

$f(3)$ เลือกส่งค่าได้ $n-2$ วิธี

$\vdots$

$f(n-1)$ เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

$f(n)$ เลือกส่งค่าได้ 1 วิธี

สรุปจำนวนฟังก์ชัน f ที่เป็นไปได้ $= (n)(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$

ตัวอย่างที่ 7.13 กำหนด $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(3x) = \frac{3f(x)}{3f(x)-1}$
2. $f(3x) = \frac{3f(x)}{3f(x)-3}$
3. $f(3x) = 3f(x) - 1$
4. $f(3x) = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ x ดังนั้นแทนค่า x บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 2$ จะได้ว่า $f(2) = \frac{2}{2-1} = 2$

และ $f(3(2)) = f(6) = \frac{6}{6-1} = \frac{6}{5} = 1.2$

ตัวเลือก 1. $\frac{3f(x)}{3f(x)-1} = \frac{3f(2)}{3f(2)-1} = \frac{3(2)}{3(2)-1} = \frac{6}{5} = 1.2$

ตัวเลือก 2. $\frac{3f(x)}{3f(x)-3} = \frac{3f(2)}{3f(2)-3} = \frac{3(2)}{3(2)-3} = \frac{6}{5} = 2 \neq 1.2$

ตัวเลือก 3. $3f(x)-1 = 3f(2)-1 = 3(2)-1 = 5 \neq 1.2$

ตัวเลือก 4. $\frac{3f(x)}{2f(x)+1} = \frac{3f(2)}{2f(2)+1} = \frac{3(2)}{2(2)+1} = \frac{6}{5} = 1.2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 3$ จะได้ว่า $f(3) = \frac{3}{3-1} = 1.5$ และ $f(3(3)) = f(4) = \frac{9}{9-1} = \frac{9}{8} = 1.125$

ตัวเลือก 1. $\frac{3f(x)}{3f(x)-1} = \frac{3f(3)}{3f(3)-1} = \frac{3(1.5)}{3(1.5)-1} = \frac{4.5}{3.5} = 1.28 \neq 1.125$

ตัวเลือก 4. $\frac{3f(x)}{2f(x)+1} = \frac{3f(3)}{2f(3)+1} = \frac{3(1.5)}{2(1.5)+1} = \frac{4.5}{4} = 1.125$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง โดยการจัดรูปทางพีชคณิต $f(x) = \frac{x}{x-1}$

$$f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{(\frac{3x}{x-1})}{(\frac{3x-1}{x-1})} = \frac{3(\frac{x}{x-1})}{3(\frac{x}{x-1})-(\frac{1}{x-1})} = \frac{3(\frac{x}{x-1})}{2(\frac{x}{x-1})+(\frac{x}{x-1})-(\frac{1}{x-1})}$$

$$= \frac{3f(x)}{2f(x)+(\frac{x-1}{x-1})} = \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

ตัวอย่างที่ 7.14 กำหนด $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x-1}\}$

$g \circ f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{x^2+1}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 1\}$
2. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 - 2\}$
3. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 1\}$
4. $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2\}$

ตอบ 4.

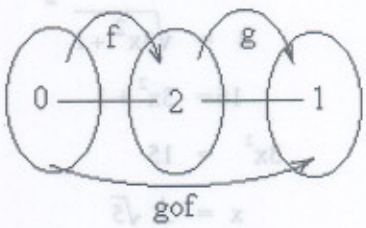
แนวคิด การตัดตัวเลือก พิจารณาแผนภูมิการส่งค่าของสมาชิกบางตัวก็ตัดตัวเลือกได้แล้ว

$(g \circ f)(0) = 1$

$g(x) = 1 : \sqrt{x-1} = 1$

$x - 1 = 1$

$x = 2$



ดังนั้น $g(x) = 1$ และเราจะได้ว่า $f(0) = 2$

แทนค่า $x = 0$ ใน $f(x)$ ทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $f(0) = 0^2 - 1 = -1 \neq 2$ ตัวเลือก 2. $f(0) = 0^2 - 2 = -2 \neq 2$

ตัวเลือก 3. $f(0) = 0^2 + 1 = 1 \neq 2$ ตัวเลือก 4. $f(0) = 0^2 + 2 = 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 3 ทิ้งได้

วิธีจริง $g(x) = \sqrt{x-1}$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1}$ และ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)-1}$

ดังนั้น $\sqrt{f(x)-1} = \sqrt{x^2+1}$

$f(x) - 1 = x^2 + 1$

$f(x) = x^2 + 2$

สรุป $f = \{(x, y) \mid y = x^2 + 2\}$

ตัวอย่างที่ 7.15 กำหนด $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}$ $g(x)=\sqrt{3-x}$

$h(x)=\sqrt{6+5x-x^2}$

ถ้า $F=\frac{g}{h}$ แล้ว $R_f \cap D_F$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-4,1)$ 2. $(-1,5)$
3. $(2,7)$ 4. $(4,8)$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ลองแทนค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x=1$

พิจารณาว่า $1 \in R_f \cap D_F$ หรือไม่

เพราะว่า $f(1)=1$ ดังนั้น $1 \in R_f$ เพราะว่า $F(1)=\frac{g(1)}{h(1)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น $1 \in D_F$

ดังนั้น $1 \in R_f \cap D_F$ แต่ $1 \notin (-4,1)$, $1 \notin (4,8)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

เลือก $x=2$ เพื่อจะได้จำแนกตัวเลือก 2. และ 3.

เพราะว่า $2 = f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1}$

$4 = \sqrt{3x^2+1}$

$16 = 3x^2+1$

$3x^2 = 15$

$x = \pm\sqrt{5}$

แสดงว่า $f(\sqrt{5})=2$ ดังนั้น $2 \in R_f$ เพราะว่า $F(2)=\frac{g(2)}{h(2)}=\frac{\sqrt{3-2}}{\sqrt{6+10-4}}=\frac{1}{\sqrt{12}}$ หาค่าได้

ดังนั้น $2 \in D_F$ สรุป $2 \in R_f \cap D_F$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $3x^2+1 \geq 1$ ทุกค่า x

$\sqrt{3x^2+1} \geq 1$

$\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+1} \geq \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $D_f=(-\infty,\infty)$ และ $R_f=[\frac{1}{2},\infty)$

การหา D_g ; $3-x \geq 0$

$3 \geq x$

$D_g=(-\infty,3]$

การหา D_h ; $6 + 5x - x^2 \geq 0$

$x^2 - 5x - 6 \leq 0$

$(x - 6)(x + 1) \leq 0$

$-1 \leq x \leq 6$

$D_h = [-1, 6]$

$h(x) = 0$

$6 + 5x - x^2 = 0$

$(6 - x)(1 + x) = 0$

$x = -1, 6$

สรุป $D_F = D_g \cap D_h - \{x \mid h(x) = 0\} = ((-\infty, 3] \cap [-1, 6]) - \{-1, 6\}$

$= [-1, 3] - \{-1, 6\}$

$= (-1, 3]$

สรุป $R_f \cap D_F = [\frac{1}{2}, \infty) \cap (-1, 3] = (\frac{1}{2}, 3]$ เป็นสับเซตของ $(-1, 5)$

ตัวอย่างที่ 7.16 ถ้า $(f \circ g)(x) = x$, $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$ และ $g(h(x)) = 2x - 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(x) = g^{-1}(x)$ และ $h(x) = 6x + 4$
2. $f(x) = g^{-1}(x)$ และ $h(x) = 6x + 6$
3. $f(x) = 3x + 9$ และ $h(x) = 6x + 4$
4. $f(x) = 3x - 9$ และ $h(x) = 6x + 6$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ตัดตัวเลือกได้ง่าย เพราะว่า $(f \circ g)(x) = x$

เพราะฉะนั้น $f = g^{-1}$ แน่นอน ดังนั้นเราดูว่า $h(x) = 6x + 4$ หรือ $h(x) = 6x + 6$ กันแน่ก็พอ

สมมติ $h(x) = 6x + 4$ จะได้ $h(0) = 4$ และ $g(h(0)) = 2(0) - 1 = -1$

แต่ $g(h(0)) = g(4) = \frac{1}{3}(4) - 3 = \frac{-5}{3} \neq -1$ จะเห็นว่าขัดแย้งกัน ดังนั้น $h(x) = 6x + 4$ ไม่ได้

สรุปคำตอบที่ถูกต้องตัวเป็นตัวเลือก 2.

วิธีจริง $2x - 1 = g(h(x)) = \frac{1}{3}h(x) - 3$

$6x - 3 = h(x) - 9$

$h(x) = 6x + 6$

ตัวอย่างที่ 7.17 ถ้า $f(x+1) = 2x$ และ $f(g(x-1)) = -x$ แล้ว $g(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{x-2}{3}$
2. $\frac{1-x}{2}$
3. $\frac{x}{2}$
4. $\frac{2x}{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากสูตร $f(x+1) = 2x$

จะได้ $f(1) = f(0+1) = 2(0)$

ดังนั้น $f(1) = 0$ เพราะว่า $f(g(x-1)) = x$

$f(g(0-1)) = 0 = f(1)$

$f(g(-1)) = f(1)$

เพราะฉะนั้น $g(-1) = 1$ แทนค่า $x = -1$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1 $\frac{x-2}{3} = \frac{-1-2}{3} = -1 \neq 1$

ตัวเลือก 2 $\frac{1-x}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = 1$

ตัวเลือก 3 $\frac{x}{2} = \frac{-1}{2} \neq 1$

ตัวเลือก 4 $\frac{2x}{3} = \frac{2(-1)}{3} = -\frac{2}{3} \neq 1$

สรุปตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x+1) = 2x$

$f(x) = f((x-1)+1) = 2(x-1)$

$f(g(x-1)) = -x$

$f(g(x)) = f(g((x+1)-1) = -(x+1)$

เพราะว่า $f(x) = 2(x-1)$

เพราะฉะนั้น $f(g(x)) = 2(g(x)-1)$

ดังนั้น $2(g(x)-1) = -(x+1)$

$g(x)-1 = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

$= \frac{1-x}{2}$

ตัวอย่างที่ 7.18 ความสัมพันธ์ในข้อใดมี โดเมนเท่ากับเรนจ์

1. $r = \{(x , y) \mid x^2 = y\}$
2. $r = \{(x , y) \mid y = x^3\}$
3. $r = \{(x , y) \mid 4x^2 - y^2 = 4\}$
4. $r = \{(x , y) \mid x^2 + 2y^2 = 6\}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้การตัดตัวเลือกดีกว่า

ตัวเลือก 1. จากเงื่อนไข $x^2 = y$ แสดงว่า $y \geq 0$ แต่ x เป็นอะไรก็ได้ ดังนั้น $D_r \neq R_r$

ตัวเลือก 3. จากเงื่อนไข $4x^2 - y^2 = 4$ จะเห็นว่า $y = 0$ ได้แต่ $x = 0$ ไม่ได้ ดังนั้น $D_r \neq R_r$

ตัวเลือก 4. จากเงื่อนไข $x^2 + 2y^2 = 6$

เมื่อ $x = 2$ จะได้ $4 + 2y^2 = 6$, $y^2 = 1$, $y = \pm 1$ แสดงว่า $2 \in D_r$

เมื่อ $y = 2$ จะได้ $x^2 + 2(4) = 6$, $x^2 = -2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $2 \notin R_r$ เพราะฉะนั้น $D_r \neq R_r$ สรุปตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 7.19 กำหนด $f = \{(x , y) \in R \times R \mid y = x + 1\}$

$g \circ f = \{(x , y) \in R \times R \mid y = x - 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $g = \{(x , y) \mid y = x - 2\}$
2. $g = \{(x , y) \mid y = x - 1\}$
3. $g = \{(x , y) \mid y = x + 1\}$
4. $g = \{(x , y) \mid y = x + 2\}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $f(x) = x + 1$ และ $(g \circ f)(x) = x - 1$

แทนค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้ เช่น $x = 0$ จะได้ $(g \circ f)(0) = 0 - 1$

$$g(f(0)) = -1$$

$$g(0 + 1) = -1$$

$$g(1) = -1$$

ตัวเลือก 1. เท่านั้นที่ให้ค่า $g(1) = 1 - 2 = -1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $(g \circ f)(x) = x - 1$

$$g(f(x)) = x - 1$$

$$g(x + 1) = x - 1$$

$$g(x) = g((x - 1) + 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

ตัวอย่างที่ 7.20 กำหนดให้ $f(x) = x$ ทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f(\sqrt{a} + \sqrt{3}) = \sqrt{10+\sqrt{84}}$ แล้ว $f(a^2)$ เท่ากับเท่าใด

1. 49
2. -49
3. 7
4. -7

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(a^2) = a^2 \geq 0$ เสมอโดยไม่ต้องรู้ค่า a , ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x) = x$

$$f(\sqrt{a} + \sqrt{3}) = \sqrt{a} + \sqrt{3}$$

ดังนั้น $\sqrt{a} + \sqrt{3} = \sqrt{10+\sqrt{84}} = \sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7+2\sqrt{7}\sqrt{3}+3}$

$$= \sqrt{(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt{7}$$

$$a = 7$$

$$a^2 = 49$$

สรุป $f(a^2) = 49$

แนวคิดของการตัดตัวเลือกหาอ่านได้ใน

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

7.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ความสัมพันธ์ r ที่มี $D_r = R_r$ คือข้อใด

   1. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x > 0, y \neq 0\}$
   2. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y < 0, x \neq 0\}$
   3. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$
   4. $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = x^2\}$

2. กำหนด $f(x) = x^2 - 1$ และ $D_f = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}]$ แล้วเรนจ์ของ f คือข้อใด

   1. $(-\frac{15}{16}, -\frac{3}{4})$
   2. $[\frac{-15}{16}, \frac{-3}{4})$
   3. $[-1, \frac{-3}{4}]$
   4. $[-1, \frac{-3}{4})$

3. ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f = \{(x, y) \in I \times I \mid y = x^2\}$

   $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x\}$

   $h = \{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = x + 5\}$

   แล้วโดเมนของ $\frac{f+g}{h}$ คือข้อใด

   1. R^+
   2. $R - \{-5\}$
   3. I^+
   4. $I - \{-5\}$

4. ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลัง 2 ซึ่งกราฟตัดแกน X ที่จุด $(2, 0)$ และ $(3, 0)$ และตัดแกน X ที่จุด $(0, 6)$ แล้วเซตคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ คือข้อใด

   1. $\{6\}$
   2. $\{0, 6\}$
   3. $\{2, 3\}$
   4. $\{0, 2, 3\}$

5. กำหนด f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก A ไป B ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก B ไป A
   2. f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 จาก C ไป A เมื่อ $C \subset B$
   3. f^{-1} เป็นฟังก์ชันจากเรนจ์ของ f ไปทั่วถึง A
   4. $fof^{-1} = f^{-1}of$

6. กำหนด $f(x) = \frac{x}{2x-1}$ และ $x \neq \frac{1}{2}$ ถ้า $f^{-1}(x) = \frac{x}{2(x-k)}$ แล้ว k เท่ากับเท่าใด

   1. $-\frac{1}{2}$
   2. 1
   3. -1
   4. $\frac{1}{2}$

7. กำหนด $g(x) = 4x^2 - 1$, $f(x) = 3g(x)$ ค่าของ $g(3f(x))$ เท่ากับเท่าใด

   1. $36x^2 - 9$
   2. $4(36x^2 - 9)^2 - 1$
   3. $36(4x^2 - 1) - 1$
   4. $36(4x^2 - 1)^2 - 1$

8. ถ้า $f(x) = x + 1$ และ $D_f = [-3, 2]$ $g(x) = x - 3$ และ $D_g = (-1, 5]$
   แล้ว เรนจ์ของ fg (fg คือ $f(x)$ คูณกับ $g(x)$) เท่ากับเท่าใด

   1. $[-3, 0]$
   2. $[-3, 0)$
   3. $[-4, 0]$
   4. $[-4, 0]$

9. ข้อความใดเป็นจริง

   1. ถ้า A เป็นเซตจำกัด และ $f: A \longrightarrow B$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว B เป็นเซตจำกัด
   2. ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้วไม่จำเป็นที่ $fof^{-1} = f^{-1}of$
   3. $g(x) = x^2$ เมื่อ $x \geq 0$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
   4. $f(x) = 2^{|x|}$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

10. กำหนด f , g เป็นฟังก์ชันข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ถ้า f , g เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 แล้ว $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
   2. ถ้า $D_f \cap D_g \neq \varnothing$ แล้ว $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน
   3. ถ้า $f \cap g \neq \varnothing$ แล้วจะต้องมีสมาชิก $x_1 \in D_f$ ซึ่ง $g(x_1) \in R_f$
   4. ถ้า $f \cup g$ เป็นฟังก์ชันแล้ว $f \subset g$ หรือ $g \subset f$

เฉลย 1. (3) 2. (4) 3. (3) 4. (3) 5. (3)
6. (4) 7. (2) 8. (4) 9. (2) 10. (3)

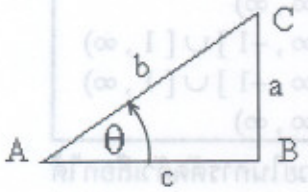
$\cap \varnothing \cup \times \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin ^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow$ X Y $\not< \not> \leq \not\geq \not\in \not\in$

❶❷❸❹①②③④

บทที่ 8
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

8.1 สรุปเนื้อหา

1. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมภายในสามเหลี่ยมมุมฉาก



$$\sin\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}, \cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}, \tan\theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}, \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

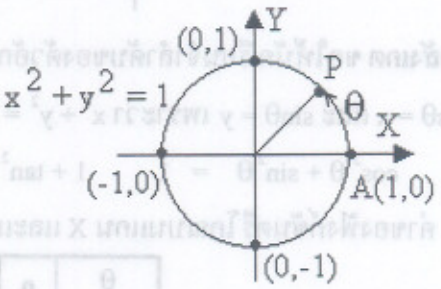
หมายเหตุ สูตรตรีโกณในข้อ 1 นี้ช่วยในการประมาณค่าฟังก์ชันตรีโกณของมุมต่างๆ ได้ และช่วยในการตัดตัวเลือกได้อย่างดี

2. **วงกลมหนึ่งหน่วย** คือวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง (0 , 0) และรัศมี 1

θ เป็นความยาวส่วนโค้ง AP ที่วัดจากจุด (1 , 0)

พิกัดจุด P คือ (x , y)

จะได้ว่า $\sin\theta = y$ และ $\cos\theta = x$



ข้อตกลง θ วัดทวนเข็มมีค่าเป็นบวก

θ วัดตามเข็มมีค่าเป็นลบ

บทนิยาม เมื่อ (x , y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

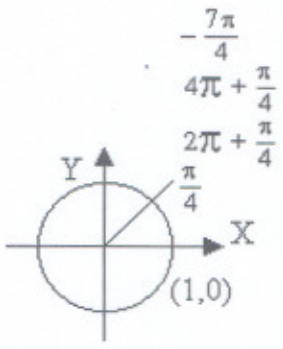
ฟังก์ชันไซน์ (sine) คือเซตของคู่อันดับ (θ , y)

ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine) คือเซตคู่อันดับ (θ , x)

หมายเหตุ จุด P (x , y) หนึ่งจุดอาจเป็นจุดปลายของมุม θ ได้หลายค่า เช่น

$\sin\frac{\pi}{4} = \sin(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \sin(-\frac{7\pi}{4})$

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos(2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(4\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(-\frac{7\pi}{4})$



เพราะฉะนั้น sinและ cos ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

เพราะว่า (x , y) เป็นจุดบนวงกลมรัศมี 1 และจุดศูนย์กลาง (0 , 0)

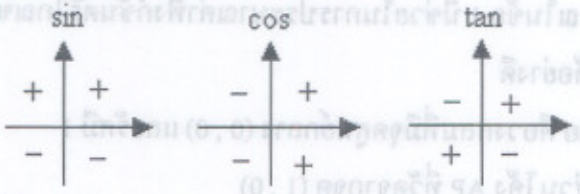
เพราะฉะนั้น $-1 \le x \le 1 , -1 \le y \le 1$

นั่นคือ $R_{sin} = [-1 , 1]$ และ $R_{cos} = [-1 , 1]$

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ

	โดเมน	เรนจ์
sinθ	$(-\infty , \infty)$	$[-1 , 1]$
cosθ	$(-\infty , \infty)$	$[-1 , 1]$
tanθ	$(-\infty , \infty) - \{ \theta \mid \cos\theta = 0 \}$	$(-\infty , \infty)$
cosecθ	$(-\infty , \infty) - \{ \theta \mid \sin\theta = 0 \}$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$
secθ	$(-\infty , \infty) - \{ \theta \mid \cos\theta = 0 \}$	$(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$
cotθ	$(-\infty , \infty) - \{ \theta \mid \sin\theta = 0 \}$	$(-\infty , \infty)$

sin, cos, tan เป็น + , – ในแต่ละควอดรันทร์ มีความสำคัญและช่วยในการตัดตัวเลือกได้

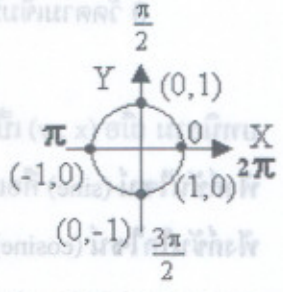


ข้อสังเกต ขอให้นักเรียนจำลำดับของตัวอักษรว่า c มาก่อน s และ x มาก่อน y ช่วยในการจำว่า $\cos\theta = x$ และ $\sin\theta = y$ เพราะว่า $x^2 + y^2 = 1$ เพราะฉะนั้นเราจะได้เอกลักษณ์ที่สำคัญคือ

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta$

3. ค่าของฟังก์ชันตรีโกณบนแกน X และแกน Y

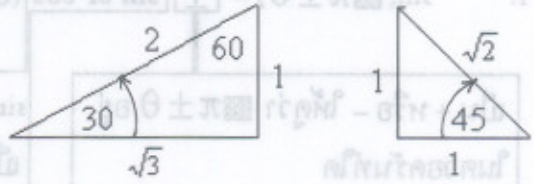
θ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinθ	0	1	0	–1	0
cosθ	1	0	–1	0	1
tanθ	0	∞	0	∞	0



คำแนะนำขอให้นักเรียนจำจากรูปดีกว่า

4. ค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $30^\circ\left(\frac{\pi}{6}\right), 60^\circ\left(\frac{\pi}{3}\right), 45^\circ\left(\frac{\pi}{4}\right)$

θ	$45^\circ, \frac{\pi}{4}$	$30^\circ, \frac{\pi}{6}$	$60^\circ, \frac{\pi}{3}$
$\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan\theta$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$



หมายเหตุ ขอแนะนำให้ทำโดยใช้อัตราส่วนสามเหลี่ยมมุมฉากดีกว่า

5. สูตรตรีโกณของมุมที่เป็นลบ

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

สูตรในรูปแบบของมุมทั่วไป

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$$
$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$$
$$\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$$

ให้ α เป็นมุมบวกที่เล็กที่สุดที่ทำให้

1. ถ้า $\sin\theta = \sin\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$ n เป็นจำนวนเต็ม
2. ถ้า $\cos\theta = \cos\alpha$ แล้ว $\theta = 2n\pi \pm \alpha$ n เป็นจำนวนเต็ม
3. ถ้า $\tan\theta = \tan\alpha$ แล้ว $\theta = n\pi + \alpha$ n เป็นจำนวนเต็ม

6. สูตรตรีโกณมิติของมุมที่สำคัญ

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$	$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$
$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$	$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$	$\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$	$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$	$\tan(2\pi + \theta) = \tan\theta$
$\sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$	$\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$	$\tan(2\pi - \theta) = -\tan\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) = \sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$	$\tan(\frac{3\pi}{2} - \theta) = \cot\theta$

ข้อแนะนำ ในการจำสูตรให้คิดว่า θ เป็นมุมเล็กๆ และใช้กฎเกณฑ์ดังนี้

1. $\sin(\square\pi \pm \theta) = \boxed{\pm}\ \boxed{\text{sin or cos}}(\theta)$

เป็น + หรือ – ให้ดูว่า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันท์ใด
เป็น + ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_1, Q_2
เป็น – ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_3, Q_4

sin, cos ให้ดูว่า $\square$ เป็น n หรือ $\frac{2n+1}{2}$
เป็น sin ถ้า $\square = n$
เป็น cos ถ้า $\square = \frac{2n+1}{2}$

ตัวอย่างเช่น $\sin(2\pi + \theta) = +\sin\theta$ $\quad \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta$

$\sin(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\cos\theta$ $\quad \sin(\frac{3\pi}{2} + \theta) = -\cos\theta$

2. $\cos(\square\pi \pm \theta) = \boxed{\pm}\ \boxed{\text{sin or cos}}(\theta)$

เป็น + หรือ – ให้ดูว่า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันท์ใด
เป็น + ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_1, Q_4
เป็น – ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_2, Q_3

sin, cos ให้ดูว่า $\square$ เป็น n หรือ $\frac{2n+1}{2}$
เป็น cos ถ้า $\square = n$
เป็น sin ถ้า $\square = \frac{2n+1}{2}$

ตัวอย่างเช่น $\cos(2\pi - \theta) = \cos\theta$ $\quad \cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$

$\cos(\frac{3\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta$ $\quad \cos(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\sin\theta$

3. $\tan(\square\pi \pm \theta) = \boxed{\pm}\ \boxed{\text{tan or cot}}(\theta)$

เป็น + หรือ – ให้ดูว่า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ในควอดรันท์ใด
เป็น + ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_1, Q_3
เป็น – ถ้า $\square\pi \pm \theta$ อยู่ใน Q_2, Q_4

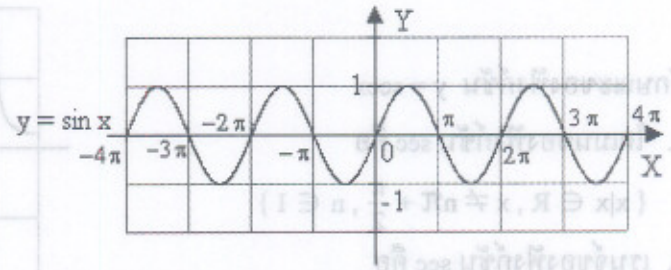
tan, cot ให้ดูว่า $\square$ เป็น n หรือ $\frac{2n+1}{2}$
เป็น tan ถ้า $\square = n$
เป็น cot ถ้า $\square = \frac{2n+1}{2}$

ตัวอย่างเช่น $\tan(\pi + \theta) = \tan\theta$ $\quad \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\tan(\frac{\pi}{2} + \theta) = -\cot\theta$ $\quad \tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\cot\theta$

7. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

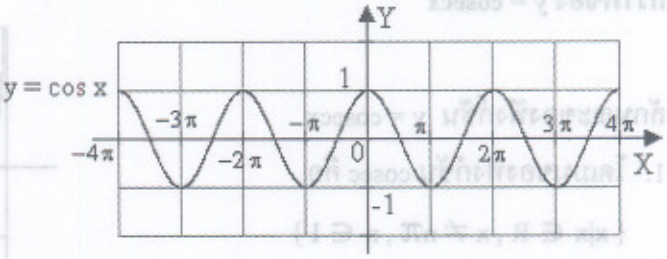
กราฟของ y = sinx



ลักษณะของฟังก์ชัน sin

1. โดเมนของฟังก์ชัน sin คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน sin คือ ช่วง $[-1, 1]$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq \sin x \leq 1$
3. ฟังก์ชัน sin เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1 บนโดเมน R
4. ในช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ฟังก์ชัน sin เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

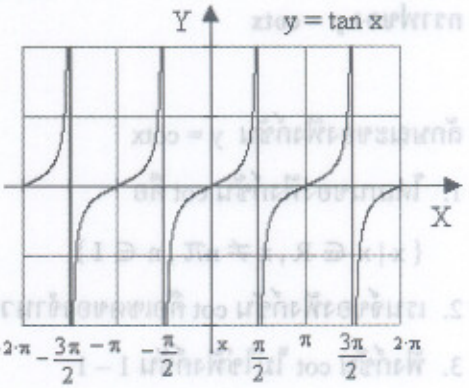
กราฟของ y = cosx



ลักษณะของฟังก์ชัน cos

1. โดเมนของฟังก์ชัน cos คือ เซตของจำนวนจริง
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน cos คือ ช่วง $[-1, 1]$ เพราะฉะนั้น $-1 \leq \cos x \leq 1$
3. ฟังก์ชัน cos เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1 บนโดเมน R
4. ในช่วง $[0, \pi]$ ฟังก์ชัน cos เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และเป็นฟังก์ชันลด

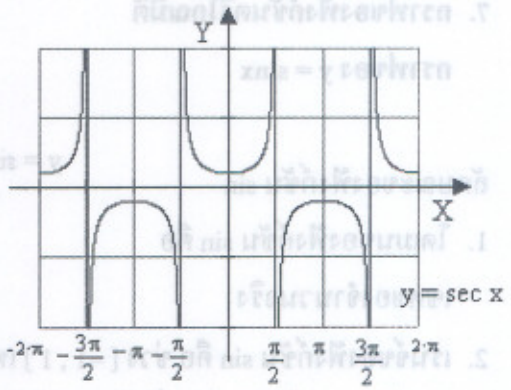
กราฟของ y = tanx



ลักษณะของฟังก์ชัน tan

1. โดเมนของฟังก์ชัน tan คือ $\{x | x \in R, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in I\}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน tan คือ เซตของจำนวนจริง
3. ฟังก์ชัน tan เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1
4. ในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ฟังก์ชัน tan เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

กราฟของ y = secx



ลักษณะของฟังก์ชัน y = secx

1. โดเมนของฟังก์ชัน sec คือ

   $\{ x | x \in R , x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} , n \in I \}$

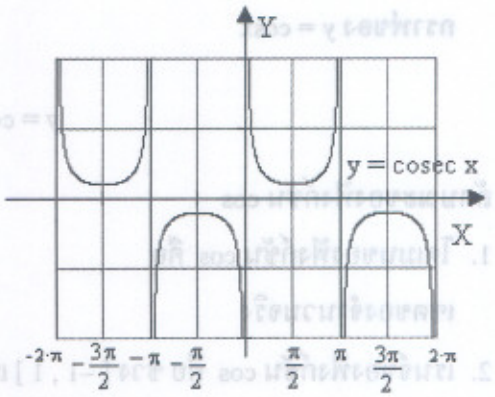
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน sec คือ

   $\{ -\infty , -1] \cup [1 , \infty)$

3. ฟังก์ชัน sec เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1

4. ในช่วง $[0 , \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} , \pi]$ ฟังก์ชัน sec เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

กราฟของ y = cosecx



ลักษณะของฟังก์ชัน y = cosecx

1. โดเมนของฟังก์ชัน cosec คือ

   $\{ x | x \in R , x \neq n\pi , n \in I \}$

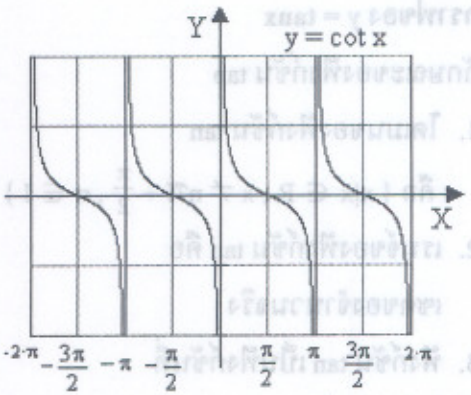
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน cosec คือ

   $(-\infty , -1] \cup [1 , \infty)$

3. ฟังก์ชัน cosec เป็นฟังก์ชันที่ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1

4. ในช่วง $[-\frac{\pi}{2} , 0) \cup (0 , \frac{\pi}{2}]$ ฟังก์ชัน cosec เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

กราฟของ y = cotx



ลักษณะของฟังก์ชัน y = cotx

1. โดเมนของฟังก์ชัน cot คือ

   $\{ x | x \in R , x \neq n\pi , n \in I \}$

2. เรนจ์ของฟังก์ชัน cot คือเซตของจำนวนจริง

3. ฟังก์ชัน cot ไม่ใช่ฟังก์ชัน 1 – 1

4. ในช่วง $(0 , \pi)$ ฟังก์ชัน cot เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 และเป็นฟังก์ชันลด

ข้อสังเกต ลักษณะของกราฟข้อสอบชอบถามเกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่ม หรือฟังก์ชันลดในช่วงใด

8.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ใช้เหตุผลเกี่ยวกับ sin , cos , tan เป็นบวกหรือลบในควอดรันท์ใดช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง กำหนด $\cos\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ จุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วยอยู่ในควอดรันท์ใด

1. 1 2. 2
3. 3 4. 4

การตัดตัวเลือก $\cos\theta > 0 \longrightarrow \theta \in Q_1$ หรือ $Q_4 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2 และ 3

$\tan\theta < 0 \longrightarrow \theta \in Q_2$ หรือ $Q_4 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1 , 3

สรุปตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ

2. ใช้เหตุผล $-1 \leq \sin\theta \leq 1$, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ ช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่าง ค่ามากสุดของ $3\cos 2\theta + 1$ เท่ากับเท่าใด

1. 3 2. 4
3. 5 4. 6

การตัดตัวเลือก $\cos 2\theta \leq 1$

$3\cos 2\theta \leq 3$

$3\cos 2\theta + 1 \leq 4$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 และ 4 ทิ้งได้

หมายเหตุ $\theta = 0 \longrightarrow \cos 2\theta = 1 \longrightarrow 3\cos 2\theta + 1 = 4$ เป็นค่ามากสุด

3. นำค่ามุมในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง ถ้า $-\frac{3\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ แล้ว $2 + \cos 3x$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ x มีค่าเท่าไร

1. $\frac{-\pi}{2}$ หรือ $\frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{-\pi}{6}$ หรือ $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{-\pi}{3}$ หรือ $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{-\pi}{4}$ หรือ $\frac{\pi}{4}$

การตัดตัวเลือก $x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow 2 + \cos 3x = 2$

$x = \frac{\pi}{6} \longrightarrow 2 + \cos 3(\frac{\pi}{6}) = 2 + \cos\frac{\pi}{2} = 2$

$x = \frac{\pi}{3} \longrightarrow 2 + \cos 3(\frac{\pi}{3}) = 2 + \cos\pi = 2 + (-1) = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 2

$$x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow 2 + \cos 3(\frac{\pi}{4}) = 2 + \cos\frac{3\pi}{4} = 2 - (\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2 - \frac{1}{1.414} = 2 - 0.7 > 1$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

4. เซตคำตอบคือข้อใดเราจะนำค่า x ในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง ค่าของ x ที่ทำให้ $\sin x + \cos x \leq 0$ อยู่ในค่าใด

1. $[0, \pi]$
2. $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$
4. $[\pi, 2\pi]$

การตัดตัวเลือก $x = 0 \longrightarrow \sin 0 + \cos 0 = 0 + 1 \nleq 0 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1

$x = 2\pi \longrightarrow \sin 2\pi + \cos 2\pi = 0 + 1 \nleq 0 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 4

$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 \nleq 0 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2

5. นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าย้อนกลับเพื่อดูค่ามุมว่าใช้ได้กับโจทย์หรือไม่

ตัวอย่าง กำหนด $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = \frac{7}{2}$ จะได้ว่า $\sin\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
4. $\frac{3}{2}$

การตัดตัวเลือก $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow A = 60^\circ \longrightarrow \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \cot 60^\circ = 2$

$\longrightarrow \operatorname{cosec}^2 60^\circ + \cot^2 60^\circ = \frac{4}{3} + 4 = \frac{16}{3} \neq \frac{7}{2}$

$\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1

$\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow A = \frac{\pi}{4} \longrightarrow \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \cot\frac{\pi}{4} = 1$

$\longrightarrow \operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4} + \cot^2\frac{\pi}{4} \neq \frac{7}{2}$

$\longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 3

เพราะว่า $-1 \leq \sin\theta \leq 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้งได้

วิธีจริง จาก $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = \frac{7}{2}$ จะได้ $\frac{1}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{7}{2}$

ให้ $x = \sin^2\theta$ จะได้ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - x$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{x} + \frac{1-x}{x} = \frac{7}{2}$

$$2(1 + (1 - x)) = 7x$$

$$4 - 2x = 7x$$

$$x = \frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้น $\sin^2\theta = \frac{4}{9}$ และ $\sin\theta = \frac{2}{3}$

8.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 8.1 ถ้า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ แล้วค่าของ $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{35}{12}$
2. $\frac{-35}{12}$
3. $\frac{12}{35}$
4. $\frac{-12}{35}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sec\theta \ge 0$, $\operatorname{cosec}\theta \ge 0$ และ $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta \ge 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 และ 4

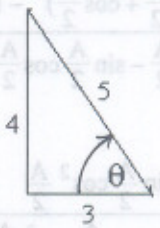
เพราะว่า $\sec\theta \ge 1$ และ $\operatorname{cosec}\theta \ge 1$ เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta \ge 2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้อีก

วิธีจริง วิธีที่ 1. เพราะว่า $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \pm\frac{3}{5}$

เพราะว่า $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{3}{5}$

$$\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{(\frac{3}{5})} + \frac{1}{(\frac{4}{5})} = \frac{5}{3} + \frac{5}{4} = \frac{20+15}{12} = \frac{35}{12}$$

วิธีที่ 2 จาก $\sin\theta = \frac{4}{5}$ วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มี $\sin\theta = \frac{4}{5}$



จะได้ $\sec\theta = \frac{5}{3}$ และ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$

ดังนั้น $\sec\theta + \operatorname{cosec}\theta = \frac{35}{12}$ เหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 8.2 ค่าของ $\frac{(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2})^2 - 1}{\tan\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $1 + \cot A$
2. $2\cot^2\frac{A}{2}$
3. $4 - 2\cot\frac{A}{2}$
4. $\cot\frac{A}{2}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของมุม A ดังนั้นแทนค่ามุม $A = 90^\circ$ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

โจทย์ $\dfrac{(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})^2-1}{\tan\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{(\sin 45+\cos 45)^2-1}{\tan 45-\sin 45\cos 45} = \dfrac{(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}})^2-1}{1-(\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}})} = \dfrac{(\sqrt{2})^2-1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

ตัวเลือก 1 $1+\cot A = 1+\cot 90 = 1+0 = 1 \neq 2$ **ตัวเลือก 2** $2\cot^2\frac{A}{2} = 2\cot^2 45 = 2(1)^2 = 2$

ตัวเลือก 3 $4-2\cot\frac{A}{2} = 4-2(1) = 2$ **ตัวเลือก 4** $\cot\frac{A}{2} = \cot 45 = 1 \neq 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 4

แทนค่า $A = 60^\circ$

โจทย์ $\dfrac{(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})^2-1}{\tan\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{(\sin 30+\cos 30)^2-1}{\tan 30-\sin 30\cos 30} = \dfrac{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})^2-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-(\frac{1}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})}$

$= \dfrac{\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{4}-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(\frac{4-3}{4\sqrt{3}})} = \dfrac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(\frac{1}{4\sqrt{3}})} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4\sqrt{3} = 6$

ตัวเลือก 2 $2\cot^2\frac{A}{2} = 2\cot^2 30 = 2(\sqrt{3})^2 = 6$

คัวเลือก 3 $4-2\cot\frac{A}{2} = 4-2\cot 30 = 4-2\sqrt{3} \neq 6$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้อีก

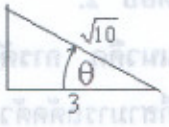
วิธีจริง $\dfrac{(\sin\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2})^2-1}{\tan\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos^2\frac{A}{2}-1}{\tan\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}-\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$

$= \dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}(1-\cos^2\frac{A}{2})} = \dfrac{2\cos^2\frac{A}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} = 2\cot^2\frac{A}{2}$

ตัวอย่างที่ 8.3 ถ้า $\cot\theta = 3$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{-1}{\sqrt{10}}$
2. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$
3. $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$
4. $\dfrac{-3}{\sqrt{10}}$

ตอบ 4.



แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\cot\theta = 3 > 0$ และ $\sin\theta < 0$

เพราะฉะนั้น $\theta \in Q_3$ ดังนั้น $\cos\theta < 0$ สรุปตัดตัวเลือก 2 และ 3 ทิ้งได้

วิธีจริง $\cot\theta = 3$

$\cot\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}} = \frac{3}{1}$ จากรูป

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ หรือ $\frac{-3}{\sqrt{10}}$

เพราะว่า $\cot\theta = 3 > 0$ และ $\sin\theta < 0$ เพราะฉะนั้น θ อยู่ในควอดรันท์ 3

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{-3}{\sqrt{10}}$ ตรงกับตัวเลือก 4

ตัวอย่างที่ 8.4 ถ้า $\sin A = \frac{1-a}{1+a}$ และ $0 < A < 90^\circ$ แล้วค่า $\cot A$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2\sqrt{a}}{1-a}$
2. $\frac{1-a}{2\sqrt{a}}$
3. $\frac{2\sqrt{a}}{a-1}$
4. $\frac{a-1}{2\sqrt{a}}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

แทนค่า $A = 30^\circ$, $\sin 30 = \frac{1}{2}$, $\cot 30 = \sqrt{3}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2} = \frac{1-a}{1+a}$

$1 + a = 2 - 2a$

$3a = 1$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{1}{3}$ แทนค่า $a = \frac{1}{3}$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1 $\frac{2\sqrt{a}}{1-a} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3}$

ตัวเลือก 2 $\frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq \sqrt{3}$

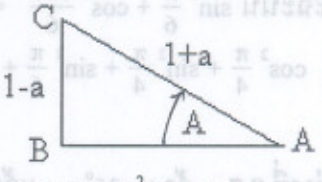
ตัวเลือก 3 $\frac{2\sqrt{a}}{a-1} = \frac{2\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}-1} < 0$

ตัวเลือก 4 $\frac{a-1}{2\sqrt{a}} = \frac{\frac{1}{3}-1}{2\sqrt{\frac{1}{3}}} < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 , 3 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง $\sin A = \frac{1-a}{1+a}$

$\sin A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$



$AB^2 = AC^2 - BC^2 = (1+a)^2 - (1-a)^2 = 1 + 2a + a^2 - (1 - 2a + a^2) = 4a$

$AB = 2\sqrt{a}$

เพราะฉะนั้น $\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{2\sqrt{a}}{1-a}$

ตัวอย่างที่ 8.5 ให้ $\sec^2 x + \tan^2 x = \frac{7}{2}$ และ $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ค่าของ cosx เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{2}{3}$
2. $-\frac{1}{3}$
3. -1
4. $-\frac{3}{4}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ถ้า $\cos x = -1$ จะได้ $x = \pi$ แต่ $\sec^2 \pi + \tan^2 \pi = 1 + 0 = 1 \neq \frac{7}{2}$

ดังนั้น $\cos x \neq -1$ แน่นอน เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งไปก่อนได้

วิธีจริง $\sec^2 x + \tan^2 x = \frac{7}{2}$

$$\sec^2 x + (\sec^2 x - 1) = \frac{7}{2}$$

$$\sec^2 x = \frac{9}{4}$$

$$\cos^2 x = \frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้น $\cos x = \pm\frac{2}{3}$

เพราะว่า $\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $\cos x = -\frac{2}{3}$

ตัวอย่างที่ 8.6 ค่าของ $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6}$ เท่ากับเท่าใด

1. -3
2. 3
3. 2
4. -2

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6} > 0$ แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1$ และ $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6}$

เพราะฉะนั้น $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6} = \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{6} = 1$

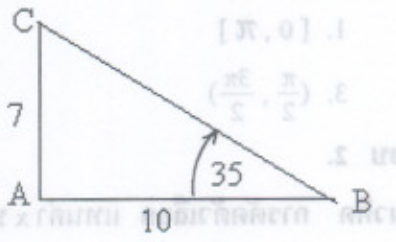
สรุป $\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{11\pi}{6} = 1 + 1 = 2$

ตัวอย่างที่ 8.7 ถ้า $\tan 35^\circ = c$ แล้วค่าของ $\operatorname{cosec}^2 55^\circ$ ตรงกับข้อใด

1. $1 + c^2$
2. $1 - c^2$
3. $c^2 - 1$
4. $\frac{c^2}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก 1. ลาก AB = 10



2. ทำมุม $A\hat{B}C = 35^\circ$

3. ลาก $CA \perp AB$

4. วัดความยาว AC

$\tan 35^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{7}{10} = 0.7$, $c = 0.7$, $c^2 = 0.49$

เพราะว่า $1 - c^2 = 1 - 0.49 < 1$

$c^2 - 1 = 0.49 - 1 < 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{c^2}{2} = \frac{0.49}{2} < 1$

เพราะว่า $\operatorname{cosec}^2\theta \geq 1$ เสมอ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2 , 3 และ 4 ทิ้งได้

วิธีจริง $\cot 55 = \cot(90 - 35^\circ) = \tan 35 = c$

$\operatorname{cosec}^2 55^\circ = 1 + \cot^2 55 = 1 + c^2$

ตัวอย่างที่ 8.8 ถ้า $1 + 2\sin\theta = 3\operatorname{cosec}\theta$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ แล้ว θ มีเท่ากับเท่าใด

1. 0
2. $\frac{\pi}{6}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. $\frac{\pi}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์จะตัดตัวเลือกได้ หรือเป็นคำตอบที่ต้องการเลยก็ได้เลือกค่าที่ติดเลขง่ายๆ มาแทนก่อน

ตัวเลือก 1 $\theta = 0$ $1 + 2\sin 0 = 1$ แต่ $\operatorname{cosec} 0$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1 ทิ้ง

ตัวเลือก 4 $\theta = \frac{\pi}{2}$ $1 + 2\sin\frac{\pi}{2} = 1 + 2 = 3$, $3\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 3$ สรุป $\theta = \frac{\pi}{2}$ เป็นคำตอบ

วิธีจริง $1 + 2\sin\theta = 3\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sin\theta}$

$\sin\theta + 2\sin^2\theta = 3$

$2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$

$(2\sin\theta + 3)(\sin\theta - 1) = 0$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta = -\frac{3}{2}, +1$

แต่ $\sin\theta \neq -\frac{3}{2}$ ดังนั้น $\sin\theta = 1$ นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{2}$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 8.9 กำหนด $0 \le x \le 2\pi$ ช่วงข้อใดที่ทำให้ $\sin x > \cos x$

1. $[0, \pi]$
2. $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$
3. $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$
4. $(\pi, 2\pi)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า x บางค่าก็ตัดตัวเลือกได้

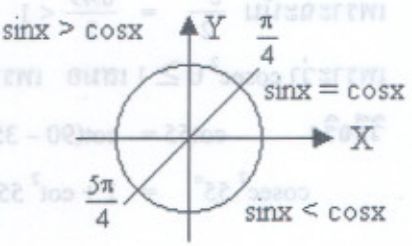
เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $\sin 0 = 0 \not> 1 = \cos 0$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1 ทิ้ง

เพราะว่า $x = \frac{3\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \not> 0 = \cos\frac{3\pi}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้ง

เลือกตัวเลขที่จำแนก $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ และ $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ได้ เช่น $x = \frac{\pi}{3}$

เพราะว่า $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$ แต่ $\frac{\pi}{3} \notin (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้



วิธีจริง พิจารณา $\sin x > \cos x$ บนวงกลมหนึ่งหน่วย

สรุป $\{ x | \sin x > \cos x \} = (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$

ตัวอย่างที่ 8.10 กำหนด $\sin x + \cos x = m$ ค่าของ $\sin x \cos x$ เท่ากับเท่าใด

1. m^2
2. $m^2 - 1$
3. $m^2 + 1$
4. $\frac{m^2 - 1}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นแทนค่า $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

จะได้ $m = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ และ $\sin x \cos x = (\frac{1}{\sqrt{2}})(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$

ต่อไปแทนค่า $m = \sqrt{2}$ ในทุกตัวเลือก **ตัวเลือก 1** $m^2 = (\sqrt{2})^2 = 2 \ne \frac{1}{2}$

ตัวเลือก 2 $m^2 - 1 = (\sqrt{2})^2 - 1 = 2 - 1 = 1 \ne \frac{1}{2}$ **ตัวเลือก 3** $\frac{m^2 + 1}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 1}{2} = \frac{3}{2} \ne \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1 , 2 และ 3 ทิ้งได้

วิธีจริง

$$\sin x + \cos x = m$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = m^2$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = m^2$$

$$1 + 2\sin x \cos x = m^2$$
$$2\sin x \cos x = m^2 - 1$$
$$\sin x \cos x = \frac{m^2 - 1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 8.11 ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยกว่า 2π แล้ว $2 - \cos 2x$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ x เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{3\pi}{2}$
4. $\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ก็จะได้คำตอบ

x	cosx	2 – cos2x
$\frac{\pi}{4}$	0	2
$\frac{\pi}{2}$	– 1	3
$\frac{3\pi}{2}$	– 1	3

สรุปเลือกตัวเลือก 4 เป็นคำตอบได้

วิธีจริง $2 - \cos 2x$ มากที่สุดเมื่อ $-\cos 2x = 1$

$$\cos 2x = -1$$
$$2x = \pi, 3\pi$$
$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 8.12 กำหนด $-\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}$ และ $\tan x = 7$ ค่าของ $\frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{3}$
2. $-\frac{2}{3}$
3. $\frac{1}{2}$
4. $-\frac{1}{2}$



ตอบ 3.

แนวคิด วิธีที่ 1 $\tan x = 7 = \frac{7}{1} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

เพราะว่า $-\pi \le x \le -\frac{\pi}{2}$ เพราะฉะนั้น $x \in Q_3$ $\sin x < 0$, $\cos x < 0$ ดังนั้น $\sin x = \frac{-7}{\sqrt{50}}$, $\cos x = \frac{-1}{\sqrt{50}}$

เพราะฉะนั้น $\frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x} = \frac{2(\frac{-7}{\sqrt{50}}) - 4(\frac{-1}{\sqrt{50}})}{2(\frac{-7}{\sqrt{50}}) + 6(\frac{-1}{\sqrt{50}})} = \frac{(-14)+4}{(-14)-6} = \frac{-10}{-20} = \frac{1}{2}$

วิธีที่ 2 $\frac{2\sin x - 4\cos x}{2\sin x + 6\cos x} = \frac{\cos x}{\cos x}\frac{(2\frac{\sin x}{\cos x} - 4)}{(2\frac{\sin x}{\cos x} + 6)} = \frac{2\tan x - 4}{2\tan x + 6} = \frac{2(7)-4}{2(7)+6} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 8.13 สามเหลี่ยม ABC มีมุม BAC โตเท่ากับ 30° , มุม ABC โตเท่ากับ 120° และด้าน AB ยาว 12 หน่วย ลาก CD ให้ตั้งฉากกับส่วนต่อ AB ที่จุด D ความยาวของ CD เท่ากับเท่าไร

1. $6\sqrt{3}$
2. $4\sqrt{3}$
3. 6
4. $6\sqrt{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปและวัดระยะทางก็ได้คำตอบแล้ว

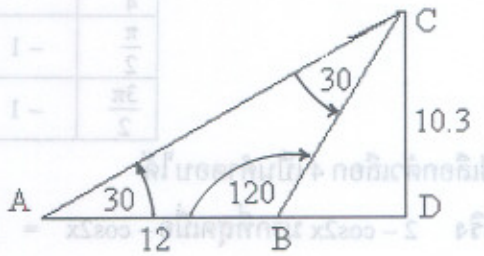
การวาดรูป 1. ลาก AB = 12 cm.

2. ลาก BC และ $A\hat{B}C = 120^\circ$

3. ลาก AC และ $CAB = 30^\circ$

4. ลาก CD มาตั้งฉากกับ AB

วัดระยะทาง CD ได้ 10.3 cm.



เพราะว่า $6\sqrt{3} = 6\,(1.7) = 10.2$, $4\sqrt{3} = 4\,(1.7) = 6.8$ และ $6\sqrt{2} = 6\,(1.4) = 8.4$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 1 ดีกว่า

วิธีจริง $A\hat{C}B = 30^\circ$ ดังนั้น BC = 12 เพราะว่า $C\hat{B}D = 60^\circ$ และ $\sin C\hat{B}D = \frac{CD}{BC}$

ดังนั้น $\sin 60 = \frac{CD}{12}$ เพราะฉะนั้น $CD = 12\sin 60 = 12\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 6\sqrt{3}$

ตัวอย่างที่ 8.14 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. โดเมนของ $f(x) = \sqrt{\sin x}$ คือ $\{ x \in R \mid x \geq 0 \}$
2. โดเมนของ $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ คือ $\{ x \in R \mid \cos x \geq 0 \}$
3. โดเมนของ $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}$ คือ $\{ x \in R \mid \sin x \neq 1 \}$
4. โดเมนของ $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3}-\tan x}$ คือ $\{ x \in R \mid \tan x \neq \sqrt{3} \}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้เหมาะกับการแทนค่าตัดตัวเลือก

$x = \pi$ ทำให้ $\sin\pi = -1$ แต่ $\sqrt{-1}$ หาค่าไม่ได้

เพราะว่า $\pi \notin$ โดเมนของ $f(x) = \sqrt{\sin x}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1 ผิด

เพราะว่า $x = \pi$, $\cos\pi = -1$ และ $\sqrt[3]{-1} = -1$

เพราะฉะนั้น $x = \pi$ เป็นสมาชิกของโดเมน $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2 ผิด

เพราะว่า $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin \pi/2}{\cos \pi/2} = \frac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\frac{\pi}{2}$ ต้องไม่เป็นสมาชิกโดเมนของ $f(x) = \frac{5}{\sqrt{3} - \tan x}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4 ผิด

ตัวอย่างที่ 8.15 กำหนด $0 \le x \le 2\pi$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\{ x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1 \}$ เป็นเซตอนันต์
2. $\{ x \mid |\sin x| + |\cos x| \le 1 \}$ เป็นเซตอนันต์
3. $\{ x \mid |\sin x| + |\cos x| \le 1 \} = \{ x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1 \}$
4. $\{ x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1 \} = \{ x \mid \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้พยายามหาข้อที่ง่ายกว่าทำก่อนเช่น

พิจารณาตัวเลือก 4 $\{ x \mid \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \} = [0, 2\pi]$

แต่ $|\sin\frac{\pi}{4}| + |\cos\frac{\pi}{4}| = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ne 1$ ดังนั้น $\frac{\pi}{4} \notin \{ x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1 \}$

ตัวเลือก 4 ผิดเราจึงตัดทิ้งได้ก่อน

พิจารณาตัวเลือก 1

$$|\sin x| + |\cos x| = 1$$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1$$

$$\sin^2 x + 2|\sin x|\,|\cos x| + \cos^2 x = 1$$

$$2|\sin x|\,|\cos x| = 0$$

เพราะฉะนั้น $\sin x = 0$ หรือ $\cos x = 0$

$x = 0, \pi, 2\pi$ $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

สรุป $A = \{ 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \}$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. ผิด

พิจารณาตัวเลือก 2 พิจารณาอสมการ $0 < |\sin x| + |\cos x| \leq 1$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 \leq 1$$

$$\sin^2 x + 2|\sin x|\,|\cos x| + \cos^2 x \leq 1$$

$$2|\sin x|\,|\cos x| \leq 0$$

$$|\sin x|\,|\cos x| \leq 0$$

เพราะฉะนั้น $\{ x \mid |\sin x| + |\cos x| \leq 1 \} = \{0 , \frac{\pi}{2} , \pi , \frac{3\pi}{2} , 2\pi \}$

ให้ $A = \{x \mid |\sin x| + |\cos x| = 1\}$ และ $B = \{ x \mid |\sin x| + |\cos x| \leq 1\}$ เพราะฉะนั้น $A \subset B$

พิจารณาอสมการ $0 < |\sin x| + |\cos x| < 1$

$$(|\sin x| + |\cos x|)^2 < 1$$

$$\sin^2 x + 2|\sin x|\,|\cos x| + \cos^2 x < 1$$

$$2|\sin x|\,|\cos x| < 0$$

$$|\sin x|\,|\cos x| < 0$$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $A = B$ เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่ถูกต้องคือตัวเลือก 3.

ตัวอย่างที่ 8.16 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sin 100^\circ \cos 100^\circ > 0$
2. $\cos 130^\circ \tan 300^\circ > 0$
3. $\tan 200^\circ \cos 350^\circ < 0$
4. $\tan(-18^\circ) \cos(-200^\circ) < 0$

ตอบ 2.

แนวคิด เขียนรูปและวัดมุมดูว่า 100 , 130 , 300 , 200 , 350 , –18 , –200 อยู่ควอดรันท์ใดก็ตัดตัวเลือกได้

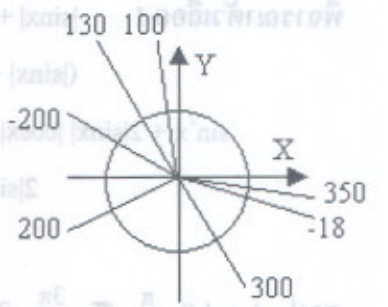
ตัวเลือก 1 $\sin 100^\circ \cos 100^\circ = (+)(-) = (-) > 0$ ผิด

ตัวเลือก 2 $\cos 130^\circ \tan 300^\circ = (-)(-) = (+) > 0$ ถูก

เลือกตัวเลือก 2 เป็นคำตอบได้เลย

ตัวเลือก 3 $\tan 200^\circ \cos 350^\circ = (+)(+) = (+) < 0$ ผิด

ตัวเลือก 4 $\tan(-18^\circ) \cos(-200^\circ) = (-)(-) = (+) < 0$ ผิด



ตัวอย่างที่ 8.17 กำหนด $k(\cot A - \tan A)\sin A\cos A = 1 - 2\sin^2 A$ ค่าของ k ตรงกับข้อใด

1. -1 2. 0
3. 1 4. 2

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ถ้า $k = 0$ จะได้ $1 - \sin^2 A = 0$ ทุกค่า A ซึ่งไม่จริง ดังนั้น $k = 0$ ไม่ได้เราจึงตัดตัวเลือก 2 ทิ้งก่อน

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร เพราะฉะนั้นแทนค่า $A = \frac{\pi}{3}$ ก็จะได้คำตอบ

$$k(\cot\tfrac{\pi}{3} - \tan\tfrac{\pi}{3})\sin\tfrac{\pi}{3}\cos\tfrac{\pi}{3} = 1 - 2\sin^2\tfrac{\pi}{3}$$

$$k(\tfrac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3})\tfrac{\sqrt{3}}{2}\tfrac{1}{2} = 1 - 2(\tfrac{3}{4})$$

$$k(1-3) = 4 - 6$$

$$k = 1$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง $\cot A - \tan A = \frac{\cos A}{\sin A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\sin A\cos A}$

$(\cot A - \tan A)\sin A\cos A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

$$1 = \frac{1 - 2\sin^2 A}{(\cot A - \tan A)\sin A\cos A}$$

เพราะฉะนั้น $k = 1$

ตัวอย่างที่ 8.18 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sin 55^\circ < \sin^2 55^\circ$ 2. $\cos 125^\circ < \cos^2 125^\circ$
3. $\cos 140^\circ < \cot 140^\circ$ 4. $\cos 170^\circ < \cos 175^\circ$

ตอบ 2.

แนวคิด วิธีจริง เพราะว่า $125^\circ \in Q_2$, $\cos 125^\circ < 0$ และ $\cos^2 125^\circ > 0$ เพราะฉะนั้น $\cos 125^\circ < \cos^2 125^\circ$ ถูกต้อง

การตัดตัวเลือก เพื่อประโยชน์ของนักเรียนจะแสดงว่าตัวเลือกอื่นผิดดังนี้

ตัวเลือก 1 $0 < \sin 55^\circ < 1$ ตัวเลขที่อยู่ระหว่าง 0 กับ 1 เมื่อยกกำลัง 2 ค่าจะน้อยลง เพราะฉะนั้น $\sin 55^\circ > \sin^2 55^\circ$, ดังนั้น $\sin 55^\circ < \sin^2 55^\circ$ จึงผิด

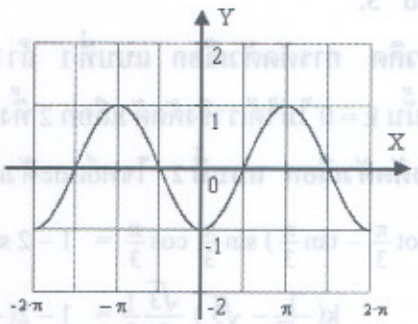
ตัวเลือก 3 $\cot 140^\circ = \frac{\cos 140^\circ}{\sin 140^\circ}$ เพราะว่า $0 < \sin 140^\circ < 1$ เพราะฉะนั้น $\frac{\cos 140^\circ}{\sin 140^\circ} < \cos 140^\circ$

ดังนั้น $\cos 140^\circ < \cot 140^\circ$ จึงผิด

ตัวเลือก 4 เพราะว่าบนช่วง $[90^\circ, 180^\circ]$, cos มีค่าลดลงจาก 0 เข้าสู่ –1

ดังนั้น $\cos 175^\circ < \cos 170^\circ$ จึงถูกต้อง เพราะฉะนั้น $\cos 170^\circ < \cos 175^\circ$ ผิด

ตัวอย่างที่ 8.19 กราฟที่กำหนดให้ตรงกับฟังก์ชันใด



1. $y = \sin(|x|)$
2. $y = -\cos(-x)$
3. $y = -\sin(x)$
4. $y = \cos(|x|)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $x = 0$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $y = 0$ 2. $y = -1$ 3. $y = 0$ 4. $y = 1$

เพราะว่ากราฟผ่านจุด $(0, -1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง ต้องจำรูปแบบกราฟ $y = \cos x$ ได้ก่อนจึงจะรู้ว่ารูปที่กำหนดให้คือ $y = -\cos x$

เพราะว่า $\cos(-x) = \cos x$

เพราะฉะนั้นกราฟที่กำหนดให้คือ $y = -\cos(-x)$

ตัวอย่างที่ 8.20 ถ้า $\cos 10^\circ = m$ แล้วค่าของ $\dfrac{\cos 170^\circ \sin 190^\circ \tan 280^\circ}{\cot 260^\circ \cos(-10^\circ)\tan 80^\circ}$ เท่ากับเท่าใด

1. m 2. –m
3. 1 4. –1

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ตรวจสอบค่า (+) หรือ (–) ก็ตัดตัวเลือกได้

$\cos 10^\circ = m = (+)$ และ $\dfrac{\cos 170^\circ \sin 190^\circ \tan 280^\circ}{\cot 260^\circ \cos(-10^\circ)\tan 80^\circ} = \dfrac{(-)(-)(-)}{(+)(+)(+)} = (-)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

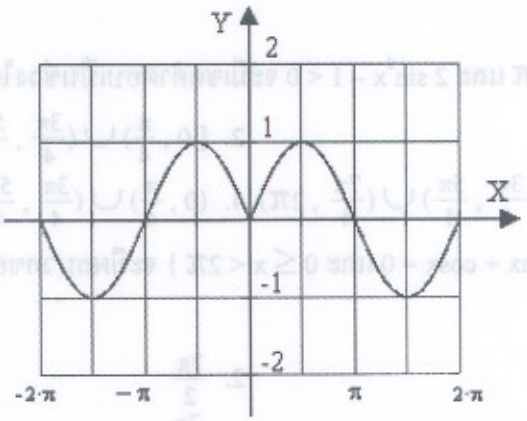
วิธีจริง $\dfrac{\cos 170^\circ \sin 190^\circ \tan 280^\circ}{\cot 260^\circ \cos(-10^\circ)\tan 80^\circ} = \dfrac{\cos(180-10)^\circ \sin(180+10)^\circ \tan(270+10)^\circ}{\cot(270-10)^\circ \cos(10^\circ)\tan(90-10)^\circ}$

$$= \frac{(-\cos 10^\circ)(-\sin 10^\circ)(-\cot 10^\circ)}{(\tan 10^\circ)(\cos 10^\circ)(\cot 10^\circ)} = -\cos 10^\circ = -m$$

8.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนด $0 \leq x < 2\pi$ และ $2\sin^2 x - 1 < 0$ จะมีเซตคำตอบเป็นช่วงใด
   1. $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$
   2. $[0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$
   3. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi)$
   4. $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}) \cup (\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$
2. กำหนด $A = \{ x | \sin x + \cos x = 0 \text{ และ } 0 \leq x < 2\pi \}$ จะมีผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด
   1. $\frac{\pi}{2}$
   2. $\frac{3\pi}{2}$
   3. $\frac{5\pi}{2}$
   4. $\frac{7\pi}{2}$
3. ค่าต่ำสุดของ $1 + 3\sin A$ คือข้อใด
   1. -1
   2. -2
   3. -3
   4. -4
4. ถ้า $\cos x = k - 4$ และ $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$ แล้วค่า k อยู่ในช่วงใด
   1. $[3, 4]$
   2. $[3, 4)$
   3. $[4, 5]$
   4. $[4, 5)$
5. ถ้า $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = 1$ และ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ θ คือข้อใด
   1. $-\frac{\pi}{2}$
   2. $-\frac{\pi}{4}$
   3. 0
   4. $\frac{\pi}{2}$
6. กำหนด $0 \leq x \leq 2\pi$ และ $2\cos^2 x + 4\sin^2 x = 3$ แล้วค่า x เท่ากับเท่าใด
   1. $\frac{\pi}{2}$
   2. $\frac{\pi}{3}$
   3. $\frac{\pi}{4}$
   4. $\frac{\pi}{6}$
7. ข้อใดต่อไปนี้ไม่จริง
   1. $\sin^2 \frac{25\pi}{2} + \cos^2 \frac{25\pi}{2} = 1$
   2. $\cos 19\pi = -1$
   3. $\sin \frac{7\pi}{2} = -1$
   4. $\tan 13\pi + \sin 13\pi = -1$

8. กราฟที่กำหนดให้มีสมการดังข้อใด



1. $y = \sin(-x)$
2. $y = \cos|x|$
3. $y = \sin|x|$
4. $y = |\sin x|$

9. ค่าของ $\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\tan\theta-\sin\theta\cos\theta}$ เท่ากับข้อใด

1. $2\cot^2\theta$
2. $2\cot\theta$
3. $2\cos^2\theta\sec^2\theta$
4. $2\cos\theta\operatorname{cosec}\theta$

10. ถ้า $2\sin2\theta + 3\cot2\theta - 3\operatorname{cosec}2\theta = 0$ และ $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

เฉลย 1. (2) 2. (3) 3. (2) 4. (2) 5. (3)
6. (3) 7. (4) 8. (3) 9. (1) 10.(3)

$\cap\varnothing\cup\times\sim\forall\exists\phi\pi\theta\propto\subset\not\subset\in\notin{}^\circ\infty\wedge\vee\leq\leftrightarrow\neq\rightarrow\pm\geq\rightarrow\uparrow$ X Y $\not<\not>\leq\not\geq\not\leq\not\leq$
❶❷❸❹①②③④

บทที่ 9
สถิติเบื้องต้น

9.1 สรุปเนื้อหา

1. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** (Mean) เหมาะที่จะนำมาใช้เป็นค่ากลางของค่ามูล เมื่อข้อมูลนั้นๆ ไม่มีค่าใดที่สูงหรือต่ำเกินไปกว่าค่าอื่นๆ อย่างผิดปกติ

สูตร $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ ข้อมูลไม่แจกแจงความถี่

หรือ $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ ข้อมูลแจกแจงความถี่แล้ว

2. สมบัติของผลบวก

1. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$
2. $\sum_{i=1}^{n} cx_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$
4. $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_i$

ตัวอย่าง การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ข้อมูล 12 , 14 , 16 , 18 , 22 , 28

$$\overline{X} = \frac{12+14+16+18+22+28}{6} = \frac{110}{6} = 18.33$$

ข้อมูลแจกแจงความถี่แล้ว $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$

คะแนน	จุดกึ่งกลาง	ความถี่	
6 – 10	8	2	16
11 – 15	13	6	78
16 – 20	18	7	126
21 – 25	23	5	115

หมายเหตุ จุดกึ่งกลาง $= \dfrac{\text{ขีดจำกัดบน} + \text{ขีดจำกัดล่าง}}{2}$

$$\overline{X} = \frac{(8)(2)+(13)(6)+(18)(7)+(23)(5)}{2+6+7+5} = \frac{335}{20} = 16.75$$

3. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก** $w_1, w_2, \ldots, w_n$ เป็นความสำคัญหรือน้ำหนักของ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ตามลำดับ $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

4. สมบัติของค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\overline{X}$ 4.1 $\sum_{i=1}^{n} x_i = n\overline{X}$ 4.2 $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X}) = 0$

4.3 เมื่อ M เป็นจำนวนจริงใด $\sum_{i=1}^{n} (x_i - M)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$

4.4 ค่าน้อยสุดของข้อมูล $\leq \overline{X} \leq$ ค่ามากสุดของข้อมูล

4.5 ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\overline{X}$ แล้ว $y_i = ax_i + b$ มี $\overline{Y} = a\overline{X} + b$

5. **ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม ของข้อมูล k กลุ่ม** ถ้า $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \ldots, \overline{X}_k$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล k กลุ่มที่ประกอบด้วยจำนวนข้อมูล $N_1, N_2, \ldots, N_k$

แล้ว $\overline{X} = \dfrac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2 + \cdots N_k\overline{X}_k}{N_1 + N_2 + \cdots + N_k}$

6. **มัธยฐาน** (Median) คือข้อมูลที่มีค่าตำแหน่งอยู่กึ่งกลางของข้อมูลทั้งหมดเมื่อได้เรียกข้อมูลจากค่าน้อยที่สุดไปหาค่ามากที่สุด หรือ ค่ามากที่สุดไปหาค่าน้อยที่สุด

สำหรับข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่ $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \ldots \leq x_n$

$$\text{มัธยฐาน} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$$

สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

$$\text{มัธยฐาน} = L + \frac{(\frac{N}{2} - \sum f_L)}{f_M} I \qquad \text{หรือ} \qquad \text{มัธยฐาน} = U - (\frac{\sum f_U - \frac{N}{2}}{f_M}) I$$

N = จำนวนข้อมูลทั้งหมด L = ขีดจำกัดล่างของอัตรภาคชั้นที่มัธยฐานอยู่

U = ขีดจำกัดบนของอัตรภาคชั้นที่มัธยฐานอยู่ I = ความกว้างของชั้นที่มัธยฐานอยู่

$\sum f_L$ = ผลบวกความถี่ของทุกอัตรภาคชั้นที่เป็นช่วงคะแนนต่ำกว่าชั้นที่มัธยฐานอยู่

$\sum f_U$ = ผลบวกของความถี่ของอัตรภาคชั้นที่มีมัธยฐานอยู่ และทุกชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่า

f_M = ความถี่ของชั้นที่มัธยฐานอยู่

ตัวอย่าง 14 , 16 , 17 , 19 , 22 , 25 มัธยฐาน $= \frac{17+19}{2} = 18$

14 , 16 , 17 , 19 , 22 , 25 , 30 มัธยฐาน = 19

	คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
	6 – 10	2	2
	11 – 15	6	8
→	16 – 20	7	15
	21 – 25	5	20

N = 20 I = 20.5 – 15.5 = 5

$f_M = 7$ L = 15.5 $\sum f_L = 8$

$$\text{มัธยฐาน} = L + (\frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_M}) I = 15.5 + (\frac{10-8}{7}) 5 = 16.53$$

7. **สมบัติของมัธยฐาน**

7.1 $\sum_{i=1}^{n} | x_i - \text{มัธยฐาน} | \leq \sum_{i=1}^{n} | x_i - M |$ ทุกค่า M

7.2 ตารางแจกแจงความถี่ที่เป็นตารางเปิดสามารถหามัธยฐานได้

8. **ฐานนิยม** (Mode) คือข้อมูลที่มีความถี่สูงสุด ค่าฐานนิยมเหมาะที่จะนำมาใช้กับข้อมูลที่เป็นค่ามาตรฐานเช่น เบอร์รองเท้า , ขนาดยาง หรือข้อมูลจำแนกตามคุณภาพ เช่น อาชีพ , ชนิดของงาน , เพศ , สีต่างๆ

หมายเหตุ ข้อมูลหนึ่งชุดต้องมี $\bar{X}$ ได้ค่าเดียว และมัธยฐานได้ค่าเดียว แต่อาจมีฐานนิยมได้หลายค่า

ตัวอย่าง ข้อมูล 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4 มีฐานนิยม = 1 และ 3

สูตรการหาฐานนิยมของข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว $\text{Mode} = L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2})I$

L = ขีดจำกัดล่างของ อัตรภาคชั้นที่ฐานนิยมอยู่

d_1 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มัธยฐานอยู่กับชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่า

d_2 = ผลต่างของความถี่ของชั้นที่มัธยฐานอยู่กับชั้นที่มีคะแนนสูงกว่า

I = ความกว้างของชั้นที่ฐานนิยมอยู่

คะแนน	ความถี่
6 – 10	2
11 – 15	6
16 – 20	7 ←
21 – 25	5

$L = 15.5 \qquad d_1 = 7 - 6 = 1 \qquad d_2 = 7 - 5 = 2 \qquad I = 20.5 - 15.5 = 5$

$\text{Mode} = L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2})I = 15.5 + (\frac{1}{1+2})(5) = 17.167$

ค่ากลางอื่นๆ ของข้อมูลที่มีในหลักสูตร ม. ปลาย กำหนดข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_n$

ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต $= \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots x_n}$

ค่ากึ่งกลางพิสัย $= \frac{\text{ค่าสูงสุด} + \text{ค่าต่ำสุด}}{2} = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$

10. ข้อสังเกตเกี่ยวกับค่ากลางของข้อมูล

10.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่ากลางได้จากการนำข้อมูลทุกตัวมาใช้หาค่าเฉลี่ยแต่มัธยฐานและฐานนิยมเป็นการใช้ค่าบางค่าโดยดูตำแหน่งกึ่งกลาง หรือดูว่ามีการซ้ำกันมากที่สุด ซึ่งถือว่าเป็นการใช้ข้อมูลบางค่าเท่านั้น

10.2 ข้อมูลที่มีค่ามากหรือน้อยเกินไปบางตัวจะมีผลต่อค่าเฉลี่ยเลขคณิตแต่จะไม่มีผลต่อมัธยฐานและฐานนิยม

หมายเหตุ ตัวที่มีค่ามากหรือน้อยเกินไปนั้นต้องไม่เป็นค่ามัธยฐานหรือฐานนิยมนะครับ

10.3 ตารางที่เป็นอัตรภาคชั้นเปิดจะหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่ได้แต่ อาจ จะหามัธยฐาน และฐานนิยมได้

หมายเหตุ ถ้าความถี่ของข้อมูลสูงสุดอยู่ในชั้นที่อาจจะหามัธยฐานและฐานนิยมไม่ได้

10.4 ข้อมูลคุณภาพเช่น กลุ่มอาชีพ , ตำแหน่งหน้าที่การงาน , เพศ , ระดับการศึกษา ตัวกลางที่เหมาะสมคือ ฐานนิยม

9.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ข้อมูลจำแนกตามคุณภาพ ค่ากลางต้องใช้ฐานนิยม

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูลแสดงจำนวนนักโทษในเรือนจำแห่งหนึ่ง จำแนกตาม

ระดับการศึกษาระดับการศึกษา	จำนวน
ไม่ได้เรียน	60
ประถมศึกษาตอนต้น	210
ประถมศึกษาตอนปลาย	33
มัธยมศึกษา	26
สูงกว่ามัธยมศึกษา	12

ค่ากลางใดเหมาะสมกับข้อมูลนี้ที่สุด

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
2. มัธยฐาน
3. ฐานนิยม
4. ถูกต้องทั้งข้อ 1 , 2 , และ 3

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นข้อมูลจำแนกตามคุณภาพค่ากลางที่เหมาะสมต้องเป็นฐานนิยม

2. ค่ากลางของข้อมูลที่เป็นตารางแบบเปิดและข้อมูลเป็นปริมาณตัวกลางที่เหมาะสมคือ มัธยฐาน

ตัวอย่าง ตารางแสดงรายได้ของครอบครัว 200 ครอบครัว

รายได้ (บาท)	จำนวนครอบครัว
น้อยกว่า 3000	15
3000 – 4999	31
5000 – 6999	44
7000 – 8999	52
9000 – 10 , 999	34
มากกว่า 11000	24

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ข้อมูลชุดนี้จำแนกตามปริมาณ
2. เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 45 ของข้อมูลเท่ากับ 6999.5
3. ค่ากลางที่เหมาะสมคือ มัธยฐาน
4. ครอบครัวที่มีรายได้ระหว่าง 5000 ถึง 9000 คิดเป็น 53 % ของจำนวนครอบครัวทั้งหมด

การตัดตัวเลือก ข้อมูลนี้จำแนกตามปริมาณ → ตัดตัวเลือก 1

ข้อมูลเป็นตารางเปิดค่ากลางที่เหมาะสมคือ มัธยฐาน → ตัดตัวเลือก 3
คำตอบที่ได้ 2 คะแนนคือข้อ 4

3. นำค่าอัตราส่วนในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งเป็น 43 ถ้าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มชาย และ หญิงเป็น 45 และ 40 ตามลำดับ อัตราส่วน ชาย : หญิง เท่ากับเท่าใด

1. 3 : 2
2. 2 : 3
3. 2 : 5
4. 3 : 5

การตัดตัวเลือก 1. สมมติ ชาย = 3 , หญิง = 2

$$\overline{X}_{\text{ใหม่}} = \frac{(3)(45)+(2)(40)}{3+2} = \frac{135+80}{5} = \frac{215}{5} = 43$$

ดังนั้นเลือก 1. ชาย : หญิง = 3 : 2 เป็นคำตอบได้

วิธีจริง ชาย = x , หญิง = y

$$43 = \overline{X}_{\text{ใหม่}} = \frac{x(45)+y(40)}{x+y}$$

$$43x + 43y = 45x + 40y$$

$$3y = 2x$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

ชาย : หญิง = 3 : 2

9.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 9.1 ข้อมูลคะแนนสอบของนักเรียน 11 คนเป็นดังนี้ 4 , 7 , 6 , 9 , 4 , 5 , 5 , 7 , 6 , 9 , 9 ตัวเลือกใดถูกต้อง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 6
2. ฐานนิยม = 4
3. มัธยฐาน = 6
4. ฐานนิยม < มัธยฐาน

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ข้อแนะนำในการทำโจทย์ข้อนี้ คือ นักเรียนคิดว่าอะไรหาได้ง่ายสำหรับตัวเราก็ทำที่สูตรนั้นก่อนเช่น มี 9 ซ้ำกันมากที่สุด เพราะฉะนั้นฐานนิยม = 9 ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง ต่อไปเรียงคะแนนจากน้อยไปมากจะได้ 4 , 4 , 5 , 5 , 6 , 6 , 7 , 7 , 9 , 9 , 9 เพราะฉะนั้นมัธยฐาน = 6 แล้วเลือก 3. เป็นคำตอบเลย

หมายเหตุ $\overline{X} = \frac{4+4+5+5+6+6+7+7+9+9+9}{11} = \frac{71}{11} = 6.45$

ตัวอย่างที่ 9.2 ตารางต่อไปนี้แสดงความสูง (หน่วยเป็นเซนติเมตร) ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง

ความสูง	จำนวนคน
150 – 154	12
155 – 159	25
160 – 164	40
165 – 169	15
170 – 174	8

ตัวกลางเลขคณิต , มัธยฐาน และ ฐานนิยมของข้อมูล ตามลำดับ คือข้อใด

1. 161.1 , 161.125 , 162.625
2. 161.1 , 161.125 , 161.375
3. 161.1 , 162.875 , 161.375
4. 161.125 , 161.1 , 161.625

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ความสูง	x_i	$x_i - 162$	f_i	$f_i(x_i - 162)$
150 – 154	152	– 10	12	– 120
155 – 159	157	– 5	25	– 125
160 – 164	162	0	40	0
165 – 169	167	5	15	75
170 – 174	172	10	8	80
			100	– 90

ค่าเฉลี่ยของข้อมูลจากสูตรลดทอน $= \frac{-90}{100} = -0.9$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยของความสูง = 162 – 0.9 = 161.1 ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งไปก่อน

การหามัธยฐาน N = 100

ความสูง	ความถี่	ความถี่สะสม
150 – 154	12	12
155 – 159	25	37
160 – 164	40	77 ←
165 – 169	15	92
170 – 174	8	100

มัธยฐานอยู่ในอัตรภาคชั้นที่ 3

มัธยฐาน $= L + \frac{(\frac{N}{2} - \Sigma f_M)}{f_M} I = 159.5 + \frac{(\frac{100}{2} - 37)}{40} (5) = 159.5 + (\frac{50-37}{40}) (5) = 161.125$

ดังนั้นต้องตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

การหาฐานนิยม

ความสูง	ความถี่	
150 – 154	12	
155 – 159	25	$d_1 = 15$
160 – 164	40 ←	$d_2 = 25$
165 – 169	15	
170 – 174	8	

ฐานนิยมอยู่ในอัตรภาคชั้นที่ 3

ฐานนิยม $= L + (\frac{d_1}{d_1 + d_2}) I = 159.5 + (\frac{15}{15+25}) (5) = 159.5 + 1.875 = 161.375$

สรุปเลือกตัวเลือก 2 เป็นคำตอบได้

ตัวอย่างที่ 9.3 ถ้าค่าใดค่าหนึ่งของข้อมูลเปลี่ยนไป ค่าสถิติใดของข้อมูลชุดนั้นต้องเปลี่ยนตามแน่นอน

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
2. ค่ามัธยฐาน
3. ค่าฐานนิยม
4. พิสัย

ตอบ 1.

แนวคิด เพราะว่า $\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$

เพราะฉะนั้นหากมี x_i บางตัวเปลี่ยนค่าแล้ว $\bar{X}$ ต้องเปลี่ยนค่าตามอย่างแน่นอน

การตัดตัวเลือก สมมติข้อมูลเช่น

ข้อมูล $1, 2, 3, 4, 5 \longrightarrow 1, 2, 3, 4, 6$ มัธยฐานไม่เปลี่ยนค่า ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 ทิ้ง

ข้อมูล $1, 2, 3, 4, 5 \longrightarrow 1, 2, 4, 4, 5$ พิสัยไม่เปลี่ยนค่า ดังนั้นตัดตัวเลือก 4 ทิ้ง

ข้อมูล $1, 1, 1, 4, 5 \longrightarrow 1, 1, 1, 4, 6$ ฐานนิยมไม่เปลี่ยนค่า ดังนั้นตัดตัวเลือก 3 ทิ้ง

ตัวอย่างที่ 9.4 ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ มีค่าเฉลี่ยของคณิตเท่ากับ p

ข้อมูล $5 - 3x_1, 10 - 3x_2, 15 - 3x_3, \ldots, 100 - 3x_{20}$ จะมีค่าเฉลี่ยเท่ากับเท่าใด

1. $-3p$
2. $3p - 52.5$
3. $52.5 + 2p$
4. $52.5 - 3p$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ $x_1, x_2, \ldots, x_{20}$ และ p

แทนค่า $x_1, x_2, \ldots, x_{20} = 0, 0, \ldots, 0$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $0, 0, 0, \ldots, 0$ จึงเท่ากับ 0

เพราะฉะนั้น $p = 0$

เพราะว่า $$\frac{(5-3x_1)+(10-3x_2)+\cdots+(100-3x_{20})}{20}$$

$$= \frac{5+10+\cdots+100}{20} = \frac{1}{20}\left(\frac{20}{2}\right)(5-100) = \frac{105}{2} = 52.5$$

แทนค่า $p = 0$ ในตัวเลือกทุกตัว

1. 0
2. -52.5
3. 52.5
4. 52.5

สรุปตัดตัวเลือก 1 และ 2 ทิ้งได้

แทนค่า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20} = 1, 1, 1, \ldots, 1$ จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 1 ดังนั้น $p = 1$

$$\frac{(5-3x_1)+(10-3x_2)+\cdots+(100-3x_{20})}{20} = \frac{(5+10+\cdots+100)-3(20)}{20} = 52.5 - 3 = 49.5$$

แทนค่า $p = 1$ ในตัวเลือก 3 และ 4 จะได้

3. $52.5 + 3p = 52.5 + 3 = 55.5$
4. $52.5 - 3p = 52.5 - 3 = 49.5$

สรุปตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

วิธีจริง ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20} = p$

จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $-3x_1, -3x_2, \ldots, -3x_{20}$ เท่ากับ $-3p$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ 5 , 10 , 15 , . . . , 200 เท่ากับ 52.5

ดังนั้นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $5-3x_1, 10-3x_2, 15-3x_3, \ldots, 200-3x_{20}$ มีค่าเท่ากับ $52.5-3p$

ตัวอย่างที่ 9.5 ในการสอบเลขคณิตของนักเรียนชั้นประถมศึกษาแห่งหนึ่งจำนวน 30 คน ปรากฏว่าได้คะแนนเฉลี่ย 52 คะแนน ถ้าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียน 6 คน คนในกลุ่มนี้ที่ได้คะแนนต่ำสุดเท่ากับ 31 คะแนน แล้วคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนในส่วนที่เหลือเป็นเท่าใด

1. 55.5
2. 55.75
3. 57.25
4. 57.50

ตอบ 3.

แนวคิด $\bar{X}_1 = 31 \qquad \bar{X}_2 = ?$

$n_1 = 6 \qquad n_2 = 24$

$\bar{X}_{\text{รวม}} = 52 \text{ , } n = 20$

จากสูตร $\bar{X}_{\text{รวม}} = \dfrac{n_1\bar{X}_1 + n_2\bar{X}_2}{n_1 + n_2}$

จะได้ $52 = \dfrac{(6)(31)+(24)\bar{X}_2}{30}$

$24\bar{X}_2 = (52)(30) - (6)(31) = 1530 - 186 = 1374$

$\bar{X}_2 = \dfrac{1374}{24} = 57.25$

ตัวอย่างที่ 9.6 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งเป็น 43 คะแนน ถ้าคิดค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนชาย และ หญิงแยกกันจะได้เป็น 45 และ 40 ตามลำดับ แล้วอัตราส่วนระหว่างจำนวน ชาย : หญิง เท่ากับเท่าใด

1. 3 : 2
2. 4 : 3
3. 2 : 5
4. 3 : 5

ตอบ 1.

แนวคิด นำค่าจากตัวเลือกมาแทนค่าก็จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1 ชาย 3 คน , หญิง 2 คน

จะได้คะแนนรวมชาย = 3 (45) = 135 คะแนนรวมหญิง = 2 (40) = 80

คะแนนรวมทั้งหมด $= 135 + 80 = 315$ คะแนนเฉลี่ย $= \frac{215}{5} = 43$

สรุป ชาย : หญิง = 3 : 2 เป็นคำตอบได้

วิธีจริง สมมุติจำนวนชาย = n , จำนวนหญิง = m

จาก $\bar{X}_{\text{ใหม่}} = \frac{n\bar{X}_{\text{ชาย}} + m\bar{X}_{\text{หญิง}}}{m+n}$

$$43 = \frac{n(45)+m(40)}{m+n}$$

$$43m + 43n = 45n + 40m$$

$$3m = 2n$$

$$\frac{n}{m} = \frac{3}{2}$$

สรุป ชาย : หญิง= 3 : 2

ตัวอย่างที่ 9.7 ครูผู้สอนสถิติคนหนึ่งถามนักเรียนเกี่ยวกับเงินค่าอาหารประจำวันที่ได้รับมาจากผู้ปกครองได้คำตอบว่ามีมัธยฐานเป็น 15 บาท และค่ากึ่งกลางพิสัยเป็นเงิน 31 บาท อยากทราบว่าจะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของค่าอาหารเป็นเท่าไร ถ้ามีนักเรียนเพียง 4 คน

1. 20 บาท
2. 21 บาท
3. 22 บาท
4. 23 บาท

ตอบ 4.

แนวคิด ให้ a , b , c , d เป็นค่าอาหารนักเรียน 4 คน และ $a \le b \le c \le d$

เพราะว่าค่ากึ่งกลางพิสัย = 31 เพราะฉะนั้น $\frac{b+c}{2} = 15$

$$b + c = 30 \quad \text{.....(1)}$$

เพราะว่าค่ากึ่งกลางพิสัย = 31 เพราะฉะนั้น $\frac{d+a}{2} = 31$

$$d + a = 62 \quad \text{.....(2)}$$

จาก (1) และ (2) ; $a + b + c + d = 30 + 62 = 92$

$$\bar{X} = \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{92}{4} = 23$$

สรุปค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 23

ตัวอย่างที่ 9.8 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 4 จำนวน หาค่าฐานนิยมได้ 30 ค่ามัธยฐานเท่ากับ 26 และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 25 ดังนั้นพิสัยของข้อมูลนี้คือ

1. 22
2. 12
3. 18
4. 29

ตอบ 2.

แนวคิด $a \le b \le c \le d$ เป็นข้อมูล

เพราะว่าฐานนิยม = 26 เพราะฉะนั้น $\frac{b+c}{2} = 26$

$b + c = 52$ .....(1)

เพราะว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 25 เพราะฉะนั้น $\frac{a+b+c+d}{4} = 25$

$a + b + c + d = 100$ .....(2)

(2) – (1) ; $a + d = 48$

เพราะว่าฐานนิยม = 30 > ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เพราะฉะนั้น $c = d = 30$ ทำให้ $b = 22$ และ $a = 18$

สรุปพิสัย = $d - a = 30 - 18 = 12$

ตัวอย่างที่ 9.9 ข้อมูลสถิติประกอบด้วย x_1, x_2, x_3 และ x_4 มีค่าฐานนิยม = 30 , มัธยฐาน = 25 และ พิสัย = 20 ถ้า $\sum_{i=1}^{4} (x_i - k)^2$ มีค่าน้อยสุดแล้ว k เท่ากับเท่าใด

1. 20
2. 22.5
3. 25
4. 30

ตอบ 2.

แนวคิด ให้ $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$ เพราะว่าพิสัย = 20 เพราะฉะนั้น $x_4 - x_1 = 20$ .....(1)

เพราะว่ามัธยฐาน = 25 เพราะฉะนั้น $\frac{x_2 + x_3}{2} = 25$

$x_2 + x_3 = 50$ .....(2)

เพราะว่ามัธยฐาน < ฐานนิยม เพราะฉะนั้น $x_3 = x_4 = 30$ ดังนั้น $x_2 = 20$ และ $x_1 = 10$

สรุปข้อมูลทั้งสี่ตัวคือ 10 , 20 , 30 , 30 มีค่าเฉลี่ย $= \frac{10+20+30+30}{4} = \frac{90}{40} = 22.5$

เพราะว่า $\sum_{i=1}^{4} (x_i - k)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $k = \overline{X}$ สรุป $k = 22.5$

ตัวอย่างที่ 9.10 ข้อมูลของคะแนนสอบเดิมของนักเรียน 10 คน เป็นดังนี้

4 , 5 , 6 , 8 , 5 , 3 , 4 , 7 , 6 , 6

เมื่อมีคะแนนของนักเรียนเพิ่มอีก 3 คน คือ 5 , 4 , 4 จะมีผลทำให้กลางใดของข้อมูลเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมมากที่สุด

1. ฐานนิยม
2. มัธยฐาน
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
4. มีการเปลี่ยนแปลงเท่ากันทุกค่า

ตอบ 1.

แนวคิด ข้อมูลเดิมเรียงจากน้อยไปมาก 3 , 4 , 4 , 5 , 5 , 6 , 6 , 6 , 7 , 8 มีค่ากลางดังนี้

ฐานนิยม = 6

มัธยฐาน = 5.5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{54}{10} = 5.4$

เมื่อเพิ่ม 5 , 4 , 4 และเรียงข้อมูลใหม่จะได้ 3 , 4 , 4 , 4 , 4 , 5 , 5 , 5 , 6 , 6 , 6 , 7 , 8

จะมีค่ากลางใหม่ดังนี้ ฐานนิยม = 4

มัธยฐาน = 5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{67}{13} = 5.1$

สรุปค่ากลางที่มีการเปลี่ยนแปลงมากที่สุด คือ ฐานนิยม

แนวคิดของการตัดตัวเลือกหาอ่านได้ใน

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 7

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 2 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 3 คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 16

โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 20

9.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. น้ำหนักของนักเรียน 12 คน คือ 42 ,79 , 50 , 43 , 46 , 49 , 43 , 45 , 44 , 88 , 47 , 48 ค่ากลางที่ดีที่สุดสำหรับข้อมูลนี้ คือ
   1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
   2. มัธยฐาน
   3. ฐานนิยม
   4. ค่ากึ่งกลางพิสัย
2. นักเรียนชั้นหนึ่งมี 100 คน แบ่งเป็นกลุ่ม 1 . และ กลุ่ม 2. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ คะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งชั้นเท่ากับ 55.3 ถ้ากลุ่ม 1 มีนักเรียนมากกว่ากลุ่ม 2 อยู่ 6 คน และคะแนนเฉลี่ย ของกลุ่ม 1 เป็น 60 แล้ว คะแนนเฉลี่ยของกลุ่ม 2 เท่ากับเท่าใด
   1. 50
   2. 50.6
   3. 55.3
   4. 57.65
3. ค่าของ $\sum_{i=10}^{12} (3i - 1)$ เท่ากับเท่าใด
   1. 46
   2. 69
   3. 86
   4. 96
4. ถ้า $x_1 , x_2 , \ldots x_n$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง มีค่าเฉลี่ย = $\overline{X}$ และ $(x_1 - e) + (x_2 - e) + \ldots + (x_n - e) = 0$ แล้วตัวเลือกใดถูกต้อง
   1. $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$
   2. $e = n\overline{X}$
   3. $e = \overline{X}$
   4. $e = \sum_{i=1}^{n} x_i$
5. ฐานนิยมของข้อมูลเท่ากับเท่าใด เมื่อกำหนดข้อมูล

คะแนน	ความถี่
20 – 29	8
30 – 49	12
50 – 59	10
60 – 79	14
80 – 89	8
90 – 99	4

   1. 52.8
   2. 67.5
   3. 68.5
   4. 55.2

6. ข้อมูลความสูงของนักเรียน

ความสูง	จำนวนคน
150 – 154	12
155 – 159	25
160 – 164	40
165 – 169	15
170 – 174	8

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต , มัธยฐาน และ ฐานนิยมเท่ากับเท่าใดตามลำดับ

1. 161.1 , 162.875 , 162.625
2. 161.1 , 161.125 , 161.375
3. 161.1 , 162.875 , 161.375
4. 161.125 , 161.1 , 162.875

7. กำหนด $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\overline{X}$

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น $\overline{Y}$ และ $n < m$

จงพิจารณาข้อความ

ก. ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\overline{X}+\overline{Y}$

ข. ข้อมูล $x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_m$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\overline{X}-\overline{Y}$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูกต้องข. ผิด
2. ก. ถูกต้องข. ถูกต้อง
3. ก. ผิด ข. ถูกต้อง
4. ก. ผิด ข. ผิด

8. กำหนด $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูลที่มีมัธยฐานเท่ากับ A

$y_1, y_2, \ldots, y_m$ มีมัธยฐานเท่ากับ B และ $n < m$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า C เป็นมัธยฐานของข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ แล้ว $A < C < B$

ข. ถ้า $A = B$ แล้วมัธยฐานของ $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ ต้องเท่ากับ A

ข้อสรุปที่ถูกต้องคือ

1. ก. ถูกต้องข. ผิด
2. ก. ถูกต้องข. ถูกต้อง
3. ก. ผิด ข. ถูกต้อง
4. ก. ผิด ข. ผิด

9. จงพิจารณาข้อความ เมื่อ กำหนดข้อมูลคือ 1 , 6 , 1 , 1 , 1 , 6 , 2 , 8 , 7 , 5 , 1 , 6 , 2 , 6 , 2 , 5

ก. ค่ากึ่งกลางพิสัย < ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข. ฐานนิยม < มัธยฐาน

ข้อสรุปที่ถูกต้องคือ

1. ก. ถูกต้องข. ผิด
2. ก. ถูกต้องข. ถูกต้อง
3. ก. ผิด ข. ถูกต้อง
4. ก. ผิด ข. ผิด

10. จงพิจารณาข้อความเมื่อ กำหนดข้อมูลคือ 1 , 2 , 2 , 3 , 3 , 3 , 4 , 4 , 4 , 4

ก. ค่ากึ่งกลางพิสัย = มัธยฐาน

ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต > ฐานนิยม

ข้อสรุปที่ถูกต้องคือ

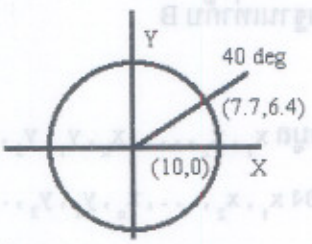
1. ก. ถูกต้องข. ผิด
2. ก. ถูกต้องข. ถูกต้อง
3. ก. ผิด ข. ถูกต้อง
4. ก. ผิด ข. ผิด

เฉลย 1. (1) 2. (1) 3. (4) 4. (3) 5. (4)
6. (2) 7. (4) 8. (4) 9. (2) 10.(4)

$\cap \varnothing \cup \times \sim \forall \exists \phi \pi \theta \propto \subset \not\subset \in \notin {}^\circ \infty \wedge \vee \leq \leftrightarrow \neq \rightarrow \pm \geq \rightarrow \uparrow$ X Y $\not< \not> \leq \not\geq \not\leq \not\geq$

❶❷❸❹①②③④

เชื่อหรือไม่ วงกลมรัศมี 10 cm. **ช่วยในการประมาณค่า** sin cos tan **ได้**



จากรูป ค่า sin40 = 0.64 , cos40 = 0.77

หาอ่านแนวคิดเพิ่มเติมได้ใน คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 10

โจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. พื้นที่ของสามเหลี่ยมซึ่งเกิดจากเส้นตรงสามเส้นที่มีสมการ $x + y + 1 = 0$, $3x - 7y + 13 = 0$ และ $7x - 3y - 23 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 16 2. 18 3. 20 4. 22

2. กำหนดให้ A, B, C, D และ E เป็นรูปแบบของประพจน์ ถ้า A และ B ต่างก็มีค่าความจริงเป็นจริงแล้ว $[(C \rightarrow A) \wedge (\sim A \rightarrow \sim B)] \vee E$ มีค่าความจริงตรงกับค่าความจริงข้อใดต่อไป

   1. $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$ 2. $(E \vee D) \leftrightarrow (A \vee \sim C)$
   3. $(A \vee \sim E) \leftrightarrow (E \vee \sim D \vee B)$ 4. $(A \wedge C) \rightarrow (B \wedge E)$

3. ถ้าวงกลมผ่านจุด A(2, –2) และ B(3, 4) มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $x + y = 2$ แล้วสมการของวงกลมคือข้อใดต่อไปนี้

   1. $(2x - 11)^2 + (2y + 7)^2 = 58$ 2. $(2x + 7)^2 + (2y - 11)^2 = 346$
   3. $(10x - 7)^2 + (10y - 13)^2 = 1258$ 4. $(3x - 5)^2 + (3y - 1)^2 = 50$

4. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ซึ่งหารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 10 2. 15 3. 20 4. 35

5. กำหนด $f : [-\pi, \pi] \rightarrow R$ โดย $f(x) = \lfloor 4.5 \cos x \rfloor$ เมื่อ $\lfloor a \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a เรนจ์ของ f มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 3 2. 5 3. 10 4. 11

6. ให้ $A = \left\{ \frac{y}{x} \mid \frac{x}{y} = \frac{2y}{x+y} \right\}$ เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง จำนวนสมาชิกของ A เท่ากับเท่าใด

   1. 0 2. 1 3. 2 4. มากกว่า 2

7. ให้เอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง ข้อความ "จำนวนจริงบวกทุกจำนวนสามารถเขียนเป็นกำลังสองของจำนวนจริงบวกบางจำนวนได้" ตรงกับสัญลักษณ์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\forall x[x > 0 \wedge \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
   2. $[\forall x[x > 0]] \wedge [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
   3. $\forall x[x > 0 \rightarrow \exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$
   4. $[\forall x[x > 0]] \rightarrow [\exists y[y > 0 \wedge x = y^2]]$, $U = R$

8. ถ้าให้ A , B , C เป็นเซตใด ๆ และ $\varnothing$ เป็นเซตว่างแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $C - (A \cup B) = (C - A) \cup (C - B)$ 2. ถ้า $A \cap B = A \cap C$ แล้ว $B = C$
3. $A \subset C$, $B \subset C$ และ $(C - B) \subset A$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = C$
4. $(B \cup A) \cap (\varnothing \cup A) \neq A$

9. วงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่ $V_1(1 , 2)$ และ $V_2(7 , 2)$ และความยาวครึ่งแกนโทเท่ากับ 2 หน่วย มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ 2. $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 16x - 9y + 32 = 0$ 4. $4x^2 + 9y^2 - 32x + 36y - 8 = 0$

10. พิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

(1) เหตุ : 1. $p \leftrightarrow \sim q$
2. $r \vee (p \wedge q)$
ผล : $p \rightarrow r$

(2) เหตุ : 1. $p \wedge q$
2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
ผล : r

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (1) และ (2) สมเหตุสมผล 2. (1) เท่านั้นสมเหตุสมผล
3. (2) เท่านั้นสมเหตุสมผล 4. (1) และ (2) ไม่สมเหตุสมผล

11. กำหนดให้ $A - B = \{1 , 2 , 4\}$, $B - A = \{3 , 5\}$ และ $A \cup B = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$ แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

1. {0,1,4,6,7} 2. {0,1,3,5,7} 3. {1,2,3,4,7} 4. {1,2,4,5,6}

12. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก ให้ $r = \{(x , y) \mid yx^2 = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้คือเรนจ์ของ r

1. R^+ 2. $R^+ \cup \{0\}$ 3. $R - \{0\}$ 4. R

13. กำหนด $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{3}{16}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{3}{4}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 4. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

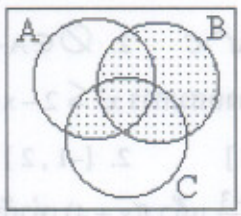
14. ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับเซตของจุด (x , y) ที่อยู่บนวงรีซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกยาว 8 หน่วย และแกนโทยาว 2 หน่วย

1. $\{(x , y) \mid x^2 + 16y^2 = 16\}$ 2. $\{(x , y) \mid x^2 + 16y^2 = 64\}$
3. $\{(x , y) \mid x^2 - 16y^2 = 16\}$ 4. $\{(x , y) \mid x^2 - 16y^2 = 64\}$

15. ข้อใดต่อไปนี้คือเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(2x-1)}{x^2-1} \geq 0$

1. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
2. $(-1, \frac{1}{2}) \cup (1, \infty)$
3. $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$
4. $(-\infty, -1) \cup [\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$

16. ส่วนที่แรเงาคือเซตในข้อใดต่อไปนี้



1. $(B \cup A) \cap C$
2. $(B \cap A) \cup C$
3. $B \cap (A \cup C)$
4. $B \cup (A \cap C)$

17. ถ้า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\tan\theta$ มีค่าเป็นบวก แล้วค่าของ $\sec\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$
2. $\frac{5}{3}$
3. $-\frac{3}{5}$
4. $-\frac{5}{3}$

18. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (0 , 0) ไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรง $x = 3$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = -4x$
3. $y^2 = 12x$
4. $y^2 = -12x$

19. ค่าของ $\left[\frac{3^{4n+3} + 3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 5
3. 7
4. 9

20. อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์ ในขณะที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 32 องศาฟาเรนไฮต์ สมมติว่าอุณหภูมิที่วัดในมาตราองศาเซลเซียส(C) และองศาฟาเรนไฮต์(F) มีความสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F และ C คือข้อใดต่อไปนี้

1. $F = 32 + \frac{9}{5}C$
2. $F = 32 + 9C$
3. $F = 32 - \frac{9}{5}C$
4. $F = 32 - 9C$

21. กำหนด p , q , r และ s เป็นประพจน์ ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้ **ไม่เป็น** สัจนิรันดร์

1. $[p \vee (q \wedge r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]$
2. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim[p \vee (q \wedge r)]$
3. $[(p \vee q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \wedge \sim q))]$
4. $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge (s \vee \sim r) \wedge \sim s] \leftrightarrow p$

22. เซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$
2. $(2 , 3)$
3. $(-1 , 2) \cup (2 , 7)$
4. $(\frac{5}{3} , 2) \cup (2 , 3)$

23. ถ้าความสัมพันธ์ $r = \{(x,y) \in R \times R \mid y = 2 - \frac{4}{(x-1)^2 - 4}\}$ แล้วข้อใดเป็นเรนจ์ของ r

1. $(-\infty,2) \cup [3,\infty)$ 2. $(-\infty, 2) \cup (3, \infty)$
3. $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$ 4. $(-\infty, 2] \cup (3, \infty)$

24. กำหนด $A = \{0, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$, $B = \{0, \{\emptyset\}\}$, $C = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\emptyset \in A \cap C$ 2. $\emptyset \in A - B$ 3. $A \subset C$ 4. $B \subset C$

25. เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-2, 1]$ 2. $[-1, 2]$ 3. $[-2, 1)$ 4. $[-1, 2)$

26. ถ้า $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ แล้ว $f(x+4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2x+11}{x+2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2}$ 3. $\frac{2x+3}{x+2}$ 4. $\frac{2x+11}{x-2}$

27. ฟังก์ชัน f ในข้อใดต่อไปนี้มีคุณสมบัติว่า $f(x) = f(-x)$

1. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ 2. $f(x) = |x-4|$ 3. $f(x) = x^3 - 1$ 4. $f(x) = x^2 + 2$

28. เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบแล้วตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาวเท่ากับข้อใด

1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{150}{\sqrt{2}}$ 3. $150\sqrt{3}$ 4. $150\sqrt{2}$

29. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30° 2. 60° 3. 90° 4. 120°

30. จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9y^2 - 16x^2 = 144$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,-5), (0,5)$ 2. $(0,-\sqrt{7}), (0,\sqrt{7})$
3. $(-5,0), (5,0)$ 4. $(-\sqrt{7},0), (\sqrt{7},0)$

31. ถ้า A และ B เป็นจุดที่วงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ ตัดกับแกน Y แล้วข้อใดต่อไปนี้คือระยะทางจาก A ไป B

1. $2\sqrt{3}$ 2. $4\sqrt{3}$ 3. 6 4. 8

32. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$
2. $(A - \{b, c\}) \cup \{b\} = \{a, \{a\}, \{b\}\}$
3. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{\{b, c\}\}$
4. $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\} = \{b, c\}$

33. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{3-x}{x+2} \geq 0$

B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|\frac{1}{2}-\frac{x}{2}| \leq 1$ เซต $(A-B)'$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$ 2. $(-\infty, -2) \cup [-1, \infty)$
3. $(-\infty, -2] \cup (-1, \infty)$ 4. $(-\infty, -2] \cup [-1, \infty)$

34. ถ้า p และ q เป็นประพจน์ แล้ว ประพจน์ $p \rightarrow \sim(q \rightarrow p)$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sim p \vee (\sim p \wedge q)$ 2. $\sim p \vee (p \vee q)$ 3. $p \rightarrow (\sim q \vee q)$ 4. $p \rightarrow (\sim q \wedge q)$

35. ให้เส้นตรง L_1 ผ่านจุด (5 , 2) และ (1 , – 6) เส้นตรง L_2 ผ่านจุด (3 , – 1) และมีความชัน – 1 ถ้า (a , b) เป็นจุดตัดของเส้นตรงทั้งสอง แล้ว a + b มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. – 2 2. – 1 3. 1 4. 2

36. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ก. $\{x \in R \mid \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 2\} = \{x \in R \mid \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} = 2\}$

ข. $\{x \in R \mid \left|\frac{x}{x-1}\right| \geq 2\} = \{x \in R \mid |x| \geq 2|x-1|\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

1. ก และ ข ถูกทั้งคู่ 2. ก ถูก แต่ ข ผิด
3. ก ผิด แต่ ข ถูก 4. ก และ ข ผิดทั้งคู่

37. ให้ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก กำหนดให้ $f = \{(x , y) \mid x + 2y = 12 \text{ และ } x , y \in I^+\}$ แล้ว fof เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. {(8,5),(4,4)} 2. {(5,8),(4,4)} 3. {(2,2),(4,4)} 4. {(6,3),(4,4)}

38. กำหนดให้ $x \in [0 , 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1 - \sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\}$ 2. $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\}$ 3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\}$ 4. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\}$

39. กำหนดให้ A(1 , 2) และ B(–1 , 4) เป็นจุดสองจุดที่มีจุด M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB ถ้าวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุด M รัศมี $\sqrt{8}$ หน่วย ตัดส่วนของเส้นตรง AB ที่ต่อออกมาทั้งสองข้างที่จุดสองจุด แล้วจุดตัดจุดหนึ่งคือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. (2 , 1) 2. (2 , 5) 3. $(\sqrt{2} , 3 - \sqrt{6})$ 4. $(\sqrt{3} , 3 - \sqrt{5})$

40. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid x(x-2)y - 1 = 0\}$

เซตในตัวเลือกใดไม่เป็นสับเซตของ $D_r \cap R_r$

1. $(2 , \infty)$ 2. $(-\infty , -1)$ 3. (0 , 2) 4. (– 1 , 0)

41. กำหนด $f(x) = 2x - 3$ และ $D_f = [2, 5]$

ถ้า $g^{-1}(f(x)) = 3x + 2$ แล้ว ตัวเลือกใดถูกต้อง

1. $g(x) = 6x - 7$ 2. $g(2) = -2$ 3. $g^{-1}(3) = 1$ 4. $g^{-1}(x) = x + 2$

42. กำหนดให้ $a, b, c, d \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ และ $x = 1000a + 100b + 10c + d$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร $a + b + c + d$ ลงตัว

(ข.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร ผลคูณของ a, b, c, d ลงตัว

(ค.) ถ้า 9 หาร x ลงตัว แล้ว 9 หาร $1000d + 100c + 10b + a$ ลงตัว

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ 2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ
3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ 4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

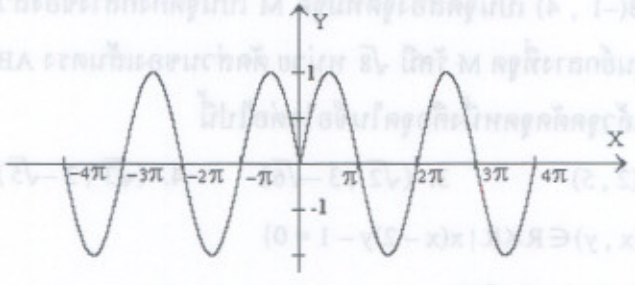
43. เส้นโค้ง P เป็นกราฟของไฮเพอร์โบลาที่มีจุด (5, 0) และ (–5, 0) เป็นจุดโฟกัสความยาวแกนตามขวางเท่ากับ 8 ถ้าเส้นตรง L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับไฮเพอร์โบลา P ที่จุด (5, k) แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด

1. $(\frac{4}{5}, 0)$ 2. $(\frac{6}{5}, 0)$ 3. $(\frac{8}{5}, 0)$ 4. $(\frac{16}{5}, 0)$

44. จุด A(– 1, 2) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม C ซึ่งมีรัศมี 3 หน่วย P(– 4, – 4) เป็นจุดนอกวงกลม C กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด P และห่างจาก A เป็นระยะทาง $\frac{3}{\sqrt{2}}$ หน่วย ถ้า (p, q) เป็นจุดตัดของเส้นตรง L กับวงกลม C แล้ว $p + q$ เท่ากับเท่าใดได้บ้าง

1. $\frac{18}{5}$ 2. 0 3. $\frac{8}{5}$ 4. 2

45.



กราฟที่กำหนดให้ เป็นกราฟของฟังก์ชันในข้อใด

1. $y = \sin(-x)$ 2. $y = \cos(|x|)$ 3. $y = \sin(|x|)$ 4. $y = |\sin(x)|$

46. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = 1 + \sqrt{x^2 - 9}\}$

โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์คือข้อใด

1. $D_r = [-3 , 3] , R_r = (-\infty , 1]$ 2. $D_r = (-\infty , -3] \cup [3 , \infty) , R_r = [1 , \infty)$
3. $D_r = [3 , \infty) , R_r = [1 , \infty)$ 4. $D_r = (-\infty , -3] , R_r = [3 , \infty)$

47. ให้ A , B , C เป็นเซตใดๆ $(A \cap C) - (B \cup D)$ เท่ากับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(A-B) \cap (D-C)$ 2. $(A-B) \cap (C-D)$ 3. $(A-B) \cup (D-C)$ 4. $(A-B) \cup (C-D)$

48. นิเสธของข้อความ $\exists x \forall y [xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)]$ คือข้อความในข้อใดต่อไปนี้

1. $\forall x \exists y[(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$ 2. $\exists x \forall y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \vee y \geq 0)]$
3. $\exists x \forall y[(xy \geq 0) \vee (x < 0 \vee y < 0)]$ 4. $\forall x \exists y[(xy < 0) \wedge (x \geq 0 \wedge y \geq 0)]$

49. เส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y = 5$ มีสมการเป็นดังข้อใด

1. $4x-3y+12 = 0$ 2. $4x-3y-12 = 0$ 3. $4x-3y-36 = 0$ 4. $4x-3y+36=0$

50 เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0,3]$ 2. $[2,4]$ 3. $[-3,-2] \cup [2,3]$ 4. $[-2,-1] \cup [1,2]$

51. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} \geq 1\}$

$B = \{ n \mid n$ เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่ง $n \leq -2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

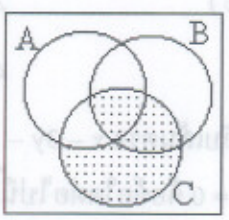
1. -4 2. -3 3. -2 4. -1

52. ถ้า $g(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ แล้วสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ค่าของ $g(|x| - x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x(|x| - x)$ 2. $x(x - |x|)$ 3. $2x(|x| - x)$ 4. $2x(x - |x|)$

53. ส่วนที่แรเงา คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $C - (A \cup B)$
2. $C - (B' \cap A)$
3. $A' \cap C$
4. $B' \cap C$



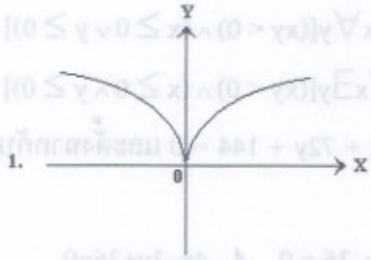
54. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า 5 หาร m เหลือเศษ 4 และ 5 หาร n เหลือเศษ 2 แล้ว 5 หาร $m+n$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

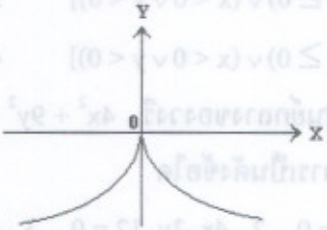
1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

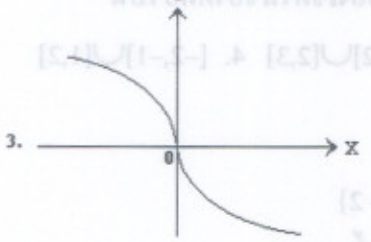
55. เรนจ์ของความสัมพันธ์ $\{(x,y)\in R\times R \mid y=\frac{x+2}{x-5}\}$ คือข้อใดต่อไปนี้

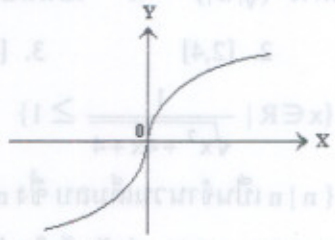
1. $\{y\in R \mid y\neq 5\}$ 2. $\{y\in R \mid y\neq -2\}$ 3. $\{y\in R \mid y\neq 1\}$ 4. $\{y\in R \mid y\neq -5\}$

56. ฟังก์ชัน f กำหนดโดย $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq 0\\ -\sqrt{-x} & x<0\end{cases}$ มีกราฟเป็นรูปใดต่อไปนี้

1.


2.


3.


4.


57. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=x^2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $(gof)(x)=x-1$ 2. $(gof)(x)=\sqrt{x^2-1}$
3. $(fog)(x)=x-1$ 4. $(fog)(x)=x^2-1$

58. เซตคำตอบของอสมการ $x^3-6x^2+12x-5>|x+1|$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-\frac{1}{2})\cup(4,\infty)$ 2. $(0,2)\cup(3,\infty)$
3. $(-\infty,0)\cup(\frac{1}{2},4)$ 4. $(1,\frac{3}{2})\cup(4,\infty)$

59. สมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x-3y-11=0$ และผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x-5y-9=0$ กับเส้นตรง $3x+5y-7=0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x-3y+1=0$ 2. $x-3y-1=0$ 3. $x-3y+7=0$ 4. $x-3y-7=0$

60. ถ้า $P(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ และ $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม 1 หน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด แล้วส่วนโค้ง PQ ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

61. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 40 และค่าพิสัยเท่ากับ 20 ดังนั้นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของข้อมูลชุดนี้คือข้อใดต่อไปนี้

1. 0 และ 40 2. 10 และ 30 3. 20 และ 60 4. 30 และ 50

62. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|8x+7| \geq 6$

และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|2x-3| < 4$ แล้ว B – A คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-\frac{1}{8},\frac{7}{2})$ 2. $(-\infty,-\frac{13}{8})$

3. $(-\infty,-\frac{13}{8}]\cup(-\frac{1}{2},\frac{7}{2})$ 4. $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{8})$

63. กำหนด $A = \{x \mid x^2-2x-3\}$

$B = \{x \mid x(x-1)(x-2)=0\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $\{(3,0),(-1,1)\}$ 2. $\{(3,2),(1,-1)\}$

3. $\{(-3,1),(1,2),(1,0)\}$ 4. $\{(-3,1),(1,2),(-3,0)\}$

64. กำหนดประพจน์ $X \rightarrow Y$ สมมูลกับประพจน์ $Y \vee \sim X$

ประพจน์ $(\sim p \vee q) \rightarrow r$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $(r \wedge p) \wedge (\sim r \wedge q)$ 2. $(r \wedge p) \vee (r \vee \sim q)$

3. $(r \vee p) \wedge (\sim r \vee q)$ 4. $(r \vee p) \wedge (r \vee \sim q)$

65. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ และมีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรีนี้ มีสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 2. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 3. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$ 4. $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

66. ให้ C คือวงกลมที่ผ่านจุดกำเนิด และตัดแกน X ที่จุด (4 , 0) ตัดแกน Y ที่จุด (0 , –2) สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับวงกลม C และมีรัศมีเท่ากับ 3 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(x-2)^2+(y+1)^2=9$ 2. $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

3. $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ 4. $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

67. ค่าของ $\left[\frac{729^n+81^{2n}}{27^n+243^n}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับค่าใดต่อไปนี้

1. 9 2. 27 3. 3^{2n} 4. $3^{\frac{1}{n}}$

68. ค่าของ $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ + \cot 9^\circ$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4 3. 6 4. 8

69. ถ้า $f(x) = \sqrt{(3+x)(2-x)}$ และ $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ แล้วโดเมนของ fg คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\varnothing$ 2. $(-\infty, 2]$ 3. $(-3, 2)$ 4. $(-3, 2]$

70. ถ้า $r = \{(x, y) \mid y \le x^2$ และ $y \ge 2x\}$ แล้ว เรนจ์ของ r^{-1} คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0,2]$ 2. $[0,4]$ 3. $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ 4. $(-\infty,0]\cup[4,\infty)$

71. ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดที่ (3 , 2) และ (3 , –4) โฟกัสที่ (3 , –6) มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$ 2. $\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$

3. $\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+3)^2}{16} = 1$ 4. $\frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$

72. ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมการของเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 6) และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 - 4y - 4x = 8$

1. $3x-4y+21=0$ 2. $4x-3y+14=0$ 3. $7x+2y-19=0$ 4. $2x+7y-44=0$

73. ให้ r_1 และ r_2 เป็นความสัมพันธ์กำหนดโดย

$r_1 = \{(x, y) \in R\times R \mid y \le \sqrt{x-3}\}$

$r_2 = \{(x, y) \in R\times R \mid x + \sqrt{y^2-9} \le 0$ และ $y \ge 0\}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $r_1 \subset r_2$ 2. $r_2 \subset r_1$ 3. $r_1 \subset r_2^{-1}$ 4. $r_2 \subset r_1^{-1}$

74. ให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชันเป็น $-\frac{4}{3}$ ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ และตัดกับวงกลมที่จุด A และ B ถ้า C มีพิกัดเป็น (–1 , –2) แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$ 2. 3 3. 9 4. $\frac{63}{5}$

75. ให้ A(–1 , 2) , B(3 , 0) และ C(5 , 4) เป็นจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $3x-3y-1=0$ 2. $3x-3y+1=0$ 3. $3x-3y-2=0$ 4. $3x-3y+2=0$

76. เซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0 , 0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ 2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$
3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$ 4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

77. เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ทำให้ประพจน์ $\forall x\,[x^2 + 2x - 3 < 0]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

1. $(-\infty, -3)$ 2. $(-2 , 1)$ 3. $(0 , 10)$ 4. $(1 , \infty)$

78. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $a^2 - b^2 > 0$ แล้ว $|a| > |b|$ 2. $a^2 + b^2 \geq 2ab$
3. $|a - b| \geq |a| - |b|$ 4. $\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a + b|$

79. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^2}{x+1} > x$ เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -2)$ 2. $(-10 , -1)$ 3. $(-2 , 1)$ 4. $(1 , \infty)$

80. เส้นตรงที่ผ่านจุด (4 , –3) และ (–2 , 6) มีระยะตัดแกน $x = a$ และระยะตัดแกน $y = b$ แล้ว a , b คือข้อใดต่อไปนี้

1. $a = 2 , b = 3$ 2. $a = 3 , b = 2$ 3. $a = -2 , b = 3$ 4. $a = -2 , b = -3$

81. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{(2 - x - x^2)^2} = 2 - x - x^2$ และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x^2} = x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \cup B = R$ 2. $A \cap B = (0 , 1)$ 3. $A - B = \varnothing$ 4. $B - A = (1 , \infty)$

82. เซตคำตอบของอสมการ $2x + 2 < |x| < 7x + 8$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1 , 0)$ 2. $(-\frac{2}{3}, 1)$ 3. $(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$ 4. $(0 , 2)$

83. ให้ a , b , c เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า 7 หาร a เหลือเศษ 1 7 หาร b เหลือเศษ 3 7 หาร c เหลือเศษ 5 แล้ว 7 หาร $a(b + c)$ เหลือเศษเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 4 4. 6

84. ถ้าพาราโบลามีจุดยอดที่ (0,0) มีแกน X เป็นแกนสมมาตรและผ่านจุดตัดของเส้นตรง $4x + 3y = 8$ กับ $2x + y = 2$ แล้ว พาราโบลาจะผ่านจุดใดต่อไปนี้

1. $(\frac{1}{4}, -2)$ 2. $(-\frac{1}{4}, 2)$ 3. $(2, -\frac{1}{4})$ 4. $(-2, \frac{1}{4})$

85. ไฮเพอร์โบลา H มีจุดโฟกัสที่จุด $F_1(-3, 0)$ และ $F_2(3, 0)$ และ P เป็นจุดๆ บน H แล้ว $|PF_1 - PF_2| = 2\sqrt{5}$ สมการของวงรีที่มีจุดยอดร่วมกับ H และมีความยาวแกนโทเท่ากับความยาวแกนสังยุคของ H มีสมการเป็นข้อใดต่อไปนี้

1. $4x^2 + 5y^2 = 20$ 2. $5x^2 + 4y^2 = 20$ 3. $5x^2 + 9y^2 = 45$ 4. $9x^2 + 5y^2 = 45$

86. A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 - 3x - 3| > |x^2 + 7x - 13|$ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A ตรงกับข้อใด

1. -4 2. 1 3. 2 4. 4

87. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $2x + y - 7 = 0$ และ ผ่านจุด $(6, -1)$ แกนพาราโบลามีสมการ $y - 3 = 0$ คือข้อใด

1. $2y^2 + 12y - x + 16 = 0$ 2. $y^2 + 6y - x + 11 = 0$
3. $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$ 4. $y^2 - 6y - 2x + 13 = 0$

88. สมการวงรี มีจุดศูนย์กลางและโฟกัสจุดหนึ่งห่างจากเส้นตรง $y - 10 = 0$ เท่ากับ 8 และ 11 หน่วย ตามลำดับ แกนเอกของวงรีมีสมการ $x + 4 = 0$
ถ้าวงรีผ่านจุด $(-8, 2)$ แล้วสมการของวงรีคือข้อใด

1. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$ 2. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{18} = 1$
3. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{20} = 1$ 4. $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-2)^2}{21} = 1$

89. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid x^2 - 3|x| + 2 \geq 0\}$ และ $B = (-2, 1]$ แล้ว $A \cap B'$ คือเซตใด

1. $\{-2\} \cup [2, \infty)$ 2. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
3. $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$ 4. $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

90. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2y + x^2 + 2x - y = 0\}$ $R_r - D_r$ คือเซตใด

1. $\varnothing$ 2. $\{-1\}$ 3. $\{1\}$ 4. $\{-1, 1\}$

91. ค่าของ $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. -1 3. 0 4. $\sqrt[3]{4}$

92. ให้ $a_1, a_2, a_3, .., a_n \in R^+$ $A = \dfrac{(a_1^2+a_1+1)(a_2^2+a_2+1)(a_3^2+a_3+1)\cdots(a_n^2+a_n+1)}{a_1a_2a_3...a_n}$

ค่าต่ำสุดของ A เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2^n 3. $(2.5)^n$ 4. 3^n

93. สำหรับสับเซต A , B , C ใด ๆ ของเอกภพสัมพัทธ์ U

ถ้า $A \neq \phi$ และ $B \neq \phi$ แล้วข้อความใดต่อไปนี้ ผิด

1. $(A \cap B') \cup (A \cup B)' = B'$
2. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cup C)$
3. $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap B) - C$
4. $A \cap (A \cup B) \subset A$

94. ห.ร.ม. ของ –504 และ 450 มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 18 2. –18 3. 72 4. ไม่มีค่า ห.ร.ม.

95. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าข้อใดบ้างถูกต้อง

(1) $f \cup g$ เป็นฟังก์ชัน

(2) $f \cap g$ เป็นฟังก์ชัน

(3) $f - g$ เป็นฟังก์ชัน

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 1 ข้อ 2. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องเพียง 2 ข้อ
3. ข้อ (1) – (3) ถูกต้องทั้ง 3 ข้อ 4. ข้อ (1) – (3) ผิดทุกข้อ

96. สมการของวงรีที่ผ่านจุดกำเนิดและมีจุดโฟกัสอยู่ที่ (–1 , 1) กับ (1 , 1) คือสมการในข้อใด

1. $2x^2+y^2+4x=0$ 2. $2x^2+y^2-4x=0$ 3. $x^2+2y^2+4y=0$ 4. $x^2+2y^2-4y=0$

97. จุดต่อไปนี้จุดใดอยู่บนเส้นสัมผัสของพาราโบลา $y^2 = 8x$ และเส้นสัมผัสนั้นขนานกับเส้นตรง $x + y = 0$

1. (2 , –1) 2. (3 , –5) 3. (4 , –7) 4. (5 , –9)

98. ให้ O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 4x = 0$ ลาก OP ให้ Q เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง OP พิกัดของ Q สอดคล้องสมการข้อใด

1. $x^2+y^2+2x=0$ 2. $x^2+y^2-2x=0$ 3. $x^2+y^2+8x=0$ 4. $x^2+y^2-8x=0$

99. ไฮเพอร์โบลามีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(-3-3\sqrt{13}\ ,\ 1)$ จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3\ ,\ 1)$ อัตราส่วนของระยะทางครึ่งแกนตามขวางต่อระยะครึ่งแกนสังยุคเป็น 2 : 3 สมการของไฮเพอร์โบลานี้คือสมการในข้อใด

1. $\frac{(x+3)^2}{36}-\frac{(y-1)^2}{81}=1$
2. $\frac{(y-1)^2}{81}-\frac{(x+3)^2}{36}=1$
3. $\frac{(x+3)^2}{117}-\frac{(y-1)^2}{50}=1$
4. $\frac{(x+3)^2}{50}-\frac{(y-1)^2}{117}=1$

100. ให้ O เป็นจุดกำเนิด ลากเส้นตรง OA และ OB ทำให้จุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $2x + y = a$ โดยมี OA = OB และมุม AOB เป็นมุมฉาก พื้นที่สามเหลี่ยม OAB จะมีค่าเป็นเท่าใด

1. $\frac{a^2}{2}$
2. $\frac{a^2}{3}$
3. $\frac{a^2}{4}$
4. $\frac{a^2}{5}$

101. รูปสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรง AB คือ $3x + 2y = 12$ M เป็นจุดที่เส้นตั้งฉากลากจากจุดยอด A , B และ C มาตั้งฉากกับฐานพบกัน สมการเส้นตรง BM คือ $x + 2y = 4$ และสมการเส้นตรง AM คือ $4x + y = 6$ สมการของเส้นตรง AC คือ สมการในข้อใด

1. $2x - y + 6 = 0$
2. $2x - y + 8 = 0$
3. $x - 2y + 6 = 0$
4. $x - 2y + 8 = 0$

102. กำหนด $A = \{x \in R \mid \frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x+2}\}$ สมาชิกของ A ที่มีค่าต่ำที่สุดเท่ากับเท่าใด

1. 3
2. 2
3. 0
4. –3

103. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ $U = \{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$ และให้ $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$, $B = \{3 , 4 , 5 , 6\}$, $C = \{2 , 4 , 6 , 7\}$ แล้ว $[(B \cap C) - A] \cup (A \cup B \cup C)'$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. {6}
2. {6 , 8}
3. {5 , 6}
4. {5 , 6 , 7}

104. ถ้า $x < \frac{1}{2}$ แล้ว $|x + |2x - 1||$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x - 1$
2. $-x + 1$
3. $3x - 1$
4. $-3x + 1$

105. ข้อใดต่อไปนี้คือ เซตคำตอบของอสมการ $x - \frac{9}{x} \leq 0$

1. $[-3,0) \cup (3,\infty)$
2. $(-\infty,-3] \cup [\frac{1}{3},3]$
3. $(-\infty,-3] \cup [0,3]$
4. $(-\infty,-3] \cup (0,3]$

106. ถ้า $f(x) = \frac{x}{x-1}$ แล้ว $f^{-1}(x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$
2. $f^{-1}(x) = \frac{x}{x+1}$
3. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x}$
4. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x}$

107. กำหนดให้ $\cot\theta = 2$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 2. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $-\frac{2}{5}$

108. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(2, -1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y = 4$ ตัดกับแกน y ที่จุดๆ หนึ่ง จุดนั้น y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{2}$

109. $\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{8}-\sqrt{32}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-5-2\sqrt{6}$ 2. $-5+2\sqrt{6}$ 3. $5-2\sqrt{6}$ 4. $5+2\sqrt{6}$

110. กำหนดให้ C เป็นจุดยอดของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C และผ่านจุด $(0, 0)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2+10x+y^2=0$ 2. $x^2-10x+y^2=25$ 3. $x^2+y^2+10y=0$ 4. $x^2+y^2-10y=25$

111. กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์

ประพจน์ $\sim[(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$ สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $p \wedge \sim(q \rightarrow r)$ 2. $\sim q \vee (\sim p \wedge r)]$ 3. $\sim(p \wedge q) \wedge (q \wedge r)$ 4. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)]$

112. กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์ในเซตของจำนวนจริงโดยที่ $r = \{(x, y) \mid y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$ 2. $D_r = [-1, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$
3. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [-1, 1]$ 4. $D_r = [0, 1]$, $D_{r^{-1}} = [0, 1]$

113. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง m ทั้งหมดที่ทำให้เส้นตรง $y = mx$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$ ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S คือจำนวนในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

114. วงรีวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ $(3, 1)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งที่ $(5, 1)$ และสัมผัสแกน y ที่จุด $(0, 1)$ สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$ และมีรัศมีเท่ากับความยาวของแกนโทของวงรีคือข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$ 2. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ 4. $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0$

115. ประพจน์ใดต่อไปนี้สมมูลกับประพจน์ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

1. $(p \rightarrow q) \vee \sim r$ 2. $(p \wedge q) \rightarrow r$ 3. $\sim(p \vee q) \vee r$ 4. $\sim(p \vee q) \rightarrow r$

116. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ $A = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$

$B = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 \leq 4y\}$

$C = \{(x, y) \in R \times R \mid -4 \leq x \leq 4, y = 4\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap (B \cap C) = \{(0, 4)\}$ 2. $A - B \neq \phi$
3. $(B - A) \cap C = C$ 4. $C - B = \phi$

117. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ถ้า $A = \{x \in I \mid |x^2 - 2| < 8\}$ และ $B = \{x \in R \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

แล้วเซตของความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก $A \cap B$ ไป B

1. $\{(-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (1, 4), (2, 5)\}$
2. $\{(-3, 0), (-2, 1), (1, -1), (2, -2), (3, -3)\}$
3. $\{(-3, 1), (0, 2), (1, 1), (2, 3), (3, 4)\}$
4. $\{(-3, 1), (-2, 4), (1, 5), (2, 2), (3, 1)\}$

118. ถ้า $f(x) = x - 1$ และ $(gof^{-1})(x) = 4x^2 - 1$

แล้วเซตคำตอบของสมการ $g(x) = 0$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $[-4, -1]$ 2. $[-1, 0]$ 3. $[0, 4]$ 4. $[4, 6]$

119. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m , n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x + 3$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ ลงตัว และ $x - 1$ หาร $x^3 + mx^2 + nx + p$ เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $m = 4, n = -4$ 2. $m = 2, n = -2$ 3. $m = -4, n = 4$ 4. $m = -2, n = 2$

120. ค่าขอบเขตบนน้อยสุดของเซต

$\{\frac{-(1+2+3+...+n)}{n^2} \mid n$ เป็นจำนวนเต็มบวก$\}$ ใน R เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0

121. ระยะห่างระหว่างเส้นคู่ขนานที่ทำมุม 45^c กับแกน X และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $x^2 - 4x + 3y^2 - 2 = 0$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{2}$ 2. $4\sqrt{2}$ 3. 2 4. 4

122. ถ้า O เป็นจุดกำเนิด และ P เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + 4x + y^2 - 8y + 11 = 0$ แล้วสมการของเส้นตรง OP และสมการของวงกลมที่มี OP เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง คือข้อใด

1. $y = 4x$ และ $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$
2. $y = -4x$ และ $x^2 + 2x + y^2 - 2y = 0$
3. $y = 2x$ และ $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 10$
4. $y = -2x$ และ $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 0$

123. กำหนดให้ E เป็นวงรีซึ่งมีสมการเป็น $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$ และ H เป็นไฮเพอร์โบลาซึ่งมีจุดศูนย์กลางร่วมกับ E มีจุดยอดกับจุดโฟกัสของ E และมีความยาวแกนสังยุคเท่ากับความยาวแกนโทของ E ข้อใดต่อไปนี้คือสมการของไฮเพอร์โบลา

1. $x^2 - 5y^2 - 2x - 20y + 14 = 0$
2. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 14 = 0$
3. $x^2 - 5y^2 + 2x + 20y - 18 = 0$
4. $5x^2 - y^2 - 2x + 20y + 18 = 0$

124. ถ้า $0 < a < b < c < 1$ แล้วข้อใดผิด

1. $a^2 < b^2$
2. $b < c^2$
3. $ab < ac$
4. $ac < bc$

125. ถ้า $x^2 - 3x - 4$ เป็นตัวประกอบของ $x^3 + ax^2 + bx - 8$ ค่าของ $a + b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -49
2. -11
3. 22
4. 49

126. กำหนดให้ $A' \cap B = (A \cap B')'$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A \neq B'$
2. $A' \neq B$
3. $A \cup B' \subset B'$
4. $A \not\subset A \cap B$

127. ให้ $a = 0.9$, $b = a^a$ และ $c = a^b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a < b < c$
2. $b < a < c$
3. $a < c < b$
4. $b < c < a$

128. ให้ ℓ แทนเส้นตรงที่มีสมการ $y = 2x$ พิกัดของจุด P_0 คือ $(0 , 2)$

ถ้า P_1 เป็นโพรเจกชันของ P_0 บน ℓ , P_2 เป็นโพรเจกชันของ P_1 บนแกน Y

และ P_3 เป็นโพรเจกชันของ P_2 บน ℓ พิกัดของ P_3 คือคู่อันดับใด

1. $(0.5 , 1)$
2. $(0.64 , 1.28)$
3. $(0.8 , 1.6)$
4. $(0.84 , 1.68)$

129. ให้ $P_1(x_1 , y_1)$ และ $P_2(x_2 , y_2)$ เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(0 , 0)$ และมีเส้นตรง $x + y + 2\sqrt{2} = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์

ค่าของ $x_1 + y_1 + x_2 + y_2$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sqrt{2}$
2. $-2\sqrt{2}$
3. $4\sqrt{2}$
4. $-4\sqrt{2}$

130. กำหนด $U = [-8, 12]$

$A = \{x \in U \mid \sin|x| = 1\}$

$B = \{x \in U \mid |\sin x| = 1\}$

$C = \{x \in U \mid \sin x = 1\}$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $A \cap C \neq C \cap B$ 2. $A-B \subset C-B$ 3. $C-B \subset C-A$ 4. $A-B \neq A-C$

131. ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = tx^2 + 8x + 10 - t$ และ $t \in R\}$ A เป็นเซตของ t ที่ทำให้ $R_f \subset R'$ ถ้า R เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $B = (-2, 4)$ แล้ว $A' \cap B$ เท่ากับข้อใด

1. $(2, 4)$ 2. $(-2, 2)$ 3. $(-2, 4]$ 4. $(-2, 2] \cup (4, 8)$

132. ถ้า $f(x) = 2x - 1$ และ $g(x) = \frac{6}{x}$ แล้ว $(fog)^{-1}(x)$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{12}{x} - 1$ 2. $\frac{12}{x+1}$ 3. $12 - \frac{1}{x}$ 4. $\frac{12}{x-1}$

133. สามเหลี่ยม ABC มี M เป็นจุดตัดของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดยอดไปยังฐาน ถ้าพิกัดของจุด $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$ และ $M(3, 3)$ แล้วพิกัดของ C เท่ากับพิกัดในข้อใด

1. $(3, 5)$ 2. $(4, 5)$ 3. $(5, 4)$ 4. $(6, 4)$

134. F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 = 144$ กำหนด F_1 อยู่ทางซ้ายมือของ F_2 และ M เป็นจุดแบ่งของเส้นตรง F_1F_2 ที่ทำให้ $F_1M : F_2M = 2 : 3$ ลากเส้นตรงผ่านจุด M ทำมุม 135° กับแกน X ระยะตั้งฉากจากจุดกำเนิดมายังเส้นตรงเส้นนี้จะยาวกี่หน่วย

1. $\sqrt{2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. 1 4. $\frac{1}{2}$

135. ถ้า (a, b) เป็นพิกัดของจุดสัมผัสที่ได้จากการลากเส้นตรงผ่านจุด $(0, 4)$ ไปสัมผัสกราฟของวงกลม $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 30 = 0$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าไร

1. 6 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{24}{5}$ 4. $\frac{26}{5}$

136. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid \frac{x^2 + 4x + y + 2}{x - 2} = 0\}$

ถ้า A เป็นเรนจ์ของความสัมพันธ์ r แล้ว ข้อใดถูกต้อง

1. $A \cap (-\infty, 2) = \varnothing$ 2. $A \cup (2, \infty) = A$

3. $A \cap (2, \infty) = \varnothing$ 4. $A' \cup (-\infty, 2) = A'$

137. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \frac{|x|-1}{|x|-2} \leq 0\}$ และ $B = \{x \in R \mid 1 \leq |x| \leq 3\}$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง $A' \cup B$ คือเซตในข้อใด

1. $[-3,-1] \cup [1,3]$
2. $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$
3. $[-3,3)$
4. $(-\infty,\infty)$

138. ถ้าช่วงจำนวนจริง (a , b) และ (c , d) มีสมาชิกร่วมกัน แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ถ้า $a < c$ และ $b < d$ แล้ว $c < b$
2. ถ้า $a < c$ และ $d < b$ แล้ว $c < b$
3. ถ้า $a > c$ และ $b > d$ แล้ว $d < a$
4. ถ้า $a > c$ และ $b < d$ แล้ว $b > c$

139. เส้นตรง L1 มีความชัน $\frac{3}{4}$ และผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 2y^2 - 24x + 8y + 36 = 0$ และเส้นตรง $L_2 : x - 2y - 5 = 0$ มุม θ เป็นมุมแหลมที่ L_1 และ L_2 ตัดกัน ข้อใดถูกต้อง

1. $\cos\theta = \frac{11}{5\sqrt{5}}$
2. $\cos\theta = \frac{9\sqrt{5}}{5\sqrt{17}}$
3. $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{17}}$
4. $\cos\theta = \frac{4}{5}$

140. เส้นโค้ง $y = |x|$ และ $y = \cos x$ มี P(x , y) เป็นจุดตัด ค่าของ x เป็นสมาชิกตัวเลือกใด

1. $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{8}]$
2. $[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}]$
3. $[-\pi, \frac{\pi}{8}]$
4. $[0, \pi]$

141. โดเมนของความสัมพันธ์ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid (x + 1)y = \sqrt{x^2 - 5x + 6}\}$ คือข้อใด

1. $[2 , 3]$
2. $(-1 , 2] \cup [3 , \infty)$
3. $(-\infty , 2] \cup [3 , \infty)$
4. $(-\infty,-1) \cup (-1 , 2] \cup [3 , \infty)$

142. กำหนด C(2 , 3) เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม ความยาวจาก (4 , 6) มายัง C เท่ากับ 5 หน่วย แล้ว สมการของวงกลม คือข้อใด

1. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 32 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 47 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 72 = 0$

143. จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = 0$ และมีเส้นตรง $x = 4$ เป็นไดเรกตริกซ์ สมการพาราโบลา คือข้อใด

1. $y^2 + 4y + 12x - 8 = 0$
2. $y^2 + 4y - 12x + 16 = 0$
3. $x^2 - 2x + 12y + 25 = 0$
4. $x^2 - 2x - 12y - 23 = 0$

144. เรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - 1$ คือเซตใด

1. $(-\infty , \infty)$
2. $[-1 , \infty)$
3. $[0 , \infty)$
4. $[1 , \infty)$

145. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ถ้า $a|m$, $b|m$, (a , b) แล้ว $ab|m$
2. ถ้า $(m , n) = d$ และ $[m , n] = c$ แล้ว $cd = mn$
3. ถ้า $a|mn$ แล้ว $a|m$
4. ถ้า $(a , b) = 1$ แล้ว $(a , b^2) = 1$

146. ข้อใดเป็นนิเสธของ $\forall x\exists y\,[P(x , y) \rightarrow Q(x , y)]$

1. $\exists x\forall y\,[\sim P(x , y) \rightarrow \sim Q(x , y)]$
2. $\exists x\forall y\,[P(x , y) \wedge \sim Q(x , y)]$
3. $\forall x\exists y\,[Q(x , y) \rightarrow P(x , y)]$
4. $\forall x\exists y\,[\sim Q(x , y) \rightarrow \sim P(x , y)]$

147. L_1 ผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ และ L_2 สัมผัสวงกลมนี้ที่จุด $(-2 , 1)$ ถ้า L_1 และ L_2 ตั้งฉากกัน แล้วสมการ L_2 คือข้อใด

1. $3x+4y-2 = 0$
2. $3x-4y-14 = 0$
3. $3x+4y+2=0$
4. $4x-3y-14 = 0$

148. กำหนดวงรี $9x^2 + 16y^2 - 36x + 96y + 36 = 0$ แล้วสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดเป็นจุดโฟกัสของวงรี และ มีแกนสังยุคเป็นแกนโทของวงรี คือข้อใด

1. $7x^2 - 9y^2 - 28x - 54y - 116 = 0$
2. $7x^2 - 9y^2 + 42x + 36y - 36 = 0$
3. $9y^2 - 7x^2 + 54y + 28x - 10 = 0$
4. $9x^2 - 7y^2 - 36x - 42y - 90 = 0$

149. กำหนด $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ $D_f \cap R_f$ เท่ากับเซตใด

1. R
2. $R-\{0\}$
3. $[0 , 1)$
4. $(-1 , 1)$

150. กำหนดให้ A , B เป็นเซตใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A-B=A-(A\cap B)$
2. $A-B=A-(A\cup B)$
3. $A-B=A-(B-A)$
4. $A-B=B-(A\cup B)$

151. กำหนดให้ A , B , C เป็นเซตใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $(A'\cap B')' = A\cup B$
2. $A'\cup B' = A\cap B$
3. $A - (A\cap B) = B - (A\cap B)$
4. $(B - C)\cap A = (A\cap C) - B$

152. เซตคำตอบของอสมการ $|\frac{x}{x-1} - 1| \leq \frac{1}{2}$ คือเซตใด

1. $\varnothing$
2. $(-\infty , -1]\cup[3 , \infty)$
3. $(-\infty , -1)\cup(3 , \infty)$
4. $(-3 , -1)\cup(1 , 3)$

153. เซตคำตอบของอสมการ $-5 \leq \frac{2x^2 - x - 3}{|x+1|} \leq 9$ คือเซตใด

1. $[-3 , 6]$
2. $[-3 , -1]\cup[1 , 6]$
3. $[-2 , -1)\cup(-1 , 6]$
4. $(-3 , -1)\cup(-1 , 5]$

154. เซตคำตอบของอสมการ $|\frac{3x+1}{x-2}| \leq 9$ คือเซตใด

1. $(-\infty , 2)\cup[9 , \infty)$
2. $(-\infty , 1]\cup[9 , \infty)$
3. $[9 , \infty)$
4. $(-\infty , -1]\cup[10 , \infty)$

155. ประพจน์ใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี

1. $\sim(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
3. $\sim p \wedge p$
4. $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow \sim p)$

156. ประพจน์ใดต่อไปนี้ไม่เป็นสัจนิรันดร์

1. $p \vee \sim p$
2. $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
3. $p \rightarrow (p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

157. ประพจน์ใดเป็นนิเสธของประพจน์ $p \leftrightarrow q$

1. $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
2. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q)$
3. $(p \vee q) \wedge (\sim p \vee q)$
4. $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

158. ประพจน์คู่ใดสมมูลกัน

1. $p \vee q$, $\sim(\sim p \wedge \sim q)$
2. $\sim(p \wedge \sim q)$, $\sim q \rightarrow \sim p$
3. $\sim p \rightarrow (q \rightarrow p)$, $\sim q \rightarrow p$
4. $\sim p \leftrightarrow q$, $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p)$

159. ฟังก์ชันที่มีสมบัติ $f(-x) = f(x)$ คือข้อใด

1. $f(x) = x + 1$
2. $f(x) = |x|$
3. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
4. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

160. ฟังก์ชันที่มีสมบัติ $f(-x) = -f(x)$ คือข้อใด

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \cos x$
3. $f(x) = \sin x \sin 2x$
4. $f(x) = \cos(3x)$

161. ฟังก์ชันในตัวเลือกใดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม บนโดเมน $[0 , 2\pi]$

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$
3. $f(x) = \sin\frac{x}{3}$
4. $f(x) = \sin\frac{x}{4}$

162. ฟังก์ชันในตัวเลือกใดเป็นฟังก์ชันลด บนโดเมน $[0 , \pi]$

1. $f(x) = \cos x$
2. $f(x) = \cos 2x$
3. $f(x) = \cos 3x$
4. $f(x) = \cos 4x$

163. ฟังก์ชันในตัวเลือกใดเป็นฟังก์ชันเพิ่มบนโดเมน $[-2\pi , 2\pi]$

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x) = \tan\frac{x}{2}$
3. $f(x) = \tan\frac{x}{3}$
4. $f(x) = \tan\frac{x}{4}$

164. กำหนดให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = \frac{4}{1+x^2}\}$ โดเมนและเรนจ์ r คือข้อใด

1. $D_r = R$, $R_r = R^+$
2. $D_r = R^+$, $R_r = (0 , 4]$
3. $D_r = R$, $R_r = [0 , 4)$
4. $D_r = R$, $R_r = [0 , 4)$

165. วงรีมีสมการเป็น $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y = 4$ สมการวงกลมที่บรรจุในวงรีแบบแนบในและมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน คือตัวเลือกใด

1. $x^2+y^2+2x-4y=0$ 2. $x^2+y^2-2x+4y-31=0$ 3. $x^2+y^2+2x-2y=0$ 4. $x^2+y^2-4x-2y-1=0$

166. ถ้า $\tan x = k$ แล้วค่าของ $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{k}$ 2. k 3. $\frac{1-k}{1+k}$ 4. $\frac{k-1}{k+1}$

167. $\tan 45^\circ + \tan 135^\circ + \tan 225^\circ + \tan 315^\circ$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2 3. 0 4. -1

168. ค่ามากสุดของ $3\sin x - 4\cos x$ เท่ากับเท่าใด

1. 3 2. 4 3. 5 4. 9

169. วงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ มีเส้นตรงที่มีความชัน $-\frac{3}{4}$ สัมผัสวงกลมนี้ เส้นสัมผัสดังกล่าวมีสมการดังข้อใด

1. $3x+4y-24 = 0$, $3x+4y+26 = 0$ 2. $3x+4y+24 = 0$, $3x+4y-26 = 0$
3. $3x+4y-24 = 0$, $3x+4y-26 = 0$ 4. $3x+4y+24 = 0$, $3x+4y+26 = 0$

170. กำหนดให้ $r = \{(x , y) \in R \times R \mid y = |x - 2| - 3\}$ โดเมนและเรนจ์ r^{-1} คือข้อใด

1. $D_{r^{-1}} = R$, $R_{r^{-1}} = [3 , \infty)$ 2. $D_{r^{-1}} = R$, $R_{r^{-1}} = [-3 , \infty)$
3. $D_{r^{-1}} = [3 , \infty)$, $R_{r^{-1}} = R$ 4. $D_{r^{-1}} = [-3 , \infty)$, $R_{r^{-1}} = R$

171. $A(3 , 10)$, $B(-8 , 2)$, $C(10 , -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และ ตั้งฉากกับ BC คือข้อใด

1. $2x - 9y + 7 = 0$ 2. $2y - 9x + 7 = 0$ 3. $2y - 9x - 7 = 0$ 4. $2y + 9x - 7 = 0$

172. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{3}{x^2} - \frac{5}{x} - 2 > 0$ คือเซตใด

1. $(-3 , \frac{1}{2})$ 2. $(-3,0) \cup (0, \frac{1}{2})$ 3. $(-\infty , -3) \cup (\frac{1}{2} , \infty)$ 4. $(-\infty , -3] \cup [\frac{1}{2} , \infty)$

173. กำหนด $A(3,-4)$, $B(-5,6)$ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกึ่งกลางของ AB และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - 5y + 6 = 0$ คือข้อใด

1. $5x-3y+2 = 0$ 2. $6x+10y-3 = 0$ 3. $10x-6y+1 = 0$ 4. $5x+3y+2 = 0$

174. ถ้า $f(x + 1) = x^2 + 2$ แล้ว $f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $f(x) = x^2 - 2x$ 2. $f(x) = (x+1)^2+2$ 3. $f(x) = x^2 - 2x + 3$ 4. $f(x) = x^2 + 2x - 3$

175. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางที่ (4 , –1) โฟกัสที่ (1 , –1) และ ผ่านจุด (8 , 0) คือข้อใด

1. $2x^2 + y^2 - 8x + 4y = 0$
2. $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y - 1 = 0$
3. $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y + 1 = 0$
4. $x^2 + 2y^2 - 8x + 4y = 0$

176. ถ้า $\tan x + \cot x = 3$ แล้ว $\tan^3 x + \cot^3 x$ เท่ากับเท่าใด

1. –9
2. 9
3. 18
4. –18

177. ค่ามากสุดของ $3\sin^2 x - 4\cos^2 x$ เท่ากับเท่าใด

1. 7
2. 5
3. 4
4. 3

178. ถ้า $f(x) = |\sin x - \cos x|$ และโดเมนของ f คือ $[0 , 2\pi]$ แล้วเรนจ์ของ f คือเซตใด

1. [0 ,1]
2. $[0 , \sqrt{2}]$
3. $[0 , \sqrt{3}]$
4. [0 , 2]

179. ข้อใดถูกต้อง

1. $\sin 80 < \cos 10^\circ$
2. $\sin 20^\circ > \cos 15^\circ$
3. $\tan 40^\circ > \cot 50^\circ$
4. $\sin^2 10^\circ < \sin 10^\circ$

180. กำหนด $f(x) = \cos \frac{x}{4}$ และโดเมนของ f คือ $[-\pi , \pi]$ แล้ว เรนจ์ของ f คือเซตใด

1. [–1 , 1]
2. [0 , 1]
3. $[0 , \frac{1}{2}]$
4. $[0 , \frac{1}{\sqrt{2}}]$

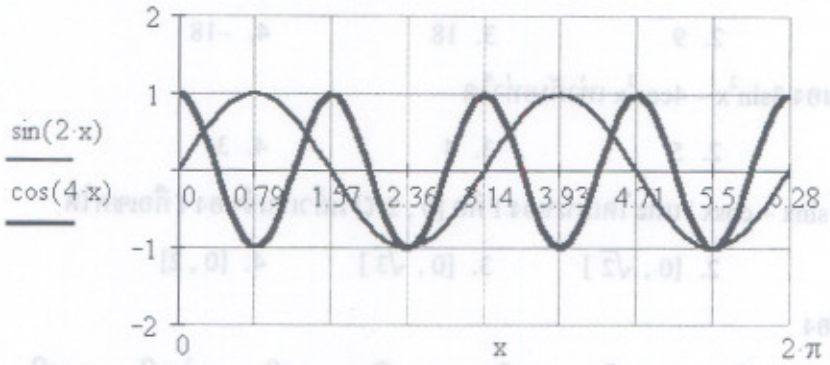
❶❷❸❹①②③④❶❷❸❹①②③④❶❷❸❹①②③④

เฉลยโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1 – 10	3	3	3	4	3	3	3	4	2	1
11 – 20	1	1	2	1	4	4	4	4	4	1
21 – 30	4	4	1	4	2	1	4	3	4	1
31 – 40	3	1	4	1	4	4	1	3	1	4
41 – 50	2	2	4	3	3	2	1	4	3	1
51 – 60	2	3	2	1	1	4	1	2	4	3
61 – 70	4	4	1	4	4	1	2	2	4	4
71 – 80	4	2	4	4	1	3	2	4	3	1
81 – 90	4	4	1	2	1	3	3	1	4	4
91 – 100	1	4	2	1	2	4	2	1	1	4
101 – 110	1	4	2	2	4	1	2	3	4	1
111 – 120	1	1	3	2	3	3	4	3	2	2
121 – 130	1	4	2	2	2	3	3	2	3	4
131 – 140	2	2	2	2	1	3	4	3	1	1
141 – 150	4	3	1	2	3	2	2	4	4	1
151 – 160	1	2	2	2	2	4	1	3	2	1
161 – 170	4	1	2	3	1	3	3	3	2	4
171 - 180	2	2	4	3	4	3	4	2	2	4

MATHCAD กับปัญหาตรีโกณมิติระดับ ม. 4

ประยุกต์ความสามารถของโปรแกรม MATHCAD กับปัญหา $y = \sin 2x$ และ $y = \cos 4x$ ตัดกันกี่ครั้งในช่วง $[0 , 2\pi]$



จากกราฟที่วาดด้วย MATHCAD จะเห็นว่าตัดกัน 6 จุด

ปัญหาต่อไปคือที่มุมใดบ้าง MATHCAD ตอบท่านได้

$x := 0$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 15\cdot \text{deg}$
$x := 1$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 75\cdot \text{deg}$
$x := 2.36$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 135\cdot \text{deg}$
$x := 3.14$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 195\cdot \text{deg}$
$x := 4.71$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 225\cdot \text{deg}$
$x := 5.5$
$\text{root}(\sin(2\cdot x) - \cos(4\cdot x), x) = 315\cdot \text{deg}$

การคำนวณของ MATHCAD กราฟตัดกันเมื่อ $x = 15 , 75 , 135 , 195 , 255 , 315$ องศา

สนใจความสามารถและการใช้งานของ MATHCAD หาอ่านได้จากหนังสือ

คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เขียนโดย *รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา*

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 21

คู่มือติวเตอร์เลือกคณิตศาสตร์ ม. 4

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 4

เป็นหนังสือที่มีข้อสอบคณิตศาสตร์ ระดับ ม. 4 มากกว่า 400 ข้อ และมีสรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์จาก ค 011 และ ค 012 เรื่อง เซต ระบบจำนวนจริง ตรรกศาสตร์ ความสัมพันธ์ ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ ภาคตัดกรวย ฟังก์ชัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ สถิติเบื้องต้น ในแต่ละเรื่องจะประกอบด้วย

- ♠ สรุปเนื้อหาและสูตรที่สำคัญ
- ♥ เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมกับเนื้อหา
- ♦ ตัวอย่างการทำโจทย์โดยใช้ วิธีจริง VS วิธีตัดตัวเลือก
- ♣ โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีโจทย์ระดมเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก 100 ข้อ

เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมกับปัญหาจะทำให้นักเรียนสามารถทำคะแนนได้มากขึ้นโดยใช้เวลาน้อยลง

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330
ศาลาพระเกี้ยว โทร. 2554433 โทรสาร 2554441
สยามสแควร์ โทร. 2151147 โทรสาร 2544401
http://www.cubook.com
e-mail: cubook@chula.ac.th

คณิตศาสตร์ปรนัย (ม.ที่ 21)
ISBN 974-332-760-6
9 789743 327605
C112
7010 160.00 บาท