คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม.5

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม.5

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ ๒๒

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 22

คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. 5

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 5

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 22

คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 5 สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 5

ผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ 1 มิถุนายน พ.ศ. 2543

ข้อมูลบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ

ดำรงค์ ทิพย์โยธา.

คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม. 5 (คณิตศาสตร์ปรนัย เล่ม 22) .- - กรุงเทพ ฯ

: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , 2543

272 หน้า.

1. คณิตศาสตร์ .I . ชื่อเรื่อง .

510

ISBN 974 – 334 – 940 – 5

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330

ศาลาพระเกี้ยว โทร. 218 – 7000 โทรสาร 255 – 4441

สยามสแควร์ โทร. 218 – 9888 โทรสาร 254 – 9495

http://www.cubook.com

e – mail:cubook@chula.ac.th

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 218 – 3563 – 4, 215 – 3612

คำนำ

หนังสือ **คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 22 คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 5** ผู้เขียนได้ทำการสรุปเนื้อหาจากหนังสือ คณิตศาสตร์ ค. 013 และ ค. 014 โดยมีเรื่องต่างๆ เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์ เมทริกซ์และค่ากำหนด กำหนดการเชิงเส้น เวกเตอร์ จำนวนเชิงซ้อน สถิติ โดยในแต่ละเรื่องจัดทำในรูปแบบ

- ♠ สรุปเนื้อหาแต่ละเรื่อง
- ♥ เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมตามเนื้อหา
- ♦ ตัวอย่างการทำโจทย์ข้อสอบโดยใช้ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
- ♣ ปัญหาถูกหรือผิดของเนื้อหาในแต่ละบท
- ♠ โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกอีก 200 ข้อเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกหัดทำ ตัวอย่างข้อสอบต่างๆ รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ

ในความคิดเห็นของผู้เขียน คิดว่าข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้ยังคงมีการออกข้อสอบออกมาเรื่อยๆ โดยมีสาเหตุจากข้อจำกัดต่างๆ ของตัวข้อสอบแบบปรนัยเช่น หลักสูตรบังคับให้ต้องถามว่าเซตคำตอบคือเซตใด ข้อสอบต้องมีทั้งตัวเลือกและตัวหลอก(บางครั้งก็หลอกทั้งคนออกข้อสอบและนักเรียน) ตัวลวงที่ไม่รอบคอบทำให้เราตัดตัวเลือกได้ แต่หากผู้ออกข้อสอบจะรอบคอบมากขึ้นก็จะพบกับปัญหาเรื่องเวลาที่อาจจะออกข้อสอบไม่ทัน

อย่างไรก็ตาม หนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์มากที่สุดนักเรียนต้องดู **วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก** ทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่า **การตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้น** แต่ **วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป**

พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม. 4

เทคนิคการตัดตัวเลือกในหนังสือ คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม.4 จะทำให้นักเรียนสามารถทำข้อสอบ ENTRANCE บางปี ได้คะแนนเกิน 7 คะแนนในเวลาไม่เกิน 3 นาที ตัวอย่างเช่นข้อสอบ Entrance มีนาคม 2543

2. คำตอบของสมการ $|x-4| < |x+1|$ คือข้อใดต่อไปนี้ (2 คะแนน)

1. $x \ge \frac{3}{2}$ 2. $x > \frac{3}{2}$ 3. $x \le \frac{3}{2}$ 4. $x < \frac{3}{2}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|\frac{3}{2}-4| < |\frac{3}{2}+1|$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = \frac{3}{2}$ ไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. เพราะว่า $x = 0$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

13. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง

โดเมนของ r^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้ (3 คะแนน)

1. R 2. $R-\{0\}$ 3. $(0, \infty)$ 4. $[0, \infty)$

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไข $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ จะเห็นได้ว่า y ต้องไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น 0 ต้องไม่เป็นสมาชิกของ เรนจ์ของ r แต่ เรนจ์ของ r = โดเมนของ r^{-1} เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. จากเงื่อนไข $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ จะเห็นได้ว่า $y = -1$ ได้ เพราะฉะนั้น -1 เป็นสมาชิกของ เรนจ์ของ r และ เรนจ์ของ r = โดเมนของ r^{-1} เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

15. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ และ $g(x) = x-3$ แล้ว $(fog)(1-x)$ คือข้อใดต่อไปนี้ (3 คะแนน)

1. $\frac{1-x}{3-x}$ 2. $\frac{5-x}{4-x}$ 3. $\frac{x+1}{x+2}$ 4. $\frac{x+4}{x+3}$

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า $x = 0$ ในโจทย์และตัวเลือกจะได้

$(fog)(1-x) = (fog)(1-0) = (fog)(1) = f(g(1)) = f(-2) = \frac{2-(-2)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

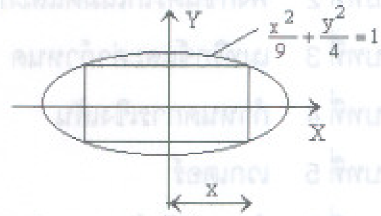
สารบัญ

คู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 , 2 และ 3

เทคนิคการตัดตัวเลือกในหนังสือคู่มือตัดตัวเลือก ภาค 1 ภาค 2 และ ภาค 3 จะทำให้นักเรียนสามารถทำคะแนน 6 คะแนนในเวลาไม่เกิน 3 นาที ตัวอย่างเช่น การตัดตัวเลือกข้อสอบ Entrance **คณิตศาสตร์ มีนาคม 2543**

17. ให้ A(x) คือพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าที่บรรจุในวงรี $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ดังรูป **(3 คะแนน)**

A(x) คือข้อใดต่อไปนี้



1. $\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3}$ 2. $\frac{4x\sqrt{9-x^2}}{3}$

3. $\frac{8x\sqrt{9-x^2}}{3}$ 4. $\frac{16x\sqrt{9-x^2}}{3}$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x แทนค่า x = 1 จะได้

$y = 2\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ เพราะฉะนั้นพื้นที่สี่เหลี่ยม = 4(xy) = $4(1)(\frac{4\sqrt{2}}{3}) = \frac{16\sqrt{2}}{3}$

เพราะว่า $x\sqrt{9-x^2} = 2\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 2. $\frac{4x\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

3. $\frac{8x\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ 4. $\frac{16x\sqrt{9-x^2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

24. ถ้า $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1$ แล้วสมการเส้นโค้ง y = f(x) คือข้อใด **(3 คะแนน)**

1. $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x + 2$ 2. $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + x + 2$

3. $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2$ 4. $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า f(x) = $\int f'(x)dx = \int(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1)dx$ ต้องมีเทอมของ x กำลัง 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า f(x) = $\int f'(x)dx = \int(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1)dx = x^{\frac{5}{2}} + ...$ ไม่ต้องอินทิเกรตหมดก็ได้คำตอบแล้ว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

บทที่ 1

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1.1 สรุปเนื้อหา

1. บทนิยาม a เป็นจำนวนจริง , n เป็นจำนวนเต็มบวก

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ (a คูณกัน n ตัว)

2. สมบัติของเลขยกกำลัง a , b เป็นจำนวนจริงบวก n , m เป็นจำนวนจริง

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
6. $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$
7. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
8. $a^0 = 1 , a^{-1} = \frac{1}{a}$

3. ฟังก์ชันเพิ่ม $f : D_f \rightarrow R$, f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ก็ต่อเมื่อ ถ้า a < b แล้ว f(a) < f(b)

ตัวอย่างเช่น $f(x) = 3 + x$, $f(x) = 4 + x^2$; $D_f = [0 , \infty)$

ฟังก์ชันลด $f : D_f \rightarrow R$, f เป็นฟังก์ชันลด ก็ต่อเมื่อ ถ้า a < b แล้ว f (a) > f (b)

ตัวอย่างเช่น $f(x) = \frac{1}{x}$; $D_f = (0 , \infty)$

$f(x) = 4 - x^2$; $D_f = [0 , \infty)$

ข้อควรจำ
1. ถ้า $f : D_f \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
2. ถ้า $f : D_f \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันลด แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1
3. ถ้า f , g เป็นฟังก์ชันเพิ่มแล้ว $f \cap g$, $f + g$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
4. f , g เป็นฟังก์ชันเพิ่ม , $f \cup g$ อาจไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มและไม่เป็นฟังก์ชันลดก็ได้

ตัวอย่างเช่น $f = \{(1 , 4) , (3 , 7)\}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

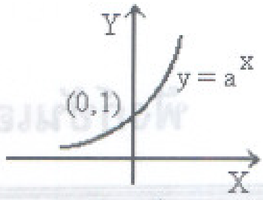
$g = \{(2 , 3) , (4 , 2)\}$ เป็นฟังก์ชันลด

$f \cup g = \{(1 , 4) , (2 , 3) , (3 , 7) , (4 , 2)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มและไม่เป็นฟังก์ชันลด

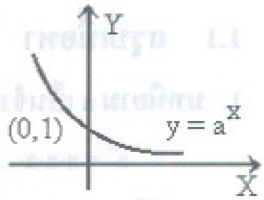
4. ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = a^x, a > 0, a \neq 1\}$

คุณสมบัติของเอกซ์โพเนนเชียลฟังก์ชัน

1. โดเมนเป็นเซตของจำนวนจริง $(-\infty, \infty)$
2. กราฟของ $f(x) = a^x$ ผ่านจุด $(0, 1)$
3. เรนจ์เป็นจำนวนจริงบวก $(0, \infty)$
4. ถ้า $a > 1$, $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
5. ถ้า $0 < a < 1$, $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด
6. $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

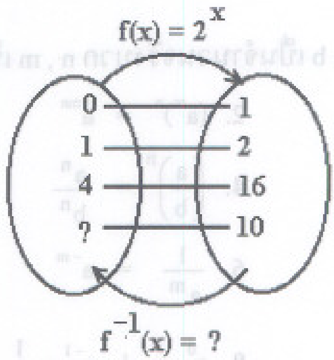


a > 1



0 < a < 1

พิจารณาการส่งค่าของฟังก์ชัน

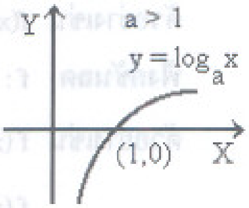


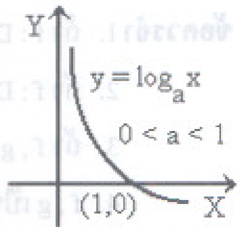
5. ฟังก์ชันลอการิทึม คือ $f = \{(x, y) \in R^+ \times R \mid y = \log_a x, a > 0, a \neq 1\}$

ฟังก์ชันลอการิทึมเป็นอินเวอร์สฟังก์ชันของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

1. โดเมนเป็นเซตจำนวนจริงบวก $(0, \infty)$
2. กราฟ ผ่านจุด $(1, 0)$
3. เรนจ์ เป็นเซตของจำนวนจริง $(-\infty, \infty)$
4. ถ้า $a > 1$ แล้ว $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม
5. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด
6. $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1





หมายเหตุ ท่องจำได้เลย $A > 0$, $B, C > 0$; $A^B = C$ ก็ต่อเมื่อ $\log_A C = B$

ตัวอย่างเช่น $\log_4 16 = 2$ $\quad 2^4 = 16 \quad \log_2 32 = 5 \quad 5^2 = 32$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2 \quad (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad \log_{10} 0.1 = -1 \quad 10^{-1} = 0.1$

6. **คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม** ถ้า $M, N \in R^+, a \in R^+$ และ $a \neq 1, c > 0, d > 0\ c \neq 1, d \neq 1$

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$
4. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
5. $\log_a M^k = k \log_a M \quad ; k \in R$
6. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad ; b \in R^+$ และ $b \neq 1$ และ $x \in R^+$
7. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad ; b \in R^+$ และ $b \neq 1$
8. $\log_b a \log_c b \log_d c = \log_d a$
9. ถ้า $\log_a \log_b \log_c x = d$ แล้ว $x = c^{b^{a^d}}$
10. $a^{\log_a b}$ และ $\log_a a^b = b$
11. ลอการิทึมธรรมชาติเขียนแทนด้วย $\ln = \log_e$ เช่น $\ln e = 1 \quad (e = 2.7181928)$
12. $\log_{\frac{1}{a}} \frac{1}{b} = \log_a b$
13. $a > 1; \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \leftrightarrow f(x) < g(x)$
14. $0 < a < 1; \quad a^{f(x)} < a^{g(x)} \leftrightarrow f(x) > g(x)$
15. $a > 1; \quad \log_a f(x) < \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) < g(x)$
16. $0 < a < 1; \quad \log_a f(x) < \log_a g(x) \leftrightarrow f(x) > g(x)$

การแก้อสมการเกี่ยวกับเลขยกกำลังและ log นักเรียนต้องใช้คุณสมบัติเกี่ยวกับฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลดอย่างแม่นยำจึงจะแก้อสมการได้ถูกต้อง

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2^{2x+1} > 2^{x-3}$

เพราะว่า $\log_2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $\log_2 (2^{2x+1}) > \log_2 (2^{x-3})$

$$2x + 1 > x - 3$$

$$x > -4$$

สรุป $A = \{x \mid 2^{2x+1} > 2^{x-3}\} = (-4, \infty)$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+5) > \log_{\frac{1}{2}}(2x^2+1)$

เพราะว่า $\log_{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันลด $x^2+5 < 2x^2+1$

$$4 < x^2$$

$$x < -2 \,,\, x > 2$$

สรุป $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x^2+5) > \log_{\frac{1}{2}}(2x^2+1)\} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

7. **ลอการิทึมสามัญ** คือ ลอการิทึมที่มีฐาน 10

ข้อตกลง การเขียน log ฐาน 10 ไม่ต้องใส่ฐาน เช่น $\log_{10}5$ จะเขียนแทนด้วย log5

จำนวนจริงบวก N ใดๆสามารถเขียนในรูป $N_0 \times 10^n$ เสมอ เมื่อ $1 \le N_0 < 10$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

เนื่องจาก $N = N_0 \times 10^n$ ดังนั้น $\log N = \log N_0 + n$

$\log N_0$ เรียกว่า mantissa ของ logN และ n เรียกว่า characteristic ของ logN ตัวอย่างเช่น

	แมนทิสซา	คาแรกเตอร์ริสติก
log20 = 1.30103	0.30103	1
log0.2 = – 0.69897	0.30103	–1
log200 = 2.30103	0.30103	2

การหาค่า N เมื่อกำหนดค่า logN

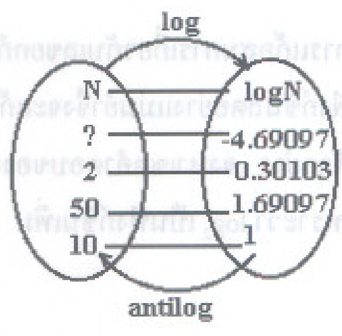
เขียน $\log N = \log N_0 + n$ โดยที่ $0 \le \log N_0 < 1$ และ $n \in I$ แล้ว เปิดหาค่า $\log N_0$ จากตาราง

เราเรียก N ว่า Antilog ของ logN

ตัวอย่าง กำหนด log2 = 0.30103 และ logN = 4.30103 จงหาค่า N

$$\log N = 4.30103 = 4 + 0.30103 = \log 10^4 + \log 2 = \log 2(10^4)$$

เพราะฉะนั้น $N = 2(10^4) = 20{,}000$



จากแผนภาพจะได้ว่า log50 = 1.69097

$$\text{antilog}(1.69097) = 50$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ antilog(– 4.69097)

$$\text{antilog}(-4.69097) = \text{antilog}(-5 + 0.30103)$$

$$= \text{antilog}(\log 10^{-5} + \log 2) = \text{antilog}(\log(\frac{2}{10^5})) = \frac{2}{10^5} = 0.00002$$

8. เทคนิคการจำค่า log2 , log3 , …, log9

เทคนิคการจำค่า log2 , log3 , log 4 ,…, log9 เพื่อนำไปเป็นประโยชน์ในการทำข้อสอบ และเพื่อให้เห็นประโยชน์ของการประมาณค่าของ log2 ถึง log9 ขอใช้ตัวอย่างปัญหาในการเปรียบเทียบค่าว่าค่าใดมากกว่ากันระหว่าง $\log_4 5$ กับ $\log_5 6$ สิ่งที่เราอาจคิดในใจได้คือ $\log_4 5 > 1$ และ $\log_5 6 > 1$ แต่ถ้าเราจำค่าประมาณของ log4 , log5 และ log6 ก็จะสามารถเปรียบเทียบได้ว่าใครมีค่ามากกว่ากัน ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะ log ของ 1 , 2 , 3 ,…, 10

ก่อนอื่นขอเริ่มที่ log1 = 0 และ log10 = 1 เพราะหาค่าง่ายที่สุด

ต่อไปการจำค่า log2 = 0.30103 ซึ่งสามารถจำได้โดยง่ายเมื่อเรานึกถึงใบหน้าของคน เช่น กรรมการคุมสอบ

โดยสังเกตที่ หู(3) ตา(0) จมูก(1) ตา(0) หู(3)

!!! ต่อไปการดูหน้ากรรมการสอบจะเป็นการแอบดูสูตร log ในห้องสอบหรือไม่

เมื่อได้ log2 แล้วจะได้ค่าต่อไปนี้ $\log 4 = 2\log 2 = 0.60206$

$\log 8 = 4\log 2 = 0.90309$

$\log 5 = 1 - \log 2 = 0.69897$

ต่อไปเราจะหา log9 เนื่องจาก log8 < log9 < log10 ดังนั้น 0.90309 < log9 < 1

เพราะว่าเราสนใจแค่ค่าประมาณเท่านั้นจึงเลือก $\log 9 = \dfrac{0.90309+1}{2} = 0.951545$

ผลที่ตามมาคือ $\log 3 = \dfrac{\log 9}{2} = 0.47577$

และ $\log 6 = \log 2 + \log 3 = 0.3103 + 0.47577 = 0.7768$

ต่อไปเหลือตัวสุดท้ายคือ log7 เราจะประมาณค่าโดย $\dfrac{\log 6 + \log 8}{2}$

ดังนั้น $\log 7 = \dfrac{0.7768 + 0.90309}{2} = 0.839945$

จากการประมาณค่าข้างต้นเราสามารถตอบได้ว่า $\log_4 5$, $\log_5 6$ ค่าใดจะมากกว่ากัน

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{0.69897}{0.60206} = \frac{0.7}{0.6} = \frac{7}{6} = 1.167$$

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{0.7768}{0.69897} = \frac{0.8}{0.7} = \frac{8}{7} = 1.1428$$

สรุป $\log_4 5 > \log_5 6$

หมายเหตุ ค่าจริงจากเครื่องคิดเลข $\log_4 5 = 1.1609642$, $\log_5 6 = 1.11328$

ตารางเปรียบเทียบค่าจริงกับค่าประมาณของ log1 – log10

ค่าจริง	ค่าประมาณ
log1 = 0	0
log2 = 0.30103	0.30103
log3 = 0.4771212	0.47577
log4 = 0.6020599	0.60206
log5 = 0.69897	0.69897
log6 = 0.7781512	0.7768
log7 = 0.845098	0.839945
log8 = 0.9030899	0.90309
log9 = 0.9542425	0.951545
log10 = 1	1

9. รากที่ n ของจำนวนจริง

1. x , y เป็นจำนวนจริง y เป็นรากที่สองของ x ก็ต่อเมื่อ $y^2 = x$

ตัวอย่าง 2, –2 เป็นรากที่ 2 ของ 4 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ เป็นรากที่ 2 ของ 2

2. n เป็นจำนวนเต็มบวก , n > 1 , x และ y เป็นจำนวนจริง y เป็นรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$

ตัวอย่าง – 1 , 1 เป็นรากที่ 2 ของ 1 –2 , 2 เป็นรากที่ 2 ของ 4

– 2 เป็นรากที่ 3 ของ –8

3. n เป็นจำนวนเต็มบวก , n > 1 , x เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n

y เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ x ก็ต่อเมื่อ $y^n = x$ และ $xy > 0$

สัญลักษณ์แทนค่าหลักของรากที่ n ของ x คือ $\sqrt[n]{x}$

หมายเหตุ $(\sqrt[n]{x})^n = x$ และเครื่องหมายของ $\sqrt[n]{x}$ เหมือนกับเครื่องหมายของ x

ตัวอย่าง $\sqrt[3]{-1} = -1$, $\sqrt[4]{16} = 2$

ถึงแม้ $(-2)^4 = 16$ แต่ $\sqrt[4]{16} \neq -2$

4. a เป็นจำนวนจริงและ $a \neq 0$ p , q เป็นจำนวนเต็มที่ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน , q > 0

$a^{\frac{1}{q}}$ เป็นจำนวนจริงจะได้ว่า $a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p$

ตัวอย่าง $(-8)^{\frac{2}{3}} = \left((-8)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (-2)^2 = 4$

$32^{\frac{4}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 2^4 = 16$

10. การหาจำนวนหลักของจำนวน m^n โดยใช้ log เมื่อ m , n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 2^{100} เป็นจำนวนเต็มกี่หลัก

วิธีทำ $N = 2^{100}$

$\log N = \log 2^{100} = 100 \log 2 = 100\,(0.30103) = 30.103$

$N = 10^{30.103}$

$10^{30} < N < 10^{31}$

เพราะฉะนั้น N เป็นจำนวนเต็ม 31 หลัก

กำหนดให้ [x] = จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x

ตัวอย่างเช่น [1.2] = 1 , [1.5] = 1 , [1.7] = 1

[–2.1] = –3 , [–2.5] = –3 , [–2.9] = –3

การหาจำนวนหลักของ m^n มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1. ให้ $N = m^n$

ขั้นที่ 2. หาค่า $\log N = n \log m$

หาค่า [logN] จำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าไม่เกิน logN

ขั้นที่ 3. จำนวนหลักของ m^n คือ [logN] + 1

ตัวอย่าง จงหาจำนวนหลักของ 2^{100}

$\log 2^{100} = 100 \log 2 = 100\,(0.30103) = 30.103$

$[\log 2^{100}] = [30.103] + 1 = 30 + 1 = 31$

เพราะฉะนั้นจำนวนหลักของ 2^{100} เท่ากับ 31 หลัก

ตัวอย่าง จงหาจำนวนหลักของ 5^{40}

$\log 5^{40} = 40 \log 5 = 40\,(0.69097) = 27.6389$

$[\log 5^{40}] = [27.6389] + 1 = 27 + 1 = 28$

เพราะฉะนั้นจำนวนหลักของ 5^{40} เท่ากับ 28 หลัก

1.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ให้เหตุผลเกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน log ($D_{log} = (0, \infty)$, $R_{log} = (-\infty, \infty)$)

ตัวอย่างที่ 1.2.1 เซตคำตอบของอสมการ $x^{\log_2 x} < (2x)^{\log_2 x}$ คือข้อใด

1. $(-\infty, \infty)$ 2. $(0, \infty)$

3. $(0, 1)$ 4. $(1, \infty)$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโดเมนของ $\log_2$ คือ $(0, \infty)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เมื่อ $x = 1$, $\log_2 1 = 0$, $1^0 < 2^0$ ไม่จริง เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

แทนค่า $x = 2$, $\log_2 2 = 1$, $2^1 < (2(2))^1$

เพราะฉะนั้น 2 ต้องอยู่ในเซตคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง

$$x^{\log_2 x} < (2x)^{\log_2 x}$$

$$x^{\log_2 x} < 2^{\log_2 x}\, x^{\log_2 x}$$

$$1 < 2^{\log_2 x} \qquad (\text{เพราะว่า } (x)^{\log_2 x} > 0)$$

$$1 < x \qquad (\text{เพราะว่า } 2^{\log_2 x} = x)$$

เซตคำตอบของอสมการ $x^{\log_2 x} < (2x)^{\log_2 x}$ คือ $(1, \infty)$

ตัวอย่างที่ 1.2.2 กำหนด $\log_8(x-6) + \log_8(x+6) = 2$ ค่า x เท่ากับเท่าใด

1. $x = 100$ 2. $x = -10$ หรือ $x = 10$

3. $x = -10$ 4. $x = 10$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $x = -10$ ทำให้ $\log(-10-6)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า $x = 10$, $\log_8(10-6) + \log_8(10+6) = \log_8(4)(16) = 2$ ดังนั้นเลือก 4. เป็นคำตอบ

วิธีจริง

$$\log_8(x-6) + \log_8(x+6) = 2$$

$$\log_8(x-6)(x+6) = 2$$

$$(x-6)(x+6) = 64$$

$$x^2 - 36 = 64$$

$$x^2 = 100$$

$$x = 10 \quad \text{เท่านั้น}$$

2. นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์เมื่อคำถามเป็นคำถามเกี่ยวกับเซตคำตอบของอสมการคือข้อใด หรือคำถามเกี่ยวกับเซตคำตอบเซตของสมการคือเซตใด หรือเป็นสับเซตของตัวเลือกใด

ตัวอย่างที่ 1.2.3 เซตคำตอบของสมการ $\log(x^2 + 4x + 4) - \log 18 = \log(x + 2)$ เป็นสับเซตของตัวเลือกใด

1. $[-3, 10]$ 2. $[-20, -10]$
3. $[2, 4]$ 4. $[10, 20]$

การตัดตัวเลือก ถ้า $-20 \le x \le -10$

$$-18 \le x + 2 \le -8$$

แล้ว $\log(x + 2)$ จะหาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง

$$\begin{aligned} \log(x^2 + 4x + 4) - \log 18 &= \log(x+2) \\ \log\frac{(x+2)^2}{18} &= \log(x+2) \\ \frac{(x+2)^2}{18} &= x+2 \\ (x+2)((x+2)-18) &= 0 \\ (x+2)(x-16) &= 0 \\ x &= -2, 16 \end{aligned}$$

สรุป $\{x \mid \log(x^2 + 4x + 4) - \log 18 = \log(x + 2)\} = \{16\}$

3. การประมาณค่าที่โจทย์ถาม โดยพิจารณาว่าค่าที่ต้องการนั้น เป็นบวก หรือ เป็นลบ , มากกว่าหนึ่ง หรือ น้อยกว่าหนึ่ง ก็จะสามารถหาคำตอบด้วยการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 1.2.4 กำหนด $x = \log_{\log 12} 7$, $y = \log_{\log 13} 5$ และ $z = \log_{\log 13} 7$ ข้อใดเรียงลำดับถูกต้อง

1. $x > y > z$ 2. $x > z > y$
3. $y > x > z$ 4. $y > z > x$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\log 5 < \log 7$ และ $\log 13 > 1$ เพราะฉะนั้น $\log(\log 13) > 0$

และ
$$\frac{\log 5}{\log(\log 13)} < \frac{\log 7}{\log(\log 13)}$$
$$\log_{\log 13} 5 < \log_{\log 13} 7$$
$$y < z$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

ตัวอย่างที่ 1.2.5 เซตคำตอบของสมการ $(\log_{\sqrt{5}} x)\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$ คือข้อใด

1. $\{\sqrt{5}, \frac{1}{5}\}$ 2. $\{\frac{1}{5}\}$

3. $\{5, \sqrt{5}\}$ 4. $\{\frac{1}{\sqrt{5}}, 5\}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} > 0$ เพราะฉะนั้น $\log_{\sqrt{5}} x < 0$

ดังนั้น $x < 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1, 3 และ 4.

วิธีจริง

$$(\log_{\sqrt{5}} x)\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2(\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}) = 6$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2(3\log_x \sqrt{5} + 3) = 6$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2(\log_x \sqrt{5} + 1) = 2$$

$$(\log_{\sqrt{5}} x)^2(\frac{1}{\log_{\sqrt{5}} x} + 1) = 2$$

แทนค่า $v = \log_{\sqrt{5}} x$ $$v^2(\frac{1}{v} + 1) = 2$$

$$v^2 + v - 2 = 0$$

$$(v+2)(v-1) = 0$$

$$v = -2, 1$$

เพราะว่า $(\log_{\sqrt{5}} x)\sqrt{\log_x 5\sqrt{5} + \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5}} = -\sqrt{6}$ เพราะฉะนั้น $v = \log_{\sqrt{5}} x < 0$

เพราะฉะนั้น $\log_{\sqrt{5}} x = -2$ ดังนั้น $x = (\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{5}$

ตัวอย่างที่ 1.2.6 กำหนด $\log_2 \sqrt{x} + \log_x \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ค่าของ $\log_2 x$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{2} + 3, \sqrt{2} - 3$ 2. $\sqrt{2} + 1$

3. $\sqrt{2} - 1$ 4. $\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1$

การตัดตัวเลือก จัดรูปของสมการจากโจทย์เพื่อจะได้คำนวณค่าได้โดยง่าย

$$\log_2 \sqrt{x} + \log_x \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{2}\log_x 2 = \sqrt{2}$$

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 2\sqrt{2}$$

เพราะว่า $\sqrt{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-2\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

$$= 2\sqrt{2}\ \frac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)} = 2\sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้น $\log_2 x = \sqrt{2}-1$ ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

ในทำนองเดียวกับ $(\sqrt{2}+1)+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 2\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบ

วิธีจริง แทนค่า $v = \log_2 x$ จะได้ $v+\frac{1}{v} = 2\sqrt{2}$

$$v^2-2\sqrt{2}\,v+1 = 0$$

$$v = \frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{8-4}}{2} = \sqrt{2}\pm 1$$

สรุป $\log_2 x = \sqrt{2}+1,\ \sqrt{2}-1$

ตัวอย่างที่ 1.2.7 เซตคำตอบของสมการ $\log(x^2-3x-4)-\log(x+1) = 1$ เป็นเซตคำตอบเดียวกับเซตคำตอบของสมการในตัวเลือกใด

1. $(x-5)(x+14) = 0$
2. $(x-14)(x+1) = 0$
3. $(x-14)(x^2+1) = 0$
4. $(x+14)(x-1) = 0$

การตัดตัวเลือก เซตคำตอบของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\{5, -14\}$
2. $\{14, -1\}$
3. $\{14\}$
4. $\{-14, 1\}$

เพราะว่า $\log(-14+1)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

เพราะว่า $\log(-1+1) = \log 0$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\log(x^2-3x-4)-\log(x+1) = 1$

$$\log(x^2-3x-4)-\log(x+1) = \log 10$$

$$\log(x^2-3x-4) = \log 10+\log(x+1)$$

$$\log(x^2-3x-4) = \log(10)(x+1)$$

$$x^2-3x-4 = 10(x+1)$$

$$x^2-13x-14 = 0$$

$$(x-14)(x+1) = 0$$

$x = 14$ (**หมายเหตุ** $x = -1$ ทำให้ $\log(x+1)$ หาค่าไม่ได้)

4. คำตอบที่ถามว่าข้อใดถูกหรือผิดให้เลือกทำที่ตัวเลือกที่คิดได้ง่ายกว่าก่อน

ตัวอย่างที่ 1.2.8 ถ้า x และ y สอดคล้องสมการ $\log_k x \cdot \log_5 k = 1$ เมื่อ $k > 1$ และ $10^{2y} = 625$ ตามลำดับแล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $5 < x + y < 7$ 2. $3 < x - y < 4$
3. $0 < xy < 10$ 4. $0 < \frac{x}{y} < \frac{1}{2}$

การตัดตัวเลือก $\log_k x \cdot \log_5 k = 1$

$$\frac{\log x}{\log k} \cdot \frac{\log k}{\log 5} = 1$$

$$\log x = \log 5$$

$$x = 5$$

เพราะว่า $10^{2y} = 625$ เพราะฉะนั้น $2y > 1$, $y > \frac{1}{2}$ ดังนั้น $xy > 0, x + y > 5$ และ $2 < \frac{1}{y}$

เพราะว่า $x = 5$ เพราะฉะนั้น $10 < \frac{x}{y}$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. ผิด

5. ใช้ประโยชน์จากจำค่าของ log2 , log3 , ..., log9 ได้ช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 1.2.9 กำหนดให้ $A = 5^{(5^5)}$, $B = 5^{55}$, $C = (55)^5$, $D = ((55)^5)^5$ ตัวเลือกใดถูกต้อง

1. $A < B < C < D$ 2. $C < B < D < A$
3. $B < A < D < C$ 4. $C < B < A < D$

การตัดตัวเลือก พิจารณาค่า log ของ A , B, C และ D

$$\log A = \log 5^{(5^5)} = 5^5 \log 5 = 3125 \log 5 \cong 3125\,(0.7) = 2185.4$$

$$\log B = \log 5^{55} = 55 \log 5 \cong 55\,(0.7) = 38.5$$

ดังนั้น $A > B$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1.

$$\log C = \log(55)^5 = 5 \log 55 \cong 5\,(\log 5 + \log 11) = 5\,(0.7 + 1) = 8.5$$

ดังนั้น $C < B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

$$\log D = \log((55)^5)^5 = 25 \log 55 \cong 25\,(1.7) = 42.5$$

สรุป $\log C < \log B < \log D < \log A$ เพราะฉะนั้น $C < B < D < A$

วิธีจริง $B = 5^{55} = (5^{11})^5 = (5^{11})^5$ และ $C = (55)^5$

เพราะว่า $55 < 5^{11}$ เพราะฉะนั้น $(55)^5 < (5^{11})^5$ ดังนั้น $C < B$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3.

$D=\left((55)^5\right)^5=\left((5\cdot 11)^5\right)^5=\left(5^5\cdot 11^5\right)^5$

$\frac{B}{D}=\frac{(5^{11})^5}{(5^5\cdot 11^5)^5}=\left(\frac{5^{11}}{5^5\cdot 11^5}\right)^5=\left(\frac{5^6}{11^5}\right)^5<\left(\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot\frac{5}{11}\cdot 5\right)^5<\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\right)^5<1$

เพราะฉะนั้น $B<D$ เพราะว่า $\frac{A}{D}=\frac{5^{(5^5)}}{\left((55)^5\right)^5}=\frac{5^{3125}}{(55)^{25}}=\frac{(5^{125})^{25}}{(55)^{25}}=\frac{(5^{125})^{25}}{55^{25}}=(\frac{5^{125}}{55})^{25}>1$

เพราะฉะนั้น $A>D$ สรุป $C<B<D<A$

ตัวอย่างที่ 1.2.10 ค่าของจำนวนในตัวเลือกใดมีค่ามากที่สุด

1. $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ 2. $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$ 3. $(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$ 4. $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{8}}}$

การตัดตัวเลือก พิจารณาแต่ละตัวเลือกดังนี้

1. ให้ $x=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$, $\log x=\sqrt{3}\,\log\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\log 2=\frac{(1.732)(0.30103)}{2}=0.26$

2. ให้ $y=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\log y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2})\log 2=\frac{0.30103}{(1.732)(2)}=0.09$

เพราะฉะนั้น $x>y$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2.

3. ให้ $z=(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$, $\log z=\sqrt{2}\,\log\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log 8=\frac{3\sqrt{2}}{2}\log 2=\frac{3(1.414)}{2}(0.30103)=0.638$

4. ให้ $w=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{8}}}$, $\log w=-\frac{1}{\sqrt{8}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}=(-\frac{1}{\sqrt{8}})(-\frac{1}{2})\log 2=\frac{0.30103}{4\sqrt{2}}=\frac{0.30103}{4(1.414)}=0.053$

เพราะฉะนั้น $\log w<\log y<\log x<\log z$ นั่นคือ $w<y<x<z$ สรุป $(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$ มีค่ามากสุด

วิธีจริง $x=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$, $\log_2 x=\sqrt{3}\,\log_2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{12\sqrt{3}}{24}$

$y=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$, $\log_2 y=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log_2(\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2})=\frac{4\sqrt{3}}{24}$

$z=(\sqrt{8})^{\sqrt{2}}$, $\log_2 z=\sqrt{2}\,\log_2\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log_2 8=\frac{36\sqrt{2}}{24}$

$w=(\frac{1}{\sqrt{2}})^{-\frac{1}{\sqrt{8}}}$, $\log_2 w=-\frac{1}{\sqrt{8}}\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}=(-\frac{1}{\sqrt{8}})(-\frac{1}{2})=\frac{3\sqrt{2}}{24}$

เพราะว่า $3\sqrt{2}<4\sqrt{3}<12\sqrt{3}<36\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{3\sqrt{2}}{24}<\frac{4\sqrt{3}}{24}<\frac{12\sqrt{3}}{24}<\frac{36\sqrt{2}}{24}$

ดังนั้น $\log_2 w<\log_2 y<\log_2 x<\log_2 z$ สรุป $w<y<x<z$

1.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 1.3.1 ถ้า $n \neq 0$ แล้วค่าของ $\sqrt[n]{\dfrac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{1}{4}$
2. $\dfrac{1}{2^n}$
3. $\dfrac{1}{2}\sqrt[n]{5}$
4. $\dfrac{4}{n}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n

เพราะฉะนั้นแทนค่า $n = 1$ ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $n = 1$ จะได้ $\sqrt[1]{\dfrac{20}{4^{1+2}+2^{2+2}}} = \dfrac{20}{4^3+2^4} = \dfrac{20}{64+16} = \dfrac{1}{4}$

สรุปเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง $4^{n+2}+2^{2n+2} = 4^2\cdot4^n+2^{2n}\cdot2^2 = 16\cdot4^n+4\cdot2^{2n} = 16\cdot4^n+4\cdot4^n = 20\cdot4^n$

$$\sqrt[n]{\frac{20}{4^{n+2}+2^{2n+2}}} = \sqrt[n]{\frac{20}{20\cdot4^n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{4^n}} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.2 ค่าของ $\dfrac{6^{n+1}\cdot15^{2-n}}{10^{3-n}\cdot4^n}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{3}{4}$
2. $\dfrac{9}{5}$
3. $\dfrac{27}{10}$
4. $\dfrac{27}{20}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรในพจน์ของ n แทนค่า $n = 0$ ก็หาคำตอบได้

แทนค่า $n = 0$ ในโจทย์จะได้ $\dfrac{6^{n+1}\cdot15^{2-n}}{10^{3-n}\cdot4^n} = \dfrac{6^1\cdot15^2}{10^3\cdot4^0} = \dfrac{6\cdot15\cdot15}{1000} = \dfrac{27}{20}$

วิธีจริง
$$\frac{6^{n+1}\cdot15^{2-n}}{10^{3-n}\cdot4^n} = \frac{6\cdot6^n\cdot15^2\cdot10^n}{10^3\cdot4^n\cdot15^n}$$
$$= \frac{6\cdot15^2\cdot(6^n\cdot10^n)}{10^3(4^n\cdot15^n)}$$
$$= \frac{27}{20}\left(\frac{60^n}{60^n}\right) = \frac{27}{20}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.3 ข้อใดต่อไปนี้เรียงจำนวนจากน้อยไปมากได้ถูกต้อง เมื่อกำหนด

$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt[3]{3}$ และ $c = \sqrt[4]{5}$

1. $a < b < c$ 2. $b < a < c$

3. $c < b < a$ 4. $c < a < b$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 เพราะว่า $\sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}}$ และ $\sqrt{5} > 2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[4]{5} > \sqrt{2}$ แน่นอน นั่นคือ $a < c$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งก่อน

เพราะว่า $9 > 8 \longrightarrow 3^2 > 2^3 \longrightarrow (3^2)^{\frac{1}{6}} > (2^3)^{\frac{1}{6}} \longrightarrow 3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$

เพราะฉะนั้น $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ สรุป $b > a$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

หมายเหตุ $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt[3]{3} = 1.442$, $\sqrt[4]{5} = 1.495$

แบบที่ 2 $\log a = \log\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log 2 = \frac{1}{2}(0.30103) = 0.1505$

$\log b = \log\sqrt[3]{3} = \log 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\log 3 = \frac{1}{3}(0.477) = 0.159$

$\log c = \log\sqrt[4]{5} = \log 5^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log 5 = \frac{1}{4}(\log\frac{10}{2}) = \frac{1}{4}(\log 10 - \log 2)$

$= \frac{1}{4}(1 - 0.30103) = \frac{1}{4}(0.69897) = 0.1747$

จาก $0.1505 < 0.159 < 0.1747$ จะได้ $\log a < \log b < \log c$ สรุปได้ว่า $a < b < c$

วิธีจริง เพราะว่า $64 < 81 < 125$ ดังนั้น $2^6 < 3^4 < 5^3$

$(2^{\frac{1}{2}})^{12} < (3^{\frac{1}{3}})^{12} < (5^{\frac{1}{4}})^{12}$

ดังนั้น $2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}}$ เพราะฉะนั้น $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

ตัวอย่างที่ 1.3.4 ค่าของ $3 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}}$ เท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 2

3. 3 4. 4

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} > 0$ เพราะฉะนั้น $3 - \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} < 3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง สมมติ $x = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$

ดังนั้น

$$x = \sqrt{2+x}$$
$$x^2 = 2+x$$
$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$

เพราะฉะนั้น $x = 2, -1$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = 2$ สรุป $3-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 3-2 = 1$

ตัวอย่างที่ 1.3.5 ถ้า $a > 1$ และ $a = x^2 = y^3 = z^4$ แล้วค่าของ $\log_a xyz$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{15}{13}$
2. $\frac{13}{12}$
3. $\frac{5}{4}$
4. $\frac{25}{24}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของตัวแปร a, x, y, z

เลือกตัวเลขที่ทำให้คิดเลขง่าย เช่น $a = 10^{12}$ จะได้ $a = x^2 \to 10^{12} = x^2 \to x = 10^6$

$a = y^3 \to 10^{12} = y^3 \to y = 10^4$ และ $a = z^4 \to 10^{12} = z^4 \to z = 10^3$

เพราะฉะนั้น $\log_a xyz = \log_{10^{12}} 10^6 \cdot 10^4 \cdot 10^3 = \log_{10^{12}} 10^{13} = \frac{\log 10^{13}}{\log 10^{12}} = \frac{13 \log 10}{12 \log 10} = \frac{13}{12}$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง $a = x^2 \to x = a^{\frac{1}{2}}$ $a = y^3 \to y = a^{\frac{1}{3}}$

$a = z^4 \to z = a^{\frac{1}{4}}$

$xyz = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{13}{12}}$ ดังนั้น $\log_a xyz = \frac{13}{12}$

ตัวอย่างที่ 1.3.6 จงหาจำนวนเลขโดดที่เรียงกันหน้าจุดทศนิยมของ $(8.75)^{16}$

เมื่อกำหนด $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 7 = 0.8451$

1. 15 ตัว
2. 16 ตัว
3. 17 ตัว
4. 18 ตัว

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $8.75 < 10$ เพราะฉะนั้น $8.75^{16} < 10^{16}$

ดังนั้นเลขหน้าจุดทศนิยมของ 8.75^{16} มีไม่ถึง 16 หลัก ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง คำถามแบบนี้เป็นการใช้ประโยชน์ของ log โดยตรงเพื่อช่วยในการหาจำนวนหลักของตัวเลขที่มีการยกกำลังมากๆ

$$\log(8.75)^{16} = 16\log 8.75 = 16\log(\frac{875}{100}) = 16(\log 875 - \log 100) = 16(\log(25)(35) - 2)$$

$$= 16(\log(5^3.7) - 2) = 16(3\log 5 + \log 7 - 2) = 16(3(\log 10 - \log 2) + 0.8451 - 2)$$

$$= 16(3(1 - 0.3010) - 1.1549) = 16(0.9421) = 15.0736$$

เพราะฉะนั้น $15 < \log(8.75)^{16} = 15.0736 < 16$

$\log 10^{15} < \log(8.75)^{16} < \log 10^{16}$

$10^{15} < 8.75^{16} < 10^{16}$ สรุป 8.75^{16} มีตัวเลขหน้าจุดทศนิยม 16 หลัก

ตัวอย่างที่ 1.3.7 ค่า x ที่ได้จากสมการ $\log_3(x-24) = 4 - \log_3 x$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 3
2. −3
3. 27
4. −27

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าโดเมนของ $\log_3 x$ คือ $x > 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้ เพราะว่า $x = 3$ ทำให้ $\log_3(3-24) = \log_3(-21)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้อีก

วิธีจริง $\log_3(x-24) = 4 - \log_3 x$

$$\log_3(x-24) + \log_3 x = 4$$

$$\log_3(x-24) + \log_3 x = 4\log_3 3$$

$$\log_3(x-24)x = \log_3 3^4 = \log_3 81$$

$$(x-24)x = 81$$

$$x^2 - 24x - 81 = 0$$

$$(x-27)(x+3) = 0$$

$$x = 27, -3$$

เพราะว่า $x > 0$ เพราะฉะนั้น $x = 27$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 1.3.8 กำหนด $\log(1+\frac{1}{8}) = p$, $\log(1+\frac{1}{15}) = q$ ค่าของ $\log(1+\frac{1}{24})$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{1-10p-13q}{7}$ 2. $\dfrac{7-10p+13q}{7}$

3. $\dfrac{7+10p-13q}{7}$ 4. $\dfrac{1+10p+13q}{7}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยใช้การประมาณค่า

$p = \log(1+\frac{1}{8}) = \log 9 - \log 8 = 0.95 - 0.90 = 0.05$

$q = \log(1+\frac{1}{15}) = \log 16 - \log 15 = 4\log 2 - \log 3 - \log 5 = 4(0.301) - 0.477 - 0.7 = 0.02712 = 0.03$

$\log(1+\frac{1}{24}) = \log 25 - \log 24 = 2\log 5 - \log 8 - \log 3 = 2(0.7) - 0.9 - 0.477 = 0.023$

คิดค่าของ $7\log(1+\frac{1}{24}) = 7(0.023) = 0.161$ เพื่อเปรียบเทียบกับค่าในตัวเลือก

1. $1 - 10p - 13q = 1 - 10(0.05) - 13(0.03) = 0.11$
2. $7 - 10p + 13q = 1 - 10(0.05) + 13(0.03) = 0.698$
3. $7 + 10p - 13q = 1 + 10(0.05) - 13(0.03) = 7.11$
4. $7 + 10p + 13q = 1 + 10(0.05) + 13(0.03) = 1.89$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $\log(1+\frac{1}{24}) = \log(\frac{25}{24}) = \log 25 - \log 24 = 2\log 5 - \log(3)(8)$

$= 2(\log 10 - \log 2) - \log 3 - \log 8 = 2 - 2\log 2 - \log 3 - 3\log 2 = 2 - \log 3 - 5\log 2$

การหา log3 และ log2 ในพจน์ของ p และ q

$p = \log(1+\frac{1}{8}) = \log(\frac{9}{8}) = \log 9 - \log 8 = 2\log 3 - 3\log 2$

$q = \log(1+\frac{1}{15}) = \log(\frac{16}{15}) = \log 16 - \log 15 = 4\log 2 - \log(3)(5)$

$= 4\log 2 - \log 3 - \log 5 = 4\log 2 - \log 3 - (1 - \log 2) = 5\log 2 - \log 3 - 1$

พิจารณาสมการ $2\log 3 - 3\log 2 = p$ ____________ (1)

$-\log 3 + 5\log 2 = 1 + q$ ____________ (2)

2(2); $-2\log 3 + 10\log 2 = 2 + 2q$ ____________ (3)

(1) + (3) $7\log 2 = 2 + p + 2q$

$\log 2 = \frac{1}{7}(2 + p + 2q)$

5 (1); $\quad 10\log 3 - 15\log 2 = 5p \qquad\qquad (4)$

3 (2); $\quad -3\log 3 + 15\log 2 = 3 + 3q \qquad\qquad (5)$

(4) + (5); $\quad 7\log 3 = 3 + 5p + 3q$

$$\log 3 = \frac{1}{7}(3 + 5p + 3q)$$

สรุป $\log(1 + \frac{1}{24}) = 2 - \log 3 - 5\log 2 = 2 - \frac{1}{7}(3 + 5p + 3q) - \frac{5}{7}(2 + p + 2q)$

$= \frac{1}{7}[14 - 3 - 5p - 3q - 10 - 5p - 10q] = \frac{1}{7}(1 - 10p - 13q)$ ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 1.3.9 กำหนด $a = \log_{27} 5$, $b = \log_5 64$ ค่าของ $\log_3 4$ ในพจน์ของ a , b เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{b}{2a}$
2. $\frac{3a}{b}$
3. $\frac{a}{b}$
4. ab

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการประมาณค่า $a = \log_{27}5 = \frac{\log 5}{\log 27} = \frac{0.7}{3\log 3} = \frac{0.7}{3(0.477)} = 0.489 < 1$

$b = \log_5 64 = \frac{\log 64}{\log 5} = \frac{6\log 2}{0.7} = \frac{6(0.3)}{0.7} = 2.571 > 2$

$\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{0.602}{0.477} = 1.262 > 1$

พิจารณาค่าแต่ละตัวเลือก

1. $\frac{b}{2a} = \frac{2.571}{2(0.489)} = 2.629$
2. $\frac{3a}{b} = \frac{3(0.489)}{2.571} < 1$
3. $\frac{a}{b} = \frac{0.489}{2.571} = 0.19 < 1$
4. $ab = (0.489)(2.571) = 1.257$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $a \cdot b = \log_{27}5 \cdot \log_5 64 = \frac{\log 5}{\log 27}\frac{\log 64}{\log 5} = \frac{\log 4^3}{\log 3^3} = \frac{3\log 4}{3\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = \log_3 4$

ตรงกับตัวเลือก 4.

ตัวอย่างที่ 1.3.10 ถ้า $\log_{ab}a = 5$ เมื่อ $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$ แล้ว $\log_{ab}(\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{b}})$ เท่ากับเท่าใด

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เลือกตัวเลขที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์เช่น $a = \frac{1}{2^5}$ และ $b = 2^4$

จะได้ว่า $\log_{ab}a = \log_{(\frac{1}{2^5})(2^4)}(\frac{1}{2^5}) = \log_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2^5}) = 5$

และ $\log_{ab}(\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{b}}) = \log_{(\frac{1}{2^5})(2^4)}(\frac{\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}}}{\sqrt{2^4}}) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{\frac{1}{2}}{4}) = \log_{(\frac{1}{2})}(\frac{1}{8}) = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง จาก

$$\log_{ab}a = 5$$
$$\frac{\log a}{\log ab} = 5$$
$$\frac{\log a}{\log a + \log b} = 5$$
$$\log a = 5\log a + 5\log b$$
$$-4\log a = 5\log b$$
$$-4\log a - 4\log b = \log b$$
$$(-4)(\log a + \log b) = \log b$$
$$\frac{\log b}{\log a + \log b} = -4$$
$$\frac{\log b}{\log ab} = -4$$
$$\log_{ab} b = -4$$

เพราะฉะนั้น $\log_{ab}(\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{b}}) = \log_{ab}\sqrt[5]{a} - \log_{ab}\sqrt{b}$

$$= \frac{1}{5}\log_{ab}a - \frac{1}{2}\log_{ab}b = \frac{1}{5}(5) - \frac{1}{2}(-4) = 3$$

ตัวอย่างที่ 1.3.11 กำหนด $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$ จะมีค่า x ตรงกับข้อใด

1. $1, 10^4$
2. 10000
3. $1, 10^3$
4. $1, \frac{1}{10^4}$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โดยการแทนค่า $x = 1$ จะได้ $\log\sqrt{1} = 0 = \sqrt{\log 1}$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นคำตอบ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง ต่อไปแทนค่า $x = 10^4$ จะได้

$\log\sqrt{10^4} = \log 100 = 2$ และ $\sqrt{\log 10^4} = \sqrt{4} = 2$ สรุปเลือกตัวเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง $\log\sqrt{x} = \sqrt{\log x}$

$$\frac{1}{2}\log x = (\log x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{4}(\log x)^2 = \log x$$

$$(\log x)^2 = 4\log x$$

$$\log x(\log x - 4) = 0$$

$\log x = 0$ หรือ $\log x = 4$ เพราะฉะนั้น $x = 1$ หรือ $x = 10^4$

ตัวอย่างที่ 1.3.12 กำหนด $a = 2^{280}$, $b = 3^{175}$, $c = 7^{105}$ และ $d = 11^{70}$

ตัวเลือกใดเป็นการเรียงข้อมูลจากค่าน้อยไปหาค่ามากสุด

1. $a < b < c < d$ 2. $b < d < c < a$

3. $d < b < a < c$ 4. $c < d < a < b$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 $a = 2^{280} = 2^{4(70)} = (2^4)^{70} = 16^{70} > 11^{70} = d$

ดังนั้น $a > d$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

แบบที่ 2 $\log a = \log 2^{280} = 280\log 2 = 280\,(0.3010) = 84.28$

$\log b = \log 3^{175} = 175\log 3 = 175\,(0.477) = 83.475$

$\log c = \log 7^{105} = 105\log 7 = 105\,(0.845) = 88.725$

$\log d = \log 11^{70} = 70\log 11 \cong 70\log 10 = 70$

เพราะว่า $70 < 83.475 < 84.28 < 88.725$ เพราะฉะนั้น $\log d < \log b < \log a < \log c$

สรุปได้ว่า $d < b < a < c$

วิธีจริง $121 < 256 < 343 < 729$

$$11^2 < 2^8 < 7^3\ 3^5$$

$$(11^2)^{35} < (2^8)^{35} < (7^3)^{35} < (3^5)^{35}$$

เพราะฉะนั้น $11^{70} < 2^{280} < 7^{105} < 3^{175}$

ตัวอย่างที่ 1.3.13 ถ้า M เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_{0.5}(4-x) \geq \log_{0.5} 2 - \log_{0.5}(x-1)$ และ $N = [0, 3]$ แล้ว $M \cap N'$ เท่ากับเท่าใด

1. $(-1, 0)$ 2. $(-3, -1)$
3. $(3, 4)$ 4. $(4, 5)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $M \cap N' \subset M$ เสมอ

เพราะฉะนั้นเซตคำตอบในตัวเลือกที่ถูกต้องต้องเป็นสับเซตของ M

เพราะว่า $x = 4.5 \in (4, 5)$ แต่ $\log_{0.5}(4-4.5)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $4.5 \notin M$ ดังนั้น $(4, 5)$ ไม่ถูกต้องแน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่า $x = -2 \in (-3, -1)$ แต่ $\log_{0.5}(x-1) = \log_{0.5}(-2-1)$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้น $-2 \notin M$ ดังนั้น $(-3, -1)$ ไม่ถูกต้องแน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

แทนค่า $x = -0.5 \in (-1, 0)$ แต่ $\log_{0.5}(x-1) = \log 0.5(-0.5-1)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $-0.5 \notin M$ ดังนั้น $(-1, 0)$ ต้องผิดแน่นอนเราจึงตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

วิธีจริง เพราะว่า $N = [0, 3]$, $N' = (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ เพราะฉะนั้น $M \cap N' \subset (-\infty, 0) \cup (3, \infty)$

จากโจทย์ $\log_{0.5}(4-x) \geq \log_{0.5}2 - \log_{0.5}(x-1)$

$$\log_{0.5}(4-x) \geq \log_{0.5}\left(\frac{2}{x-1}\right)$$

เพราะว่า log ฐาน 0.5 เป็นฟังก์ชันลด เพราะฉะนั้น $4-x \leq \frac{2}{x-1}$

เพราะว่า $x-1$ ต้องมากกว่าศูนย์ เพราะฉะนั้น $(x-1)(4-x) \leq 2$

$$4x - x^2 - 4 + x \leq 2$$

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$$(x-3)(x-2) \geq 0$$

$-\infty < x \leq 2$ หรือ $3 \leq x < \infty$

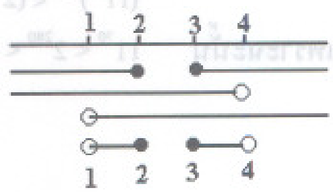
$$x \in (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

เพราะว่ามีพจน์ $\log_{0.5}(4-x)$ เพราะฉะนั้น $4-x > 0$ ดังนั้น $4 > x$ เพราะฉะนั้น $x \in (-\infty, 4)$

เพราะว่ามีพจน์ $\log_{0.5}(x-1)$ เพราะฉะนั้น $x-1 > 0$ ดังนั้น $x > 1$ เพราะฉะนั้น $x \in (1, \infty)$

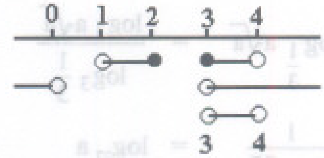
สรุป $M = \{x \mid \log_{0.5}(4-x) \geq \log_{0.5}2 - \log_{0.5}(x-1)\}$

$$= [(-\infty,2] \cup [3,\infty)] \cap (-\infty,4) \cap (1,\infty) = (1, 2] \cup [3, 4)$$



$M \cap N' = [(1,2] \cup [3,4)] \cap [(-\infty,0) \cup (3,\infty)]$

สรุป $M \cap N' = (3\ ,\ 4)$



ตัวอย่างที่ 1.3.14 ค่าของ $\log_9 a + \log_{27}\sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} + \dfrac{1}{\log_a 27}$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\dfrac{5}{9}\log_3 a$ 2. $-\dfrac{1}{18}\log_3 a$
3. $-\dfrac{13}{9}\log_3 a$ 4. $\dfrac{4}{9}\log_3 a$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a ดังนั้นแทนค่า a = 3 จะทำให้ได้คำตอบเร็วขึ้น

$$\log_9 a = \log_9 3 = \log_9 9^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{27}\sqrt[3]{a} = \log_{27}\sqrt[3]{3} = \frac{\log 3^{\frac{1}{3}}}{\log 27} = \frac{\frac{1}{3}\log 3}{\log 3^3} = \frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} (\tfrac{1}{3})^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{\log_3 27} = \frac{1}{\log_3 3^3} = \frac{1}{3}$$

สรุป $$\log_9 a + \log_{27}\sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} + \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9+2-27+6}{18} = -\frac{10}{18} = -\frac{5}{9}$$

แทนค่า a = 3 ในทุกตัวเลือกจะได้ตัวเลือก 1. มีค่าเท่ากับ $-\dfrac{5}{9}$ ส่วนตัวเลือกอื่นไม่เท่ากับ $-\dfrac{5}{9}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง ต้องใช้การจัดรูปโดยการเปลี่ยนเป็น log ฐาน 3 ทุกตัว

$$\log_9 a = \frac{\log_3 a}{\log_3 9} = \frac{1}{2}\log a$$

$$\log_{27}\sqrt[3]{a} = \frac{\log_3 \sqrt[3]{a}}{\log_3 27} = \frac{\frac{1}{3}\log_3 a}{\log_3 3^3} = \frac{1}{9}\log_3 a$$

$$\log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} = \frac{\log_3 a\sqrt{a}}{\log_3 \frac{1}{3}} = \frac{\log_3 a^{\frac{3}{2}}}{(-1)} = -\frac{3}{2}\log_3 a$$

$$\frac{1}{\log_a 27} = \log_{27} a = \frac{\log_3 a}{\log_3 27} = \frac{1}{3}\log_3 a$$

สรุป $\log_9 a + \log_{27}\sqrt[3]{a} + \log_{\frac{1}{3}} a\sqrt{a} + \frac{1}{\log_a 27} = \frac{1}{2}\log_3 a + \frac{1}{9}\log_3 a - \frac{3}{2}\log_3 a + \frac{1}{3}\log_3 a$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{3}{2} + \frac{1}{3}\right)\log_3 a = -\frac{5}{9}\log_3 a$$

ตัวอย่างที่ 1.3.15 กำหนด $\log_2(2N) = p$, $2\log_8 N = q$ และ $p - q = 4$ ค่าของ N เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. 2^5
3. 2^9
4. 2^{10}

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เรานำค่าในตัวเลือกมาแทนค่า N แล้ว พิจารณาว่าใช้ได้หรือไม่ก็พอ

ตัวเลือก 1. แทนค่า N = 2

$$p = \log_2(2N) = \log_2(2(2)) = \log_2 4 = 2$$

$$q = 2\log_8 N = 2\log_8 2 = 2\cdot\frac{\log_2 2}{\log_2 8} = \frac{2}{3}$$

$$p + q = 2 + \frac{2}{3} \neq 4$$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้ ในทำนองเดียวกัน $N = 2^5$ ไม่ได้

ตัวเลือก 3. แทนค่า $N = 2^9$

$$p = \log_2(2\cdot 2^9) = \log_2 2^{10} = 10$$

$$q = 2\log_8 N = 2\log_8 2^9 = 2\log_8 (2^3)^3 = 6\log_8 8 = 6$$

$$p - q = 10 - 6 = 4$$

สรุป $N = 2^9$ ถูกต้อง

วิธีจริง $4 = p - q = \log_2 2N - 2\log_8 N = \log_2 2N - 2\cdot\frac{\log_2 N}{\log_2 8} = \log_2 2N - \frac{2}{3}\log_2 N$

$$= \log_2 2N - \log_2 N^{\frac{2}{3}} = \log_2\left(\frac{2N}{N^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$2^4 = \frac{2N}{N^{\frac{2}{3}}}$$

$$16N^{\frac{2}{3}} = 2N$$

$$8N^{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$N^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8} = 2^{-3}$$

$$N = 2^9$$

ตัวอย่างที่ 1.3.16 กำหนดระบบสมการ

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$
$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$$
$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

ค่าของ xyz เท่ากับเท่าใด

1. -24 2. 0

3. 24 4. 81

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า x , y , z เป็นสมาชิกโดเมนของ log

เพราะฉะนั้น $x > 0$, $y > 0$ และ $z > 0$

ดังนั้น $xyz > 0$ สรุปตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $\log_2 x = \dfrac{\log_4 x}{\log_4 2} = \dfrac{\log_4 x}{\log_x(4^{\frac{1}{2}})} = \dfrac{\log_4 x}{(\frac{1}{2})} = 2\log_4 x = \log_4 x^2$

$$\log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2$$
$$\log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2$$
$$\log_4 x^2yz = 2$$
$$x^2yz = 4^2 = 16 \qquad (1)$$

$$\log_3 y = \frac{\log_9 y}{\log_9 3} = \frac{\log_9 y}{\log_9 9^{\frac{1}{2}}} = 2\log_9 y = \log_9 y^2$$

$$\log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2$$
$$\log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2$$

$$\log_9 y^2zx = 2$$

$$y^2zx = 9^2 = 81 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (2)}$$

$$\log_4 z = \frac{\log_{16} z}{\log_{16} 4} = 2\log_{16} z = \log_{16} z^2$$

$$\log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

$$\log_{16} z^2 + \log_{16} x + \log_{16} y = 2$$

$$\log_{16} z^2xy = 2$$

$$z^2xy = 16^2 \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ (3)}$$

$(1)\times(2)\times(3)$; $\quad (x^2yz)(y^2zx)(z^2xy) = (16)(81)(16^2)$

$$x^4y^4z^4 = (16)(81)(16)(16) = 2^4\cdot 3^4\cdot 2^4\cdot 2^4 = (2\cdot 3\cdot 2\cdot 2)^4 = 24^4$$

เพราะฉะนั้น $\quad xyz = 24$

ตัวอย่างที่ 1.3.17 กำหนด $n + \log(1 + 2^n) = n\log 5 + \log 6$ ค่าของ $n^3 + 1$ เท่ากับเท่าใด

1. 0   2. 1

3. 2   4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การตัดตัวเลือกด้วยวิธีแทนค่าดีกว่า

ความหมายของ $n^3 + 1 = 0, 1, 2, 3$ เหมือนกับ $n^3 = -1, 0, 1, 2$

เหมือนกับ $n = -1, 0, 1, \sqrt[3]{2}$

ลองแทนค่า $n = 1$ จะได้ $\quad n + \log(1 + 2^n) = n\log 5 + \log 6$

$$1 + \log(1 + 2) = \log 5 + \log 6$$

$$1 + \log 3 = \log(\frac{10}{2}) + \log(2)(3)$$

$$= \log 10 - \log 2 + \log 2 + \log 3 = 1 + \log 3$$

แสดงว่า $n = 1$ ทำให้ $n + \log(1 + 2^n) = n\log 5 + \log 6$

สรุป $\quad n^3 + 1 = 2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\quad n + \log(1 + 2^n) = n\log 5 + \log 6$

$$\log 10^n + \log(1 + 2^n) = \log 5^n + \log 6$$

$$\log(10^n(1+2^n)) = \log(5^n)(6)$$

$$10^n(1+2^n) = 5^n \cdot 6$$

$$2^n(1+2^n) = 6$$

$$(2^n)^2 + 2^n - 6 = 0$$

$$(2^n+3)(2^n-2) = 0$$

$2^n + 3 \neq 0$ ดังนั้น $2^n - 2 = 0$

$$2^n = 2$$

$$n = 1$$

สรุป $n^3 + 1 = 2$

ตัวอย่างที่ 1.3.18 คำตอบของสมการ $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$ เท่ากับเท่าใด

1. 10 2. 100
3. 1000 4. 10000

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวเลือก 1. $10^{\sqrt{\log 10}} = 10^1 \neq 10^8$

ตัวเลือก 2. $100^{\sqrt{\log 100}} = 100^{\sqrt{2}} \neq 10^8$

ตัวเลือก 3. $1000^{\sqrt{\log 1000}} = \sqrt{3} \neq 10^8$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. , 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$

$$\log x^{\sqrt{\log x}} = \log 10^8 = 8$$

$$\sqrt{\log x} \cdot \log x = 8$$

$$(\log x)^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$\log x = 8^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$$

$$x = 10^4 = 10{,}000$$

ตัวอย่างที่ 1.3.19 เซตคำตอบของอสมการ $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) \geq 0$ คือเซตใด

1. $[-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3]$ 2. $[-3, -\sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3]$
3. $[-3, 3]$ 4. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เซตคำตอบคือตัวเลือกใดใช้การแทนค่าตัดตัวเลือกดีกว่า ตัวอย่างเช่น $0 \in [-3, 3]$ เพราะว่า $x = 0$ ทำให้ $\log_4(x^2-5)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้ ต่อไปเลือกตัวเลือกที่คิดเลขง่ายเช่น $x = \sqrt{6}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4((\sqrt{6})^2-5)\right) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_4 1) = \log_{\frac{1}{3}} 0$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น $x = \sqrt{6}$ ไม่ได้เราจึงตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้อีก

เลือกตัวเลขที่จำแนกตัวเลือก 1. และ 3. เช่น $x = \sqrt{69}$

$\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_4\left((\sqrt{69})^2-5\right)\right) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_4(64)) = \log_{\frac{1}{3}}(\log_4 4^3) = \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 \not\geq 0$

ดังนั้น $x = \sqrt{69}$ ไม่ได้ เราจึงตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) \geq 0$

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) \geq \log_{\frac{1}{3}} 1$$

เพราะว่า log ฐาน $\frac{1}{3}$ เป็นฟังก์ชันลด เพราะฉะนั้น $\log_4(x^2-5) \leq 1$

$$\log_4(x^2-5) \leq \log_4 4$$

เพราะว่า log ฐาน 4 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เพราะฉะนั้น $x^2 - 5 \leq 4$

$$x^2 \leq 9$$

$$-3 \leq x \leq 3$$

เพราะว่ามีพจน์ของ $\log_4(x^2-5)$ เพราะฉะนั้น $x^2 - 5 > 0$

$$x^2 > 5$$

$x < -\sqrt{5}$ หรือ $x > \sqrt{5}$

สรุป $\{x \mid \log_{\frac{1}{3}}(\log_4(x^2-5)) \geq 0\} = [-3, 3] \cap [(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, \infty)]$

$$= [-3, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, 3]$$

ตัวอย่างที่ 1.3.20 เซตคำตอบของอสมการ $\log_{2x} 2 + \log_{2x} |x-1| > \frac{1}{2}$ คือเซตใด

1. $(1, 4)$
2. $(0, 2)$
3. $(\frac{1}{2}, 5)$
4. $(2, \infty)$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $x = 1$ จะทำให้ $|x-1| = 0$

และ $\log_{2x} |x-1| = \log_2 0$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $x = 5$ จะได้

$$\begin{aligned} \log_{2x} 2 + \log_{2x} |x-1| &= \log_{10} 2 + \log_{10} |5-1| \\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 4 = \log_{10} 8 \\ &= 3\log_{10} 2 = 3\,(0.30103) \\ &= 0.90309 > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

แสดงว่า $x = 5$ ต้องอยู่ในเซตคำตอบ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง

$$\begin{aligned} \log_{2x} 2 + \log_{2x} |x-1| &> \frac{1}{2} \\ \log_{2x} 2|x-1| &> \frac{1}{2} \\ \frac{\log 2|x-1|}{\log 2x} &> \frac{1}{2} \\ \frac{\log 2|x-1|}{\log 2x} - \frac{1}{2} &> 0 \\ \frac{2\log 2|x-1| - \log 2x}{2\log 2x} &> 0 \\ \frac{2\log 2|x-1| - \log 2x}{\log 2x} &> 0 \end{aligned}$$

จำแนกกรณีของ x เป็น $0 < x < \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2} < x$

กรณี 1. $0 < x < \frac{1}{2}$ จะได้ $2x < 1$, $\log 2x < 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} 2\log 2|x-1| - \log 2x &< 0 \\ \log(2|x-1|)^2 - \log(2x) &< 0 \\ \log(4(x-1|)^2) &< \log(2x) \\ \log(4(x^2-2x+1)) &< \log(2x) \end{aligned}$$

เพราะว่า log ฐาน 10 เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $4(x^2-2x+1) \;<\; 2x$

$$4x^2-8x+4 \;<\; 2x$$

$$4x^2-10x+4 < 0$$

$$2x^2-5x+2 \;<\; 0$$

$$(2x-1)(x-2) \;<\; 0$$

$$\frac{1}{2} < x < 2$$

เพราะว่าเราพิจารณาค่า x เมื่อ $0 < x < \frac{1}{2}$ ขัดแย้งกับ $\frac{1}{2} < x < 2$

สรุปไม่มีค่า $x \in (0, \frac{1}{2})$ ที่ทำให้ $\log_{2x} 2 + \log_{2x} |x-1| > \frac{1}{2}$

กรณี 2. $x > \frac{1}{2}$ จะได้ $2x > 1$, $\log 2x > 0$

ดังนั้น $2\log 2|x-1| - \log 2x \;>\; 0$

$$\log(2(x-1))^2 \;>\; \log 2x$$

$$(2(x-1))^2 \;>\; 2x$$

$$2x^2-5x+2 \;>\; 0$$

$$(2x-1)(x-2) \;>\; 0$$

$$-\infty < x < \frac{1}{2} \text{ หรือ } 2 < x < \infty$$

สรุปเซตคำตอบในกรณีนี้คือ $(\frac{1}{2}, \infty) \cap \left[(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty)\right] = (2, \infty)$

จากทั้ง 2 กรณีจะได้ว่า $\{x \mid \log_{2x} 2 + \log_{2x} |x-1| > \frac{1}{2}\} = (2, \infty)$

ปัญหาคณิตศาสตร์ที่น่าสนใจ จงเรียงลำดับจากน้อยไปมาก

1. 2^{200} , 3^{150} , 5^{100} , 7^{50} ดูเฉลยได้ที่หน้า 42
2. $\log_2 3$, $\log_3 4$, $\log_4 5$, $\log_5 6$ ดูเฉลยได้ที่หน้า 70
3. $2^{\frac{1}{3}}$, $3^{\frac{1}{4}}$, $4^{\frac{1}{5}}$ ดูเฉลยได้ที่หน้า 72
4. $\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[9]{8}$, $\sqrt[8]{9}$, $\sqrt[6]{12}$ ดูเฉลยได้ที่หน้า 123
5. $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}}$, $\left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}}$ ดูเฉลยได้ที่หน้า 190

1.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. ถ้า $a < 1$ และ $f(x) = |a|^x$ เป็นฟังก์ชันลดบน $(-\infty, \infty)$
2. $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$ ทุกจำนวนจริง x ที่ไม่เท่ากับศูนย์
3. $\sqrt{-4}\ \sqrt{-6} = \sqrt{24}$
4. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log b}{\log a}\cdot\log_b\left(\frac{x}{y}\right)$ ทุกค่า x , y , a , b ที่มากกว่าศูนย์และไม่เท่ากับ 1
5. ถ้า $a > 1$ และ $a^x > 1$ แล้ว $x < 0$
6. ถ้า $0 < a < 1$ และ $x > 1$ แล้ว $\log_a x < 0$
7. ถ้า $x > 1$ แล้ว $(3^x)\log_3 x > 0$
8. ถ้า $x > 1$ และ $a > 1$ แล้ว $x^a \cdot \log_x a = a^x \log_a x$
9. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\left(\frac{a}{a+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \left(\frac{a}{a+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$
10. ถ้า $a > 0$ และ $\log_a x^2 > \log_a y^2$ แล้ว $x > y$
11. ถ้า $1 < a < b < c$ แล้ว $\log_a b > \log_b c$
12. $\left(\sin\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} > \left(\cos\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$
13. $\log_2 x^2 + \log_{x^2} 2 \geq 2$ ทุกค่า $x > 1$
14. ถ้า $0 < a < b < 1$ แล้ว $a^{\log x} < b^{\log x}$ ทุกค่า $x > 0$
15. กราฟของ $y = 2^x$ และ $y = x^2$ ตัดกัน 2 จุด เท่านั้นคือ (2 , 4) , (4 ,16)
16. กราฟของ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ และ $y = \log_2 x$ ไม่ตัดกันบนช่วง $(0, \infty)$
17. $2^x + 2^{-x} \geq 2$ ทุกจำนวนจริง x
18. $2^{(n+\frac{1}{n})} \geq 4$ ทุกจำนวนเต็มบวก n
19. $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a(\log_{\frac{1}{a}} x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน $(0, \infty)$
20. ถ้า $x > 1$ แล้ว $\log x < x$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลและฟังก์ชันลอการิทึม

1. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a = -4$

$f(x) = |(-4)|^x = 4^x$

$f(1) = 4$, $f(2) = 16$ เพราะฉะนั้น $f(x) = 4^x$ ไม่เป็นฟังก์ชันลด

2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\log_2(-2)^2 = \log_2 4 = 2$

แต่ $2\log_2(-2)$ หาค่าไม่ได้

3. **ผิด** $\sqrt{-4}$ หาค่าไม่ได้ในระบบจำนวนจริง

เพราะฉะนั้นเราสรุปไม่ได้ว่า $\sqrt{-4}\,\sqrt{-6} = \sqrt{24}$ ในระบบจำนวนจริง

4. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{\log_b\left(\frac{x}{y}\right)}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}\cdot\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \dfrac{\log b}{\log a}\cdot\log_b\left(\frac{x}{y}\right)$

5. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a = 2$, $x = 2$ จะได้ $2^2 = 4 > 1$

6. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

เมื่อ $0 < a < 1$ เพราะฉะนั้น $\log_a a^x < \log_a 1$

$x < 0$

7. **ถูกต้อง** เพราะว่า $x > 1$ แล้ว $\log_3 x > 0$ เพราะฉะนั้น $(3^x)\log_3 x > 0$

8. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $x = 2$, $a = 4$

$x^a \log_x a = 2^4 \cdot \log_2 4 = (16)(2) = 32$

$a^x \log_a x = 4^2 \log_4 2 = (16)(\frac{1}{2}) = 8$

9. **ถูกต้อง** $a > 0$

$0 < \dfrac{a}{a+1} < 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = (\frac{a}{a+1})^x$ เป็นฟังก์ชันลด

เพราะว่า $\dfrac{1}{\sqrt{2}} > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ เพราะฉะนั้น $f(\frac{1}{\sqrt{2}}) < f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

สรุป $\left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \left(\dfrac{a}{a+1}\right)^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

10. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a = 10$, $x = -10$, $y = 1$

$\log_{10}(-10)^2 = 2 > 0 = \log_{10} 1^2$ แต่ $-10 \not> 1$

11.**ผิด** ตัวอย่างเช่น $1 < a = 2 < b = 4 < c = 8$

$$\log_a b = \log_2 4 = 2$$

$$\log_b c = \log_4 8 = \frac{3}{2} \qquad \text{ดังนั้น} \quad \log_a b \not> \log_b c$$

12.**ผิด** เพราะว่า $f(x) = x^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0, \infty)$

และ $\sin\frac{\pi}{180} < \cos\frac{\pi}{180}$ เพราะฉะนั้น $\left(\sin\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} < \left(\cos\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

สรุป $\left(\sin\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \not> \left(\cos\frac{\pi}{180}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

13.**ถูกต้อง** เพราะว่า $\left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 \geq 0$ ทุกค่า $A > 0$

$$A - 2 + \frac{1}{A} \geq 0$$

$$A + \frac{1}{A} \geq 2$$

เพราะว่า $\log_2 x^2 > 0$ ทุกค่า $x > 1$ เพราะฉะนั้น $\log_2 x^2 + \frac{1}{\log_2 x^2} \geq 2$

$$\log_2 x^2 + \log_{x^2} 2 \geq 2$$

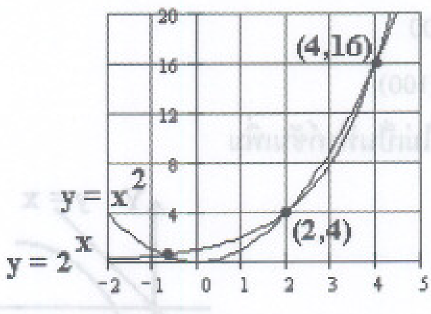
14.**ผิด** ตัวอย่างเช่น เมื่อ $a = \frac{1}{100}$, $b = \frac{1}{10}$, $x = 0.1$

$c < a = \frac{1}{100} < b = \frac{1}{10} < 1$

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{\log(0.1)} = 100$$

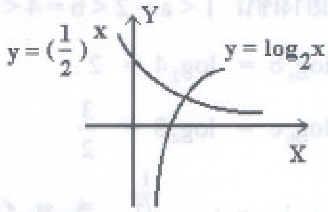
$$\left(\frac{1}{10}\right)^{\log(0.1)} = 10$$

15.**ผิด**



$y = 2^x$ และ $y = x^2$ ตัดกันในควอดรันท์ 2 อีก 1 จุด

16.**ผิด** จากกราฟ



จะเห็นได้ว่า $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

และ $y = \log_2 x$ ตัดกัน 1 จุด

17.**ถูกต้อง** เพราะว่า $2^x > 0$ ทุกค่า x เพราะฉะนั้น $\left(\sqrt{2^x} - \frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2 \ge 0$

$$2^x - 2(\sqrt{2^x})\left(\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right) + \frac{1}{2^x} \ge 0$$

$$2^x - 2 + \frac{1}{2^x} \ge 0$$

$$2^x + 2^{-x} \ge 2$$

18.**ถูกต้อง** เพราะว่า $n + \frac{1}{n} \ge 2$ ทุกค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$

เพราะฉะนั้น $2^{n+\frac{1}{n}} \ge 2^2$ ทุกค่า $n \in N$

$2^{n+\frac{1}{n}} \ge 4$ ทุกค่า $n \in N$

19.**ผิด** ตัวอย่างเช่น $a = \frac{1}{100}$ จะได้ว่า $0 < a < 1$, $\frac{1}{a} > 1$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \log_{\frac{1}{a}} x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม $f(100) = \log_{\frac{1}{100}}(\log_{100} 100) = 0$

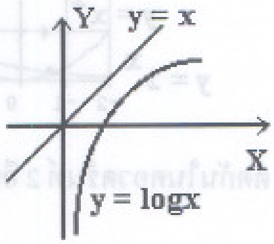
$$f(10000) = \log_{\frac{1}{100}}(\log_{100} 10000) = \log_{\frac{1}{100}} 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} \frac{1}{100}} < 0$$

เพราะฉะนั้น $10000 > 100$

แต่ $f(10000) \not> f(100)$

ดังนั้น $f(x) = \log_a(\log_{\frac{1}{a}} a)$ ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

20.**ถูกต้อง**



เพราะว่ากราฟของ y = logx

จะอยู่ต่ำกว่ากราฟ y = x เมื่อ x > 0

1.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ค่าของ $\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+xy}{xy-y^3} - \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-y}$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\dfrac{x}{x-y}$ 2. $\dfrac{\sqrt{x}}{x-y}$

   3. $\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ 4. $\dfrac{x}{y}$

2. ค่าของ $3-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\dots}}}$ เท่ากับเท่าใด

   1. 1 2. 2

   3. 3 4. 4

3. เซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x^2+4x-4}+\sqrt{x^2+4x-10}=6$ คือเซตใด

   1. $\{-\frac{13}{2}, \frac{5}{2}\}$ 2. $\{-\frac{14}{5}, 2\}$

   3. $\{\frac{5}{2}\}$ 4. $\{2\}$

4. ค่าของ $(\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$ เท่ากับเท่าใด

   1. $140\sqrt{2}$ 2. $70\sqrt{2}$

   3. $35\sqrt{2}$ 4. $20\sqrt{2}$

5. กำหนด $x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}} = a$ ค่าของ $x-\frac{1}{x}$ เท่ากับเท่าใด

   1. $2a^3+3a$ 2. $3a^2+2a$

   3. a^2+3a 4. a^3+3a

6. กำหนด $4^{-k}=5$ ค่าของ 2^{3k} เท่ากับเท่าใด

   1. $5\sqrt{5}$ 2. $\sqrt[3]{25}$

   3. $\dfrac{1}{5\sqrt{5}}$ 4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}$

7. กำหนด $a=\log(1-\frac{1}{2})$, $b=\log(1-\frac{1}{3})$, $c=\log(1-\frac{1}{4})$ ค่าของ $a+b+c$ เท่ากับเท่าใด

   1. log2 2. log3

   3. – 2 log2 4. – 2 log3

8. เซตคำตอบของอสมการ $\log_3 x - \log_9 x < \frac{3}{2}$ คือเซตในตัวเลือกใด

1. (0 , 1) 2. (0 , 10)
3. [0 , 1] 4. [0 , 10]

9. เซตคำตอบของสมการ $\log_{\sqrt{x+2}}(x^2 + 4x - 8) = 2$ เท่ากับเซตคำตอบในข้อใด

1. $x = 10^{\log 3}$ 2. $\log_5 x = 1$
3. $\log_2 (x + 2) = 2$ 4. $\log_2 (x - 2) = 1$

10. ผลบวกของรากที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $x^{-3} - 4x^{-2} - 7x^{-1} + 10 = 0$ คือข้อใด

1. 0.3 2. 0.5
3. 0.7 4. 3.0

เฉลยคำตอบ 1. (3) 2. (1) 3. (1) 4. (1) 5. (4)
6. (3) 7. (3) 8. (3) 9. (4) 10.(3)

วงกลมหนึ่งหน่วยช่วยท่านได้

เราสามารถใช้วงกลมหนึ่งหน่วยช่วยในการหาค่าประมาณของ sin , cos , tan , arcsin , arccos ฯลฯ ได้ และขอแนะนำให้ใช้วงกลมรัศมี 10 cm เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย

การประมาณค่า sin40° , cos40°

ลาก OR ทำมุม 40 องศา วัดพิกัด R(0.76,0.64)

เพราะฉะนั้น $\sin 40^o = 0.64$ และ $\cos 40^o = 0.76$

การประมาณค่า arcsin(0.8)

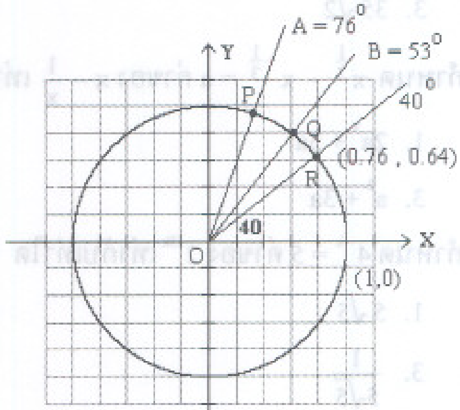
plot จุด Q(x,y = 0.8)วัดมุม QOX ได้ 53 องศา

เพราะฉะนั้น $\arcsin(0.8) = 53^o$

การประมาณค่า arccos(0.25)

plot จุด P(x = 0.25,y) วัดมุม POX ได้ 76 องศา

เพราะฉะนั้น $\arccos(0.25) = 76^o$



หมายเหตุ ค่าจริง

$\sin(40^o) = 0.64278761$, $\cos(40^o) = 0.76604444$

arcsin(0.8) = 53.13010235 องศา

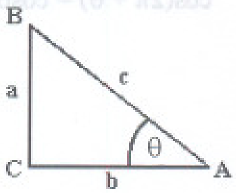
arccos(0.250 = 75.52248781 องศา

บทที่ 2

ฟังก์ชันตรีโกณมิติและการประยุกต์

2.1 สรุปเนื้อหา

1. ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่คำนวณจากอัตราส่วนของด้านจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



$\sin\theta = \frac{a}{c}$ $\quad \text{cosec}\,\theta = \frac{c}{a}$

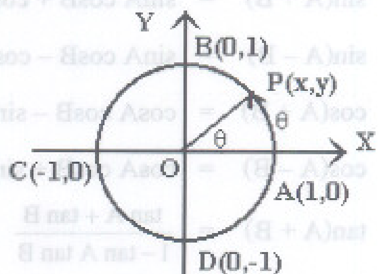
$\cos\theta = \frac{b}{c}$ $\quad \sec\theta = \frac{c}{b}$

$\tan\theta = \frac{a}{b}$ $\quad \cot\theta = \frac{b}{a}$

2. **วงกลมหนึ่งหน่วย**

วงกลมหนึ่งหน่วย คือวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ 1

และมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด

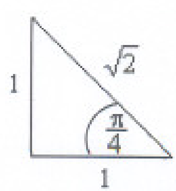


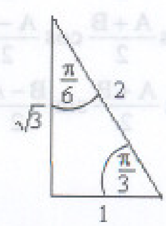
วงกลมหนึ่งหน่วยกับฟังก์ชันตรีโกณมิติมีความสัมพันธ์กันดังนี้

1. ค่า θ ซึ่งเป็นความยาวของส่วนโค้ง AP คือค่ามุม AOP
   มุม θ มีหน่วยเป็นเรเดียน
2. มุมรอบจุด = 2π เรเดียน = 360 องศา , π เรเดียน = 180 องศา
3. ค่า sin , cos ของ θ คือ $\cos\theta = x$ และ $\sin\theta = y$ เมื่อ จุด P(x,y) ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

θ	0 (0°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)
sinθ	0	1	0	−1
cosθ	1	0	−1	0

ค่าของ sin , cos , tan ของมุม $\frac{\pi}{4}$ (45°) , $\frac{\pi}{6}$ (30°) , $\frac{\pi}{3}$ (60°) ที่ควรท่องจำให้ได้





	$\frac{\pi}{6}$ หรือ 30 องศา	$\frac{\pi}{4}$ หรือ 45 องศา	$\frac{\pi}{3}$ หรือ 60 องศา
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ $\quad\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\quad\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta$ $\quad\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$ $\quad\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ $\quad\cos(-\theta)=\cos\theta$

สูตรฟังก์ชันของผลบวกหรือผลต่าง

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B+\cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B+\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad \tan(A-B) = \frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

สูตรผลคูณของฟังก์ชันในรูปผลบวกหรือผลต่าง

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B = \cos(A-B)-\cos(A+B)$$

สูตรผลบวกหรือผลต่างของฟังก์ชันในรูปผลคูณ

$$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมขนาด สองเท่า สามเท่า และ มุมครึ่ง

ขนาด 2 เท่า $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

ขนาด 3 เท่า $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ $\quad \cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

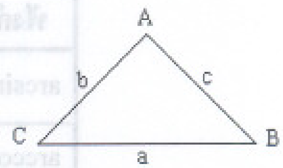
มุมครึ่ง $\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{2}$ $\quad \cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1+\cos A}{2}$ $\quad \tan^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$

3. สูตรตรีโกณมิติที่เกี่ยวของกับสามเหลี่ยม

สามเหลี่ยม ABC มี a , b , c เป็นด้านตรงข้ามมุม A , B , C

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC คือ $\dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

Δ เป็นพื้นที่สามเหลี่ยม ABC



$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

$\Delta = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}ac\sin B = \dfrac{1}{2}bc\sin A$

R เป็นรัศมีวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC **r เป็นรัศมีวงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC**

$R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{b}{2\sin B} = \dfrac{c}{2\sin C}$ $\quad r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ $\quad \Delta = rs = \dfrac{abc}{4R}$

กฎของไซน์ $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin C}{c} = \dfrac{2\Delta}{abc}$

กฎของโคไซน์ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $\quad \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ $\quad \cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ $\quad \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{s-a}$ $\quad \tan\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{s-b}$ $\quad \tan\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{s-c}$

$\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ $\quad \sin\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}$ $\quad \sin\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ $\quad \cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$ $\quad \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan\frac{1}{2}(B-C)}{\tan\frac{1}{2}(B+C)} \qquad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan\frac{1}{2}(C-A)}{\tan\frac{1}{2}(C+A)} \qquad \frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A-B)}{\tan\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A} \qquad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(C-A)}{\cos\frac{1}{2}B} \qquad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

4. ฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

เพราะว่า $f(x) = \sin x$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันอินเวอร์สของ $f(x) = \sin x$ จะได้เป็น $f^{-1}(x)$ หรือ $\arcsin(x)$

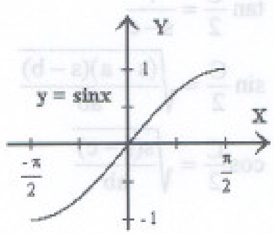
และเรียก $y = \arcsin x$ ว่าเป็นอินเวอร์สฟังก์ชันของฟังก์ชัน $y = \sin x$

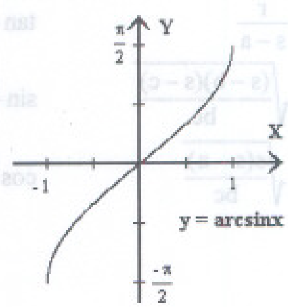
เราจะใช้หลักการดังกล่าวกับฟังก์ชันตรีโกณอื่น ๆ ด้วย เช่น ฟังก์ชัน cos, tan, sec, cosec, cot

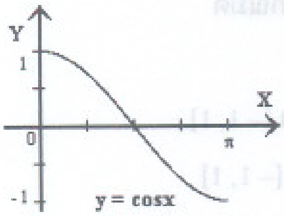
โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันอินเวอร์สของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ควรจำให้ได้

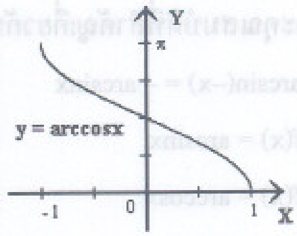
ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
arcsin	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
arccos	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
arctan	$(-\infty, \infty)$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
arccot	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$
arcsec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
arccosec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

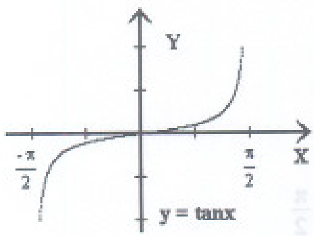
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และ อินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ

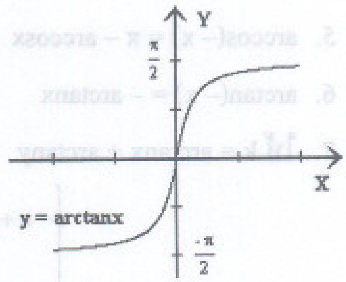


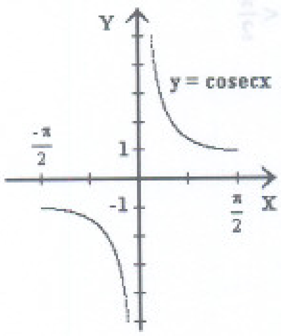


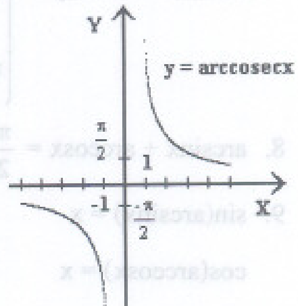

Y
1
X
0
π
-1
y = cosx

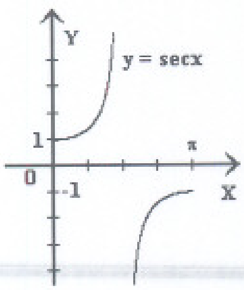

Y
π
y = arccosx
-1
0
1
X

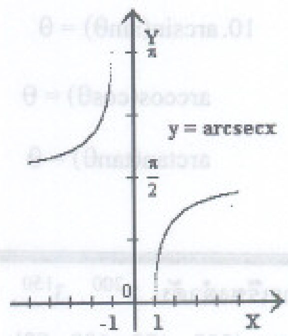

Y
X
-π/2
π/2
y = tanx

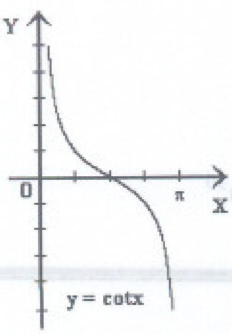

Y
π/2
X
y = arctanx
-π/2

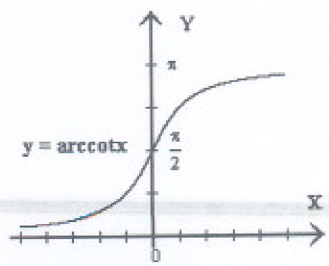

Y
y = cosecx
-π/2
1
-1
π/2
X


Y
y = arccosecx
π/2
1
-1
-π/2
X


Y
y = secx
1
π
0
-1
X


Y
π
y = arcsecx
π/2
-1
1
X


Y
0
π
X
y = cotx


Y
π
y = arccotx
π/2
X
0

4. สูตรและคุณสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับอินเวอร์สฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$
2. $f(x) = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-1, 1]$
3. $f(x) = \arccos x$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-1, 1]$
4. $f(x) = \arctan x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$
5. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
6. $\arctan(-x) = -\arctan x$
7. ให้ $k = \arctan x + \arctan y$

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} -\pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & ;\ k < -\dfrac{\pi}{2} \\ \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & ;\ -\dfrac{\pi}{2} < k < \dfrac{\pi}{2} \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) & ;\ k > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

8. $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$
9. $\sin(\arcsin x) = x$ $\quad \forall x \in [-1, 1]$

   $\cos(\arccos x) = x$ $\quad \forall x \in [-1, 1]$

   $\tan(\arctan x) = x$ $\quad \forall x \in (-\infty, \infty)$
10. $\arcsin(\sin\theta) = \theta$ $\quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

    $\arccos(\cos\theta) = \theta$ $\quad \forall \theta \in [0, \pi]$

    $\arctan(\tan\theta) = \theta$ $\quad \forall \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

การเรียงลำดับ 2^{200} , 3^{150}, 5^{100} , 7^{50} จากน้อยไปมาก

ห.ร.ม. (200 , 150 , 100 , 50) = 50

$$7 < 16 < 25 < 27$$
$$7^1 < 2^4 < 5^2 < 3^3$$
$$(7^1)^{50} < (2^4)^{50} < (5^2)^{50} < (3^3)^{50}$$
$$7^{50} < 2^{200} < 5^{100} < 3^{150}$$

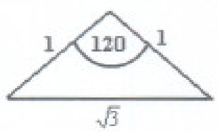
2.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ข้อสอบตรีโกณมิติส่วนใหญ่เราสามารถแทนค่าบางค่าของมุมหรือด้านของสามเหลี่ยมก็สามารถจำแนกตัวเลือกได้ว่าตัวเลือกใดถูกหรือตัวเลือกใดผิด

ตัวอย่างที่ 2.2.1 ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a + b + c)(a + b - c) = ab$ แล้วมุม C เท่ากับเท่าใด

1. 30 องศา
2. 60 องศา
3. 120 องศา
4. 150 องศา

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $a = b = 1$ ทำให้ $(a + b + c)(a + b - c) = ab$



$$(2 + c)(2 - c) = 1$$
$$4 - c^2 = 1$$
$$c = \sqrt{3}$$

เมื่อวาดรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน $a = 1$, $b = 1$, $c = \sqrt{3}$ จะได้ว่า มุม C กาง 120 องศา

วิธีจริง

$$(a + b + c)(a + b - c) = ab$$
$$(a + b)^2 - c^2 = ab$$
$$a^2 + 2ab + b^2 c^2 = ab$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = -ab$$
$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}$$
$$\cos C = -\frac{1}{2}$$ เพราะฉะนั้น $C = 120$ องศา

ตัวอย่างที่ 2.2.2 ค่าในข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบทั่วไปของสมการ $\sin x + \cos x = 0$ เมื่อกำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก

1. $(1 + 2n)\frac{\pi}{4}$
2. $(2 + 3n)\frac{\pi}{4}$
3. $(3 + 4n)\frac{\pi}{4}$
4. $(4 + 5n)\frac{\pi}{4}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $n = 0$ ตัวเลือกแต่ละตัวจะกลายเป็น

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{3\pi}{4}$
4. π

เพราะว่า $\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$

$$\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} = 1 + 0 \neq 0$$

$$\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sin\pi + \cos\pi = 0 + (-1) \neq 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $\sin x + \cos x = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 0$$

$$\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{4} + x) = 0$$

$\frac{\pi}{4} + x = k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก

$x = k\pi - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + n\pi$ เมื่อ k , n เป็นจำนวนเต็มบวก

$x = (3+4n)\frac{\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

2. ใช้ประโยชน์เกี่ยวกับโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติช่วยในการดูขนาดของมุมหรือค่าตัวเลขว่าเป็นบวกหรือลบได้หรือไม่ ช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 2.2.3 ค่าของ x ที่สอดคล้องสมการ $\arctan 2x + \arctan 3x = \frac{\pi}{4}$ คือข้อใด

1. $x = -\frac{1}{6}$
2. $x = \frac{1}{6}$
3. $x = \frac{1}{6}, -1$
4. $x = -1$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโดยทั่วไป $-\frac{\pi}{2} < \arctan k < \frac{\pi}{2}$

นอกจากนั้นเรายังรู้ว่า $-\frac{\pi}{2} < \arctan k < 0$ เมื่อ $k < 0$

เพราะฉะนั้น $x = -1$ จะทำให้ $\arctan(-2) + \arctan(-3) < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\frac{\pi}{4} = \arctan(2x) + \arctan(3x) = \arctan\left(\frac{2x+3x}{1+(2x)(3x)}\right) = \arctan\left(\frac{5x}{1-6x^2}\right)$

เพราะฉะนั้น $1 = \tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{5x}{1-6x^2}$

$6x^2 + 5x - 1 = 0$

$(6x-1)(x+1) = 0$ เพราะฉะนั้น $x = -1, \frac{1}{6}$ สรุปต้องเลือก $x = \frac{1}{6}$

3. คำถามเกี่ยวกับเอกลักษณ์ตรีโกณมิติหรือสูตรต่าง ๆ เกี่ยวกับตรีโกณมิติใช้การแทนค่ามุมก็จะทำการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 2.2.4 ค่าของ $\frac{\sin 8\theta - \sin 6\theta}{\cos 8\theta + \cos 6\theta}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sin\theta$
2. $\cos\theta$
3. $\cot\theta$
4. $\tan\theta$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{3}$ จะได้

$$\frac{\sin 8(\frac{\pi}{3}) - \sin 6(\frac{\pi}{3})}{\cos 8(\frac{\pi}{3}) + \cos 6(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sin(2\pi + \frac{2\pi}{3}) - \sin 2\pi}{\cos(2\pi + \frac{2\pi}{3}) + \cos 2\pi} = \frac{\sin\frac{2\pi}{3} - 0}{\cos(\frac{2\pi}{3}) + 1} = \frac{(\frac{\sqrt{3}}{2})}{(-\frac{1}{2}) + 1} = \sqrt{3}$$

ตัวเลือกมีค่าเป็น 1. $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 3. $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

เพราะฉันนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $$\frac{\sin 8\theta - \sin 6\theta}{\cos 8\theta + \cos 6\theta} = \frac{2\cos(\frac{8\theta+6\theta}{2})\sin(\frac{8\theta-6\theta}{2})}{2\cos(\frac{8\theta+6\theta}{2})\cos(\frac{8\theta-6\theta}{2})} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

4. คำถามเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเช่น ถามเรื่องมุม, ด้านหรือพื้นที่สามเหลี่ยมให้ทำการวาดรูปแล้ววัดระยะทางและมุมก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 2.2.5 ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน ถ้า $\cos A = -\frac{1}{2}$ และ $\sin B = \frac{1}{2}$

อัตราส่วนของด้าน $a : b : c$ เท่ากับเท่าใด

1. $1:2:1$
2. $2:1:1$
3. $\sqrt{3}:2:1$
4. $\sqrt{3}:1:1$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\cos A = -\frac{1}{2} < 0$ เพราะฉะนั้น A เป็นมุมป้าน

เพราะฉะนั้นด้านตรงข้ามมุม A ยาวที่สุด ดังนั้น a ยาวที่สุด เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

เพราะว่า $\cos A = -\frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $A = 120^\circ$ และ $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เพราะว่า $\sin B = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $B = 30^\circ$ ดังนั้น $C = 180 - A - B = 30^\circ$

เพราะฉะนั้น b = c เมื่อวาดรูป ΔABC จะพบว่า a ไม่เป็น 2 เท่าของ b แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\cos A = -\frac{1}{2}$ และ $\sin B = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น A = 120 องศา และ B = 30 องศา

เพราะว่า A + B + C = 180 เพราะฉะนั้น C = 30 องศา เพราะว่า $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{k}$

เพราะฉะนั้น $a : b : c = \frac{1}{k}\sin A : \frac{1}{k}\sin B : \frac{1}{k}\sin C = \sin 120 : \sin 30 : \sin 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 1 : 1$

5. คำถามในลักษณะ เซตคำตอบคือตัวเลือกใดเราสามารถนำค่าของมุมในตัวเลือกต่างๆ มาช่วยในการจำแนกตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 2.2.6 เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \le x \le \pi$ คือข้อใด

1. $[-\pi, -\frac{\pi}{3}] \cup (\frac{2\pi}{3}, \pi]$
2. $(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$
3. $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$
4. $(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า x = 0 ทำให้ $\sqrt{3}\cos 0 + \sin 0 = \sqrt{3} > 0$

เพราะฉะนั้น x = 0 ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. เพราะว่า $x = \frac{\pi}{2}$ ทำให้ $\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1 > 0$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{2}$ ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x > 0$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\sin x > 0$$

$$\sin(\frac{\pi}{3} + x) > 0$$

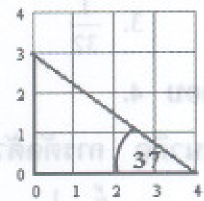
$$0 < \frac{\pi}{3} + x < \pi$$

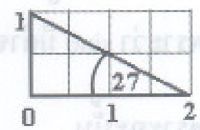
$$-\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

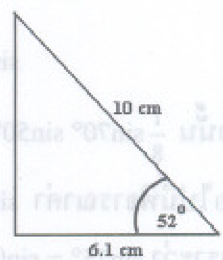
6. วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และวัดระยะทางเพื่อประมาณค่าของมุม และ ค่าประมาณของระยะทาง จากรูป โดยใช้สเกลที่เหมาะสม

ตัวอย่างที่ 2.2.7 ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\tan\frac{A}{2} = \frac{3}{4}$ และ $\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ค่าของ cosC เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{4}{5}$ 2. $\frac{3}{5}$
3. $-\frac{2}{3}$ 4. $-\frac{3}{5}$







การตัดตัวเลือก วาดรูปสามเหลี่ยมและวัดขนาดของมุม

เพราะฉะนั้น $\frac{A}{2} = 37°$ ดังนั้น $A = 74$

เพราะฉะนั้น $\frac{B}{2} = 27$ และ $B = 54$

เพราะฉะนั้น $A + B = 128$ และ $C = 180 - A - B = 52$

เพราะฉะนั้น $\cos C > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

จากรูป cos52° มีค่าประมาณ 6.1

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง $\tan(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \dfrac{\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2}}{1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}} = \dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{1-(\frac{3}{4})(\frac{1}{2})} = \dfrac{(\frac{5}{4})}{(\frac{5}{8})} = 2$

เพราะว่า $A + B + C = 180$

$$C = 180 - A - B$$

$$\frac{C}{2} = 90 - (\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$$

$$\tan\frac{C}{2} = \tan(90 - (\frac{A}{2} + \frac{B}{2}))$$

$$= \cot(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\cos C = \frac{1 - \tan^2\frac{C}{2}}{1 + \tan^2\frac{C}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$$

2.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ค่าของ $\frac{1}{8}\sin 70°\sin 50°\sin 10°$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{16}$
3. $\frac{1}{32}$
4. $\frac{1}{64}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 เพราะว่า $\sin 70° < 1$, $\sin 50° < 1$ และ $\sin 10° < 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70°\sin 50°\sin 10° < \frac{1}{8}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้ก่อน

เพราะว่า $\sin\theta$ มีค่าจากน้อยไปมากบนช่วง 0° ถึง 90°

เพราะฉะนั้น $\sin 10° < \sin 30°$

$$\sin 10° < \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\frac{1}{8}\sin 70°\sin 50°\sin 10° < \frac{1}{8}(1)(1)(\frac{1}{2}) < \frac{1}{16}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ต่อไปนี้พิจารณาค่า $\sin 50° < \sin 60°$ และ $\sin 70° < \sin 75°$

เพราะว่า $\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30\cos 45 + \cos 30\sin 45$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

เพราะฉะนั้น $\sin 70° < \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{0.732}{2(1.414)} = 0.258$

เพราะว่า $\sin 50° < \sin 60°$

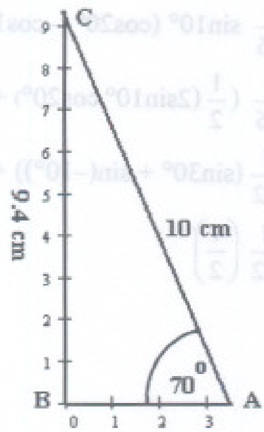
$$\sin 50° < \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.866$$

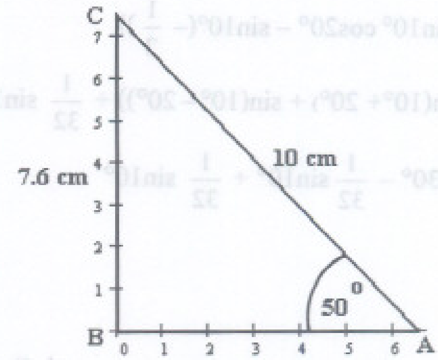
$$\sin 70° < \sin 75° = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+1.732}{2(1.414)} = 0.966$$

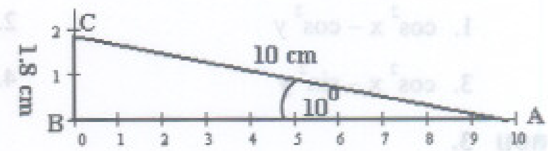
เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70°\sin 50°\sin 10° < \frac{1}{8}(0.97)(0.87)(0.26) = 0.027$

เพราะว่า $\frac{1}{32} = 0.03125 > 0.027$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้อีก

แบบที่ 2 การหาค่าประมาณ โดยวิธีวาดรูป Δ มุมฉาก ประมาณค่า sin70°, sin50° และ sin10°







$\sin 70° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AC} = \frac{9.4}{10} = 0.94$

$\sin 50° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AC} = \frac{7.6}{10} = 0.76$

$\sin 10° = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{BC}{AC} = \frac{1.8}{10} = 0.18$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° = \frac{1}{8}(0.94)(0.76)(0.18) = 0.016$

เพราะว่า $\frac{1}{8} = 0.125$, $\frac{1}{16} = 0.0625$, $\frac{1}{32} = 0.03125$, $\frac{1}{64} = 0.015625$

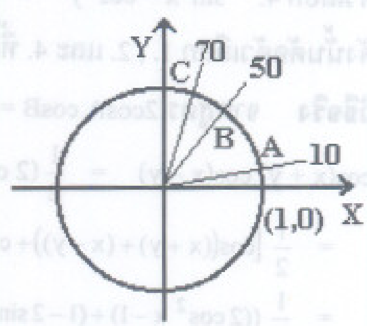
สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

แบบที่ 3 การใช้วงกลมรัศมี 10 นิ้ว ประมาณค่า sin70°, sin50°, sin10°

sin10° = ระยะห่างของจุด A กับแกน X = 0.15

sin50° = ระยะห่างของจุด B กับแกน X = 0.75

sin70° = ระยะห่างของจุด C กับแกน X = 0.95



หมายเหตุ บนสเกล 1 นิ้วที่แบ่งออกเป็น 10 ส่วน

เราประมาณค่าได้เพียงทศนิยมตำแหน่งที่ 2 เท่านั้น

ดังนั้น $\frac{1}{8}\sin 70° \sin 50° \sin 10° = \frac{1}{8}(0.95)(0.75)(0.15) = 0.0133$

วิธีจริง $\frac{1}{8}\sin70^\circ\sin50^\circ\sin10^\circ = \frac{1}{8}\sin10^\circ(\frac{1}{2}(2\sin70^\circ\sin50^\circ))$

$= \frac{1}{16}\sin10^\circ(\cos(70^\circ-50^\circ)-\cos(70^\circ+50^\circ)) = \frac{1}{16}\sin10^\circ(\cos20^\circ-\cos120^\circ)$

$= \frac{1}{16}(\sin10^\circ\cos20^\circ-\sin10^\circ(-\frac{1}{2})) = \frac{1}{16}(\frac{1}{2}(2\sin10^\circ\cos20^\circ)+\frac{1}{2}\sin10^\circ)$

$= \frac{1}{32}(\sin(10^\circ+20^\circ)+\sin(10^\circ-20^\circ))+\frac{1}{32}\sin10^\circ = \frac{1}{32}(\sin30^\circ+\sin(-10^\circ))+\frac{1}{32}\sin10^\circ$

$= \frac{1}{32}\sin30^\circ-\frac{1}{32}\sin10^\circ+\frac{1}{32}\sin10^\circ = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{1}{64}$

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ค่าของ $\cos(x+y)\cos(x-y)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\cos^2x-\cos^2y$
2. $\sin^2x-\sin^2y$
3. $\cos^2x-\sin^2y$
4. $\sin^2x-\cos^2y$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x และ y ดังนั้นแทนค่า x , y ที่คิดเลขง่าย ๆ ช่วยในการตัดตัวเลือกดีกว่า เช่น แทนค่า $x = 0$, $y = 0$

ค่าของโจทย์ $\cos(x+y)\cos(x-y) = \cos(0+0)\cos(0-0) = 1$

ตัวเลือก 1. $\cos^2x-\cos^2y = \cos^2 0-\cos^2 0 = 1-1 = 0 \neq 1$

ตัวเลือก 2. $\sin^2x-\sin^2y = \sin^2 0-\sin^2 0 = 0-0 = 0 \neq 1$

ตัวเลือก 3. $\cos^2x-\sin^2y = \cos^2 0-\sin^2 0 = 1-0 = 1$

ตัวเลือก 4. $\sin^2x-\cos^2y = \sin^2 0-\cos^2 0 = 0-1 = -1 \neq 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสูตร $2\cos A\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$ จะได้

$\cos(x+y)\cos(x-y) = \frac{1}{2}(2\cos(x+y)\cos(x-y))$

$= \frac{1}{2}[\cos((x+y)+(x-y))+\cos((x+y)-(x-y))] = \frac{1}{2}[\cos 2x+\cos 2y]$

$= \frac{1}{2}((2\cos^2x-1)+(1-2\sin^2y)) = \frac{1}{2}(2\cos^2x-2\sin^2y)$

$= \cos^2x-\sin^2y$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 กำหนด sinx + cosy = m และ cosx + siny = n

ค่าของ sin(x + y) ในรูปพจน์ของ m และ n เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{m^2+n^2-2}{2}$ 2. $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$

3. $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ 4. $\frac{m^2+n^2+2}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x , y และ m , n

ดังนั้นแทนค่า x , y ที่คิดเลขง่าย ๆ เพื่อหาค่า m และ n ก็ตัดตัวเลือกได้

แทนค่า x = 0 , y = 0 จะได้ m = sinx + cosy = sin0 + cos0 = 1

n = cosx + siny = cos0 + sin0 = 1

เพราะฉะนั้นค่าของโจทย์ sin(0 + 0) = 0 ต่อไปแทนค่า m = 1 , n = 1 ในตัวเลือก

1. $\frac{m^2+n^2-2}{2} = \frac{1+1-2}{2} = 0$ 2 $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0}$ หาค่าไม่ได้

3. $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{1-1}{1+1} = 0$ 4. $\frac{m^2+n^2+2}{2} = \frac{1+1+2}{2} = 2 \neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

ต่อไปแทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$, $y = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $m = \sin x + \cos y = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$n = \cos x + \sin y = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

โจทย์ $\sin(x + y) = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ แทนค่า $m = \sqrt{2}$, $n = \sqrt{2}$ ในตัวเลือกที่เหลือ

ตัวเลือก 1. $\frac{m^2+n^2-2}{2} = \frac{2+2-2}{2} = 1$ ตัวเลือก 3. $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2} = \frac{2-2}{2+2} = 0 \neq 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $m = \sin x + \cos y$ $m^2 = (\sin x + \cos y)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y$

$n = \cos x + \sin y$ $n^2 = (\cos x + \sin y)^2 = \cos^2 x + 2\cos x\sin y + \sin^2 y$

$m^2 + n^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos y + \cos^2 y + \cos^2 x + 2\cos x\sin y + \sin^2 y$

$= (\sin^2 x + \cos^2 x) + (\sin^2 y + \cos^2 y) + 2(\sin x\cos y + \cos x\sin y) = 1 + 1 + 2\sin(x + y)$

เพราะฉะนั้น $2\sin(x + y) = m^2 + n^2 - 2$

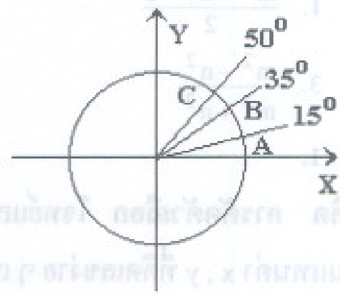
สรุป $\sin(x + y) = \frac{m^2+n^2-2}{2}$

ตัวอย่างที่ 2.3.4 กำหนดให้ $\cos 35° + \cos 15° = a$, $\sin 35° + \sin 15° = b$

ค่าของ $\sin 50°$ ในพจน์ของตัวแปร a และ b เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ 2. $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$

3. $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$ 4. $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$



ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ใช้การประมาณค่า a , b , sin50

โดยใช้วงกลมรัศมี 1 นิ้ว วัดพิกัดของจุด A , B , C ได้เป็น

A(0.95 , 0.26) , B (0.8 , 0.6) , C (0.65 , 0.8) ดังนั้น

$\cos 15° = 0.95$ $\sin 15° = 0.26$ $\cos 35° = 0.8$ $\sin 35° = 0.6$ $\cos 50° = 0.65$ $\sin 50° = 0.8$

ค่าประมาณ $a = \cos 35° + \cos 15° = 0.95 + 0.8 = 1.75$ $b = \sin 35° + \sin 15° = 0.6 + 0.26 = 0.86$

แทนค่า a , b ที่ประมาณได้ในตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\dfrac{ab}{a^2+b^2} = \dfrac{(1.75)(0.86)}{1.75^2+0.86^2} = \dfrac{1.505}{3.0625+0.7396} = \dfrac{1.505}{3.8021} = 0.3958 \neq 0.8$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{ab}{a^2-b^2} = \dfrac{1.505}{3.0625-0.7396} = \dfrac{1.505}{2.3229} = 0.647 \neq 0.8$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{2ab}{a^2-b^2} = 2\,(0.647) > 1$ ไม่เป็น $\sin 50°$ แน่นอน

ตัวเลือก 4. $\dfrac{2ab}{a^2+b^2} = 2\,(0.3958) = 0.7916$ สรุปเลือกตัวเลือก 4. ดีกว่า

วิธีจริง $a^2 = (\cos 35 + \cos 15)^2 = \cos^2 35 + 2\cos 35\cos 15 + \cos^2 15$

$b^2 = (\sin 35 + \sin 15)^2 = \sin^2 35 + 2\sin 35\sin 15 + \sin^2 15$

$a^2 + b^2 = \cos^2 35 + \sin^2 35 + 2\,(\cos 35\cos 15 + \sin 35\sin 15) + \cos^2 15 + \sin^2 15$

$= 1 + 2\cos(35 - 15) + 1 = 2\,(1 + \cos 20)$

$ab = (\cos 35 + \cos 15)(\sin 35 + \sin 15)$

$= \cos 35\sin 35 + \cos 35\sin 15 + \cos 15\sin 35 + \cos 15\sin 15$

$= \frac{1}{2}\sin 70 + \sin(35 + 15) + \frac{1}{2}\sin 30 = \sin 50 + \frac{1}{2}(\sin 70 + \sin 30)$

$= \sin 50 + \frac{1}{2}\left[2\sin\left(\frac{70+30}{2}\right)\cos\left(\frac{70-30}{2}\right)\right] = \sin 50 + \sin 50\cos 20 = \sin 50\,(1 + \cos 20)$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{2ab}{a^2+b^2} = \dfrac{2\sin 50(1+\cos 20)}{2(1+\cos 20)} = \sin 50$

ตัวอย่างที่ 2.3.5 ถ้า $a = \sin(\arctan\frac{120}{119})$ แล้ว a เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{120}{196}$ 2. $\frac{120}{169}$
3. $\frac{120}{144}$ 4. $\frac{120}{121}$

ตอบ 2.

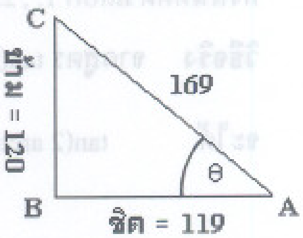
แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{120}{119} \approx 1$ เพราะฉะนั้น $\arctan\frac{120}{119} \approx \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

$\sin(\arctan\frac{120}{119}) \approx \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414}{2} = 0.71$ เพราะว่าค่าประมาณของแต่ละตัวเลือกคือ

ตัวเลือก 1. $\frac{120}{196} = 0.6$ ตัวเลือก 2. $\frac{120}{169} = 0.71$

ตัวเลือก 3. $\frac{120}{144} = 0.83$ ตัวเลือก 4. $\frac{120}{121} = 0.99$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า



วิธีจริง เมื่อ $\theta = \arctan\frac{120}{119}$ จะได้ว่า $\tan\theta = \frac{120}{119} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$

$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (119)^2 + (120)^2 = 14161 + 14400 = 28561$

$AC = \sqrt{28561} = 169$

เพราะฉะนั้น $\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{120}{169}$ ดังนั้น $\theta = \arcsin(\frac{120}{169})$

สรุป $a = \sin(\arctan\frac{120}{169}) = \sin(\theta) = \sin(\arcsin\frac{120}{169}) = \frac{120}{169}$ ตรงกับตัวเลือก 2.

ตัวอย่างที่ 2.3.6 ค่าของ $\tan(2\arctan x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2x}{x^2-1}$ 2. $\frac{2x}{x^2+1}$
3. $\frac{2x}{1-x^2}$ 4. $-\frac{2x}{1+x^2}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ x แทนค่า $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

$$2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$$

โจทย์ $\tan(2\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

ตัวเลือก 1. $\dfrac{2(\frac{1}{\sqrt{3}})}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2-1} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}-1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$

ตัวเลือก 2. $\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{2(\frac{1}{\sqrt{3}})}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+1} = \dfrac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{3}+1} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \sqrt{3}$

ตัวเลือก 3. $\dfrac{2x}{1-x^2} = \sqrt{3}$

ตัวเลือก 4. $-\dfrac{2x}{1+x^2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \neq \sqrt{3}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสูตร $\tan(2A) = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

จะได้ $\tan(2\arctan x) = \dfrac{2\tan(\arctan x)}{1-(\tan(\arctan x))^2} = \dfrac{2x}{1-x^2}$

ตัวอย่างที่ 2.3.7 ค่าของ $\arcsin(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12})$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. $\frac{\pi}{2}$

3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติ $\arcsin(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}) = 0 = \arcsin 0$

เพราะฉะนั้น $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = 0$

ทำให้ $\cos^2\frac{\pi}{12} = \sin^2\frac{\pi}{12}$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นตัวเลือก 1. ผิด ในทำนองเดียวกันตัวเลือก 2. และ 4. ผิดด้วย

วิธีจริง จากสูตร $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

ดังนั้น $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \cos 2(\frac{\pi}{12}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\arcsin(\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}) = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$

ตัวอย่างที่ 2.3.8 รากของสมการ $\arctan\frac{x-1}{x-2}+\arctan\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$ เท่ากับเท่าใด

1. $x=-\cos\frac{\pi}{4}$
2. $x=1,-1$
3. $x=\sin\frac{\pi}{4}$
4. $x=\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในช่วยที่สามารถทำการตัดตัวเลือกได้

$x=1;\quad \arctan\frac{1-1}{1-2}+\arctan\frac{1+1}{1+2} = \arctan0+\arctan\frac{2}{3} = 0+\arctan\frac{2}{3}\neq\arctan1=\frac{\pi}{4}$

$x=-1;\quad \arctan\frac{-1-1}{-1-2}+\arctan\frac{-1+1}{-1+2} = \arctan\frac{2}{3}+\arctan0 = \arctan\frac{2}{3}\neq\arctan1=\frac{\pi}{4}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\arctan a+\arctan b=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$

เพราะฉะนั้น $\arctan\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) = \arctan\frac{\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}{1-\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)}$

$$= \arctan\left(\frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)-(x-1)(x+1)}\right) = \arctan\left(\frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{x^2-4-x^2+1}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right)$$

เพราะฉะนั้น $\arctan\left(\frac{2x^2-4}{-3}\right) = \frac{\pi}{4} = \arctan(1)$

$$\frac{2x^2-4}{-3} = 1$$

$$2x^2-4 = -3$$

$$2x^2 = 1$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.9 ค่าของ $\sin A+\sin2A+\sin3A$ เท่ากับเท่าใด

1. $2\sin A-\cos A+1$
2. $\sin2A+1+2\cos A$
3. $(\sin2A+1)\cos A$
4. $\sin2A\,(2\cos A+1)$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามและตัวเลือกแบบนี้ใช้การแทนค่ามุมบางมุมช่วยในการตัดตัวเลือกดีที่สุดเช่น $A = 0$ จะได้ค่าของโจทย์ $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = \sin 0 + \sin 0 + \sin 0 = 0$

ตัวเลือก 1. $2\sin A - \cos A + 1 = 2\sin 0 - \cos 0 + 1 = 0 - 1 + 1 = 0$

ตัวเลือก 2. $\sin 2A + 1 + 2\cos A = \sin 0 + 1 + 2\cos 0 = 0 + 1 + 2 = 3$

ตัวเลือก 3. $(\sin 2A + 1)\cos A = (\sin 0 + 1)\cos 0 = (0 + 1)(1) = 1$

ตัวเลือก 4. $\sin 2A\,(2\cos A + 1) = \sin 0\,(2\cos 0 + 1) = (0)(2 + 1) = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

แทนค่า $A = \frac{\pi}{2}$ จะได้ค่าของโจทย์ $\sin A + \sin 2A + \sin 3A = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\pi + \sin\frac{3\pi}{2} = 1 + 0 - 1 = 0$

ตัวเลือก 1. $2\sin A - \cos A + 1 = 2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + 1 = 2 - 0 + 1 = 3$

ตัวเลือก 4. $\sin 2A\,(2\cos A + 1) = \sin\pi\,(2\cos\frac{\pi}{2} + 1) = (0)(-2 + 1) = 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $\sin 3A + \sin 2A + \sin A = 3\sin A - 4\sin^3 A + 2\sin A\cos A + \sin A$

$= 4\sin A - 4\sin^3 A + 2\sin A\cos A = 2\sin A\,(2 - 2\sin^2 A + \cos A)$

$= 2\sin A\,(2(1 - \sin^2 A) + \cos A) = 2\sin A\,(2\cos^2 A + \cos A)$

$= 2\sin A\cos A\,(2\cos A + 1) = \sin 2A\,(2\cos A + 1)$

ตัวอย่างที่ 2.3.10 ค่าของ $\dfrac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\tan 2A$
2. $\tan 4A$
3. $\tan^4 A$
4. $\tan^2 A$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่ามุมบางมุมที่คิดเลขง่ายช่วยในการตัดตัวเลือกเช่น $A = \frac{\pi}{4}$

โจทย์ $\dfrac{3 - 4\cos 2A + \cos 4A}{3 + 4\cos 2A + \cos 4A} = \dfrac{3 - 4\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi}{3 + 4\cos\frac{\pi}{2} + \cos\pi} = \dfrac{3 - 0 - 1}{3 + 0 - 1} = 1$

ตัวเลือก 1. $\tan 2A = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$ ตัวเลือก 2. $\tan 4A = \tan\pi = 0$

ตัวเลือก 3. $\tan^4 A = \tan^4\frac{\pi}{4} = 1$ ตัวเลือก 4. $\tan^2 A = \tan^2\frac{\pi}{4} = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

แทนค่า $A = 30°$

โจทย์ $\dfrac{3-4\cos 2A+\cos 4A}{3+4\cos 2A+\cos 4A} = \dfrac{3-4\cos 60°+\cos 120°}{3+4\cos 60°+\cos 120°}$

$$\dfrac{3-4(\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})}{3+4(\frac{1}{2})+(-\frac{1}{2})} = \dfrac{6-4-1}{6+4-1} = \dfrac{1}{9}$$

ตัวเลือก 3. $\tan^4 A = \tan^4 30° = (\frac{1}{\sqrt{3}})^4 = \frac{1}{9}$

ตัวเลือก 4. $\tan^2 A = \tan^2 30° = (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1}{3}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\dfrac{3-4\cos 2A+\cos 4A}{3+4\cos 2A+\cos 4A} = \dfrac{3-4\cos 2A+2\cos^2 2A-1}{3+4\cos 2A+2\cos^2 2A-1} = \dfrac{2-4\cos 2A+2\cos^2 2A}{2+4\cos 2A+2\cos^2 2A}$

$$= \dfrac{1-2\cos 2A+\cos^2 2A}{1+2\cos 2A+\cos^2 2A} = \dfrac{(1-\cos 2A)^2}{(1+\cos 2A)^2}$$

$$= \left[\dfrac{(\frac{1-\cos 2A}{2})}{(\frac{1+\cos 2A}{2})}\right]^2 = \left(\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}\right)^2 = (\tan^2 A)^2 = \tan^4 A$$

ตัวอย่างที่ 2.3.11 ถ้า $2\arcsin x + \arcsin x(2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{3}$ แล้ว x มีค่าในช่วงใด

1. $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$
2. $(-\frac{\pi}{4}, 0)$
3. $(0, \frac{\pi}{4})$
4. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\arcsin: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

และ $-1 \le \arcsin a \le 0$ ก็ต่อเมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le a \le 0$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x < 0$ แล้ว $\arcsin x < 0$ และ $\arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) < 0$

ดังนั้นเป็นไปไม่ได้ที่ $2\arcsin x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง ให้ $\theta = \arcsin x$

$$x = \sin\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2x\sqrt{1-x^2}$$

$$2\theta = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

เพราะฉะนั้น $\quad 2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$

$$2\arcsin x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{3}$$

$$2\arcsin x + 2\arcsin x = \frac{\pi}{3}$$

$$4\arcsin x = \frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin x = \frac{\pi}{12} \in (0, \frac{\pi}{4})$$

ตัวอย่างที่ 2.3.12 กำหนด $\arcsin(\frac{\pi}{2} - 2\arccos x) = 0$ ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

1. ทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง $\qquad$ 2. $x = \frac{\pi}{4}$
3. $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad$ 4. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าโจทย์มีพจน์ของ arccosx

เพราะฉะนั้น x ต้องสอดคล้องเงื่อนไขโดเมนของ arccos

นั้นคือ $-1 \le x \le 1$ $\qquad$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก 1. อาจทำโดยการแทนค่าก็ได้เช่น x = 0

$\arcsin(\frac{\pi}{2} - 2\arccos 0) = \arcsin(\frac{\pi}{2} - 2(\frac{\pi}{2})) = \arcsin(-\frac{\pi}{2})$

เพราะว่า $-\frac{\pi}{2} = -\frac{3.14}{2} < -1$ $\qquad$ ดังนั้น $\arcsin(-\frac{\pi}{2})$ หาค่าไม่ได้

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ได้อีกเหมือนกัน

ต่อไปเลือกค่าง่าย ๆ มาแทนค่าเช่น $\quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin(\frac{\pi}{2} - 2\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}) = \arcsin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \arcsin 0 = 0$$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง

$$\arcsin(\frac{\pi}{2} - 2\arccos x) = 0$$

$$\arcsin(\frac{\pi}{2} - 2\arccos x) = \arcsin 0$$

$$\frac{\pi}{2} - 2\arccos x = 0$$

$$2\arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.13 ถ้า $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$ แล้วค่าของ x ตรงกับข้อใด เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

1. $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{9},\ 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ n\pi - \frac{\pi}{3}$
2. $\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6},\ 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{n\pi}{6} - \frac{\pi}{6},\ n\pi + \frac{\pi}{3}$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า n = 0 ตัวเลือกทั้ง 4 ข้อจะกลายเป็น

1. $\frac{\pi}{9}, -\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{3}$
3. $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ 4. $-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{3}$ ในโจทย์ $\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}\,(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

$$2\cos 2x = 2\cos 2\,(\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{2\pi}{3} = 2(-\frac{1}{2}) = -1 \neq 2$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{3}$ ไม่ได้ ทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า n = 1 ตัวเลือก 1. และตัวเลือก 2. กลายเป็น

1. $\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{7\pi}{9},\quad 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$
2. $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2},\quad \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ พบว่า $\cos\frac{\pi}{2} + \sqrt{3}\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{3}$, $2\cos\pi = -2 \neq \sqrt{3}$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{2}$ ไม่ได้ทำให้ตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$

$$\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \cos 2x$$

$$\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x = \cos 2x$$

$$\sin(\frac{\pi}{6} + x) = \cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6} + x)\right) = \cos 2x$$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos 2x$$

เมื่อ $\cos\theta = \cos x$ จะได้ว่า $\cos\theta = 2n\pi \pm x$

เพราะว่า $\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$ เพราะฉะนั้น $2x = 2n\pi \pm (\frac{\pi}{3} - x)$

กรณี 1. $2x = 2n\pi + \frac{\pi}{3} - x$

$3x = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}$

กรณี 2. $2x = 2n\pi - (\frac{\pi}{3} - x) = 2n\pi - \frac{\pi}{3} + x$

$x = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$

สรุป $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{9},\ 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 2.3.14 ถ้า $\tan\theta = \cos\theta$ แล้ว $\sin\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
2. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
3. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
4. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1. ใช้การประมาณค่า และดูว่าเป็นค่าบวกหรือลบก็สามารถตัดตัวเลือกได้ แทนค่า $\sqrt{5} = 2.24$ จะได้ค่าแต่ละตัวเลือกเป็น

ตัวเลือก 1. $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{-1+2.24}{2} = \frac{1.24}{2} = 0.62$

ตัวเลือก 2. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} = \frac{-1-2.24}{2} = \frac{-3.24}{2} = -1.62$

ตัวเลือก 3. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} = -1.62\ ,\ 0.62$

ตัวเลือก 4. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} = \frac{1+2.24}{2}, \frac{1-1.24}{2} = 1.62, -0.12$

เพราะว่า $-1 \le \sin\theta \le 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2. $\tan\theta = \cos\theta$ $\rightarrow$ θ อยู่ในควอดรันท์ 1. หรือ 2.

$\rightarrow$ $\sin\theta \ge 0$

$\rightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $\tan\theta = \cos\theta$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \cos\theta$$

$$\sin\theta = \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

แต่ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$ และ $-1 \le \sin\theta \le 1$ เพราะฉะนั้น $\sin\theta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 2.3.15 กำหนดให้ $0 < \theta < \pi$

สมการ $\cos\theta - \sin\theta = \cos 2\theta$ จะมีคำตอบทั้งหมดอยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$
2. $\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi\}$
3. $\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}$
4. $\{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นักเรียนที่แก้สมการตรีโกณมิติไม่เป็นก็สามารถนำมุมบางมุมมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เพราะว่า $0 < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น 0 , 2π ไม่ควรใช้แทนค่าลองค่ามุมที่คิดค่า θ ง่ายๆ เช่น $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos\theta - \sin\theta = \cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = 0-1 = -1$

$$\cos 2\theta = \cos 2(\frac{\pi}{2}) = \cos\pi = -1$$

ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{2}$ เป็นคำตอบได้แต่ตัวเลือก 1. และ 2. ไม่มี $\frac{\pi}{2}$ ทำให้เราตัดตัวเลือก 1. , 2. ทิ้งได้

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ จะได้ $\cos 2\theta = \cos 2(\frac{\pi}{4}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

$$\cos\theta - \sin\theta = \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

ดังนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$ เป็นคำตอบได้แต่ตัวเลือก 3. ไม่มี $\frac{\pi}{4}$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3 ทิ้งได้

วิธีจริง $\cos\theta - \sin\theta = \cos 2\theta$

$$\cos\theta - \sin\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\cos\theta - \sin\theta = (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta)$$

$$(\cos\theta - \sin\theta) - (\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta) = 0$$

$$(\cos\theta - \sin\theta)(1 - (\cos\theta + \sin\theta)) = 0$$

กรณีที่ 1. $\cos\theta - \sin\theta = 0$

$$\cos\theta = \sin\theta$$

เพราะว่า $0 < \theta < \pi$ เพราะฉะนั้น $\theta = \frac{\pi}{4}$

หมายเหตุ เมื่อทำมาถึงตรงนี้สามารถตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

กรณีที่ 2. $1 - (\cos\theta + \sin\theta) = 0$

$$\cos\theta + \sin\theta = 1$$

$$(\cos\theta + \sin\theta)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\sin 2\theta = 0$$

$$2\theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

สรุป $\{\theta \mid 0 < \theta < \pi$ และ $\cos\theta - \sin\theta = \cos 2\theta\} = \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\} \subset \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\}$

ตัวอย่างที่ 2.3.16 กำหนด n เป็นจำนวนเต็ม

ค่าทั่วไปของ x ที่เป็นคำตอบของสมการ $3\sin 2x = 3 - \cos^2 2x$ คือข้อใด

1. $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$
2. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$
3. $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$
4. $x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n ดังนั้นแทนค่า n บางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้ แทนค่า n = 0 ตัวเลือกแต่ละตัวเลือกจะมีค่าเป็น

1. $x = \frac{\pi}{4}$ 2. $x = \frac{\pi}{6}$

3. $x = \frac{\pi}{2}$ 4. $x = \frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $3\sin 2(\frac{\pi}{2}) = 3\sin\pi = 0$

$$3 - \cos^2 2(\frac{\pi}{2}) = 3 - \cos^2\pi = 3 - 1 = 2$$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{2}$ ไม่ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

แทนค่า n = 1 ตัวเลือกที่เหลือจะมีค่าเป็น 1. $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ 2. $2\pi + \frac{\pi}{6}$

เพราะว่า $3\sin 2x = 3\sin(2(2\pi + \frac{\pi}{6})) = 3\sin(4\pi + \frac{\pi}{3}) = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3(\frac{\sqrt{3}}{2})$

และ $3 - \cos^2 2x = 3 - \cos^2(2(2\pi + \frac{\pi}{6})) = 3 - \cos^2(4\pi + \frac{\pi}{3}) = 3 - \cos^2\frac{\pi}{3}$

$$= 3 - (\frac{1}{2})^2 = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$\neq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $3\sin 2x = 3 - \cos^2 2x = 3 - (1 - \sin^2 2x) = 2 + \sin^2 2x$

$$\sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0$$

$$(\sin 2x - 2)(\sin 2x - 1) = 0$$

เพราะว่า $-1 \le \sin 2x \le 1$ เพราะฉะนั้น $\sin 2x - 2 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\sin 2x - 1 = 0$

$$\sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = \sin\frac{\pi}{2}$$

$$2x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}$$ n เป็นจำนวนเต็ม

$$x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}$$

แทนค่า n = 2m ; $x = \frac{2m\pi}{2} + (-1)^{2m}\frac{\pi}{4} = m\pi + \frac{\pi}{4}$ m เป็นจำนวนเต็ม

แทนค่า m = n ; $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 2.3.17 ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง ถ้าด้าน AB ยาว $\sqrt{6}$ หน่วย ด้าน BC ยาว $3+\sqrt{3}$ หน่วยและด้าน AC ยาว $2\sqrt{3}$ หน่วย แล้วมุม $A\hat{C}B$ กางกี่องศา

1. 105
2. 45
3. 30
4. 60

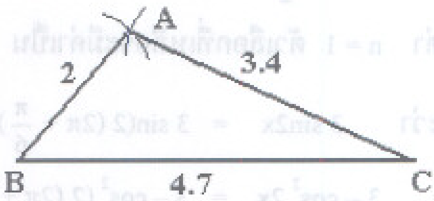
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การประมาณค่าและวาดรูปก็วัดมุม $A\hat{C}B$ ได้

ด้าน AB ยาว $\sqrt{6} = \sqrt{2}\ \sqrt{3} = (1.4)(1.7) = 1.96 \approx 2$

ด้าน BC ยาว $3+\sqrt{3} = 3 + 1.7 = 4.7$

ด้าน AC ยาว $2\sqrt{3} = 2\,(1.7) = 3.4$



จากรูปที่วาด BC = 4.7, AB = 2, AC = 3.4

เมื่อวัดมุมด้วยครึ่งวงกลมจะได้ค่าประมาณ 30°

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 3. ดีกว่า

หมายเหตุ เพราะว่า c = AB = 2 เป็นด้านสั้นที่สุด

เพราะฉะนั้น $A\hat{C}B$ ต้องเป็นมุมเล็กที่สุด ดังนั้น $A\hat{C}B < 90°$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ได้

วิธีจริง $a = BC = 3+\sqrt{3}$, $b = AC = 2\sqrt{3}$, $c = AB = \sqrt{6}$ จากกฎของโคไซน์

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(3+\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2}{2(3+\sqrt{3})(2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{9+6\sqrt{3}+3+12-6}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})} = \frac{18+6\sqrt{3}}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})} = \frac{6(3+\sqrt{3})}{4\sqrt{3}(3+\sqrt{3})} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

เพราะฉะนั้น C = 30°

ตัวอย่างที่ 2.3.18 กำหนด $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ จะมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดตามลำดับ คือข้อใด

1. 1 , 0
2. $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$
3. $1, \frac{1}{2}$
4. $2, \frac{1}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $-1 \le \sin x \le 1$, $0 \le \sin^4 x \le 1$

$-1 \le \cos x \le 1$, $0 \le \cos^4 x \le 1$

เพราะฉะนั้น $\sin^4 x + \cos^4 x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $\sin^4 x = 1$ และ $\cos^4 x = 1$

ก็ต่อเมื่อ $\sin x = \pm 1$ และ $\cos x = \pm 1$

แต่ $\sin x$ และ $\cos x$ เท่ากับ ± 1 หรือ ± 1 พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดของ $\sin^4 x + \cos^4 x = 2$ ไม่ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\sin^4 x + \cos^4 x = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\sin x = \cos x = 0$

แต่ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ดังนั้น $\sin x$, $\cos x$ เท่ากับ 0 พร้อมกันไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\sin^4 x + \cos^4 x = 0$ ไม่ได้ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $y = \sin^4 x + \cos^4 x = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^4 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x + \cos^4 x$

$= 2\cos^4 x - 2\cos^2 x + 1 \qquad = 2(\cos^4 x - \cos^2 x) + 1$

$= 2(\cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} + 1 \qquad = 2(\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$

$$y = 2(\cos^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} = 2\left(\frac{2\cos^2 x - 1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2\cos^2 x - 1)^2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2x)^2 + \frac{1}{2}$$

เพราะว่า $\qquad 0 \le (\cos 2x)^2 \le 1$

$$0 \le \frac{1}{2}(\cos 2x)^2 \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(\cos 2x)^2 + \frac{1}{2} \le 1$$

สรุป $\qquad \frac{1}{2} \le \sin^4 x + \cos^4 x \le 1$

หมายเหตุ $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1$ เมื่อ $x = 0$

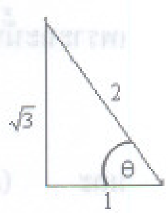
ตัวอย่างที่ 2.3.19 กำหนดให้ $x > 0$ และ $\tan(\arccos x) = \sin(\arctan\sqrt{3})$ ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{7}}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ 4. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้เหตุผลว่าโดเมนของ arccos คือ $[-1, 1]$ ก็ตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $\frac{\sqrt{7}}{2} > 1$ และ $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} > 1$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้



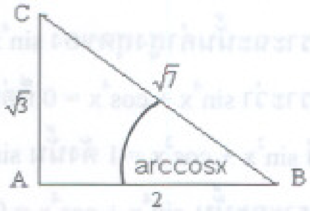
วิธีจริง $\theta = \arctan\sqrt{3}$, $\tan\theta = \sqrt{3}$ วาดรูปสามเหลี่ยมช่วยในการคำนวณ

จากรูปสามเหลี่ยมจะได้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะฉะนั้น $\theta = \arcsin(\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\sin(\arctan\sqrt{3}) \;=\; \sin(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan(\arccos x) \;=\; \sin(\arctan\sqrt{3}) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}$

$BC = \sqrt{3+4} \;=\; \sqrt{7}$



เพราะฉะนั้น $x \;=\; \cos(\arccos x) = \frac{AB}{BC} \;=\; \frac{2}{\sqrt{7}}$

ตัวอย่างที่ 2.3.20 กำหนดเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง ถ้า $A = \{\arcsin x \mid -1 \le x \le 1\}$

$B = \{\arccos x \mid -1 \le x \le 1\}$

$C = \{\arctan x \mid x$ เป็นจำนวนจริง$\}$

แล้ว $(A \cap C)' \cap B$ เท่ากับเซตใด

1. $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 2. $[0, \frac{\pi}{2})$

3. $(-\frac{\pi}{2}, 0]$ 4. $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามข้อนี้ต้องจำเกี่ยวกับ โดเมนและเรนจ์ของ arcsin, arccos และ arctan ให้ดีจะนำมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้ เมื่อ $-1 \le x \le 1$ จะได้ $0 \le \arccos x \le \pi$

เพราะฉะนั้น $B = \{\arccos x \mid -1 \le x \le 1\} = [0, \pi]$

เพราะว่า $(A \cap C)' \cap B \subset B$ เพราะฉะนั้น $(A \cap C)' \cap B \subset [0, \pi]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $-1 \le x \le 1$ เพราะฉะนั้น $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $A = \{\arcsin \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

เพราะว่า $C = \{\arctan x \mid x$ เป็นจำนวนจริง$\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

เพราะฉะนั้น $A \cap C \;=\; [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cap (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \;=\; (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$(A \cap C)' = (-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty)$

และ $(A \cap C)' \cap B \;=\; \left((-\infty, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \infty)\right) \cap [0, \pi] \;=\; [\frac{\pi}{2}, \pi]$

2.4 ปัญหาถูกหรือผิดกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. $\arccos(\cos x) = x$ สำหรับทุก x ที่เป็นจำนวนจริง
2. $\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$ ทุกค่า x และ y ที่เป็นจำนวนจริง และ $1 - xy \neq 0$
3. $\arcsin x = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ทุกค่า $x \in (-1, 1)$
4. $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\arccos\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{x^2}{2} - 1$ ทุกค่า $x \in [-2, 2]$
5. $\left(\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^{18} > \left(\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^{81}$
6. $\arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
7. ถ้า $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$ แล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมแหลม
8. สามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ แล้ว ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน
9. ถ้า $\sin x \cos y = 1$ แล้ว $|\sin x| = |\sin y|$
10. $\cos^4 x - \sin^4 x$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ -1
11. $f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ $\dfrac{3}{4}$
12. $\tan\theta < \cot\theta$ ทุกค่า $\theta \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$
13. $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$
14. $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, \infty]$
15. ถ้า $\cos(40° + A) + \cos(40° - A) = 0$ แล้ว $\cos A = 0$
16. $\arccos x \geq \arcsin x$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$
17. $\cos|x| = \cos x$ ทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริง
18. $\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \geq 2$ ทุกค่า $x \in (0, \pi)$
19. $\sin|x| \geq \sin x$ ทุกจำนวนจริง x
20. $f(x) = \sin(\arcsin x)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วง $[-1, 1]$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\arccos(\cos 2\pi) = \arccos(1) = 0 \neq 2\pi$
2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\arctan(2) + \arctan(3) > 0$

   แต่ $\arctan\left(\dfrac{2+3}{1-(2)(3)}\right) = \arctan\left(\dfrac{5}{-5}\right) = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4} < 0$
3. **ถูกต้อง** ให้ $x \in (-1, 1)$ และ $y = \arcsin x$ ดังนั้น $\sin y = x$

   $$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin y}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

   $$y = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$ สรุป $$\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \arcsin x$$
4. **ถูกต้อง** ให้ $x \in [-2, 2]$ จะได้ว่า

   $$\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\arccos\frac{x}{2}\right) = \cos\left(2\arccos\frac{x}{2}\right) = 2(\cos^2(\arccos\frac{x}{2})) - 1$$

   $$= 2(\cos(\arccos\frac{x}{2}))^2 - 1 = 2(\frac{x}{2})^2 - 1 = \frac{x^2}{2} - 1$$
5. **ถูกต้อง** เพราะว่า $0 < \cos\dfrac{\pi}{18} < 1$ และ $f(x) = \left(\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด

   เพราะฉะนั้น $f(18) > f(81)$ ดังนั้น $\left(\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^{18} > \left(\cos\dfrac{\pi}{18}\right)^{81}$
6. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + \arctan\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) + \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
7. **ผิด** เพราะว่า $\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$

   เพราะฉะนั้นมุมใหญ่ที่สุดคือมุม C

   เพราะว่า $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4$

   เพราะฉะนั้น $a = 2k , b = 3k , c = 4k$

   เพราะว่า $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{4k^2+9k^2-16k^2}{12k^2} = -\dfrac{1}{4}$

   เพราะฉะนั้น $C > \dfrac{\pi}{2}$ สรุป ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน
8. **ถูกต้อง** เพราะว่า $a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ เพราะฉะนั้น $\sin A = ka , \sin B = kb , \sin C = kc$

   เพราะว่า $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C$ เพราะฉะนั้น $k^2a^2 + k^2b^2 < k^2c^2$

   $$a^2 + b^2 < c^2$$

เพราะว่า $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ เพราะฉะนั้น $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$

เพราะฉะนั้น $C > \dfrac{\pi}{2}$ ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน

9. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\sin x \cos y = 1$

$|\sin x| \cdot |\cos y| = 1$

และ $0 \le |\sin x| \le 1, 0 \le |\cos y| \le 1$ ดังนั้น $|\sin x| = 1$ และ $|\cos y| = 1$

10. **ถูกต้อง** $\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \cos^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

เพราะฉะนั้น $\cos^4 x - \sin^4 x$ มีค่าต่ำสุดเท่ากับ -1

11. **ถูกต้อง** $f(x) = 1 + \cos x + \cos^2 x = (\cos^2 x + \cos x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} = (\cos x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$

12. **ถูกต้อง** $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $\sin\theta < \cos\theta$

$\rightarrow$ $\sin^2\theta < \cos^2\theta$

$\rightarrow$ $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} < \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\rightarrow$ $\tan\theta < \cot\theta$

13. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$

เพราะฉะนั้น $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$

14. **ถูกต้อง** เมื่อ $a, b \in [1, \infty)$ และ $a > b$

$\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

$\arcsin(\dfrac{1}{a}) < \arcsin(\dfrac{1}{b})$ ($\therefore$ arcsin เป็นฟังก์ชันเพิ่ม)

$f(a) < f(b)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \arcsin(\dfrac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1, \infty]$

15. **ถูกต้อง** $\cos(40 + A) = \cos 40 \cos A - \sin 40 \sin A$

$\cos(40 - A) = \cos 40 \cos A + \sin 40 \sin A$

$\cos(40 + A) + \cos(40 - A) = 2 \cos 40 \cos A$

$0 = 2 \cos 40 \cos A$

เพราะว่า $\cos 40 \ne 0$ เพราะฉะนั้น $\cos A = 0$

16. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\arcsin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{3}$ และ $\arccos(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{6} \not\geq \dfrac{\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น $\arccos x \ge \arcsin x$ ทุกค่า $x \in [-1, 1]$ จึงผิด

17. ถูกต้อง เพราะว่า $\cos(-x) = \cos x$

เพราะฉะนั้น $\cos|x| = \cos x$ ทุกจำนวนจริง x

18. ถูกต้อง เพราะว่า $\operatorname{cosec}x = \frac{1}{\sin x}$ หาค่าได้ทุกค่า $x \in (0, \pi)$

และ $\left(\sin x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 \geq 0$

$$\sin^2 x - 2 + \frac{1}{\sin^2 x} \geq 0$$

$$\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geq 2$$

$$\sin^2 x + \operatorname{cosec}^2 x \geq 2$$

19. ผิด ตัวอย่างเช่น $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ แต่ $\sin\left(\left|-\frac{3\pi}{3}\right|\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$

20. ถูกต้อง $a, b \in [-1, 1]$

$$f(a) = f(b)$$

$$\sin(\arcsin a) = \sin(\arcsin b)$$

$$\arcsin a = \arcsin b \quad (\therefore \sin \text{ เป็นฟังก์ชัน } 1-1 \text{ บนช่วง } [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}])$$

$$a = b \quad (\therefore \arcsin \text{ เป็นฟังก์ชัน } 1-1 \text{ บนช่วง } [-1, 1])$$

สรุป $f(x) = \sin(\arcsin x)$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ บนช่วง $[-1, 1]$

การเรียงลำดับ $\log_2 3$, $\log_3 4$, $\log_4 5$, $\log_5 6$ จากน้อยไปมาก

$$\log_2 3 = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0.477}{0.30103} = 1.5845596$$

$$\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{2\log 2}{\log 3} = \frac{0.60206}{0.477} = 1.2621802$$

$$\log_4 5 = \frac{\log 5}{\log 4} = \frac{1-\log 2}{2\log 2} = \frac{1-0.30103}{0.60206} = \frac{0.69997}{0.60206} = 1.1626249$$

$$\log_5 6 = \frac{\log 6}{\log 5} = \frac{\log 2+\log 3}{1-\log 2} = \frac{0.30103+0.477}{1-0.30103} = \frac{0.77803}{0.69997} = 1.111519$$

เพราะว่า $1.111519 < 1.1626249 < 1.2621802 < 1.5845596$

เพราะฉะนั้น $\log_5 6 < \log_4 5 < \log_3 4 < \log_2 3$

2.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. A , B เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย

   ถ้าคอร์ด AB รองรับมุมที่จุดศูนย์กลาง θ เรเดียน เมื่อ $\theta > 0$ แล้วคอร์ด AB ยาวเท่ากับเท่าใด

   1. $2(\sqrt{1+\cos\theta})$ 2. $\sqrt{2}\,(\sqrt{1+\cos\theta})$

   3. $2(\sqrt{1-\cos\theta})$ 4. $\sqrt{2}\,(\sqrt{1-\cos\theta})$

2. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีด้าน AC = 12 , AB = 21 มุม ABC = 30 องศา

   แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

   1. 36 ตารางหน่วย 2. 63 ตารางหน่วย

   3. $36\sqrt{3}$ ตารางหน่วย 4. $63\sqrt{2}$ ตารางหน่วย

3. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = 1$ แล้ว A + B เท่ากับเท่าใด

   1. $\dfrac{\pi}{6}$ 2. $\dfrac{\pi}{4}$

   3. $\dfrac{\pi}{3}$ 4. $\dfrac{\pi}{2}$

4. ในสามเหลี่ยม ABC กำหนดให้ A = 60 องศา, B = 30 องศา และ $a - b = 5(\sqrt{3} - 1)$

   ความยาวด้าน AB เท่ากับเท่าใด

   1. 5 2. 10

   3. $5\sqrt{3}$ 4. $10\sqrt{3}$

5. กำหนดให้ $\sin A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos A = \dfrac{1}{2}$ ค่าทั่วไปของมุม A เท่ากับเท่าใด เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

   1. $2n\pi - \dfrac{\pi}{3}$ 2. $2n\pi + \dfrac{5\pi}{3}, 2n\pi + \dfrac{4\pi}{3}$

   3. $2n\pi + \dfrac{\pi}{3}, 2n\pi + \dfrac{5\pi}{3}$ 4. $2n\pi + \dfrac{2\pi}{3}, 2n\pi + \dfrac{5\pi}{3}$

6. เซตคำตอบของสมการ $\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta = \cos\theta$ เมื่อ $0 \le \theta \le 2\pi$ คือข้อใด

   1. $\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\}$

   2. $\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}\}$

   3. $\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \pi, \dfrac{4\pi}{3}\}$

   4. $\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\}$

7. สี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่ง มีด้านที่ประกอบมุม 135° มีความยาวเท่ากับ 5 และ 10 เซนติเมตร ความยาวของเส้นทแยงมุมเส้นที่สั้นของสี่เหลี่ยมด้านขนานเส้นนี้ยาวเท่ากับเท่าใด

1. $125-50\sqrt{2}$ 3. $75\sqrt{2}$

3. $5\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ 4. $5\sqrt{5+2\sqrt{2}}$

8. ถ้าเส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานยาว 6 และ 10 เซนติเมตรตัดกันเป็นมุม 60° แล้ว ความยาวของเส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้ยาวเท่ากับเท่าใด

1. $14+2\sqrt{19}$ 2. $7+\sqrt{19}$

3. 68 4. 26

9. กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มีด้าน AB ยาว $\sqrt{12}$ เซนติเมตร ด้าน AC ยาว $\sqrt{3}$ เซนติเมตร และมุม ABC กาง 45 องศา พื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่าใด

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ 2. $2(\sqrt{3}+1)$

3. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ 4. $\sqrt{3}+1$

10. ถ้า $\dfrac{\cos^2\theta+\cos^2\theta\tan^2\theta}{\cot^2\theta}=1$ เมื่อ $0<\theta<\pi$ แล้ว θ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{3\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$

3. $\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ 4. $-\frac{\pi}{4},-\frac{3\pi}{4}$

เฉลยคำตอบ 1. (4) 2. (2) 3. (4) 4. (2) 5. (3)

6. (1) 7. (3) 8. (1) 9. (3) 10. (3)

การเรียงลำดับ $3^{\frac{1}{3}}$, $4^{\frac{1}{4}}$, $5^{\frac{1}{5}}$ จากน้อยไปมาก

$$81>64 \quad 1024>625$$
$$3^4>4^3\ ,\ 4^5>5^4$$
$$(3^4)^5>(4^3)^5\ ,\ (4^5)^3>(5^4)^3$$
$$3^{20}>4^{15}>5^{12}$$
$$\sqrt[60]{3^{20}}>\sqrt[60]{4^{15}}>\sqrt[60]{5^{12}}$$
$$3^{\frac{1}{3}}>4^{\frac{1}{4}}>5^{\frac{1}{5}}$$

บทที่ 3
เมทริกซ์และค่ากำหนด

3.1 สรุปเนื้อหา

1. **เมทริกซ์**

เมทริกซ์คือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นำเอาจำนวนเลขมาเรียงกันในแนวแถวและหลัก

ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}$

ถ้าเมทริกซ์ใดมีสมาชิกอยู่ m แถวและ n หลัก เราเรียกเมทริกซ์ดังกล่าวว่า เมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$

หรือ $m \times n$ เมทริกซ์ และใช้สัญลักษณ์ $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ หรือ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

โดยที่ a_{11} หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 1 หลักที่ 1

a_{23} หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ 2 หลักที่ 3

a_{ij} หมายถึงสมาชิกที่อยู่ในแถวที่ i หลักที่ j

2. การเท่ากันของเมทริกซ์ เมทริกซ์ A เท่ากับเมทริกซ์ B

ก็ต่อเมื่อ 1. A และ B ต้องมีมิติเท่ากัน

และ 2. สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต้องเท่ากัน

3. **เมทริกซ์จัตุรัส** คือเมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและหลักเท่ากัน

นั่นคือ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$

4. **เมทริกซ์ศูนย์** คือเมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์

สัญลักษณ์ที่ใช้แทนเมทริกซ์ศูนย์คือ $\underline{O}$ หรือ $[0]_{m \times n}$

5. **เมทริกซ์เอกลักษณ์**

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส เรียกสมาชิกในแนวทแยงมุมจากซ้ายบนลงมาขวาล่าง ว่าสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

ถ้าสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักของเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ มีค่าเท่ากับ 1 ทุกตัว โดยที่สมาชิกอื่นๆ เป็นศูนย์หมดเรียกเมทริกซ์เหล่านั้นว่า เมทริกซ์เอกลักษณ์ และใช้สัญลักษณ์ I_n แทน

เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $n \times n$ ตัวอย่างเช่น $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. การบวกเมทริกซ์ ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน A + B คือเมทริกซ์ที่สมาชิกแต่ละตัวเกิดจากสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B บวกกัน

   ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

7. **สมบัติการบวกของเมทริกซ์**

   ถ้า M เป็นเซตของเมทริกซ์มิติ $m \times n$, S จะมีสมบัติต่อไปนี้

   1. มีสมบัติปิดสำหรับการบวก $[A + B \in M]$
   2. มีสมบัติการสลับที่สำหรับการบวก $[A + B = B + A]$
   3. มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม $[(A + B) + C = A + (B + C)]$
   4. มีเอกลักษณ์การบวก $[\underline{0} + A = A + \underline{0} = A]$ เรียก $\underline{0}$ ว่าเอกลักษณ์การบวก
   5. มีอินเวอร์สการบวก $[A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}]$ เรียก $-A$ ว่าอินเวอร์สการบวกของ A

8. การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ ถ้า c เป็นจำนวนจริงใดๆ cA คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ c คูณสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์ A นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$

ข้อควรจำ ถ้า c , d เป็นจำนวนจริงใดๆ A และ B เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ จะได้

1. $1A = A$
2. $(-1)A = -A$
3. $(cd)A = c(dA)$
4. $c(A + B) = cA + cB$
5. $(c + d)A = cA + dA$

9. การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

   การคูณเมทริกซ์แถวกับเมทริกซ์หลัก $[2][3] = [(2)(3)] = [6]$

$$[2 \ \ 4]\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = [(2)(3) + (4)(5)] = [26]$$

$$[2 \ \ 4 \ \ 7]\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = [(2)(3) + (4)(5) + (7)(1)] = [33]$$

หมายเหตุ $A_{m \times n} \cdot B_{n \times k} = C_{m \times k}$ สมาชิก c_{ij} เกิดจากแถวที่ i ของ A คูณกับหลักที่ j ของ B

ตัวอย่าง การหาผลคูณ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

ให้ใช้แนวคิดเป็น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [1\ 2]\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} & [1\ 2]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \\ [3\ 4]\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} & [3\ 4]\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(4)+(2)(6) & (1)(5)+(2)(7) \\ (3)(4)+(4)(6) & (3)(5)+(4)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 19 \\ 36 & 43 \end{bmatrix}$

10. **สมบัติของการคูณเมทริกซ์**

1. มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม กล่าวคือ ถ้า A , B และ C เป็นเมทริกซ์ที่คูณกันได้

   (AB) C = A (BC)

2. การมีเอกลักษณ์ ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ $n \times n$ ถ้า AI = IA = A เรียก I ว่าเมทริกซ์เอกลักษณ์สำหรับการคูณ
3. มีสมบัติการแจกแจง ถ้า A , B และ C เป็นเมทริกซ์ที่คูณกันได้

   จะได้ว่า A(B + C) = AB + AC และ (B + C)A = BA + CA

ข้อควรจำ AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

11. ทรานสโพสของเมทริกซ์ ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$

ทรานสโพสของ A คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการนำเอาสมาชิกในแถวที่ i มาเป็นหลักที่ i และนำเอาสมาชิกในหลักที่ j มาเป็นแถวที่ j ทรานสโพสของ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย A^t

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ จะได้ $A^t = [a_{ji}]_{n \times m}$

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

คุณสมบัติที่สำคัญ
1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(A - B)^t = A^t - B^t$
5. $(AB)^t = B^t A^t$

ดีเทอร์มินันต์หรือค่ากำหนด (Determinant)

ดีเทอร์มินันต์ คือ ฟังก์ชันค่าจำนวนจริง (หรือค่าเชิงซ้อน) ที่มีโดเมนเป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัส ดีเทอร์มินันต์ของ A เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ det(A) , detA หรือ | A |

วิธีการหาดีเทอร์มินันต์ มี 2 วิธี ดังต่อไปนี้

1. หาโดยใช้วิธีคูณทแยง

1.1 ถ้าเป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

บน = bc

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ [= ล่าง - บน = ลบ = ad - bc]

ล่าง = ad

$\det(A) = ad - bc$

1.2 ถ้าเป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 เราสามารถหาดีเทอร์มินันต์โดยการเขียนหลักที่ 1 และ 2 เพิ่มเติมต่อไปอีก 2 หลัก หลังจากใช้หลักการคูณทแยงนำจำนวนทั้งหมดมาบวกกันและนำจำนวนที่เกิดจากการคูณทแยงขึ้นไปลบออกจากผลรวมของการคูณทแยงลง ตัวอย่างเช่น

$3 + 16 + 12 = 31$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = 26 - 31 = -5$$

$6 + 8 + 12 = 26$

2. หาโดยใช้โคแฟกเตอร์

การหาดีเทอร์มินันต์โดยวิธีนี้ต้องกำหนดความหมายของโคแฟกเตอร์ และไมเนอร์ ของเมทริกซ์ ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติมากกว่า 1 และ a_{ij} เป็นสมาชิกของเมทริกซ์ A

$M_{ij}(A)$ ไมเนอร์ของ a_{ij} คือดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $M_{22}(A) = \det(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}) = 8 - 6 = 2$

โคแฟกเตอร์ของ a_{ij} คือ ผลคูณระหว่าง $(-1)^{i+j}$ กับ M_{ij} แทนด้วย $C_{ij}(A)$ หรือ C_{ij}

ตัวอย่าง ให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $C_{22}(A) = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (2) = 2$

3. การหาดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ A สามารถกระทำได้โดยการเลือกแถวใดแถวหนึ่งในเมทริกซ์ A ขึ้นมา และหาโคแฟกเตอร์ของสมาชิกแต่ละตัวในแถวนั้น ถ้านำสมาชิกแต่ละตัวในแถวดังกล่าวคูณกับโคแฟกเตอร์ของสมาชิกนั้นแล้วนำมาบวกกันทั้งหมด ผลที่ได้ก็คือดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ A นั่นคือ ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$

โดยการเลือกแถวที่ k จะได้ว่า $\det(A) = a_{k1} C_{k1} + a_{k2} C_{k2} + \ldots + a_{kn} C_{kn}$

ตัวอย่าง ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \det(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}) = -4$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2} \det(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}) = -4$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3} \det(\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}) = 10$$

$$\det(A) = (-4)(4) + (7)(-4) + (6)(10) = -16 - 28 + 60 = 16$$

13. สมบัติของดีเทอร์มินันต์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ $n \times n$

1. $\det(A) = \det(A^t)$ 2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A^m) = [\det(A)]^m$ 4. $\det(kA) = k^n \det(A)$
5. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

14. อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส อินเวอร์สเมทริกซ์สำหรับการคูณของเมทริกซ์ A คือ A^{-1}

เมื่อ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ถ้าเมทริกซ์ A หาอินเวอร์สได้ เรียกเมทริกซ์ A ว่า **เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน** หรือ **นอนซิงกูลาร์เมทริกซ์** (nonsingular matrix)

ถ้าเมทริกซ์ A หาอินเวอร์สไม่ได้ เรียกเมทริกซ์ A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน** หรือ **ซิงกูลาร์เมทริกซ์** (singular matrix)

วิธีการหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

1. ถ้าเมทริกซ์ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $\det(A) = ad - bc$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{d}{ad-bc} & \dfrac{-b}{ad-bc} \\ \dfrac{-c}{ad-bc} & \dfrac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติมากกว่า 2×2

ในกรณีที่เมทริกซ์จัตุรัสที่ต้องการหาอินเวอร์สมีมิติมากกว่า 2×2 ต้องหาโคแฟกเตอร์เมทริกซ์ และ เมทริกผูกพันก่อน

1. **โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ ของเมทริกซ์ A** โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของเมทริกซ์ A ก็คือเมทริกซ์ Cof(A) ที่มีมิติเท่ากับ A และสมาชิก c_{ij} ของ Cof(A) คือโคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $C_{11}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของ a_{11}

$C_{12}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของ a_{12}

$C_{ij}(A)$ คือ โคแฟกเตอร์ของ a_{ij}

ดังนั้น โคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A คือ $\mathrm{Cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$

2. **เมทริกซ์ผูกพัน** (adjoint matrix) ของ A คือ ทรานสโพสของโคแฟกเตอร์เมทริกซ์ของ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย adjA เพราะฉะนั้น $\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$

การหา adjA ตามที่กล่าวมาแล้ว เราสามารถนำ adjA มาช่วยหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท ถ้า $\det(A) \neq 0$ จะได้ว่า $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}A$

หมายเหตุ จากหลักการหาอินเวอร์สของ A ดังกล่าวมีข้อสังเกตที่นักเรียนควรสนใจดังนี้

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 1. ไม่จำเป็นต้องมี A^{-1} เสมอไป

และ 2. จะมี A^{-1} ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$

สรุปคุณสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับดีเทอร์มินันต์

ดีเทอร์มินันต์ เป็นฟังก์ชันมีโดเมน(Domain) เป็นเซตของเมทริกซ์จัตุรัส และเรจน์ (Range) เป็นจำนวนจริง (จำนวนเชิงซ้อน)

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้วดีเทอร์มินันต์ของ A เขียนแทนด้วย det(A) หรือ |A|

หมายเหตุ ดีเทอร์มินันต์ไม่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 เพราะว่ามี $A \neq B$ และ $\det(A) = \det(B)$

ตัวอย่างเช่น $\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}) = 0$ และ $\det(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}) = 0$ แต่ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ไม่เท่ากับ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

1. ถ้า $A = [a]$ จะได้ว่า $\det(A) = a$
2. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\det(A) = ad - bc$
3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

ในกรณีที่จะคำนวณหา det(A) ซึ่งมีมิติ 3×3 อาจทำให้ง่ายขึ้น โดยอาศัยการคูณทแยง โดยที่มีหลักการคูณดังนี้

ให้เขียนเพิ่มหลักที่ 4 และ หลักที่ 5 โดยมีสมาชิกเป็นหลักที่ 1 และ 2 ตามลำดับแล้วคูณทแยงตามหัวลูกศร โดยคูณลงเป็นบวกคูณขึ้นเป็นลบ

ผลบวกบน

$$a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}$$

$$\det(A) = \det(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}) = \left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right]\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

ผลบวกล่าง

= ผลบวกล่าง – ผลบวกบน

= ล – บ

= ลบ

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

4. คุณสมบัติของดีเทอร์มินันต์

$\det(A) = a_{i1}C_{i1}(A) + a_{i2}C_{i2}(A) + \dots + a_{in}C_{in}(A) \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$

$\det(A) = a_{1j}C_{1j}(A) + a_{2j}C_{2j}(A) + \dots + a_{nj}C_{nj}(A) \qquad j = 1, 2, 3, \dots, n$

1. ถ้า A = B แล้ว det(A) = det(B)
2. ถ้า det(A) = det(B) แล้วไม่จำเป็นที่ A จะเท่ากับ B
3. $\det(A) = \det(A^t)$
4. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส โดยที่แถวสองแถว (หรือหลักสองหลัก) ซ้ำกันแล้ว det(A) = 0
5. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิดจากการคูณแถวใดแถวหนึ่ง (หรือ หลักใดหลักหนึ่ง) ของ A ด้วยค่าคงที่ k แล้ว det(B) = k det(A)
6. ถ้า A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ B = kA แล้ว $\det(B) = k^n \det(A)$
7. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ B เป็นเมตริกซ์ซึ่งเกิดจากการสลับแถวคู่ใดคู่หนึ่ง (หรือ หลักคู่ใดคู่หนึ่ง) ของ A แล้ว det(B) = – det(A)
8. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส และ B เป็นเมตริกซ์ที่เกิด A โดยการนำ k เท่าของแถวที่ i ไปบวกกับแถวที่ j ของ A แล้ว det(B) = det(A)
9. ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ แล้ว det(AB) = det(A) det(B) แต่ det(A + B) ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ det(A) + det(B)
10. เมตริกซ์จัตุรัส A เรียกว่า เมตริกซ์สามเหลี่ยม ก็ต่อเมื่อสมาชิกส่วนบนของเส้นทแยงมุมหลัก หรือส่วนล่างของเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์ทั้งหมด
11. ถ้า A เป็นเมตริกซ์สามเหลี่ยมแล้ว det(A) = ผลคูณของสมาชิกในแนวเส้นทแยงมุมหลัก
12. ถ้า A เป็นเมตริกซ์จัตุรัส แล้วจะได้ว่า A เป็นเมตริกซ์นอนซิงกูลาร์ ก็ต่อเมื่อ $\det(A) \neq 0$
13. ถ้า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ แล้ว $\det(A^{-1})\det(A) = 1$
14. $\det(\underline{O}) = 0$, $\det(I_n) = 1$
15. ถ้าบางแถว(หรือบางหลัก)ของ A เป็นศูนย์ทุกตัว แล้ว det(A) = 0
16. ถ้ามี 2 แถว(หรือ 2 หลัก)ของ A เป็นสัดส่วนกันทุกคู่ แล้ว det(A) = 0

3.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใช้การแทนค่าก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 3.2.1 ค่าของดีเทอร์มินันต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. abc
3. $(a-b)(b-c)(c-a)$
4. $abc\,(a-b)(b-c)(c-a)$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a = 1, b = 2, c = 3$ จะได้

$$\det(\begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(4-9) - 1\,(2-3) + 6\,(3-2) = -5 + 1 + 6 = 2$$

ค่าแต่ละตัวเลือกเป็นดังนี้

1. 0
2. $abc = 6$
3. $(a-b)(b-c)(c-a) = (1-2)(2-3)(3-1) = 2$
4. $abc\,(a-b)(b-c)(c-a) = 12$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\det(\begin{bmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{bmatrix}) = 1\begin{vmatrix} b & ca \\ c & ab \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} 1 & ca \\ 1 & ab \end{vmatrix} + bc\begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix} = ab^2 - ac^2 - a^2b + a^2c + b^2c - bc^2$

$= \mathbf{abc} - a^2b - ac^2 + a^2c - b^2c + ab^2 + bc^2 - \mathbf{abc} \quad = a(bc - ab - c^2 + ac) - b(bc - ab - c^2 + ac)$

$= (a-b)(bc - ab - c^2 + ac) \quad = (a-b)(b-c)(c-a)$

2. ใช้เครื่องหมายของค่าดีเทอร์มินันต์ช่วยในการตัดตัวเลือก ตัวอย่างเช่น

เพราะว่า $\det(A) = \det(A^t)$, $\det(AA^{-1}) = 1$

เพราะฉะนั้นเครื่องหมายของ $\det(A)$ และ $\det(A^t)$ ต้องเหมือนกัน

เพราะว่า $(\det(A))(\det(A^{-1})) = 1$ เพราะฉะนั้น $|\det(A)| \geq 1 \leftrightarrow |\det(A^{-1})| \geq 1$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 กำหนด $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(A^t)$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{38}$
2. 38
3. -38
4. $\frac{1}{38}$

การตัดตัวเลือก $\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 3(0-12)-4(15-12)+(10-0) = -36-12+10 = -38$

$\det(A^{-1}) = -38$

เพราะฉะนั้น $\det(A^t) = \det(A) < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\det(A^t) = \det(A) = \dfrac{1}{\det(A^{-1})} = \dfrac{1}{38}$

ตัวอย่างที่ 3.2.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ และ $(AB)^t = (AB)^{-1}$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(A) = \det(B)$
2. $\det(A)\det(B) > 0$
3. $\det(A)\det(B) < 0$
4. $\det(A^2) = \det(B^2)$

การตัดตัวเลือก ถ้าตัวเลือก 1. $\det(A) = \det(B)$ ถูกต้อง จะได้ว่า

$\det(A)\det(A) = \det(B)\det(B)$

$\det(A^2) = \det(B^2)$

ดังนั้น ตัวเลือก 4. $\det(A^2) = \det(B^2)$ จะถูกต้องด้วย เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 5-4 = 1$

เพราะว่า $(AB)^t = (AB)^{-1}$

$\det((AB)^t) = \det((AB)^{-1})$

$\det((AB)) = \dfrac{1}{\det(AB)}$

$\det(A)\det(B) = \dfrac{1}{\det(A)\det(B)}$

$\det(B) = \dfrac{1}{\det(B)}$

$(\det(B))^2 = 1$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 4. $\det(A^2) = \det(B^2)$ ถูกต้อง

หมายเหตุ ถ้า $\det(B) = 1$ แล้ว $\det(A)\det(B) = 1 > 0$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด

ถ้า $\det(B) = -1$ แล้ว $\det(A)\det(B) = -1 < 0$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 2. ผิด

3. ใช้มิติของเมทริกซ์ช่วยในการตัดตัวเลือก หรือ ทำการคำนวณสมาชิกบางตัวช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 3.2.4 ผลคูณของ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} 24 & 48 & 6 \\ 28 & 24 & 9 \\ -18 & 4 & -7 \end{bmatrix}$　　2. $\begin{bmatrix} 12 & 18 & 3 \\ 30 & 24 & 9 \\ -9 & 3 & -6 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$　　4. $\begin{bmatrix} 24 & 6 \\ 28 & 9 \end{bmatrix}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์เป็นการคูณของเมทริกซ์มิติ $(3 \times 3)(3 \times 2)(2 \times 3) = 3 \times 3$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้ ต่อไปดูสมาชิกตัวแรกสุดของผลคูณก็พอ

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 14 & 4 & 5 \\ -4 & 8 & -2 \\ 7 & 10 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & - & - \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง ต้องคูณกันออกมาดูจริงๆ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 10 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 10 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 48 & 6 \\ 28 & 24 & 9 \\ -18 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.5 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ และ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$

ค่าของ $(x+y)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 0　　2. 1

3. $1 + 2\sin\theta$　　4. $1 + 2\cos\theta$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$　$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

จาก　$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$

$$\sqrt{2}\,A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{2}\,B$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x+y = 1$$

$$(x+y)^2 = 1$$

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{4}$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. 0
2. 1
3. $1 + 2\sin\theta = 1 + 2\sin\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$
4. $1 + 2\cos\frac{\pi}{4} = 1 + \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ และ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin^2\theta+\cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta+\cos^2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2\theta+\cos^2\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ เพราะฉะนั้น $x = 1$, $y = 0$ และ $(x+y)^2 = 1$

ตัวอย่างที่ 3.2.6 กำหนดให้ k เป็นจำนวนเต็ม และ $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ค่าของ P^k เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2k & 1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2k & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 0 & 2k \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ k แทนค่า $k = 1$ จะได้ $P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $P^1 = \begin{bmatrix} 1 & 2(1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ จริง

สมมติ $P^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $P^{n+1} = P^nP = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพราะฉะนั้น $P^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 3.2.7 กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $A^2 + A = \underline{O}$ และ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $ad + a + d + 1 = bc$
2. $ad + d + 1 = bc$
3. $ad + a + 1 = bc$
4. $ad + 1 = bc$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \underline{O}$

เพราะฉะนั้น $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ทำให้ $A^2 + A = \underline{O}$

และ A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์

แทนค่า $a = -1, b = 0, c = 0, d = -1$ ลงในแต่ละตัวเลือก

1. $ad + a + d + 1 = 0 = bc$
2. $ad + d + 1 = 1 \neq 0$
3. $ad + a + 1 = 1 \neq 0$
4. $ad + 1 = 2 \neq bc$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง
$$\begin{aligned} A^2 + A &= 0 \\ A^2 &= -A \\ A^{-1}A^2 &= (A^{-1})(-A) \\ A &= -I \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$a = -1, d = -1, b = c = 0$

3.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 3.3.1 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 12 & x+1 & 0 \\ 5 & -4 & x^2-1 \end{bmatrix}$

ค่าของ x ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เอกฐานจะอยู่ในเซตใดต่อไปนี้

1. $\{0, 1, 2, 3\}$
2. $\{0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\}$
3. $\{0, -\frac{1}{2}, -1, 1\}$
4. $\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** นำค่าจากตัวเลือกมาแทนในโจทย์ และใช้เหตุผลว่า เมทริกซ์เอกฐานคือเมทริกซ์ที่มีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากับ 0

แทนค่า x = 0 จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

หมายเหตุ เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน หรือ เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง มีค่าดีเทอร์มินันต์เท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

ดังนั้น det(A) = 0 เพราะฉะนั้น x = 0 ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

แทนค่า x = 1 จะได้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น det(A) = 0

แต่ 1 ไม่อยู่ในเซตตัวเลือก 2. ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

ทำนองเดียวกัน x = – 1 ทำให้ det(A) = 0 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

เพราะฉะนั้น $\det(A) = x^2(2x+1)(x^2-1)$

A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน ก็ต่อเมื่อ $\det(A) = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x^2(2x+1)(x^2-1) = 0$

ก็ต่อเมื่อ $x = 0, -\frac{1}{2}, 1, -1$

ค่าของ x ที่ทำให้ A เป็นเมทริกซ์เอกฐานจะอยู่ในเซต $\{0, -\frac{1}{2}, -1, 1\}$

ตัวอย่างที่ 3.3.2 เมทริกซ์ x ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ คือข้อใด

1. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้เหตุผลเกี่ยวกับค่า det ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \det(x) = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(-4)\det(x) = (-2)$$

$$\det(x) = \frac{1}{2}$$

ค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = -10$ 2. $\det\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}$

3. $\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -2$ 4. $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{11}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้การแทนค่า x ก็ได้ เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

เพราะว่า $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบ ได้เลย

วิธีจริง เพราะว่า $\begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}x = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $x = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{(-4)}\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-6 & -8\\ -2 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 2\\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$

หมายเหตุ $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ ออกสอบประจำนักเรียนควรจำสูตรนี้ให้ได้

ตัวอย่างที่ 3.3.3 กำหนด $A = \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}-1 & 6 & 7\end{bmatrix}$ จะได้ AB คือข้อใด

1. $[37]$
2. $\begin{bmatrix}-3 & 12 & 28\end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix}-3 & 18 & 21\\ -2 & 12 & 14\\ -4 & 24 & 28\end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix}-3 & -2 & -4\\ 18 & 12 & 24\\ 21 & 14 & 48\end{bmatrix}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้มิติของเมทริกซ์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้ $A_{3\times 1}\cdot B_{1\times 3} = (AB)_{3\times 3}$ เพราะฉะนั้นมิติของเมทริกซ์ที่เป็นคำตอบต้องเป็นมิติ 3×3 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ต่อไปดูสมาชิกบางตัวของ AB ก็พอ ตัวอย่างเช่น $AB = \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 18 & -\\ - & - & -\\ - & - & -\end{bmatrix}$

เมื่อได้ว่าแถวที่ 1 หลักที่ 2 ของ AB คือ 18 ก็เลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง ต้องคูณทั้งหมดออกมาดู $\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3 & 18 & 21\\ -2 & 12 & 14\\ -4 & 24 & 28\end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์นอนซิงกูลาร์และ $A^t = A^{-1}$ แล้ว det(A) เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. -1
3. 1
4. ± 1

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ ดังนั้น $\det(A) \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง จาก $A^t = A^{-1}$

$$\det(A^t) = \det(A^{-1})$$

$$\det(A) = \frac{1}{\det A}$$

$$(\det(A))^2 = 1$$

$$\det(A) = \pm 1$$

ตัวอย่างที่ 3.3.5 ถ้า $A\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 36 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว A^{-1} เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 18 & 32 \end{bmatrix}$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ใช้ค่า det ช่วยในการตัดตัวเลือกได้ จากโจทย์ $A\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 36 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A)\cdot\det(\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 36 & 64 \end{bmatrix}) = \det(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix})$$

$$(\det(A))\,(256-576) = 16$$

$$(\det(A))\,(-320) = 16$$

$$\det(A) = -\frac{1}{20}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = -20$$

ค่า det ของแต่ละตัวเลือก คือ 1. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}) = -2$ 2. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}) = -20$

3. $\det(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}) = -8$ 4. $\det(\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 18 & 32 \end{bmatrix}) = -80$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $A\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 36 & 64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A(4)\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} = (4)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ เพราะฉะนั้น $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3.3.6 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}$ และ $A^4 + I = O$ ค่าของ x เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{2}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การแทนค่าเพื่อตรวจสอบว่าใช้ได้หรือไม่

$x = 0\,;\ A = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ -\sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A^4 + I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq O$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.ทิ้ง

$$x = \frac{\pi}{4};\quad A = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},\ A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$A^4 + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2. เป็นคำตอบเลย

วิธีจริง

$$A^2 = \begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 x - \sin^2 x & 2\sin x\cos x \\ -2\sin x\cos x & \cos^2 x - \sin^2 x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 2x - \sin^2 2x & 2\sin 2x\cos 2x \\ -2\sin 2x\cos 2x & \cos^2 2x - \sin^2 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix}$$

เพราะว่า $A^4 + I = 0$ เพราะฉะนั้น $A^4 = -I$

$$\begin{bmatrix} \cos 4x & \sin 4x \\ -\sin 4x & \cos 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\cos 4x = -1$ และ $\sin 4x = 0$

$4x = \pi, 3\pi$ และ $4x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$

$x = \frac{\pi}{4}$ และ $x = 0, \frac{\pi}{4}$

สรุป $x = \frac{\pi}{4}$ เท่านั้น

ตัวอย่างที่ 3.3.7 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\left(\frac{1}{5}A\right)^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำถามแบบนี้ใช้ค่า det ตัดตัวเลือกได้เสมอ

$$\det(A) = \det(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}) = 8-3 = 5$$

หมายเหตุ ถ้า A มีมิติ $n \times n$ แล้ว $\det(kA) = k^n \det(A)$

$$\det(\frac{1}{5}A)^{-1} = \frac{1}{\det(\frac{1}{5}A)} = \frac{1}{(\frac{1}{5})^2 \det A} = \frac{1}{\frac{1}{25}(5)} = 5$$

ค่า det ของแต่ละตัวเลือก คือ 1. $\det(\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}) = 5$ 2. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}) = -2$

3. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}) = -2$ 4. $\det(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}) = -10$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{5}A = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

จากสูตร $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{5}A\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{8}{25}\right)-\left(\frac{3}{25}\right)}\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3.3.8 ให้ $A = \begin{bmatrix} \sin^2 x & 1 \\ 1 & 4\cos^2 x \end{bmatrix}$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

ถ้าอินเวอร์สการคูณของ A ไม่มีแล้วค่าของ x เป็นเท่าใด

1. $\frac{\pi}{2}$ หรือ $\frac{3\pi}{2}$ 2. π หรือ $\frac{3\pi}{2}$

3. $\frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{6}$ หรือ $\frac{3\pi}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากทฤษฎีบทที่กล่าวว่า A หาอินเวอร์สได้ $\longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

เพราะฉะนั้น อินเวอร์สของ A ไม่มี $\longleftrightarrow \det(A) = 0$

จากโจทย์ $\det(A) = \det\begin{bmatrix} \sin^2 x & 1 \\ 1 & 4\cos^2 x \end{bmatrix} = 4\sin^2 x\cos^2 x - 1$

นำค่า x ในตัวเลือกมาแทนค่าในสมาการ $4\sin^2 x\cos^2 x - 1$ เพื่อดูว่าเป็นศูนย์หรือไม่ก็จะได้คำตอบ

$x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\pi}{2} - 1 = -1 \neq 0 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

$x = \pi \longrightarrow 4\sin^2\pi\cos^2\pi - 1 = -1 \neq 0 \longrightarrow$ ตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

$x = \frac{\pi}{4} \longrightarrow 4\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{4} - 1 = 4(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) - 1 = 0 \longrightarrow$ เลือกตัวเลือก 3. ได้เลย

วิธีจริง

$$4\sin^2 x\cos^2 x - 1 = 0$$
$$(2\sin x\cos x)^2 = 1$$
$$\sin^2 2x = 1$$
$$\sin 2x = 1 \quad \text{หรือ} \quad \sin 2x = -1$$
$$2x = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots \quad \text{หรือ} \quad 2x = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$$

เพราะว่า $0 \leq x \leq \pi$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

ตัวอย่างที่ 3.3.9 กำหนด $A = \begin{bmatrix} -3 & x-1 \\ -x & x-2 \end{bmatrix}$ แล้ว det(A) มีค่าน้อยสุด เมื่อ x เท่ากับเท่าใด

1. -2
2. -1
3. 1
4. 2

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ก็สามมารถตัดตัวเลือกได้

1. $x = -2 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 6$
2. $x = -1 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 7$
3. $x = 1 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$
4. $x = 2 \longrightarrow \det(A) = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง $\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} -3 & x-1 \\ -x & x-2 \end{bmatrix}\right) = (-3)(x-2) - (x-1)(-x) = -3x + 6 + x^2 - x$

$= x^2 - 4x + 6 \qquad = (x^2 - 4x + 4) + 2 \qquad = (x-2)^2 + 2 \geq 2$

เพราะฉะนั้น det(A) มีค่าน้อยสุดเท่ากับ 2 เมื่อ x = 2

ตัวอย่างที่ 3.3.10 ค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ เท่ากับข้อใด

1. 0   2. 1

3. $a+b+c$ 4. $a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$

ตอบ 1.

แนวคิด โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a, b, c ดังนั้นแทนค่าบางค่าก็จะตัดตัวเลือกได้

ลองแทนค่า a = 1, b = 1, c = 1

จะได้ $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

ค่าแต่ละตัวเลือกเมื่อ a = 1 , b = 1 , c = 1 คือ   1. 0   2. 1   3. 3   4. 6

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \left|\begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}^t\right|$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$ (แถวที่ 3 ถูกบวกด้วยแถวที่ 2)

$= 0$ (แถวที่ 1 และ 3 เป็นสัดส่วนกัน)

หมายเหตุ โดยการกระจายก็จะได้ค่า det = 0 เหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 3.3.11 กำหนด $\begin{bmatrix} ab & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2 & -ab \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a^2 & -b^2 \\ b & a \end{bmatrix}$ ค่าของ det(A) เท่ากับเท่าใด

1. 0 　　　　2. 1

3. $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ 　　　　4. $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ a , b

แทนค่า a = 1, b = 1 จะได้ $\begin{bmatrix} ab & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2 & -ab \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a^2 & -b^2 \\ b & a \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น $\det(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix})\det(A) = \det(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$

$$(3)\det(A) = 2$$

$$\det(A) = \frac{2}{3}$$

ค่าแต่ละตัวเลือกคือ 1. 0 　2. 1 　3. $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2} = \dfrac{2}{3}$ 　4. $\dfrac{a+b}{a^2-ab+b^2} = 2$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\det(\begin{bmatrix} ab & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2 & -ab \end{bmatrix}) = -a^2b^2-(-a^2-b^2)(a^2+b^2) = -a^2b^2+a^4+2a^2b^2+b^4$

$$= a^4+a^2b^2+b^4$$

$$\det(\begin{bmatrix} a^2 & -b^2 \\ b & a \end{bmatrix}) = a^3+b^3$$

$$\det(\begin{bmatrix} ab & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2 & -ab \end{bmatrix} A) = \det(\begin{bmatrix} a^2 & -b^2 \\ b & a \end{bmatrix})$$

$$\det(\begin{bmatrix} ab & -a^2-b^2 \\ a^2+b^2 & -ab \end{bmatrix})\det(A) = a^3+b^3$$

$$\left(a^4+a^2b^2+b^4\right)\det(A) = a^3+b^3$$

$$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\det(A) = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$\det(A) = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.12 กำหนดระบบสมการ

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{z} = 2$$
$$\frac{4}{x}+\frac{2}{y} = 4$$
$$\frac{3}{y}+\frac{1}{z} = 2$$

ค่าของ $x^2+y^2+z^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{16}{9}$
2. $\frac{20}{9}$
3. $\frac{36}{9}$
4. $\frac{88}{9}$

ตอบ 4.

แนวคิด วิธีจริง แทนค่า $A=\frac{1}{x}, B=\frac{1}{y}, C=\frac{1}{z}$

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{z} = 2 \longrightarrow 2A+C = 2 \qquad (1)$$
$$\frac{4}{x}+\frac{2}{y} = 4 \longrightarrow 4A+2B = 4 \qquad (2)$$
$$\frac{3}{y}+\frac{1}{z} = 2 \longrightarrow 3B+C = 2 \qquad (3)$$

(1) – (3) ; $\quad 2A-3B = 0 \qquad (4)$

2(4) ; $\quad 4A-6B = 0 \qquad (5)$

(2) – (5) ; $\quad 8B = 4$

เพราะฉะนั้น $B=\frac{1}{2}$ และ $y=\frac{1}{B}=2 \qquad (*)$

$$y = 2 \longrightarrow \frac{4}{x}+\frac{2}{2} = 4 \longrightarrow \frac{4}{x} = 3 \longrightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$x = \frac{4}{3} \longrightarrow \frac{2}{(\frac{4}{3})}+\frac{1}{z} = 0 \longrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \longrightarrow z = 2$$

$$x^2+y^2+z^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2+2^2+2^2 = \frac{16}{9}+4+4 = \frac{88}{9}$$

การตัดตัวเลือก จาก (*) เมื่อได้ $y = 2$ เราสามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้ 2 ตัวคือ ตัวเลือก 1. และตัวเลือก 2. โดยใช้เหตุผลว่า $x^2+y^2+z^2 \geq y^2 = 2^2 = 4$

เพราะว่า $x \neq 0$, $z \neq 0$ เพราะฉะนั้น $x^2+y^2+z^2 > 4$ ทำให้ตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 3.3.13 ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $BA = A^{-1}$ และ $2B - 2A^{-1} + I = 0$ แล้วเมทริกซ์ B คือข้อใด

1. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$
2. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
3. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
4. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $A = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 2$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}$$

$$BA = A^{-1}$$

$$BAA^{-1} = A^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$B = (A^{-1})^2 = \left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}\right)^2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & a \\ -2a & a^2-2 \end{bmatrix}$$

เมื่อทำมาได้ถึงตรงนี้เราสามารถใช้ค่า det ช่วยในการตัดตัวเลือก ได้แล้ว

$$\det(B) = \det\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & a \\ -2a & a^2-2 \end{bmatrix}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \det\left(\begin{bmatrix} -2 & a \\ -2a & a^2-2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{16}(-2a^2 + 4 + 2a^2) = \frac{1}{4}$$

ค่า det แต่ละตัวเลือก คือ

1. $\det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}\det(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}$
2. $\det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}\det(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}$
3. $\det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}\det(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}) = -\frac{1}{4}$
4. $\det(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) = \frac{1}{4}\det(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}) = -\frac{3}{4}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ทำต่อไปได้ดังนี้ เพราะว่า $2B - 2A^{-1} + I = 0$

$$2\left(\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & a \\ -2a & a^2-2 \end{bmatrix}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix}\right) = -I$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{a}{2} \\ -a & \frac{1}{2}(a^2-2) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{a}{2}-1 \\ -a+2 & \frac{1}{2}(a^2-2)-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$-a+2 = 0$$

$$a = 2$$

เพราะฉะนั้น $B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3.3.14 กำหนด $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ AB คือข้อใด

1. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้ค่า det ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

$\det(A^{-1}) = \det(\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}) = -6 \longrightarrow \det(A) = -\frac{1}{6}$ $\det(B^{-1}) = \det(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}) = 1 \longrightarrow \det(B) = 1$

ค่า det ของโจทย์ $\det(AB) = \det(A)\det(B) = (-\frac{1}{6})(1) = -\frac{1}{6}$ และค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ

ตัวเลือก 1. $\det(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}) = -\frac{1}{6}$

ตัวเลือก 2. $\det(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

ตัวเลือก 3. $\det(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}) = \frac{14}{9} - \frac{10}{18} = 1$

ตัวเลือก 4. $\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \left(AB^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-6-0}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.15 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ และ $\det(AB + B) = -64$

เมทริกซ์ B^{-1} คือข้อใด

1. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $AB + B = AB + IB = (A + I)B$

$$-64 = \det(AB + B) = \det\left((A+I)B\right) = \det(A + I)\det(B)$$

เพราะว่า $A + I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

$$\det(A + I) = 14 + 2 = 16$$

เพราะฉะนั้น $-64 = (16)\det(B)$

เพราะฉะนั้น $\det(B) = -4$ ถึงตรงนี้มีเหตุผลที่จะตัดตัวเลือกได้แล้วโดยไม่ต้องรู้ค่า y

ค่า det ของโจทย์ $\det(B^{-1}) = \frac{1}{\det B} = -\frac{1}{4}$ และค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ

ตัวเลือก 1. $\det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

ตัวเลือก 2. $\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$

ตัวเลือก 3. $\det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \neq -\frac{1}{4}$

ตัวเลือก 4. $\det\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \neq -\frac{1}{4}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & y \end{bmatrix}$ และ $\det(B) = 4y - 12$

เพราะฉะนั้น $4y - 12 = -4$ ดังนั้น $y = 2$ และจะได้ว่า $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$B^{-1} = \frac{1}{\det(B)}\,\mathrm{adj}B = \frac{1}{8-12}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.16 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $AB = I$ ค่าของ $B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เราสามารถใช้มิติในการตัดตัวเลือกได้ เพราะว่ามิติของโจทย์ที่ถามคือ

$\left(B^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ มีมิติ $= (3 \times 3)(3 \times 1) = (3 \times 1)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า AB = I เพราะฉะนั้น B^{-1} = A และ $B^{-1}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\2 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\0\end{bmatrix}$

ตัวอย่างที่ 3.3.17 กำหนด $A = \begin{bmatrix}a & b & c & 0\\d & e & f & 0\\g & h & i & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}d & f & e & 0\\2a & 2c & 2b & 0\\g & i & h & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. det(B) = det(A)
2. det(B) = 2det(A)
3. det(B) = –2det(A)
4. det(B) = 4det(A)

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a , b , c , d , e , f , g , h , i เพราะฉะนั้นแทนค่าที่คิดเลขง่ายก็ตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่น a = 1 , b = 0 , c = 0 , d = 0 , e = 1 , f = 0, g = 0 , h = 0 , i = 1 จะได้

$$\det(A) = \det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\right) = 2$$

$$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right) = (-1)\det\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right) \quad \text{(สลับแถว 1 กับ แถว 3)}$$

$$= (-1)(-1)\det\left(\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right) = 8 \quad \text{(สลับแถว 1 กับ แถว 2 ,det = ผลคูณแนวทแยงมุม)}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง $$\det(B) = \det\left(\begin{bmatrix}d & f & e & 0\\2a & 2c & 2b & 0\\g & i & h & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right) = (2)\det\left(\begin{bmatrix}d & f & e & 0\\a & c & b & 0\\g & i & h & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$= (2)(-1)\det\left(\begin{bmatrix}d & e & f & 0\\a & b & c & 0\\g & h & i & 0\\0 & 0 & 0 & 4\end{bmatrix}\right) \quad \text{(สลับหลัก 2 กับ หลัก 3)}$$

$$\det(B) = (2)(-1)(-1)\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\right) \quad \text{(สลับแถว 1 กับ 2)}$$

$$= (2)(-1)(-1)(2)\det\left(\begin{bmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = 4\det(A)$$

ตัวอย่างที่ 3.3.18 กำหนด $0 \le \theta \le 2\pi$ และ $A = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & 0 & 0 \\ 1 & 2\sin\theta + 1 & 0 \\ 5 & -4 & \cos^2\theta + 1 \end{bmatrix}$

ค่าของ θ ที่ทำให้ A เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์อยู่ในเซตใด

1. $\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ 2. $\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\}$
3. $\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\}$ 4. $\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\det(A) = (\cos^2\theta)(2\sin\theta + 1)(\cos^2\theta + 1)$

เพราะฉะนั้นนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $\theta = 0$ $\det(A) = (\cos^2 0)(2\sin 0 + 1)(\cos^2 0 + 1) = 2 \neq 0$

เพราะฉะนั้น A ไม่เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์ เมื่อ $\theta = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

แทนค่า $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\det(A) = (\cos^2\frac{\pi}{2})(2\sin\frac{\pi}{2} + 1)(\tan^2\frac{\pi}{2} + 1) = 0$

เพราะฉะนั้น A เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์ เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $\det(A) = (\cos^2\theta)(2\sin\theta + 1)(\cos^2\theta + 1)$, $0 \le \theta \le 2\pi$

A เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์ $\leftrightarrow$ $\det(A) = 0$

$\leftrightarrow$ $(\cos^2\theta)(2\sin\theta + 1)(\cos^2\theta + 1) = 0$

$\leftrightarrow$ $\cos\theta = 0$ หรือ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

$\leftrightarrow$ $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ หรือ $\theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

เพราะฉะนั้น θ ที่ทำให้ A เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์อยู่ในเซต $\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\}$

หมายเหตุ det ของเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง(บน) เท่ากับผลคูณสมาชิกในแนวทแยงมุมหลัก

ตัวอย่างที่ 3.3.19 กำหนดให้ A , B , C เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2

$\det(-A^3) = \det(2\sqrt{2}\,I), \det(C^{-1}) = 4$ และ $AB^tC = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ ค่าของ det(B) เท่ากับเท่าใด

1. $\det(4I)$ 2. $\det(16I)$

3. $\det(A^3)$ 4. $\det(C^3)$

ตอบ 1.

แนวคิด

$$\det(-A^3) = \det(2\sqrt{2}\,I)$$

$$(-1)^2\det(A^3) = (2\sqrt{2})^2\det(I)$$

$$(\det(A))^3 = 8\,(1)$$

$$\det(A) = 3$$

$$\det(C^{-1}) = 4$$

$$\det(C) = \frac{1}{4}$$

$$\det(AB^tC) = \det\left(\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\right) = 12$$

$$\det(A)\det(B^t)\det(C) = 12$$

$$(3)(\det(B))\left(\frac{1}{4}\right) = 12$$

$$\det(B) = 16$$

ค่า det ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\det(4I) = 4^2(\det I) = 16$ 2. $\det(16I) = 16^2\det I = 256$

3. $\det(A^3) = 8$ 4. $\det(C^3) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$

เพราะฉะนั้นเลือก 1. เป็นคำตอบได้เลย

ตัวอย่างที่ 3.3.20 กำหนด $A = \begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}$ ถ้า $A^2 = \underline{O}$ แล้ว ค่าของ θ เท่ากับเท่าใด

1. 0 องศา 2. 180 องศา

3. 90 องศา 4. ไม่มีค่า θ ที่ทำให้ $A^2 = \underline{O}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** tan 90 หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

$A^2 = 0 \longrightarrow \det(A^2) = 0 \longrightarrow \det(A) = 0$

$0 = \det(A) = \det\left(\begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}\right) = \tan^2\theta - 1$

$\theta = 0 \longrightarrow \tan^2 0 - 1 = 0 - 1 = -1 \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$\theta = 180 \longrightarrow \tan^2 180 - 1 \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $A^2 = \begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}^2$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tan\theta & 1 \\ 1 & \tan\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tan^2\theta + 1 & 2\tan\theta \\ 2\tan\theta & 1 + \tan^2\theta \end{bmatrix}$$

เพราะว่าไม่มี θ ที่ทำให้ $\tan^2\theta + 1 = 0$

เพราะฉะนั้นไม่มีค่า θ ที่ทำให้ $A^2 = \underline{O}$

กำหนดให้ θ มีค่าน้อย (คิดในช่วง $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) จงเรียงลำดับค่า $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ และ θ

P เป็นจุดปลายส่วนโค้งยาว θ บนวงกลมหนึ่งหน่วย เพราะฉะนั้นพิกัด P คือ $(\cos\theta , \sin\theta)$

เพราะฉะนั้น $BP = \sin\theta$ ในสามเหลี่ยมมุมฉาก OBP ; $\frac{QA}{OA} = \frac{QA}{1}$ เพราะฉะนั้น $QA = \tan\theta$

เพราะว่า $\tan\theta < 1 \longrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} < 1 \longrightarrow \sin\theta < \cos\theta$..........(2)

เพราะว่า PB < ความยาวส่วนโค้ง AP < AQ เพราะฉะนั้น $\sin\theta < \theta < \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ....(1)

นอกจากนั้นเรายังพิสูจน์ได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

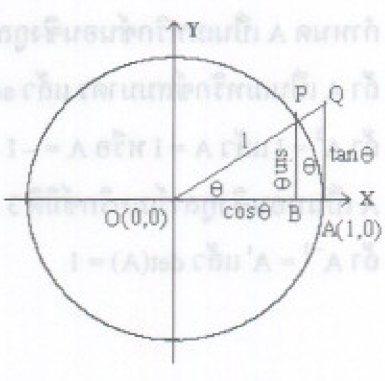
$\theta < \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \longrightarrow \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$ และ $\sin\theta < \theta \longrightarrow \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$....................(3)

$\lim\limits_{x\to 0} \cos\theta < \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$

$1 \leq \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$



3.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเมทริกซ์

1. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 แล้ว $\det(A) = \det(-A)$
2. ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส แล้ว $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
3. ถ้า A , B , C เป็นเมทริกซ์ 2×2 และ A , B , C เป็นเมทริกซ์ซิงกูลาร์ แล้ว $\det(ABC) = 0$
4. ถ้า $A^2 = I$ แล้ว $A = I$
5. ถ้า $A^2 = \underline{O}$ แล้ว $A = \underline{O}$
6. ถ้า A , B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 แล้ว $\det(-A) < 0$
7. ถ้า A , B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ $AB = \underline{O}$ แล้ว $A = \underline{O}$ หรือ $B = \underline{O}$
8. ถ้า A , B เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ แล้ว AB เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์
9. A , B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2×2 ถ้า $AB = \underline{O}$ และ $A \neq \underline{O}$ แล้ว $B = \underline{O}$
10. A , B , C เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 3×3 ถ้า $AB = AC$ และ $A \neq \underline{O}$ แล้ว $B = \underline{O}$
11. A , B เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ถ้า $AB = \underline{O}$ แล้ว A หรือ B เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์
12. A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส ; ถ้า $A^2 = A$ แล้ว $\det(A) = 1$
13. A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ ; ถ้า $A^2 = A$ แล้ว $\det(A) = 1$
14. A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส 3×3 และ $A \neq \underline{O}$

    ถ้า $A^3 = A$ แล้ว $A = I$
15. A , B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสและ $A \neq \underline{O}$, $B \neq \underline{O}$

    ถ้า $AB = BA$ แล้ว $A = I$ หรือ $B = I$
16. A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ 3×3 ; $\det(\operatorname{adj}A) = \det(\operatorname{adj}(A^T))$
17. A , B เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์ ; $\operatorname{adj}(AB) = (\operatorname{adj}B)(\operatorname{adj}A)$
18. กำหนด A เป็นเมทริกซ์นอนซิงกูลาร์

    ถ้า A เป็นเมทริกซ์สมมาตร แล้ว adjA เป็นเมทริกซ์สมมาตร
19. ถ้า $A^2 = I$ แล้ว $A = I$ หรือ $A = -I$
20. A เป็นนอนซิงกูลาร์เมทริกซ์มิติ 3×3

    ถ้า $A^{-1} = A^t$ แล้ว $\det(A) = 1$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเมทริกซ์

1. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\det(kA) = k^n\det(A)$ เมื่อ A มีมิติ $n \times n$

   เพราะฉะนั้น $\det(-A) = \det((-1)A) = (-1)^4\det(A) = \det(A)$

2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 1$, $\det(B) = 1$, $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   แต่ $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

3. **ถูกต้อง** เพราะว่าเมื่อ A , B , C เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์จะได้ว่า $\det(A) = \det(B) = \det(C) = 0$

   เพราะฉะนั้น $\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C) = 0$

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

5. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, $\det(A) = 4$, $\det(-A) = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 \not< 0$

7. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

   และ $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) \neq 0$ (A , B เป็นนอนซิงกูลาร์)

   เพราะฉะนั้น $\det(AB) \neq 0$ ดังนั้น AB เป็นเมทริกซ์นอนซิงกูลาร์

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $A \neq \underline{O}$

10. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

    $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $A \neq \underline{O}$

11. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\det(A)\det(B) = \det(AB) = \det(\underline{O}) = 0$

    เพราะฉะนั้น $\det(A) = 0$ หรือ $\det(B) = 0$ เพราะฉะนั้น A หรือ B เป็นซิงกูลาร์เมทริกซ์

12. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$ แต่ $\det(A) = 0$

13. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\det(A) \neq 0$ และ $\det(A)\det(A) = \det(A^2) = \det(A)$ เพราะฉะนั้น $\det(A) = 1$.

14. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$

15. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = BA$

16. ถูกต้อง เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A$ จะได้ $\text{adj}A = |A| \cdot A^{-1}$

และ $(A^t)^{-1} = \frac{1}{|A^t|} \cdot \text{adj}(A^t)$

$= \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}(A^t)$ จะได้ $\text{adj}(A^t) = |A|\,(A^t)^{-1}$

เพราะฉะนั้น $\det(\text{adj}A) = \det(|A| \cdot A^{-1}) = |A|^n \det(A^{-1}) = |A|^{n-1}$

$\det(\text{adj}A^t) = \det(|A| \cdot (A^t)^{-1}) = |A|^n \det((A^t)^{-1}) = \frac{|A|^n}{|A|} = |A|^{n-1}$

สรุป $\det(\text{adj}A) = \det(\text{adj}(A^t))$

17. ถูกต้อง เพราะว่า $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}A$, $B^{-1} = \frac{1}{|B|} \cdot \text{adj}\,B$

$A^{-1} \cdot B^{-1} = \left(\frac{1}{|A|} \cdot \text{adj}\,A\right)\left(\frac{1}{|B|} \cdot \text{adj}B\right) = \frac{1}{|A| \cdot |B|} \cdot (\text{adj}A)(\text{adj}B)$ ________________ (1)

$(BA)^{-1} = \frac{1}{|BA|} \text{adj}(BA)$

$A^{-1}B^{-1} = \frac{1}{|B| \cdot |A|} \cdot \text{adj}(BA)$ ________________ (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $(\text{adj}A)(\text{adj}B) = \text{adj}(BA)$

18. ถูกต้อง $\text{adj}A = |A| \cdot A^{-1}$

$(\text{adj}A)^t = (|A| \cdot A^{-1})^t = |A|(A^{-1})^t$

$= |A| \cdot (A^t)^{-1} = |A| \cdot (A)^{-1}$ $(\because A^t = A)$

$= \text{adj}A$

19. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

20. ผิด ตัวอย่างเช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$ แต่ $\det(A) = -1$

3.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

   ค่าของ det(AB) เท่ากับเท่าใด

   1. $\cos 2\theta \cos 4\theta$ 2. $-\cos 2\theta \cos 4\theta$

   3. $\sin 2\theta \sin 4\theta$ 4. $-\sin 2\theta \sin 4\theta$

2. กำหนดให้ A , B เป็นเมทริกซ์ 2×2 และ $A * B = AB - BA$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $A * B = B * A$ 2. $A * A = \underline{O}$

   3. $A * I = I * A$ 4. $A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$

3. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ $(-A)\begin{bmatrix} 15 & 0 & 12 \\ -9 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ A^{-1} คือข้อใด

   1. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

   3. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -5 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

4. กำหนด A เป็นเมทริกซ์ และ $A\begin{bmatrix} 15 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด

   1. -5 2. $-\frac{1}{5}$

   3. $\frac{1}{5}$ 4. 5

5. กำหนดให้ A , B เป็นเมทริกซ์ 3×3

   ถ้า $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ AB = I แล้ว เมทริกซ์ $C = A^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ คือ เมทริกซ์ในข้อใด

   1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

   3. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

6. กำหนด A , B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 และ $A(\mathrm{adj}A) - BA = I$ และ $\det(B) = -4$ ค่าของ $\det(A)$ เท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 0

3. 1 4. 2

7. กำหนด $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$ และ $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B^t$

แล้วค่าของ y^2 เท่ากับเท่าใด

1. $\cos^2\theta$ 2. $\cos^2 2\theta$

3. $\sin^2 2\theta$ 4. $\sin^2\theta$

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2a & 3 & 5a \\ 2b & 4 & 5b \\ 2c & 5 & 5c \end{bmatrix}$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(A) = \det(B)$ 2. $\det(A) = \det(C)$

3. $\det(B) = \det(C)$ 4. $\det(A) = \det(B) = \det(C)$

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos 2\theta \\ \cos^2\theta & \tan^2\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & a \\ b & c \end{bmatrix}$ ถ้า $A = B$ แล้ว $8a + bc$ เท่ากับเท่าใด

1. 7 2. 8

3. 9 4. 23

10. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 2-x \\ 2x-1 & 2-3x \end{bmatrix}$ และ $S = \{x \mid \det(A) > 0\}$ คือเซตในตัวเลือกใด

1. $(-\infty, \frac{1}{2}]$ 2. $(0, \frac{1}{2})$

3. $[\frac{1}{2}, \infty)$ 4. $[0, \infty)$

เฉลยคำตอบ 1. (2) 2. (1) 3. (4) 4. (2) 5. (3)

6. (3) 7. (2) 8. (1) 9. (2) 10. (2)

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂≡≈⊄∈∉°∞∧∨≤↔≠→±≥→↑XY⊁⊁⊀≰

↔≠→±≥→↑

บทที่ 4

กำหนดการเชิงเส้น

4.1 สรุปเนื้อหา

1. **ปัญหากำหนดการเชิงเส้น** เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดหรือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดของตัวแปร ตัวอย่างเช่น

1. จงหาค่าสูงสุดของ $P = 10x + 25y$

   ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

$$3x + 4y \le 480$$
$$2x + 6y \le 540$$
$$x \ge 0 , y \ge 0$$

2. จงหาค่าต่ำสุดของ $P = 5x + 2y$

   ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด

$$x + y \ge 5$$
$$3x + 2y \ge 13$$
$$x \ge 0 , y \ge 0$$

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชัน P เรียกว่า**ฟังก์ชันจุดประสงค์**

2. อาณาบริเวณที่สอดคล้องเงื่อนไขข้อกำหนดเรียกว่า **อาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้**

3. จุดตัดในอาณาบริเวณของผลเฉลยที่เป็นไปได้ที่เกิดจากเงื่อนไขข้อจำกัดตัดกัน เรียกว่า **จุดมุม**

4. ฟังก์ชันจุดประสงค์จะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่จุดมุมเสมอ

2. **การหาค่าสูงสุดหรือการหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์**

   ขั้นที่ 1. เขียนกราฟของอาณาบริเวณผลเฉลย

   ขั้นที่ 2. เขียนกราฟของเส้นตรงที่เกิดจากฟังก์ชันจุดประสงค์

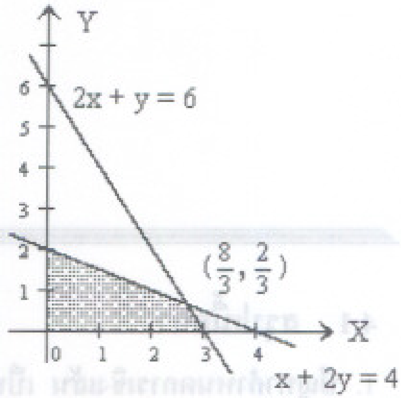
   ขั้นที่ 3. หาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชันจุดประสงค์ที่จุดมุม

ตัวอย่างเช่น การหาค่าสูงสุดของ $P = 2x + 3y$

$x + 2y \le 4$

$2x + y \le 6$

$x \ge 0 , y \ge 0$



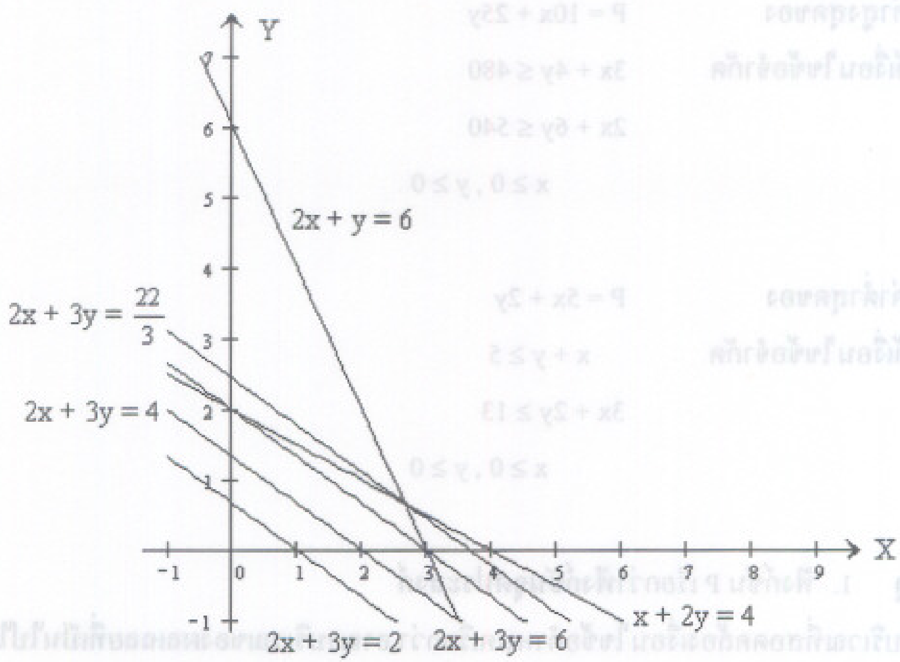
อาณาบริเวณผลเฉลยคือ บริเวณที่แรเงา

เซต $\{ (x , y) \mid x + 2y \le 4 , 2x + y \le 6 , x \ge 0 , y \ge 0\}$

เรียกว่าเซตของผลเฉลยที่เป็นไปได้

แนวทางในการหาค่าสูงสุดเราจะทำโดยการเขียนเส้นตรง $2x + 3y = P$

เมื่อ P เป็นค่าคงตัวต่าง ๆ เช่น P = 1 , 2 , 3 , 4 , .. ตัวอย่างเช่น



จากรูปจะเห็นว่า เส้นตรง $2x + 3y = 2$, $2x + 3y = 4$, $2x + 3y = 6$ ผ่านบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้

จะเห็นว่า $2x + 3y = P$ มีค่ามากที่สุดเมื่อเส้นตรงผ่านจุด $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$

เพราะฉะนั้น $P = 2x + 3y$ มีค่ามากที่สุดเท่ากับ $\frac{22}{3}$ เมื่อ $x = \frac{8}{3}$ และ $y = \frac{2}{3}$

ในทางปฏิบัติเราจะหาจุดมุมทั้งหมดของอาณาบริเวณผลเฉลยซึ่งในที่นี้คือ (0 , 0) , (3 , 0) ,(0 , 2) , $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$ แล้วหาค่า P ที่จุดมุมเท่านั้น

จุดมุม	P(x, y) = 2x + 3y
(0 , 0)	0
(3 , 0)	6
(0 , 2)	6
$(\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$	$\frac{22}{3}$

เพราะฉะนั้น P มีค่าสูงสุดเท่ากับ $\frac{22}{3}$ เมื่อ $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{2}{3}$

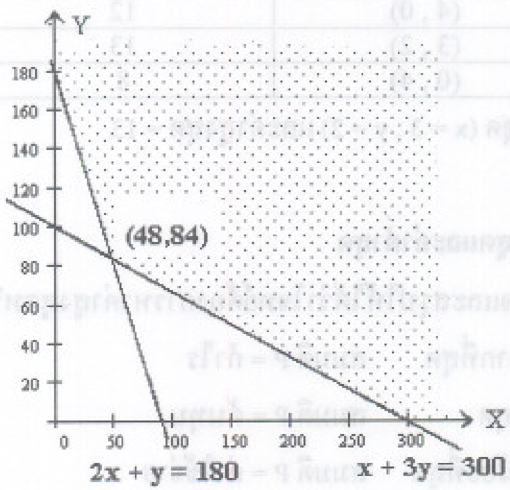
ตัวอย่างที่ 4.1.1 จงหาค่าต่ำสุดของ $P = x + 1.2y$

ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $2x + y \geq 180$

$x + 3y \geq 300$

$x \geq 0 , y \geq 0$

วิธีทำ เขียนกราฟและหาจุดมุม



แก้สมการหาจุดมุมได้คือ (0 , 180) , (48 , 84) , (300 , 0) ต่อไปหาค่า P ที่จุดมุมทุกจุด

จุดมุม	P = x + 1.2y
(0 , 180)	216
(300 , 0)	300
(48 , 84)	148.8

เพราะฉะนั้น P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 148.8 เมื่อ x = 48 , y = 84

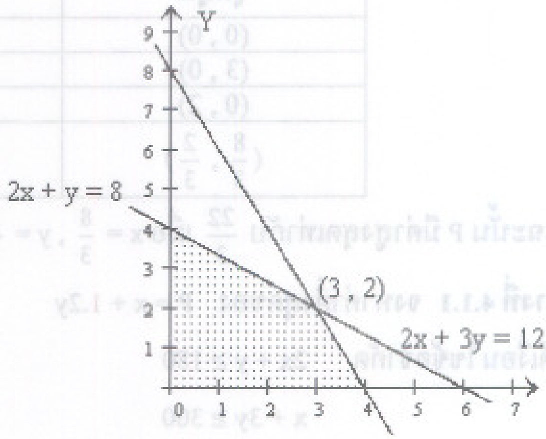
ตัวอย่างที่ 4.1.2 จงหาค่าสูงสุดของ $P = 3x + 2y$

ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $2x + 3y \le 12$

$2x + y \le 8$

$x \ge 0 , y \ge 0$

วิธีทำ เขียนกราฟและหาจุดมุม



โดยการแก้สมการเส้นตรง

จุดมุมคือ (0 , 0) , (4 , 0) , (3 , 2) , (0 , 4)

ต่อไปหาค่า P ที่จุดมุม

จุดมุม	$P = 3x + 2y$
(0 , 0)	0
(4 , 0)	12
(3 , 2)	13
(0 , 4)	8

เพราะฉะนั้น P มีค่าสูงสุดที่จุด (x = 3 , y = 2) และค่าสูงสุด = 13

3. การทำโจทย์ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ขั้นที่ 1. อ่านโจทย์ให้เข้าใจและสรุปให้ได้ว่าโจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

เช่น ต้องการให้กำไรมากที่สุด สมมติ P = กำไร

ต้องการต้นทุนต่ำสุด สมมติ P = ต้นทุน

ต้องการค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด สมมติ P = ค่าใช้จ่าย

ขั้นที่ 2. สมมติตัวแปร x , y ที่เกี่ยวข้องกับ P ตัวอย่างเช่น ราคาสินค้า , จำนวนสินค้า เวลาที่ใช้ใน การผลิต , ระยะทาง

ขั้นที่ 3. หาสูตรของ P ในเทอมของตัวแปร ; $P = ax + by$

ขั้นที่ 4. หาเงื่อนไขต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับตัวแปร เพื่อสร้างเงื่อนไขข้อจำกัด

ขั้นที่ 5. แก้สมการหาจุดตัดของเส้นตรงเพื่อหาจุดมุม

ขั้นที่ 6. แทนค่าจุดมุมใน P เพื่อหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด

ตัวอย่างที่ 4.1.3 ในการผลิตสินค้า 2 ชนิด โดยใช้วัตถุดิบจากแหล่ง 2 แหล่ง ตามข้อมูลต่อไปนี้ ปริมาณวัตถุดิบทั้งหมดที่มีให้ใช้จากแหล่งที่ 1 และแหล่งที่ 2 มีค่าเป็น 18 ตันและ 10 ตันตามลำดับ

สินค้าชนิดที่ 1 แต่ละชิ้นต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1จำนวน 2 ตันและจากแหล่งที่ 2 จำนวน 1 ตัน

สินค้าชนิดที่ 2 แต่ละชิ้นต้องใช้วัตถุดิบจากแหล่งที่ 1 จำนวน 3 ตันและจากแหล่งที่ 2 จำนวน 2 ตัน

สินค้าชนิดที่ 1 ขายได้เงินชิ้นละ 300 บาท

สินค้าชนิดที่ 2 ขายได้เงินชิ้นละ 400 บาท

ถามว่าควรจะผลิตสินค้าชนิดที่ 1 และ 2 อย่างละเท่าไรจึงจะมีรายได้มากที่สุด

วิธีทำ

ขั้นที่ 1. ต้องการรายได้มากที่สุด สมมติ P = รายได้

ขั้นที่ 2. รายได้เกิดจากปริมาณสินค้าชนิดที่ 1 และ ชนิดที่ 2

สมมติ x = จำนวนสินค้าชนิดที่ 1

y = จำนวนสินค้าชนิดที่ 2

ขั้นที่ 3. เพราะว่าราคาขายชนิดที่ 1 ชิ้นละ 300 บาท และราคาขายชนิดที่ 2 ชิ้นละ 400 บาท

เพราะฉะนั้น $P = 300x + 400y$

ขั้นที่ 4. จากข้อมูลที่กำหนดสรุปในรูปแบบตารางได้เป็น

จำนวนสินค้า	สินค้าชนิดที่ 1 x	สินค้าชนิดที่ 2 y	
วัตถุดิบแหล่งที่ 1	2x ตัน	3y ตัน	18 ตัน
วัตถุดิบแหล่งที่ 2	x ตัน	2y ตัน	10 ตัน

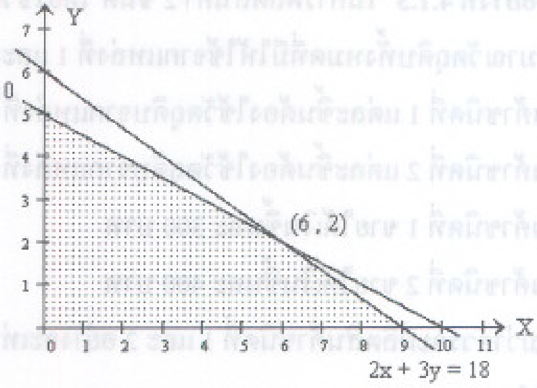
เพราะฉะนั้น $2x + 3y \le 18$

$x + 2y \le 10$

$x \ge 0 , y \ge 0$

ขั้นที่ 5.

เขียนกราฟและแก้สมการหาจุดมุม



จุดมุม คือ $(0 , 0)$, $(9 , 0)$, $(6 , 2)$, $(0 , 5)$

ขั้นที่ 6. ค่า P ที่จุดมุมคือ

จุดมุม	$P = 300x + 400y$
(0 , 0)	0
(9 , 0)	2700
(6 , 2)	2600
(0 , 5)	2000

เพราะฉะนั้นรายได้มากที่สุดเมื่อ $x = 9$, $y = 0$ และจะมีรายได้ = 2,700 บาท

ตัวอย่างที่ 4.1.4 โรงงานผลิตเก้าอี้ทำการผลิตเก้าอี้ 2 แบบคือ แบบ A และแบบ B แบบ A ขายได้กำไรตัวละ 300 บาท แบบ B ขายได้กำไรตัวละ 500 บาท การผลิตเก้าอี้ทั้งสองแบบจะมี ขั้นตอนที่ 1 เป็นการประกอบ ขั้นตอนที่ 2 เป็นการทาสี เก้าอี้แบบ A 1 ตัว ใช้เวลาประกอบ 1 ชั่วโมง ใช้เวลาทาสี 2 ชั่วโมง เก้าอี้แบบ B 1 ตัว ใช้เวลาประกอบ 2 ชั่วโมง ใช้เวลาทาสี 2 ชั่วโมง เวลาการผลิตของโรงงานจะทำการประกอบเก้าอี้ทั้งหมดวันละไม่เกิน 8 ชั่วโมง และเวลาในการทาสีทั้งหมดไม่เกิน 10 ชั่วโมง

ถามว่าโรงงานนี้ควรผลิตเก้าอี้แบบ A และ B อย่างละกี่ตัวจึงจะได้กำไรมากที่สุด

วิธีทำ ขั้นที่ 1. ต้องการกำไรมากที่สุด สมมติ P = กำไร

ขั้นที่ 2. กำไรเกิดจากการขายเก้าอี้แบบ A และ แบบ B

สมมติ x = จำนวนเก้าอี้แบบ A

y = จำนวนเก้าอี้แบบ B

ขั้นที่ 3. เก้าอี้แบบ A กำไรตัวละ 300 บาท เก้าอี้แบบ B กำไรตัวละ 500 บาท

เพราะฉะนั้น $P = 300x + 500y$

ขั้นที่ 4. เวลาในการประกอบทั้งหมด = (1) x + 2 (y) เวลาในการทาสีทั้งหมด = (2) x + (2) (y)

เพราะว่าเวลาในการประกอบต้องไม่เกิน 8 ชั่วโมงและเวลาในการทาสีต้องไม่เกิน 10 ชั่วโมง

เพราะฉะนั้น $x + 2y \le 8$

$2x + 2y \le 10$

$x \ge 0 , y \ge 0$

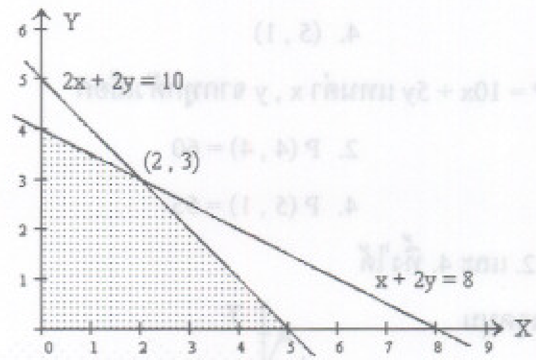
สรุป จงหาค่ามากที่สุดของ $P = 300x + 500y$

ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $x + 2y \le 8$

$2x + 2y \le 10$

$x \ge 0 , y \ge 0$

ขั้นที่ 5. เขียนกราฟและหาจุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลย



จุดมุมคือ (0 , 0) , (5 , 0) , (2 , 3) , (0 , 4)

ขั้นที่ 6. แทนค่า (x , y) ใน $P(x , y) = 300x + 500y$

จุดมุม	P = 300x + 500y
(0 , 0)	0
(5 , 0)	1500
(2 , 3)	2100
(0 , 4)	2000

เพราะฉะนั้นกำไรมากที่สุดเท่ากับ 2100 บาท

เมื่อผลิตเก้าอี้แบบ A จำนวน 2 ตัว และแบบ B จำนวน 3 ตัว

4.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ปัญหากำหนดการเชิงเส้น ในกรณีที่ตัวเลือกเป็นจุดที่จะให้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ก็จะตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 4.2.1 กำหนดให้ $P = 10x + 5y$ โดยมีเงื่อนไขข้อจำกัด

$$3x + y \geq 9$$
$$2x + y \geq 8$$
$$x + 2y \geq 7$$
$$x - 2y \leq 3$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

P มีค่าต่ำสุดที่จุดในตัวเลือกใด

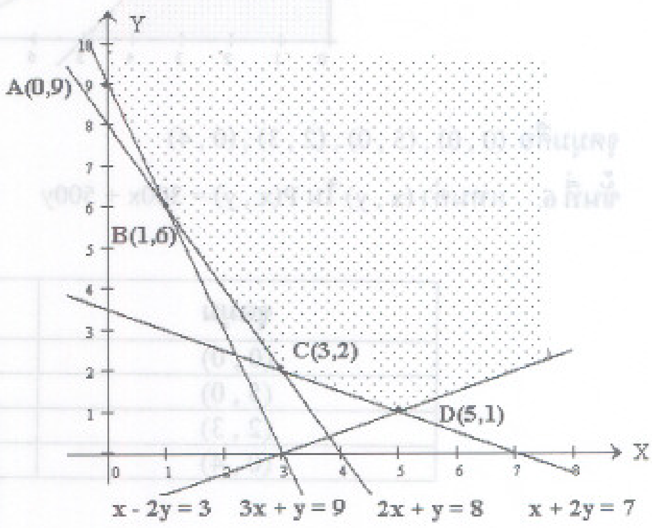
1. (7 , 3)
2. (4 , 4)
3. (3 , 2)
4. (5 , 1)

การตัดตัวเลือก จากโจทย์ $P = 10x + 5y$ แทนค่า x , y จากทุกตัวเลือก

1. P (7 , 3) = 85
2. P (4 , 4) = 60
3. P (3 , 2) = 40
4. P (5 , 1) = 55

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ต้องวาดรูปและหาจุดมุม



ได้จุดมุมเป็น A (0 , 9) , B (1 , 6) , C (3 , 2) , D (5 , 1)

จุดมุม	P = 10x+ 5y
(0 , 9)	45
(1 , 6)	40
(3 , 2)	40
(5 , 1)	55

เพราะฉะนั้น P = 40 เป็นค่าต่ำสุดเมื่อ (x , y) = (1 , 6) , (3 , 2)

2. นำจุดที่สามารถเป็นคำตอบได้บางจุดมาแทนค่าเพื่อช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 4.2.2 ค่าต่ำสุดของ $P = 2x + 3y$ มีค่าเท่ากับเท่าใด เมื่อกำหนดเงื่อนไขข้อจำกัด

$$4x + y \geq 16$$

$$3x + 2y \geq 24$$

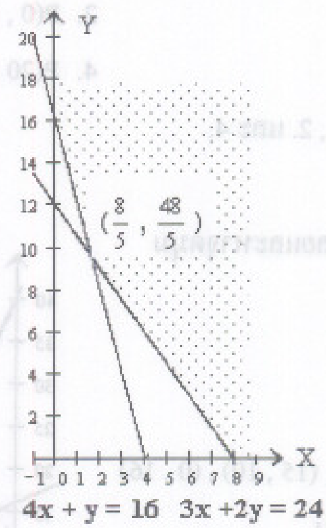
$$x \geq 0 \ , y \geq 0$$

1. 200 2. 50

3. 24 4. 16

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไขข้อจำกัด จะเห็นว่า (0 , 8) เป็นคำตอบที่เป็นไปได้ และ P(0 , 12) = 36 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง วาดรูปดูอาณาบริเวณผลเฉลยและหาจุดมุม



จุดมุมคือ $(0 , 16) , (\frac{8}{5} , \frac{48}{5}) , (8 , 0)$

จุดมุม	P = 2x + 3y
(0 ,16)	48
$(\frac{8}{5} , \frac{48}{5})$	32
(8 , 0)	16

เพราะฉะนั้น P มีค่าต่ำสุด = 16 เมื่อ x = 8 , y = 0

4.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 4.3.1 กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 3x + 5y$

และเงื่อนไขข้อจำกัด $4x + 2y \le 80$

$2x + 5y \le 80$

$x \ge 0 , y \ge 0$

P มีค่าสูงสุดที่จุดใด

1. (10 , 0) 2. (0 , 16)
3. (15 , 10) 4. (20 , 0)

ตอบ 3.

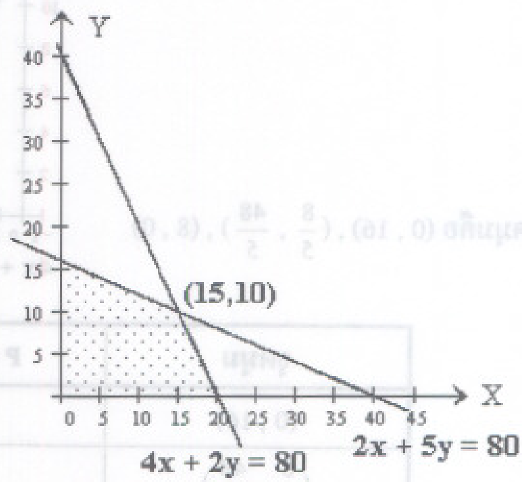
แนวคิด **การตัดตัวเลือก** แทนค่า P จาก (x , y) ทุกตัวเลือก เพราะว่า

1. P(10 , 0) = 30 2. P(0 , 16) = 80
3. P(15 , 10) = 95 4. P(20 , 0) = 60

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง

เขียนรูปอาณาบริเวณผลเฉลยและหาจุดมุม



จุดมุม คือ (0 , 0) , (20 , 0) , (15 , 10) , (0 , 16)

คำนวณค่า P ที่จุดมุมได้เป็น

จุดมุม	P = 3x + 5y
(0 , 0)	0
(20 , 0)	60
(15 , 10)	95
(0 , 16)	80

เพราะฉะนั้น P มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 95 เมื่อ x = 15 , y = 10

ตัวอย่างที่ 4.3.2 กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 15x + 10y$

และเงื่อนไขข้อจำกัด $4x + 3y \geq 12$

$3x + y \geq 6$

$x \geq 0 , y \geq 0$

P มีค่าต่ำสุดเท่ากับเท่าใด

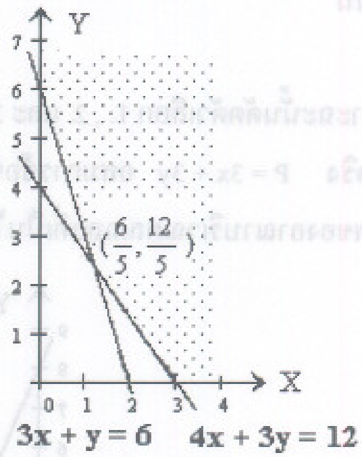
1. 60   2. 50

3. 45   4. 42

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า (3 , 0) อยู่ในอาณาบริเวณผลเฉลย และ P(3 , 0) = 45 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง วาดรูปและหาจุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลย



จุดมุม คือ $(3 , 0) , (\frac{6}{5},\frac{12}{5}) , (0 , 6)$

ค่า P ที่จุดมุม

จุดมุม	P = 15x + 10y
(3 , 0)	45
$(\frac{6}{5},\frac{12}{5})$	42
(0 , 6)	60

เพราะฉะนั้น P มีค่าต่ำสุด เท่ากับ 42 เมื่อ $x = \frac{6}{5}$, $y = \frac{12}{5}$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 3x + 3y$ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$2x + y \leq 8$$

$$x + 2y \leq 8$$

$$x \geq 0 , y \geq 0$$

ค่าสูงสุดของ P เท่ากับเท่าใด

1. 24 　　　　2. 20

3. 18 　　　　4. 16

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์จะได้ว่า $2x + y \leq 8$

$$x + 2y \leq 8$$

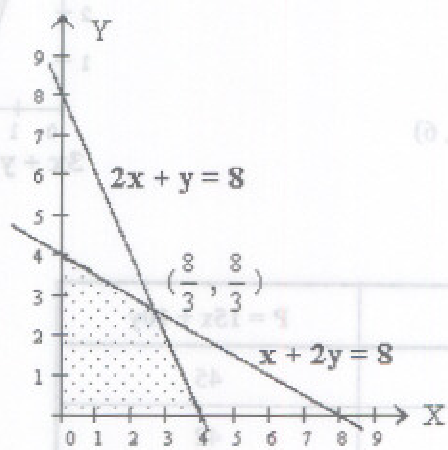
ดังนั้น $3x + 3y \leq 16$

$$3(x + y) \leq 16$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $P = 3x + 3y$ อสมการข้อจำกัดคือ $2x + y \leq 8$, $x + 2y \leq 8$, $x \geq 0$ $y \geq 0$

ภาพของอาณาบริเวณผลเฉลยที่เป็นไปได้คือ



จุดมุม	(0 , 0)	(4 , 0)	(0 , 4)	$(\frac{8}{3} , \frac{8}{3})$
P = 3(x + y)	0	12	12	16

ค่าสูงสุดของ P = 16 เมื่อ $x = \frac{8}{3}$, $y = \frac{8}{3}$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 กำหนดให้ $L(x, y) = 2x + 6y + 412$ และ x , y สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

$$y \le 15$$
$$x + y \ge 10$$
$$y - x \le 5$$
$$5x - y \le 45$$

แล้ว L(x , y) มีค่าน้อยที่สุดอยู่ที่จุดตัดของเส้นตรงคู่ใดต่อไปนี้

1. $y = 15$ และ $y - x = 5$
2. $y = 15$ และ $5x - y = 45$
3. $x + y = 10$ และ $y - x = 5$
4. $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

ตอบ 4.

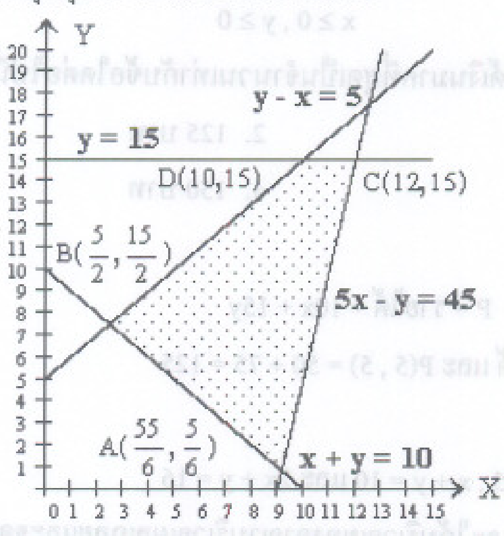
แนวคิด **การตัดตัวเลือก** หาจุดตัดของเส้นตรงแต่ละตัวเลือกแล้วดูค่า L ที่จุดตัดนั้น

ตัวเลือก	จุดตัด	2x + 6y
1.	D (10 , 15)	110
2.	C (12 , 15)	114
3.	$B(\frac{5}{2}, \frac{15}{2})$	50
4.	$A(\frac{55}{6}, \frac{5}{6})$	23.3

เพราะว่า 412 เป็นค่าคงตัว เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะว่า 2x + 6y ก็พอ

สรุป L มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x + y = 10$ และ $5x - y = 45$

วิธีจริง เขียนกราฟและหาจุดมุมของอาณาบริเวณผลเฉลย



โดยการแก้สมการเพื่อหาจุดตัดของเส้นตรงจะได้จุดมุมคือ A $(\frac{55}{6}, \frac{5}{6})$, B$(\frac{5}{2}, \frac{15}{2})$, C(12 , 15)

และ D(10 , 15) หาค่า L (x , y) = 2x + 6y + 412 ที่จุด A , B , C , D

จุดมุม(x , y)	2x + 6y	L = 2x + 6y + 412
A$(\frac{55}{6}, \frac{5}{6})$	$\frac{140}{6}$	435.33
B$(\frac{5}{2}, \frac{15}{2})$	50	462
C(12,15)	114	526
D(10,15)	110	522

เพราะฉะนั้น L มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 435.3 เมื่อ x = $\frac{55}{6}$ และ y = $\frac{5}{6}$

ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข x + y = 0 และ 5x – y = 45

ตัวอย่างที่ 4.3.5 โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า A และ B โดยที่มีราคาขายต่อชิ้นเป็น 10 และ 15 บาท ตามลำดับ ถ้าโรงงานนี้ผลิตสินค้า A ได้ x ชิ้น และผลิตสินค้า B ได้ y ชิ้น โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$0 \le y \le 5$$
$$x + y \le 10$$
$$2x + y \le 16$$
$$x \ge 0 , y \ge 0$$

แล้วโรงงานจะขายสินค้าได้เงินมากที่สุดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120 บาท
2. 125 บาท
3. 130 บาท
4. 150 บาท

ตอบ 2.

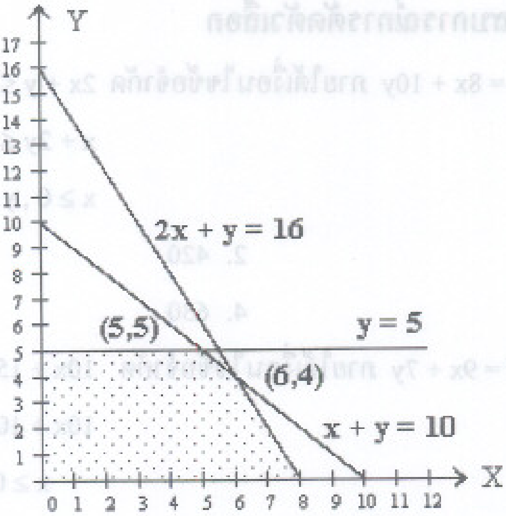
แนวคิด การตัดตัวเลือก P = รายได้ = 10x + 15y

เพราะว่า (x = 5 , y = 5) ได้ และ P(5 , 5) = 50 + 75 = 125

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ได้

วิธีจริง เขียนกราฟ y = 5, x + y = 10 และ 2x + y = 16

และหาจุดตัดของเส้นตรง จะได้บริเวณของอาณาบริเวณผลเฉลยและจุดมุมดังนี้



จุดมุมคือ (0 , 0) , (8 , 0) , (6 , 4) , (5 , 5) , (0 , 5)

P = รายได้ = 10x + 15y

จุดมุม	P = 10x + 15y
(8 , 0)	80
(6 , 4)	120
(5 , 5)	125
(0 , 5)	75

เพราะฉะนั้นรายได้สูงสุดเท่ากับ 125 บาท เมื่อ x = 5 , y = 5

การเรียงลำดับ $\sqrt[12]{6}$, $\sqrt[9]{8}$, $\sqrt[8]{9}$, $\sqrt[6]{12}$ จากน้อยไปมาก

$$6^6 < 8^8 < 9^9 < 12^{12}$$

$$(6^6)^{\frac{1}{72}} < (8^8)^{\frac{1}{72}} < (9^9)^{\frac{1}{72}} < (12^{12})^{\frac{1}{72}}$$

$$6^{\frac{1}{12}} < 8^{\frac{1}{9}} < 9^{\frac{1}{8}} < 12^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[8]{9} < \sqrt[9]{8} < \sqrt[6]{12}$$

4.4 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. จงหาค่าสูงสุดของ $P = 8x + 10y$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด
$$2x + y \leq 50$$
$$x + 2y \leq 70$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

1. 380   2. 420

3. 540   4. 630

2. จงหาค่าต่ำสุดของ $P = 9x + 7y$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด
$$10x + 15y \geq 1250$$
$$10x + 10y \geq 700$$
$$x \geq 0 , y \geq 0$$

ไม่มีคำตอบ

1. 570   2. 800

3. 950   4. 1040

ไม่มีคำตอบ

3. โรงงานผลิตขนมแห่งหนึ่งมีวัตถุดิบในการผลิตคือ เชอรี 130 กิโลกรัม และชอกโกเลต 170 กิโลกรัม โรงงานแห่งนี้ผลิตขนม 2 แบบ คือ แบบ A และ B โดยที่หนึ่งหน่วยของแบบ A ใช้เชอรี 1 กิโลกรัม และชอกโกเลต 1 กิโลกรัม และหนึ่งหน่วยของแบบ B เชอรี 2 กิโลกรัม และชอกโกเลต 2 กิโลกรัม ราคาขายขนมแบบ A กิโลกรัมละ 200 บาท ราคาขายแบบ B กิโลกรัมละ 1250 บาท โรงงานจะผลิตแบบ A และ B อย่างละกี่หน่วยจึงจะได้กำไรสูงสุด

1. แบบ A 130 หน่วย แบบ B 130 หน่วย   2. แบบ A 260 หน่วย แบบ B ไม่ผลิต

3. แบบ B 260 หน่วย แบบ A ไม่ผลิต   4. แบบ A 100 หน่วย แบบ B 100 หน่วย

4. การลงทุนด้วยเงิน 10 ล้านบาทของนายเอก ซึ่งมีกิจการ 2 บริษัท คือ A และ B โดยมีเงื่อนไขการลงทุนดังนี้
(ก) ลงทุนบริษัท A ต้องมากกว่าการลงทุนในบริษัท B
(ข) ลงทุนกับบริษัท A ได้ไม่เกิน 6 ล้านบาท
(ค) ลงทุนกับบริษัท B ต้องไม่น้อยกว่า 2 ล้านบาท
(ง) ผลตอบแทนจากบริษัท A เป็นร้อยละ 10 ของเงินลงทุน
(จ) ผลตอบแทนจากบริษัท B เป็นร้อยละ 7 ของเงินลงทุน

นายเอกจะได้ผลตอบแทนมากที่สุดเมื่อลงทุนกับบริษัท A เท่ากับเท่าใด

1. 6 ล้านบาท   2. 5 ล้านบาท

3. 4 ล้านบาท   4. 3 ล้านบาท

5. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 23x + 32y$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $10x + 10y \leq 2500$

$$5x + 10y \leq 2000$$

$$x + y \leq 500$$

$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

ค่าสูงสุดของ P เท่ากับเท่าใด

1. 5740 2. 6400
3. 4800 4. 7100

6. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 5x + 6y$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $4x + 7y \leq 56$

$$26x + 5y \leq 130$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ถ้า $x = 1$ แล้ว P มีค่ามากที่สุดเมื่อ $y = \frac{52}{7}$
2. ถ้า $x = 2$ แล้ว P มีค่ามากที่สุดเมื่อ $y = \frac{78}{5}$
3. ถ้า $x = 3$ แล้ว P มีค่ามากที่สุดเมื่อ $y = \frac{52}{2}$
4. P มีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = 7$ และ $y = 4$

7. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ $P = 7x + 11y$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัด $x + y \geq 3$

$$x + 2y \geq 4$$

$$x \geq 0\ ,\ y \geq 0$$

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. P มีค่าสูงสุดเท่ากับ 25 2. P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 25
3. P มีค่าสูงสุดเมื่อ $2x + 3y = 1$ 4. P มีค่าต่ำสุดเท่ากับ 10

8. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตสินค้า 2 แบบคือ แบบ ก. และแบบ ข. วัตถุดิบ ที่ใช้ในการผลิตมี 2 ชนิด คือ ชนิด A และ ชนิด B

สินค้าแบบ ก. หนึ่งชิ้นใช้วัตถุดิบชนิด A จำนวน 2 หน่วย และ วัตถุดิบชนิด B จำนวน 5 หน่วย

สินค้าแบบ ข. หนึ่งชิ้นใช้วัตถุดิบชนิด A จำนวน 3 หน่วยและ วัตถุดิบชนิด B จำนวน 4 หน่วย

สินค้าแบบ ก. ขายได้กำไรชิ้นละ 12 บาท สินค้าแบบ ข. ขายได้กำไรชิ้นละ 14 บาท

ถ้าโรงงานแห่งนี้มีวัตถุดิบชนิด A จำนวน 200 หน่วยและวัตถุดิบชนิด B จำนวน 500 หน่วย โรงงานแห่งนี้ต้องผลิตสินค้าแบบ ก. จำนวนกี่ชิ้นจึงจะได้กำไรมากที่สุด

1. 100 ชิ้น 2. 800 ชิ้น
3. 1200 ชิ้น 4. 1750 ชิ้น

9. บริษัทผลิตเทปเพลงภาพยนต์แห่งหนึ่ง การผลิตเทปมีขั้นตอน 2 ขั้นตอนคือ การบันทึกภาพและการบันทึกเสียง บริษัทแห่งนี้ทำการผลิตเทปเพลงไทยและเพลงสากล ข้อจำกัดของ การทำงานภายในบริษัทนี้คือ (ก) แผนกบันทึกภาพจะทำงานไม่เกินสัปดาห์ละ 60 ชั่วโมง

(ข) แผนกบันทึกเสียงจะทำงานไม่เกินสัปดาห์ละ 48 ชั่วโมง

(ค) การผลิตเทปเพลงไทย 1 ม้วน ใช้เวลาบันทึกภาพ 4 ชั่วโมง และ บันทึกเสียง 2 ชั่วโมง

(ง) การผลิตเทปเพลงสากล 1 ม้วนใช้เวลาบันทึกภาพ 2 ชั่วโมง และบันทึกเสียง 4 ชั่วโมง

(จ) รายได้จากการผลิตเทปเพลงไทยม้วนละ 320 บาท และเทปเพลงสากลม้วนละ 240 บาท

บริษัทนี้จะมีรายได้สูงสุดสัปดาห์ละเท่าใด

1. 5280 บาท 2. 6291 บาท
3. 5284 บาท 4. 6875 บาท

10. โรงงานผลิตกล่องของขวัญ 2 แบบคือ แบบ ก. และแบบ ข.

กล่องแบบ ก. กำไรกล่องละ 1 บาท กล่องแบบ ข . กำไรกล่องละ 1.20 บาท

การผลิตกล่องทั้ง 2 แบบ ต้องใช้เครื่องจักรทำงาน 2 เครื่องคือ เครื่อง A และ B ต่อเนื่องกัน

กล่องแบบ ก. ใช้เวลาเครื่องจักร A 2 นาที/กล่องและใช้เวลาเครื่องจักร B 1 นาที/กล่อง

กล่องแบบ ข. ใช้เวลาเครื่องจักร A 1 นาที/กล่อง และใช้เวลาเครื่องจักร B 3 นาที/กล่อง

เวลาทำงาน ของเครื่องจักร A ทำได้ไม่เกิน 3 ชั่วโมง ของเครื่องจักร B ทำได้ไม่เกิน 5 ชั่วโมง

โรงงานแห่งนี้จะผลิตกล่องแบบ ก. และแบบ ข. อย่างละเท่าใดจึงจะได้กำไรมากที่สุด

1. แบบ ก. 60 ชิ้น แบบ ข. 80 ชิ้น 2. แบบ ก. 42 ชิ้น แบบ ข. 100 ชิ้น
3. แบบ ก. 48 ชิ้น แบบ ข. 84 ชิ้น 4. แบบ ก. 50 ชิ้น แบบ ข. 40 ชิ้น

(1)

เฉลยคำตอบ 1. (1) 2. (1) 3. (2) 4. (2) 5. (4)
6. (1) 7. (2) 8. (1) 9. (1) 10. (3)

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂≡≈⊄∈∉° ∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥→↑ X Y ≯≱≮≰

บทที่ 5
เวกเตอร์

5.1 สรุปเนื้อหา

1. ปริมาณในทางฟิสิกส์ มีอยู่ 2 ปริมาณ คือ ปริมาณสเกลาร์ และ ปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ คือ ปริมาณที่มีขนาดอย่างเดียว เช่น ความสูง , อายุ , ความยาว , อุณหภูมิ

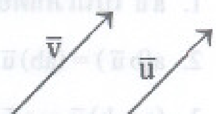
ปริมาณเวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีขนาดและทิศทาง เช่น แรง , น้ำหนัก , ความเร็ว , ความเร่ง

2. ปริมาณเวกเตอร์แทนด้วยเส้นตรงที่มีหัวลูกศร โดยความยาวเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรแสดงทิศทางของเวกเตอร์ ตัวอย่างเช่น เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ และ $\overrightarrow{GH}$

สัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$ ใช้แทนเวกเตอร์ที่ระบุทิศทางจาก A ไป B และให้ความยาวเส้นตรง AB แทนขนาดเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $|\overrightarrow{AB}|$

3. เวกเตอร์ 2 เวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ จะเท่ากันได้

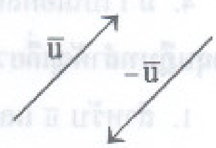
ก็ต่อเมื่อ $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ และมีทิศทางเดียวกัน



4. นิเสธของเวกเตอร์ $\bar{u}$ เขียนแทนด้วย $-\bar{u}$

หมายความว่า เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด $|\bar{u}|$ แต่ ทิศทางตรงข้ามกับ $\bar{u}$

เราจะเขียนแทน $-\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\overrightarrow{BA}$ หรือ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$



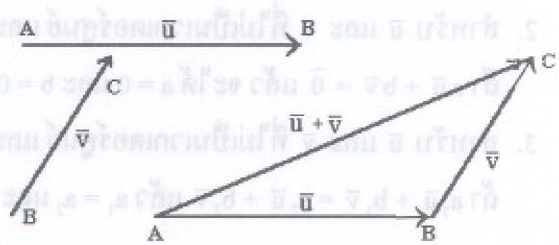
5. การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์ $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

ให้เอาจุดปลายของ $\bar{u}$ ต่อกับ

จุดเริ่มต้นของ $\bar{v}$

ในรูป $\bar{u} + \bar{v} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



6. เวกเตอร์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\bar{0}$ หมายความถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์

7. สมบัติของการบวกเวกเตอร์ ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์

7.1 $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์

7.2 $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$

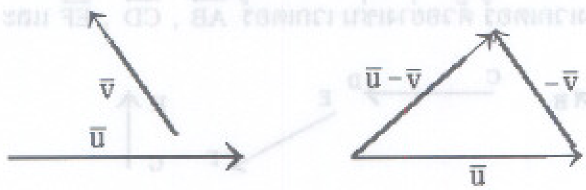
7.3 $(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}=\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})$

7.4 มีเอกลักษณ์การบวก $\bar{0}$ โดยที่ $\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}=\bar{u}+\bar{0}$

7.5 ทุกเวกเตอร์ $\bar{u}$ มีอินเวิร์สการบวก $-\bar{u}$ ที่ $\bar{u}+(-\bar{u})=\bar{0}$

7.6 ถ้า $\bar{u}=\bar{v}$ แล้ว $\bar{w}+\bar{u}=\bar{w}+\bar{v}$

8. การลบเวกเตอร์ $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$ หมายความว่าเวกเตอร์ $\bar{u}$ ลบเวกเตอร์ $\bar{v}$ ซึ่งคือเวกเตอร์ $\bar{u}$ บวกกับนิเสธของเวกเตอร์ $\bar{v}$ เราหา $\bar{u}-\bar{v}$ โดยการเขียนเวกเตอร์ $-\bar{v}$ แล้วนำไปบวกกับเวกเตอร์ $\bar{u}$



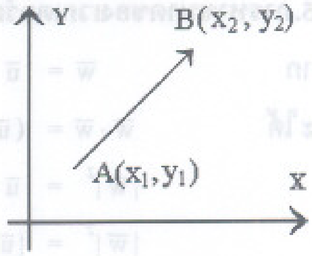
9. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ และ $a, b \in R$

1. $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์
2. $a(b\bar{u})=(ab)\bar{u}$
3. $(a+b)\bar{u}=a\bar{u}+b\bar{u}$, $a(\bar{u}+\bar{v})=a\bar{u}+a\bar{v}$
4. มี 1 เป็นเอกลักษณ์โดยที่ $1\bar{u}=\bar{u}$

ทฤษฎีบทสำคัญเกี่ยวกับเวกเตอร์

1. สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์
   $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้ $\bar{u}=a\bar{v}$
2. สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$
   ถ้า $a\bar{u}+b\bar{v}=\bar{0}$ แล้ว จะได้ $a=0$ และ $b=0$
3. สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$
   ถ้า $a_1\bar{u}+b_1\bar{v}=a_2\bar{u}+b_2\bar{v}$ แล้ว $a_1=a_2$ และ $b_1=b_2$

10.เวกเตอร์ในระบบพิกัดแกนมุมฉาก



ถ้า $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(x_1 , y_1) และจุดสิ้นสุดที่ B(x_2 , y_2)

แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ถ้า $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

การเท่ากันของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

การบวกเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $k\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka \\ kb \end{bmatrix}$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

11.เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ จะมีขนาด $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $\frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

12.เวกเตอร์ $\bar{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน X ทางด้านบวก

เวกเตอร์ $\bar{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน Y ทางด้านบวก

เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ สามารถเขียนได้เป็น $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j}$

13.ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Dot Product) กำหนด $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j}$, $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j}$

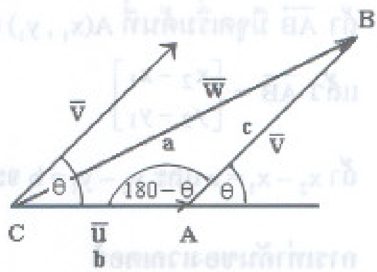
ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงสเกลาร์

1. $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{u}$ และ $\bar{u}\cdot\bar{u} = |\bar{u}|^2$
2. $\bar{i}\cdot\bar{i} = \bar{j}\cdot\bar{j} = 1$
3. $(k\bar{u})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot(k\bar{v}) = k(\bar{u}\cdot\bar{v})$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
4. $\bar{u}\cdot(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{u}\cdot\bar{w}$
5. ถ้า $\bar{u} \perp \bar{v}$ แล้ว $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

14. เมื่อ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

15. การหาขนาดของเวกเตอร์ผลบวก ให้ $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$



จาก $\bar{w} = \bar{u} + \bar{v}$

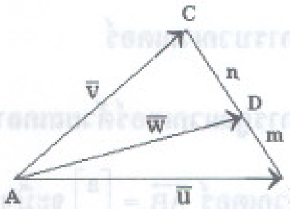
จะได้ $\bar{w}\cdot\bar{w} = (\bar{u} + \bar{v})\cdot(\bar{u} + \bar{v})$

$$|\bar{w}|^2 = \bar{u}\cdot\bar{u} + \bar{v}\cdot\bar{v} + 2\bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$|\bar{w}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

16. สูตรการบวกของเวกเตอร์ที่ข้อสอบชอบถาม

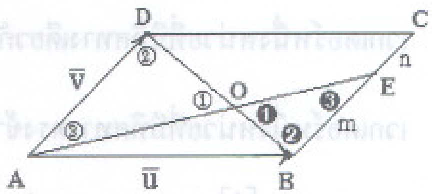


16.1 ถ้า $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$, $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$ และ $|\overrightarrow{BD}| : |\overrightarrow{DC}| = m : n$

จะได้ว่า $\bar{w} = \frac{n}{m+n}\bar{u} + \frac{m}{m+n}\bar{v}$

พิสูจน์ $\bar{w} = \overrightarrow{AC} + \frac{n}{m+n}\overrightarrow{CB} = \bar{v} + \frac{n}{m+n}(\bar{u} - \bar{v}) = \frac{n}{m+n}\bar{u} + \frac{m}{m+n}\bar{v}$

16.2 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



$\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$

ถ้า $|\overrightarrow{BE}| : |\overrightarrow{EC}| = m : n$

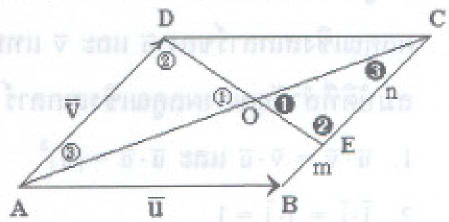
แล้ว $|\overrightarrow{AO}| : |\overrightarrow{OE}| = (m+n) : m = |\overrightarrow{DO}| : |\overrightarrow{OB}|$

พิสูจน์ เพราะว่า ΔADO และ ΔBOE เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

เพราะฉะนั้น $\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OE}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \frac{|\overrightarrow{DO}|}{|\overrightarrow{OB}|}$

$\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OE}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\left|\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{m+n}{m}$ และ $\frac{|\overrightarrow{DO}|}{|\overrightarrow{OB}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{BE}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\left|\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{m+n}{m}$

16.3 ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน



$\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$

ถ้า $|\overrightarrow{BE}| : |\overrightarrow{EC}| = m : n$

แล้ว $|\overrightarrow{AO}| : |\overrightarrow{OC}| = (m+n) : n = |\overrightarrow{DO}| : |\overrightarrow{OE}|$

พิสูจน์ เพราะว่า ΔADO และ ΔBOE เป็นสามเหลี่ยมคล้าย

เพราะฉะนั้น $\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{CE}|} = \frac{|\overrightarrow{DO}|}{|\overrightarrow{OE}|}$

$\frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{EC}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\left|\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{m+n}{n}$ และ $\frac{|\overrightarrow{DO}|}{|\overrightarrow{OE}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{EC}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{\left|\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{m+n}{n}$

5.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับขนาดของเวกเตอร์ เราสามารถใช้ขนาดของเวกเตอร์ ด้วยการใช้สูตรขนาดเวกเตอร์ หรือการวัดความยาว ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 5.2.1 กำหนด A (2 , 2) , B (– 3 , – 2) , C (7 , 0) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ทิศทางเดียวกับเวกเตอร์จากจุด A ไปยังจุดกึ่งกลางของด้าน BC เวกเตอร์ $\bar{u}$ คือตัวเลือกใด

1. $-5\bar{i}-4\bar{j}$ 2. $5\bar{i}-2\bar{j}$

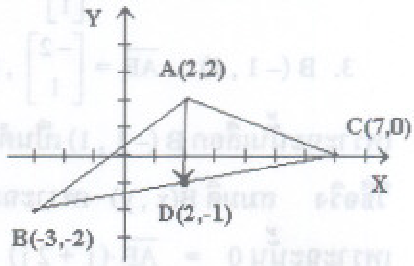
3. $2\bar{i}-\bar{j}$ 4. $-\bar{j}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์ถามว่า $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แต่ตัวเลือกแต่ละตัวมีขนาดเป็น

1. $|-5\bar{i}-4\bar{j}| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

2. $|5\bar{i}-2\bar{j}| = \sqrt{29}$ 3. $|2\bar{i}-\bar{j}| = \sqrt{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้



วิธีจริง จุดกึ่งกลาง BC คือ $D(\frac{-3+7}{2},\frac{-2+0}{2}) = (2,-1)$

เวกเตอร์ $\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = -3\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $\bar{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{|-3\bar{j}|}(-3\bar{j}) = -\bar{j}$

2. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเวกเตอร์ เราใช้การแทนค่าบางค่าที่สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์เพื่อช่วยการในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 5.2.2 ถ้า $\bar{u}+\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}-\bar{v}$ แล้วตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ 2. $|\bar{u}| > |\bar{v}|$

3. $|\bar{u}| < |\bar{v}|$ 4. $|\bar{u}+\bar{v}| \neq |\bar{u}-\bar{v}|$

การตัดตัวเลือก เราเลือก $\bar{u} = \bar{i}$ และ $\bar{v} = \bar{j}$ จะได้ว่า $\bar{u}+\bar{v} = \bar{i}+\bar{j}$, $\bar{u}-\bar{v} = \bar{0}$

และ $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = 0$ ดังนั้น $\bar{u}+\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}-\bar{v}$

แต่ $|\bar{u}| = |\bar{i}| = 1 = |\bar{j}| = |\bar{v}|$ และ $|\bar{i}+\bar{j}| = |\bar{i}-\bar{j}|$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\bar{u}+\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u}-\bar{v}$

เพราะฉะนั้น $0 = (\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = \bar{u}\cdot\bar{u}-\bar{u}\cdot\bar{v}+\bar{v}\cdot\bar{u}-\bar{v}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|^2-|\bar{v}|^2$

ดังนั้น $|\bar{u}|^2 = |\bar{v}|^2$ เพราะฉะนั้น $|\bar{u}| = |\bar{v}|$

3. โจทย์ข้อสอบที่มีคำตอบเป็นตัวเลือก เราสามารถนำค่าในตัวเลือก เช่นพิกัดของจุด มาแทนค่าในโจทย์เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 5.2.3 กำหนด A (1 , 0) เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$ และ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$ พิกัด B คือตัวเลือกใด

1. (1 , − 1) 2. (3 , 1)
3. (− 1 , 1) 4. (− 3 , 1)

การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาสมมุติเป็นจุด B

1. B (1 , − 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2} \neq \sqrt{5}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

2. B (3 , 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \overrightarrow{AB} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

3. B (− 1 , 1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$ และ $\overrightarrow{AB} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) = 0$

เพราะฉะนั้นเลือก B (− 1 , 1) เป็นคำตอบได้เลย

วิธีจริง สมมติ B(x , y) เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} = (x-1)\bar{i} + y\bar{j}$ เพราะว่า $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\bar{i} + 2\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $0 = \overrightarrow{AB} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) = (x-1)\bar{i} + y\bar{j} \cdot (\bar{i} + 2\bar{j}) = x - 1 + 2y$

เพราะฉะนั้น $x + 2y = 1$ __________(1)

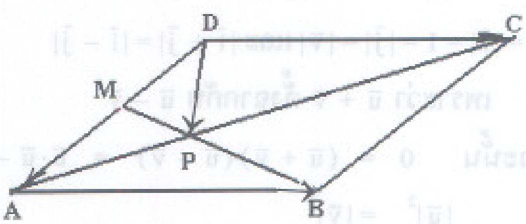
เพราะว่า $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$ เพราะฉะนั้น $(x-1)^2 + y^2 = 5$ __________(2)

แก้สมการ (1) และ (2) จะได้ว่า x = −1 และ y = 1 เพราะฉะนั้นพิกัด B คือ (−1 , 1)

4. วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ โดยใช้ความยาวจริง อัตราส่วนจริง หรือ พิกัดจริง เพื่อให้สอดคล้องเงื่อนไขโจทย์ ก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้ว่าตัวใดถูกหรือตัวเลือกใดผิด

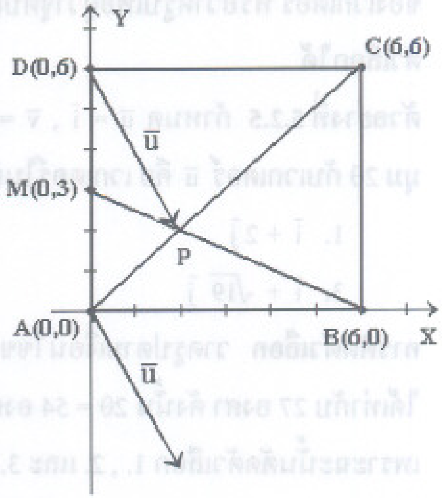
ตัวอย่างที่ 5.2.4 กำหนด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมี M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD ลาก MB ตัดกับ AC ที่จุด P จงหา $\overrightarrow{DP}$ ในรูปของเวกเตอร์ $\overrightarrow{DA}$ และ $\overrightarrow{DC}$

1. $\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$
2. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
3. $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$
4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$



การตัดตัวเลือก วาดรูปให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ โดยเลือกพิกัดของจุดต่าง ๆ ดังนี้

A(0,0) , B(6,0) , C(6,6) , D(0,6) , M(0,3)



เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DA} = -6\bar{j}$, $\overrightarrow{DC} = 6\bar{i}$

$\overrightarrow{DP}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีพิกัดเป็น $\begin{bmatrix} +2 \\ -4 \end{bmatrix}$ และยาว 4.5 หน่วย

แทนค่า $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ ในทุกตัวเลือกจะได้ว่า

1. $\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}(-6\bar{j}) + \frac{1}{3}(6\bar{i}) = 2\bar{i} - 4\bar{j}$

   $|2\bar{i} - 4\bar{j}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$

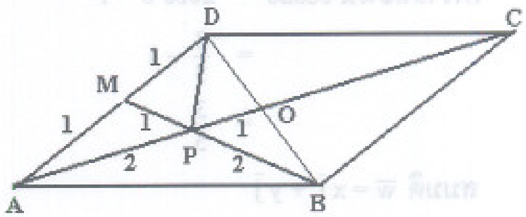
2. $\frac{3}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{2}(-6\bar{j}) + \frac{1}{2}(6\bar{i}) = 3\bar{i} - 9\bar{j}$

3. $\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}(-6\bar{j}) + \frac{1}{2}(6\bar{i}) = 3\bar{i} - 2\bar{j}$

4. $\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(-6\bar{j}) + \frac{1}{3}(6\bar{i}) = 2\bar{i} - 3\bar{j}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง ลากเส้น DB ตัดกับ AC ที่ O



เพราะฉะนั้น P เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานของ

สามเหลี่ยม ABD เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{MP}| : |\overrightarrow{MB}| = 1 : 2$

และ $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$

เพราะว่า M เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DP} &= \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MP} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) \quad \text{(เพราะว่า } \overrightarrow{AB}\text{ , }\overrightarrow{DC}\text{ ขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน)} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}
\end{aligned}$$

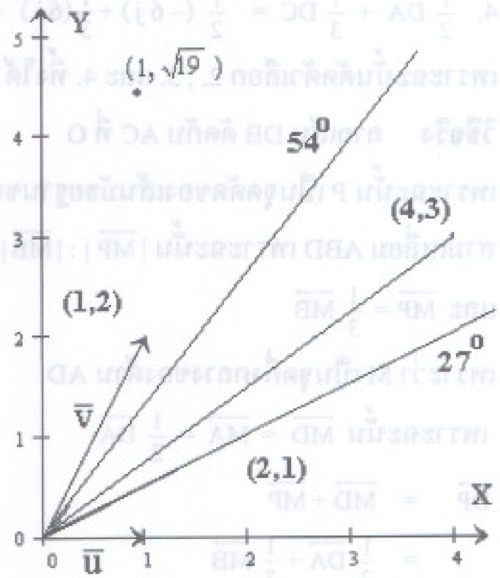
5. วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และทำการวัดมุมที่เวกเตอร์กระทำกัน หรือ วัดความยาวขนาดของเวกเตอร์ หรือวาดรูปเพื่อดูว่าจุดปลายของเวกเตอร์อยู่ในควอดรันท์ใด ก็สามารถช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 5.2.5 กำหนด $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = 2\bar{i} + \bar{j}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เวกเตอร์ $\bar{w}$ ที่ทำมุม 2θ กับเวกเตอร์ $\bar{u}$ คือ เวกเตอร์ในตัวเลือกใด

1. $\bar{i} + 2\bar{j}$
2. $4\bar{i} + 3\bar{j}$
3. $\bar{i} + \sqrt{19}\,\bar{j}$
4. $3\bar{i} + 4\bar{j}$

การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และทำการวัดมุม θ โดยการวัดมุมระหว่าง $\bar{u}$, $\bar{v}$ ได้เท่ากับ 27 องศา ดังนั้น $2\theta = 54$ องศา เวกเตอร์ที่ทำมุม 54 องศากับ $\bar{u}$ คือ $3\bar{i} + 4\bar{j}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง เพราะว่า $\cos\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$



เพราะฉะนั้น
$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

สมมติ $\bar{w} = x\bar{i} + y\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $\cos 2\theta = \dfrac{\bar{u}\cdot\bar{w}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{w}|}$

$$\frac{3}{5} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{9}{25} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$$

$$9x^2 + 9y^2 = 25x^2$$

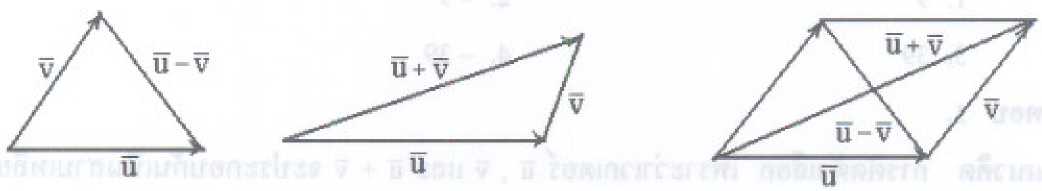
$$9y^2 = 16x^2$$

$$y = \pm\frac{4}{3}x$$

เพราะฉะนั้น $\bar{w} = x\bar{i} + y\bar{j} = x\bar{i} \pm\frac{4}{3}x\,\bar{j} = \frac{x}{3}(3\bar{i} + 4\bar{j})$ ทำมุม 2θ กับเวกเตอร์ $\bar{u}$

เมื่อเลือก $x = 3$ จะได้ $\bar{w} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ ทำมุม 2θ กับเวกเตอร์ $\bar{u}$

6. ใช้ความสัมพันธ์ของเวกเตอร์ที่ประกอบกันเป็นรูปสามเหลี่ยมหรือเวกเตอร์ที่ประกอบกันเป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน เช่น



หรือใช้สูตร $|\bar{u}+\bar{v}| \le |\bar{u}|+|\bar{v}|$

$|\bar{u}-\bar{v}| \le |\bar{u}|+|\bar{v}|$

ตัวอย่างที่ 5.2.6 กำหนด $|\bar{u}| = 8$, $|\bar{v}| = 2$, $|\bar{u}+\bar{v}| = 9$ ค่าของ $|\bar{u}-\bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

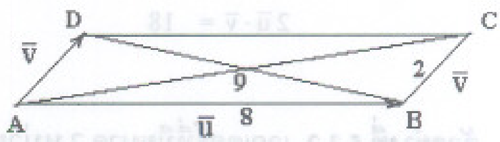
1. 55   2. $\sqrt{55}$
3. $\sqrt{75}$ 4. 75

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|\bar{u}-\bar{v}| \le |\bar{u}|+|\bar{v}| = 10$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

โดยการวาดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน โดยมี

$|\bar{u}| = 8$, $|\bar{v}| = 2$ และ $|\bar{u}+\bar{v}| = 9$ จะได้

$\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{BC} = \bar{v}$



เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DB} = \bar{u}-\bar{v}$ วัดความยาว $\overrightarrow{DB}$ ได้ 7.5 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้น $|\bar{u}-\bar{v}| = 7.5$ เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง

$$
\begin{aligned}
|\bar{u}+\bar{v}|^2 &= |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 \\
81 &= 64 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 4 \\
2\bar{u}\cdot\bar{v} &= 13 \\
-2\bar{u}\cdot\bar{v} &= -13 \\
|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 &= 64 - 13 + 4 \\
|\bar{u}-\bar{v}|^2 &= 55 \\
|\bar{u}-\bar{v}| &= \sqrt{55}
\end{aligned}
$$

5.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

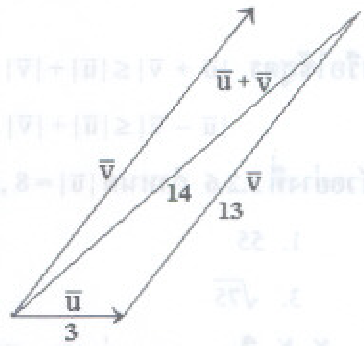
ตัวอย่างที่ 5.3.1 กำหนดให้ $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 13$ และ $|\bar{u} + \bar{v}| = 14$ ค่าของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เท่ากับเท่าใด

1. 9   2. -9

3. 39   4. -39

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ และ $\bar{u} + \bar{v}$ จะประกอบกันเป็นสามเหลี่ยมที่มีความยาวด้านเท่ากับ 3 , 13 และ 14 นิ้วตามลำดับ



ดังนั้นโดยการวาดรูปสามเหลี่ยมจะเห็นว่า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกันเป็นมุมแหลม เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง

$$|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$
$$14^2 = 3^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 13^2$$
$$196 = 9 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 169$$
$$2\bar{u}\cdot\bar{v} = 18$$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 9$

ตัวอย่างที่ 5.3.2 เวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ คือข้อใด

1. $-2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ 2. $-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\-\frac{8}{5}\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}6\\-8\end{bmatrix}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 โดยใช้ขนาดของเวกเตอร์ช่วยในการตัดตัวเลือก

1. $\left|-2\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right| = 2(5) = 10$ 2. $\left|-\frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}\right| = \frac{2}{5}(5) = 2$

3. $\left|\begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\-\frac{8}{5}\end{bmatrix}\right| = 2$ 4. $\left|\begin{bmatrix}6\\-8\end{bmatrix}\right| = \sqrt{36+64} = 10$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้พิกัดจุดปลายของพิกัดของเวกเตอร์ว่าต้องอยู่ในควอดรันท์ใดช่วยใน การตัดตัวเลือก เพราะว่าเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ ต้องมีพิกัดเป็น $\begin{bmatrix}+\\-\end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ คือ $\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 2 หน่วยในทิศทางของ $\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}$ คือ $\frac{2}{5}\begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{6}{5}\\-\frac{8}{5}\end{bmatrix}$

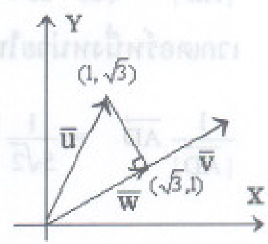
ตัวอย่างที่ 5.3.3 กำหนด $\bar{u} = \bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j}$ และ $\bar{v} = \sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}$ เวกเตอร์ที่เป็นโปรเจคชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\frac{3}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{i} + \frac{3}{2}\,\bar{j}$

3. $\frac{3}{2}\,\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{i} - \frac{3}{2}\,\bar{j}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การวาดรูปก็สามารถตัดตัวเลือกได้



ให้ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์โปรเจคชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$

เพราะว่าโปรเจคชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ ต้องขนานกับเวกเตอร์ $\bar{v}$

เพราะฉะนั้นพิกัดของ $\bar{w}$ ต้องเป็น $\begin{bmatrix}+\\+\end{bmatrix}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า $\bar{w}$ ต้องขนานกับ $\bar{v}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง สูตรโปรเจคชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ คือ $\bar{w} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\cdot\bar{v}$ ควรจำให้ได้

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = (\bar{i} + \sqrt{3}\,\bar{j})\cdot(\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}) = 2\sqrt{3}$$

$$|\bar{v}|^2 = |\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j}| = 3 + 1 = 4$$

$$\bar{w} = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{v}|^2}\,\bar{v} = \frac{2\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}\,\bar{i} + \bar{j})$$

$$= \frac{3}{2}\,\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\bar{j}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.4 กำหนด A(– 1, – 2) , B(3 , 4) , C(5 , 2) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่แทนด้วยส่วนเส้นตรง จากจุด A ไปแบ่งครึ่งด้านตรงข้ามของรูปสามเหลี่ยม ABC คือข้อใด

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$
3. $\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$
4. $\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$

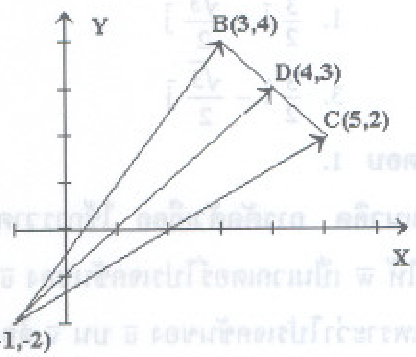
ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์ถามเกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ดังนั้นใช้ขนาดของเวกเตอร์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right| = 1$
2. $\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}\right| = 5$
3. $\left|\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right| = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{3}}$
4. $\left|\frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\right| = \frac{\sqrt{29}}{3\sqrt{3}}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง จุดกึ่งกลาง B , C คือ $D\left(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (4\ , 3)$



$$\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix}4+1\\3+2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}$$

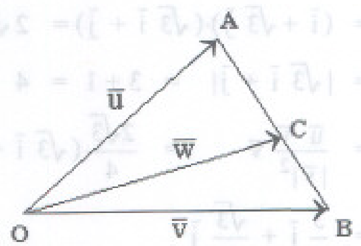
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง $\overrightarrow{AD}$ คือ $\frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}\ \overrightarrow{AD}$

$$\frac{1}{|\overrightarrow{AD}|}\ \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

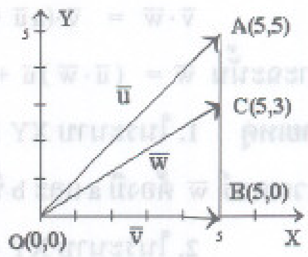
ตัวอย่างที่ 5.3.5 C เป็นจุดบนด้าน AB ของสามเหลี่ยม OBA, $\bar{v} = \overrightarrow{OB}$, $\bar{u} = \overrightarrow{OA}$, $\bar{w} = \overrightarrow{OC}$ และ $|\overrightarrow{AB}| : |\overrightarrow{AC}| = 5 : 2$ เวกเตอร์ใดต่อไปนี้คือ เวกเตอร์ $\bar{w}$

1. $\frac{3}{5}\ \bar{v} - \frac{2}{5}\ \bar{u}$
2. $\frac{3}{5}\ \bar{v} + \frac{2}{5}\ \bar{u}$
3. $\frac{2}{5}\ \bar{v} - \frac{3}{5}\ \bar{u}$
4. $\frac{2}{5}\ \bar{v} + \frac{3}{5}\ \bar{u}$



ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเวกเตอร์ $\bar{v}$, $\bar{u}$, $\bar{w}$ ดังนั้นวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์โดยใช้พิกัดที่คิดเลขง่าย ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้



ตัวอย่างเช่นให้ O (0 , 0) , B (5 , 0) , A (5 , 5) และ C (5 , 3)

จะได้ว่า $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 2$

แทนค่า $\bar{v} = 5\bar{i}$, $\bar{u} = 5\bar{i} + 5\bar{j}$, $\bar{w} = 5\bar{i} + 3\bar{j}$ ในทุกตัวเลือก

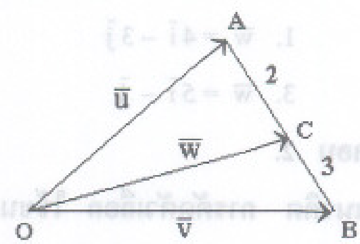
ตัวเลือก 1. $\frac{3}{5}\bar{v} - \frac{2}{5}\bar{u} = \frac{3}{5}(5\bar{i}) - \frac{2}{5}(5\bar{i} + 5\bar{j}) = 3\bar{i} - 2\bar{i} - 2\bar{j} = \bar{i} - 2\bar{j} \neq \bar{w}$

ตัวเลือก 2. $\frac{3}{5}\bar{v} + \frac{2}{5}\bar{u} = \frac{3}{5}(5\bar{i}) + \frac{2}{5}(5\bar{i} + 5\bar{j}) = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{j} = 5\bar{i} + 2\bar{j} \neq \bar{w}$

ตัวเลือก 3. $\frac{2}{5}\bar{v} - \frac{3}{5}\bar{u} = \frac{2}{5}(5\bar{i}) - \frac{3}{5}(5\bar{i} + 5\bar{j}) = -\bar{i} - 3\bar{j} \neq \bar{w}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง ใช้การจัดรูปพีชคณิตของเวกเตอร์



$$\bar{w} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \bar{u} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB}) = \bar{u} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \bar{u} + \frac{2}{5}(-\bar{u} + \bar{v}) = \frac{3}{5}\bar{u} + \frac{2}{5}\bar{v} = \frac{2}{5}\bar{v} + \frac{3}{5}\bar{u}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.6 กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ตั้งฉากกันและ $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\bar{w} = (\bar{w}\cdot\bar{u})\bar{u} + (\bar{w}\cdot\bar{v})\bar{v}$
2. $\bar{w} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{w}\cdot\bar{u})\bar{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{w}\cdot\bar{v})\bar{v}$
3. $\bar{w} = \frac{|\bar{w}|+1}{\bar{u}\cdot\bar{w}}\bar{u} + \frac{|\bar{w}|+1}{\bar{v}\cdot\bar{w}}\bar{v}$
4. $\bar{w} = \frac{|\bar{w}|+1}{\bar{u}\cdot\bar{w}}\bar{v} + \frac{|\bar{w}|+1}{\bar{v}\cdot\bar{w}}\bar{u}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร

แทนค่า $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = \bar{j}$, $\bar{w} = \bar{i}$ จะได้ว่า $\bar{u} \perp \bar{v}$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

เพราะว่า $\bar{v}\cdot\bar{w} = \bar{j}\cdot\bar{i} = 0$ เพราะฉะนั้น $\frac{|\bar{w}|+1}{\bar{v}\cdot\bar{w}}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{w}\cdot\bar{u})\bar{u} + \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{w}\cdot\bar{v})\bar{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} \neq \bar{w}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง สมมติ $\overline{w} = a\overline{u} + b\overline{v}$

เพราะว่า $\overline{u}\cdot\overline{w} = \overline{u}\cdot(a\overline{u} + b\overline{v}) = a(\overline{u}\cdot\overline{u}) + b(\overline{u}\cdot\overline{v}) = a(|\overline{u}|^2) + b(0) = a$

$\overline{v}\cdot\overline{w} = \overline{v}\cdot(a\overline{u} + b\overline{v}) = a(\overline{v}\cdot\overline{u}) + b(\overline{v}\cdot\overline{v}) = a(0) + b(|\overline{v}|^2) = b$

เพราะฉะนั้น $\overline{w} = (\overline{u}\cdot\overline{w})\overline{u} + (\overline{v}\cdot\overline{w})\overline{v} = (\overline{w}\cdot\overline{u})\overline{u} + (\overline{w}\cdot\overline{v})\overline{v}$

หมายเหตุ 1. ในระนาบ XY $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันและ $|\overline{u}| = |\overline{v}| = 1$ ทุกเวกเตอร์ $\overline{w}$ ต้องมี a และ b ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\overline{w} = a\overline{u} + b\overline{v}$ $(a = \overline{w}\cdot\overline{v}, b = \overline{w}\cdot\overline{u})$

2. ในระนาบ XY $\overline{u}$ และ $\overline{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน ทุกเวกเตอร์ $\overline{w}$ ต้องมี a และ b ที่เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $\overline{w} = a\overline{u} + b\overline{v}$ $(a = \overline{w}\cdot\overline{v}, b = \overline{w}\cdot\overline{u})$

ตัวอย่างที่ 5.3.7 กำหนด $\overline{u} = 8\overline{i} + 6\overline{j}$, $\overline{v} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$ $\overline{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\overline{v}$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\overline{w} = 4\overline{i} - 3\overline{j}$
2. $\overline{w} = 4\overline{i} + 3\overline{j}$
3. $\overline{w} = 5\overline{i} - \overline{j}$
4. $\overline{w} = -4\overline{i} - 2\overline{j}$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ใช้ขนาดและทิศทางของเวกเตอร์ช่วยในการตัดตัวเลือก เพราะว่าทิศทาง $\overline{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overline{u}$ เพราะฉะนั้น $\overline{w} = (+)\overline{i} + (+)\overline{j}$ ซึ่งมีตัวเลือกเดียวที่ขนานกับเวกเตอร์ $\overline{u} = 8\overline{i} + 6\overline{j}$ คือ $4\overline{i} + 3\overline{j}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

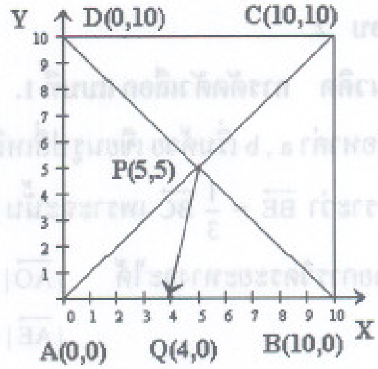
วิธีจริง $\overline{w} = (|\overline{v}|)\left(\frac{1}{|\overline{u}|}\right)\overline{u} = \sqrt{9+16}\left(\frac{1}{\sqrt{64+36}}\right)\overline{u} = \frac{5}{10}(8\overline{i} + 6\overline{j}) = 4\overline{i} + 3\overline{j}$

ตัวอย่างที่ 5.3.8 กำหนด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน P เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกันจุด Q อยู่บนด้าน AB ทำให้ $|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QB}| = 2 : 3$ ถ้า $\overline{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overline{v} = \overrightarrow{AD}$ แล้ว $\overrightarrow{PQ}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\frac{1}{6}(\overline{u} - 3\overline{v})$
2. $\frac{1}{6}(7\overline{u} + 3\overline{v})$
3. $-\frac{1}{10}(\overline{u} - \overline{v})$
4. $-\frac{1}{10}(\overline{u} + 5\overline{v})$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์ แล้วกำหนดพิกัดของจุดให้สอดคล้องกับอัตราส่วนที่โจทย์กำหนด ก็จะสามารถจำแนกตัวเลือกได้



เลือกพิกัด A(0 , 0) , B(10 , 0) , C(10 , 10) , D(0 , 10)

เพราะว่า P เป็นจุดตัดของเส้นทแยงมุม

เพราะฉะนั้นพิกัด P (5 , 5)

เพราะว่า $|\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QB}| = 2 : 3$

เพราะฉะนั้นพิกัด Q คือ Q (4 , 0)

เพราะฉะนั้น $\bar{u} = \overrightarrow{AB} = 10\bar{i}$, $\bar{v} = \overrightarrow{AD} = 10\bar{j}$

และ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 4-5 \\ 0-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix} = -\bar{i} - 5\bar{j}$

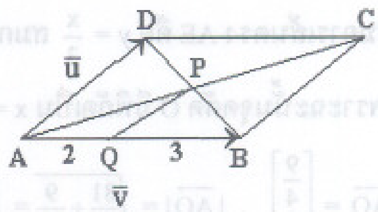
แทนค่า $\bar{u} = \overrightarrow{AB} = 10\bar{i}$, $\bar{v} = \overrightarrow{AD} = 10\bar{j}$ ในตัวเลือกแต่ละตัวจะได้ว่า

ตัวเลือก 1. $\frac{1}{6}(\bar{u} - 3\bar{v}) = \frac{1}{6}(10\bar{i} - 30\bar{j}) \neq \overrightarrow{PQ}$

ตัวเลือก 2. $\frac{1}{6}(7\bar{u} + 3\bar{v}) = \frac{70}{6}\bar{i} + \frac{30}{6}\bar{j} \neq \overrightarrow{PQ}$

ตัวเลือก 3. $-\frac{1}{10}(\bar{u} - \bar{v}) = -\bar{i} + \bar{j} \neq \overrightarrow{PQ}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้



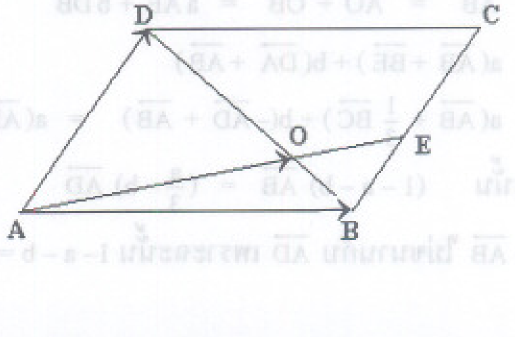
วิธีจริง โดยการจัดรูปพีชคณิตของเวกเตอร์

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} \\
&= -\overrightarrow{AP} + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB}) \quad (\because |\overrightarrow{AQ}| : |\overrightarrow{QB}| = 2:3) \\
&= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}) + \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB}) \quad = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{1}{2}(\bar{v} + \bar{u}) + \frac{2}{5}\bar{u} \quad = -\frac{1}{2}\bar{v} - \frac{1}{10}\bar{u} \quad = -\frac{1}{10}(\bar{u} + 5\bar{v})
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.9 ABCD เป็นสามเหลี่ยมด้านขนาน $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{DB}$

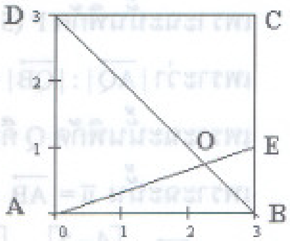
ค่าของ a , b เท่ากับเท่าใด

1. $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$
2. $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$
3. $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{5}$
4. $a = \frac{5}{6}$, $b = \frac{1}{6}$



ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก แบบที่ 1.** วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และทำการวัดระยะทาง เพื่อหาค่า a , b เริ่มด้วย เขียนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสยาวด้านละ 3 นิ้ว



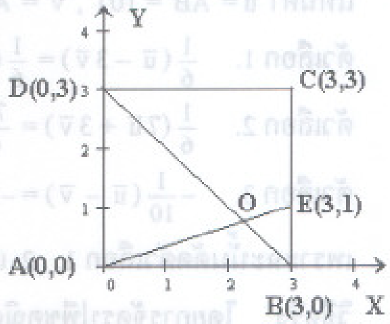
เพราะว่า $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{BE}| = 1$

โดยการวัดระยะทางจะได้ $|\overrightarrow{AO}| = 2.4$ นิ้ว , $|\overrightarrow{OB}| = 1.1$ นิ้ว

$|\overrightarrow{AE}| = 3.2$ นิ้ว , $|\overrightarrow{DB}| = 4.4$ นิ้ว

เพราะฉะนั้น $a = \frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{2.4}{3.2} = \frac{3}{4}$, $b = \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{1.1}{4.4} = \frac{1}{4}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2. สมมติพิกัดให้สอดคล้องเงื่อนไขโจทย์



ให้ A (0 , 0) , B (3 , 0) , C (3 , 3) และ D (0 , 3)

เพราะว่า $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ เพราะฉะนั้น E มีพิกัดเป็น (3 , 1)

สมการเส้นตรง AE คือ $y = \frac{x}{3}$ สมการเส้นตรง BD คือ $x + y = 3$

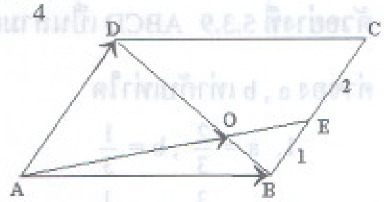
เพราะฉะนั้นจุดตัด O มีพิกัดเป็น $x = \frac{9}{4}$, $y = \frac{3}{4}$

$\overrightarrow{AO} = \begin{bmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $|\overrightarrow{AO}| = \sqrt{\frac{81}{16}+\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{90}{16}} = \frac{3}{4}\sqrt{10}$ $\qquad \overrightarrow{AE} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{OB} = \begin{bmatrix} 3-\frac{9}{4} \\ 0-\frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$ $\qquad \overrightarrow{BD} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, $|\overrightarrow{BD}| = 3\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $a = \frac{|\overrightarrow{AO}|}{|\overrightarrow{AE}|} = \frac{\left(\frac{3}{4}\sqrt{10}\right)}{\sqrt{10}} = \frac{3}{4}$ และ $b = \frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{DB}|} = \frac{\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.



วิธีจริง $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = a\overrightarrow{AE} + b\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{AB} = a(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) + b(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AB} = a(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) + b(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}) = a(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}) + b(-\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB})$

เพราะฉะนั้น $(1 - a - b)\,\overrightarrow{AB} = (\frac{a}{3} - b)\,\overrightarrow{AD}$

เพราะว่า $\overrightarrow{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overrightarrow{AD}$ เพราะฉะนั้น $1 - a - b = 0$ และ $\frac{a}{3} - b = 0$ สรุป $a = \frac{3}{4}$, $b = \frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 5.3.10 กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ แล้วค่าของ cosθ เท่ากับเท่าใด

1. $1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$ 2. $1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

3. $-1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$ 4. $-1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1. เพราะว่าถ้า $\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 > 0$ และ $-1 \le \cos\theta \le 1$

เพราะฉะนั้น $1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 > 1$ และ $-1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 < -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ $\bar{u}$, $\bar{v}$

แทนค่า $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{i}$ จะได้ $\theta = 0$, $\cos\theta = 1$, $\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = 0$

แทนค่า $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{i}$ ในทุกตัวเลือกจะได้ว่า

1. $1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = 1$ 2. $1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = 1$

3. $-1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = -1$ 4. $-1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2 = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

แทนค่า $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{j}$ จะได้ $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta = 0$ แทนค่า $\bar{u}=\bar{i}$, $\bar{v}=\bar{j}$ ในตัวเลือกที่เหลือจะได้

ตัวเลือก 1. $1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{i}}{|\bar{i}|}-\frac{\bar{j}}{|\bar{j}|}\right|^2 = 1-\frac{1}{2}(2) = 0$

ตัวเลือก 2. $1+\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{i}}{|\bar{i}|}-\frac{\bar{j}}{|\bar{j}|}\right|^2 \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

วิธีจริง $\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right)\cdot\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right) = -\frac{1}{2}\left(-2\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right)\cdot\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)\right)$

$$= -\frac{1}{2}\left(1-2\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right)\cdot\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)+1\right)+1 = 1-\frac{1}{2}\left(\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right|^2-2\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}\right)\cdot\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right)+\left|\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2\right)$$

$$= 1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$$

สรุป $\cos\theta = 1-\frac{1}{2}\left|\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|}-\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}\right|^2$

ตัวอย่างที่ 5.3.11 กำหนด $\bar{u}, \bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

ถ้า $|3\bar{u} - 2\bar{v}| = \sqrt{7}$ แล้ว มุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\pi + \operatorname{arcsec}(2)$
2. $\pi - \operatorname{arcsec}(2)$
3. $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{2})$
4. $\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{2})$

ตอบ 4.

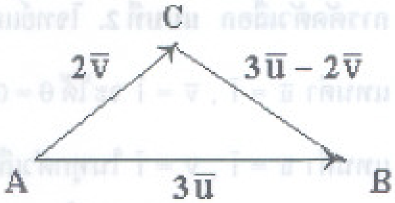
แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\pi + \operatorname{arcsec}(2) > \pi$ และมุมระหว่างเวกเตอร์ต้องมีค่าระหว่าง 0 กับ π พิจารณาค่ามุมที่ตัวเลือกที่เหลือ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

2. $\pi - \operatorname{arcsec}(2) = \pi - \arccos(\frac{1}{2}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$
3. $\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$
4. $\frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$

จากโจทย์ $|3\bar{u}| = 3$, $|2\bar{v}| = 2$, $|3\bar{u} - 2\bar{v}| = \sqrt{7}$

โดยใช้รูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีความยาวด้านเป็น 3, 2, $\sqrt{7}$

ให้ $\overrightarrow{AB} = 3\bar{u}$, $\overrightarrow{AC} = 2\bar{v}$ และ $\overrightarrow{CB} = 3\bar{u} - 2\bar{v}$



จากรูป $\hat{A}$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}, \bar{v}$ โดยการวัดมุมจะได้ $A = 30^\circ$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง

$$|3\bar{u} - 2\bar{v}| = \sqrt{7}$$

$$|3\bar{u} - 2\bar{v}|^2 = 7$$

$$9|\bar{u}|^2 - 2(3\bar{u})\cdot(2\bar{v}) + 4|\bar{v}|^2 = 7$$

$$9 - 12(\bar{u}\cdot\bar{v}) + 4 = 7$$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|} = \bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{2}$$

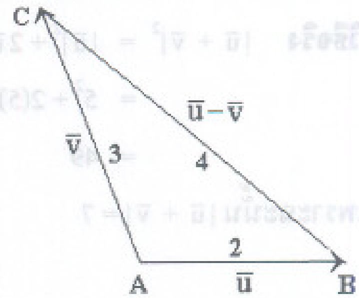
$$\theta = \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{1}{2})$$

ตัวอย่างที่ 5.3.12 ถ้า $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 3$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 4$ แล้ว $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u} + \bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $11\sqrt{6}$
2. $-\frac{3}{2}\sqrt{10}$
3. $-4\sqrt{10}$
4. $\sqrt{13}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการวาดรูปสามเหลี่ยมเพื่อดูมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ จะเห็นได้ว่า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกันเป็นมุมป้าน



เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} < 0$ และ $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}| < 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

$$
\begin{aligned}
|\bar{u}-\bar{v}| &= 4 \\
|\bar{u}-\bar{v}|^2 &= 16 \\
|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 &= 16 \\
4 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 9 &= 16 \\
\bar{u}\cdot\bar{v} &= -\frac{3}{2} \qquad \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)} \\
4 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 9 &= +13-3 \\
|\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 &= 10 \\
|\bar{u}+\bar{v}|^2 &= 10 \\
|\bar{u}+\bar{v}| &= \sqrt{10}
\end{aligned}
$$

จาก (1) $\bar{u}\cdot\bar{v} = -\frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $(\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{u}+\bar{v}| = -\frac{3}{2}\sqrt{10}$

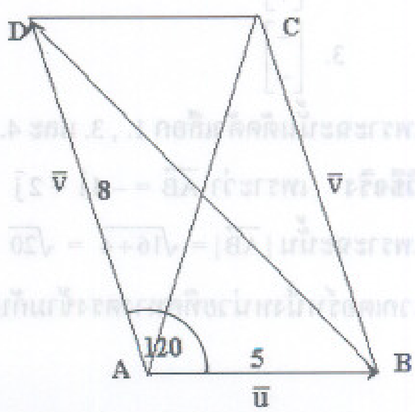
ตัวอย่างที่ 5.3.13 ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เท่ากับ 120 องศา $|\bar{u}| = 5$ และ $|\bar{v}| = 8$ แล้ว $|\bar{u}+\bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{109}$ 2. $\sqrt{89}$
3. 8 4. 7

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์

1. ลาก AB ยาว 5 เซนติเมตร
2. วัดมุม BAD กาง 120 องศา
3. ลาก AD ยาว 8 เซนติเมตร
4. ลาก BC ขนานกับ AD



เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $B\hat{A}D = 120°$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{AC} = \bar{u} + \bar{v}$ วัดความยาว $\overrightarrow{AC}$ ได้ 7 เซนติเมตร

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta + |\bar{v}|^2$

$= 5^2 + 2(5)(8)\cos 120° + 8^2 = 25 - 40 + 64$

$= 49$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u} + \bar{v}| = 7$

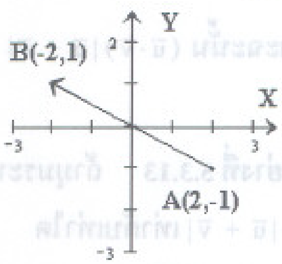
ตัวอย่างที่ 5.3.14 กำหนด A (2 , – 1) , B (– 2 , 1)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใด

1. $-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$
2. $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$
3. $-\frac{2}{\sqrt{5}}\,\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$
4. $\frac{2}{\sqrt{5}}\,\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปและดูพิกัดของ $\overrightarrow{AB}$ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้



จากรูปพิกัด $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-2 \\ 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$

ต้องมีเครื่องหมายพิกัดเป็น $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$

เพราะว่าพิกัดของเวกเตอร์ในตัวเลือกแต่ละตัวมีเครื่องหมายเป็น

1. $\begin{bmatrix} - \\ + \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} + \\ - \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} - \\ - \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$

เพราะฉะนั้น $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $= -\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}(-4\bar{i}+2\bar{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\,\bar{j}$

ตัวอย่างที่ 5.3.15 กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มี $|\bar{u}| = 3$, $|\bar{v}| = 5$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = 7$ มุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับเท่าใด

1. $0°$ 2. $60°$
3. $120°$ 4. $180°$

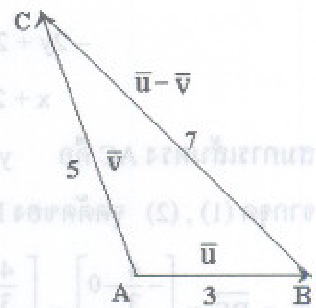
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ทำได้โดยการวาดรูปสามเหลี่ยม ABC และวัดขนาดของมุม วาดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยให้มีด้านยาว 3 , 5 , 7 เซนติเมตรตามลำดับ

$|\overrightarrow{AB}| = 3$, $|\overrightarrow{AC}| = 5$, $|\overrightarrow{BC}| = 7$ เมื่อ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$ จะได้ $\overrightarrow{CB} = \bar{u} - \bar{v}$

โดยการวัดมุม $B\hat{A}C$ ได้ $120°$

เพราะฉะนั้นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ 120 องศา



วิธีจริง

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = 7^2$$
$$|\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = 49$$
$$9 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + 25 = 49$$
$$\bar{u}\cdot\bar{v} = -\frac{15}{2}$$
$$\frac{\bar{u}\cdot\bar{v}}{|\bar{u}||\bar{v}|} = -\frac{15}{2|\bar{u}||\bar{v}|} = -\frac{15}{2(3)(5)}$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = 120°$$

หมายเหตุ ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ ทำมุมกัน $0°$ จะได้ว่า $|\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{u}| + |\bar{v}|$

ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ ทำมุมกัน $180°$ จะได้ว่า $|\bar{u} - \bar{v}| = ||\bar{u}| - |\bar{v}||$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งไปก่อนก็ได้

ตัวอย่างที่ 5.3.16 กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน P เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC , เส้นตรง DP ตัดกับเส้นตรง AC ที่จุด E ให้ $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{v}$ และ $\overrightarrow{DE} = \bar{w}$ เวกเตอร์ $\bar{w}$ เท่ากับเวกเตอร์ในตัวเลือกใด

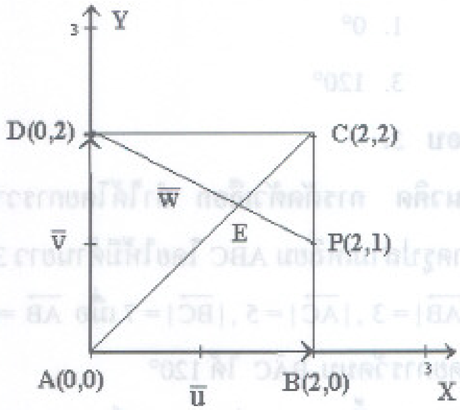
1. $\frac{1}{2}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$ 2. $\frac{2}{3}\bar{u} - \frac{1}{3}\bar{v}$
3. $\frac{1}{2}\bar{u} - \frac{1}{2}\bar{v}$ 4. $\frac{1}{3}\bar{u} + \frac{1}{2}\bar{v}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์แล้วตรวจสอบเวกเตอร์ $\overline{w}$ กับตัวเลือก

ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีพิกัด

$A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$



เพราะฉะนั้น $\overline{u} = \overrightarrow{AB} = 2\overline{i}$, $\overline{v} = \overrightarrow{AD} = 2\overline{j}$

เพราะว่า P เป็นจุดกึ่งกลาง BC

เพราะฉะนั้นพิกัด P คือ (2 , 1)

สมการเส้นตรง DP คือ $y - 1 = \left(\frac{2-1}{0-2}\right)(x-2)$

$$-2y + 2 = x - 2$$

$$x + 2y = 4 \qquad (1)$$

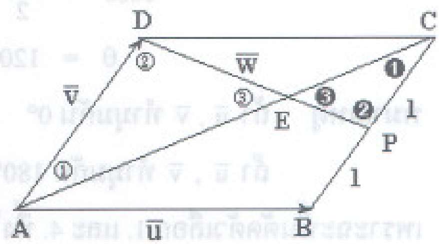
สมการเส้นตรง AC คือ $y = x \qquad (2)$

จากจุด (1) , (2) จุดตัดของ DP และ AC คือ $y = \frac{4}{3}$, $x = \frac{4}{3}$ เพราะฉะนั้นพิกัด E คือ $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$

$$\overline{w} = \overrightarrow{DE} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}-0 \\ \frac{4}{3}-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{4}{3}\overline{i} - \frac{2}{3}\overline{j} = \frac{2}{3}(2\overline{i}) - \frac{1}{3}(2\overline{j}) = \frac{2}{3}\overline{u} - \frac{1}{3}\overline{v}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง สามเหลี่ยม AED และ EPC เป็นสามเหลี่ยมคล้าย



เพราะฉะนั้น $\frac{|\overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{EC}|} = \frac{|\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{PC}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}|} = 2$

$$|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{EC}|$$

ดังนั้น $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = -\overline{v} + \frac{2}{3}(\overline{u} + \overline{v}) = \frac{2}{3}\overline{u} - \frac{1}{3}\overline{v}$

ตัวอย่างที่ 5.3.17 กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยม โดยมีเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB} = 2\overline{i}$, $\overrightarrow{BC} = \overline{i} + \overline{j}$, $\overrightarrow{CD} = \overline{i} - 3\overline{j}$ เวกเตอร์ $\overrightarrow{DA}$ จะขนานกับเวกเตอร์ใด

1. $2\overline{i} - 4\overline{j}$ 2. $-2\overline{i} + 4\overline{j}$

3. $-4\overline{i} - 2\overline{j}$ 4. $4\overline{i} - 2\overline{j}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าโจทย์เป็นสูตรในเทอมของเวกเตอร์และพิกัดของจุด ดังนั้นสมมติ A มีพิกัด (0 , 0) ก็สามารถหาเหตุผลในการตัดตัวเลือกได้

เพราะว่า $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-0\\0-0\end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น B มีพิกัด (2 , 0)

เพราะว่า $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-2\\1-0\end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น C มีพิกัด (3 , 1)

เพราะว่า $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4-3\\-2-1\end{bmatrix}$ เพราะฉะนั้น C มีพิกัด (4 , – 2)

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DA} = \begin{bmatrix}4\\+2\end{bmatrix} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \bar{0}$

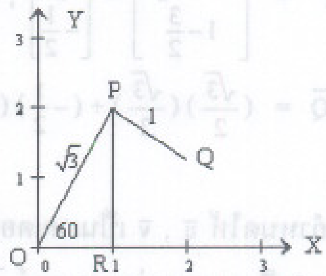
$$(2\bar{i}) + (\bar{i} + \bar{j}) + (\bar{i} - 3\bar{j}) + \overrightarrow{DA} = \bar{0}$$

$$4\bar{i} - 2\bar{j} + \overrightarrow{DA} = \bar{0}$$

$$\overrightarrow{DA} = -4\bar{i} + 2\bar{j}$$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{DA}$ ขนานกับ $4\bar{i} - 2\bar{j}$

ตัวอย่างที่ 5.3.18 จากรูปที่กำหนดให้ ค่าของ $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RQ}$ เท่ากับเท่าใด

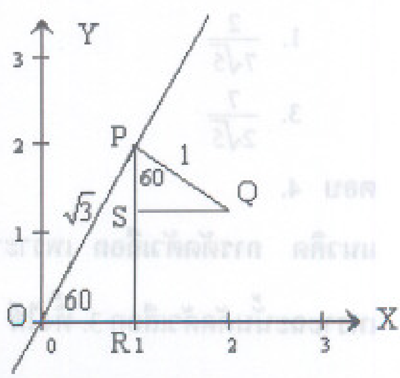


1. 0
2. 0.25
3. 0.50
4. 1.75

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\overrightarrow{PQ}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{RQ}$ เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RQ} \neq 0$ ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

ต่อไปวาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และทำการวัดพิกัด จากการวัดได้พิกัด P (0.9 , 1.5) , Q (1.8 , 1) , R (0.9 , 0)



เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}0.9\\-0.5\end{bmatrix}$, $\overrightarrow{RQ} = \begin{bmatrix}0.9\\1\end{bmatrix}$

ดังนั้น $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RQ} = (0.81) - (0.5) = 0.31$

สรุปเลือกตัวเลือก 2. ดีกว่า

วิธีจริง การหาพิกัด S

$$\sin 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{QS}|}{|\overrightarrow{PQ}|} , \cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{PS}|}{|\overrightarrow{PQ}|}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{QS}|}{1} , \cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{PS}|}{1}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = |\overrightarrow{QS}| \quad , \quad \frac{1}{2} = \frac{|\overrightarrow{PS}|}{1}$$

เพราะฉะนั้นพิกัด S คือ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$

เพราะฉะนั้นพิกัด Q คือ $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = (\sqrt{3}, 1)$

$$\cos 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{|\overrightarrow{OP}|} \quad , \quad \sin 60^\circ = \frac{|\overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|\overrightarrow{OR}|}{\sqrt{3}} \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\overrightarrow{RP}|}{\sqrt{3}}$$

$$|\overrightarrow{OR}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad |\overrightarrow{RP}| = \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้นพิกัด R คือ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ และพิกัด P คือ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$

เพราะฉะนั้น $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{RQ} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RQ} = (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (-\frac{1}{2})(1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0.25$$

ตัวอย่างที่ 5.3.19 กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ทำมุมกัน 120°

ถ้า $\overrightarrow{A} = 2\bar{u} - \bar{v}$ และ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\overrightarrow{A}$ กับ $\bar{u}$ แล้ว cosθ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{7\sqrt{5}}$
2. $\frac{2}{5\sqrt{7}}$
3. $\frac{7}{2\sqrt{5}}$
4. $\frac{5}{2\sqrt{7}}$

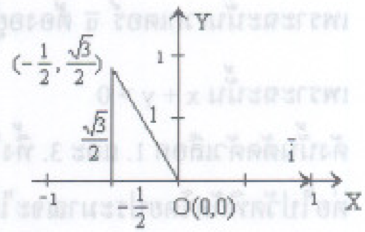
ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $-1 \le \cos\theta \le 1$ และ $\frac{7}{2\sqrt{5}} > 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ต่อไปเลือก $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่นเลือก $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = -\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$

จะได้ $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 1$ และ $\bar{u}$, $\bar{v}$ ทำมุมกัน 120 องศา



เมื่อ $\vec{A} = 2\bar{u} - \bar{v}$

$$= 2\bar{i} - (-\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}) = \frac{5}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}$$

เพราะฉะนั้น $\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\cdot\bar{u}}{|\vec{A}|\cdot|\bar{u}|} = \dfrac{(\frac{5}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{j})\,(\bar{i})}{(\sqrt{7})\,(1)} = \dfrac{5}{2\sqrt{7}}$

ดังนั้นเลือกตัวเลือก 4. เป็นคำตอบได้

วิธีจริง $A = 2\bar{u} - \bar{v}$

$$|\vec{A}|^2 = |2\bar{u} - \bar{v}|^2 = 4|\bar{u}|^2 - 2(2\bar{u})\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$$

$$= 4 - 4(\bar{u}\cdot\bar{v}) + 1 = 4 - 4(|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 120^\circ) + 1$$

$$= 5 - 4(-\frac{1}{2}) = 7$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{7}$$

$$\vec{A}\cdot\bar{u} = (2\bar{u} - \bar{v})\cdot\bar{u} = 2\bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{u} = 2|\bar{u}|^2 - |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cdot\cos 120^\circ$$

$$= 2 - (-\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\bar{u}}{|\vec{A}|\cdot|\bar{u}|} = \frac{(\frac{5}{2})}{(\sqrt{7})(1)} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$$

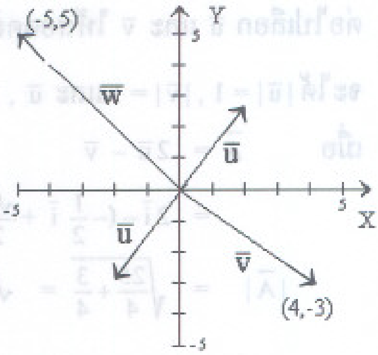
ตัวอย่างที่ 5.3.20 กำหนด $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ $\bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j}, \bar{v} = 4\bar{i} - 3\bar{j}, \bar{w} = -5\bar{i} + 5\bar{j}$

$\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$, ขนาดของ $\bar{u}$ เท่ากับ 3 และ $\bar{u}\cdot\bar{w} > 0$ ค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{3}{5}$
2. $\frac{3}{5}$
3. $-\frac{21}{5}$
4. $\frac{21}{5}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปตามเงื่อนไขของโจทย์และวัดพิกัดของเวกเตอร์ $\bar{u}$ ก็จะสามารถประมาณค่า $x + y$ ได้



$\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ มีได้ 2 ทิศทาง แต่มุมระหว่าง $\bar{u}$, $\bar{w}$ ต้องเป็นมุมแหลม (เนื่องจาก $\bar{u}\cdot\bar{w} > 0$)

เพราะฉะนั้นเวกเตอร์ $\bar{u}$ ต้องอยู่ในทิศทาง $\begin{bmatrix}+\\+\end{bmatrix}$

เพราะฉะนั้น $x + y > 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

ต่อไปวัดพิกัดโดยประมาณจะได้ว่า $x + y > 1$ แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\quad \bar{u} = x\bar{i} + y\bar{j}$, $\bar{v} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$, $\bar{w} = -5\bar{i} + 5\bar{j}$

เพราะว่า $\bar{u} \perp \bar{v}$ เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$

$$4x - 3y = 0 \qquad \text{———— (1)}$$

เพราะว่า $|\bar{u}| = 3$ เพราะฉะนั้น $x^2 + y^2 = 9$ ———— (2)

เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{w} > 0$ เพราะฉะนั้น $-5x + 5y > 0$

$$x - y < 0 \qquad \text{———— (3)}$$

จาก (1) และ (2) $\quad x^2 + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 = 9$

$$\frac{25x^2}{9} = 9$$

$$x^2 = \frac{81}{25}$$

$$x = \pm\frac{9}{5}$$

$$y = \frac{4}{3}x = \frac{4}{3}(\pm\frac{9}{5}) = \pm\frac{12}{5}$$

$$(x , y) = (\frac{9}{5} , \frac{12}{5}) , (-\frac{9}{5} , -\frac{12}{5})$$

เพราะว่า $x - y < 0$ เพราะฉะนั้น $x = \frac{9}{5}$, $y = \frac{12}{5}$

สรุป $x + y = \frac{21}{5}$

5.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเวกเตอร์

1. ถ้า $m\overrightarrow{A} + n\overrightarrow{B} = \vec{0}$ แล้ว $m = 0$ หรือ $n = 0$
2. โปรเจคชันของ $\bar{u}$ บน $\bar{v}$ ต้องมีขนาดยาวกว่า $|\bar{u}|$
3. ถ้า $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{C}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้วจะมีจำนวนจริง m และ n ที่ทำให้ $\overrightarrow{C} = m\overrightarrow{A} + n\overrightarrow{B}$
4. กำหนด $\overrightarrow{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $m\overrightarrow{A} = n\overrightarrow{A}$ แล้ว $m = n$
5. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน และ $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้ว $|\bar{u} - 2\bar{v}| = |2\bar{u} - \bar{v}|$
6. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย แล้ว $|\bar{u} - 2\bar{v}| = |2\bar{u} - \bar{v}|$
7. $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ $|\bar{u} - \bar{v}| \le |\bar{u} + \bar{v}|$
8. $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่มิใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{w}$ แล้ว $\bar{v} = \bar{w}$
9. $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่มิใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $|\bar{u}| = |\bar{v}|$ แล้ว $|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{u} + \bar{v}|$
10. $(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 \le (\bar{u}\cdot\bar{u})\cdot(\bar{v}\cdot\bar{v})$
11. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ และ $|\bar{v}| = 1$ แล้ว $(\bar{u} - (\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v})$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$
12. $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ และ $|\bar{u}| \ne 0$ แล้ว $|\bar{v}| = 0$
13. $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ
    ถ้า $|\bar{u}| < |\bar{v}|$ และ $\bar{u}$ ไม่ขนานกับ $\bar{v}$
    แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u} + \bar{v}$ กับ $\bar{u} - \bar{v}$ เป็นมุมป้าน
14. $\bar{u}$, $\bar{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ $|\bar{u} + \bar{v}| < |\bar{u} - \bar{v}|$ ก็ต่อเมื่อ มุมระหว่าง $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นมุมป้าน
15. ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์หนึ่งหน่วย $\bar{u}$, $\bar{v}$ แล้ว $\dfrac{|\bar{u} - \bar{v}|}{2} = \sin\dfrac{\theta}{2}$
16. ทุกเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$ จะได้ว่า $|\bar{u}\cdot\bar{v}| \le |\bar{u}||\bar{v}|$
17. ถ้า $\bar{u} + \bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{u} - \bar{v}$ แล้ว $|\bar{u}| = |\bar{v}|$
18. ถ้า $|\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{u} - \bar{v}|$ แล้ว $|\bar{u}| = |\bar{v}|$
19. ถ้า $\bar{u}$, $\bar{v}$ ขนานกัน แล้ว $|\bar{u} + 2\bar{v}| = |2\bar{u} + \bar{v}|$
20. $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และไม่ขนานกัน และ m , n เป็นจำนวนจริง ถ้า $m\bar{u} + n\bar{v} = \bar{0}$ แล้ว $m = n = 0$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับเวกเตอร์

1. ผิด ตัวอย่างเช่น $\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\vec{B}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$, $m=1$, $n=1$

$$m\vec{A}+n\vec{B}=(1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+(1)\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $\overline{u}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $\overline{v}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\overline{w}$ = โปรเจคชันของ $\overline{u}$ บน $\overline{v}$ $=\dfrac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{|\overline{v}|^2}\cdot\overline{v}=\dfrac{(1)}{(1)^2}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$|\overline{w}|=1$ และ $|\overline{u}|=\sqrt{2}$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น $\vec{A}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{B}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{C}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

จะเห็นว่า $m\vec{A}+n\vec{B}=\begin{bmatrix}m\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}m+n\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\vec{C}$ ทุกค่า m และ n

4. ถูกต้อง เพราะว่า $\vec{A}\neq\vec{0}$ เพราะฉะนั้น $|\vec{A}|\neq 0$

จาก
$$m\vec{A} = n\vec{A}$$
$$|m\vec{A}| = |n\vec{A}|$$
$$|m||\vec{A}| = |n||\vec{A}|$$
$$|m| = |n|$$

เพราะว่า m และ n เครื่องหมายต้องเหมือนกัน เพราะฉะนั้น $m=n$

5. ถูกต้อง เพราะว่า $\overline{u}$, $\overline{v}$ ตั้งฉากกัน เพราะฉะนั้น $\overline{u}\cdot\overline{v}=0$

$$|\overline{u}-2\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2-2(\overline{u}\cdot(2\overline{v}))+|2\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2-4(\overline{u}\cdot\overline{v})+4|\overline{v}|^2$$
$$= |\overline{u}|^2+4|\overline{v}|^2 \qquad = |\overline{u}|^2+4|\overline{v}|^2 \qquad = 5|\overline{v}|^2$$

ทำนองเดียวกัน $|2\overline{u}-\overline{v}|^2 = 5|\overline{v}|^2$ สรุป $|\overline{u}-2\overline{v}|^2 = |2\overline{u}-\overline{v}|^2$

เพราะฉะนั้น $|\overline{u}-2\overline{v}| = |2\overline{u}-\overline{v}|$

6. ถูกต้อง เพราะว่า $|\overline{u}|=|\overline{v}|=1$

$$|\overline{u}-2\overline{v}|^2 = |\overline{u}|^2-4\overline{u}\cdot\overline{v}+4|\overline{v}|^2 = 5-4\overline{u}\cdot\overline{v}$$
$$|2\overline{u}-\overline{v}|^2 = |2\overline{u}|^2-4\overline{u}\cdot\overline{v}+|\overline{v}|^2 = 4|\overline{u}|^2-4\overline{u}\cdot\overline{v}+|\overline{v}|^2 = 5-4\overline{u}\cdot\overline{v}$$

เพราะฉะนั้น
$$|\overline{u}-2\overline{v}|^2 = |2\overline{u}-\overline{v}|^2$$
$$|\overline{u}-2\overline{v}| = |2\overline{u}-\overline{v}|$$

7. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = -\bar{i}$

$|\bar{u} - \bar{v}| = |\bar{i} - (-\bar{i})| = |2\bar{i}| = 2$

$|\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{i} + (-\bar{i})| = 0$

8. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = \bar{j}$, $\bar{w} = 2\bar{j}$

จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ และ $\bar{u}\cdot\bar{w} = 0$ แต่ $\bar{v} \neq \bar{w}$

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = -\bar{i}$ $|\bar{u} + \bar{v}| = |\bar{0}| = 0$ และ $|\bar{u} - \bar{v}| = |2\bar{i}| = 2$

10. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 = |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2\cos^2\theta \leq |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2 = (\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v})$

เพราะฉะนั้น $(\bar{u}\cdot\bar{v})^2 \leq (\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v})$

11. **ถูกต้อง** เพราะว่า $(\bar{u} - (\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v})\cdot\bar{v} = \bar{u}\cdot\bar{v} - (\bar{u}\cdot\bar{v})(\bar{u}\cdot\bar{u})(\bar{v}\cdot\bar{v})$

$= \bar{u}\cdot\bar{v} - (\bar{u}\cdot\bar{v})|\bar{v}|^2 = \bar{u}\cdot\bar{v} - (\bar{u}\cdot\bar{v})(1) = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{u} - (\bar{u}\cdot\bar{v})\bar{v}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$

12. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = \bar{i}$, $\bar{v} = \bar{j}$ จะได้ว่า $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ และ $|\bar{u}| \neq 0$ แต่ $|\bar{v}| \neq 0$

13. **ถูกต้อง** ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u} + \bar{v}$ และ $\bar{u} - \bar{v}$

เพราะว่า $\cos\theta = \dfrac{(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v})}{|\bar{u}+\bar{v}||\bar{u}-\bar{v}|} = \dfrac{|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2}{|\bar{u}+\bar{v}||\bar{u}-\bar{v}|} < 0$ เพราะฉะนั้น θ เป็นมุมป้าน

14. **ถูกต้อง** $|\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$

$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2$

$|\bar{u} + \bar{v}|^2 - |\bar{u} - \bar{v}|^2 = 4\bar{u}\cdot\bar{v}$

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \frac{1}{4}(|\bar{u} + \bar{v}|^2 - |\bar{u} - \bar{v}|^2)$$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u} + \bar{v}|^2 < |\bar{u} - \bar{v}|^2$ ก็ต่อเมื่อ $\bar{u}\cdot\bar{v} < 0$

$|\bar{u} + \bar{v}| < |\bar{u} - \bar{v}|$ ก็ต่อเมื่อ θ เป็นมุมป้าน

สรุป มุมระหว่าง $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นมุมป้านก็ต่อเมื่อ $|\bar{u} + \bar{v}| < |\bar{u} - \bar{v}|$

15. **ถูกต้อง** ให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$, $\bar{v}$

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} + |\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 - 2|\bar{u}||\bar{v}|\cdot\cos\theta + |\bar{v}|^2 = 2 - 2\cos\theta$$

$$= 2(1 - \cos\theta) = 2(1 - (1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2})) = 4\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{|\bar{u} - \bar{v}|}{2} = \sin\frac{\theta}{2}$$

16. ถูกต้อง เพราะว่า $|\bar{u}\cdot\bar{v}| = ||\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta|$

$\leq ||\bar{u}||\bar{v}|(1)| \quad (\because -1 \leq \cos\theta \leq 1)$

$= |\bar{u}||\bar{v}|$

เพราะฉะนั้น $\bar{u}\cdot\bar{v} \leq |\bar{u}||\bar{v}|$

17. ถูกต้อง เพราะว่า $(\bar{u}+\bar{v})\cdot(\bar{u}-\bar{v}) = 0$

$$\bar{u}\cdot\bar{u} - \bar{u}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\bar{u} - \bar{v}\cdot\bar{v} = 0$$

$$|\bar{u}|^2 - |\bar{v}|^2 = 0$$

$$|\bar{u}|^2 = |\bar{v}|^2$$

เพราะฉะนั้น $|\bar{u}| = |\bar{v}|$

18. ผิด ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = 4\bar{i}, \bar{v} = 3\bar{j}$

$$|\bar{u}+\bar{v}| = |4\bar{i}+3\bar{j}| = \sqrt{16+9} = 5$$

$$|\bar{u}-\bar{v}| = |4\bar{i}-3\bar{j}| = \sqrt{16+9} = 5$$

19. ผิด ตัวอย่างเช่น $\bar{u} = 2\bar{i}, \bar{v} = 3\bar{i}$

$$|\bar{u}+2\bar{v}| = |2\bar{i}+6\bar{i}| = |8\bar{i}| = 8$$

$$|2\bar{u}+\bar{v}| = |4\bar{i}+3\bar{i}| = |7\bar{i}| = 7$$

20. ถูกต้อง เพราะว่า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ไม่ขนานกัน เพราะฉะนั้น $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$

เพราะฉะนั้น $ad - bc \neq 0$

เมื่อ $m\bar{u} + n\bar{v} = \bar{0}$

$$m\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + n\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$am + cn = 0$$

$$bm + dn = 0$$

เพราะฉะนั้น $m = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = \dfrac{0}{ad-bc} = 0$ และ $n = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}} = 0$

5.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

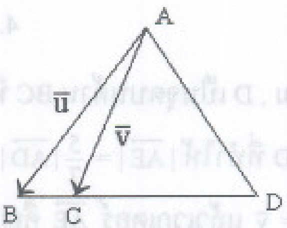
1. กำหนดให้ $|\bar{u}| = 2$, $|\bar{v}| = 4$, $|\bar{u} - \bar{v}| = 5$ ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\sqrt{11}$ 2. $\sqrt{13}$

   3. $\sqrt{15}$ 4. $\sqrt{17}$

2. จากรูป ถ้า $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$, $|\overrightarrow{BC}| : |\overrightarrow{BD}| = 1 : 4$

   แล้ว $\overrightarrow{AD}$ คือเวกเตอร์ในตัวเลือกใด



   1. $4\bar{v} - 3\bar{u}$

   2. $4\bar{u} - 3\bar{v}$

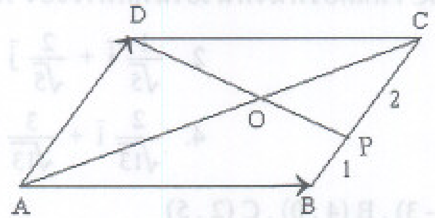
   3. $4\bar{u} + 3\bar{v}$

   4. $4\bar{v} + 3\bar{u}$

3. กำหนดให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน P เป็นจุดแบ่งด้าน BC และ

   ทำให้ $|\overrightarrow{BP}| : |\overrightarrow{PC}| = 1 : 2$ DP ตัดกับ AC ที่จุด O

   ถ้า $\overrightarrow{AO} = a\overrightarrow{AC}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด



   1. $\frac{1}{2}$

   2. $\frac{2}{3}$

   3. $-\frac{3}{4}$

   4. $\frac{3}{5}$

4. กำหนดให้ $\bar{u} = \bar{i} - 2\bar{j}$ และ $\bar{v} = k\bar{i} - 4\bar{j}$ ทำมุมกัน θ องศา และ $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

   ค่าของ k เท่ากับเท่าใด

   1. 3   2. -3

   3. 5   4. -5

5. สามเหลี่ยม ABC มีจุด D เป็นจุดที่แบ่งด้าน BC ออกเป็นอัตราส่วน 2 : 3

   ถ้า $\overrightarrow{AB} = -6\bar{i} - 7\bar{j}$, $\overrightarrow{AC} = 5\bar{i} - 3\bar{j}$ แล้วเวกเตอร์ $\overrightarrow{AD}$ เท่ากับเท่าใด

   1. $-\frac{8}{5}\bar{i} - 3\bar{j}$ 2. $-\frac{8}{5}\bar{i} - \frac{27}{5}\bar{j}$

   3. $-8\bar{i} - 27\bar{j}$ 4. $-\bar{i} - 10\bar{j}$

6. เวกเตอร์ขนาด 10 หน่วย และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j}$ คือเวกเตอร์ในตัวเลือกใด

1. $-4\sqrt{5}\ \bar{i} + 2\sqrt{5}\ \bar{j}$ 2   2. $4\sqrt{5}\ \bar{i} + 2\sqrt{5}\ \bar{j}$ 4

3. $2\sqrt{5}\ \bar{i} - 4\sqrt{5}\ \bar{j}$ 4   4. $-4\sqrt{5}\ \bar{i} + 2\sqrt{5}\ \bar{j}$ 2

7. ถ้า $\bar{u} = \bar{i} - \sqrt{3}\ \bar{j}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} - \sqrt{3}\ \bar{j}$ แล้วมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับเท่าใด

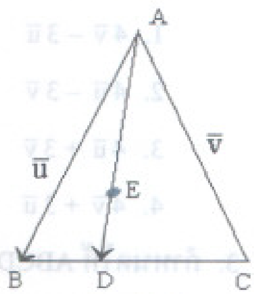
1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{4}$

3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{2}$

8. ABC เป็นสามเหลี่ยม , D เป็นจุดบนด้าน BC ที่ทำให้ $|\overrightarrow{BD}| = \frac{2}{5}|\overrightarrow{BC}|$

E เป็นจุดบนด้าน AD ที่ทำให้ $|\overrightarrow{AE}| = \frac{5}{7}|\overrightarrow{AD}|$

ถ้า $\overrightarrow{AB} = \bar{u}$, $\overrightarrow{AC} = \bar{v}$ แล้วเวกเตอร์ $\overrightarrow{AE}$ คือเวกเตอร์ใด



1. $-\frac{3}{7}\bar{v} + \frac{2}{7}\bar{u}$ 2. $\frac{5}{7}\bar{u} - \frac{2}{7}\bar{v}$

3. $-\frac{2}{7}\bar{u} + \frac{5}{7}\bar{v}$ 4. $\frac{3}{7}\bar{u} + \frac{2}{7}\bar{v}$

9. กำหนดให้ A (1 , 0) , B (5 , 0) , C (3 , 4) เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC

D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AD}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{j}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{5}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{j}$

3. $\frac{3}{\sqrt{13}}\bar{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\bar{j}$ 4. $\frac{2}{\sqrt{13}}\bar{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\bar{j}$

10. กำหนดให้ A (– 2 , – 3) , B (4 , 0) , C (2 , 5)

โปรเจคชันของเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ บน $\overrightarrow{AC}$ คือ เวกเตอร์ใด

1. $\frac{12}{5}(\bar{i} + 2\bar{j})$ 2. $-\frac{12}{5}(\bar{i} + 2\bar{j})$

3. $\frac{5}{12}(\bar{i} + 2\bar{j})$ 4. $-\frac{5}{12}(\bar{i} + 2\bar{j})$

เฉลยคำตอบ 1. (3)   2. (1)   3. (4)   4. (2)   5. (2)

6. (3)   7. (3)   8. (4)   9. (3)   10. (1)

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂≡≈⊄∈∉°∞∧∨≤↔≠→±≥→↑XY⊁≱⊀≰

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩↔≠→±≥→↑❶❷❸❹❺❻❼❽❾❿

→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→→

บทที่ 6
จำนวนเชิงซ้อน

6.1 สรุปเนื้อหา

1. จำนวนเชิงซ้อนหมายถึงจำนวนที่อยู่ในรูปแบบ (a , b) หรือ a + bi โดยที่ a , b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$, เซตของจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วย C

   $C = \{(a , b) \mid a , b \in R\}$ หรือ $C = \{a + bi \mid a , b \in R\}$

2. การบวกและการคูณจำนวนเชิงซ้อน z = (a , b) , w = (c , d) หรือ z = a + bi , w = c + di

   $z + w = (a + c , b + d)$, $\qquad z + w = (a + c) + (b + d)i$

   $zw = (ac - bd , ad + bc)$, $\qquad zw = (ac - bd) + (ad + bc)i$

   ตัวอย่าง $z = 2 + 3i , w = 3 + 4i$

   $z + w = 5 + 7i$

   $zw = (2 + 3i)(3 + 4i) = 6 + 8i + 9i + 12i^2$

   $= 6 + 17i + 12(-1) = 6 + 17i - 12 = -6 + 17i$

3. สมบัติการบวก $z_1 , z_2 , z_3 \in C$

   1. ปิด $\qquad z_1 + z_2 \in C$
   2. เปลี่ยนกลุ่ม $\qquad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
   3. สลับที่ $\qquad z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
   4. มี 0 เป็นเอกลักษณ์การบวก $\qquad z_1 + 0 = z_1$
   5. มี $-z_1$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ z_1 $\qquad z_1 + (-z_1) = 0$

4. สมบัติการคูณ $z_1 , z_2 , z_3 \in C$

   1. ปิด $\qquad z_1z_2 \in C$
   2. เปลี่ยนกลุ่ม $\qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
   3. มี 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณ $\qquad 1z_1 = z_1$
   4. $z_1 \neq 0$ มี z_1^{-1} เป็นอินเวอร์สการคูณของ z_1 $\qquad z_1z_1^{-1} = 1$

5. สลับที่ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

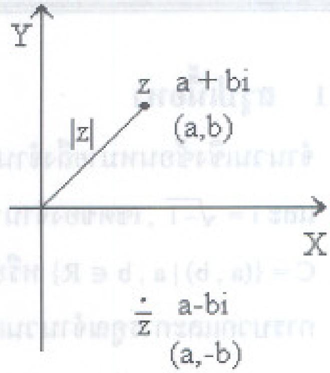
5. สมบัติการกระจาย $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

6. ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ $z = a + bi$

ส่วนจริงของ z แทนด้วย $Re(z) = a$ **ส่วนจินตภาพ**ของ z แทนด้วย $Im(z) = b$

เพราะฉะนั้น $z = Re(z) + i\,Im(z)$

ท่องจำได้เลย ส่วนจินตภาพของ $a + bi$ ต้องเป็นจำนวนจริง



7. กราฟแสดงตำแหน่งของจุด $z = a + bi$ บนระนาบ XY

แกน X แทนแกนส่วนจริง , แกน Y แทนแกนจินตภาพ

$z = a + bi$ แทนด้วยตำแหน่งของจุด (a , b)

8. $z = a + bi$ **สังยุค**ของ z แทนด้วย $\bar{z}$, $\bar{z} = a - bi$

ตัวอย่าง $z = 3 + 4i$ $\quad \bar{z} = 3 - 4i$

$w = 2 - 3i$ $\quad \bar{w} = 2 + 3i$

ข้อสังเกต $z = (a , b)$ $\quad \bar{z} = (a , -b)$ จะเห็นว่าตำแหน่งของ $z , \bar{z}$ จะสมมาตรกับแกน X

9. สมบัติของสังยุค กำหนดให้ $z = a + bi$, $w = c + di$

1. $\bar{z} = a - bi$
2. $(\bar{\bar{z}}) = a + bi = z$
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
4. $\overline{zw} = \bar{z}\ \bar{w}$
5. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$
6. $z + \bar{z} = 2a = 2Re(z)$, $Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ $\qquad z - \bar{z} = 2bi = 2iIm(z)$, $Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
1. $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ $\qquad$ เมื่อ $a^2 + b^2 \neq 0$ จะได้ว่า $z\left(\frac{\bar{z}}{a^2 + b^2}\right) = 1$

   เพราะฉะนั้น $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$
8. $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

10. ค่าสัมบูรณ์ของ z แทนด้วย $|z|$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ เมื่อ $z = a + bi$

ตัวอย่าง $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $|2 + i| = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$

ข้อสังเกต $|z|$ เท่ากับระยะทางจาก $(0 , 0)$ ไปยัง (a , b)

สมบัติของค่าสัมบูรณ์ กำหนดให้ z , w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
2. $|zw| = |z|\,|w|$
3. $|z|^2 = z\bar{z}$
4. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$
5. $|z+w| \le |z| + |w|$, $\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2|$
6. $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $|z| \ne 0$
7. $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$
8. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = 0$

ตัวอย่าง $\left|\frac{3-4i}{5+12i}\right| = \frac{|3-4i|}{|5+12i|} = \frac{5}{13}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\frac{2-3i}{4+i}$

$$\frac{2-3i}{4+i} = \frac{2-3i}{4+i}\,\frac{(4-i)}{(4-i)} = \frac{8-2i-12i-3}{16+1} = \frac{1}{17}(5-14i)$$

ตัวอย่าง $z = 1+3i$ จงหา z^{-1}

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1-3i}{10} = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ i^{2543}

$$i^4 = 1$$

เพราะฉะนั้น $i^{2543} = i^{4(635)+3} = (i^4)^{635}\,i^3 = (1)(i^3) = -i$

ข้อสังเกต $i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ ทุกค่า $n \in I$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6 + \ldots + i^{1999}$

เพราะว่า $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

$$i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = 0$$

$$\vdots$$

$$i^{1993} + i^{1994} + i^{1995} + i^{1996} = 0$$

$$i^{1997} + i^{1998} + i^{1999} = i - 1 - i = -1$$

เพราะฉะนั้น $i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{1999} = -1$

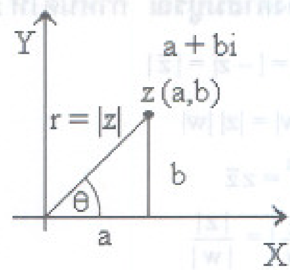
11. จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว $z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$r = |z|$, เรียกว่า**มอดุลัส**ของ z

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, $\cos\theta = \dfrac{a}{|z|}$, $\sin\theta = \dfrac{b}{|z|}$

θ เรียกว่า **อาร์กิวเมนต์** ของ z



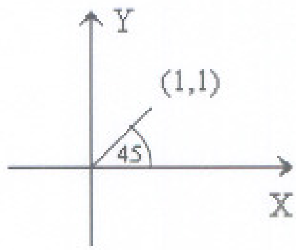
หมายเหตุ

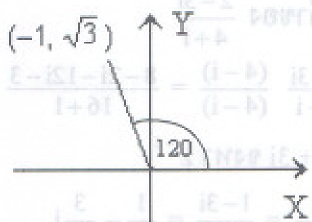
จากสูตรตรีโกณมิติ $\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$ $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$ $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$

เพราะฉะนั้น ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z แล้ว $2n\pi + \theta$ ทุกค่า $n \in I$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย

ตัวอย่าง $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$-1 + \sqrt{3}\,i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$





12. **การคูณและการหารจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว**

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

จะได้ว่า $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$

13. **ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ (De Moivre's Theorem)**

1. ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$; n เป็นจำนวนเต็ม
2. $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$
3. ถ้า $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(1+\sqrt{3}\,i)^{10}$

วิธีทำ

$$1+\sqrt{3}\,i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}\,i)^{10} &= \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{10} \\ &= 2^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{3}+i\sin\frac{10\pi}{3}\right) \\ &= 1024\left(\cos(3\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(3\pi+\frac{\pi}{3})\right) \\ &= 1024\left(-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 1024\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -512-512\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

14. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน w

ขั้นที่ 1 เขียน w ในรูปแบบเชิงขั้ว $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ขั้นที่ 2 เขียน w ในรูปแบบมุมทั่วไป

$w = r(\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta))$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

ขั้นที่ 3 $z = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi+\theta}{n}\right)\right)$; $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

เป็นรากของสมการ $z^n = w$

ตัวอย่าง $z^6 = 1$

ขั้นที่ 1 $1 = \cos 0 + i\sin 0$

ขั้นที่ 2 $1 = \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

ขั้นที่ 3 $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{6}\right)$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

เพราะฉะนั้นรากที่ 6 ของ 1 คือ $1, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $z^4 = 1+i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}z^4 &= 1+i \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(2k\pi + \frac{\pi}{4}) + i\sin(2k\pi + \frac{\pi}{4})) \quad ; k = 0, 1, 2, 3$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}(\cos(\frac{8k\pi+\pi}{4}) + i\sin(\frac{8k\pi+\pi}{4}))$$

$$z = 2^{\frac{1}{8}}(\cos(\frac{8k\pi+\pi}{16}) + i\sin(\frac{8k\pi+\pi}{16}))$$

รากที่ 4 ทั้งหมดของ $1 + i$ ได้จากการแทนค่า $k = 0, 1, 2, 3$

$k = 0;\quad z = 2^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})$

$k = 1;\quad z = 2^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16})$

$k = 2;\quad z = 2^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16})$

$k = 3;\quad z = 2^{\frac{1}{8}}(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16})$

15. การหารากที่ n ของ w โดยวิธีลัด

ขั้นที่ 1 หาค่าสัมบูรณ์ของ w, $|w|$ และเขียน w ในรูปแบบเชิงขั้ว $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

ขั้นที่ 2 ค่าสัมบูรณ์ของรากที่ n ของ w เท่ากับ $|w|^{\frac{1}{n}}$

ขั้นที่ 3 รากที่ n ทุกตัวของ w ต้องอยู่บนวงกลมที่มีค่ารัศมี เท่ากับ $|w|^{\frac{1}{n}}$ โดยมีจุดแรกสุดที่เป็นรากคือ $z_1 = |w|^{\frac{1}{n}}(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n})$ รากตัวถัดไปคือจุดที่ค่าของมุมเพิ่มขึ้นที่ละ $\frac{2\pi}{n}$

สรุป 1. หา $|w|^{\frac{1}{n}}$ และ $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$

2. หามุมแรกสุดคือ $\frac{\theta}{n}$

3. อัตราการเพิ่มของมุม $= \frac{2\pi}{n}$

รากที่ n ทั้งหมดของ w คือ $z_k = |w|^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}))$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $z^5 = -32$

$w = -32$

$|w| = 32$

$w = 32(-1 + 0i)$

$= \ 32\,(\cos\pi\ + i\sin\pi)$

$|w|^{\frac{1}{5}} \ = \ 32^{\frac{1}{5}} = \ 2$

มุมเริ่มต้น = $\frac{\pi}{5}$ อัตราการเพิ่มของมุม = $\frac{2\pi}{5}$

รากที่ 5 ของ – 32 ทั้งหมดคือ $2\,(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5})$,

$2\,(\cos(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5})) = 2\,(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5})$,

$2\,(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}) = -2$,

$2\,(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5})$,

และ $2\,(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5})$

16. พหุนามดีกรี n หมายถึง $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_n \neq 0$, a_i เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ตัวอย่างเช่น $p(x) = x^2 + x + 1$, $p(x) = x^2 + 3ix + 1 + 2i$

ทฤษฎีบทพีชคณิตเบื้องต้น p(x) เป็นพหุนามดีกรี n สมการ p(x) = 0 ต้องมีรากอย่างน้อย 1 รากเสมอ (อาจเป็นจำนวนจริงหรือเชิงซ้อนก็ได้)

17. พหุนามดีกรี n ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง หมายถึง $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ โดยที่ $a_i \in R$ และ $a_n \neq 0$ ตัวอย่าง $p(x) \ = \ x^2 - 3x + 2$

$p(x) \ = \ x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

18. **ทฤษฎีบทเศษเหลือ** $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ เป็นพหุนามดีกรี n

x – c หาร p(x) เหลือเศษเท่ากับ p(c)

ตัวอย่าง $p(x) = x^2 - 3x + 5$, x – 1 หาร p(x) เหลือเศษเท่ากับ p(1) = 1 – 3 + 5 = 2

19. **ทฤษฎีตัวประกอบ** (Factor Theorem) กำหนดให้ p(x) เป็นพหุนามดีกรี n

x – c หาร p(x) ลงตัว ก็ต่อเมื่อ p(c) = 0

x – c เป็นตัวประกอบของ p(x) ก็ต่อเมื่อ p(c) = 0

20. **ทฤษฎีบทตัวประกอบจำนวนตรรกยะ**

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ n เป็นจำนวนเต็มบวก , $a_n \neq 0$, a_i เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $x - \frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของ p(x) โดยที่ m , k เป็นจำนวนเต็ม $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. (k , m) = 1

แล้ว $m \mid a_n$ และ $k \mid a_0$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $2x^3 - x + 1 = 0$

ให้ $p(x) = 2x^3 - x + 1$

เพราะว่า $p(-1) = 0$ เพราะฉะนั้น $(x + 1)$ หาร $(2x^3 - x + 1)$ ลงตัว

เพราะฉะนั้น $(2x^3 - x + 1) = (x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$

รากของสมการ $2x^3 - 2x + 1 = 0$ คือ

$$x = -1 , \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{4} = -1 , \frac{2 \pm 2i}{4} = -1 , \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i$$

21. ถ้า $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, n เป็นจำนวนเต็มบวก , a_i เป็นจำนวนจริง , $a_n \neq 0$

แล้ว ($p(z) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $p(\bar{z}) = 0$)

เพราะฉะนั้น ถ้า a + bi เป็นรากของ p(x) = 0 แล้ว $((x - a)^2 + b^2)$ เป็นตัวประกอบของ p(x)

ตัวอย่าง $p(x) = Ax^2 + Bx + C$; $A , B , C \in R$

ถ้า 2 + 3i เป็นรากของสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$

แล้ว 2 – 3i เป็นรากของสมการ $Ax^2 + Bx + C = 0$ ด้วย

หมายเหตุ

ถ้า p(x) เป็นพหุนามดีกรีเป็นเลขคี่ แล้ว p(x) = 0 ต้องมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 ตัว

ตัวอย่าง กำหนด p(x) เป็นพหุนามดีกรี 4

ถ้า 2 + i และ 3 – 2i เป็นรากของสมการ p(x) = 0 และ p(0) = 65 แล้ว p(x) เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ เพราะว่า 2 + i เป็นรากของสมการ p(x) = 0 เพราะฉะนั้น $(x - 2)^2 + 1^2$ เป็นรากของ p(x)

เพราะฉะนั้น 3 – 2i เป็นรากของ p(x) = 0 เพราะฉะนั้น $(x - 3)^2 + 2^2$ เป็นตัวประกอบของ p(x)

ดังนั้น $p(x) = k\,((x - 2)^2 + 1^2)\,((x - 3)^2 + 2^2)$

$= k\,(x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)$

เพราะว่า p(0) = 65 เพราะฉะนั้น 65 = k(5)(13) = 65k , k = 1

เพราะฉะนั้น $p(x) = (x^2 - 4x + 5)(x^2 - 6x + 13)$

หมายเหตุ ถ้า กำหนดว่า $2 + i$, $3 - 2i$ เป็นรากของ $p(x)$ โดยไม่กำหนดดีกรี หรือ ไม่กำหนดว่า $p(0) = 65$ แล้วอาจจะมีพหุนามได้หลายตัว เช่น $p(x) = 100\,(x^2 - 4x + 5)\,(x^2 - 6x + 13)$

$$p(x) = (x + 1)\,(x^2 - 4x + 5)\,(x^2 - 6x + 13)$$

ข้อควรจำ เกี่ยวกับสัมประสิทธิ์ a_n ; $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, $a_n \neq 0$

1. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ $p(x)$ มีค่า = $p(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$
2. ค่าคงตัว $a_0 = p(0)$
3. ผลบวกของรากของ $p(x) = 0$ มีค่าเท่ากับ $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
4. ผลคูณของรากทุกตัวมีค่าเท่ากับ $(-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$

ตัวอย่าง $x^2 + 3x - 4 = 0$ มีราก 2 ตัวคือ $x = -4$, 1

ผลบวกราก = $(-4) + 1 = -3$ ผลคูณราก = $(-4)(1) = -4$

ตัวอย่าง $x^3 - 10x^2 - 17x + 66 = 0$

ผลบวกราก = 10 ผลคูณราก = -66

หมายเหตุ $x^3 - 10x^2 - 17x + 66 = (x - 11)(x - 2)(x + 3) = 0$

รากทั้ง 3 ตัวคือ 11 , 2 , -3

ตัวอย่าง $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = 0$

ผลบวกราก = 4 ผลคูณราก = 24

หมายเหตุ $x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24 = (x + 2)(x - 3)(x - 4)(x + 1) = 0$

รากทั้ง 4 ตัวคือ -2 , 3 , 4 , -1

คำแนะนำ **โปรแกรมสำเร็จรูปที่มีความสามารถในการแยกตัวประกอบเช่น Mathcad**

ตัวอย่างเช่น

$x^4 - 4\cdot x^3 - 7\cdot x^2 + 22\cdot x + 24$	$x^3 - 10\cdot x^2 - 17\cdot x + 66$
$(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x+1)$	$(x-11)\cdot(x-2)\cdot(x+3)$

หนังสือ คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad กับการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ม. ปลาย เขียนโดย รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา หาซื้อได้ที่ ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรใช้การแทนค่าที่เหมาะสม และคิดเลขง่ายบางค่าก็สามารถนำมาช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 6.2.1 กำหนดให้ $z = x + yi$ และ $\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a+ci}$ เมื่อ a, b, c, x, y เป็นจำนวนจริง แล้ว $x^2 + y^2$ จะเท่ากับจำนวนใด

1. $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b+c)^2}$ 2. $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b^2+c^2)}$

3. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b+c)^2}$ 4. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b^2+c^2)}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a = 1, b = 1, c = 1$ จะได้ $\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1+i} = \frac{2}{1+i}$

$$z = \frac{1+i}{2}$$

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

แทนค่า $a = 1, b = 1, c = 1$ ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b+c)^2} = \frac{1}{2}$ 2. $\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b^2+c^2)} = \frac{2}{3}$

3. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b+c)^2} = 0$ 4. $\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{4a^2-(b^2+c^2)} = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a+ci} = \frac{2a+(b+c)i}{(a+bi)(a+ci)}$$

$$z = \frac{(a+bi)(a+c)i}{2a+(b+ci)}$$

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = \left(\frac{|a+bi||a+ci|}{|2a+(b+c)i|}\right)^2 = \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2+(b+c)^2}$$

2. ใช้เหตุผลเกี่ยวกับลักษณะของรากของสมการพหุนามดีกรี n ตัวอย่างเช่น

2.1 ถ้า z_1, z_2 เป็นรากของสมการ $z^2 + Az + B = 0$ แล้ว $z_1 + z_2 = -A$ และ $z_1 z_2 = B$

2.2 ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $z^3 + Az^2 + Bz + C = 0$
แล้ว $z_1 z_2 z_3 = -C$, $z_1 + z_2 + z_3 = -A$, $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = B$

2.3 ถ้า z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นรากของสมการ $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$

แล้ว $z_1 z_2 z_3 z_4 = D$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -A$

ตัวอย่างที่ 6.2.2 ผลบวกของรากของสมการ $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ เท่ากับเท่าไร

1. 0	2. 1
3. 3	4. 5

แนวคิด ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 + z_3 = -(-3) = 3$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 จงหาผลบวกของรากของสมการ $x^3 + 8 = 2(x-2)$

1. -2	2. 0
3. 2	4. 4

แนวคิด สมการ $x^3 + 8 = 2(x-2)$

$x^3 - 2x + 12 = 0$ มีผลบวกรากเท่ากับ $-(0) = 0$

ตัวอย่างที่ 6.2.4 ค่าสัมบูรณ์ของผลบวกของรากของสมการ $z^2 + 4 = 3iz$ เท่ากับเท่าใด

1. 3	2. 5
3. 9	4. 17

แนวคิด z_1, z_2 เป็นรากของสมการ $z^2 - 3iz + 4 = 0$

จะได้ว่า $z_1 + z_2 = 3i$

$z_1 z_2 = 4$

เพราะฉะนั้น $|z_1 + z_2| = 3$

ตัวอย่างที่ 6.2.5 รากของสมการ $z^3 = 8i$ คือข้อใด

1. $2i, 1 \pm \sqrt{3}\,i$	2. $2i, 1 \pm \sqrt{2}\,i$
3. $-2i, 1 \pm i$	4. $-2i, i \pm \sqrt{3}$

แนวคิด z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $z^3 - 8i = 0$ จะได้ว่า $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

มีผลบวกของรากในแต่ละตัวเลือกเป็น
1. $(2i) + (1 + \sqrt{3}\,i) + (1 - \sqrt{3}\,i) \neq 0$
2. $(2i) + (1 + \sqrt{2}\,i) + (1 - \sqrt{2}\,i) \neq 0$
3. $(-2i) + (1 + i) + (1 - i) \neq 0$
4. $(-2i) + (i + \sqrt{3}) + (i - \sqrt{3}) = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

หมายเหตุ โดยการแทนค่า $(2i)^3 = -8i$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

โดยการแทนค่า $(1+i)^3 \neq 8$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3.

3. การตัดตัวเลือกสามารถทำได้โดยการนำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์

ตัวอย่าง เซตคำตอบของสมการ $z^4 + z^3 + 8z^2 + 3z + 15 = 0$ คือข้อใด

1. $\{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i, \sqrt{5}\,i, -\sqrt{5}\,i\}$
2. $\{\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}\,i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{19}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{19}}{2}i\}$
3. $\{\sqrt{5}\,i, -\sqrt{5}\,i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\}$
4. $\{\sqrt{5}\,i, -\sqrt{5}\,i, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i\}$

การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ $p(z) = z^4 + z^3 + 8z^2 + 3z + 15$

$p(\sqrt{3}\,i) = 9 - 3\sqrt{3}\,i - 24 + 3\sqrt{3}\,i + 15 = 0$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{3}\,i$ เป็นรากของ $p(z) = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

$p(\sqrt{5}\,i) = 25 - 5\sqrt{5}\,i - 40 + 3\sqrt{5}\,i + 15 \neq 0$

$p(\sqrt{5}\,i)$ ไม่เป็นรากของสมการ $p(z) = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง ยากมากเพราะว่านักเรียนต้องทดลองแยกตัวประกอบ

$0 = z^4 + z^3 + 8z^2 + 3z + 15 = (z^2+3)(z^2+z+5)$

เพราะฉะนั้น $z = \pm\sqrt{3}\,i \;\; \frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2} = \pm\sqrt{3}\,i \;\; -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{19}}{2}i$

ตัวอย่างที่ 6.2.7 รากที่สองของ $3 + 4\sqrt{7}\,i$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{7}+2i\;,\;\sqrt{7}-2i$
2. $7+2i\;,\;7-2i$
3. $-7+2i$
4. $\sqrt{7}+2i\;,\;-\sqrt{7}-2i$

การตัดตัวเลือก ทำได้โดยนำค่าในตัวเลือกมายกกำลังสอง

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{7}+2i)^2 &= 7 + 2\sqrt{7}(2i) + (2i)^2 \\
&= 7 + 4\sqrt{7}\,i - 4 \\
&= 3 + 4\sqrt{7}\,i
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $(\sqrt{7}-2i)^2 \neq 3 + 4\sqrt{7}\,i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

6.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 6.3.1 กำหนด $|z + 16| = 4\,|z + 1|$ ค่าของ $|z|$ เท่ากับเท่าใด

1. 2　　2. 4
3. 6　　4. 8

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แทนค่า $z = 4$ จะได้ $|4 + 16| = 20 = 4\,|4 + 1|$

เพราะฉะนั้น $|z| = 4$ ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้งได้

หมายเหตุ $z = 2$; $|2 + 16| \neq 4\,|2 + 1|$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$z = 6$; $|6 + 16| \neq 4\,|6 + 1|$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

$z = 8$; $|8 + 16| \neq 4\,|8 + 1|$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง

$$\begin{aligned}
z &= a + bi \\
|a + bi + 16| &= 4\,|z + 1| \\
|(a + 16) + bi| &= 4\,|(a + 1) + bi| \\
\sqrt{(a+16)^2 + b^2} &= 4\sqrt{(a+1)^2 + b^2} \\
(a + 16)^2 + b^2 &= 16\,((a + 1)^2 + b^2) \\
a^2 + 32a + 256 + b^2 &= 16a^2 + 32a + 16 + 16b^2 \\
15(a^2 + b^2) &= 240 \\
a^2 + b^2 &= 16 \\
|z| &= 4
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.2 ถ้า $z = 4\,(\cos 30° + i \sin 30°)$, $w = \frac{1}{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)$ แล้ว $z^4 w^8$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,i)$　　2. $\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}\,)$
3. $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,i)$　　4. $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}\,)$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $|\cos\theta + i \sin\theta| = 1$

$|z^4 w^8| = |z^4|\,|w|^8 = |z|^4\,|w|^8 = |4 \cos 30° + i \sin 30°|^4\,|\frac{1}{2}\,(\cos 45° + i \sin 45°)\,|^8$

$= \dfrac{(4^4)}{(2^8)}|\cos 30° + i\sin 30°|^4\,|\cos 45° + i\sin 45°|^8 = 1$

เพราะว่าค่าสัมบูรณ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $|\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i)| = 1$ 2. $|\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,)| \neq 1$

3. $|\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)| = 1$ 4. $|\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}\,)| \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $z^4w^8 = (4(\cos 30° + i\sin 30°))^4\,(\frac{1}{2}(\cos 45° + i\sin 45°))^8$

$= 4^4(\cos 4(30°) + i\sin 4(30°))\,(\frac{1}{2^8}(\cos 8(45°) + i\sin 8(45°)))$

$= (\cos 120° + i\sin 120°)(\cos 360° + i\sin 360°)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

ตัวอย่างที่ 6.3.3 กำหนด $z = (1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}-i)(1+i)$ ค่าของ $|z^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ 2. $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

3. $-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$ 4. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}$

ตอบ 2.

แนวคิด **การติดตัวเลือก** เพราะว่า $|z^{-1}| > 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง เพราะว่า $|z|\,|z^{-1}| = |zz^{-1}| = |1| = 1$

และ $|z| = |(1+\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}-i)(1+i)|$

$= |1+\sqrt{3}\,i|\,|\sqrt{3}-i|\,|1+i|$

$= 4\sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $|z^{-1}| = \dfrac{1}{|z|} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}$

ตัวอย่างที่ 6.3.4 ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน $\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4i(1-\sqrt{3}i)}$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\dfrac{1}{2}$ 2. $\dfrac{1}{2}$

3. $-\dfrac{2}{3}$ 4. $\dfrac{2}{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต้องเป็นบวก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $\left|\dfrac{(1+\sqrt{3}i)^2}{4i(1-\sqrt{3}i)}\right| = \dfrac{|1+\sqrt{3}i|^2}{4|i||1-\sqrt{3}i|} = \dfrac{(2)^2}{4(1)(2)} = \dfrac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 6.3.5 รากของสมการ $x^3 + 6x + 20 = 0$ อยู่ในเซตใด

1. $\{-2\}$ 2. $\{1+3i, 1-3i\}$
3. $\{-2, 1+3i, 1-3i\}$ 4. $\{-2, 2+6i, 2-6i\}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $(-2)^3 + (6)(-2) + 20 = 0$ เพราะฉะนั้น -2 เป็นรากสมการ ดังนั้น ตัดตัวเลือก 2. เพราะว่า $(1+3i)^3 + 6(1+3i) + 20 = 0$ เพราะฉะนั้น $1+3i$ เป็นรากสมการ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง
$$x^3 + 6x + 20 = 0$$
$$(x+2)(x^2 - 2x + 10) = 0$$
$$x = -2, \frac{2 \pm \sqrt{4-40}}{2} = -2, \frac{2 \pm 6i}{2} = -2, 1 \pm 3i$$

ตัวอย่างที่ 6.3.6 ให้ z_1, z_2 เป็นรากของสมการ $z^2 + 7i = (2+i)z + 1$ ค่าของ $|z_1 z_2|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. 10 2. 15
3. 35 4. 50

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $z = 0$ ไม่เป็นรากของสมการ เพราะฉะนั้น $|z_1 z_2|^2 \neq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่ารากพหุนาม $x^2 + Ax + B = 0$ มีผลบวกของรากเท่ากับ $-A$ และมีผลคูณของรากเท่ากับ B เพราะฉะนั้น ถ้า z_1, z_2 เป็นรากของสมการ $z^2 - (2+i)z + 7i - 1 = 0$ จะได้ว่า $z_1 z_2 = 7i - 1$

เพราะฉะนั้น $|z_1 z_2|^2 = 49 + 1 = 50$

ตัวอย่างที่ 6.3.7 กำหนด z , w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $z+w=\frac{3-i}{1+i}$ และ $|z|=|w|=2$ ค่าของ $\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$
2. 5
3. $\frac{\sqrt{5}}{4}$
4. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right| \le \left|\frac{1}{z}\right|+\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$ และค่าสัมบูรณ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\sqrt{5}>1$ 2. $\frac{5}{4}<1$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{4}<1$ 4. $\frac{\sqrt{5}}{2}>1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง $\left|\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{z+w}{zw}\right| = \frac{|z+w|}{|zw|} = \frac{|3-i|}{|1+i|}\ \frac{1}{|z||w|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}\ \frac{1}{(2)(2)} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

ตัวอย่างที่ 6.3.8 ถ้า $w=\frac{1+z}{(1-z)i}$ แล้วค่าของ z เท่ากับค่าในตัวเลือกใด

1. $\frac{w^2+2wi-1}{w^2+1}$
2. $\frac{w^2-2wi+1}{w^2+1}$
3. $\frac{w^2+2wi-1}{w^2-1}$
4. $\frac{w^2+2wi+1}{w^2-1}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ w และ z

แทนค่า w = 0 ในโจทย์จะได้ว่า $0=\frac{1+z}{(1-z)i}$ เพราะฉะนั้น $z=-1$

แทนค่า w = 0 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $\frac{w^2+2wi-1}{w^2+1}=-1$
2. $\frac{w^2-2wi+1}{w^2+1}=1$
3. $\frac{w^2+2wi-1}{w^2-1}=1$
4. $\frac{w^2+2wi+1}{w^2-1}=-1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

แทนค่า w = 1 จะได้ $1 = \frac{1+z}{(1-z)i}$

$$(1-z)i = 1+z$$

$$i-iz = -1+i$$

$$z = \frac{-1+i}{1+i}$$ หาค่าได้

แต่ตัวเลือก 4. $\frac{w^2+2wi+1}{w^2-1}$ หาค่าไม่ได้เมื่อ $w=1$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $w = \frac{1+z}{(1-z)i}$

$$\frac{1+z}{1-z} = wi$$

$$\frac{1+z}{1-z}+1 = wi+1$$

$$\frac{1+z+1-z}{1-z} = wi+1$$

$$1-z = \frac{2}{1+wi}$$

$$z = 1-\frac{2}{1+wi}$$

$$= \frac{1+wi-2}{1+wi} = \frac{(-1+wi)(1-wi)}{(1+wi)(1-wi)} = \frac{-1+wi+wi+w^2}{1+w^2}$$

$$= \frac{w^2+2wi-1}{w^2+1}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.9 กำหนดให้ a , b เป็นจำนวนจริง , $z = a+bi$ และ $\frac{z-1}{z+1}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ แล้วค่าของ $|z|$ เท่ากับเท่าใด

1. 1.
2. $\frac{1}{2}$
3. 2
4. $\frac{1}{3}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|i| = 1$ และ $z = i$ สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์

แทนค่า $z = i$ จะได้ $\frac{z-1}{z+1} = \frac{i-1}{i+1} = \frac{(i-1)(i-1)}{(i+1)(i-1)} = \frac{-1-2i+1}{-1-1} = i$

เพราะฉะนั้น $\frac{z-1}{z+1} = i$ เป็นจินตภาพแท้ และ $|z| = 1$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $z = a+bi$

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{a+bi-1}{a+bi+1}$$

$$= \frac{(a-1)+bi}{(a+1)+bi} = \frac{((a-1)+bi)((a+1)-bi))}{((a+1)+bi)((a+1)-bi)}$$

$$= \frac{(a-1)(a+1)-b(a-1)i+b(a+1)i+b^2}{(a+1)^2+b^2}$$

$$= \frac{(a^2-1+b^2)+2bi}{(a+1)^2+b^2}$$

เพราะว่า $\frac{z-1}{z+1}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ เพราะฉะนั้น $a^2-1+b^2=0$

ดังนั้น $a^2+b^2 = 1$

สรุป $|z| = 1$

ตัวอย่างที่ 6.3.10 กำหนดให้ $z = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 120° + i\sin 120°)$

$w = \sqrt{3}(\cos 150° + i\sin 150°)$

ค่าของ $|z^2\overline{w}| + |\overline{w}^2 z|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
2. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
3. $\frac{3}{16}$
4. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $|r(\cos\theta + i\sin\theta)| = |r|$

เพราะฉะนั้น $|z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|w| = \sqrt{3}$

$|\overline{z}| = |z| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|\overline{w}| = |w| = \sqrt{3}$

$|z^2\overline{w}| = |z|^2\,|\overline{w}| = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

เพราะว่า $|z^2\overline{w}| + |(\overline{w})^2 z| > |z^2\overline{w}| = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $|(\overline{w})^2 z| = |\overline{w}|^2\,|z| = (\sqrt{3})^2(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

เพราะฉะนั้น $|z^2\overline{w}| + |(\overline{w})^2 z| = \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{6\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{9\sqrt{3}}{4}$

ตัวอย่างที่ 6.3.11 กำหนดให้ a , b เป็นจำนวนจริง $z = a + bi$ ค่าของ $|z-2|^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $z^2 - 2z + 4$ 2. $|z|^2 - 2|z| + 4$
3. $z^2 - 2\bar{z} + 4$ 4. $|z|^2 - 2z - 2\bar{z} + 4$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a และ b ดังนั้น แทนค่า a , b ที่คิดเลขได้ง่ายก็ตัดตัวเลือกได้ ตัวอย่างเช่น $a = 2$, $b = 0$ จะได้ $z = 2$

ค่าของโจทย์ $|z-2|^2 = 0$ ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $2^2 - 2(2) + 4 \neq 0$ 2. $|2|^2 - 2|2| + 4 \neq 0$
3. $2^2 - 2(2) + 4 \neq 0$ 4. $|2|^2 - 2(2) - 2(2) + 4 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $|z-2|^2 = (z-2)\overline{(z-2)}$

$$= (z-2)(\bar{z}-2)$$
$$= z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4$$
$$= |z|^2 - 2z - 2\bar{z} + 4$$

ตัวอย่างที่ 6.12 ค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^2(1-z)^2 = 16$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1
3. 2 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** $z = 0$ ไม่เป็นรากของสมการ $z^2(1-z^2) = 16$

เพราะฉะนั้นค่าสัมบูรณ์ของรากสมการ $z^2(1-z)^2 = 16$ ไม่เท่ากับ 0 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง $z^2(1-z^2) = 16$

$$z^4 - z^2 + 16 = 0$$

$$z^2 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(16)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{63}i}{2}$$

$$|z^2| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{63}{4}} = \sqrt{\frac{64}{4}} = \sqrt{16} = 4$$

$$|z| = 2$$

ตัวอย่างที่ 6.3.13 กำหนด $z^2 = \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{2+i}{2-i}$ ค่าสัมบูรณ์ของ z เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{2\sqrt{3}}$ 2. $\sqrt{3\sqrt{2}}$
3. $2\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{2\sqrt{2}}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $|z|^2 = |z^2| = \left|\frac{3+4i}{1+2i} + \frac{2+i}{2-i}\right|$

$$\le \left|\frac{3+4i}{1+2i}\right| + \left|\frac{2+i}{2-i}\right| = \frac{|3+4i|}{|1+2i|} + \frac{|2+i|}{|2-i|} = \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$|z|^2 \le \sqrt{5} + 1$$

$$|z| < \sqrt{\sqrt{5}+1} = \sqrt{2.24+1} = \sqrt{3.24} = 1.8 < 2$$

เพราะฉะนั้นนักเรียนมั่นใจได้แน่นอนว่า $|z| < 2$

เพราะว่า $\sqrt{3\sqrt{2}} = \sqrt{3(1.414)} > 2$, $2\sqrt{2} > 2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

จาก $|z|^2 \le \sqrt{5} + 1 = 2.24 + 1 = 3.24$ ต่อไปให้ยกกำลังสองของทุกตัวเลือกจะได้

1. $(\sqrt{2\sqrt{3}})^2 = 2\sqrt{3} = 2(1.732) = 3.464 \nleq 3.24$
2. $(\sqrt{3\sqrt{2}})^2 = 3\sqrt{2} = 3(1.414) \nleq 3.24$
3. $(2\sqrt{2})^2 = 8 \nleq 3.24$
4. $(\sqrt{2\sqrt{2}})^2 = 2\sqrt{2} = 2(1.414) = 2.828$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $z^2 = \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{2+i}{2-i} = \frac{3+4i}{1+2i}\,\frac{1-2i}{1-2i} + \frac{2+i}{2-i}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{11-2i}{5} + \frac{3+4i}{5} = \frac{14+2i}{5} = \frac{2}{5}(7+i)$

$|z|^2 = |z^2| = \frac{2}{5}\sqrt{49+1} = \frac{2\sqrt{50}}{5} = 2\sqrt{2}$ เพราะฉะนั้น $|z| = \sqrt{2\sqrt{2}}$

ตัวอย่างที่ 6.3.14 กำหนด $w = \dfrac{2i}{1+i+\frac{i^3}{1+i}}$ และ $z = \dfrac{-2i}{1-i-\frac{i^3}{1-i}}$ ค่าของ $\left|\frac{w^2}{z^2} - 3i\right|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{10}$ 2. 10
3. $\sqrt{5}$ 4. 5

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า z ได้จาก w โดยการแทน i ด้วย $-i$ เพราะฉะนั้น $z = \overline{w}$

และ $\frac{w^2}{z^2} = \frac{w^2}{(\overline{w})^2}$

ดังนั้น $\left|\frac{w^2}{z^2}-3i\right| \le \left|\frac{w^2}{z^2}\right| + |3i| = 1 + 3 = 4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $w = \dfrac{2i}{1+i+\dfrac{i^3}{1+i}} = \dfrac{2i(1+i)}{(1+i)^2+i^3} = \dfrac{2i(1+i)}{1+2i-1-i} = \dfrac{2i(1+i)}{i}$

$= 2(1+i)$

$z = \dfrac{-2i}{(1-i)\dfrac{i^3}{1-i}} = \dfrac{-2i(1-i)}{(1-i)^2-i^3} = \dfrac{-2i(1-i)}{1-2i-1+i} = 2(1-i)$

$\dfrac{w^2}{z^2} = \dfrac{(2(1+i))^2}{(2(1-i))^2} = \dfrac{(4)(2i)}{(4)(-2i)} = -1$

$\left|\dfrac{w^2}{z^2}-3i\right| = |-1-3i| = \sqrt{10}$

ตัวอย่างที่ 6.3.15 กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากที่ 3 ของ i^7 เมื่อ z_2 เป็นจุดในควอดรันท์ที่ 3, z_3 เป็นจุดในควอดรันท์ที่ 4 ค่าของ $2z_2 + 4z_3$ มีค่าเท่าใด

1. $4\sqrt{3}-2i$ 2. $3\sqrt{3}-4i$

3. $2\sqrt{3}+i$ 4. $\sqrt{3}-3i$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** $z^3 = i^7$

$|z|^3 = |i^7| = 1$

เพราะฉะนั้น $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$

ดังนั้น $|2z_2 + 4z_3| \le 2|z_2| + 4|z_3| = 6$

ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $|4\sqrt{3}-2i| = \sqrt{48+4} = \sqrt{52} > 6$ 2. $|3\sqrt{3}-4i| = \sqrt{27+16} = \sqrt{43} > 6$

3. $|2\sqrt{3}+i| = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \not> 6$ 4. $|\sqrt{3}+3i| = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} \not> 6$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $z^3 = i^7 = i^4 i^3 = -i = 0 - i = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$

$= \cos(2k\pi + \frac{3\pi}{2}) + i\sin(2k\pi + \frac{3\pi}{2})$; $k = 0, 1, 2$

$$z = \cos\left(\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) \qquad ; k = 0, 1, 2$$

$k = 0;\quad z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 1;\quad z_2 = \cos\left(\frac{2\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi+3\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi+3\pi}{6}\right)$

$\qquad = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

$k = 2;\quad z_3 = \cos\left(\frac{4\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi+\frac{3\pi}{2}}{3}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

เพราะฉะนั้น $\quad 2z_2 + 4z_3 = (-\sqrt{3} - i) + (2\sqrt{3} - 2i) = \sqrt{3} - 3i$

ตัวอย่างที่ 6.3.16 รากที่สองของ $-15-8i$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $-1-4i, -1+4i$ 2. $1-4i, -1+4i$

3. $1+4i, 1+4i$ 4. $4+i, -4-i$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 ถ้า $z^2 = -15-8i$ แล้ว $(-z)^2 = -15+8i$

เพราะฉะนั้นรากทั้งสองตัวนั้นต้องมีเครื่องหมายต่างกัน

ดังนั้น ตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 นำค่าในตัวเลือกยกกำลังสอง

$(-1-4i)^2 = 1+8i-16 \neq -15-8i$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$(1-4i)^2 = 1-8i-16 = -15-8i$

$(-1+4i)^2 = 1-8i-16 = -15-8i$ ดังนั้นเลือกตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\quad (x+yi)^2 = -15-8i \quad ; x, y \in R.$

$$x^2 - y^2 + 2xy = -15-8i$$

$$x^2 - y^2 = -15 \qquad \text{——(1)}$$

$$2xy = -8$$

$$y = -\frac{4}{x}$$

จาก (1); $\quad x^2 - \frac{16}{x^2} = -15$

$$x^4 + 15x^2 - 16 = 0$$

$$(x^2 + 16)(x^2 - 1) = 0$$

$x^2 + 16 \neq 0$, $x = 1, -1$ และ $y = -4, 4$ เพราะฉะนั้นรากที่ 2 คือ $1 - 4i$, $-1 + 4i$

ตัวอย่างที่ 6.3.17 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงโดยที่ $(x + yi)(2 - 3i) = 5 + 3i$ แล้ว $x^2 - y^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{520}{169}$
2. $\frac{440}{169}$
3. $-\frac{520}{169}$
4. $-\frac{440}{169}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การเปรียบเทียบค่าช่วยในการตัดตัวเลือกได้

$$(x + yi)(2 - 3i) = 5 + 3i$$

$$x + yi = \frac{5+3i}{2-3i}$$

$$|x + yi| = \left|\frac{5+3i}{2-3i}\right| = \frac{\sqrt{25+9}}{\sqrt{4+9}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{13}}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{13}}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{34}{13}$$

เพราะว่า $|x^2 - y^2| \leq |x^2 + y^2| = \frac{34}{13} = \frac{442}{169}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง แบบที่ 1. $(x + yi)(2 - 3i) = 5 + 3i$

$$2x - 3xi + 2yi + 3y = 5 + 3i$$

$$(2x + 3y) + (2y - 3x)i = 5 + 3i$$

เพราะฉะนั้น $2x + 3y = 5$

และ $2y - 3x = 3$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{13}$, $y = \frac{21}{13}$

ดังนั้น $y^2 - x^2 = \frac{1}{169} - \frac{441}{169} = -\frac{440}{169}$

แบบที่ 2 $x + yi = \frac{5+3i}{2-3i} = \frac{(5+3i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{1}{13} + \frac{21}{13}i$

เพราะฉะนั้น $x = \frac{1}{13},\quad y = \frac{21}{13}$

ดังนั้น $y^2 - x^2 = \frac{1}{169} - \frac{441}{169} = -\frac{440}{169}$

ตัวอย่างที่ 6.3.18 กำหนด $z = 1+3i$ และ $w\overline{(z+3)} = 1$ ส่วนจินตภาพของ w เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{3}{25}i$
2. $\frac{3}{25}i$
3. $-\frac{3}{25}$
4. $\frac{3}{25}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน ต้องเป็นจำนวนจริง

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง

$$w\overline{(z+3)} = 1$$
$$w(\bar{z}+\bar{3}) = 1$$
$$w(1-3i+3) = 1$$
$$w(4-3i) = 1$$
$$w(4+3i)(4-3i) = 4+3i$$
$$25w = 4+3i \qquad \text{....(*)}$$
$$w = \frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$$

เพราะฉะนั้น $\mathrm{Im}(w) = \frac{3}{25}$

หมายเหตุ จาก (*) จะได้ว่า $\mathrm{Im}(w) > 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 6.19 กำหนด $z = (\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^{100}$ และ $w = (-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^8$ ค่าของ $\frac{z}{w}+\frac{w}{z}$ เท่ากับเท่าใด

1. $3i$
2. $-3i$
3. $\sqrt{3}\,i$
4. $-\sqrt{3}\,i$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $|z| = \left|(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i)^{100}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right|^{100} = 1^{100} = 1$

และ $|w| = \left|(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^8\right| = (\left|-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|)^8 = 1^8 = 1$

$\left|\frac{z}{w}+\frac{w}{z}\right| \le \left|\frac{z}{w}\right| + \left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|z|}{|w|}+\frac{|w|}{|z|} = 1+1=2$ เพราะฉะนั้น $\left|\frac{z}{w}+\frac{w}{z}\right| \le 2$

ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. 3 2. 3 3. $\sqrt{3}$ 4. $\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4 = \cos\pi+i\sin\pi = -1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8 = (-1)^2 = 1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{96} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^8\right]^{12} = (1)^{12} = 1$$

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{100} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{96}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^4 = (1)(-1) = -1$$

$$w = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^8 = \left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^8 = \cos\frac{16\pi}{3}+i\sin\frac{16\pi}{3}$$

$$= \cos(5\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(5\pi+\frac{\pi}{3}) = -\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{-1}{-(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})} = \cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{-(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})}{-1} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\frac{z}{w}+\frac{w}{z} = \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\sqrt{3}\,i$$

ตัวอย่างที่ 6.3.20 กำหนด $z^2 = -5+12i$ และ $|z-6| = 5$ ค่าของ $\mathrm{Im}(\bar{z})$ เท่ากับเท่าใด

1. -3 2. -4

3. 3 4. 4

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|a| \le \sqrt{a^2+b^2}$, $|b| \le \sqrt{a^2+b^2}$ เพราะฉะนั้น $|\mathrm{Im}(z)| < |z|$

จากโจทย์ $|z^2| = |-5+12i| = \sqrt{25+144} = 13$

$|z| = \sqrt{13}$

และ $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{13}$ ดังนั้น $|\mathrm{Im}(\bar{z})| \le \sqrt{13}$

ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. 3 2. $4 \geq \sqrt{13}$ 3. 3 4. $4 \geq \sqrt{13}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $|z|^2 = |z^2| = |-5+2i| = \sqrt{25+144} = 13$

$$|z-6| = 5$$

$$|z-6|^2 = 25$$

$$(z-6)\overline{(z-6)} = 25$$

$$(z-6)(\bar{z}-6) = 25$$

$$z\bar{z} - 6z - 6\bar{z} + 36 = 25$$

$$|z|^2 - 6(z+\bar{z}) = -11$$

$$13 - 6(z+\bar{z}) = -11$$

$$-6(z+\bar{z}) = -24$$

$$z+\bar{z} = 4$$

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = 2$$

$$\text{Re}(z) = 2$$

$$z = 2+bi$$

$$z^2 = (2+bi)^2 = (4-b^2)+4bi = -5+12i$$

$$4b = 12$$

$$b = 3$$

เพราะฉะนั้น $\bar{z} = 2-3i$

$$\text{Im}(\bar{z}) = -3$$

6.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

1. กำหนดให้ $z = a + bi$, $w = c + di$ ถ้า $|z| \le |w|$ แล้ว $|ab| \le |cd|$
2. มีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ทำให้ $z^2 = z$ โดยที่ $|z| \ne 0$ และ $|z| \ne 1$
3. กำหนดให้ a , b , c , d เป็นจำนวนจริง ถ้า $(a + bi)(c + di) = 0$ แล้ว $ac = 0$ หรือ $bd = 0$
4. ถ้า $\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$ แล้ว $|z| = |\mathrm{Im}(z)|$
5. $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$ ทุกค่า θ ที่เป็นจำนวนจริง
6. ถ้า $z^6 = 1$ และ $z \ne 1$ แล้ว $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$
7. ถ้า $f(z) = \frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ แล้ว $f(z) \ne f(\bar{z})$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน $z \ne 0$
8. ถ้า $f(z) = z + \bar{z}$ แล้ว $|f(z)| = |f(\bar{z})|$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
9. ถ้า $z = a + bi$ แล้ว $|a + b| \le |z|$
10. ถ้า $z = i\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(\frac{\pi}{4})$ แล้ว $z^8 = 1$
11. ถ้า $z = -i\sin(\frac{\pi}{4})$ แล้ว $z^4 = 0$
12. ถ้า $z = a + bi$ แล้ว $|\bar{z}| \le |z^{-1}|$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z ที่ไม่เท่ากับศูนย์
13. ถ้า p(x) เป็นพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง แล้ว p(x) = 0 ต้องมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 ค่า
14. ถ้า p(x) เป็นพหุนามดีกรี 5 แล้ว p(x) = 0 ต้องมีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อย 1 ค่า
15. ถ้า f(x) เป็นพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง แล้ว $f(z) = f(\bar{z})$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
16. $|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \ge |z|$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
17. ถ้า $|z| \ne 1$ แล้ว $\frac{z+1}{z-1}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้
18. $|z+\bar{z}|^2 + |z-\bar{z}|^2 = 2|z|^2 + 2|\bar{z}|^2$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z
19. ถ้า $|z| \ge |w|$ แล้ว $\mathrm{Re}(z) \ge \mathrm{Re}(w)$ หรือ $\mathrm{Im}(z) \ge \mathrm{Im}(w)$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z และ w
20. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน $\sum_{n=0}^{23}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^n = 0$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

1. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $z = 3 + 4i$ $(a = 1, b = 1)$

$w = 6$ $(c = 6, d = 0)$

จะได้ $|z| = 5 \leq 6 = |w|$ แต่ $|ab| = 1$ และ $|cd| = 0$; $|ab| \not\leq |cd|$

2. **ผิด** เพราะว่า $z^2 = z$

เพราะฉะนั้น $|z|^2 = |z|$

เพราะว่า $|z| \neq 0$ เพราะฉะนั้น $|z| = 1$

เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ทำให้ $z^2 = z$ โดยที่ $|z| \neq 0$ และ $|z| \neq 1$

3. **ถูกต้อง** $(a + bi)(c + di) = 0$

$a + bi = 0$ หรือ $c + di = 0$

$(a = 0$ และ $b = 0)$ หรือ $(c = 0$ และ $d = 0)$

เพราะฉะนั้น $ac = 0$ หรือ $bd = 0$

4. **ถูกต้อง**

$$\begin{aligned} z &= a + bi \\ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| &= 1 \\ |z + 1| &= |z - 1| \\ |a + bi + 1| &= |a + bi - 1| \\ |a + bi + 1|^2 &= |a + bi - 1|^2 \\ (a + 1)^2 + b^2 &= (a - 1)^2 + b^2 \\ a^2 + 2a + 1 &= a^2 - 2a + 1 \\ 2a &= -2a \\ a &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $z = bi$, $|z| = |b| = |\mathrm{Im}(z)|$

5. **ถูกต้อง**

$$\begin{aligned} |\cos\theta + i\sin\theta| &= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ทุกค่า θ ที่เป็นจำนวนจริง

6. **ถูกต้อง** กำหนด $z^6 = 1$ และ $z \neq 1$

เพราะว่า $(z - 1)(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^6 - 1$

$$(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$$

$z \neq 1$; $\quad z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$

7. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(i) = \dfrac{1+i+i^2}{1-i+i^2} = \dfrac{i}{-i} = -1$

$$f(-i) = \frac{1-i+i^2}{1+i+(-i)^2} = \frac{-i}{i} = -1$$

8. ถูกต้อง $z = a+bi$

$|f(z)| = |z+\bar{z}|$

$|f(\bar{z})| = |\bar{z}+\bar{\bar{z}}| = |\bar{z}+z| = |z+\bar{z}| = |f(z)|$

เพราะฉะนั้น $|f(z)| = |f(\bar{z})|$ ทุกจำนวนเชิงซ้อน z

9. ผิด ตัวอย่างเช่น $z = 3+4i$

$|z| = 5$

$|a+b| = 7 \nleq 5 = |z|$

10. ถูกต้อง
$$\begin{aligned} z &= i\cos(\tfrac{\pi}{4}) + \sin(\tfrac{\pi}{4}) \\ &= i(\cos(\tfrac{\pi}{4}) - i\sin(\tfrac{\pi}{4})) \\ &= i(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4})) \\ z^8 &= i^8(\cos(-\tfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\tfrac{\pi}{4}))^8 \\ &= (\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

11. ผิด เพราะว่า $z = -i\sin(\frac{\pi}{4}) \neq 0$

เพราะฉะนั้น $z^4 = (-i\sin(\frac{\pi}{4}))^4 = (-i\frac{1}{\sqrt{2}})^4 = \frac{1}{4} \neq 0$

12. ผิด ตัวอย่างเช่น $z = 10$, $\bar{z} = 10$, $z^{-1} = \frac{1}{10}$ ดังนั้น $|\bar{z}| \nleq |z^{-1}|$

13. ผิด ตัวอย่างเช่น $p(x) = x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2 = 0$ มีรากเป็น i กับ $-i$

เพราะฉะนั้น $p(x) = x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2 = 0$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

14. ผิด ตัวอย่างเช่น $p(x) = (x-i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)(x-5i)$ เป็นพหุนามดีกรี 5

$p(x) = 0$ มีรากเป็น $i, 2i, 3i, 4i, 5i$

$p(x) = (x-i)(x-2i)(x-3i)(x-4i)(x-5i)$ ไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

15.ถูกต้อง $f(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$

$$\overline{f(z)} = \overline{Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E} = \overline{Az^4} + \overline{Bz^3} + \overline{Cz^2} + \overline{Dz} + \overline{E}$$

$$= A\bar{z}^4 + B\bar{z}^3 + C\bar{z}^2 + D\bar{z} + E = f(\bar{z})$$

16.ถูกต้อง $z = a + bi$

$$|a|^2 + 2|a|\,|b| + |b|^2 \geq |a|^2 + |b|^2$$

$$(|a| + |b|)^2 \geq a^2 + b^2$$

$$(|a| + |b|)^2 \geq |z|^2$$

$$|a| + |b| \geq |z|$$

$$|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| \geq |z|$$

17.ผิด ตัวอย่างเช่น $z = 4i$

$$\frac{4i+1}{4i-1} = \frac{1+4i}{-1+4i}\,\frac{-1-4i}{-1-4i} = \frac{-(1+4i)(1+4i)}{(-1+4i)(-1-4i)} = \frac{-(1+8i-16)}{1+16} = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}i$$

18.ถูกต้อง

$$z = a + bi \qquad |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\bar{z} = a - bi \qquad |\bar{z}|^2 = a^2 + b^2$$

$$z + \bar{z} = 2a \qquad |z + \bar{z}|^2 = 4a^2$$

$$z - \bar{z} = 2bi \qquad |z - \bar{z}|^2 = 4b^2$$

$$|z + \bar{z}|^2 + |z - \bar{z}|^2 = 4a^2 + 4b^2 = 2(a^2 + b^2) + 2(a^2 + b^2) = 2|z|^2 + 2|\bar{z}|^2$$

19.ผิด ตัวอย่างเช่น $z = -4 - 3i$, $|z| = 5$ $\qquad w = 1 + 2i$, $|w| = \sqrt{5}$

$\mathrm{Re}(z) = -4 \not> 1 = \mathrm{Re}(w)$ $\qquad \mathrm{Im}(z) = -3 \not> 2 = \mathrm{Im}(w)$

20.ถูกต้อง

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

$$z^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$$

$$z^{12} - 1 = 0$$

เพราะฉะนั้น $(z-1)(z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + \ldots + z + 1) = 0$

เพราะว่า $z \neq 1$ เพราะฉะนั้น $z^{11} + z^{10} + z^9 + z^8 + \ldots + z + 1 = 0$

$$\sum_{n=0}^{23}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n = \sum_{n=0}^{23} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11} + z^{12} + z^{13} + z^{14} + z^{15} + \ldots + z^{22} + z^{23}$$

$$= (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11}) + (z^{12} + z^{13} + z^{14} + \ldots + z^{22} + z^{23})$$

$$= 0 + z^{12}(1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{11}) = 0 + 0 = 0$$

6.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนด $z = \left[\dfrac{i+i^2+i^3+...+i^{10}}{(1-2i)^2}\right]^4$ ค่าของ $|z^{-1}|$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\dfrac{2}{25}$ 2. $\dfrac{25}{2}$
   3. $\dfrac{4}{625}$ 4. $\dfrac{625}{4}$

2. รากที่สามของ 64i เท่ากับเท่าใด

   1. $-4i, 2\sqrt{3}+2i, -2\sqrt{3}+2i$ 2. $4i, 2\sqrt{3}-2i, -2\sqrt{3}+2i$
   3. $-4i, -2\sqrt{3}-2i, -2\sqrt{3}+2i$ 4. $4i, 2\sqrt{3}+2i, 2\sqrt{3}-2i$

3. กำหนดให้ $z = a+bi$ และ $z = \dfrac{x+yi}{x-yi}$ ค่าของ a^2+b^2 เท่ากับเท่าใด

   1. 0 2. 1
   3. 2 4. 3

4. ค่าของ $[\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})]^{12}$ เท่ากับเท่าใด

   1. 2 2. 4
   3. -2 4. -4

5. ค่าของ $(\sqrt{3}-i)^5$ เท่ากับเท่าใด

   1. $16\sqrt{3}+16i$ 2. $16\sqrt{3}-16i$
   3. $-16\sqrt{3}+16i$ 4. $-16\sqrt{3}-16i$

6. เซตของรากที่ 4 ของ $-8-8\sqrt{3}\,i$ คือเซตในตัวเลือกใด

   1. $\{1+\sqrt{3}\,i, -1-\sqrt{3}\,i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}+i\}$
   2. $\{-1+\sqrt{3}\,i, 1-\sqrt{3}\,i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i\}$
   3. $\{1-\sqrt{3}\,i, -1-\sqrt{3}\,i, \sqrt{3}-i, -\sqrt{3}-i\}$
   4. $\{1+\sqrt{3}\,i, -1-\sqrt{3}\,i, -\sqrt{3}-i, \sqrt{3}+i\}$

7. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $2x^3+2x^2+x+1=0$
   ค่าของ $|z_1|+|z_2|+|z_3|$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\sqrt{2}-1$ 2. $1-\sqrt{2}$
   3. $\sqrt{2}+1$ 4. 2

8. กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 และรากของสมการ $p(x) = 0$ คือ $2, -1, 3+4i$ และ $3-4i$ ถ้า $p(1) = -40$ แล้วผลบวกของสัมประสิทธิ์ทุกตัวของ $p(x)$ เท่ากับเท่าใด

    1. 10 2. -10
    3. 40 4. -40

9. กำหนดให้ $z = -\sqrt{3} + i$ จำนวนเต็มบวก k ที่ทำให้ z^k เป็นจำนวนจริง ค่าของ k จะมีค่าน้อยสุดเท่ากับเท่าใด

    1. 0 2. 2
    3. 3 4. 6

10. $A = \{z \in C \mid z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0\}$ A คือเซตใด

    1. $\{-1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$
    2. $\{-1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}i\}$
    3. $\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$
    4. $\{-1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$

เฉลยคำตอบ

1. (4)	2. (1)	3. (2)	4. (3)	5. (4)
6. (1)	7. (3)	8. (4)	9. (4)	10. (2)

การเรียงลำดับ $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}}$, $\left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}}$ จากน้อยไปมาก

เพราะว่า $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}} < \left[\sqrt{2}\right]^{2}$ เพราะฉะนั้น $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}} < 2$ เพราะว่า $2 = 3^{\log_3 2} = (\sqrt{3})^{\log_3 4}$

และ $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{0.60206}{0.477} < \frac{0.60206}{0.45} < \frac{0.60}{0.45} = \frac{4}{3} = 1.33333 < 1.414 = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $(\sqrt{3})^{\log_3 4} < \left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}}$

เพราะฉะนั้น $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}} < 2 = (\sqrt{3})^{\log_3 4} < \left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}}$ สรุป $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}} < \left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}}$

หมายเหตุ ค่าจริง $\left[\sqrt{2}\right]^{\sqrt{3}} = 1.82263465$, $\left[\sqrt{3}\right]^{\sqrt{2}} = 2.17458143$

บทที่ 7
สถิติ

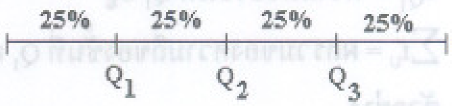
7.1 สรุปเนื้อหา

1. **การวัดค่ากลางของข้อมูล** ค่ากลางของข้อมูลเป็นค่าตัวเลขที่สามารถบอกสภาพต่างๆ ของข้อมูลได้ ค่ากลางของข้อมูลที่สำคัญคือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และ ฐานนิยม

2. **การวัดตำแหน่งของข้อมูล** เราสามารถทำได้ด้วยการเรียงค่าของข้อมูลจากข้อมูลที่มีค่าน้อยไปยังข้อมูลที่มีค่ามากและแบ่งข้อมูลออกเป็นส่วนๆ ตามความเหมาะสม การวัดตำแหน่งที่สำคัญคือ ควอร์ไทล์ เดไซล์ และ เปอร์เซ็นไทล์

2.1 การวัดตำแหน่งควอร์ไทล์

เมื่อเรานำข้อมูลทั้งหมดมาเรียงค่าจากน้อยไปมากและแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนค่าที่ตรงกับจุดแบ่ง 3 จุด นั้นจะแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่าๆ กันค่าของข้อมูลที่ตรงจุดแบ่งนั้นเรียกว่า



ควอร์ไทล์ที่ 1 (Q_1) , ควอร์ไทล์ที่ 2 (Q_2) และ ควอร์ไทล์ที่ 3 (Q_3) ตามลำดับ

ประโยชน์ของตำแหน่งควอร์ไทล์ เช่น

1. จำนวนของข้อมูลครึ่งหนึ่งของทั้งหมดมีค่าระหว่าง Q_1 และ Q_3
2. มัธยฐานจะมีค่าของ Q_2
3. กลุ่มข้อมูลที่มีคะแนนต่ำสุด 25% แรกจะมีค่าของคะแนนสูงสุดเท่ากับ Q_1

การหาตำแหน่งควอร์ไทล์ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

ต้องทำการเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมาก $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_N$

$Q_1 =$ คะแนนของข้อมูลตัวที่ $\frac{1}{4}(N+1)$

$Q_2 =$ คะแนนของข้อมูลตัวที่ $\frac{2}{4}(N+1)$

$Q_3 =$ คะแนนของข้อมูลตัวที่ $\frac{3}{4}(N+1)$

ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 2 , 4 , 7 , 8 , 8 , 10 , 12 , 14 , 15 , 19 , 25 มีจำนวนข้อมูล N = 11

$Q_1 =$ คะแนนตัวที่ $\frac{1}{4}(11+1)$ = คะแนนตัวที่ 3 = 7

$Q_2 =$ คะแนนตัวที่ $\frac{2}{4}(11+1)$ = คะแนนตัวที่ 6 = 10

$Q_3 =$ คะแนนตัวที่ $\frac{3}{4}(11+1)$ = คะแนนตัวที่ 9 = 15

หมายเหตุ ในกรณีที่ตำแหน่งของข้อมูลไม่เป็นจำนวนเต็ม ต้องทำการเทียบบัญญัติไตรยางค์ ตัวอย่างเช่น ข้อมูลคือ 4 , 5 , 7 , 8 , 8 , 10 , 12 , 15 เพราะฉะนั้น $N = 8$, $x_2 = 5$, $x_3 = 7$

$Q_1 =$ คะแนนตัวที่ $\frac{8+1}{4}$ = คะแนนตัวที่ 2.25

เพราะฉะนั้น $Q_1 = x_2 + \frac{1}{4}(x_3 - x_2) = 5 + \frac{1}{4}(7-5) = 5.5$

การหาตำแหน่งควอร์ไทล์ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_1}}\right) I \text{ หรือ } Q_1 = U - \left(\frac{\Sigma f_U - \frac{N}{4}}{f_{Q_1}}\right) I$$

N = จำนวนข้อมูล

L = ขีดจำกัดล่างของอันตรภาคชั้นที่ Q_1 อยู่

$\sum f_L$ = ผลรวมของความถี่ในชั้นที่ต่ำกว่า Q_1 อยู่

I = ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่ Q_1 อยู่

f_{Q_1} = ความถี่ของชั้นที่ Q_1 อยู่

U = ขีดจำกัดบนของชั้นที่ Q_1 อยู่

$\sum f_U$ = ผลรวมของความถี่ของชั้นที่ Q_1 อยู่ และชั้นที่มีคะแนนต่ำกว่า

ตัวอย่าง

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
11 – 20	4	4
21 – 30	12	16 ←
31 – 40	24	40
41 – 50	8	48
51 – 60	2	50

$N = 50$, $\frac{N}{4} = 12.5$ คะแนนตัวที่ 12.5 อยู่ในอันตรภาคชั้น 21 – 30

$$Q_1 = L + \left(\frac{\frac{N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_1}}\right) I = 20.5 + \left(\frac{12.5-4}{12}\right)(10) = 20.5 + 7.08333 = 27.58333$$

หรือ $$Q_1 = U - \left(\frac{\Sigma f_U - \frac{N}{4}}{f_{Q_1}}\right) I = 30.5 - \left(\frac{16-12.5}{12}\right)(10) = 30.5 - 2.91667 = 27.58333$$

ในทำนองเดียวกัน $Q_3 = L + \left(\dfrac{\frac{3N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_3}}\right) I$ หรือ $Q_3 = U - \left(\dfrac{\Sigma f_U - \frac{3N}{4}}{f_{Q_3}}\right) I$

L = ขีดจำกัดล่างของอันตรภาคชั้นที่ Q_3 อยู่ U = ขีดจำกัดบนของอันตรภาคชั้นที่ Q_3 อยู่

f_{Q_3} = ความถี่ของชั้นที่ Q_3 อยู่ Σf_L = ความถี่สะสมชั้นที่ต่ำกว่า Q_3 อยู่

$\sum f_U$ = ความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่า Q_3 อยู่ รวมกันกับความถี่ที่ Q_3 อยู่

ตัวอย่างเช่น จากข้อมูลข้างต้น $\frac{3N}{4} = 37.5$ คะแนนตัวที่ 37.5 อยู่ในอันตรภาคชั้น 31 – 40

$$Q_3 = L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_3}}\right) I = 30.5 + \left(\frac{37.5-16}{24}\right) 10 = 30.5 + 8.95833 = 39.4583$$

$$Q_2 = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_{Q_2}}\right) I \text{ หรือ } Q_2 = U - \left(\frac{\Sigma f_U - \frac{N}{2}}{f_{Q_2}}\right) I$$

จากตัวอย่างข้างต้น $\frac{N}{2} = 25$, คะแนนตัวที่ 25 อยู่ในอันตรภาคชั้น 31 – 40

$$Q_2 = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_{Q_2}}\right) I = 30.5 + \left(\frac{25-16}{24}\right) 10 = 30.5 + 3.75 = 34.25$$

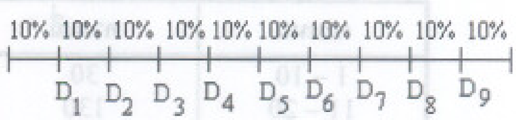
2.2 การวัดตำแหน่งเดไซล์

นำข้อมูลมาเรียงจากน้อยไปมาก $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_N$

แบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กัน

จุดที่ใช้แบ่งข้อมูลมีทั้งหมด 9 จุด คะแนน

ที่จุดแบ่งเราจะเรียกว่า เดไซน์ 1, 2 , ..., 9



ตามลำดับ และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $D_1 , D_2 , D_3 , \ldots , D_9$ ประโยชน์ของตำแหน่งเดไซน์ เช่น

1. กลุ่มข้อมูลที่มีค่ามากที่สุด 10% แรกของทั้งหมดจะมีคะแนนต่ำสุดเท่ากับ D_9
2. กลุ่มข้อมูลที่มีค่าน้อยสุดคิดเป็น 30% ของทั้งหมดจะมีค่าของข้อมูลไม่เกิน D_3
3. มัธยฐาน = $D_5 = Q_2$
4. ในการสอบวัดผลผู้ที่สอบผ่านต้องได้คะแนนไม่ต่ำกว่า D_8 จะมีผู้สอบผ่านทั้งหมด 20%

การหาตำแหน่งเดไซน์ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

ให้เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_N$ เดไซล์ที่ k = คะแนนตัวที่ $\frac{k}{10}(N+1)$

ตัวอย่าง ข้อมูลคือ 2 , 4 , 7 , 10 , 12 , 15 , 18 , 22 , 25

D_4 = คะแนนตัวที่ $\frac{4}{10}(9+1)$ = คะแนนตัวที่ 4 = 10

ตัวอย่าง ข้อมูลคือ 4 , 12 , 17, 21, 25 , 32 , 46, 59, 72 , 90, 92, 95, 100

$N = 13$, $x_5 = 25$, $x_6 = 32$

D_4 = คะแนนตัวที่ $\frac{4}{10}(13+1)$ = คะแนนตัวที่ 5.6

$$= x_5 + \left(\frac{6}{10}\right)(x_6 - x_5) = 25 + \left(\frac{6}{10}\right)(32-25) = 25 + 4.2 = 29.2$$

การหาตำแหน่งเดไซล์ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

$$D_k = L + \left(\frac{\frac{kN}{10} - \sum f_L}{f_{D_k}}\right) I \text{ หรือ } D_k = U - \left(\frac{\sum f_U - \frac{kN}{10}}{f_{D_k}}\right) I$$

N = จำนวนข้อมูล I = ความกว้างของอันตรภาคชั้นที่เดไซล์ k อยู่

$\sum f_L$ = ความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่ D_k อยู่

$\sum f_U$ = ความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่ D_k อยู่รวมกับความถี่ของชั้นที่ D_k อยู่

f_{D_k} = ความถี่ของชั้นที่ D_k อยู่

ตัวอย่าง การหา D_8 ของข้อมูล

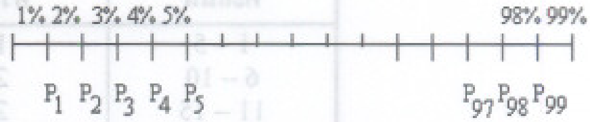
คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
1 – 10	30	30
11 – 20	130	160
21 – 30	200	360
31 – 40	120	480 ←
41 – 50	20	50
		500

$N = 500$, $\frac{8N}{10} = \frac{8}{10}(500) = 400$, คะแนนตัวที่ 400 อยู่ในอันตรภาคชั้น 31 – 40

$$D_8 = L + \left(\frac{\frac{8N}{10} - \sum f_L}{f_{D_8}}\right) I = 30.5 + \left(\frac{400-360}{120}\right)(10) = 30.5 + 3.3333 = 33.8333$$

2.3 การวัดตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์

เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_N$



แบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กัน
ด้วยจุดแบ่ง 99 จุดคะแนนที่จุดแบ่งทั้ง 99 จุด
เราเรียกว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 1 , 2 , 3 , …, 99 ตามลำดับ ประโยชน์ของเปอร์เซ็นไทล์

1. คะแนน P_{60} สามารถบอกได้ว่ามีกลุ่มคะแนนที่อยู่ต่ำกว่า P_{60} อยู่ทั้งหมด 60% ของทั้งหมด
2. การสอบวัดผลหากต้องการให้มีผู้สอบผ่านเพียง 15% ของผู้เข้าสอบทั้งหมด ผู้ที่จะสอบผ่านต้องมีตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ ตั้งแต่ 85 ขึ้นไป
3. มัธยฐาน $= P_{50} = Q_2 = D_5$

การหาตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลที่ไม่แจกแจงความถี่

ให้เรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_N$

เปอร์เซ็นไทล์ที่ $r = P_r =$ คะแนนตัวที่ $\frac{r}{100}(N+1)$

ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 2 , 4 , 7 , 10 , 12 , 15 , 27 , 32 , 45 , 50 , 51, 62 , 74 , 80

จะได้ $N = 14$, $x_{12} = 62$, $x_{13} = 74$

$P_{85} =$ คะแนนตัวที่ $\frac{85}{100}(N+1)$ = คะแนนตัวที่ $\frac{85}{100}(14+1)$

= คะแนนตัวที่ 12.75 $= x_{12} + \frac{75}{100}(x_{13} - x_{12}) = 62 + \frac{75}{100}(74-62) = 62 + 9 = 71$

$P_{45} =$ คะแนนตัวที่ $\frac{45}{100}(14+1) =$ คะแนนตัวที่ 6.75

$= x_6 + \frac{75}{100}(x_7 - x_6) = 15 + (\frac{75}{100})(27-15) = 15 + 9 = 24$

การหาเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

$$P_r = L + \left(\frac{\frac{rN}{10} - \sum f_L}{f_r}\right) I \quad \text{หรือ} \quad P_r = U - \left(\frac{\sum f_U - \frac{rN}{100}}{f_r}\right) I$$

$N =$ จำนวนข้อมูล

$I =$ ความกว้างอันตรภาคชั้นที่ P_r อยู่

$\sum f_L =$ ความถี่สะสมของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่ P_r อยู่

$\sum f_U = \sum f_L + f_r$

= ความถี่สะสมของชั้นที่ที่ต่ำกว่าชั้นที่ P_r อยู่ รวมกับความถี่ของชั้นที่ P_r อยู่

$L =$ ขีดจำกัดล่างของชั้นที่ P_r อยู่

$U =$ ขีดจำกัดบนของชั้นที่ P_r อยู่

ตัวอย่าง จงหา P_{45} ของข้อมูล

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
1 – 5	18	18
6 – 10	23	41 ←
11 – 15	25	66
16 – 20	14	80

$N = 80$, $\frac{45}{100}(N) = \frac{45(80)}{100} = 36$, ข้อมูลตัวที่ 36 อยู่ในอันตรภาคชั้น 6 – 10

$$P_{45} = L + \left(\frac{\frac{45}{100}N - \sum f_L}{f_r}\right) I = 5.5 + \left(\frac{36-18}{23}\right)5 = 5.5 + 3.9130 = 9.4130$$

3. **การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Variation)** คือการวัดการกระจายของข้อมูลเพียงชุดเดียวเพื่อดูว่าข้อมูลแต่ละค่าในข้อมูลชุดนั้นมีความแตกต่างกันมากหรือน้อยอย่างไร

การวัดการกระจายสัมบูรณ์มี 4 ชนิดคือ

1. พิสัย = ค่าสูงสุด – ค่าต่ำสุด
2. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = QD = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$
3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = MD = $\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{n}$
4. ส่วนเบี่ยงมาตรฐาน = SD = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$ (บางครั้งเราแทนด้วย s)

หมายเหตุ สำหรับข้อมูลที่แจกแจงความถี่ MD = $\frac{\sum_{i=1}^{k}|x_i - \bar{x}|f_i}{N}$ และ SD = $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i}{N}}$

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูล 2 , 4 , 7 , 9 , 12 , 15 , 28

พิสัย = max – min = 18 – 2 = 16

$Q_1 = 4$, $Q_2 = 15$

ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{15-4}{2} = 5.5$

$$\bar{x} = \frac{2+4+7+9+12+15+28}{7} = \frac{77}{7} = 11$$

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \dfrac{\sum_{i=1}^{7}|x_i - \bar{x}|}{7} = \dfrac{|2-11|+|4-11|+|7-11|+...+|28-11|}{7}$

$= \dfrac{9+7+4+2+1+4+17}{7} = \dfrac{44}{7} = 6.2857$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2}{7}} = \sqrt{\dfrac{81+49+16+4+1+16+289}{7}} = \sqrt{\dfrac{456}{7}} = 8.0711$

หมายเหตุ 1. ค่าความแปรปรวนของข้อมูล $= SD^2$

เพราะฉะนั้น ค่าความแปรปรวน $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$

โดยการกระจายและจัดรูปทางพีชคณิตจะได้ว่า

1. $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n} - \bar{x}^2$
2. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x_i = \bar{x}$ ทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$
3. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - k)^2$ ทุกจำนวนจริง k
4. $\sum_{i=1}^{n}|x_i - \text{Median}| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i - k|$ ทุกจำนวนจริง k

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูล

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
15 – 19	12	12
20 – 24	23	35
25 – 29	35	70
30 – 34	24	96
35 – 39	6	100
	100	

พิสัย = max – min = 39.5 – 14.5 = 25

Q_1 = คะแนนตัวที่ $\dfrac{N}{4}$ = คะแนนตัวที่ 25

$= L + \left(\dfrac{\frac{N}{4} - \sum f_L}{f_{Q_1}}\right) I = 19.5 + \left(\dfrac{25-12}{23}\right)(5) = 19.5 + 2.8261 = 22.3261$

Q_3 = คะแนนตัวที่ $\frac{3N}{4}$ = คะแนนตัวที่ 75

$$= L + \left(\frac{\frac{3N}{4} - \Sigma f_L}{f_{Q_3}}\right) I = 29.5 + \left(\frac{75-70}{24}\right)(5) = 29.5 + 1.04167 = 30.54167$$

ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{30.54167 - 22.3261}{2} = 4.107785$

ตัวอย่าง การหา $\bar{x}$, ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และความแปรปรวน ของข้อมูลที่แจกแจงความถี่แล้ว

คะแนน	x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
15 – 19	17	12	204	3468
20 – 24	22	23	506	11132
25 – 29	27	35	945	25515
30 – 34	32	24	768	24576
35 – 39	37	6	222	8214
		100	2645	72905

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{5} x_i f_i}{N} = \frac{2645}{100} = 26.45$$

$$s^2 = \frac{\sum_{k=1}^{5} x_i^2 f_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{72905}{100} - (26.45)^2 = 729.05 - 699.6025 = 29.4475$$

เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $= \sqrt{29.4475} = 5.42656$

x_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	f_i	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i$
17	9.45	12	207.9
22	4.55	23	104.65
27	0.55	35	19.25
32	5.55	27	149.85
37	10.55	6	63.3
			544.95

ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{\sum_{i=1}^{5} \lvert x_i - \bar{x}\rvert f_i}{N} = \frac{544.95}{100} = 5.4495$

ความสัมพันธ์ของการกระจายสัมบูรณ์ระหว่างข้อมูล 2 ชุด ข้อมูลชุดที่ 1 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$

ข้อมูลชุดที่ 2 $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$

เมื่อกำหนด $y = ax + b$ จะได้ว่า

1. $\bar{y} = a\bar{x} + b$
2. พิสัยของข้อมูล y = a (พิสัยของข้อมูล x)

3. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูล y = |a| (ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูล x)

   [QD(y) = QD(ax + b) = |a| QD(x)]

4. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูล y = | a | (ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูล x)

   [MD(y) = MD(ax + b) = | a | MD(x)]

5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล y = | a | (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล x)

   [SD(y) = SD(ax + b) = | a | SD(x)]

เพราะฉะนั้น $s_y^2 = a^2 s_x^2$

การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนโดยวิธีลัด

เราทำโดยการลบข้อมูลทุกตัวด้วยค่าคงตัวและหารข้อมูลทุกตัวด้วยค่าคงตัว

ตัวอย่างเช่น A : 2200 , 2525 , 3000 , 4050 , 5500

B : – 800 , – 475 , 0 , 1050 , 2500 (B = A – 3000)

C : – 32 , – 19 , 0 , 42 , 100 $(C = \frac{B}{25})$

$$\overline{C} = \frac{(-32)+(-19)+0+42+100}{5} = \frac{91}{5}$$

$$s_C^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2}{5} - \overline{x}^2 = \frac{1024+361+0+1764+10000}{5} - \left(\frac{91}{5}\right)^2$$

$$= \frac{13149}{5} - \frac{8281}{25} = \frac{57464}{24} = 2298.56$$

เพราะว่า B = 25C เพราะฉะนั้น $\overline{B} = 25\overline{C} = 455$ และ $s_B^2 = (25)^2 s_C^2 = 625\left(\frac{57464}{25}\right) = 1436600$

เพราะว่า A = B + 3000 เพราะฉะนั้น $\overline{A} = \overline{B} + 3000 = 3455$ และ $s_A^2 = s_B^2 = 1436600$

ตัวอย่าง กำหนดความสัมพันธ์ของข้อมูล $y = \frac{x-27}{5}$

x_i	f_i	y_i	$f_i y_i$
17	12	– 2	–24
22	23	– 1	– 23
27	35	0	0
32	24	1	24
37	6	2	12
	100		**–11**

เพราะฉะนั้น $\overline{y} = -\frac{11}{100}$

เพราะว่า $x = 5y + 27$ เพราะฉะนั้น $\overline{x} = 5\overline{y} + 27 = 5(-\frac{11}{100}) + 27 = \frac{2700-55}{100} = \frac{2645}{100} = 26.45$

$$s_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i y_i^2}{100} - \overline{y}^2 = \frac{48+23+0+24+24}{100} - \overline{y}^2 = \frac{119}{100} - \frac{121}{10000} = \frac{11900-121}{10000} = \frac{11779}{10000}$$

เพราะว่า $x = 5y + 27$ เพราะฉะนั้น $s_X^2 = 25 s_Y^2 = 25\left(\frac{11779}{10000}\right) = \frac{11779}{400} = 29.4475$

หมายเหตุ การหาความแปรปรวนรวม

	จำนวน	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ความแปรปรวน
1	n_2	$\overline{x}_1$	s_1^2
2	n_2	$\overline{x}_2$	s_2^2
	n		

$\overline{x}_{รวม} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2}$ ถ้า $\overline{x}_1 = \overline{x}_2$ แล้ว $s^2_{รวม} = \frac{n_1 s_1{}^2 + n_2 s_2{}^2}{n_1 + n_2}$

ในกรณีที่ $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ ต้องทำการคำนวณตามขั้นตอนต่างๆ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง

	จำนวน	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ความแปรปรวน
1	10	40	100
2	20	50	120
รวม	30		

$$\overline{x}_{รวม} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{(10)(40)+(20)(50)}{10+20} = \frac{400+1000}{30} = \frac{1400}{30} = \frac{140}{3}$$

จากข้อมูลชุดที่ 1 $s_1^2 = \frac{\sum x_1^2}{n_1} - \overline{x}_1^2$

$$100 = \frac{\sum x_1^2}{10} - 40^2$$

เพราะฉะนั้น $\sum x_1^2 = 17000$

จากข้อมูลชุดที่ 2 $s_2^2 = \frac{\sum x_2^2}{n_2} - \overline{x}_2{}^2$

$$120 = \frac{\sum x_2^2}{20} - 50^2$$

เพราะฉะนั้น $\sum x_2^2 = 52400$

เพราะฉะนั้น $s^2_{รวม} = \frac{\sum x_1^2 + \sum x_2^2}{30} - \overline{x}^2_{รวม} = \frac{(17000+52400)}{30} - \left(\frac{140}{3}\right)^2 = \frac{1220}{9}$

4. **การวัดการกระจายสัมพัทธ์**

การกระจายสัมพัทธ์ใช้ในการเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลสองชุดเพื่อดูว่าข้อมูลชุดใดมีการกระจายมากหรือน้อยกว่ากันอย่างไร ตัวอย่างเช่น

		ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ความแปรปรวน
ข้อมูลชุดที่ 1	9 , 10 , 11	10	$\frac{2}{3}$
ข้อมูลชุดที่ 2	5 , 10 , 15	10	$\frac{50}{3}$
ข้อมูลชุดที่ 3	2 , 3 , 4	3	$\frac{2}{3}$

จากตัวอย่างข้อมูล 3 ชุดข้างต้นเราจะสรุปไม่ได้การกระจายว่าข้อมูลชุดใดมีการกระจายมากหรือน้อยแตกต่างกันอย่างไร การวัดการกระจายสัมพัทธ์มีดังนี้

1. สัมประสิทธิ์ของพิสัย = $\dfrac{\max - \min}{\max + \min}$
2. สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$
3. สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = $\dfrac{MD}{\bar{x}}$
4. สัมประสิทธิ์การแปรผัน = $\dfrac{s}{\bar{x}}$

ข้อควรจำ 1. สัมประสิทธิ์การแปรผันนิยมใช้ในการวัดการกระจายสัมพัทธ์มากที่สุด

2. สัมประสิทธิ์การแปรผันนิยมใช้เป็นเปอร์เซ็นต์ ตัวอย่างเช่น $s = 4$, $\bar{x} = 16$

   สัมประสิทธิ์การแปรผัน = $\dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{4}{16} = 0.25$ หรือ 25%

3. ถ้าข้อมูลที่เรานำมาคำนวณค่ามีค่าเป็นบวกทุกตัวแล้วสัมประสิทธิ์การกระจายทั้ง 4 แบบจะมีค่าเป็นบวกเสมอ

4. ถ้าข้อมูลทุกตัวมีค่าเป็นบวกจะได้ว่า $0 \le$ สัมประสิทธิ์พิสัย ≤ 1

   $0 \le$ สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ ≤ 1

ตัวอย่าง ข้อมูล 2 , 4 , 7 , 9 , 12 , 15 , 27

สัมประสิทธิ์พิสัย = $\dfrac{27-2}{27+2} = \dfrac{25}{29}$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{15-4}{15+4} = \dfrac{11}{19}$

$MD = \dfrac{44}{7}$, $\bar{x} = 11$, $s = 8.711$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = $\frac{MD}{\bar{x}} = \frac{\left(\frac{44}{7}\right)}{11} = \frac{4}{7}$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน = $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{8.0711}{11} = 0.7337$

ตัวอย่าง ข้อมูล

คะแนน	ความถี่
15 – 19	12
20 – 24	23
25 – 29	35
30 – 34	24
35 – 39	6

สัมประสิทธิ์พิสัย = $\frac{max-min}{max+min} = \frac{39.5-14.5}{39.5+14.5} = \frac{25}{54}$

$Q_1 = 22.326$, $Q_3 = 30.54167$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = $\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1} = \frac{30.54167-22.3261}{30.54167+22.3261} = \frac{8.21557}{52.86777} = 0.1554$

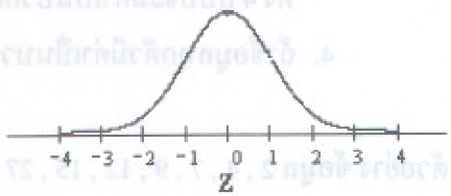
$\bar{x} = 26.45$, $MD = 5.4495$, $s = 5.42656$

สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย = $\frac{MD}{\bar{x}} = \frac{5.4495}{26.45} = 0.206$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน = $\frac{s}{\bar{x}} = \frac{5.42656}{26.45} = 0.20516$

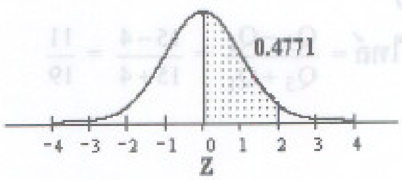
5. **คะแนนมาตรฐาน z** เป็นข้อมูลที่มีความสำคัญมากในวิชาสถิติ ซึ่งบางครั้งเราเรียกว่า **คะแนนที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน** หรือข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน ลักษณะการกระจายของข้อมูล เมื่อนำมาเขียนกราฟความถี่จะมีรูปเป็นระฆังคว่ำโดยมีลักษณะที่สำคัญดังนี้

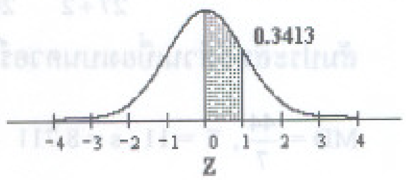
1. ค่ากลางทั้งสามค่าเท่ากัน นั้นคือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = ฐานนิยม = มัธยฐาน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 0 , ความแปรปรวน = 1
3. ลักษณะเส้นโค้งความถี่จะสมมาตรกับแกน Y
4. พื้นที่ใต้โค้งมีค่าเท่ากับ 1
5. ความถี่ส่วนใหญ่มีค่าอยู่ในช่วง [– 4 , 4]



พื้นที่ใต้โค้งจาก 0 ถึง z ต้องใช้การเปิดตาราง

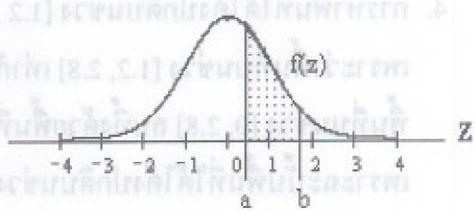
Z	A
1	0.3413
2	0.4771
1.96	0.475





หมายเหตุ กราฟ $y = f(z)$ มาจากสูตรฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็นของคะแนนมาตรฐานปกติ

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, -\infty < z < \infty$$

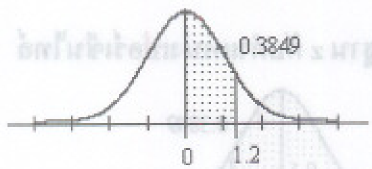


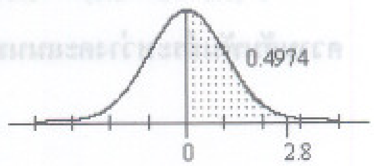
พื้นที่ใต้โค้งบนช่วง $(a, b) = \int_a^b f(z)dz$ = ความน่าจะเป็นที่ z มีค่าระหว่าง (a, b)

การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐานแบบต่างๆ

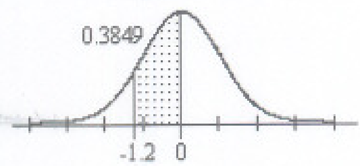
กำหนด

z	A
1.2	0.3849
2.8	0.4974

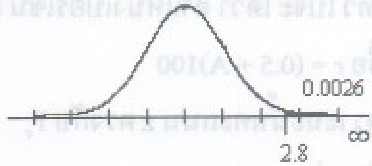




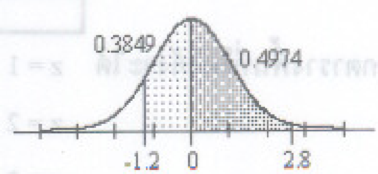
1. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติจาก – 1.2 ถึง 0
   เพราะว่าลักษณะเส้นโค้งมีความสมมาตร
   เพราะฉะนั้นพื้นที่บนช่วง [– 1.2, 0] จึงเท่ากับพื้นที่บนช่วง [0 , 1.2]
   พื้นที่ใต้โค้งบนช่วง[–1.2 , 0] = 0.3849



2. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติตั้งแต่ 2.8 ถึง ∞
   เพราะว่าพื้นที่บนช่วง [0, ∞] เท่ากับ 0.5
   และพื้นที่บนช่วง [0, 2.8] เท่ากับ 0.4975
   เพราะฉะนั้น พื้นที่ใต้โค้งปกติตั้งแต่ 2.8 ถึง ∞
   $= 0.5 – 0.4974 = 0.0026$



3. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติบนช่วง [– 1.2 , 2.8]
   พื้นที่บนช่วง [– 1.2 , 2.8]
   = พื้นที่บนช่วง [– 1.2 , 0] รวมกับพื้นที่บนช่วง [0, 2.8]
   เพราะฉะนั้นพื้นที่ใต้โค้งปกติบนช่วง [– 1.2 , 2.8]
   $= 0.3849 + 0.4974 = 0.8823$



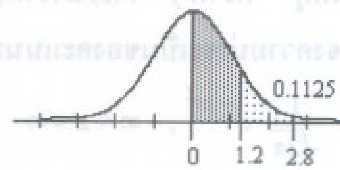
4. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติบนช่วง [1.2 , 2.8]

เพราะว่าพื้นที่บนช่วง [1.2, 2.8] เท่ากับ

พื้นที่บนช่วง [0, 2.8] ลบทิ้งด้วยพื้นที่บนช่วง [0, 1.2]

เพราะฉะนั้นพื้นที่ใต้โค้งปกติบนช่วง [1.2 , 2.8]

= 0.4974 – 0.3849 = 0.1125



หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นจะได้ว่า

$P(0 < z < 2.8) = 0.4974$

$P(z > 2.8) = 0.0026$

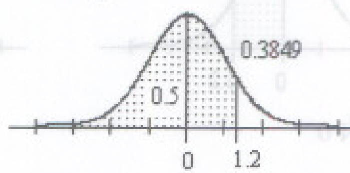
$P(1.2 < z < 2.8) = 0.1125$

$P(0 < z < 1.2) = 0.3849$

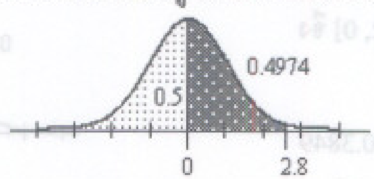
$P(-1.2 < z < 0) = 0.3849$

$P(-1.2 < z < 2.8) = 0.8823$

ความสัมพันธ์ระหว่างคะแนนมาตรฐาน z กับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์



เพราะว่ามีคะแนนมาตรฐาน z ที่ต่ำกว่า 1.2 อยู่ 88.49% เพราะฉะนั้น $P_{88.49} = 1.2$

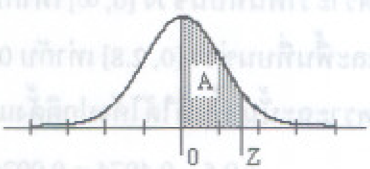


เพราะว่ามีคะแนนมาตรฐาน z ที่ต่ำกว่า 2.8 อยู่ 99.74% เพราะฉะนั้น $P_{99.74} = 2.8$

กรณีทั่วไปจะได้ว่า ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของ z

เมื่อ $r = (0.5 + A)100$

เพราะฉะนั้นคะแนน z ตรงกับ P_r



ตัวอย่างเช่น

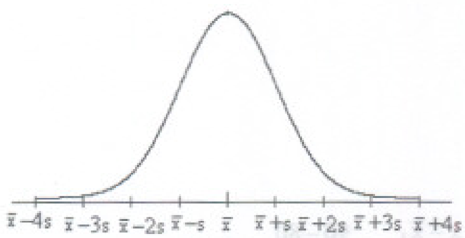
Z	A
1	0.3413
2	0.4771
2.57	0.4995

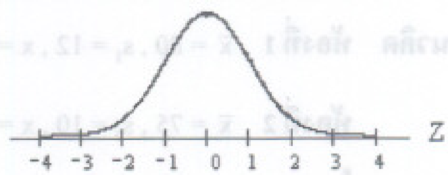
จากตารางพื้นที่ใต้โค้งจะได้ $z = 1$ ตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 84.13

$z = 2$ ตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 97.71

$z = 2.57$ ตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 99.95

6. **การคำนวณเกี่ยวกับข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติ** โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\bar{x}$ และความแปรปรวนเท่ากับ s^2 เมื่อนำมาเขียนกราฟการแจกแจงความถี่ จะได้กราฟเป็นรูประฆังคว่ำ





โดยการเปลี่ยนตัวแปร $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s}$ จะได้กราฟเป็น

เราสามารถนำความสัมพันธ์ของตัวแปร x และ z มาช่วยในการคำนวณเกี่ยวกับ

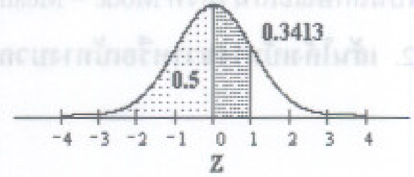
1. จำนวนค่า x ที่อยู่ในช่วงที่กำหนดให้
2. หาเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูล x
3. เปรียบเทียบข้อมูลที่อยู่ต่างกลุ่มกัน โดยดูจากค่าคะแนนมาตรฐาน

    (ผู้ที่มีค่าของคะแนนมาตรฐานสูงกว่า จะถือว่าดีกว่าผู้ที่ได้ค่าของคะแนนมาตรฐานต่ำ)

ตัวอย่าง คะแนนสอบวิชาสถิติมีการแจกแจงปกติ $\bar{x} = 60$ และ $s = 10$

ถามว่าคนที่สอบได้ 70 คะแนนจะตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าใด

แนวคิด $\bar{x} = 60$, $s = 10$, $x = 70$, $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s} = \dfrac{70-60}{10} = 1$



สัดส่วนของคะแนน z ที่ต่ำกว่า $z = 1$ มี 0.8413

เพราะฉะนั้น $z = 1$ ตรงกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 84.13

เพราะฉะนั้น $x = 70$ จะตรงกับ $P_{84.13}$

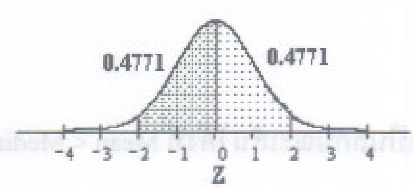
ตัวอย่าง ในการเข้าสอบแข่งขันมีผู้เข้าสอบทั้งหมด 10000 คน คะแนนสอบของทั้งหมดมีการแจกแจงปกติ โดยมี $\bar{x} = 80$ ผู้ที่ได้สูงกว่า 60 คะแนนจึงจะสอบผ่าน ถามว่ามีผู้สอบผ่านทั้งหมดกี่คน

แนวคิด $\bar{x} = 80$, $s = 10$, $N = 10000$, $x = 60$, $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s} = \dfrac{60-80}{10} = -2$

ผู้ที่สอบผ่านจะต้องมีค่า $z > -2$

พื้นที่ใต้โค้งปกติ $z > -2$ มีค่าเท่ากับ $0.5 + 0.4771 = 0.9771$

ดังนั้นจำนวนผู้สอบผ่าน = (10000) (0.9771) = 9771 คน



ตัวอย่าง ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์คะแนนสอบมีการแจกแจงปกติ

ห้องเรียนที่ 1. $\bar{x}_1 = 80$, $s_1 = 12$

ห้องเรียนที่ 2. $\bar{x}_2 = 75$, $s_2 = 10$

นาย ก. อยู่ห้องที่ 1 สอบได้ 90 คะแนน

นาย ข. อยู่ห้องที่ 2 สอบได้ 85 คะแนน

อยากทราบว่า นาย ก. หรือ นาย ข. เก่งกว่ากัน

แนวคิด **ห้องที่ 1** $\bar{x} = 80$, $s_1 = 12$, $x = 90$, $z = \dfrac{x - \bar{x}_1}{s_1} = \dfrac{90 - 80}{12} = 0.83$

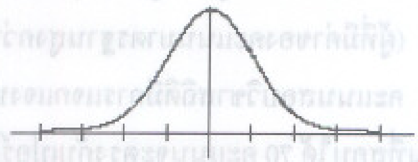
ห้องที่ 2 $\bar{x} = 75$, $s_2 = 10$, $x = 85$, $z = \dfrac{x - \bar{x}_2}{s_2} = \dfrac{85 - 75}{10} = 1$

เพราะฉะนั้น นาย ข. เก่งกว่านาย ก.

ความสัมพันธ์ระหว่างการแจกแจงความถี่ ค่ากลางและการกระจายของข้อมูล

การแจกแจงความถี่ของข้อมูลอาจได้ลักษณะของเส้นโค้ง 3 แบบ คือ

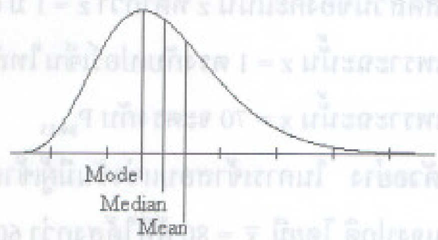
1. **เส้นโค้งปกติหรือรูประฆังคว่ำ** (normal or bell-shaped curve)



เป็นลักษณะเส้นโค้งที่ Mode = Mean = Median

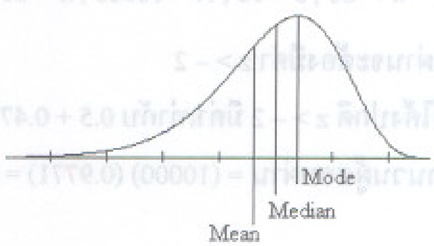
Mode = Mean = Median

2. **เส้นโค้งเบ้ทางขวาหรือเบ้ทางบวก** (positive skewed curve)



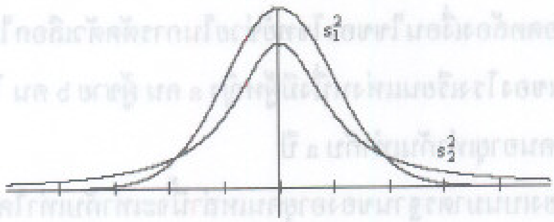
เป็นลักษณะเส้นโค้งที่ Mode < Median < Mean

3. **เส้นโค้งเบ้ซ้ายหรือเบ้ทางลบ** (negative skewed curve)



เป็นลักษณะเส้นโค้งที่ Mean < Median < Mode

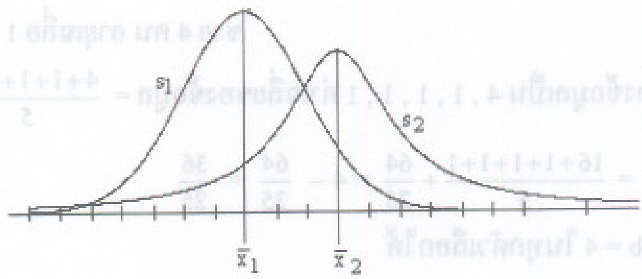
การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูล 2 ชุด ที่มีการกระจายปกติมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากัน แต่ความแปรปรวนไม่เท่ากัน



$$s_1^2 < s_2^2$$

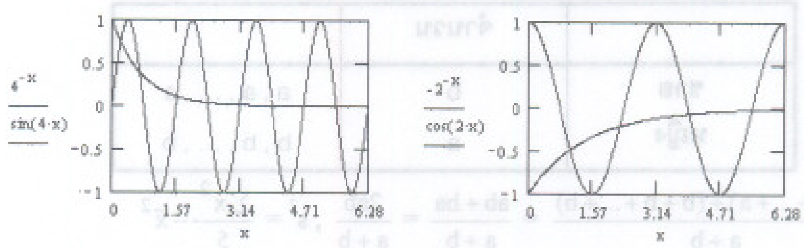
ข้อมูลชุดที่ 2 จะมีการกระจายมากกว่า

การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูล 2 ชุดที่มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตต่างกันและความแปรปรวนไม่เท่ากัน



ถ้า $\dfrac{s_1}{\bar{x}_1} < \dfrac{s_2}{\bar{x}_2}$ แล้ว ข้อมูลชุดที่ 2 จะมีการกระจายมากกว่า

ตัวอย่างความสามารถของโปรแกรม MATHCAD ในการเขียนกราฟ



เราสามารถตอบได้ว่ากราฟของ $y = 4^{-x}$, $y = \sin 4x$ ตัดกัน 8 จุด บนช่วง $[0, 2\pi]$

และกราฟของ $y = -2^{-x}$, $y = \cos 2x$ ตัดกัน 4 จุด บนช่วง $[0, 2\pi]$

คู่มือ MATHCAD หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

7.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ จำนวนข้อมูล , ค่าของข้อมูล เราสามารถทำการแทนบางค่าที่เหมาะสมและสอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 7.2.1 นักเรียนของโรงเรียนแห่งหนึ่งมีผู้หญิง a คน ผู้ชาย b คน โดยผู้หญิงทุกคนอายุเท่ากับ b ปี และผู้ชายทุกคนอายุเท่ากันเท่ากับ a ปี

ถ้า $0 < a < b$ แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุคนเหล่านี้จะเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{ab(a-b)^2}{a+b}$ 2. $\dfrac{\sqrt{ab}(a-b)^2}{a+b}$

3. $\dfrac{ab(b-a)}{a+b}$ 4. $\dfrac{\sqrt{ab}(b-a)}{a+b}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า $a = 1$, $b = 4$ จะได้ หญิง 1 คน อายุเฉลี่ย 4 ปี

ชาย 4 คน อายุเฉลี่ย 1 ปี

ดังนั้นสมมติของข้อมูลเป็น 4 , 1 , 1 , 1 , 1 ค่าเฉลี่ยของข้อมูล $= \dfrac{4+1+1+1+1}{5} = \dfrac{8}{5}$

$s^2 = \dfrac{\sum x^2}{5} - \bar{x}^2 = \dfrac{16+1+1+1+1}{5} + \dfrac{64}{25} = 4 - \dfrac{64}{25} = \dfrac{36}{25}$ เพราะฉะนั้น $s = \dfrac{6}{5}$

แทนค่า $a = 1$, $b = 4$ ในทุกตัวเลือกได้

1. $\dfrac{ab(a-b)^2}{a+b} = \dfrac{36}{5}$ 2. $\dfrac{\sqrt{ab}(a-b)^2}{a+b} = \dfrac{18}{5}$

3. $\dfrac{ab(b-a)}{a+b} = \dfrac{12}{5}$ 4. $\dfrac{\sqrt{ab}(b-a)}{a+b} = \dfrac{6}{5}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง

	จำนวน	
ชาย	b	a , a , ... , a
หญิง	a	b , b , ... , b

$$\bar{x} = \frac{(a+a+...+a)+(b+b+...+b)}{a+b} = \frac{ab+ba}{a+b} = \frac{2ab}{a+b},\ s^2 = \frac{\sum x^2}{5} - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{(a^2+a^2+...+a^2)+(b^2+b^2+...+b^2)}{a+b} - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = \frac{ba^2+ab^2}{a+b} - \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2$$

$$s^2 = ab - \frac{(2ab)^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(a+b)^2 - 4a^2b^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(a^2+2ab+b^2)-4a^2b^2}{(a+b)^2} = \frac{ab(a^2-2ab+b^2)}{(a+b)^2}$$

$$s^2 = \frac{ab(b-a)^2}{(a+b)^2}$$ เพราะฉะนั้นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = $\frac{\sqrt{ab}(b-a)}{a+b}$

2. ใช้การเปรียบเทียบค่าตัวเลขเช่น

2.1 ถ้า $x > \bar{x}$ แล้วตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของ x ต้องมากกว่า 50

2.2 ถ้าข้อมูลที่เพิ่มเข้ามาในข้อมูลมีค่าใกล้กับ $\bar{x}$ แล้วการกระจายของข้อมูลควรจะมีค่าน้อยลง

2.3 ถ้า $x < \bar{x}$ แล้วคะแนนมาตรฐานของ x ต้องน้อยกว่าศูนย์

2.4 ถ้ารวมข้อมูล 2 ชุดเข้าด้วยกัน แล้วค่าเฉลี่ยต้องมีค่าระหว่างค่าเฉลี่ยของทั้งสองกลุ่ม

ตัวอย่างที่ 7.2.2 นักเรียนชั้นหนึ่งมี 100 คน แบ่งเป็น 2 กลุ่ม ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ปรากฏว่าคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนทั้งหมดเท่ากับ 55.3 ถ้านักเรียนกลุ่มที่ 1 มีมากกว่านักเรียนกลุ่มที่ 2 อยู่ 6 คน และคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่ 1 มีค่าเท่ากับ 60 แล้วคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มที่ 2 มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 50.0 2. 50.6
3. 55.3 4. 57.65

การตัดตัวเลือก กลุ่มที่ 1 มี m คน , กลุ่มที่ 2 มี m – 6 คน

เพราะว่า m + (m – 6) = 100 เพราะฉะนั้น m = 53

	จำนวน	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
กลุ่มที่ 1	53	60
กลุ่มที่ 2	47	$\bar{x}$
รวม	100	55.3

เพราะว่าค่าเฉลี่ยรวมต้องอยู่ระหว่างค่าเฉลี่ยของทั้ง 2 กลุ่ม

เพราะฉะนั้น $\bar{x} < 55.3 < 60$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่า $\bar{x}_{รวม} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$ เพราะฉะนั้น $55.3 = \frac{(53)(60)+(47)\bar{x}}{56+44}$

$$5530 = 3180 + 47\bar{x}$$

เพราะฉะนั้น $\bar{x} = \frac{2350}{47} = 50$

ตัวอย่างที่ 7.2.3 ถ้าในการคัดเลือกผู้เข้าฝึกเป็นนักบินจะต้องผ่านการทดสอบเก็บสัมภาระ ซึ่งมีเกณฑ์ว่าให้ใช้เวลาอย่างมากที่สุด 3 นาที ในการคัดเลือกครั้งหนึ่งมีผู้สมัครเป็นจำนวนมาก พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเวลาที่ผู้สมัครใช้ในการเก็บสัมภาระเป็น 5 นาที มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.2 นาที สมมติว่านายชัยโรจน์เข้ารับการคัดเลือกในครั้งนี้ด้วย และเวลาที่เขาใช้ในการเก็บสัมภาระมีคะแนนมาตรฐานเป็น – 1.8

จงหาว่าเขาใช้เวลาในการเก็บสัมภาระนานกี่นาที และผ่านการคัดเลือกหรือไม่

1. 2.84 นาที และผ่านการคัดเลือก　　2. 2.84 นาที และไม่ผ่านการคัดเลือก
3. 7.16 นาที และผ่านการคัดเลือก　　4. 7.16 นาที และไม่ผ่านการคัดเลือก

การตัดตัวเลือก โจทย์เองก็บอกชัดเจนแล้วว่าถ้าใช้เวลาเกิน 5 นาทีจะสอบไม่ผ่าน และถ้าต่ำกว่า 5 นาทีจะสอบผ่าน เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $\bar{x} = 5$, $s = 1.2$, $z = -1.8$ เพราะฉะนั้น $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s}$

$$-1.8 = \frac{x-5}{1.2}$$

เพราะฉะนั้น $x = 5 - (1.2)(1.8) = 2.84$

เพราะฉะนั้นนายชัยโรจน์ใช้เวลา 2.84 นาทีและสอบผ่านการคัดเลือก

3. ใช้ลักษณะเฉพาะของข้อมูล เช่น ค่าของความแปรปรวนของข้อมูลที่มิใช่ค่าคงตัวต้องมีค่ามากกว่าศูนย์ และ ค่าของความแปรปรวนของข้อมูลที่เป็นค่าคงตัวต้องมีค่าเท่ากับ 0 เราสามารถใช้เหตุแบบนี้ในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 7.2.4 ข้อมูลชุดหนึ่งเราทราบค่า $\dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-1)^2}{N} = p$ และ $\bar{x} = q$ ค่าของ s^2 เท่ากับเท่าใด

1. $p + |q-1|$　　2. $p-(q-1)^2$
3. $q-p$　　4. $p-q$

การตัดตัวเลือก เลือกข้อมูลเป็น – 1, 0, 1 จะได้ $q = \bar{x} = 0$, $p = \dfrac{4+1+0}{3} = \dfrac{5}{3}$

เพราะฉะนั้น $q-p < 0$ แต่ $s^2 \geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{3}(x_i-\bar{x})^2}{3} = \dfrac{1+0+1}{0} = \dfrac{2}{3}$ แต่ตัวเลือกที่เหลือมีค่าเป็น

1. $p+|q-1|=\frac{8}{3}\neq s^2$ 2. $p-(q-1)^2=\frac{2}{3}=s^2$ 4. $p-q=\frac{5}{3}\neq\frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}{N}$

$$Ns^2 = \sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{N}[(x_i-1)+(1-\bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N}[(x_i-1)^2+2(1-\bar{x})(x_i-1)+(1-\bar{x})^2] = \sum_{i=1}^{N}[(x_i-1)^2+2(1-q)(x_i-1)+(1-q)^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}(x_i-1)^2+2(1-q)(\sum_{i=1}^{N}x_i-N)+(1-q)^2N = Np+2(1-q)(Nq-N)+(1-q)^2N$$

$$s^2 = p+2(1-q)(q-1)+(1-q)^2 = p-(q-1)^2$$

4. ข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติ เหตุผลแบบนี้ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ถ้า $x<\bar{x}$ แล้วคะแนนมาตรฐานของ x ต้องมีค่าเป็นลบ

ถ้า $x>\bar{x}$ แล้วคะแนนมาตรฐานของ x ต้องมีค่าเป็นบวก

ตัวอย่างที่ 7.2.5 ในการสอบครั้งหนึ่งนายสุชาติสอบได้ 75 คะแนนทำเป็นคะแนนมาตรฐานได้ 1.5 โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของการสอบครั้งนั้นเท่ากับ 63 ถ้านางสาวดาราสอบได้ 50 คะแนน จงหาคะแนนมาตรฐานของนางสาวดาราและสัมประสิทธิ์การแปรผันของข้อมูล

1. 2.00 , 12.6% 2. −1.625 , 12.7%

3. 1.625 , 12.7% 4. −2.00 , 12.6%

การตัดตัวเลือก เพราะว่าคะแนนนางสาวดารา = 50 < 63 เพราะฉะนั้นคะแนนมาตรฐานของนางสาวดาราต้องน้อยกว่าศูนย์ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง คะแนนสุชาติ $x = 75$, $z = 1.5$, $\bar{x} = 63$ ดังนั้น

$$z = \frac{x-\bar{x}}{s}$$

$$1.5 = \frac{75-63}{s}$$

$$s = \frac{12}{1.5} = 8$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{8}{63} = 0.12698 = 12.7\%$

คะแนนมาตรฐานของนางสาวดารา $= \frac{50-63}{8} = -\frac{13}{8} = -1.625$

7.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 7.3.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ ของโรงเรียนแห่งหนึ่งเป็น 43 คะแนน ถ้าคิดคะแนนแยกกลุ่มชายและหญิง จะได้ว่าคะแนนเฉลี่ยของกลุ่มชายเท่ากับ 45 คะแนน คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มหญิงเท่ากับ 40 คะแนน อัตราส่วนระหว่างจำนวนนักเรียนชายต่อนักเรียนหญิงเท่ากับเท่าใด

1. 3 : 2   2. 2 : 3
3. 2 : 5   4. 3 : 5

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของจำนวนนักเรียนชายและหญิง ดังนั้นหากเราสมมติจำนวนนักเรียนชายเป็น 6 คน แล้วทำการหาจำนวนนักเรียนหญิง ก็จะสามารถตัดตัวเลือกที่ผิดทิ้งได้ตัวอย่างเช่น ให้จำนวนนักเรียนชาย = 6 คน , จำนวนนักเรียนหญิง = x คน

$$\text{ค่าเฉลี่ยรวม} = \frac{(6)\,\text{ค่าเฉลี่ยชาย} + (x)\,\text{ค่าเฉลี่ยหญิง}}{6+x}$$

$$43 = \frac{(6)(45)+x(40)}{6+x}$$

$$43\,(6+x) = 270 + 40x$$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

เพราะฉะนั้นอัตราส่วนจำนวนนักเรียนชาย : นักเรียนหญิง = 6 : 4 = 3 : 2

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2., 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง สมมติจำนวนนักเรียนชาย = m , จำนวนนักเรียนหญิง = n

$$\text{ค่าเฉลี่ยรวม} = \frac{(m)(\text{ค่าเฉลี่ยชาย}) + (n)(\text{ค่าเฉลี่ยหญิง})}{m+n}$$

$$43 = \frac{(m)(45)+(n)(40)}{m+n}$$

$$43\,(m+n) = 45m + 40n$$

$$3n = 2m$$

$$\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$$

เพราะฉะนั้น อัตราส่วนจำนวนนักเรียนชาย : นักเรียนหญิง = 3 : 2

ตัวอย่างที่ 7.3.2 ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนแห่งหนึ่งคะแนนของชายและหญิงมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 70 คะแนน นักเรียนชายมี 30 คน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนชายเท่ากับ 65 คะแนน ถ้านักเรียนหญิงมีจำนวน 32 คน แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนหญิงเท่ากับเท่าใด

1. 67.5 2. $74\frac{11}{16}$

3. 64.5 4. 75

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $65 = \bar{x}_{ชาย} \le \bar{x}_{รวม} = 70 \le \bar{x}_{หญิง}$ เพราะฉะนั้นคะแนนเฉลี่ยรวมต้องมีค่าไม่เกินค่าเฉลี่ยที่คิดจำแนกตามกลุ่ม เพราะฉะนั้นเป็นไปไม่ได้ที่คะแนนเฉลี่ยของกลุ่มนักเรียนหญิงจะเท่ากับ 67.5 หรือ 64.5 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง

	n	$\bar{x}$
ชาย	30	65
หญิง	32	x
รวม	62	70

$$\bar{x}_{รวม} = \frac{(32)x + (30)(65)}{32 + 30}$$

$$70 = \frac{32x + 1950}{62}$$

$$4340 = 32x + 1950$$

$$32x = 2390$$

$$x = \frac{2390}{32} = \frac{1195}{16} = 74\frac{11}{16}$$ เพราะฉะนั้นคะแนนเฉลี่ยของนักเรียนหญิง $= 74\frac{11}{16}$

ตัวอย่างที่ 7.3.3 กำหนดข้อมูล $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$

โดยมีสมบัติว่า $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 4)^2 = 40$ และ $\sum_{i=1}^{10}(x_i - a)^2$ มีค่าน้อยที่สุดเมื่อ $a = 6$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) และค่าเฉลี่ยเลขคณิต ($\bar{x}$) ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

1. $s = 0, \bar{x} = 4$ 2. $s = 0, \bar{x} = 6$

3. $s = 2, \bar{x} = 6$ 4. $s = 2, \bar{x} = 4$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\sum_{i=1}^{10}(x_i-a)^2$ มีค่าน้อยที่สุด ก็ต่อเมื่อ $a=\overline{x}$

เพราะฉะนั้น $\overline{x}=6$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้งได้

เพราะว่า $\sum_{i=1}^{10}(6-4)^2 = \sum_{i=1}^{10}4 = 40$ เพราะฉะนั้น 6 , 6 , 6 , ..., 6 จำนวน 10 ตัวเป็นข้อมูลของโจทย์ข้อนี้ได้ ซึ่งจะได้ว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0 ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากการที่เราต้องรู้ว่า $\overline{x}=6$ เพราะว่า $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-6)^2}{10}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} 10s^2 &= \sum_{i=1}^{10}((x_i-4)-2)^2 &&= \sum_{i=1}^{10}[(x_i-4)^2-4(x_i-4)+4] \\ &= \sum_{i=1}^{10}(x_i-4)^2-4\sum_{i=1}^{10}(x_i-4)+40 &&= 40-4\sum_{i=1}^{10}x_i+160+40 \\ &= 40-4(10\overline{x})+200 &&= 240-4(60) \quad = 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $s=0$

ตัวอย่างที่ 7.3.4 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 โดยมี $\overline{x}=9$ และ $s=3$

ข้อสรุปเกี่ยวกับ $\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-5)^2}{5}$ ในตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. มีค่าเท่ากับ 3
2. มีค่าเท่ากับ 5
3. มีค่าเท่ากับ 9
4. มีค่าเท่ากับ 25

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เลือกข้อมูลให้สอดคล้องกับโจทย์ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่นข้อมูล $9-k, 9, 9, 9, 9+k$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 5s^2 &= \sum_{i=1}^{5}(x_i-\overline{x})^2 \\ 5(9) &= k^2+0+0+0+k^2 \\ k^2 &= \frac{45}{2} \\ k &= \pm\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $9-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 9, 9, 9, 9+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ มีค่า $\bar{x}=9$ และ $s=3$

$$\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-5)^2}{5} = \frac{\left(4-\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2+16+16+16+\left(4+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2}{5} > 9$$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง ให้ $k = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-5)^2}{5}$

$$5k = \sum_{i=1}^{5}(x_i-5)^2 = \sum_{i=1}^{5}((x_i-9)+4)^2 = \sum_{i=1}^{5}\left[(x_i-9)^2+8(x_i-9)+16\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{5}\left((x_i-9)^2+8x_i-56\right) = \sum_{i=1}^{5}(x_i-9)^2+8\sum_{i=1}^{5}x_i-56(5) = 5s^2+8(5\bar{x})-280$$

$$= 45+360-280 = 125$$

$k = 25$ เพราะฉะนั้น $\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i-5)^2}{5} = 25$

ตัวอย่างที่ 7.3.5 น้ำหนักของกระป๋องเปล่าที่ผลิตโดยโรงงานแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 กรัม และค่าความแปรปรวนเท่ากับ 0.01

ให้ w_1 = จำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 11.88 กรัม

w_2 = จำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักมากกว่า 12.00 กรัม

w_3 = จำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักมากกว่า 11.88 กรัม

จากตารางพื้นที่ใต้โค้งปกติระหว่าง $z = 0$ และ $z = 1.2$ มีค่าเท่ากับ 0.3849

ข้อสรุปในตัวเลือกใดเป็นจริง

1. $w_1 > w_2 > w_3$ 2. $w_2 > w_1 > w_3$

3. $w_2 > w_3 > w_1$ 4. $w_3 > w_2 > w_1$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $11.88 < 12.00$ เพราะฉะนั้นจำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 11.88 กรัม < จำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 12.00 กรัม

ดังนั้น $w_1 < w_2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

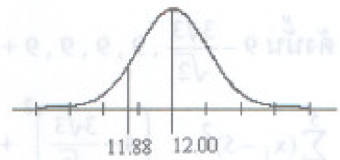
เพราะว่า $\bar{x} = 12$ และข้อมูลมีการแจกแจงปกติ

เพราะฉะนั้นจำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 11.88 กรัม

จะต้องน้อยกว่าจำนวนกระป๋องที่มีน้ำหนักมากกว่า 11.88 กรัม

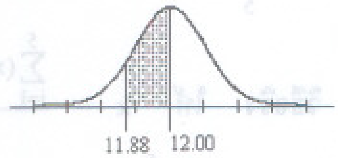
เพราะฉะนั้น $w_1 < w_3$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

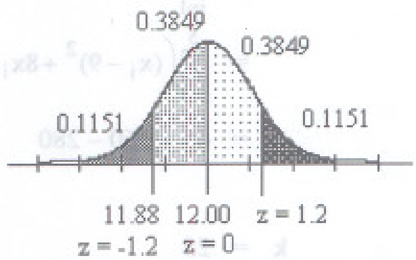


วิธีจริง ให้ N เป็นจำนวนกระป๋องทั้งหมดในโรงงาน

$x = 11.88$ มีค่ามาตรฐาน $= \dfrac{11.88 - 12.00}{0.01} = -1.2$



เพราะฉะนั้นพื้นที่ใต้โค้งปกติในช่วงต่าง ๆ จะเป็นดังนี้



ดังนั้น $w_1 = 0.1151N$, $w_2 = 0.5N$, $w_3 = 0.8849N$

เพราะฉะนั้น $w_3 > w_2 > w_1$

ตัวอย่างที่ 7.3.6 เงินโบนัสที่บริษัทแห่งหนึ่งจ่ายให้พนักงานมีค่าเท่ากับ 1000 บาทบวกกับอีก 2 เท่าของเงินเดือนของพนักงาน ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของโบนัสเป็น 2 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือน
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของโบนัสมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือนอยู่ 1000 บาท
3. ความแปรปรวนของโบนัสเป็น 4 เท่าของความแปรปรวนของเงินเดือน
4. ความแปรปรวนของโบนัสเป็น 2 เท่าของเงินเดือน

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นสมมติมีพนักงาน 2 คน มีเงินเดือน 1000 , 2000 ดังนั้นค่าโบนัส =3000 , 5000 และ ค่าเฉลี่ยเงินเดือน $= \dfrac{1000+2000}{2} = 1500$

ค่าเฉลี่ยเงินโบนัส $= \dfrac{3000+5000}{2} = 4000$ เพราะฉะนั้นตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

ค่าความแปรปรวนเงินเดือน $= \dfrac{(1000-1500)^2 + (2000-1500)^2}{2} = \dfrac{250000+250000}{2} = 250000$

ค่าความแปรปรวนของโบนัส $= \dfrac{(3000-4000)^2 + (5000-4000)^2}{2} = \dfrac{1000000+1000000}{2}$

$= 1000000 = 4\,(250000)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง คนที่รู้สูตรจะทำข้อนี้ได้เร็วที่สุด

ให้ y_i = โบนัสของข้อมูลตัวที่ i x_i = เงินเดือนของข้อมูลตัวที่ i

$y_i = 1000 + 2x_i$

เพราะฉะนั้น $s_y^2 = 2^2 s_x^2 = 4 s_x^2$

เพราะฉะนั้นความแปรปรวนของโบนัสเป็น 4 เท่าของความแปรปรวนของเงินเดือน

หมายเหตุ สูตร $s_{ax+b}^2 = a^2 s_x^2$ ออกสอบทุกปี ขอให้ท่องจำให้ได้

ตัวอย่างที่ 7.3.7 ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยข้อมูล 100 จำนวน ในการคำนวณครั้งแรกพบว่า $\bar{x} = 9$ และ $s = 5$ ในการทำงานต่อมาพบว่าข้อมูลแท้จริง ที่มีค่าเท่ากับ 10 นั้น ถูกจดบันทึกในการคำนวณครั้งแรกมีค่าเป็น 1

ค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

1. 9.09 , 24.36 2. 9.09 , 32.74
3. 9.17 , 24. 36 4. 9.17 , 32.74

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าผลรวมคะแนน = $n\bar{x} = (100)(9) = 900$

เมื่อคะแนนเปลี่ยนจาก 1 เป็น 10 ผลรวมคะแนนแท้จริงทั้งหมด = 909

ดังนั้น $\bar{x}$ แท้จริง = $\frac{909}{100}$ = 9.09 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า 10 มีค่าใกล้กับ 9.09 มากกว่า 1

เพราะฉะนั้นการกระจายจะต้องน้อยลงจาก $s^2 = 25$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง สมมติ x_{100} เก่า = 1 , x_{100} ใหม่ = 10 , $\bar{x}$ แท้จริงเท่ากับ 9.09 เพราะว่า $s_{เก่า}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100} - 9^2$

$$\text{เพราะฉะนั้น} \quad (100)\,5^2 = \sum_{i=1}^{100} x_i^2 - 81\,(100)$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 106\,(100)$$

$$\sum_{i=1}^{99} x_i^2 + x_{100}^2 = 106\,(100)$$

$$\sum_{i=1}^{99} x_i^2 + 1^2 = 10600$$

$$\sum_{i=1}^{99} x_i^2 = 10599$$

$$\sum_{i=1}^{99} x_i^2 + 10^2 = 10599 + 100$$

$$\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 10699$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100} = 106.99$$

เพราะฉะนั้น $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100} - (9.09)^2 = 106.99 - (9.09)^2 = 106.99 - 82.628 = 24.3619$

ตัวอย่างที่ 7.3.8 ข้อมูลความสูงของนักเรียน 200 คน จากข้อมูลพบว่าความสูงต่ำสุดของกลุ่มนักเรียนที่มีความสูงมากสุดคิดเป็น 25% ของนักเรียนทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 53.5 นิ้ว ถ้าสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับ 6% แล้วค่าของควอร์ไทล์ที่หนึ่งมีค่าอยู่ในช่วงใด

1. (40 , 45] 2. (45 , 50]
3. (50 , 55] 4. (55 , 60]

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า Q_3 เป็นคะแนนที่ต่ำสุดของกลุ่มที่มีความสูงมากสุด 25% แรก

เพราะฉะนั้น $Q_3 = 53.5$

เพราะว่า $Q_1 < Q_3 = 53.5$

เพราะฉะนั้น $Q_1 \notin (55 , 60]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

วิธีจริง เพราะว่าสัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ = 6%

เพราะฉะนั้น
$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{6}{100}$$

$$100\,(Q_3 - Q_1) = 6\,(Q_3 + Q_1)$$

$$94\,Q_3 = 106\,Q_1$$

$$Q_1 = \frac{94(53.5)}{106} = 47.44$$

เพราะฉะนั้น $Q_1 \in (45 , 50]$

ตัวอย่างที่ 7.3.9 ข้อมูลชุดที่ 1 มีข้อมูล 16 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 25 ข้อมูลชุดที่ 2 มีจำนวน 15 ตัว โดยที่ข้อมูลแต่ละตัวมาจากข้อมูลชุดที่ 1 ค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 2 เท่ากับ 25 ถ้า s_1 และ s_2 เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 1 และ 2 ตามลำดับ แล้วอัตราส่วนของ $s_1 : s_2$ เท่ากับเท่าใด

1. 4 : 5   2. 15 : 16
3. $\sqrt{15}$: 4   4. 1 : 1

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติข้อมูลทั้ง 16 ตัวคือ

x_1, x_2, x_3, x_4... , x_{14}, x_{15}, x_{16}

ชุดที่ 1 : 24, 25, 25, 25, ... , 25, 26, 25 จะได้ $\overline{x}_1 = 25$

ชุดที่ 2 : 24, 25, 25, 25, ... , 25, 26 จะได้ $\overline{x}_2 = 25$

x_1, x_2, x_3, x_4, ... , x_{14}, x_{15}

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i-25)^2}{16} = \frac{1+0+0+0+...+0+1+0}{16} = \frac{2}{16}$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i-25)^2}{15} = \frac{1+0+0+...+0+1}{15} = \frac{2}{15}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{(2/16)}{(2/15)} = \frac{15}{16}$ และ $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

เพราะฉะนั้น $s_1 : s_2 = \sqrt{15} : 4$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง ข้อมูลชุดที่ 1 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}, x_{16}$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 25

ข้อมูลชุดที่ 2 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 25

เพราะฉะนั้น $\frac{x_1+x_2+...+x_{15}}{15} = \frac{x_1+x_2+...+x_{15}+x_{16}}{16}$

$$16(x_1+x_2+\ldots+x_{15}) = 15(x_1+x_2+\ldots+x_{15}+x_{16})$$

$$= 15(x_1+x_2+\ldots+x_{15}) + 15(x_{16})$$

$$x_1+x_2+\ldots+x_{15} = 15(x_{16})$$

$$25(15) = 15(x_{16})$$

$$x_{16} = 25$$

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16}(x_i - 25)^2}{16} \qquad s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - 25)^2}{15}$$

เพราะว่า $x_{16} = 25$ เพราะฉะนั้น $s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{15}(x_i - 25)^2}{16} = \frac{15s_2^2}{16}$

เพราะฉะนั้น $\frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{15}{16}$ และจะได้ว่า $\frac{s_1}{s_2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

ตัวอย่างที่ 7.3.10 ข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$

ข้อมูลชุดที่ 2 คือ y_i ได้มาจากชุดแรก โดยมีสูตรเป็น $y_i = 5 - 3x_i$

ถ้า $\bar{x} = 10$ และ $s_x = 2.5$ แล้ว $\bar{y}$ และ s_y เท่ากับเท่าใด

1. $-30, -7.5$ 2. $30, 7.5$
3. $-25, 7.5$ 4. $-25, -7.5$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $y_i = 5 - 3x_i$ เพราะฉะนั้น $\bar{y} = 5 - 3\bar{x} = 5 - 3(10) = -25$

และ $s_y^2 = (-3)^2 s_x^2 = 9(2.5)^2$ ดังนั้น $s_y = 7.5$ เพราะฉะนั้น $\bar{y} = -25$, $s_y = 7.5$

ตัวอย่างที่ 7.3.11 กำหนดข้อมูลคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน โรงเรียนแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

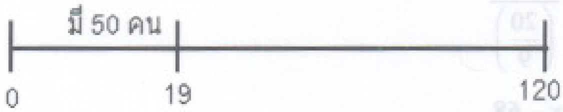
คะแนน	ความถี่
0 – 9	20
10 – 19	30
20 – 29	10
30 – 39	20
40 – 49	30
50 – 59	10

คนที่สอบได้ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 40 จะสอบได้กี่คะแนน

1. 40.33 2. 30.53
3. 25.83 4. 18.83

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จำนวนคนทั้งหมดมี 120 คน 40% ของ 120 คน มีจำนวนเท่ากับ 48 คน



เพราะว่า 50 คน แรกมีคะแนนในช่วง 0 – 19 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
0 – 9	20	20
10 – 19	30	50 ←
20 – 29	10	60
30 – 39	20	80
40 – 49	30	110
50 – 59	10	120

$N = 120$, P_{40} = คะแนนตัวที่ $\frac{40}{100}\cdot(120) = 48$

$$P_{40} = 9.5 + \left(\frac{48-20}{30}\right)10 = 9.5 + \frac{28}{3} = 9.5 + 9.33 = 18.83$$

ตัวอย่างที่ 7.3.12 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ นาย ก. สอบได้ 72 คะแนน เมื่อแปลงเป็นคะแนนมาตรฐานได้ 1.8 นาย ข. ได้คะแนนที่คิดเป็นคะแนนมาตรฐานได้เท่ากับ – 0.9 ถ้าในการสอบครั้งนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 68 คะแนน แล้วนาย ข. สอบได้กี่คะแนน

1. 64   2. 66
3. 69   4. 70

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าคะแนนมาตรฐาน $z = -0.9 < 0$

เพราะฉะนั้นคะแนนของนาย ข. ต้องต่ำกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตซึ่งมีค่าเท่ากับ 68

เพราะฉะนั้นคะแนนนาย ข. < 68 ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง คะแนนนาย ก. = $x = 72$, คะแนนมาตรฐาน นาย ก. = $z = 1.8$, $\bar{x} = 68$

เพราะว่า $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ เพราะฉะนั้น $1.8 = \frac{72-68}{s}$ และ $s = \frac{4}{1.8} = \frac{40}{18} = \frac{20}{9}$

สมมติให้นาย ข. สอบได้ x คะแนน , คะแนนมาตรฐานนาย ข. = – 0.9

เพราะฉะนั้น $-0.9 = \dfrac{x-\overline{x}}{s}$

$$-\frac{9}{10} = \frac{x-68}{\left(\frac{20}{9}\right)}$$

$$-2 = x-68$$

$$x = 66$$ สรุป นาย ข. สอบได้ 66 คะแนน

ตัวอย่างที่ 7.3.13 กำหนดให้ตารางแสดงพื้นที่ (A) ใต้โค้งปกติ $z = 0.67$ $A = 0.2486$

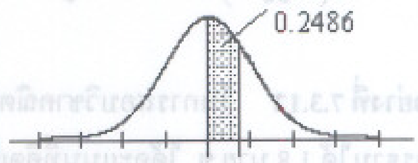
$z = 0.68$ $A = 0.2518$

กำหนดให้คะแนนสอบมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 60 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน คะแนนที่เป็นควอร์ไทล์ที่ 3 (Q_3) เท่ากับเท่าใด

1. 65.4
2. 66.7
3. 67.5
4. 69.8

ตอบ 2.

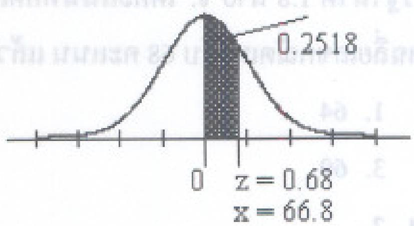
แนวคิด **การตัดตัวเลือก** $\overline{x} = 60$, $s = 10$, $z = 0.67$



$$0.67 = \frac{x-60}{10}$$

$$x = 66.7$$

เพราะฉะนั้น $P_{74.86} = 66.7$



$z = 0.68$; $0.68 = \dfrac{x-\overline{x}}{s} = \dfrac{x-60}{10}$

$$x = 66.8$$

ดังนั้น $P_{75.18} = 66.8$ เพราะฉะนั้น P_{75} มีค่าระหว่าง $P_{74.86} \le P_{75} \le P_{75.18}$

$$66.7 \le Q_3 \le 66.8$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $A = 0.2486$ ตรงกับ $z = 0.67$

$A = 0.2518$ ตรงกับ $z = 0.68$

พื้นที่เพิ่ม 0.0032 ค่า z เพิ่ม 0.01

พื้นที่เพิ่ม 0.0014 ค่า z เพิ่ม $\dfrac{0.01}{0.0032}(0.0014) = 0.004735$

เพราะฉะนั้น A = 0.25 ตรงกับ $z = 0.67 + 0.004735 = 0.674735$

เพราะว่า $z = \dfrac{x-\bar{x}}{s}$

$$0.674735 = \frac{x-60}{10}$$

เพราะฉะนั้น $x = 66.74735$ สรุป $P_{75} = Q_3 = 66.74735$

ตัวอย่างที่ 7.3.14 ถ้าข้อมูล 2 กลุ่ม สามารถคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนได้ตามตารางต่อไปนี้

	กลุ่ม 1	กลุ่ม 2	รวม 2 กลุ่ม
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	6	x	6
ความแปรปรวน	4	y	2.5
จำนวน	20	30	50

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x = 6$, $y = 1.5$
2. $x = 6$, $y = 6.8$
3. $x = 13$, $y = 6.8$
4. $x = 13$, $y = 1.5$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ค่าเฉลี่ยของกลุ่มย่อย 2 กลุ่ม เท่ากับค่าเฉลี่ยรวมมีความเป็นไปได้กรณีเดียวคือ $x = 6$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่าความแปรปรวนของกลุ่ม 1 เท่ากับ 4 และ ความแปรปรวนรวมเท่ากับ 2.5

เพราะฉะนั้นความแปรปรวนกลุ่ม 2 ต้องต่ำกว่า 4 ดังนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\bar{x}_{รวม} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$

$$6 = \frac{(20)(6)+30(x)}{20+30}$$

$$3000 = 120 + 30x$$

$$x = 6$$

เพราะว่าค่าเฉลี่ยเท่ากัน เพราะฉะนั้น $s^2_{รวม} = \dfrac{n_1s_1^2 + n_2s_2^2}{n_1+n_2}$

$$2.5 = \frac{(20)4+(30)y}{20+30}$$

$$125 = 80 + 30y$$

$$30y = 45$$

เพราะฉะนั้น $y = 1.5$

ตัวอย่างที่ 7.3.15 ในการสอบครั้งหนึ่งคะแนนของการสอบมีการแจกแจงปกติ และมีคะแนนเต็มเท่ากับ 100 คะแนน ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 และความแปรปรวนเท่ากับ 100 ข้อใดต่อไปนี้เป็นคะแนนที่สูงที่สุด (กำหนดให้ $z = 2.5$ ตรงกับ $A = 0.4938$)

1. คะแนนที่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 80
2. คะแนนที่ตรงกับคะแนนมาตรฐานเท่ากับ 1.5
3. คะแนนสอบจริง 85 คะแนน
4. คะแนน ณ. ตำแหน่งเดไซล์ที่ 7

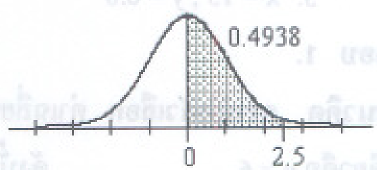
ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การเปรียบเทียบค่าภายใต้ข้อสมมติว่าคะแนนเรียงจากน้อยไปมาก เพราะว่า $D_7 = P_{70} < P_{80}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

เพราะว่าคะแนนเดิม 85 ตรงกับ $z = \frac{85-\bar{x}}{s} = \frac{85-60}{10} = 2.5$

เพราะฉะนั้น คะแนนเดิมที่มีค่า ($z = 1.5$) จะมีค่าน้อยกว่า 85

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง



วิธีจริง เพราะว่าพื้นที่ใต้โค้งปกติบนช่วง [0 , 2.5] มีค่าเท่ากับ 0.4938

เพราะฉะนั้น $P_{99.38}$ = คะแนนที่ $z = 2.5$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 85

สรุปคะแนนสอบจริง 85 คะแนน เป็นคะแนนสูงสุดของทั้ง 4 ตัวเลือก

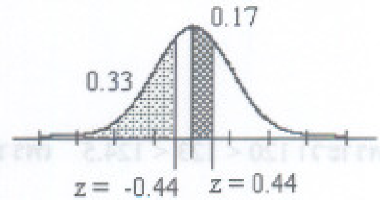
ตัวอย่างที่ 7.3.16 ถ้าคะแนนสอบวิชาภาษาไทยมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 80 และ 15 ตามลำดับ ถ้านักเรียนคนหนึ่งสอบได้ตำแหน่งคะแนนเดไซล์ที่ 3.3 แล้วนักเรียนคนนั้นจะสอบได้กี่คะแนน (กำหนดให้ $z = 0.44$ ตรงกับ $A = 0.17$)

1. 77.45
2. 73.40
3. 82.55
4. 86.60

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $D_{3.3} < D_5 = P_{50} = \bar{x} = 80$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $z = -0.44$



$$\frac{x-\bar{x}}{s} = -0.44$$

$$\frac{x-80}{15} = -0.44$$

$$x = 73.4$$

เพราะฉะนั้นคะแนนที่ตรงกับเดไซล์ที่ 3.3 = คะแนนที่ตรงกับค่า $z = -0.44$ ซึ่งมีค่า = 73.4

ตัวอย่างที่ 7.3.17 ความสูงของนักเรียนในห้องหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่ามัธยฐานเท่ากันและเท่ากับ 120 เซนติเมตร สัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับ 2.5% จำนวนนักเรียนคิดเป็น 40% ของทั้งหมด มีค่าความสูงคิดเป็นคะแนนมาตรฐานไม่ต่ำกว่า 1.5 ถ้าเด็กชายต้นสูง 123 เซนติเมตร แล้วความสูงของเด็กชายต้นเป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

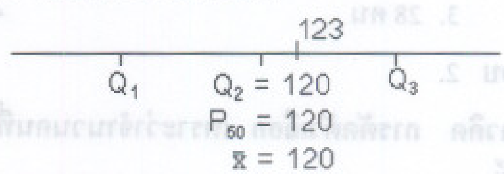
1. น้อยกว่าควอร์ไทล์ที่ 1
2. มีค่าระหว่างควอร์ไทล์ที่ 1 และมัธยฐาน
3. มีค่าระหว่างมัธยฐานกับเปอร์เซ็นไทล์ที่ 75
4. มีค่ามากกว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 75

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** จากโจทย์ $P_{50} = Q_2 = 120$ โดยการเปรียบเทียบค่า

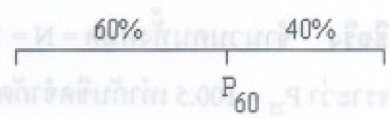
เพราะฉะนั้น $Q_1 < 123$ และ $Q_2 < 123$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้



วิธีจริง $\bar{x} = 120$, P_{50} = มัธยฐาน = $\bar{x} = 120$

สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}}$

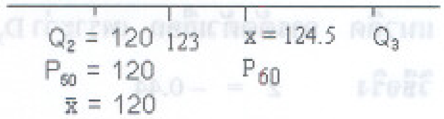


$$\frac{2.5}{100} = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$s = \left(\frac{2.5}{100}\right)(\bar{x}) = \left(\frac{2.5}{100}\right)(120) = 3$$

จากข้อกำหนดของโจทย์กล่าวว่า จำนวนนักเรียนคิดเป็น 40% ของทั้งหมดมีค่าความสูงคิดเป็นคะแนนมาตรฐานไม่ต่ำกว่า 1.5

เพราะฉะนั้น P_{60} ตรงกับค่า x ที่ทำให้ $\frac{x-\bar{x}}{s} = 1.5$



$$\frac{x-120}{3} = 1.5$$

$$x = 124.5 \qquad \text{เพราะฉะนั้น } P_{60} = 124.5$$

เพราะว่า $120 < 123 < 124.5$ เพราะฉะนั้น $P_{50} < 123 < P_{60} < P_{75} = Q_3$

$$Q_2 < 123 < Q_3$$

สรุปคะแนน 123 อยู่ระหว่างมัธยฐานกับเปอร์เซ็นไทล์ 75

ตัวอย่างที่ 7.3.18 กำหนดค่าจ้างรายวันของคนงานกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

ค่าจ้าง(บาท)	จำนวนคนงาน
81 – 85	1
86 – 90	3
91 – 95	x
96 – 100	5
101 – 105	8
106 – 110	y
111 – 115	10
116 – 120	4

ถ้าข้อมูลนี้มี $P_{25} = 100.5$ และ $Q_3 = 110.5$ แล้วจำนวนคนงานที่มีค่าจ้างรายวันต่ำกว่า 105.5 บาท เท่ากับเท่าใด

1. 16 คน 2. 22 คน
3. 28 คน 4. 42 คน

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าจำนวนคนที่มีรายได้ต่ำกว่า 105.5 บาท มีทั้งหมด $= 1 + 3 + x + 5 + 8 = 17 + x > 16$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง จำนวนคนทั้งหมด $= N = 1 + 3 + x + 5 + 8 + y + 10 + 4 = x + y + 31$

เพราะว่า $P_{25} = 100.5$ เท่ากับขีดจำกัดบนของชั้น 96 – 100

เพราะฉะนั้น $\frac{N}{4} = 1 + 3 + x + 5 = 9 + x$

$$\frac{x+y+31}{4} = 9 + x$$

$$x + y + 31 = 36 + 4x$$

$$-3x + y = 5 \qquad \text{(1)}$$

เพราะว่า $Q_3 = 110.5$ เท่ากับขีดจำกัดบนของชั้น 106 – 110

เพราะฉะนั้น $\frac{N}{4} = 14$

$N = 56$

$x + y + 31 = 56$

$x + y = 25$ ——— (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $x = 5$, $y = 20$

สรุปจำนวนคนที่มีรายได้ต่ำกว่า 105.5 บาท มีทั้งหมด = 17 + x = 22 คน

ตัวอย่างที่ 7.3.19 กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูล และ a , b เป็นค่าที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2$ และ $\sum_{i=1}^{n}|x_i - b|$ เป็นค่าต่ำสุดแล้วข้อมูลต่อไปนี้ 2 , 4 , 6 , 7 , 12 , 12 , 13 ค่าของ a และ b มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $a = 8$, $b = 12$
2. $a = 7$, $b = 8$
3. $a = 8$, $b = 7$
4. $a = 12$, $b = 7$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

แทนค่า $a = 8$; $(2-8)^2 + (4-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (12-8)^2 + (12-8)^2 + (13-8)^2$

$= 36 + 16 + 4 + 1 + 16 + 16 + 25 = 114$

แทนค่า $a = 7$; $(2-7)^2 + (4-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (12-7)^2 + (12-7)^2 + (13-7)^2$

$= 25 + 9 + 1 + 0 + 25 + 25 + 36 = 121$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้ง

แทนค่า $a = 12$; เพราะว่าคิดเฉพาะเทอม $(2-12)^2 + (4-12)^2 = 100 + 64 = 164 > 114$

เพราะฉะนั้น $\sum_{i=1}^{7}(x_i - 12)^2 > 114$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้งได้

ทำนองเดียวกันแทนค่า $b = 12$ และ $b = 7$ จะได้

$|2-12| + |4-12| + |6-12| + |7-12| + |12-12| + |12-12| + |13-12| = 30$

$|2-7| + |4-7| + |6-7| + |7-7| + |12-7| + |12-7| + |13-7| = 26$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

วิธีจริง นักเรียนต้องท่องจำสมบัติของค่าเฉลี่ยและมัธยฐานให้ได้ว่า

เมื่อ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูลใดๆ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i-k)^2$ ทุก k

และ $\sum_{i=1}^{n}|x_i-\text{Median}| \le \sum_{i=1}^{n}|x_i-k|$ ทุกค่า k

เพราะฉะนั้น $a = \bar{x} = 8$ และ $b = \text{Median} = 7$

ตัวอย่างที่ 7.3.20 คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ของนักเรียนโรงเรียนหนึ่งมีผลการสอบดังนี้

	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
คณิตศาสตร์	60	10
ฟิสิกส์	64	8

สมมติคะแนนของผลการสอบมีการแจกแจงปกติ นาย ก. สอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ 45 คะแนน คิดเป็นเดไซล์ที่ 2 ของวิชาคณิตศาสตร์ ถ้านาย ก. สอบวิชาฟิสิกส์ได้คะแนน 76 คะแนน แล้วคะแนนฟิสิกส์ของนาย ก. จะตรงกับตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่เท่าใดของวิชาฟิสิกส์

1. P_{20}
2. P_{40}
3. P_{60}
4. P_{80}

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่านาย ก. สอบวิชาฟิสิกส์ได้ 76 คะแนน ซึ่งมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต เพราะฉะนั้นตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของวิชาฟิสิกส์ของ นาย ก. > P_{50}

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

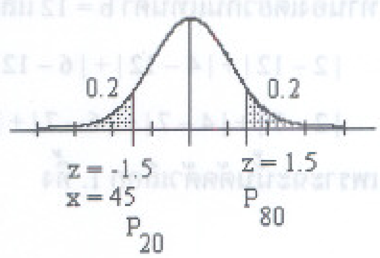
วิธีจริง วิชาคณิตศาสตร์ $\bar{x} = 60$, $s = 10$ คะแนน $x = 45$ ตรงกับ $z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{45-60}{10} = -1.5$

เพราะว่าคะแนน $x = 45$ ตรงกับ P_{20} เพราะฉะนั้นพื้นที่ใต้โค้งปกติ $z < -1.5$ จึงเท่ากับ 0.2

และพื้นที่ใต้โค้งปกติเมื่อ $z > 1.5$ จึงเท่ากับ 0.2

วิชาฟิสิกส์ $\bar{x} = 64$, $s = 8$

คะแนน $x = 76$ ตรงกับ $z = \frac{x-\bar{x}}{s} = \frac{76-64}{8} = 1.5$



เพราะว่า $z = 1.5$ ตรงกับ P_{80}

เพราะฉะนั้นคะแนน $x = 76$ ตรงกับ P_{80}

7.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับสถิติ

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลจากตารางแจกแจงความถี่สามารถหาได้เสมอ
2. ข้อมูลที่แจกแจงความถี่โดยใช้อันตรภาคชั้นที่มีช่วงเปิดจะหาค่ามัธยฐานไม่ได้
3. ฐานนิยมของข้อมูลต้องมีค่าน้อยกว่าค่าสูงสุดของข้อมูล
4. ข้อมูลที่กำหนดในรูปแบบของตารางแจกแจงความถี่จะมีค่า $P_{50} = \dfrac{P_{25} + P_{75}}{2}$ เสมอ
5. ข้อมูล 2 ชุดที่ไม่เป็นค่าคงตัว ถ้าข้อมูล 2 ชุดมีค่าเฉลี่ยเท่ากัน และค่าความแปรปรวนเท่ากัน แล้วข้อมูล 2 ชุดนั้นต้องเป็นข้อมูลชุดเดียวกัน
6. ถ้าเดิมข้อมูลมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 10 และค่าความแปรปรวนเท่ากับ 16 เมื่อเพิ่มข้อมูลเข้ามาอีกหนึ่งค่าแล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้ต้องมีค่าเพิ่มขึ้น
7. ถ้าความแปรปรวนของข้อมูลเท่ากับ 0 แล้วค่าของข้อมูลทุกตัวต้องเท่ากัน
8. ข้อมูลที่การแจกแจงปกติต้องมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0 และความแปรปรวนเท่ากับ 1
9. สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูลมีค่าเป็นบวกเสมอ
10. ข้อมูลคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์มีการแจกแจงปกติมาตรฐาน เมื่อเรียงลำดับข้อมูลจากน้อยไปมากแล้วคะแนน $P_{50} - P_{40} = P_{60} - P_{50}$
11. ข้อมูลชุดหนึ่งหากเราทำการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต โดยการคำนวณค่าจากข้อมูล โดยตรงกับการหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต โดยทำตารางการแจกแจงความถี่ก่อน จะมีค่าเฉลี่ยที่คำนวณได้เท่ากัน
12. สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูลทุกชุดต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์
13. ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูลและ $\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - b)^2$ แล้ว $a = b$
14. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวนของข้อมูลชุดเดียวกันอาจมีค่าเท่ากันก็ได้
15. ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูลชุดใด ๆ จะมีค่าเท่ากับมัธยฐานเสมอ
16. ข้อมูลชุดใดๆ ถ้า $Q_3 = Q_2 = Q_1$ แล้ว ข้อมูลนั้นจะต้องมีค่าฐานนิยมเท่ากับมัธยฐานเสมอ
17. สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ของข้อมูลที่มีค่าบวกและต่างกันทุกค่า ต้องมีค่ามากกว่า 0 และ น้อยกว่า 1 เสมอ
18. ข้อมูลที่เป็นข้อมูลประเภทข้อมูลคุณภาพสามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้เสมอ

19. $\bar{x}_1$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลกลุ่มที่ 1
$\bar{x}_2$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลกลุ่มที่ 2 โดยที่ $\bar{x}_1 \le \bar{x}_2$
ถ้า $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้ง 2 กลุ่มรวมกัน แล้ว $\bar{x}_1 \le \bar{x} \le \bar{x}_2$

20. ข้อมูล $x_1, x_2, \ldots, x_n$ มีความแปรปรวนเท่ากับ s_1^2 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = $\bar{x}$
ข้อมูล $y_1, y_2, \ldots, y_m$ มีความแปรปรวนเท่ากับ s_2^2 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิต = $\bar{y}$
โดยที่ $\bar{x} = \bar{y}$ และ $s_1^2 \le s_2^2$
ถ้านำข้อมูลทั้ง 2 ชุดมารวมกัน มีค่าความแปรปรวนเท่ากับ s^2 แล้ว $s_1^2 \le s^2 \le s_2^2$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับสถิติ

1. ผิด ตัวอย่างเช่นข้อมูลคะแนนสอบของนักเรียน 50 คน

คะแนน	ความถี่
น้อยกว่า 10	12
11 – 20	25
21 – 30	13

เพราะว่าเราไม่รู้ค่าจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นแรก
เพราะฉะนั้น ไม่สามารถหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

2. ผิด เพราะว่ามีข้อมูลบางกลุ่มสามารถมัธยฐานได้ ตัวอย่างเช่น

คะแนน	ความถี่
น้อยกว่า 10	12
11 – 20	25
21 – 30	13
	50

มัธยฐาน $= L + \left(\dfrac{\frac{N}{2} - \Sigma f_L}{f_M}\right) I = 10.5 + \left(\dfrac{25-12}{25}\right)(10) = 10.5 + 5.2 = 15.7$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4 จะได้ว่าฐานนิยม = 4 และค่าสูงสุดของข้อมูล = 4

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
0 – 20	20	20
21 – 40	25	45
41 – 60	35	80
61 – 80	20	100

$P_{25} = 20.5 + \left(\frac{25-20}{25}\right)(20) = 24.5$

$P_{50} = 40.5 + \left(\frac{50-45}{35}\right)(20) = 43.357142$

$P_{75} = 40.5 + \left(\frac{75-45}{35}\right)(20) = 40.5 + 26.938774 = 67.438774$

$\frac{P_{25}+P_{75}}{2} = \frac{24.5+67.438774}{2} = 45.969387 \neq P_{50}$

5. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล – 1,0,1 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 0 และความแปรปรวน = $\frac{1+0+1}{3} = \frac{2}{3}$

ข้อมูล $-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 0 และความแปรปรวน = $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)}{2} = \frac{2}{3}$

6. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล $10 - 2\sqrt{3}, 10, 10 + 2\sqrt{3}$

มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 10 , ความแปรปรวน = 16

เมื่อเพิ่มข้อมูลอีกหนึ่งตัวคือ 10 จะได้ว่าความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่คือ

$10 - 2\sqrt{3}$, 10 , 10 , $10 + 2\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับ 12

7. **ถูกต้อง** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เท่ากันจะได้ว่า $\bar{x} = x_1 = x_2 = \ldots = x_n$

เพราะฉะนั้น $s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n} = 0$

8. **ผิด** ข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติสามารถมีค่าเฉลี่ย $\neq 0$ และความแปรปรวน $\neq 1$ ได้

หมายเหตุ ข้อมูลที่มีการแจกแจงปกติมาตรฐานมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 0 และความแปรปรวน = 1

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล –5,–3,–2 สัมประสิทธิ์พิสัย = $\frac{\max-\min}{\max+\min} = \frac{-2-(-5)}{-2+(-5)} = -\frac{3}{7} \not> 0$

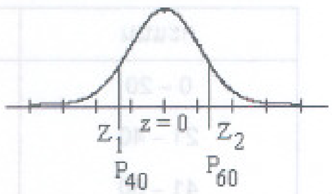
10. **ถูกต้อง** เมื่อข้อมูลมีการแจกแจงปกติมาตรฐาน

P_{50} = คะแนนมาตรฐาน $z = 0$

ค่า z_1 ที่ตรงกับ P_{40} และ z_2 ที่ตรงกับ P_{60}

จะมีค่าเท่ากันและมีเครื่องหมายต่างกัน

นั่นคือ $z_1 = -z_2$



เพราะฉะนั้น $P_{50} - P_{40} = 0 - z_1 = 0 - (-z_2) = z_2 = z_2 - 0 = P_{60} - P_{50}$

11. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 2 , 3 , 4 , 4 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9

คิดตรงจากข้อมูลจริง $\bar{x} = \dfrac{2+3+4+4+4+5+6+7+8+9}{10} = \dfrac{52}{10} = 5.2$

คิดแบบแจกแจงความถี่

คะแนน	ความถี่
2 – 6	6
6 – 9	4

$\bar{x} = \dfrac{6(4)+4(7.5)}{10} = \dfrac{24+30}{10} = 5.4$

12. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล –7 , – 6 , – 5 , – 4 , – 3 , – 2 , – 1

จะได้ $Q_1 = -6$, $Q_3 = -2$, $\dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \dfrac{-2-(-6)}{-2+(-6)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

13. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 1, – 1 ; a = 1 , b = – 1

จะได้ว่า $(1-a)^2 + (-1-a)^2 = (1-1)^2 + (-1-1)^2 = 4$

$(1-b)^2 + (-1-b)^2 = (1-(-1))^2 + (-1(-1))^2 = 4$

14. **ถูกต้อง** ในกรณีที่ $s^2 = 1$ จะได้ว่า $s = 1$ ด้วย ตัวอย่างเช่น คะแนนปกติมาตรฐาน

15. **ผิด** ตัวอย่างเช่น ข้อมูล 2 , 7, 10 มีค่า $Q_1 = 2$,$Q_3 = 10$, มัธยฐาน = 7 แต่ $7 \neq \dfrac{Q_3 - Q_1}{2}$

16. **ถูกต้อง** เพราะว่าในการเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n$

เมื่อ $Q_1 = Q_2 = Q_3$ แสดงว่า 50% ของข้อมูลทั้งหมดมีค่าเท่ากับ $Q_1 = Q_2 = Q_3$

เพราะฉะนั้นฐานนิยม = Q_2 แน่นอน

17. **ถูกต้อง** เพราะว่า $0 < Q_1 < Q_3$ เพราะฉะนั้น $0 < Q_3 - Q_1 < Q_3 + Q_1$

เพราะฉะนั้น $0 < QD = \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} < 1$

18.ผิด ตัวอย่างเช่น ข้อมูลนักเรียนชาย และนักเรียนหญิง ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง

	จำนวน
ชาย	600
หญิง	400

ข้อมูลแบบนี้จะหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่ได้

19.ถูกต้อง $\bar{x}_1$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มที่ 1 , n_1 = จำนวนข้อมูลกลุ่มที่ 1

$\bar{x}_2$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มที่ 2 , n_2 = จำนวนข้อมูลกลุ่มที่ 2

$\bar{x}$ = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของทั้ง 2 กลุ่มรวมกัน

เพราะฉะนั้น $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$(n_1 + n_2)\,\bar{x} = n_1\,\bar{x}_1 + n_2\,\bar{x}_2$$

เพราะว่า $\bar{x}_1 \le \bar{x}_2$

เพราะฉะนั้น $n_1\,\bar{x}_1 + n_2\,\bar{x}_1 \le (n_1 + n_2)\bar{x} \le n_1\,\bar{x}_2 + n_2\,\bar{x}_2$

$$(n_1 + n_2)\,\bar{x}_2 \le (n_1 + n_2)\bar{x} \le (n_1 + n_2)\,\bar{x}_2$$

$$\bar{x}_1 \le \bar{x} \le \bar{x}_2$$

20.ถูกต้อง เพราะว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของทั้ง 2 กลุ่มเท่ากัน

เพราะฉะนั้น $s^2 = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$

$$(n_1 + n_2)s^2 = n_1\,s_1^2 + n_2\,s_2^2$$

เพราะว่า $s_1^2 \le s_2^2$

เพราะฉะนั้น $n_1\,s_1^2 + n_2\,s_1^2 \le (n_1 + n_2)s^2 \le n_1\,s_2^2 + n_2\,s_2^2$

$$(n_1 + n_2)\,s_1^2 \le (n_1 + n_2)s^2 \le (n_1 + n_2)s_2^2$$

$$s_1^2 \le s^2 \le s_2^2$$

7.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ในการทดสอบเวลาที่ใช้ในการวิ่งระยะทาง 100 เมตร ของนักกีฬาในโรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักกีฬาเข้าทดสอบ 9 คน หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนของเวลาที่ใช้ในการวิ่งของนักกีฬา 9 คนเป็น 11.0 และ 1.0 ตามลำดับ หากมีนักกีฬามาทดสอบเพิ่มอีกหนึ่งคน โดยที่เวลาที่เขาใช้ในการวิ่งเป็น 12 วินาที แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตและความแปรปรวนของกลุ่มนักกีฬา 10 คนนี้ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\overline{x} = 11.1$, $s = 1.01$ 2. $\overline{x} = 11.1$, $s = 0.99$
   3. $\overline{x} = 11.5$, $s = 1.01$ 4. $\overline{x} = 11.5$, $s = 0.99$

2. กำหนดข้อมูล x และ y เป็นดังนี้ x : 10 , 20 , 25 , 30 , 40

   y : 20 , 30 , 50 , 70 , 80

   พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. สัมประสิทธิ์พิสัยของ x = สัมประสิทธิ์พิสัยของ y

   ข. สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของ x = สัมประสิทธิ์ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของ y

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ก. ถูก , ข. ถูก 2. ก. ถูก , ข. ผิด
   2. ก. ผิด , ข. ถูก 4. ก. ผิด , ข. ผิด

3. ถ้าเพิ่มค่าหนึ่งค่าเข้าไปในข้อมูล ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตยังคงเท่าเดิมแล้วค่าที่เพิ่มเข้าไปนี้มีค่าเท่าใด

   1. 0 2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดเดิม
   3. มัธยฐานของข้อมูลชุดเดิม 4. เปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 ของข้อมูลชุดเดิม

4. กำหนดข้อมูลจำนวนบวก $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_{50}$ โดยมี $\sum_{i=1}^{50}(x_i - \overline{x})^2 = 450$, $\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 1250$

   เมื่อ $\overline{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล

   ค่าของ $\overline{x}$ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (s) ของข้อมูลเท่ากับเท่าใด

   1. $\overline{x} = 4$, $s = 3$ 2. $\overline{x} = 4$, $s = 9$
   2. $\overline{x} = 20\sqrt{2}$, $s = 3$ 4. $\overline{x} = 20\sqrt{2}$, $s = 9$

5. ความสูงของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเท่ากับ 0.40 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 125 เซนติเมตร ถ้าเด็กชาย ก. และเด็กหญิง ข. มีส่วนสูงเป็น 140 และ 122 เซนติเมตร ตามลำดับแล้ว เด็กชาย ก. จะมีความสูงคิดเป็นคะแนนมาตรฐานมากกว่าเด็กหญิง ข. เท่ากับเท่าใด

   1. -0.24 2. 0.06

   3. -0.3 4. 0.36

6. ถ้านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนสหศึกษาแห่งหนึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักเป็น 58.7 กิโลกรัม ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนชายทั้งชั้นเป็น 65.8 กิโลกรัม และ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนหญิงทั้งชั้นเป็น 34.2 กิโลกรัม แล้วโรงเรียนนี้มีนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ที่เป็นหญิงร้อยละเท่าใด

   1. 77.5   2. 50

   3. 55.3   4. 22.5

7. ในการสอบวิชาภาษาอังกฤษของนักเรียน 3 ห้อง คือ ห้อง ก. , ข. และ ค. ได้ข้อมูลมาดังนี้

	จำนวนคน	ค่าเฉลี่ยเลขคณิต
ห้อง ก.	25	64
ห้อง ข.	15	70
ห้อง ค.	40	$\bar{x}$

   ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมสามห้องเท่ากับ 50 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนห้อง ค. เท่ากับเท่าใด

   1. 3 ~~5~~3.75   2. 54

   3. 46   4. 67

8. ในการทำคะแนนสอบของนักเรียน 40 คน ครูประจำชั้นคิดค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้ 35 คะแนน ต่อมาตรวจพบว่าคะแนนของนักเรียน 2 คน ได้กรอกคะแนนผิดไป 3 และ 5 คะแนน ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่แท้จริงมากกว่า 35
   2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่แท้จริงน้อยกว่า 35
   3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตแท้จริงเท่ากับ 35.2
   4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่แท้จริงมีค่าในช่วง [34.8 , 35.2]

9. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่มีคะแนนเต็ม 100 คะแนน ของนักเรียน 50 คน มีข้อมูลดังนี้

คะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
31 – 40	3	3
41 – 50	2	5
51 – 60	9	14
61 – 70	10	24
71 – 80	15	39
81 – 90	9	48
91 – 100	2	50

จงหาว่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 40 มีค่าเท่าใด

1. 64 คะแนน
2. 64.5 คะแนน
3. 66 คะแนน
4. 66.5 คะแนน

10. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 20 คะแนน ถ้า นาย ก. , นาย ข. , นาย ค. ทำการสอบวิชาคณิตศาสตร์ และคะแนนสอบของนาย ก. เป็น 2 เท่า ของคะแนนสอบของนาย ข. และคะแนนมาตรฐานของนาย ข. เป็น 2 เท่า ของคะแนนมาตรฐานของ นาย ค. ถ้าคะแนนสอบของนาย ค. เท่ากับ 50 คะแนน แล้วคะแนนมาตรฐานของนาย ก. จะเท่ากับเท่าใด

1. – 0.25
2. – 0.5
3. 1.00
4. 2.75

เฉลยคำตอบ 1. (2) 2. (1) 3. (2) 4. (1) 5. (4)
6. (4) 7. (1) 8. (4) 9. (4) 10.(4)

∩∅∪×~∀∃ϕπθ∝⊂≡≈⊄∈∉° ∞ ∧ ∨ ≤↔≠→±≥→↑ X Y ≯≱≮≰

↔≠→±≥→↑

โจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ถ้าสามเหลี่ยม ABC มีมุม BAC = 45° มุม ACB = 60° และด้าน AC ยาว 20 นิ้ว แล้วพื้นที่สามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับกี่ตารางนิ้ว

   1. $\frac{300\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ 2. $\frac{300\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ 3. $\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ 4. $\frac{200\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$

2. ค่าของ $\sec\left[\frac{1}{2}(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5})\right] + \tan\left[\frac{1}{2}(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{4}{5})\right]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $1+\sqrt{2}$ 4. $2+\sqrt{3}$

3. $\log_3\left(\frac{3+3\sqrt{\sqrt{27}}}{\sqrt{3}+5\sqrt{\sqrt{3}}+6}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{3}{4}-\log_3(3^{\frac{1}{4}}+2)$ 2. $\frac{1}{3}-\log_3(3^{\frac{1}{2}}+2)$
   3. $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\log_3 19$ 4. $\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\log_3 19$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin x\cos x \\ 2\sin 3x & \cos 3x \end{bmatrix}$ และ

   $S = \{x \in [0,\pi] \mid 2\det(A^2) - 3\sqrt{3}\det(A) + \det(\sqrt{3}\,I) = 9$ เมื่อ I คือเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ $2\times 2\}$

   ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{2\pi}{6}$ 2. $\frac{3\pi}{6}$ 3. $\frac{4\pi}{6}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

5. แม่ค้าคนหนึ่งทำขนมขายสองชนิด โดยขายขนมชนิดแรกราคาชิ้นละ 12 บาท ชนิดที่ 2 ราคาชิ้นละ 10 บาท ถ้าแม่ค้าทำขนมชิ้นแรก x ชิ้น และ ชนิดที่สอง y ชิ้น โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้

   $x \geq 0$, $y \geq 0$, $5x + 6y \leq 15000$, $3x + 2y \leq 6000$

   แล้วแม่ค้าจะขายขนมได้เงินสูงสุดเมื่อขายขนมทั้งสองชนิดรวมกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 2575 ชิ้น 2. 2625 ชิ้น 3. 2875 ชิ้น 4. 3205 ชิ้น

6. ให้ $\bar{u} = \bar{i}+3\bar{j}$, $\bar{v} = 2\bar{i}+\bar{j}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}+\bar{v}$ และ $\bar{u}-\bar{v}$ แล้ว $\cos\theta$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ 2. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$

7. กำหนดให้ $|\bar{u}-\bar{v}|=3$ และ $\bar{u}\cdot\bar{v}=-2$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\bar{u}+\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ข. $|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2=3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

8. ถ้า $z_1=\cos12°+i\sin12°$ และ $z_2=-\cos16°-i\sin16°$ แล้ว $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{15}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 2. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 3. $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 4. $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

9. ให้ z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นรากของสมการ $z^4+z^2+2=0$ ค่าของ $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. 4 3. $2^{\frac{5}{2}}$ 4. $2^{\frac{9}{4}}$

10. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีนักเรียนชั้น ม. 6 จำนวน 300 คน สมชาย สมศักดิ์ และ สมศรี เป็นนักเรียนชั้น ม. 6 ของโรงเรียนนี้ โดยที่ เกรดเฉลี่ยของสมชายอยู่ในตำแหน่งเดไซล์ที่ 8.15 เกรดเฉลี่ยของสมศักดิ์คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1 นักเรียนชั้น ม. 6 ที่ได้เกรดเฉลี่ยมากกว่าสมศรีมีจำนวน 50 คน (กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ Z = 0 ถึง Z = 1 มีค่าเท่ากับ 0.3413) ถ้าสมมติว่าเกรดเฉลี่ยของนักเรียนชั้น ม. 6 มีการแจกแจงปกติ ข้อใดต่อไปนี้เป็นรายชื่อนักเรียนเรียงลำดับ จากคนที่ได้เกรดเฉลี่ย <u>มากที่สุดไปน้อยที่สุด</u>

1. สมชาย สมศักดิ์ สมศรี 2. สมศักดิ์ สมศรี สมชาย
3. สมศรี สมศักดิ์ สมชาย 4. สมศักดิ์ สมชาย สมศรี

11. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{20}$ โดยมีสมบัติดังนี้ $\sum_{i=1}^{20}(x_i-5)^2=500$,

$\sum_{i=1}^{20}|x_i-a|$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ a = 5 และ $\sum_{i=1}^{20}(x_i-b)^2=500$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ b = 8

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตน้อยกว่ามัธยฐาน
2. ผลรวมของข้อมูลชุดนี้ทั้งหมดเท่ากับ 100
3. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 5
4. สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับ 50%

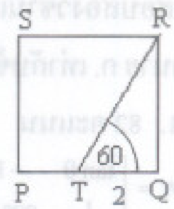
12. ผลรวมของคำตอบของสมการ $2\sin^2 2x+3\cos2x-3=0$ เมื่อ $0\le x<\pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. $\frac{2\pi}{3}$

13. กำหนด T เป็นจุดบนด้าน PQ ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส PQRS ดังรูป

ถ้า TQ ยาว 2 หน่วย และ มุม RTQ เท่ากับ 60°

แล้วพื้นที่สี่เหลี่ยม PQRS เท่ากับเท่าใด



1. $2\sqrt{3}$ ตารางหน่วย 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ตารางหน่วย

3. 12 ตารางหน่วย 4. 8 ตารางหน่วย

14. กำหนดให้ $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$ แล้ว a + b + c + d มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

15. อุณหภูมิเป็นองศาเซลเซียสของตู้เย็น 10 ตู้ ในโรงงานอุตสาหกรรมแห่งหนึ่งเท่ากับ 3.0 , 4.2 , –1.1 , 0.3 , – 0.6 , 2.1 , – 0.2 , และ 0.0 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอุณหภูมิของตู้แช่เย็นนี้เท่ากับ 1.83 องศาเซลเซียสเท่ากับ 1.83 องศาเซลเซียส

ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของอุณหภูมิของตู้แช่เย็นของโรงงานนี้

1. 31.55% 2. 31.69% 3. 315.5% 4. 316.9%

16. ค่าสูงสุดของ $f(x) = 1 - \sin^4 2x - \cos^2 2x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. -1

17. กำหนดกราฟของสมการ $y = 10^x$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. มีจุดตัดแกน Y หนึ่งจุด

ข. ถ้า x มีค่าเป็นลบ แล้ว y มีค่าเป็นลบด้วย ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

18. ค่าของ $\log_3(\log_2(\log_5 625))$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2 3$ 2. $\frac{1}{\log_3 2}$ 3. $\frac{\log 3}{\log 2}$ 4. $\frac{\log 2}{\log 3}$

19. ถ้า $A + I = \begin{bmatrix}2 & 2\\-1 & 0\end{bmatrix}$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้วสมาชิกของ A ที่อยู่ในแถวที่หนึ่งหลักที่สองคือข้อใดต่อไปนี้

1. –1 2. –2 3. 2 4. 0

20. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์มีการแจกแจงแบบปกติ มีคะแนนเฉลี่ย 60 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 10 คะแนน คะแนนสอบวิชาภาษาอังกฤษ มีการแจกแจงแบบปกติ มีคะแนนเฉลี่ย 70 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 15 คะแนน ถ้านาย ก. มีคะแนนมาตรฐานของผล

การสอบสองวิชานี้เท่ากัน และสอบวิชาคณิตศาสตร์ได้ 72 คะแนน แล้วคะแนนภาษาอังกฤษของนาย ก. เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 82 คะแนน 2. 84 คะแนน 3. 86 คะแนน 4. 88 คะแนน

21. ถ้า $A = \begin{bmatrix} \tan\theta & -1 \\ 1 & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\sin\theta \end{bmatrix}$ แล้ว det(AB) คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\sin^2\theta$ 2. $\cos^2\theta$ 3. $2\cos\theta$ 4. $2\sin\theta$

22. นักเรียน 100 คน ได้เข้าสอบแข่งขันเพื่อศึกษาต่อที่สถาบันแห่งหนึ่ง ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับ 500 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 100 ถ้าคะแนน นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนมาตรฐานเท่ากับ 2 แล้ว นาย ก และ นาย ข ได้คะแนนสอบรวมกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1200 2. 1250 3. 1300 4. 1350

23. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\cos(2\arcsin x) + 2 = 4\sin^2(\arccos x)$ ข้อใดต่อไปนี้คือผลคูณของสมาชิกในเซต A

1. $-\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{2}$

24. กำหนดให้ $f = \{(x, y) \mid y = \log(x+1) + \log(x+2) - \log(4-x^2)\}$

และ $g = \{(x, y) \mid y = 2^{x-1}$ และ $x \geq 0\}$

ถ้า D_f = โดเมนของ f และ R_g = เรนจ์ของ g

แล้ว $D_f \cap R_g$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0, 1.5)$ 2. $[0.5, 2.5)$ 3. $[1, 3)$ 4. $[1.5, 4)$

25. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวก ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $10^x < 10^y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ 2. $\log x < \log y$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$

3. $\frac{1}{2^x} < \frac{1}{2^y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$ 4. $\sqrt{x} < \sqrt{y}$ ก็ต่อเมื่อ $x < y$

26. ถ้า $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ -15 & 22 \end{bmatrix}$ และ $\det A < 0$ แล้ว $\det A^{-1}$ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -2 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 4

27. ถ้า $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = a^2$ แล้ว $\operatorname{cosec}\theta - \sec\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{a}$ 2. $\frac{a}{1+a^2}$ 3. $\frac{a}{1-a^2}$ 4. $\frac{2a}{a^2-1}$

28. เซตคำตอบของอสมการ $3x^{-2} - 5x^{-1} - 2 > 0$ คือข้อใด

1. $(-3, \frac{1}{2})$ 2. $(-2, 0) \cup (0, \frac{1}{2})$
3. $(-\infty, -3) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ 4. $(-\infty, -3] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$

29. จากสมการ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos 2x$ ค่าของ x ตรงกับข้อใด

1. $\frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{9}, 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n\pi - \frac{\pi}{3}$
3. $\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{\pi}{3}$

30. กำหนด $\arcsin(\cos(\pi + \arcsin(x^2 - \frac{1}{2}))) = -\frac{\pi}{2}$ ค่าของ x อยู่ในเซตใด

1. $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\}$ 2. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\}$
3. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 4. $\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\}$

31. กำหนดสมการ $\log_{\cos x}(\sin x) + \log_{\sin x}(\cos x) = 2$ ค่าของ x ในรูปทั่วไปเท่ากับเท่าใด

1. $n\pi + \frac{\pi}{4}$ 2. $2n\pi \pm \frac{\pi}{4}$ 3. $2n\pi + \frac{\pi}{4}$ 4. $n\pi - \frac{\pi}{4}$

32. ถ้า $A = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ -\sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ แล้ว det(AB) เท่ากับเท่าใด

1. $1 + \cos^2 x + \cos^2 3x$ 2. $1 - \cos^2 x + \cos^2 3x$
3. $1 + \cos^2 x - \cos^2 3x$ 4. $1 - \cos^2 x - \cos^2 3x$

33. ค่าของ $\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cos x}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $1 + \cot^2 x$ 2. $2\cot^2 x$ 3. $4 - 2\cot x$ 4. $\cot x$

34. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

(2) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} - \arccos\frac{1}{2} = \arccos\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) และ (2) เป็นจริง 2. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
3. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง 4. ข้อ (1) และ (2) เป็นเท็จ

35. ให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ขนาด 2 หน่วยที่แตกต่างกัน และต่างก็ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\bar{i} + \bar{j}$ $\bar{u} + \bar{v}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{j}$ 2. $\sqrt{2}\bar{i} + \sqrt{2}\bar{j}$ 3. $2\bar{i} + 2\bar{j}$ 4. $2\sqrt{2}\bar{i} + 2\sqrt{2}\bar{j}$

36. การแจกแจงจำนวนครอบครัว 40 ครอบครัวที่มีเครื่องรับโทรทัศน์มีดังนี้

จำนวนเครื่อง	1	2	3	4	5
จำนวนครอบครัว	14	12	8	4	2

ให้ สัมประสิทธิ์ของพิสัย $= a$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= b$

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= c$

สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน $= d$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $c < b < a < d$ 2. $b < d < a < c$ 3. $a = b = c = d$ 4. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

37. **ทฤษฎีบท** ให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และ $g(x) \neq 0$ ดังนั้นมีพหุนาม $q(x)$, $r(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้ $f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ โดยที่ $r(x) = 0$ หรือดีกรีของ $r(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $g(x)$

ถ้าเศษที่ได้จากการหารพหุนาม $p(x)$ ด้วย $x - 1$ และ $x - 2$ คือ 2 และ 1 ตามลำดับ แล้วการหาร $p(x)$ ด้วย $x^2 - 3x + 2$ จะเหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $x - 3$ 2. $-x + 3$ 3. 3 4. ข้อมูลที่ให้ไม่เพียงพอ

38. ถ้า $|z| = 1$ และ a , b เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $|az + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$ 2. $|az + b| = |a| + |b|$

3. $|a\bar{z} + b| = |\bar{a} + \bar{b}z|$ 4. $|a\bar{z} + b| = |a| + |b|$

39. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC $\cos B\hat{A}M$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A - 2\sin A \cos C}}$ 2. $\dfrac{\sin A + \cos C}{\sqrt{1 + \sin^2 A + 2\sin A \cos C}}$

3. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C - 2\sin C \cos A}}$ 4. $\dfrac{\sin C + \cos A}{\sqrt{1 + \sin^2 C + 2\sin C \cos A}}$

40. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยม มี AB = CD และ E , F , G เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD, BC, AC ตามลำดับ ถ้า $B\hat{A}C = 85^\circ$ และ $A\hat{C}D = 45^\circ$ แล้ว $G\hat{F}E$ มีค่าเท่าใด

1. 15° 2. 20° 3. 25° 4. 30°

41. กำหนดให้ A และ B เป็นเมตริกซ์มิติ $n \times n$ และ $A \neq B$

ถ้า $A^3 = B^3$ และ $A^2B = B^2A$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A^2 + B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
2. $A^2 + B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
3. $A^2 - B^2$ เป็นเมตริกซ์เอกฐาน
4. $A^2 - B^2$ ไม่เป็นเมตริกซ์เอกฐาน

42. ถ้า $5 \tan A = \tan(A + B)$ จะได้ $\dfrac{\sin(2A + B)}{\sin B}$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{5}{3}$
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{4}{3}$
4. $\frac{3}{2}$

43. ถ้า $a\cos\theta + b\sin\theta + c = 0$ และ $a\cos\phi + b\sin\phi + c = 0$ โดยที่ a, b, c ไม่เท่ากับ 0 และ

$\phi - \theta \neq 0$ และไม่เป็นพหุคูณของ 2π

แล้ว $\dfrac{2c^2 - a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ มีค่าเท่าใดในเทอมของ θ และ ϕ

1. $\sin(\phi - \theta)$
2. $\cos(\phi - \theta)$
3. $\tan(\phi - \theta)$
4. $\cot(\phi - \theta)$

44. กำหนดให้ค่าของ $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{3}{16}$ โดยที่ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าของ $\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

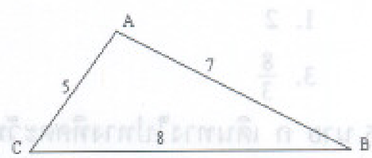
1. $\frac{3}{4}$
2. $-\frac{3}{4}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{4}$
4. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

45. ค่าของ $\left[\dfrac{3^{4n+3} + 3^{4n+2}}{(3^{2n+2})(4)}\right]^{\frac{1}{n}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 5
3. 7
4. 9

46. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมดังรูป

ค่า $\sin^2\frac{B}{2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\frac{3}{28}$
2. $\frac{7}{28}$
3. $\frac{12}{28}$
4. $\frac{21}{28}$

47. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $2A^{-1}B^t$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

48. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่งทำให้ $AB = C$

แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\det(B^{-1}) = 12$
2. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$
3. $\det(2B^t) = 24$
4. $\det(A^2B) = 48$

49. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $\bar{a}$ เท่ากับที่ทำกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}-3\bar{j})$ 2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i}+3\bar{j})$ 3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}+\bar{j})$ 4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i}-\bar{j})$

50. เมื่อดวงอาทิตย์ทำมุม 30° กับแนวระนาบแล้วตึกสูง 150 เมตรจะทอดเงายาวเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{150}{\sqrt{3}}$ 2. $\frac{150}{\sqrt{2}}$ 3. $150\sqrt{3}$ 4. $150\sqrt{2}$

51. ถ้าสามเหลี่ยมหน้าจั่วมีฐานยาว $2\sqrt{3}$ เมตร และ สูง 1 เมตร แล้วมุมยอดจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30° 2. 60° 3. 90° 4. 120°

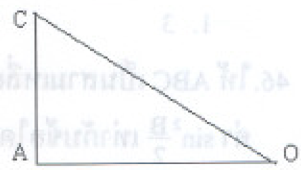
52. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\log_a(2a)^b$

1. $2b$ 2. 2^b 3. $\log_a 2 + b$ 4. $b\log_a 2 + b$

53. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว A^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{13} & -\frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}$

54. กำหนดให้ AOC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากดังรูป โดยที่มุม AOC = 60° และด้าน AC ยาว 8 หน่วย ถ้า B เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AC โดยที่เส้น BO แบ่งครึ่งมุม AOC แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของเส้นตรง BC



1. 2 2. 4
3. $\frac{8}{3}$ 4. $\frac{16}{3}$

55. นาย ก เดินทางไปทางทิศตะวันตกเฉียงเหนือ a หน่วย แล้วเดินทางต่อไปทางทิศตะวันตก b หน่วย ต่อจากนั้นจึงเดินทางไปทางทิศเหนืออีก c หน่วย อยากทราบว่า นาย ก อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นเท่ากับเท่าใดต่อไปนี้

1. $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ 2. $(a^2 + b^2 + c^2 + \sqrt{2}\,ab + \sqrt{2}\,ac)^{1/2}$
3. $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac)^{1/2}$ 4. $a + (b^2 + c^2)^{1/2}$

56. ให้ $f(x) = \log\sqrt{x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{\log x}$ $R_f - D_{f+g}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0 , 1)$ 2. $[0 , 1]$ 3. $(-\infty , 1)$ 4. $(-\infty , 1]$

57. ฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = (\sin 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x 2. $f(x) = (\cos 18^\circ)^{-2x}$ ทุกๆ x
3. $f(x) = |\log_2 \frac{1}{x}|$ ทุกๆ $x > 0$ 4. $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ ทุกๆ $x > 0$

58. ให้ $\bar{u} = -\bar{i}-\bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i}-3\bar{j}$ แล้วเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในข้อใดมีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$

1. $\bar{w} = \frac{-2}{5}(4\bar{i}+3\bar{j})$ 2. $\bar{w} = \frac{-2}{5}(4\bar{i}-3\bar{j})$

3. $\bar{w} = \frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}+\bar{j})$ 4. $\bar{w} = \frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i}-\bar{j})$

59. กำหนด A(1 , −1) , B(5 , −4) และ P(2 , 3) เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า Q เป็นจุดในระนาบ XY ที่ $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{AB}$ 2AB แล้ว $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{PQ}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. −9 2. −1 3. 9 4. 1

60. รากที่ 6 ของ −64 ที่ไม่เป็นจำนวนจริง เป็นจริงตามข้อใด

1. มี 4 ราก คือ $\sqrt{3}\pm i$ และ $\pm 2i$

2. มี 4 ราก คือ $1\pm\sqrt{3}i$ และ $-1\pm\sqrt{3}i$

3. มี 6 ราก คือ $1\pm\sqrt{3}i$, $-1\pm\sqrt{3}i$ และ $\pm 2i$

4. มี 6 ราก คือ $\sqrt{3}\pm i$, $-\sqrt{3}\pm i$ และ $\pm 2i$

61. กำหนดให้ $x \in [0, 4\pi]$ เซตคำตอบของสมการ $\cos x = \sqrt{3}(1-\sin x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}\}$ 2. $\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}\}$

3. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}\}$ 4. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\}$

62. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $f(x) = \arcsin(x)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง [0 , 1]

(ข.) $g(x) = \arcsin(\frac{1}{x})$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, \infty)$

(ค.) $h(x) = \arccos(x^2)$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (0 , 1)

ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. มีข้อความถูกต้อง 1 ข้อความ 2. มีข้อความถูกต้อง 2 ข้อความ

3. มีข้อความถูกต้อง 3 ข้อความ 4. ไม่มีข้อความใดถูกต้อง

63. สำหรับ $\bar{V} = a\bar{i}+b\bar{j}+c\bar{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบสามมิติ ขนาดของเวกเตอร์ $\bar{V}$ เขียนแทนด้วย $\|\bar{V}\|$ กำหนดโดย $\|\bar{V}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$ นอกจากนี้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{V}$ คือ $\frac{\bar{V}}{\|\bar{V}\|}$ กำหนด $\bar{V}_1 = 3\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k}$

$\bar{V}_2 = 4\bar{i}-4\bar{j}+3\bar{k}$

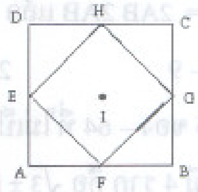
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\frac{-\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}}{3\sqrt{2}}$ 2. $\frac{\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}}{3\sqrt{2}}$ 3. $\frac{-\bar{i}+\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{19}}$ 4. $\frac{\bar{i}-\bar{j}+4\bar{k}}{\sqrt{19}}$

64. เซตคำตอบของสมการ $\log(3-2^x) = (1-x)\log 2$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใด

1. $[-1, 2]$ 2. $[-2, \frac{1}{2}]$ 3. $[\frac{1}{2}, -1]$ 4. $[-1, \frac{1}{2}]$

65. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส E , F , G และ H เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AD , AB , BC และ CD ตามลำดับ I เป็นจุดกึ่งกลางรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ข้อใดต่อไปนี้ผิด



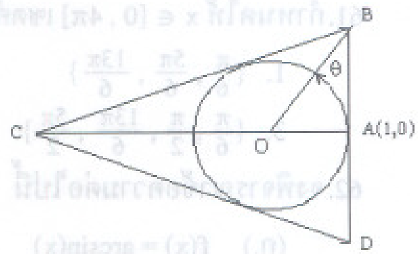
1. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$
2. $\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{GH}$
3. $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AF}$
4. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{AI}$

66. กำหนดให้ $|\bar{u}| = 1$, $|\bar{v}| = 1$, $|\bar{w}| = 3$, $\bar{w} \perp \bar{v}$ และ $\bar{w}$ มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

ค่าของ $|\bar{u} + \bar{v} + \bar{w}|$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{5}$ 2. $2\sqrt{5}$ 3. 5 4. 20

67. จากรูป BD เป็นเส้นสัมผัสวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง BD สัมผัสวงกลมที่จุด A(1 , 0) OB ทำมุม θ เรเดียน กับ OA โดยที่ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ BC , DC เป็นเส้นสัมผัสวงกลมซึ่งพบส่วนต่อของ AO ที่ C พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม BCD เท่ากับกี่ตารางหน่วย



1. $2\cos\theta\cot\theta$ 2. $-\tan^2\theta\tan 2\theta$ 3. $-\tan^2\theta\cot 2\theta$ 4. $2\sin\theta\tan\theta$

68. กำหนดให้ $x + y = 3 - \cos 4\theta$ และ $x - y = 4\sin 2\theta$ จะได้ $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ มีค่าเท่าใด

1. $1+\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{2}$ 3. 2 4. 1

69. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ D เป็นจุดแบ่งครึ่งด้าน BC E และ F เป็นจุดแบ่งด้าน AC เป็นสามส่วนเท่าๆ กัน $\overline{AD}$ ตัดกับ $\overline{BE}$ และ BF ที่ G และ H ตามลำดับ อัตราส่วนระหว่างพื้นที่รูปสามเหลี่ยม BHG กับพื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นเท่าใด

1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{2}{9}$ 3. $\frac{3}{16}$ 4. $\frac{3}{20}$

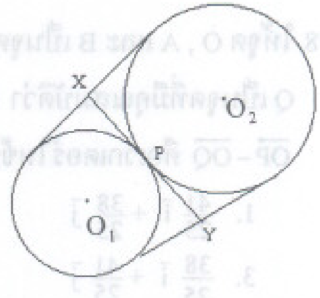
70. **จากรูป** O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลม $\sin(x^\circ+y^\circ) + \cos(x^\circ+y^\circ) - \tan(x^\circ+y^\circ)$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$

3. $\frac{3\sqrt{2}-5-\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}$ 4. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}$

71. จากรูปวงกลม O_1 และ O_2 มีรัศมียาว r_1 และ r_2 ตามลำดับ

โดยที่ $r_1 > r_2$ $|\overrightarrow{XY}|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด



1. $\dfrac{2r_1r_2}{r_1+r_2}$ 2. $\dfrac{4\sqrt{r_1r_2}}{r_1+r_2}$

3. $2\sqrt{r_1r_2}$ 4. $r_1+r_2-\sqrt{r_1r_2}$

72. กำหนดให้ $\dfrac{\log x^2}{a^2-b^2} = \dfrac{\log y^2}{b^2-c^2} = \dfrac{\log z^2}{c^2-a^2}$ จะได้ $\sqrt{xyz}$ มีค่าเท่าใด

1. 4 2. 2 3. 1 4. 0

73. กำหนดให้ $0 < a < 1$ และ $0 < x < y$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a^x < a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$ 2. $a^x < a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

3. $a^x > a^y$ และ $\log_a x < \log_a y$ 4. $a^x > a^y$ และ $\log_a x > \log_a y$

74. ให้ R^+ เป็นเซตของจำนวนจริงบวก และ $A = \{x \mid 2^{2x} - 2^{x+1} - 2^3 > 0\}$

$B = \{x \mid \sqrt{2x-2} - \sqrt{x-2} \geq 1\}$ ข้อใดถูกต้อง

1. $A \subset B$ 2. $B \subset A$ 3. $A \cap B = \phi$ 4. $A \cup B = R^+$

75. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA} = \bar{i} + 3\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 4\bar{i} + \bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่จุด D พื้นที่ของ ΔOAD คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\dfrac{77}{\sqrt{34}}$ 2. $\dfrac{77}{2\sqrt{17}}$ 3. $\dfrac{77}{17}$ 4. $\dfrac{77}{34}$

76. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น 24 % และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 คะแนน ถ้ากำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง $z = 0$ ถึง $z = 1.2$ และถึง $z = 1.25$ เป็น 0.3849 และ 0.3944 ตามลำดับ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ของนักเรียนที่สอบได้ 65 คะแนน

1. 38.49 2. 39.44 3. 88.49 4. 89.44

77. ให้ A เป็นเมตริกซ์ขนาด 2×2 ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง และ I คือเมตริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2 ถ้า $A^2 = I$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นเท็จ

1. A^n เป็นนอนซิงกูลาร์เมตริกซ์ ทุก ๆ จำนวนเต็มบวก n

2. $\mathrm{adj}A = A^{-1}$ หรือ $\mathrm{adj}A = -(A^{-1})$

3. $\det A = \det[C_{ij}(A)]$

4. มีเมตริกซ์ A ซึ่งมีสมบัติตามที่กล่าวเพียง 2 เมตริกซ์เท่านั้น

78. ให้จุด O , A และ B เป็นจุดในระนาบที่มีพิกัด (0 , 0) , (1 , 2) และ (3 , 4) ตามลำดับ ถ้า P และ Q เป็นจุดที่มีคุณสมบัติว่า $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$ ขนานกับ $\overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{OQ}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ แล้ว $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{41}{25}\bar{i} + \frac{38}{25}\bar{j}$ 2. $\frac{35}{16}\bar{i} + \frac{36}{16}\bar{j}$
3. $\frac{38}{25}\bar{i} + \frac{41}{25}\bar{j}$ 4. $\frac{36}{16}\bar{i} + \frac{35}{16}\bar{j}$

79. กำหนดให้ตารางแจกแจงความถี่ของข้อมูลชุดหนึ่ง เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	30 – 39	40 – 49	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89
ความถี่	4	7	10	3	2	4

สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลชุดนี้เป็นเท่าใด

1. 0.1835 2. 1.835 3. 5.45 4. 0.545

80. กำหนด $f : [-\pi , \pi] \to R$ โดย $f(x) = \lfloor 4.5 \cos x \rfloor$ เมื่อ $\lfloor a \rfloor$ หมายถึงจำนวนเต็มที่ใหญ่ที่สุดที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ a เรนจ์ของ f มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 5 3. 10 4. 11

81. กำหนด $f : \{ x \in R \mid 2x^2 \le 7x - 3 \} \to R$ โดย $f(x) = 2^{x^2-2x}$ ค่าต่ำสุดของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -64 2. -2 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{64}$

82. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (1) $\tan 61^\circ - \tan 16^\circ \tan 61^\circ - \tan 16^\circ < 1$

(2) $2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง 2. ข้อ(2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นจริง 4. ทั้งข้อ(1) และข้อ(2) ต่างก็เป็นเท็จ

83. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arcsin(x + y) + \arccos(x - y) = \frac{3\pi}{2}$

ค่าของ arcsiny + arccosx มีค่าอยู่ในช่วงใดในข้อต่อไปนี้

1. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 2. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 3. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 4. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

84. ให้ $B = \{ x \mid x \in [0 , 2\pi]$ และ $2\sin 2x - 1 > 2\cos x - 2\sin x \}$ ดังนั้น B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$ 2. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right)$
3. $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$ 4. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}\right)$

85. กำหนดให้ $f(x) = x^2\cos x + \tan x^2 + e^{\sin x}$ และ $f(x) = g(x) + h(x)$ โดยที่ $g(x) = g(-x)$ และ $h(-x) = -h(x)$ จะได้ $h(x)$ มีค่าเท่าใด

1. $e^{\sin x}$ 2. $\sin x\, e^{(\sin x)^2}$ 3. $\frac{1}{2}(e^{\sin x} - e^{-\sin x})$ 4. $e^{\sin x} - e^{-\sin x} + x\tan x^2$

86. ถ้า $\cos A = \frac{3}{4}$ แล้ว $\sin\frac{A}{2}\ \sin\frac{5A}{2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{11}{32}$ 2. $\frac{11}{16}$ 3. $\frac{9}{16}$ 4. $\frac{9}{12}$

87. ค่าของ $\tan(2\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{5}}))$ เท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 1 3. $\frac{4}{3}$ 4. $-\frac{4}{3}$

88. กำหนด $f(x) = \log(1 + x)$ สำหรับ $x \in R$ ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับเท่าใด

1. $f(n + 1)$ 2. $f(n)$ 3. $f(\frac{1}{n})$ 4. $f(\frac{1}{n+1})$

89. เซตคำตอบของสมการ $(\sqrt{|x|})^{x^2} = x^3$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $[0 , 3]$ 2. $[2 , 4]$ 3. $[-3, -2] \cup [2 , 3]$ 4. $[-2 , -1] \cup [1 , 2]$

90. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม มี D เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งแบ่ง AB ออกเป็นอัตราส่วน $|\overrightarrow{AD}| : |\overrightarrow{DB}| = 3 : 2$ และ $\overrightarrow{CA} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{CB} = 2\bar{i} + 3\bar{j}$ แล้ว $|\overrightarrow{CD}|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{9}{15}$ 2. $\frac{11}{5}$ 3. $\frac{13}{5}$ 4. $\frac{14}{5}$

91. กำหนดให้ A , B , C คือจุดที่มีพิกัดเป็น $A(-5 , 0)$, $B(3 , 6)$, $C(\frac{2}{5} , -\frac{1}{5})$ ตามลำดับ ถ้า $D(a , b)$ เป็นจุดที่ทำให้ CD มีทิศทางเดียวกับ $\overline{AB}$ และมีขนาดเท่ากับ 2 แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 6 3. $\frac{29}{5}$ 4. $\frac{71}{5}$

92. ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{v} = 5$, $|\bar{u}| = 2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา แล้ว $|\bar{u} + \bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

1. 7 2. 12 3. $\sqrt{29}$ 4. $\sqrt{39}$

93. ให้ A คือเซตคำตอบของสมการ $2 \cdot 2^{1+x+x^2+x^3+\cdots} = 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A = \phi$ 2. $A \cap [-1 , 5] = \{2\}$

3. $A \cup [1 , 3] = (-1 , 3]$ 4. $A - (3 , 6) = \{3\}$

94. ให้ $M = \{\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \mid a , b \in R$ และ $a \neq 0 , b \neq 0\}$ เมื่อ $A , B \in M$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \in M$ 2. $A^{-1} \in M$ และ $A^tB \notin M$

3. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \in M$ 4. $A^{-1} \notin M$ และ $A^tB \notin M$

95. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|4iz^{-1} + 9\bar{z}| = 6\sqrt{2}$ ดังนั้น |z| มีค่าอยู่ในช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0, \frac{1}{2})$ 2. $(\frac{1}{2}, 1]$ 3. $(1, \frac{3}{2}]$ 4. $(\frac{3}{2}, 2]$

96. ถ้า $P(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ และ $Q(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม 1 หน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด แล้วส่วนโค้ง PQ ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{3}$ 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. $\frac{2\pi}{3}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$

97. บริษัทแห่งหนึ่งจำแนกลูกจ้างออกเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มคนงานและพนักงาน โดยที่คนงานมีค่าจ้างรายวันเฉลี่ย 120 บาทต่อคน พนักงานมีค่าจ้างรายวันเฉลี่ย 440 บาทต่อคน ถ้าจำนวนคนงานเป็น 3 เท่าของจำนวนพนักงาน แล้วลูกจ้างของบริษัทนี้มีค่าจ้างรายวันเฉลี่ยต่อคนเท่ากับเท่าใด

1. 200 บาท 2. 266 บาท 3. 288 บาท 4. 360 บาท

98. ค่าของ $\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{7} + \arctan\frac{1}{8}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{\pi}{6}$

99. ค่าของ $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \cot 27^\circ + \cot 9^\circ$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4 3. 6 4. 8

100. กำหนดให้ $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$ และ $\bar{a}(\bar{a} - \bar{b}) = 23$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$ แล้ว $|\bar{b}|\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. – 0.4 2. – 0.2 3. 0.2 4. 0.4

101. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 4×4 และ $M_{ij}(A)$ คือไมเนอร์ของ a_{ij}

ถ้า $M_{23}(A) = 5$ แล้ว $M_{32}(2A^t)$ เท่ากับเท่าใด

1. 10 2. 20 3. 40 4. 80

102. เซตคำตอบของอสมการ $2\sin^4 x + 3\sin^2 x - 2 \geq 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$ เป็นสับเซตของเซตใด

1. $[\frac{\pi}{6}, \pi]$ 2. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$

3. $[\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}]$ 4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$

103. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_3 x)} + \log_5(x-2)$ โดเมนของ f คือข้อใดต่อไปนี้

1. (2 , 3) 2. (2 , 3] 3. $(2, \frac{\pi}{2})$ 4. $(2, \frac{\pi}{2}]$

104. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

ถ้า $X = (B + C)A$ แล้ว X^{-1} คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

105. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงดังนี้

อายุ(ปี)	1 – 3	4 – 6	7 – 9	10 – 12
จำนวนเด็ก	3	a	6	4

ถ้ามัธยฐานของอายุเด็กกลุ่มนี้เท่ากับ 7 ปี แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 4 3. 5 4. 6

106. ถ้า $3\log_4 x^2 = 4(\log_4 x)^2$ แล้ว x มีค่าในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1, 9)$ 2. $(-2, 7)$ 3. $(1, 10)$ 4. $(2, 12)$

107. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยตัวเลข 5 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ a ค่ามัธยฐานเท่ากับ b ถ้าให้ X_i แทนค่าที่ i = 1,2,3,4,5 และ $A = \sum_{i=1}^{5}(X_i - a)^2$, $B = \sum_{i=1}^{5}(X_i - b)^2$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $A \geq B$ 2. $A \geq B$ 3. $A < B$ 4. $A > B$

108. ให้ ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านเท่ามีพื้นที่ 20 ตารางหน่วย มุม BAD กาง 120 องศา ถ้า AB ยาว 5 หน่วย แล้ว เส้นรอบรูปของสี่เหลี่ยมรูปนี้มีความยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 18 2. 20 3. $10 + 8\sqrt{3}$ 4. $10 + \frac{16}{\sqrt{3}}$

109. เซตคำตอบของอสมการ $(\frac{1}{3})^{\log_2(x^2+2)} > (\frac{1}{3})^{\log_2(4x-1)}$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(\frac{1}{4}, 2)$ 2. $(1, 3)$

3. $(-\infty, \frac{1}{4}] \cup [2, \infty)$ 4. $(-\infty, 1] \cup [3, \infty)$

110. ผลคูณของคำตอบของสมการ $\arctan(3x^2 + 1) = 2\arctan\frac{1}{2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{9}$ 2. $-\frac{4}{3}$ 3. $\frac{1}{9}$ 4. $\frac{4}{3}$

111. ค่าของ $\sin(\arcsin\frac{5}{13} + \arccos\frac{4}{5})$ เท่ากับเท่าไร

1. $\frac{48}{65}$ 2. $\frac{52}{65}$ 3. $\frac{56}{65}$ 4. $\frac{63}{65}$

112. กำหนดจำนวนเชิงซ้อน 2 + i และ 1 – 3i เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ เมื่อ a , b , c และ เป็นจำนวนจริง ค่าของ a + b + c + d เท่ากับเท่าใด

1. 15 2. 17 3. 23 4. 29

113. กำหนด $z_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ และ $z_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

ถ้า $a = z_1^5 + z_2^5$ และ $b = z_1^6 + z_2^6$ แล้วจะได้ว่า $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 2 3. 4 4. 5

114. ถ้า $A = \{z \in C \mid |z| = 3\}$ และ $B = \{z - 2 \mid z \in A\}$ โดยที่ C คือ เซตของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า $A \cap B$ เป็นสับเซตของข้อใด

1. $\{(x + yi) \in C \mid x , y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 9\}$
2. $\{(x + yi) \in C \mid x , y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 64\}$
3. $\{(x + yi) \in C \mid x , y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 65\}$
4. $\{(x + yi) \in C \mid x , y$ เป็นจำนวนจริง และ $x^4 + y^4 = 81\}$

115. ใน $\triangle$ ABC ถ้าอัตราส่วน cosA : cosB : cosC = 2 : 9 : 12

แล้ว sinA : sinB : sinC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 : 9 : 2 2. 3 : 2 : 1 3. 9 : 7 : 5 4. 6 : 5 : 4

116. ค่าของ arcsin(cos(arcsinx)) + arccos(sin(arccosx)) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

117. นักเรียนห้องหนึ่งมี 60 คน เป็นชายและหญิงจำนวนเท่ากัน ในการสอบวิชาภาษาไทย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนหญิงเป็น 3 เท่าของค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนนักเรียนชาย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนนักเรียนหญิงและของคะแนนนักเรียนชายเท่ากับ 5 และ 4 ตามลำดับ ความแปรปรวนรวมมีค่าอยู่ระหว่าง 16 และ 25 คะแนน คะแนนแต่ละกลุ่มมีการแจกแจงแบบปกติ

ให้ x_1 , x_2 , x_3 แทนคะแนนที่เป็น ตำแหน่งเปอร์เซ็นไทล์ที่ 95 ของคะแนนนักเรียนหญิง ของคะแนนนักเรียนชายและของคะแนนนักเรียนทั้งห้องตามลำดับ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $x_1 < x_2 < x_3$ 2. $x_1 < x_3 < x_2$ 3. $x_2 < x_3 < x_1$ 4. $x_3 < x_2 < x_1$

118. ผลบวกของค่า x ทั้งหมดที่สอดคล้องสมการ $2^{-\frac{2}{3x}} - 2^{1+x^2+x^4+\cdots} = 0$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-1 , -\frac{2}{3})$ 2. $(-\frac{2}{3} , \frac{2}{3})$ 3. $(\frac{2}{3} , 1)$ 4. $(1 , 3)$

119. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องสมการ $2^{x+y} + i(x - y) = 3 + 2i$

แล้ว $4^x + 4^y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{4}$ 2. 6 3. 12 4. $\frac{51}{4}$

120. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะบวก และ m , n เป็นจำนวนเต็ม ถ้า $x+3$ หาร x^3+mx^2+nx+p ลงตัว และ $x-1$ หาร x^3+mx^2+nx+p เหลือเศษ 4 แล้ว m และ n มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $m=4, n=-4$ 2. $m=2, n=-2$
3. $m=-4, n=4$ 4. $m=-2, n=2$

121. ถ้า $A=\{(x,y) \mid 0<x\le\pi, 0<y\le\pi, \cos(x+y)\ge 0, \sin(x+y)\le 0\}$ แล้ว A คือเซตใด

1. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2}-x\le y\le 2\pi-x, x\le\pi\}$
2. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{2}-x\le y\le \pi, x\le\pi\}$
3. $\{(x,y) \mid 0\le y\le 2\pi-x, x>0\}$
4. $\{(x,y) \mid \frac{3\pi}{4}\le x\le\pi, \frac{3\pi}{4}\le y\le\pi\}$

122. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่มีค่าสอดคล้องกับสมการ $(2\log_3 0.5)\log_{0.5}x=\log_3 4$ และ $3^{y-1}=2^{2y-3}$ แล้ว x และ y เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $0<y<x$ 2. $0<x<y$
3. $y<0<x$ 4. $0<x=y$

123. ค่าของ x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $[\log_3 x-\log_{3^2} x+\log_{3^4} x-\log_{3^8} x+\ldots]<1$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $0<x<\sqrt{3}$ 2. $x>\sqrt{3}$ 3. $0<x<3\sqrt{3}$ 4. $x>3\sqrt{3}$

124. กำหนดให้ $y=\sqrt{2^{2x}+2^{-2x}+2}$ เมื่อ $x\ge 0$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\log_2(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$ 2. $\log_2(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2})$
3. $\log(\frac{y+\sqrt{y^2-4}}{2})$ 4. $\log(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2})$

125. เซตคำตอบของอสมการ $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\ldots+\frac{1}{\log_9 x}+\frac{1}{\log_{10} x}\le 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0,1)$ 2. $[10!, \infty)$
3. $(0,1)\cup[10!, \infty)$ 4. $(0,1)\cup[1,\infty)$

126. ถ้า C เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุด A(3 , – 1) และ B(– 1 , 3) แล้วเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\overline{AC}\cdot\overline{CB}$ และมีทิศทางเดียวกับ $\overline{AB}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-4\bar{i}+4\bar{j}$ 2. $4\bar{i}-4\bar{j}$
3. $-4\sqrt{2}\bar{i}+4\sqrt{2}\bar{j}$ 4. $4\sqrt{2}\bar{i}-4\sqrt{2}\bar{j}$

127. กำหนดให้ $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งมีสมบัติ $|\bar{u}| = |\bar{w}|$ และ $|\bar{u}-\bar{v}| = |\bar{v}-\bar{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $\frac{\pi}{5}$ แล้วมุมระหว่าง $\bar{v}$ และ $\bar{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\pi}{5}$ 3. $\frac{4\pi}{5}$ 4. $\frac{6\pi}{5}$

128. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ และ E ที่ทำให้ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$ ถ้า $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA}$ เมื่อ a , b เป็นค่าคงตัว แล้ว b – a คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. 2 3. 3 4. 5

129. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใดๆ และ E ที่ทำให้ $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{BA}$ ถ้า $\overrightarrow{BE} = a\overrightarrow{CB} + b\overrightarrow{CA}$ เมื่อ a , b เป็นค่าคงตัว แล้ว b – a คือค่าในข้อใดต่อไปนี้

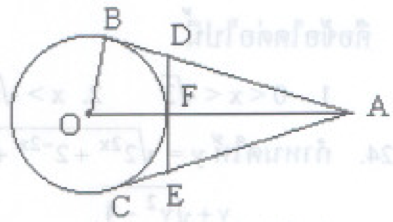
1. -1 2. 2 3. 3 4. 5

130. $A = \{(x , y) \mid y = -4^{-x}$ และ $y = \cos 4x$ เมื่อ $x \in [0 , 4\pi]\}$ A มีสมาชิกกี่ตัว

1. 4 ตัว 2. 8 ตัว

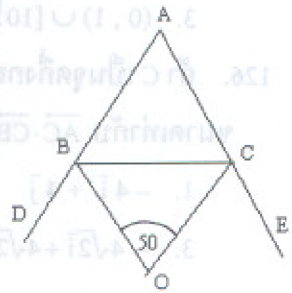
3. 10 ตัว 4. มากกว่า 10 ตัว

131. กำหนดให้ A เป็นจุดภายนอกวงกลมที่มี O เป็นจุดศูนย์กลาง $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด B และ C ตามลำดับ ลาก $\overline{AO}$ ตัดวงกลมที่ F และจากจุด F ลากเส้นสัมผัสวงกลมตัด $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ที่ จุด D และ E ตามลำดับ ถ้ารัศมีของวงกลมยาว 7 เซนติเมตร และ AF ยาว 18 เซนติเมตร แล้วความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ADE มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้



1. 24 เซนติเมตร 2. 25 เซนติเมตร 3. 48 เซนติเมตร 4. 50 เซนติเมตร

132. ให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ รูปหนึ่งต่อด้าน $\overline{AB}$ และ $\overline{AC}$ ออกไปทาง B และ C ถึง D และ E ตามลำดับ OB และ OC เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุม $C\hat{B}D$ และ $B\hat{C}E$ ถ้า $B\hat{O}C = 50^\circ$ แล้วขนาดของ $B\hat{A}C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้



1. 80° 2. 70°

3. 60° 4. 45°

133. ถ้า $3x^2 - 13x + 4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3 + ax^2 + bx - 8$ ค่าของ $a + b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. -49 2. -11 3. 22 4. 49

134. ค่าของ $\tan^{-1}2 + \tan^{-1}3$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{\pi}{4}$ 2. $-\frac{3\pi}{4}$ 3. $\frac{\pi}{4}$ 4. $\frac{3\pi}{4}$

135. กำหนด $A = \{x \in R \mid 3^{x-6} = 2^{x-2} \cdot 3^{-x}\}$ A เป็นสับเซตของเซตคำตอบของอสมการข้อใด

1. $\log(x-2) < 0$ 2. $\log(x+2) < -1$ 3. $\log(x-1) < 0$ 4. $\log(x+1) < 1$

136. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมรูปหนึ่งที่มีสมบัติว่า $6\sin A = 4\sin B = 3\sin C$ แล้ว $\cos C$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{3}{4}$

137. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ ผลบวกของเซตคำตอบของสมการ $\det(A - xI_3) = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -1 2. 3 3. -3 4. 5

138. ในสามเหลี่ยม ABC ถ้า $(a - b + c)(a + b + c) = ac$ แล้วขนาดของมุม B เท่ากับกี่องศา

1. 30 2. 60 3. 120 4. 150

139. กำหนดให้ $A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ 2×2 ที่สอดคล้องสมการ $BA^{-1} = A^t$ แล้ว B คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

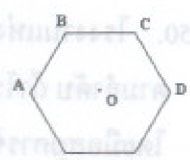
140. ให้ $a = 0.9$, $b = a^a$ และ $c = a^b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $a < b < c$ 2. $b < a < c$ 3. $a < c < b$ 4. $b < c < a$

141. กำหนด ΔABC มี $\hat{A} = 40^\circ$ และ $\hat{B} = 80^\circ$ ค่าของ $\frac{\sin\hat{A} + \sin\hat{B} + \sin\hat{C}}{\cos\hat{A} + \cos\hat{B} + \cos\hat{C}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{3}$ 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ 3. $3\sqrt{3}$ 4. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

142. กำหนด ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า และมี O เป็นจุดศูนย์กลางของรูปหกเหลี่ยม(ดังรูป) กำหนดความยาว AO เท่ากับ 2 เซนติเมตร เวกเตอร์ในข้อใดมีขนาดใหญ่กว่า 4 เซนติเมตร



1. $\overline{AD} + \overline{FD}$ 2. $\overline{AB} + \overline{ED}$ 3. $\overline{FO} + \overline{DO}$ 4. $\overline{OD} + \overline{OB}$

143. กำหนดให้ $\sin(45^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = a$ ค่าของ $2\sin(45^\circ + x)\sin(45^\circ - x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $a^2 + 1$ 2. $a^2 - 1$ 3. $1 - a^2$ 4. $\sqrt{1-a^2}$

144. ถ้า $\tan x = \frac{1}{3}$ แล้ว $\sin 4x$ มีค่าเท่ากับค่าใดต่อไปนี้

1. -1 2. 1 3. $-\frac{24}{25}$ 4. $\frac{24}{25}$

145. ให้ $f(x) = \arcsin x$, $g(x) = \cos x$ และ $h(x) = (f \circ g)(x)$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. โดเมนของ h คือเซตของจำนวนจริง และ $g(\frac{\pi}{2} - h(x)) = g(x)$

ข. h เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

146. $\{\cos A \mid 0 \le A \le \frac{4\pi}{3}$ และ $5 - 3\sin 3A$ มีค่ามากสุด $\}$ เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 2. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\}$ 3. $\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$ 4. $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$

147. ให้ O เป็นจุดกำเนิด A เป็นจุดบนแกน X และ B เป็นจุดบนระนาบซึ่งทำให้เส้นตรง OB มีความชันเท่ากับ 2 และเส้นตรง AB มีความชันเท่ากับ 1 ถ้า $\theta = A\hat{B}O$ แล้ว $\sec^2\theta$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{10}{9}$ 2. $\frac{11}{9}$ 3. 10 4. 11

148. กำหนดให้ a , b เป็นคำตอบของสมการ $\log_3 x + 6\log_x 3 = 5$ โดยที่ $a < b$

ถ้า $A = \{x \in I^+ \mid x \in [a, b]$ และ $3 \mid x\}$ เมื่อ I^+ เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก

แล้ว A มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 7 3. 18 4. 19

149. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 5 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det A = -1$ และ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 แล้ว $\det(2(I - A)A^t)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 4 2. 8 3. 12 4. 18

150. โรงงานแห่งหนึ่งต้องการผลิตสินค้า A และ B โดยที่มีราคาขายต่อชิ้นเป็น 10 และ 15 บาท ตามลำดับ ถ้าโรงงานนี้ผลิตสินค้า A ได้ x ชิ้น และผลิตสินค้า B ได้ y ชิ้น

โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้ $x \ge 0, 0 \le y \le 5, x + y \le 10, 2x + y \le 16$

แล้วโรงงานจะขายสินค้าได้เงินมากที่สุดเป็นจำนวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120 บาท 2. 125 บาท 3. 130 บาท 4. 150 บาท

151. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $\overrightarrow{OA} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\bar{i} - 2\bar{j}$ จากจุด A ลากเส้นตรงไปตั้งฉากกับ OB ที่ จุด D แล้ว $\overrightarrow{OD}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$ 2. $\frac{7}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$

3. $\frac{8}{\sqrt{29}}(5\bar{i} - 2\bar{j})$ 4. $\frac{8}{29}(5\bar{i} - 2\bar{j})$

152. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ทำมุมกัน 60° และ $|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{37}$, $|\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{13}$ แล้ว $|\bar{u}|+|\bar{v}|$ เท่ากับเท่าใด

1. 5 2. 7 3. $\sqrt{37}$ 4. $\sqrt{50}$

153. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $A = \{x \in R \mid (1+i)x^3 - (1+2i)x^2 - (1+i)x - (1+2i) = 0\}$ แล้ว $A \subseteq [-1.5 , 1.5]$

ข. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z^6 = \frac{1}{8}i$ แล้ว $|\bar{z}|$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

154. ถ้า $z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว z^{17} อยู่ในควอดรันต์ในข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

155. ให้ Q(0 , 0) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งมีรัศมี a หน่วย ℓ เป็นเส้นตรงที่ลากผ่านจุด Q และทำมุมกับแกน X เป็นมุม θ ในทิศทางบวก จุดที่ ℓ ตัดกับวงกลม คือข้อใดต่อไปนี้

1. $(\cos\theta , \sin\theta)$ กับ $(-\cos\theta , -\sin\theta)$ 2. $(a\cos\theta , a\sin\theta)$ กับ $(-a\cos\theta , -a\sin\theta)$

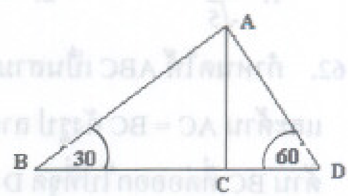
3. $(\sin\theta , \cos\theta)$ กับ $(-\sin\theta , -\cos\theta)$ 4. $(a\sin\theta , a\cos\theta)$ กับ $(-a\sin\theta , -a\cos\theta)$

156. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABD ซึ่งมีมุม ABD = 30°

มุม ADB = 60° ดังรูป

และด้าน AC ตั้งฉากกับด้าน BD โดยที่ BC ยาว 12 หน่วย

พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABD คือ ข้อใดต่อไปนี้



1. $16\sqrt{3}$ 2. $21\sqrt{3}$ 3. $28\sqrt{3}$ 4. $32\sqrt{3}$

157. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ก. $(\cos 1^\circ)^2 < (\cos 1^\circ)^3$

ข. $2^{\sin\frac{\pi}{6}} < 2^{\sin\frac{\pi}{3}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

158. ให้ A , B และ C เป็นเมตริกซ์ซึ่งมิใช่เอกฐาน มิติ 2×2 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $\det(B - C) = 0$ แล้ว $\det B = \det C$

ข. ถ้า $\det(A^{-1}B) = \det C$ แล้ว $\det B = \det(AC)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

159. เงินเดือนคนงานของโรงงานหนึ่ง เฉลี่ยต่อคนมีค่าเท่ากับ 6000 บาทต่อเดือน สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของเงินเดือนเท่ากับ 12 เปอร์เซ็นต์ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเงินเดือนของคนงานมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 600 บาท 2. 650 บาท 3. 700 บาท 4. 720 บาท

160. ให้ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเกรดเฉลี่ยสะสม ตั้งแต่ ม.4 ถึง ม.6 ของสมศักดิ์ สมศรี และสมสวย ดังตาราง

ชื่อ	หน่วยกิตที่เรียน	เกรดเฉลี่ยสะสม
สมศักดิ์	124	2.5
สมศรี	125	-
สมสวย	121	3.00

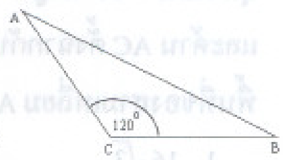
ถ้า $\bar{x} = 2.60$ แล้วสมศรีมีเกรดเฉลี่ยสะสม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2.21 2. 2.31 3. 2.41 4. 2.61

161. กำหนดให้ $\cot\theta = 2$ และ $\sin\theta < 0$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ 2. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $-\frac{2}{5}$

162. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยที่มุม ACB = 120° และด้าน AC = BC ดังรูป ลากเส้นตรงจาก A มาตั้งฉากกับด้าน BC ที่ต่อออกไปที่จุด D ถ้า AD ยาว 3 หน่วย แล้วความยาวของเส้นรอบรูป สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\frac{3}{2} + 3\sqrt{3}$ 2. $6 + 3\sqrt{3}$ 3. $\frac{3}{2} + 4\sqrt{3}$ 4. $6 + 4\sqrt{3}$

163. เส้นตรงที่ผ่านจุด (2 , −1) และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y = 4$ ตัดกับแกน Y ที่จุด P(x , y) ที่จุด P(x , y)จุดนั้น y มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1}{2}$

164. ถ้า A เป็น 2×2 เมทริกซ์ ซึ่งมิใช่เอกฐานและ $\begin{bmatrix} 60 & 20 \\ 30 & 40 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

แล้ว A^{-1} คือเมทริกซ์ในตัวเลือกใด

1. $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 9 & -18 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 12 & 20 \\ 30 & 8 \end{bmatrix}$

165. กราฟของ $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ และ $y = 2^{-x}$ ตัดกันเมื่อ x มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $[0, \frac{1}{4}]$ 2. $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ 3. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ 4. $(\frac{3}{4}, \infty)$

166. กำหนด $x > 0, y > 0$ และ $xy \neq 1$

ถ้า $\log_{xy} x = 9$ แล้วค่าของ $\log_{xy} x(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{y^3}})$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 8 3. 6 4. 21

167. กำหนด $a > 0, x > 0, x \neq 1, a \neq 1$ ค่าของ $\dfrac{1-(\log_a x)^3}{[\log_a x + \log_x a + 1]\log_a(\frac{a}{x})}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\log_a x$ 2. $\log_x a$ 3. $\log a$ 4. $\log x$

168. ถ้า $\cos^8 A - \sin^8 A = \frac{5}{27}$ แล้วค่าของ cos2A เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

169. กำหนด $\cot 2A = 2$ ค่าของ $\dfrac{\sin 3A + \sin 4A + \sin 5A}{\cos 3A + \cos 4A + \cos 5A}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{4}{3}$ 2. 1 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

170. กำหนด $\sin 2A = \frac{3}{4}$ ค่าของ $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{7}}{20}$ 2. $-\frac{\sqrt{7}}{20}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{10}$ 4. $-\frac{\sqrt{3}}{10}$

171. เซตคำตอบของอสมการ $\sqrt{3}\cos x + \sin x > 0$ เมื่อ $-\pi \leq x \leq \pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid -\pi \leq x < -\frac{\pi}{3}$ หรือ $\frac{2\pi}{3} < x \leq \pi\}$ 2. $\{x \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\}$

3. $\{x \mid -\frac{2\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$ 4. $\{x \mid -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}\}$

172. ค่าของ $\arcsin(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{5\pi}{12})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{\pi}{2}$ 3. $\frac{\pi}{3}$ 4. $\frac{\pi}{4}$

173. กำหนด $4\sin^2 x - 6\tan x + 2\sec^2 x = 0$ โดยที่ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan(\frac{\pi}{3} + x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$ 2. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$ 3. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4. -1

174. กำหนด $\sin A - \sin 2A + \sin 3A$ โดยที่ $0 < A < \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan A - \tan 2a + \tan 3A$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\sqrt{3}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $2\sqrt{3}$ 4. $-2\sqrt{3}$

175. ถ้า $(\log_y x)(\log_z y)(\log_{25} z) = \log_5 125$ แล้วค่าของ x เท่ากับเท่าใด

1. 5^3 2. 5^6 3. 5^9 4. 6^5

176. กำหนด $2\arcsin a + \arcsin(2a\sqrt{1-a^2}) = \frac{\pi}{3}$ ค่าของ arcsin a มีค่าอยู่ในช่วงใด

1. $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4})$ 2. $[-\frac{\pi}{4}, 0)$ 3. $[0, \frac{\pi}{4})$ 4. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$

177. จำนวนเชิงซ้อน z ซึ่ง $\left|\frac{z+1}{z+(3-2i)}\right| = 1$ และ $z\bar{z} = 29$ คือจำนวนในข้อใด

1. $-5 \pm 2i$ 2. $5 \pm 2i$ 3. $-2 \pm 5i$ 4. $2 + 5i, -5 - 2i$

178. ฟังก์ชันในตัวเลือกใดเป็นฟังก์ชันลดบนโดเมนที่เป็นเซตจำนวนจริง

1. $f(x) = (\sin 45^\circ)^{-x}$ 2. $g(x) = (\log 7)^x$
3. $h(x) = (\frac{1}{2})^{-x}$ 4. $r(x) = \pi^x$

179. กำหนด $x = \log\sqrt[3]{(9^{-1})(27)^{-\frac{4}{3}}}$ และ $y = \log\frac{25}{8} - 2\log\frac{5}{3} + \log\frac{24}{9}$

ค่าของ $\frac{x}{y}$ ที่ได้จากสมการที่กำหนดให้มีค่าเท่ากับค่าในตัวเลือกใดต่อไปนี้

1. -2 2. -1 3. 1 4. 2

180. กำหนด ABCD เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีพิกัดของจุด A เป็น $(-1, 2)$

และ กำหนด $\overrightarrow{AB} = 9\bar{i} + 4\bar{j}$, $\overrightarrow{AD} = \bar{i} + 5\bar{j}$ พิกัดของจุด C คือข้อใด

1. $(7, 11)$ 2. $(8, 11)$ 3. $(9, 11)$ 4. $(8, 9)$

181. $A(1, 2), B(4, 3), C(3, 5)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC แล้ว $\sin^2\frac{B}{2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{50}-1}{4\sqrt{50}}$ 2. $\frac{\sqrt{50}+1}{4\sqrt{50}}$ 3. $\frac{\sqrt{50}+1}{2\sqrt{50}}$ 4. $\frac{\sqrt{50}-1}{2\sqrt{50}}$

182. ค่าของ $\sin(\frac{\arctan\frac{3}{4}}{2}) + \cos(2\arcsin\frac{3}{5})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{6}{25}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{6}{25}$ 3. $\frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{7}{25}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{7}{25}$

183. จำนวนจริง x ที่เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{15}-\sqrt{x}=\sqrt{22-2\sqrt{105}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8

184. ผลบวกของคำตอบของสมการ $3^{(1+\sqrt{x^2+x-2})}+9[3^{-(1+\sqrt{x^2+x-2})}]=28$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 1 2. 0 3. –1 4. 2

185. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

ถ้า $U=\{x\in R \mid |2^{x+2}-10|>6\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\exists x[3^x=(\frac{1}{3})^x]$ 2. $\forall x[3^x>(\frac{1}{3})^x]$ 3. $\exists x[3^x<(\frac{1}{3})^x]$ 4. $\exists x[3^x+(\frac{1}{3})^x=2]$

186. ถ้า $|\bar{u}|=4$, $|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=6$ แล้ว $|\bar{v}-\bar{u}|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 14 3. 11 4. $\frac{11}{2}$

187. กำหนด $4\sin^2x+11\cos x-1=0$

แล้ว $\cot^2(x+\frac{\pi}{2})+\sec(x-3\pi)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 11 3. 15 4. 19

188. กำหนดสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้าน มีด้าน AB ยาว $\sqrt{12}$ หน่วย ด้าน AC ยาว $\sqrt{8}$ หน่วย มุม B กาง 45 องศา พื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ 2. $2(\sqrt{3}+1)$ 3. $\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)$ 4. $\sqrt{3}+1$

189. กำหนดให้ $A=\{x \mid x\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ และ $\sin^6x+\cos^6x=\frac{1}{4}\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดใน A มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4π 2. $\frac{7\pi}{3}$ 3. $\frac{9\pi}{4}$ 4. $\frac{13\pi}{6}$

190. ข้อมูลจากตารางมีส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของคะแนนสอบคณิตศาสตร์ มีค่าเท่ากับเท่าใด

คะแนน	ความถี่สะสม
51 – 60	4
41 – 50	14
31 – 40	26
21 – 30	34
11 – 20	40

1. 10.5 2. 10 3. 9.5 4. 0.27

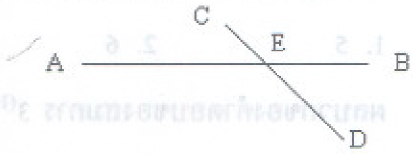
191. ค่าของ $\sin\frac{15\pi}{34}\sin\frac{13\pi}{34}\sin\frac{9\pi}{34}\sin\frac{\pi}{34}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{12}$ 2. $\frac{1}{16}$ 3. $\frac{1}{24}$ 4. $\frac{1}{32}$

192. จากรูป ให้ $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

ถ้า $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{DB}$

แล้ว $m-n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้



1. $\frac{1}{15}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

193. คะแนนสอบของนักเรียน 200 คน มีการแจกแจงปกติ ถ้าสัมประสิทธิ์การแปรผัน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเป็น 0.45 และ 40 ตามลำดับ นักเรียนที่สอบได้คะแนนระหว่าง 31 – 35.5 คะแนน คิดเป็นร้อยละเท่าใด

กำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ $z=0$ ถึง $z=0.25$ เท่ากับ 0.0987

$z=0$ ถึง $z=0.5$ เท่ากับ 0.1915

$z=0$ ถึง $z=0.75$ เท่ากับ 0.2734

1. 29.02 2. 27.34 3. 18.56 4. 9.28

194. กราฟของ $y=2^{-x}$ และ $y=\sin 2x$ ตัดกันกี่ครั้งบนช่วง $[0, 4\pi]$

1. 4 2. 6 3. 8 4. เกิน 8 ครั้ง

195. กำหนด $a, b \in R^{+}-\{1\}$ และสอดคล้องสมการ $a^{2b}=b^{3a}$ และ $a^{10}=b^{12}$

ค่าของ $\frac{a}{b}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. 2

196. กำหนด $a, b \in R^{+}-\{1\}$ ถ้า $(\log_{10}ab)(\log_{a}10b)(\log_{b}10a)=0$

แล้ว $(\log_{10}ab)+(\log_{a}10b)+(\log_{b}10a)$ มีค่าของเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 0 3. 2 4. -2

197. กำหนด $a^{2n}=3$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็ม

แล้ว $\frac{a^{3n}+a^{-3n}+a^{5n}+a^{-5n}}{a^{n}+a^{-n}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{10}{3}$ 2. $\frac{28}{9}$ 3. $\frac{29}{3}$ 4. $\frac{82}{9}$

198. กำหนด $w=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$ ค่าของ $\frac{1}{2^{25}}(2\overline{w}-w^{3})^{10}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{32}+\frac{1}{32}i$ 2. $\frac{1}{32}-\frac{1}{32}i$ 3. $\frac{1}{32\sqrt{2}}+\frac{1}{32\sqrt{2}}i$ 4. $\frac{1}{32\sqrt{2}}-\frac{1}{32\sqrt{2}}i$

199. ข้อมูลชุด X เป็นดังนี้ $3, -1, 6, 6, 12, 0, 2, 5, 9, 2$
ถ้าข้อมูลชุด Y สัมพันธ์กับข้อมูลชุด X ในรูป $Y = 2X + 5$ แล้ว ความแปรปรวนของข้อมูลชุด Y เท่ากับเท่าใด

1. 72 2. 64 3. 36 4. 25

200. ค่าสูงสุดของ $f(x) = \sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4}$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{5}{4}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{4}$

เฉลยคำตอบ โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 – 10	4	3	1	4	2	1	2	1	4	2
11 – 20	4	1	3	2	3	1	2	4	2	4
21 – 30	2	1	2	3	3	2	4	2	1	4
31 – 40	3	4	3	3	4	4	2	1	4	2
41 – 50	3	4	2	2	4	1	4	4	3	3
51 – 60	4	4	1	4	2	4	4	1	3	4
61 – 70	3	1	2	1	2	2	2	3	4	1
71 – 80	3	3	4	1	4	4	4	1	1	3
81 – 90	4	2	3	2	3	1	1	3	1	3
91 – 100	1	4	1	2	2	3	1	3	2	1
101 – 110	3	3	2	1	3	1	1	4	2	1
111 – 120	3	2	4	3	4	3	3	2	4	2
121 – 130	2	2	3	1	3	3	2	2	2	1
131 – 140	3	1	3	4	4	2	1	3	3	3
141 – 150	1	1	2	4	2	2	1	2	4	2
151 – 160	2	2	1	3	2	4	3	3	4	2
161 – 170	2	4	3	3	2	4	1	1	1	2
171 – 180	2	1	1	3	2	3	4	2	1	1
181 – 190	4	3	3	1	3	2	4	3	3	3
191 – 200	2	2	4	3	3	4	4	4	1	1

การหาคำตอบข้อสอบ ENTRANCE ด้วย MATHCAD

โปรแกรมสำเร็จรูป Mathcad เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่มีความสามารถในการคำนวณทางคณิตศาสตร์ที่เก่งมากๆ ทั้งในระดับ ม.ปลาย ระดับอุดมศึกษา และคณิตศาสตร์ขั้นสูงขึ้นไป ตัวอย่างการหาคำตอบ **คณิตศาสตร์** Entrance **มีนาคม** 2543

คณิตศาสตร์ 1 ข้อ 8.

$\sec\left[\frac{1}{2}(\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5})\right]+\tan\left[\frac{1}{2}(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{4}{5})\right]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{2}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $1+\sqrt{2}$ 4. $2+\sqrt{3}$

การคำนวณด้วย Mathcad เราสามารถพิมพ์ค่าออกมาดูได้ทันที

$$\boxed{\sec\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{asin}\left(\frac{3}{5}\right)+\operatorname{acos}\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right]+\tan\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\operatorname{asin}\left(\frac{4}{5}\right)+\operatorname{acos}\left(\frac{4}{5}\right)\right)\right]=2.414}$$

เพราะฉะนั้นคำตอบต้องเป็นตัวเลือก 3.

คณิตศาสตร์ 2 ข้อ 20. $\lim\limits_{h\to 2}\frac{2+h-h^2}{2-h}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 2 3. 0 4. ∞

การคำนวณด้วย Mathcad เราสามารถคำนวณค่าได้ทันทีดังนี้

$$\boxed{\lim_{h\to 2}\frac{2+h-h^2}{2-h} \quad (3)}$$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือตัวเลือก 3.

คณิตศาสตร์ 1 ข้อ 2.

ถ้า x เป็นรากของสมการ $2^{3x-1}\cdot 6^x\cdot 25^{5x-1}=75^x$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

การคำนวณด้วย Mathcad เราสามารถเราใช้คำสั่งการหารากช่วยหาคำตอบได้เลย

$$x := 1$$

$$\operatorname{root}\left(2^{3\cdot x-1}\cdot 6^x\cdot 25^{5\cdot x-1}-75^x, x\right)=0.25$$

เพราะฉะนั้นคำตอบคือ x = 0.25

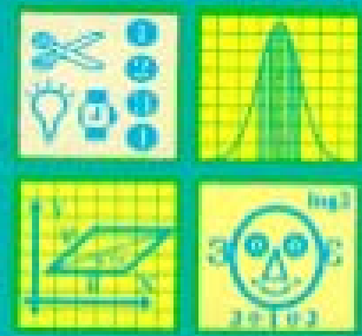
สนใจการใช้งานโปรแกรม MATHCAD หาต้องอ่านหนังสือคู่มือ MATHCAD

หาซื้อหนังสือ คู่มือ MATHCAD ได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 22

คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 5

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 5



คณิตศาสตร์ ปรนัยเล่ม 22
ISBN 974-334-840-5
C112
7010