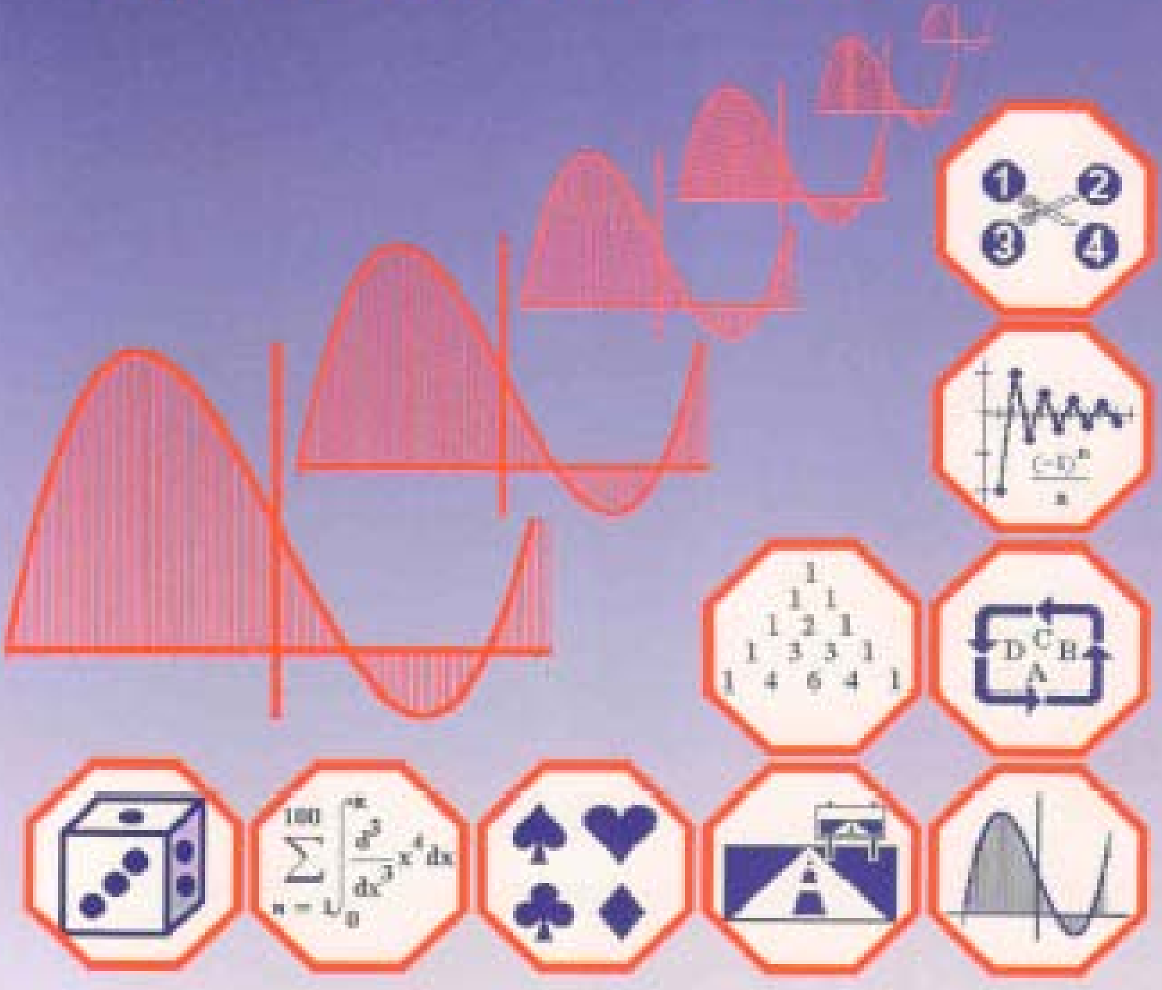
คู่มือตัดตัวเลือก
คณิตศาสตร์ ม.๖
สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม.๖



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 23

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 23

คู่มือตัดตัวเลือก

คณิตศาสตร์ ม. 6

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 6

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 23
คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม. 6 สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 6

ผู้เขียน รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

พิมพ์ครั้งที่ 1 ตุลาคม พ.ศ. 2543

ข้อมูลบรรณานุกรมของหอสมุดแห่งชาติ.

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่ม 23 : คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม.6 สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม.6. -- กรุงเทพฯ : จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2543.

288 หน้า.

1. คณิตศาสตร์. I. ชื่อเรื่อง

515.

ISBN 974 – 346 – 539 – 1

จัดจำหน่ายโดย ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
ศาลาพระเกี้ยว โทร. 218 – 7000 โทรสาร 255 – 4441
สยามสแควร์ โทร. 218 – 9888 โทรสาร 254 – 9495
http://www.cubook.com หรือ http://www.chulabook.com
e – mail: cubook@chula.ac.th

พิมพ์ที่ โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2183563 - 4, 2153612
http://www.cuprint.chula.ac.th

คำนำ

หนังสือ คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 23 คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม. 6. สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม. 6 ผู้เขียนได้ทำการสรุปเนื้อหาจากหนังสือ คณิตศาสตร์ ค. 015 และ ค. 016 โดยมีเรื่องต่างๆ เช่น ลำดับและอนุกรม ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การอินทิเกรต วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล เลขดัชนี โดยจัดทำแต่ละบทในรูปแบบ

- ♠ สรุปเนื้อหาแต่ละเรื่อง
- ♥ เทคนิคการตัดตัวเลือกที่เหมาะสมตามเนื้อหา
- ♦ ตัวอย่างการทำโจทย์ข้อสอบโดยใช้ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
- ♣ ปัญหาถูกหรือผิดของเนื้อหาในแต่ละบท
- ♠ โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกอีก 190 ข้อเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกหัดทำ ตัวอย่างข้อสอบต่างๆ รวบรวมมาจากข้อสอบ คณิตศาสตร์ ๑ คณิตศาสตร์ ๒ คณิตศาสตร์ ก คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันต่างๆ

ข้อสอบชนิดที่เราสามารถตัดตัวเลือกได้ยังคงมีการออกข้อมาเรื่อยๆ ทั้งที่ผู้เขียนได้เขียนบทความและหนังสือต่างๆ เกี่ยวกับเรื่องแบบนี้มานานแล้ว นอกจากนั้นยังสรุปเป็นคู่มือตัดตัวเลือกภาค 1 , 2 และ 3 ข้อสอบแบบตัดตัวเลือกได้ก็ยังไม่หมดไปจากข้อสอบ อย่างไรก็ตาม **หนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์มากที่สุดนักเรียนต้องดู วิธีจริง และ วิธีตัดตัวเลือก ทั้งสองวิธีให้เข้าใจ เพราะว่า การตัดตัวเลือกจะช่วยให้ทำข้อสอบได้คะแนนเร็วขึ้น แต่วิธีจริงจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจหลักการและการใช้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาซึ่งจะมีประโยชน์ในการเรียนระดับสูงต่อไป**

พบกันใหม่ในคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มต่อไป

สวัสดีครับ

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม 4

เทคนิคการตัดตัวเลือกในหนังสือ คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม 4 จะทำให้นักเรียนสามารถทำข้อสอบ ENTRANCE บางปีได้คะแนนเกิน 7 คะแนนในเวลาไม่เกิน 3 นาที ตัวอย่างเช่น ข้อสอบ Entrance มีนาคม 2543

2. คำตอบของสมการ $|x-4| < |x+1|$ คือข้อใดต่อไปนี้ (2 คะแนน)

1. $x \ge \frac{3}{2}$ 2. $x > \frac{3}{2}$ 3. $x \le \frac{3}{2}$ 4. $x < \frac{3}{2}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $|\frac{3}{2} - 4| < |\frac{3}{2} + 1|$ ไม่จริง เพราะฉะนั้น $x = \frac{3}{2}$ ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. เพราะว่า x = 0 ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

13. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ เมื่อ R เป็นเซตของจำนวนจริง โดเมนของ r^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้ (3 คะแนน)

1. R 2. $R - \{0\}$ 3. $(0, \infty)$ 4. $[0, \infty)$

การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไข $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ จะเห็นได้ว่า y ต้องไม่เท่ากับ 0 ดังนั้น 0 ต้องไม่เป็นสมาชิกของ เรนจ์ของ r แต่ เรนจ์ของ r = โดเมนของ r^{-1} เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. จากเงื่อนไข $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \frac{1}{x}\}$ จะเห็นได้ว่า $y = -1$ ได้ เพราะฉะนั้น -1 เป็นสมาชิกของ เรนจ์ของ r และ เรนจ์ของ r = โดเมนของ r^{-1} เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

15. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2-x}{1-x}$ และ $g(x) = x - 3$ แล้ว $(fog)(1-x)$ คือข้อใดต่อไปนี้ (3 คะแนน)

1. $\frac{1-x}{3-x}$ 2. $\frac{5-x}{4-x}$ 3. $\frac{x+1}{x+2}$ 4. $\frac{x+4}{x+3}$

การตัดตัวเลือก โจทย์เป็นสูตรตัวเลือกเป็นสูตร แทนค่า x = 0 ในโจทย์และตัวเลือกจะได้

$$(fog)(1-x) = (fog)(1-0) = (fog)(1) = f(g(1)) = f(-2) = \frac{2-(-2)}{1-(-2)} = \frac{4}{3}$$

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{4}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

สารบัญ

คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม 5

เทคนิคการตัดตัวเลือกในหนังสือ คู่มือตัดตัวเลือก คณิตศาสตร์ ม 5. จะทำให้นักเรียนสามารถทำข้อสอบ ENTRANCE บางปี ได้คะแนนเกิน 7 คะแนนในเวลาไม่เกิน 3 นาที ตัวอย่างเช่น ข้อสอบ Entrance **มีนาคม** 2543

16. ถ้า $z_1 = \cos 12^\circ + i\sin 12^\circ$ และ $z_2 = -\cos 16^\circ - i\sin 16^\circ$ แล้ว $(\frac{z_1}{z_2})^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 2. $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 3. $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 4. $\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าตัวเลือกมีส่วนจริงไม่เหมือนกัน เพราะฉะนั้นคิดเฉพาะส่วนจริงก็พอ

$$\mathrm{Re}\frac{(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)^{15}}{(-\cos 16^\circ - i\sin 16^\circ)^{15}} = -\mathrm{Re}\frac{\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ}{\cos(240^\circ) + i\sin(240^\circ)} = -\cos(180+240)^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

17. ให้ z_1, z_2, z_3, z_4 เป็นรากของสมการ $z^4 + z^2 + 2 = 0$

$|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 4 3. $2^{\frac{5}{2}}$ 4. $2^{\frac{9}{4}}$

การตัดตัวเลือก โดยที่เราไม่ต้องคำนวณหาค่าจริงของ z_1, z_2, z_3, z_4

เพราะว่า $ax^2 + bx + c = 0$ มีรากเป็น $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

เพราะฉะนั้น $z^4 + z^2 + 2 = 0$, $|z^2| = \left|\frac{-1 \pm \sqrt{1-7}}{2}\right| = 2$ ดังนั้น $|z| = 2^{\frac{1}{4}}$

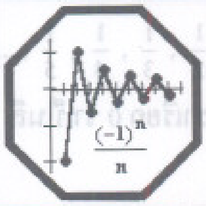
สรุป $|z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4| = 4(2^{\frac{1}{4}}) = 2^{\frac{9}{4}}$

14. ผลรวมของคำตอบของสมการ $2\sin^2 2x + 3\cos 2x - 3 = 0$ เมื่อ $0 \le x < 2\pi$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{6}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{\pi}{2}$ 4. $\frac{2\pi}{3}$

การตัดตัวเลือก $x = \pi$; $2\sin^2 2\pi + 3\cos 2\pi - 3 = 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือกทุกตัวทิ้งได้

หมายเหตุ คำตอบจริงคือ $x = 0$, π, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$ และ $\frac{11\pi}{6}$ รวมกัน เท่ากับ 5π



บทที่ 1
ลำดับและอนุกรม

1.1 สรุปเนื้อหา

1. **ลำดับ** คือ ฟังก์ชันชนิดหนึ่งที่มีโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนเต็มบวก N และเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง (เรจน์อาจเป็นเซตอื่นๆ ได้เช่น เซตของจำนวนเชิงซ้อนหากเราสนใจลำดับของจำนวนเชิงซ้อน) สัญลักษณ์ที่เรานิยมใช้แทนลำดับ คือ a_n โดยที่ a_n เรียกว่า พจน์ที่ n

ตัวอย่างเช่น $a : N \to R ; a(n) = n^2$

หมายเหตุ เราจะแทนลำดับ $a(n) = n^2$ ด้วย $a_n = n^2$

การเขียนลำดับอาจเขียนได้หลายแบบเช่น

1. เขียนแบบแจงสมาชิก $\{a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , ...\}$
2. เขียนเฉพาะสูตร $\{a_n = n^2\}$ หรือ $\{n^2\}$
3. เขียนเพียงสูตรอย่างเดียวเท่านั้นคือ n^2

2. **ลำดับจำกัดและลำดับอนันต์**

2.1 ลำดับจำกัด หมายถึง ลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1 , 2 , 3 , ... , n\}$

2.2 ลำดับอนันต์ หมายถึง ลำดับที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, 4, ...\}$

ตัวอย่าง $\{1^1 , 2^2 , 3^2 , ... , 10^2\}$ เป็นลำดับจำกัด

$\{1 , 3 , 5 , 7 , 9 , ...\}$ เป็นลำดับอนันต์

$\{1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...\}$ เป็นลำดับอนันต์

ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

ลำดับลู่เข้า หมายถึง ลำดับที่ a_n มีค่าเข้าใกล้ L เมื่อ n มีค่าเข้าใกล้ ∞ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

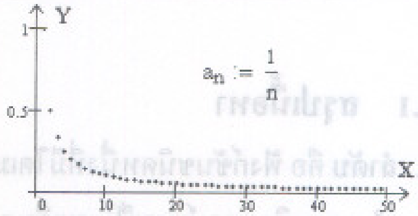
บทนิยามทางคณิตศาสตร์กล่าวว่า

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ก็ต่อเมื่อ $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists M > 0 \ ,[n > M \to |a_n - L| < \varepsilon]$

2.2.1 ลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือ ลำดับลู่เข้า

ลำดับคอนเวอร์เจนต์ คือลำดับอนันต์ที่เราหาลิมิตของลำดับได้ ตัวอย่างเช่น $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \ldots$ แต่ละพจน์ของลำดับจะมีค่าน้อยลงไปเรื่อยๆ แต่ไม่ต่ำกว่า 0 (น้อยลงใกล้ ๆ 0) เราเรียก 0 ว่าเป็นลิมิตและใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

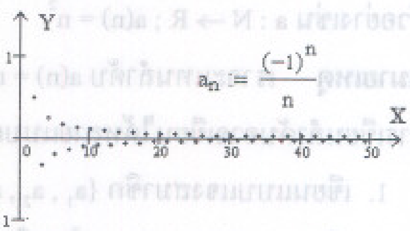
การหาลิมิตโดยดูจากกราฟ



จากกราฟจะเห็นว่า

$a_n = \frac{1}{n}$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากเข้าใกล้ ∞

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$



จากกราฟจะเห็นว่า

$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามากเข้าใกล้ ∞

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

2.2.2 ลำดับไดเวอร์เจนต์ หรือ ลำดับลู่ออก

ลำดับไดเวอร์เจนต์ คือ ลำดับอนันต์ที่ไม่สามารถหาลิมิตของลำดับได้

เช่นลำดับ $-1 , -2 , -3 , \ldots$ แต่ละพจน์จะมีค่าน้อยลงไปเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด

หรือลำดับ $2 , 4 , 6 , 8 , \ldots$ แต่ละพจน์จะมีค่าเพิ่มขึ้นไปเรื่อย ๆ โดยไม่มีที่สิ้นสุด

หมายเหตุ ลำดับไดเวอร์เจนต์มี 2 ลักษณะที่สำคัญคือ $\lim\limits_{n\to\infty}$ หาค่าไม่ได้แบบเป็น $\pm\infty$ หรือมีการสลับค่าไปมาเช่น $a_n = (-1)^n$, $a_n = (-1)^n(2n+1)$

3. เทคนิคการหาลิมิตของลำดับ

1. เศษส่วนของพหุนาม $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$ โดยที่ $\lim_{n\to\infty} p(n)=\infty$ และ $\lim_{n\to\infty} q(n)=\infty$

$p(n)=a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_0$ และ $q(n)=b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_0$

จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & k<m \\ \frac{a_k}{b_m} & k=m \\ \infty & k>m \end{cases}$

ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty} n^2+1=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^3-n^2+1}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+2n-1}=\frac{2}{3}$

หมายเหตุ ในกรณีที่กำลังของ n ในฟังก์ชัน p(n) และ g(n) เป็นจำนวนตรรกยะ เราสามารถหาค่าลิมิตโดยใช้แนวคิดแบบเดียว ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1}=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n}+1}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-1}{3\sqrt[3]{n}+4}=\frac{1}{3}$

2. หาตัวประกอบมาคูณบนและล่าง

ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{(n^2+n)-n^2}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+n}{\sqrt{n+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

3. ลิมิตในรูปแบบของตัวเลขยกกำลังเราจะใช้เหตุผลว่า $\lim_{n\to\infty} a^n=0$ เมื่อ $|a|<1$

$\lim_{n\to\infty} a^n=\infty$ เมื่อ $|a|>1$

ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}-1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}(3-\frac{1}{3^n})=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^{2n}+8^n+1}{4^{2n}+4^n+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{8}\right)^n+\left(\frac{1}{8}\right)^{2n}}{\left(\frac{4}{8}\right)^{2n}+\left(\frac{4}{8^2}\right)^n+\frac{4}{8^{2n}}} = \frac{1+0+0}{0+0+0}=\infty$$

4. ใช้การเปรียบเทียบค่า

ทฤษฎีบท ถ้า $c_n \le a_n \le b_n$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n$ ลู่เข้า , $\lim_{n\to\infty} c_n$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cos n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

วิธีทำ เพราะว่า $-1\le\cos n\le 1$

$$-\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\cos n \le \frac{1}{n}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cos n = 0$

5. รูปแบบเฉพาะของฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^k} = 0 \quad ; \quad k > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{a^n} = 0 \quad ; \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty \quad ; \quad a > 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \ ; \quad a > 1$$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \qquad \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{k}{n})^n = e^k$$

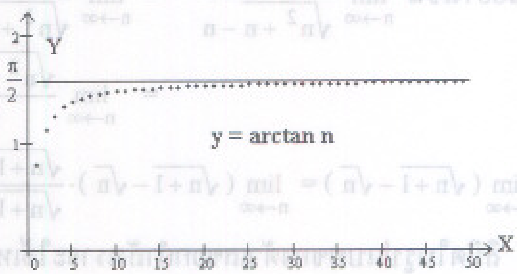
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$$

6. การหาค่าของลิมิตลำดับ โดยดูจากกราฟของฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$

โดยพิจารณาจากกราฟ

เมื่อ n มีค่ามากๆ arctan n มีค่าเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$



ลำดับย่อย

กำหนดลำดับ $\{a_n\}$ และลำดับของจำนวนเต็มบวก $\{n_k\}$

โดยที่ $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \ldots$; ($n_k < n_m$ ทุกค่า $k < m$)

ลำดับ $\{b_k\}$ ที่กำหนดโดย $b_k = a_{n_k}$ เราเรียกลำดับ $\{b_k\}$ ว่าเป็น **ลำดับย่อย** ของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง ลำดับ $\{a_n\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$ ลำดับย่อย $\{a_n\}$ มีได้หลายตัวเช่น

$n_k = 2k$; $\{b_k\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{a_2, a_4, a_6, \ldots\} = \{4, 8, 12, \ldots\}$

$n_k = k + 2$; $\{b_k\} = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\} = \{a_3, a_4, a_5, \ldots\} = \{6, 8, 10, \ldots\}$

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่าง ลำดับและลำดับย่อย

1. $\{b_k\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

2. ถ้า $\{c_k\}$, $\{b_k\}$ เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} c_k \ne \lim\limits_{n\to\infty} b_k$ แล้วลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการหาค่าของลิมิตของลำดับ กำหนดให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ (c เป็นค่าคงตัว)
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + M$, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - M$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = LM$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{a_n}{b_n}) = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} c\, a_n = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
6. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \pm\infty$ และ $d_n = \frac{c}{b_n}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$

ข้อควรจำ ลำดับ a_n (พจน์ที่ n) อยู่ในรูปของ $a_n = r^n$

กรณีที่ 1. ถ้า $-1 < r < 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

กรณีที่ 2. ถ้า $r = 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

กรณีที่ 3 ถ้า $r < -1$ หรือ $r > 1$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้

ตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2})^n = \infty$

4. ลักษณะที่สำคัญของลำดับไดเวอร์เจนต์ที่พบบ่อยๆ ในระดับ ม. ปลาย

1. แต่ละพจน์ของลำดับมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อยโดยไม่มีที่สิ้นสุด เช่น $2 , 4 , 6 , 8 , 10 , \ldots , 2^n , \ldots$

   จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

2. แต่ละพจน์ของลำดับมีค่าลดลงเรื่อยโดยไม่มีที่สิ้นสุด เช่น $-1 , -4 , -8 , \ldots , -2^n , \ldots$

   จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

3. ลำดับที่มีการสลับค่า เช่น $1 , -1 , 1 , -1 , \ldots$ ซึ่งจะพบว่า $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1 & \text{เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1 & \text{เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \end{cases}$

   ในลักษณะเช่นนี้เราสรุปได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า

ตัวอย่างเช่น $a_n = \cos n\pi$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า เพราะว่าเป็นลำดับที่มีการสลับค่า

$a_n = n^2$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ไม่มีค่า และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$

5. ลำดับที่สำคัญบางชนิด

1. ลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือลำดับที่ $a_n - a_{n-1}$ เป็นค่าคงตัว และเราเรียกค่าคงตัวว่าผลต่างร่วม

ให้ a แทนพจน์แรก และ d แทนผลต่างร่วม ลำดับเลขคณิตจะมีลักษณะดังนี้

$a , a + d , a + 2d , a + 3d , \ldots , a + (n - 1)d , \ldots$ พจน์ที่ n คือ $a_n = a + (n - 1)d$

ปัญหาพื้นฐานเกี่ยวกับลำดับเลขคณิต

1. กำหนดพจน์แรก a = 10 และผลต่างร่วม d = 12 จงหาพจน์ที่ 20

วิธีทำ $a_{20} = a + (20 - 1)d = 10 + 19(12) = 238$

2. กำหนดพจน์ที่ $a_{12} = 10$ และ $a_{20} = 52$ จงหาพจน์ที่ a_{30}

วิธีทำ $a_{12} = 10 \quad ; \quad a + 11d = 10 \quad \ldots (1)$

$a_{20} = 42 \quad ; \quad a + 19d = 52 \quad \ldots (2)$

$(2) - (1) \quad ; \quad 8d = 40$

$d = 5$

$a = -45$

เพราะฉะนั้น $a_{30} = a + (30 - 1)d = -45 + 29(5) = 200$

หมายเหตุ ลำดับเลขคณิตที่เป็นลำดับอนันต์ จะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อผลต่างร่วม d = 0 เท่านั้น

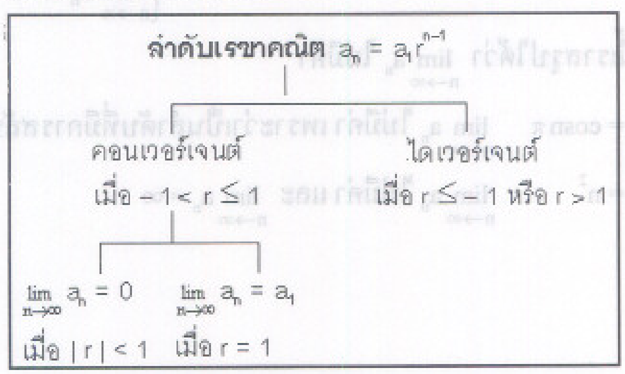
2. ลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือลำดับที่อัตราส่วน $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ เป็นค่าคงตัว และเรียกค่าคงตัวนั้นว่า **อัตราส่วนร่วม**

ให้ a เป็นพจน์แรก และ r เป็นอัตราส่วนร่วม ลำดับเรขาคณิต จะมีลักษณะดังนี้

$a , ar , ar^2 , ar^3 , ar^4 , \ldots , ar^{n-1} , \ldots$ พจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต คือ $a_n = ar^{n-1}$

ลำดับเรขาคณิตที่เป็นลำดับอนันต์จะเป็นคอนเวอร์เจนต์หรือไดเวอร์เจนต์ ตามลักษณะดังต่อไปนี้



6. สัญลักษณ์แทนการบวก ($\sum_{i=1}^{n} a_i$)

เราใช้สัญลักษณ์ Σ เป็นสัญลักษณ์แทนการบวก กำหนดโดย $\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

สมบัติที่สำคัญของการบวก

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
4. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

7. อนุกรม กำหนด $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับ

$s_1 = a_1$

$s_1 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

:

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

เราเรียก $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ ว่าเป็นอนุกรม

เพราะฉะนั้นอนุกรม s_n เป็นลำดับชนิดหนึ่งที่เกิดจากผลบวก n พจน์แรกของลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots$

หมายเหตุ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ ใช้แทนความหมาย 2 แบบคือ

1. แทนความหมายของตัวอนุกรมอนันต์
2. แทนความหมายของ $\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ หรือผลบวกของอนุกรมอนันต์

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับ เราเรียก $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ ว่า **อนุกรม**

โดยทั่วไปอนุกรมจะถูกแบ่งเป็น 2 ชนิด คือ อนุกรมจำกัด และอนุกรมอนันต์

อนุกรมจำกัด คืออนุกรมที่อยู่ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่เราสามารถหาผลบวกได้

อนุกรมอนันต์ คืออนุกรมที่อยู่ในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่อาจจะหาลิมิตของผลบวกได้หรือไม่ได้ก็ได้

สูตรที่นักเรียนควรท่องจำ 1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

9. อนุกรมคอนเวอร์เจนต์และอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ให้ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ เราเรียก s_n ว่า **ผลบวกย่อย n พจน์แรกของอนุกรม**

และเรียก $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots$ ว่า ลำดับของ**ผลบวกย่อยของอนุกรม**

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} s_n$ หาค่าได้ เราเรียกค่าลิมิตดังกล่าวว่าเป็นผลบวกของอนุกรม และเรียกอนุกรมดังกล่าวว่าเป็น **อนุกรมคอนเวอร์เจนต์**
2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} s_n$ หาค่าไม่ได้ แสดงว่าอนุกรมดังกล่าวไม่สามารถหาผลบวกได้ และเรียกอนุกรมดังกล่าวว่าเป็น **อนุกรมไดเวอร์เจนต์**

10. อนุกรมเลขคณิต

อนุกรมเลขคณิต เป็นอนุกรมที่เกิดจากผลบวกของลำดับเลขคณิต

เพราะฉะนั้น $a + (a + d) + (a + 2d) + a + 3d) + \ldots + [a + (n - 1) d] + \ldots$ เป็นอนุกรมเลขคณิต

ผลบวก n พจน์ของอนุกรมจำกัดคือ $s_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a + a_n]$

ปัญหาพื้นฐานเกี่ยวกับอนุกรมเลขคณิต

1. กำหนด $a_2 = 12$ และ $a_7 = 42$ จงหาผลบวก $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12}$

วิธีทำ $a_2 = 12$; $a + d = 12$ ... (1)

$a_7 = 42$; $a + 6d = 42$ ... (2)

$5d = 30$

$d = 6$

$a = 6$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + \ldots + a_{12} = \frac{12}{2}(a_1 + a_{12}) = \frac{12}{2}(6 + 6 + (11)(6)) = 468$

2. กำหนด $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ โดยที่ a_n เป็นลำดับเลขคณิต

ถ้า $s_4 = 110$ และ $s_{12} = 570$ แล้วค่าของ s_{16} เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $s_4 = 10$; $\frac{4}{2}(2a + (4-1)\,d\,) = 110$

$$2a + 3d = 55 \qquad \ldots (1)$$

$$s_{12} = \frac{12}{2}(2a + (12-1)\,d\,) = 570$$

$$2a + 11d = 95 \qquad \ldots (2)$$

(2) – (1) $\qquad 8d = 40 , d = 5 , a = 20$

เพราะฉะนั้น $s_{16} = \frac{16}{2}(2\,(20) + (15)(5)\,) = 920$

11.อนุกรมเรขาคณิต

อนุกรมเรขาคณิต เป็นอนุกรมที่เกิดจากผลบวกของลำดับเรขาคณิต

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

ลักษณะที่สำคัญของอนุกรมเรขาคณิต มีดังต่อไปนี้

1. ผลบวก n พจน์ของอนุกรมจำกัดคือ $s_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$
2. ถ้าอนุกรมดังกล่าวเป็นอนุกรมอนันต์

อนุกรมเรขาคณิต

คอนเวอร์เจนต์	ไดเวอร์เจนต์
เมื่อ $\lvert r \rvert < 1$	เมื่อ $\lvert r \rvert \geq 1$
และ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-r}$	และ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ หาไม่ได้

12.ความสัมพันธ์ระหว่างลำดับและอนุกรม

ให้ $\{a_n\} = a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots , a_n , \ldots$ เป็นลำดับอนันต์

และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$ เป็นอนุกรมอนันต์

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ได้

ตัวอย่างเช่น ลำดับ 1 , 1 , 1 , ... เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

แต่ 1 + 1 + 1 + 1 + ... เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ลำดับ $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , ... , (\frac{1}{2})^{n-1} , ...$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

และ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + (\frac{1}{2})^{n-1} + ... = 2$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์ แสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ต้องเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

3. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ ต้องเป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

4. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ เราไม่สามารถสรุปเกี่ยวกับลำดับ $\{a_n\}$ ได้

ตัวอย่างเช่น อนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

แต่ลำดับ $a_n = \frac{1}{n}$ มีลิมิตเป็น 0 เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

อนุกรม 1 – 1 + 1 – 1 + ... เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ และ ลำดับ $a_n = (-1)^n$ เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

5. ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

6. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ เราจะสรุปเกี่ยวกับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ได้

ตัวอย่างเช่น $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ และ อนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ และ อนุกรม $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

7. ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ สรุปได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

การตรวจสอบว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. อนุกรมเรขาคณิต $a + ar + ar^2 + ... = \frac{a}{1-r}$; $|r| < 1$

ตัวอย่างเช่น $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

2. **อนุกรมพี** คืออนุกรมที่มีรูปแบบเป็น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ และ อนุกรมพี $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $P > 1$

ตัวอย่างเช่น อนุกรม $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}+...$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

อนุกรม $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

3. อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ โดยที่ $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

3.1 ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

3.2 ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3.3 ถ้า $r = 1$ แล้วสรุปไม่ได้

ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$; $a_n = \frac{n}{2^n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ ลู่เข้า

4. อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ โดยที่ $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$

4.1 ถ้า $r < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

4.2 ถ้า $r > 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

4.3 ถ้า $r = 1$ แล้ว สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$; $a_n = n^n$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} = 0 < 1$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^n}$ ลู่เข้า

5. $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ถ้า $0 \leq a_n \leq b_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ลู่เข้าหรือลู่ออก

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ เป็นอนุกรมพี $P = 2 > 1$ เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

เพราะว่า $n^2+1 > n^2$

$$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

เพราะฉะนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ ลู่เข้า

1.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ เราสามารถทำการบวกเฉพาะเทอมที่ 1 , 2 , 3 ... ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 1.2.1 ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+...+\frac{2^n-1}{4^{n-1}}+...$ เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. $\frac{2}{3}$
3. $\frac{4}{5}$
4. $\frac{8}{3}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{2^n-1}{4^{n-1}}>0$ ทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+...+\frac{2^n-1}{4^{n-1}}+...>1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}=\frac{16+12+7}{16}=\frac{35}{16}>2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $1+\frac{3}{4}+\frac{7}{16}+\frac{15}{64}+...+\frac{2^n-1}{4^{n-1}}+... = \frac{2-1}{4^{1-1}}+\frac{2^2-1}{4^{2-1}}+\frac{2^3-1}{4^{3-1}}+...$

$$= \left(\frac{2}{4^0}+\frac{2^2}{4^1}+\frac{2^3}{4^2}+...\right)-\left(\frac{1}{4^0}+\frac{1}{4^1}+\frac{1}{4^2}+...\right) = 2\left(1+\frac{2}{4}+\left(\frac{2}{4}\right)^2+...\right)-\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)-\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right) = 2(2)-\frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

2. ลักษณะของข้อสอบจัดอยู่ในกลุ่ม โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n เราสามารถใช้การแทนค่า n บางค่าก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 1.2.2 ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม

$\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}+...+\frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}+...$ คือข้อใด

1. $\frac{n-1}{2+\sqrt{3n+1}}$
2. $\frac{n+1}{2+\sqrt{3n+1}}$
3. $\frac{n-2}{2+\sqrt{3n-2}}$
4. $\frac{n}{1+\sqrt{3n+1}}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าผลบวก 1 พจน์แรกของโจทย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{4}+1}$

แทนค่า n = 1 ในตัวเลือกแต่ละตัวจะได้

1. 0 2. $\frac{2}{2+\sqrt{7}}$

3. $\frac{-1}{2+\sqrt{1}}$ 4. $\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $$\frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}} = \frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}\cdot\frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{\sqrt{(3n+1)}-\sqrt{3n-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{(3n+1)-(3n-2)}$$
$$= \frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{10}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$
$$= \frac{\sqrt{4}-1}{3}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{4}}{3}+\frac{\sqrt{10}-\sqrt{7}}{3}+\frac{\sqrt{13}-\sqrt{10}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}}{3}$$
$$= \frac{-1+\sqrt{3n+1}}{3} = \frac{(-1+\sqrt{3n+1})(1+\sqrt{3n+1})}{3(1+\sqrt{3n+1})}$$
$$= \frac{-1+(3n+1)}{3(1+\sqrt{3n+1})}$$
$$= \frac{n}{1+\sqrt{3n+1}}$$

ตัวอย่างที่ 1.2.3 ผลบวก n พจน์แรกของ 2 + 22 + 222 + 2222 + ... คือข้อใด

1. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{9}+n\right)$ 2. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right)$

3. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{10}+n\right)$ 4. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^n-1)}{10}-n\right)$

การตัดตัวเลือก จากโจทย์ผลบวก 1 พจน์แรกคือ 2 แทนค่า n = 1 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $\frac{2}{9}(10+1) = \frac{22}{9}$ 2. $\frac{2}{9}(10-1) = 2$

3. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^1-1)}{10}+1\right) = \frac{20}{9}$ 4. $\frac{2}{9}\left(\frac{10(10^1-1)}{10}-1\right) = \frac{16}{9}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง 2 + 22 + 222 + 2222 + ... + 222...2 = 2 (1 + 11 + 111 + 1111 + ... + 1111... 1)

$= \frac{2}{9}$(9 + 99 + 999 + 9999 + ... + 999... 9)

$$= \frac{2}{9}\left((10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots+(10^n-1)\right)$$

$$= \frac{2}{9}[(10+10^2+10^3+\ldots+10^n)-n]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]$$

3. คำถามในรูปแบบของการตรวจสอบการหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ว่า ลู่เข้า หรือ ลู่ออก การหาผลบวกบางเทอมของอนุกรมที่โจทย์กำหนด ก็จะสามารถตัดตัวเลือกบางตัวได้

ตัวอย่างที่ 1.2.4 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+\ldots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{4}$
2. $\frac{5}{4}$
3. $\frac{7}{4}$
4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+\ldots>4$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+\ldots$ เป็นอนุกรมที่มีพจน์ $a_n=\frac{5^{n-1}}{3}$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}}{3}=\infty$

เพราะฉะนั้นอนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{5}{3}+\frac{25}{3}+\frac{125}{3}+\ldots$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

สูตรผลบวกของอนุกรม

1. $\sum\limits_{i=1}^{n} i=\frac{n}{2}(n+1)$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$
3. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^4=\frac{n}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$
5. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^5=\frac{n^2}{12}(n+1)^2(2n^2+2n-1)$
6. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^6=\frac{n}{42}(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)$

1.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 1.3.1 อนุกรม $\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$ มีลักษณะตรงกับข้อใด

1. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{8}$
2. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{4}$
3. เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์และมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{2}$
4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\frac{1}{(7)(9)}+\ldots$

$$> \frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\frac{1}{(7)(9)} = \frac{315+63+27+15}{(3)(5)(7)(9)} = \frac{420}{(3)(5)(7)(9)} = \frac{4}{9}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

วิธีจริง ให้ $s_n = \frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

เพราะว่า $\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$ เพราะฉะนั้น $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$

เพราะฉะนั้น $2s_n = \frac{2}{(1)(3)}+\frac{2}{(3)(5)}+\frac{2}{(5)(7)}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$$= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) = 1-\frac{1}{2n+1}$$

และ $s_n = \frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right) = \frac{1}{2}$

สรุป $\frac{1}{(1)(3)}+\frac{1}{(3)(5)}+\frac{1}{(5)(7)}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์มีผลบวก $=\frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.3.2 ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+\ldots$ เท่ากับเท่าใด

1. $\log 2$
2. $\frac{1}{2}\log 2$
3. $\frac{1}{4}\log 2$
4. $\frac{1}{8}\log 2$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+\ldots>\frac{1}{4}\log 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+\ldots$

$$=\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 2^2+\frac{1}{16}\log 2^3+\frac{1}{32}\log 2^4+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\log 2+\frac{2}{8}\log 2+\frac{3}{16}\log 2+\frac{4}{32}\log 2+\ldots \quad >\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{8}\right)\log 2 \quad = \frac{1}{2}\log 2$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+\ldots$

$$=\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 2^2+\frac{1}{16}\log 2^3+\frac{1}{32}\log 2^4+\ldots=\frac{1}{4}\log 2+\frac{2}{8}\log 2+\frac{3}{16}\log 2+\frac{4}{32}\log 2+\ldots$$

$$=\frac{1}{4}\log 2\left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\ldots\right)=\frac{1}{4}\log 2\left(\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots\right)$$

ให้ $s=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots$ ... (1)

$2s=\frac{2}{2^0}+\frac{2}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+\ldots$ ... (2)

(2) – (1) ; $s=\frac{2}{2^0}+\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots = 2+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2+2 = 4$

สรุป $\frac{1}{4}\log 2+\frac{1}{8}\log 4+\frac{1}{16}\log 8+\frac{1}{32}\log 16+\ldots$

$$=\frac{1}{4}\log 2\left(\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\ldots\right) = \left(\frac{1}{4}\log 2\right)(4) = \log 2$$

ตัวอย่างที่ 1.3.3 กำหนดให้ $a_n=(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{25})\ldots(1-\frac{1}{n^2})$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. $\frac{1}{2}$

3. 1 4. $\frac{2}{3}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $a_2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$a_3 = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9}) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{24}{36} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16}) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{8}{9}\right)\left(\frac{15}{16}\right) = \frac{5}{8}$$

และ $1-\frac{1}{n^2} < 1$ เพราะฉะนั้น $a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > \ldots$ ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $a_n = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{16})(1-\frac{1}{25})\ldots(1-\frac{1}{n^2})$

$$= (1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2})(1-\frac{1}{5^2})\ldots(1-\frac{1}{n^2}) = \frac{(2^2-1)(3^2-1)(4^2-1)(5^2-1)\ldots(n^2-1)}{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot5^2\ldots n^2}$$

$$= \frac{(2-1)(2+1)(3-1)(3+1)(4-1)(4+1)(5-1)(5-1)\ldots(n-1)(n+1)}{(2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots n)(2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots n)}$$

$$= \frac{((1)(2)(3)\ldots(n-1)(3\cdot4\cdot5\ldots(n+1))}{(2\cdot3\cdot4\ldots n)(2\cdot3\cdot4\ldots n)} = \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{n+1}{2n} \text{ เพราะฉะนั้น } \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.4 ผลบวกอนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{3}{2}$
3. 3
4. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots > \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3} = \frac{4+6+5}{8} = \frac{15}{8} > 1.5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง

$$s = \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\frac{7}{2^4}+\frac{2n-1}{2^n}+\frac{2n+1}{2^{n+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$2s = 1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\ldots+\frac{2n-1}{2^{2n-1}}+\frac{2n+1}{2^n}+\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$(2)-(1)$;

$$s = 1+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\ldots+\frac{2}{2^n}+\ldots$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = 3$$

ตัวอย่างที่ 1.3.5 กำหนดอนุกรม s_n มีสูตรผลบวก $s_n = 3n^2 - 2n$ เมื่อ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ แล้วพจน์ที่ a_i เท่ากับเท่าใด

1. $5i - 4$ 2. $6i - 5$
3. $6i + 5$ 4. $9i - 7$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n

เพราะว่า $a_1 = s_1 = 3(1^2) - 2(1) = 1$

แทนค่า i = 1 ในทุกตัวเลือกจะได้ 1. 1 2. 1 3. 11 4. 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $a_2 = s_2 - s_1 = (3(2^2) - 2(2)) - (1) = 7$

แทนค่า i = 2 ในตัวเลือกที่เหลือ เพราะฉะนั้นตัวเลือกที่เหลือมีค่าเป็น 1. 6 2. 7

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

วิธีจริง $a_i = s_i - s_{i-1} = (3i^2 - 2i) - (3(i-1)^2 - 2(i-1)) = 3i^2 - 2i - 3i^2 + 6i - 3 + 2i - 2 = 6i - 5$

ตัวอย่างที่ 1.3.6 ลิมิตของลำดับ $3, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3\sqrt{3}}, 3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}, ...$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 3 2. $3\sqrt{3}$
3. 9 4. 0

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าลำดับ $3, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3\sqrt{3}}, ...$ เป็นลำดับที่มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ กล่าวคือ $3 < 3\sqrt{3} < 3\sqrt{3\sqrt{3}} < ... < a_n < a_{n+1} < ...$ เพราะฉะนั้นลิมิตของลำดับต้องมากกว่า $3\sqrt{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง
$$a_1 = 3^1$$
$$a_2 = 3^{1+\frac{1}{2}}$$
$$a_3 = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$$
$$\vdots$$
$$a_n = 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}}$$

เพราะว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...} = 3^2 = 9$

ตัวอย่างที่ 1.3.7 ถ้าพจน์ที่ n ของลำดับ $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, ... มีค่าเท่ากับ $\log_3 x$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $(3\sqrt{3})^{(\sqrt{2})^{n-1}}$ 2. $3^{\sqrt{3}(\sqrt{2})^{n-1}}$
3. $(3\sqrt{3})(2)^{\frac{n-1}{2}}$ 4. $3^{\sqrt{3}(\sqrt{2})^{\frac{n+1}{2}}}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n

เมื่อแทนค่า n = 1 จะได้ $a_1 = \sqrt{3} = \log_3 x$ เพราะฉะนั้น $x = 3^{\sqrt{3}}$ แทนค่า n = 1 ในตัวเลือกจะได้

1. $(3\sqrt{3})^{(\sqrt{2})^0} = (3\sqrt{3})^1 = 3\sqrt{3}$ 2. $3^{\sqrt{3}(\sqrt{2})^0} = 3^{\sqrt{3}}$
3. $(3\sqrt{3})(2)^{\frac{1-1}{2}} = 3\sqrt{3}$ 4. $3^{\sqrt{3}(\sqrt{2})^{\frac{1+1}{2}}} = 3^{\sqrt{6}}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, ... เป็นลำดับเรขาคณิต $a = \sqrt{3}$, $r = \sqrt{2}$

เพราะฉะนั้น $a_n = ar^{n-1} = (\sqrt{3})(\sqrt{2})^{n-1}$

$$a_n = \log_3 x$$

$$(\sqrt{3})(\sqrt{2})^{n-1} = \log_3 x$$

$$x = 3^{(\sqrt{3})(\sqrt{2})^{n-1}}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.8 กำหนดอนุกรมอนันต์ $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...$

พจน์ที่ n ของอนุกรมมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 2. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
3. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 4. $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากโจทย์อนุกรม $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\ldots$ มีค่า $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{12}$

เพราะว่า a_1 ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\frac{1}{3}$ 2. 1 3. $\frac{1}{3}$ 4. $\frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะว่า a_2 ของแต่ละตัวเลือกที่เหลือคือ 1. $\frac{1}{6}$ 3. $\frac{1}{18}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, ... เป็นลำดับเรขาคณิตมี $a = \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{2}$ และ $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 1.3.9 ถ้า a_1 , a_2 , a_3 , ... เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ และ $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-1}$ เมื่อ $n = 3$, 4 , ... แล้วผลบวก n พจน์แรกของลำดับมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 2^n 2. $2^n - 1$
3. 2^{n-1} 4. $2^{n+1} - 1$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $a_1 = 1$ เพราะฉะนั้นผลบวก 1 พจน์แรกมีค่าเท่ากับ 1

แทนค่า $n = 1$ ในทุกตัวเลือกจะได้ว่าค่าแต่ละตัวเลือกคือ 1. 2 2. 1 3. 1 4. 3

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ทิ้ง

เพราะว่า $s_2 = a_1 + a_2 = 1 + 2 = 3$ แทนค่า $n = 2$ ในตัวเลือกที่เหลือจะได้ค่าแต่ละตัวเลือกเป็น

2. $2^2 - 1 = 3$ 3. $2^{2-1} = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง จากโจทย์ $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$

จะได้
$$
\begin{aligned}
a_3 &= 3a_2 - 2a_1 = 3(2) - 2(1) = 4 \\
a_4 &= 3a_3 - 2a_2 = 3(4) - 2(2) = 8 \\
a_5 &= 3a_4 - 2a_3 = 3(8) - 2(4) = 16 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

จะเห็นได้ว่า $a_n = 2^{n-1}$

เพราะฉะนั้น $s_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{(1)(1-2^n)}{1-2} = 2^n - 1$

ตัวอย่างที่ 1.3.10 ผลบวก n พจน์ของอนุกรม $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{n}{2}(n+1)(n+2)(n+3)$
2. $\frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$
3. $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)(n+3)$
4. $\frac{n}{8}(n+1)(n+2)(n+3)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า n = 1 , ค่าของผลบวก 1 พจน์แรกของโจทย์มีค่าเท่ากับ $1\cdot2\cdot3 = 6$ ค่าของแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น

1. $\frac{1}{2}(2)(3)(4) = 12$
2. $\frac{1}{4}(2)(3)(4) = 6$
3. $\frac{1}{6}(2)(3)(4) = 4$
4. $\frac{1}{8}(2)(3)(4) = 3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $1\cdot2\cdot3 + 2\cdot3\cdot4 + 3\cdot4\cdot5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$

$$= \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+2i) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2 + 3\left(\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)\right) + 2\left(\frac{n}{2}(n+1)\right)$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n}{2}(n+1)(2n+1) + n(n+1) = \frac{n}{4}(n+1)\left[n(n+1)+2(2n+1)+1\right]$$

$$= \frac{n}{4}(n+1)[n^2+n+4n+2+4] = \frac{n}{4}(n+1)(n^2+5n+6) = \frac{n}{4}(n+1)(n+2)(n+3)$$

ตัวอย่างที่ 1.3.11 ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1+x}{1-x}$
2. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$
3. $\frac{1-x}{1+x}$
4. $\frac{1+x}{(1-x)^3}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x แทนค่า $x = \frac{1}{2}$ จะได้ว่า

$$1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots = 1 + 2^2\left(\frac{1}{2}\right) + 3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$\geq\ 1^2+2^2\left(\frac{1}{2}\right)+3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+4^2\left(\frac{1}{2}\right)^3\ =\ 1+2+\frac{9}{4}+2\ =\ 7.25$$

แทนค่า $x=\frac{1}{2}$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่าเป็น

1. $\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$ 2. $\frac{1+x}{(1-x)^2}=\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^2}=6$

3. $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1}{3}$ 4. $\frac{1+x}{(1-x)^3}=\frac{1+\frac{1}{2}}{(1-\frac{1}{2})^3}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{1}{8}\right)}=12$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง **แบบที่ 1.** ให้ $s\ =\ 1^2+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+\dots$

$$s\ =\ 1+4x+9x^2+16x^3+\dots \qquad \dots\dots\dots\dots(1)$$

$$xs\ =\ x+4x^2+9x^3+16x^4+\dots \qquad \dots\dots\dots\dots(2)$$

(1) – (2) ; $s-xs\ =\ 1+3x+5x^2+7x^3+\dots$

$$(1-x)s\ =\ 1+3x+5x^2+7x^3+\dots \qquad \dots\dots\dots\dots(3)$$

x(3) ; $x(1-x)s\ =\ x+3x^2+5x^3+7x^4+\dots \qquad \dots\dots\dots\dots(4)$

(3) – (4) ; $(1-x)s-x(1-x)s=1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+\dots$

$$(1-x)^2s\ =\ 1+2(x+x^2+x^3+x^4+\dots)=1+2\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1-x+2x}{1-x}=\frac{1+x}{1-x}$$

เพราะฉะนั้น $s\ =\ \frac{1+x}{(1-x)^3}$

แบบที่ 2. ต้องรู้สูตรอนุพันธ์ จากสมการ $\frac{1}{1-x}\ =\ 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+\dots\ ;\ |x|<1$

หาอนุพันธ์ทั้งสองข้าง $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\ =\ 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots$

$$\frac{1}{(1-x)^2}\ =\ 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+\dots$$

$$\frac{x}{(1-x)^2}\ =\ x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+\dots$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)\ =\ 1+2^2x+3^2x^2+4^2x^3+5^2x^4+\dots$$

$$\frac{(1-x)^2(1)-(x)(2(1-x))(-1)}{(1-x)^4} = 1 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + \ldots$$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + 4^2x^3 + 5^2x^4 + \ldots = \frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$

ตัวอย่างที่ 1.3.12 กำหนดอนุกรม $s_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{2}$ 2. 2

3. $\frac{5}{2}$ 4. 4

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $s_1 < s_2 < s_3 < s_4 < \ldots$ และ $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + \frac{1}{1+2} = \frac{4}{3}$,

$s_3 = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} = \frac{3}{2}$, $s_4 = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} = \frac{16}{10}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} s_n > s_3 = \frac{3}{2}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง $s_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \ldots + \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

เพราะฉะนั้น $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ เมื่อ $a_n = \frac{1}{1+2+3+\ldots+n}$

เพราะว่า $a_n = \frac{1}{1+2+3+\ldots+n} = \frac{1}{\frac{n}{2}(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} = 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}]$

เพราะฉะนั้น

$$a_1 = 2[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}]$$

$$a_2 = 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}]$$

$$a_3 = 2[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}]$$

$$\vdots$$

$$a_n = 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}]$$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = 2[\frac{1}{1} - \frac{1}{2}] + 2[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}] + 2[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}] + \ldots + 2[\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}] = 2[1 - \frac{1}{n+1}]$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2[1 - \frac{1}{n+1}] = 2$$

ตัวอย่างที่ 1.3.13 กำหนดให้ $|a| > 1$ และ $|b| > 1$

ผลบวกของอนุกรม $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\ldots$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{ab-1}$
2. $\frac{1}{(1-a^2)(1-ab)}$
3. $\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{ab}{1-ab}$
4. $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{a^2}{1-ab}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a , b ดังนั้นแทนค่าบางค่าที่คิดเลขง่ายก็สามารถตัดตัวเลือกได้ เช่นแทนค่า $a = b = 2$

ค่าของโจทย์ $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\ldots$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^3}\right)+\ldots$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots\right) = 2\left(\frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2^2}}\right) = 2\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)}\right) = \frac{2}{3}$$

แทนค่า $a = b = 2$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่าเป็น

1. $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{ab-1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
2. $\frac{1}{(1-a^2)(1-ab)} = \frac{1}{(1-4)(1-4)} = \frac{1}{9}$
3. $\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{ab}{1-ab} = \frac{4}{1-4}+\frac{4}{1-4} = -\frac{8}{3}$
4. $\frac{a^2}{1+a^2}+\frac{a^2}{1-ab} = \frac{4}{1+4}+\frac{4}{1-4} = \frac{4}{5}-\frac{4}{3} < 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{1}{a^3}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)+\ldots$

$$= \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^6}+\ldots\right)+\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{a^3b^3}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^4}+\ldots\right)+\frac{1}{ab}\left(1+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a^2b^2}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{a^2}}\right)+\frac{1}{ab}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{ab}}\right) = \frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{ab-1}$$

ตัวอย่างที่ 1.3.14 ผลบวกของอนุกรม $\log_{\frac{1}{a^2}} b + \log_{\frac{1}{a^4}} b + \log_{\frac{1}{a^8}} b + \ldots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{\log b}{a-1}$ 2. $\log_a(\dfrac{1}{b})$

3. $2\log_{\frac{1}{a}} b$ 4. $2\log_{\frac{1}{a^2}} b$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากเงื่อนไขของโจทย์ a < 0 ได้ แต่ตัวเลือก 2. และ 3. a < 0 ไม่ได้ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้ง

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นแทนค่า a = 10 , b = 10 จะได้ค่าของโจทย์และตัวเลือกเป็น

โจทย์ $\log_{\frac{1}{a^2}} b + \log_{\frac{1}{a^4}} b + \log_{\frac{a}{a^8}} b + \ldots = \log_{\frac{1}{10^2}} 10 + \log_{\frac{1}{10^4}} 10 + \log_{\frac{1}{10^8}} 10 + \ldots$

$$= \log_{10^{-2}} 10 + \log_{10^{-4}} 10 + \log_{10^{-8}} 10 + \ldots = \left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{8}\right)+\ldots = -1$$

ค่าของตัวเลือกที่เหลือคือ 1. $\dfrac{\log b}{a-1} = \dfrac{\log 100}{10-1} = \dfrac{2}{9}$ 4. $2\log_{\frac{1}{a^2}} b = 2\log_{\frac{1}{10^2}} 10 = 2(-\frac{1}{2}) = -1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้ง

วิธีจริง $\log_{\frac{1}{a^2}} b + \log_{\frac{1}{a^4}} b + \log_{\frac{1}{a^8}} b + \ldots = \dfrac{\log_{\frac{1}{a^2}} b}{\log_{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^2}} + \dfrac{\log_{\frac{1}{a^2}} b}{\log_{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^4}} + \dfrac{\log_{\frac{1}{a^2}} b}{\log_{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^8}} + \ldots$

$$= \log_{\frac{1}{a^2}} b \left(1 + \frac{1}{\log_{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^4}} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{a^8}} + \ldots\right) = \log_{\frac{1}{a^2}} b \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots\right) = 2\log_{\frac{1}{a^2}} b$$

ตัวอย่างที่ 1.3.15 กำหนดให้ $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตโดยที่ $|r| < 1$

ผลบวกของอนุกรม $\dfrac{a}{3} + \dfrac{ar^2}{3^3} + \dfrac{ar^4}{3^5} + \dfrac{ar^6}{3^7} + \ldots$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{a}{3^2(1-r)}$ 2. $\dfrac{a}{1-3^2r}$

3. $\dfrac{3a}{(3-r)(3+r)}$ 4. $\dfrac{3a}{(1-3r)(1+3r)}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ a , r

แทนค่า a = 1 , r = 0 ในโจทย์และตัวเลือกจะได้ว่า

ค่าของโจทย์ $\frac{a}{3}+\frac{ar^2}{3^3}+\frac{ar^4}{3^5}+\frac{ar^6}{3^7}+\ldots=\frac{1}{3}$ ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $\frac{a}{3^2(1-r)}=\frac{1}{9}$
2. $\frac{a}{1-3^2r}=1$
3. $\frac{3a}{(3-r)(3+r)}=\frac{1}{3}$
4. $\frac{3a}{(1-3r)(1+3r)}=3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง $\frac{a}{3}+\frac{ar^2}{3^3}+\frac{ar^4}{3^5}+\frac{ar^6}{3^7}+\ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มีพจน์แรก $=\frac{a}{3}$, อัตราส่วนร่วม $=\frac{r^2}{3^2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{a}{3}+\frac{ar^2}{3^3}+\frac{ar^4}{3^5}+\frac{ar^6}{3^7}+\ldots$ มีผลบวก $=\frac{\left(\frac{a}{3}\right)}{1-\left(\frac{r^2}{3^2}\right)}=\frac{a}{3}\left(\frac{3^2}{3^2-r^2}\right)=\frac{3a}{(3-r)(3+r)}$

ตัวอย่างที่ 1.3.16 ผลบวก 18 พจน์แรกของอนุกรม $1+9+25+49+81+\ldots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 7734
2. 7751
3. 7753
4. 7770

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าเลขคี่จำนวน 18 ตัวบวกกันต้องเป็นเลขคู่

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3. ทิ้งได้

เพราะว่า $1+9+25+49+81+\ldots+(2n-1)^2$ แต่ละพจน์เป็นเลขที่ลงท้ายด้วย 1 , 9 , 5

เพราะฉะนั้นผลบวกของเลขทั้ง 18 ตัวต้องไม่ลงท้ายด้วยเลข 4 ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.

หมายเหตุ เพื่อให้แน่ใจลองแจงสมาชิกดูก็ได้

1 ,	9 ,	25 ,	49 ,	81 ,	121
169 ,	225 ,	289 ,	361 ,	441 ,	529
625 ,	729 ,	841 ,	961 ,	1089 ,	1225

เมื่อบวกเลขทั้ง 18 ตัวเข้าด้วยกันจะเห็นว่าหลักหน่วยมีค่าเท่ากับ 0

วิธีจริง $1+9+25+49+81+\ldots+(2(18)-1)^2$

$$= \sum_{n=1}^{18}(2n-1)^2 \qquad = \sum_{n=1}^{18}(4n^2-4n+1)$$

$$= 4\sum_{n=1}^{18}n^2-4\sum_{n=1}^{18}n+18 \qquad = 4\left(\frac{18}{6}\right)(18+1)(2(18)+1)-4\left(\frac{18}{2}\right)(18+1)+18$$

$$= (4)(3)(19)(37)-(36)(19)+18 \quad = 8436-684+18 \quad = 7770$$

ตัวอย่างที่ 1.3.17 กำหนดลำดับ $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2-1}-\dfrac{n}{3}$ ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด

1. -1
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. $-\frac{1}{2}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^2-1}-\dfrac{n}{3}$

$$= \frac{\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)}{(n+1)(n-1)}-\frac{n}{3} \qquad = \frac{n(2n+1)}{6(n-1)}-\frac{n}{3}$$

$$= \frac{n(2n+1)-n(2)(n-1)}{6(n-1)} \qquad = \frac{2n^2+n-2n^2+2n}{6(n-1)}$$

$$= \frac{3n}{6(n-1)} \qquad = \frac{n}{2(n-1)} > 0 \qquad \text{ทุกค่า } n$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2(1-\frac{1}{n})} = \dfrac{1}{2(1-0)} = \dfrac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 1.3.18 ค่าของ $\log_3 3+\log_{\sqrt{3}}3+\log_{\sqrt[3]{3}}3+\log_{\sqrt[4]{3}}3+\ldots+\log_{\sqrt[n]{3}}3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}(n+1)\log 3$
2. $\frac{n}{2}(n+1)\log 3$
3. $\frac{1}{2}(n-1)$
4. $\frac{n}{2}(n+1)$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n

แทนค่า n = 1 โจทย์จะมีค่าเป็น $\log_3 3 = 1$ ตัวเลือกทั้ง 4 ตัวจะมีค่าเป็น

1. $\log 3$ 2. $\log 3$ 3. 0 4. 1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง เพราะว่า $\log_{\sqrt[n]{3}} 3 = \log_{\sqrt[n]{3}} (\sqrt[n]{3})^n = n \log_{\sqrt[n]{3}} (\sqrt[n]{3}) = n$

เพราะฉะนั้น $\log_3 3 + \log_{\sqrt{3}} 3 + \log_{\sqrt[3]{3}} 3 + \ldots + \log_{\sqrt[n]{3}} 3 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$

ตัวอย่างที่ 1.3.19 อนุกรม $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่าใดต่อไปนี้

1. $\frac{20}{9}$
2. $\frac{40}{9}$
3. $\frac{91}{45}$
4. $\frac{218}{99}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าค่าของโจทย์คือ 2.2222...

โดยการตั้งหารยาวของทุกตัวเลือกจะได้ว่า

1. $\frac{20}{9} = 2.222222\ldots$ 2. 4.4444… 3. 2.0222… 4. 2.20202020…

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตโดยมี $a = 2$, $r = \frac{1}{10}$

เพราะฉะนั้น $2 + 0.2 + 0.02 + 0.002 + 0.0002 + \ldots = \frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-\frac{1}{10}} = \frac{20}{9}$

ตัวอย่างที่ 1.3.20 อนุกรมเรขาคณิตชุดหนึ่งมี $a_1 = 81$, $a_n = 16$ และ $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 55$ ค่าของ n และอัตราส่วนร่วม r มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $n = 5$, $r = -\frac{2}{3}$
2. $n = 6$, $r = \frac{2}{3}$
3. $n = 4$, $r = -\frac{2}{3}$
4. $n = 5$, $r = \frac{2}{3}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยใช้เหตุผลในการเปรียบเทียบค่า เพราะว่า $a_1 = 81$ และ $s_n = 55$

ดังนั้น $a_1 > s_n$ เพราะฉะนั้น $r < 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2 และ 4

ต่อไปนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าและบวกกัน

จากตัวเลือก 3. $r = -\frac{2}{3}$, $a_1 = 81$, $a_2 = -54$, $a_3 = 36$, $a_4 = -24$, $a_5 = 16$

เพราะฉะนั้น $n = 5$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $a_1 = 81$

$$a_n = 16$$

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$16 = 81r^{n-1} \qquad \ldots (1)$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{81(1-r^n)}{1-r}$$

$$55(1-r) = 81\,(1-r^n) \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) ; $16r = 81r^n$

$$r^n = \frac{16r}{81} \qquad \ldots (3)$$

แทนค่าใน (2) ; $55\,(1-r) = 81\,(1 - \frac{16r}{81})$

$$55 - 55r = 81 - 16r$$

$$-39r = 26$$

$$r = -\frac{2}{3}$$

แทนค่าใน (3) ; $\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{16}{81}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{243} = \left(-\frac{2}{3}\right)^5$ เพราะฉะนั้น $n = 5$

โปรแกรม MATHCAD สามารถคำนวณค่าลิมิตของลำดับได้ตัวอย่างเช่น

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{2 \cdot n + 1}$$

$$\frac{1}{2}$$

คู่มือ MATHCAD หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

1.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม

1. อนุกรม $1+\left(\frac{a}{1+a}\right)+\left(\frac{a}{1+a}\right)^2+\left(\frac{a}{1+a}\right)^3+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทุกค่า $a > -1$
2. s_n เป็นอนุกรมที่ได้จาก $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$
3. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \infty$
4. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีคุณสมบัติ $a_{n+1} > a_n$ ทุกค่า n แล้วลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
5. ถ้าอนุกรม $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ มีคุณสมบัติว่า $s_{n+1} > s_n$ แล้วอนุกรม $\{s_n\}$ เป็นอนุกรมลู่ออก
6. $\left\{\frac{n}{n+1}\cos n\pi\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า
7. อนุกรม $\log\frac{1}{2} + \log\frac{3}{2} + \log\frac{3}{4} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
8. $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
9. ผลบวก $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \ldots > 2$ ทุกค่า x
10. ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต และ $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ หาค่าได้เสมอ
11. ถ้าอนุกรม s_n มีคุณสมบัติว่า $s_{n+1} < s_n$ แล้วอนุกรม s_n เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
12. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ มีสมบัติว่า $\frac{a_{n-1}}{a_n} = r, n = 2, 3, 4, \ldots$ และ $|r| > 1$

    แล้วอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
13. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$
14. อนุกรม $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้าทุกค่า x
15. ถ้าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก และอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

    แล้วอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก
16. ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิต และ b_n เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว $a_n + b_n$ เป็นลำดับเลขคณิต
17. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต และ $b_n = a_{2n+1}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับเรขาคณิต
18. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} > \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
19. ถ้าอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 0$
20. ถ้า $A = \{x \in R \mid x + x(x+2) + x(x+2)^2 + \ldots$ ลู่เข้า$\}$ แล้ว $A \subset (-\infty, 0]$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับลำดับและอนุกรม

1. ถูกต้อง $1+\left(\frac{a}{1+a}\right)+\left(\frac{a}{1+a}\right)^2+\left(\frac{a}{1+a}\right)^3+\ldots$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\left|\frac{a}{1+a}\right|<1$

$$-1<\frac{a}{1+a}<1$$

$$-1<\frac{a}{1+a} \quad \text{และ} \quad \frac{a}{1+a}<1$$

$$0<\frac{a}{1+a}+1 \quad \text{และ} \quad \frac{a}{1+a}-1<0$$

$$0<\frac{a+1+a}{1+a} \quad \text{และ} \quad \frac{a-1-a}{1+a}<0$$

$$0<\frac{2a+1}{a+1} \quad \text{และ} \quad \frac{1}{a+1}>0$$

$$(a<-\frac{1}{2} \text{ หรือ } a>-1) \text{ และ } \quad a>-1$$

สรุป $\left|\frac{a}{1+a}\right|<1$ ก็ต่อเมื่อ $a>-1$

2. ผิด ตัวอย่างเช่น $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$

จะได้ $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}})=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

3. ผิด ตัวอย่างเช่น $a_n=(-1)^n$ จะได้ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n}=1$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{2n+1}=-1$

เพราะฉะนั้นลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก แต่ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

4. ผิด ตัวอย่างเช่น $a_n=1-\frac{1}{n}$ เพราะว่า $n+1>n$ ทุกค่า $n=1,2,3,\ldots$

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$$

$$-\frac{1}{n+1}>-\frac{1}{n}$$

$1-\frac{1}{n+1}>1-\frac{1}{n}$ เพราะฉะนั้น $a_{n+1}>a_n$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})=1$

5. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)}$

$= (1 - \dfrac{1}{2}) + (\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}) + ... + (\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

เพราะฉะนั้น $s_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{n+2} > 1 - \dfrac{1}{n+1} = s_n$ แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \dfrac{1}{n+1} = 1$

ดังนั้น $s_{n+1} > s_n$ แต่อนุกรม s_n ลู่เข้า

6. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a_n = \dfrac{n}{n+1}\cos n\pi$

เมื่อ $n = 2k$ จะได้ $a_{2k} = \dfrac{2k}{2k+1}\cos 2k\pi = \dfrac{2k}{2k+1}$, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2k}{2k+1} = 1$

เมื่อ $n = 2k+1$ จะได้ $a_{2k+1} = \dfrac{2k+1}{(2k+1)+1}\cos(2k+1)\pi = \left(\dfrac{2k+1}{(2k)+2}\right)(-1)$

และ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k+1} = \lim\limits_{k\to\infty}\left(\dfrac{2k+1}{(2k)+2}\right)(-1) = -1$

เพราะฉะนั้น $\{a_n\}$ มีลำดับย่อย $a_2, a_4, a_6, a_8, ...$ ลู่เข้าสู่ 1

และลำดับย่อย $a_3, a_5, a_7, a_9, ...$ ลู่เข้าสู่ -1 สรุป $\left\{\dfrac{n}{n+1}\cos n\pi\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

7. **ถูกต้อง** $a_n = \log\dfrac{n}{n+1}$

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \log\dfrac{1}{2} + \log\dfrac{2}{3} + \log\dfrac{3}{4} + ... + \log\dfrac{n}{n+1}$

$= \log\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}...\dfrac{n}{n+1}\right) = \log\left(\dfrac{1}{n+1}\right) = \log 1 - \log(n+1) = -\log(n+1)$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} -\log(n+1) = -\infty$

8. **ถูกต้อง** $1 + x + x^2 + x^3 + ... = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + ...$

$x + x^3 + x^5 + x^7 + ... = 0$

$\dfrac{x}{1-x^2} = 0$ เพราะฉะนั้น $x = 0$ เท่านั้น

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $x = \dfrac{\pi}{6}$ จะทำให้อสมการไม่จริง

$1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + ... = \dfrac{1}{1-\sin^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$ ดังนั้นเมื่อ $x = \dfrac{\pi}{6}$ จะได้ว่า

$1 + \sin^2\dfrac{\pi}{6} + \sin^4\dfrac{\pi}{6} + \sin^6\dfrac{\pi}{6} + ... = \sec^2\dfrac{\pi}{6} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{4}{3} \not> 2$

10. ผิด ตัวอย่างเช่น $a_n = 2^n$ จะได้ $a_1 + a_2 + a_3 + ... = 2 + 4 + 8 + ...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

และ $s_n = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^n$ แต่ $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$

11. ผิด ตัวอย่างเช่น $s_n = -1 - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - ... - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

จะได้ว่า $s_{n+1} < s_n$ แต่ $\lim_{n\to\infty} s_n = \dfrac{-1}{1+\frac{1}{2}} = -\dfrac{3}{2}$

12. ถูกต้อง เมื่อ $\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = r$ และ $|r| > 1$ จะได้ $\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \left|\dfrac{1}{r}\right| < 1$

เพราะฉะนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต โดยมีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ $\left|\frac{1}{r}\right| < 1$

ดังนั้น $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

13. ถูกต้อง เพราะว่า $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{1}{(k+1)}\left(\dfrac{1}{k(k+2)}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} - \frac{2}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\right) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+2}) - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+1})$$

$$= \left[(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+1})\right] + \left[(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{n+2}) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n+1})\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{n+1}\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{n+2}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}$$

สรุป $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

14. ผิด ตัวอย่างเช่น $x = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

ดังนั้น $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + ... = 1 + 1 + 1 + 1 + ...$ เป็นอนุกรมลู่ออก

15. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ($a_n = 2^n$) และ $\sum_{n=1}^{\infty} 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ($b_n = 0$)

จะได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

16. **ถูกต้อง** a_n เป็นลำดับเลขคณิต และ b_n เป็นลำดับเลขคณิต

ดังนั้น $a_n = a + (n-1)\,d_1$ และ $b_n = b + (n-1)\,d_2$

ดังนั้น $a_n + b_n = (a + (n-1)\,d_1) + (b + (n-1)d_2) = (a + b) + (n-1)\,(d_1 + d_2)$

ดังนั้น $\{a_n + b_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตที่มีพจน์แรกเท่ากับ $a + b$ และผลต่างร่วมเท่ากับ $d_1 + d_2$

17. **ถูกต้อง** ให้ a_n เป็นลำดับเรขาคณิต เพราะฉะนั้น $a_n = ar^{n-1}$

เมื่อ $b_n = a_{2n+1} = ar^{(2n+1)-1} = ar^{2n} = (ar)r^{2n-1}$

เพราะฉะนั้น b_n เป็นลำดับเรขาคณิตที่มีพจน์แรกเป็น ar และอัตราส่วนร่วมเท่ากับ r^2

18. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $a_n = \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ จะได้ว่า $a_{n+2} = \frac{1}{n+2}$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 = \lim_{n\to\infty} a_n$

19. **ถูกต้อง** เมื่อ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

เพราะว่า $\{a_{2n}\} = \{a_2 , a_4 , a_6 , a_8 , \ldots\}$ เป็นลำดับย่อยของ $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

20. **ถูกต้อง** $x + x(x+2) + x(x+2)^2 + x(x+2)^3 + \ldots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตมี $a = x$ และ $r = x + 2$

เพราะฉะนั้นจะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าเมื่อ $|x + 2| < 1$

$$-1 < x + 2 < 1$$

$$-3 < x < -1$$

เพราะฉะนั้น $A = \{x \in R \mid x + x(x+2) + x(x+2)^2 + \ldots$ ลู่เข้า$\} = (-3 , -1) \cup \{0\}$

เพราะฉะนั้น $A \subset (-\infty , 0]$

1.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ถ้า $|\sin x| \neq 1$ แล้วผลบวกของอนุกรม $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \ldots$ เท่ากับเท่าใด

 1. 2 2. $1 + \tan^2 x$

 3. $1 + \sin^2 2x$ 4. $\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

2. ผลบวกของอนุกรม $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ และ $s_n = n^2 + 5n$ ค่าของ a_5 เท่ากับเท่าใด

 1. -4 2. 2

 3. 14 4. 6

3. ผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$ เท่ากับเท่าใด

 1. 1 2. $\frac{1}{2}$

 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{1}{8}$

4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$ เท่ากับเท่าใด

 1. 0 2. $\frac{1}{2}$

 3. $\frac{1}{4}$ 4. 1

5. ผลบวก n พจน์แรกของอนุกรม $4 + 44 + 444 + 4444 + \ldots + 44444\ldots4$ (n ตัว) เท่ากับเท่าใด

 1. $\frac{4}{9}(10^{n+1} - 9n - 10)$ 2. $10^{n+1} - 9n - 10$

 3. $\frac{4}{81}(10^{n+1} - 9n - 10)$ 4. $\frac{4}{81}(10^{n+1} + 9n - 10)$

6. กำหนด $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2+4} + \frac{1}{2+4+6} + \ldots + \frac{1}{2+4+6+\ldots+2n}$

 ค่าของ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ เท่ากับเท่าใด

 1. $\frac{1}{2}$ 2. 1

 3. $\frac{5}{4}$ 4. $\frac{7}{4}$

7. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับที่ลู่เข้า

 1. $\sin^2 \frac{n\pi}{2} + \cos^2 \frac{n\pi}{2}$ 2. $2\cos^2 \frac{n\pi}{2} - 1$

 3. $\frac{n}{2n+1} \cos n\pi$ 4. $1 - 2\sin^2 \frac{n\pi}{4}$

8. กำหนด $|r| < 1$ ผลบวกของอนุกรม $\frac{a}{3}+\frac{r^2a}{3^3}+\frac{r^4a}{3^5}+\frac{r^6a}{3^7}+\ldots$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{a}{3^2(r-1)}$
2. $\frac{3a}{1-r^2}$
3. $\frac{3a}{(3-r)(3+r)}$
4. $\frac{a}{(1-3r)(1+3r)}$

9. ผลบวกของ $\sin 1° + \sin 2° + \sin 3° + \ldots + \sin 360°$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 1
3. -1
4. 2

10. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $1^2 + 2^2x^2 + 3^2x^4 + 4^2x^6 + \ldots$ มีค่าเท่าใด เมื่อ $|x| < 1$

1. $\frac{1+x^2}{(1+x^2)^2}$
2. $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
3. $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$
4. $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^3}$

เฉลยคำตอบ

1. (2)	2. (3)	3. (1)	4. (3)	5. (3)
6. (2)	7. (1)	8. (3)	9. (1)	10. (4)

ผลบวกของอนุกรมที่สำคัญ

1. $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
2. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$
3. $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-\frac{1}{11^3}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$
4. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
5. $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$

บทที่ 2
ลิมิตและความต่อเนื่อง

2.1 สรุปเนื้อหา

1. ลิมิตของฟังก์ชัน

ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a แล้วค่าของ f(x) มีค่าเข้าใกล้ L แล้วเรากล่าวว่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ เป็นการให้ความหมายของลิมิตของฟังก์ชันอย่างง่ายๆ เพื่อความสะดวกในการเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายแต่ในการเรียนระดับสูงขึ้นเราจะให้ความหมายของ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะต้องมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-a| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

ตัวอย่าง การแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 4} 8x + 1 = 33$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ $\quad 0 < |x-4| < \delta$

$$0 < |x-4| < \frac{\varepsilon}{8}$$

$$0 < |8x - 32| < \varepsilon$$

$$0 < |(8x+1) - 33| < \varepsilon$$

สรุป $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ ที่ทำให้ ถ้า $0 < |x-4| < \delta$ แล้ว $|f(x) - 33| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 33$

หมายเหตุ ในการเรียนการสอนและการสอบระดับมัธยมศึกษาตอนปลายไม่เน้นเรื่องการหาค่าลิมิตโดยใช้บทนิยาม แต่นิยมหาค่าลิมิตโดยใช้ผลของทฤษฎีลิมิตต่อไปนี้

ทฤษฎีบท เมื่อ a , L และ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมน และ เรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$

4. $\lim\limits_{x\to a} c\,f(x) = c\lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$, c เป็นค่าคงตัว

5. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$

6. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x) = L - M$

7. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

8. $\lim\limits_{x\to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

9. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n = L^n$

10. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{L} \in R$

ตัวอย่างเช่น $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 8$, $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2+1}{x+1} = \dfrac{17}{5}$, $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+3} = \sqrt{7}$

2. ลิมิตซ้ายและลิมิตขวา

ฟังก์ชันบางชนิดเช่น $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 4 \\ x^3 & x > 4 \end{cases}$

จะเห็นได้ว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 จะมีค่าของ f(x) ต่างกัน ดังนั้นการพิจารณาค่าของลิมิตจึงจำเป็นต้องตรวจสอบว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านซ้าย ค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 4^2
แต่เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 4 ทางด้านขวา ค่าของ f(x) จะมีค่าเข้าใกล้ 4^3

บทนิยาม $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านขวาแล้ว f(x) มีค่าเข้าใกล้ L

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ ถ้า x มีค่าเข้าใกล้ a ทางด้านซ้าย แล้ว f(x) มีค่าเข้าใกล้ L

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} -1 = -1$

$f(x) = \begin{cases} x^2+4 & x \leq 0 \\ x^2-4 & x > 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 - 4 = -4$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + 4 = 4$

ทฤษฎีบท $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

กล่าวโดยง่ายคือ ลิมิตของ f(x) เมื่อ x เข้าใกล้ a หาค่าได้ก็ต่อเมื่อลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาต้องหาค่าได้และเท่ากัน เราใช้ประโยชน์ของทฤษฎีบทนี้ช่วยแสดงว่า ลิมิตของ f(x) จะหาค่าได้หรือไม่

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ หาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} -1 = -1$

สรุป $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง $f(x)=\begin{cases} x^3+1, & x \le 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าได้หรือไม่

วิธีทำ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3+1 = 1$

สรุป $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

3. ความต่อเนื่อง

บทนิยาม f มีความต่อเนื่องที่ x = a ก็ต่อเมื่อ 1. f(a) หาค่าได้

2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

บทนิยาม f มีความต่อเนื่องบนช่วง (a , b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกค่า $x \in (a, b)$

บทนิยาม f มีความต่อเนื่องบนช่วง [a , b] ก็ต่อเมื่อ 1. f ต่อเนื่องบนช่วง (a , b)

2. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

3. $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

ตัวอย่าง $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & ; x \le 0 \\ x+1 & ; x > 0 \end{cases}$

$f(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x+1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2+1 = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

สรุป f ต่อเนื่องที่ x = 0

4. เทคนิคการหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

1. แทนค่าและใช้ผลของทฤษฎีลิมิต

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 4} x^2+x+4 = 4^2+4+4 = 24$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+4}{2x+1} = \frac{1^2+4}{2(1)+1} = \frac{5}{3}$$

2. แยกตัวประกอบแล้วเอาส่วนที่ทำให้ตัวเศษและส่วนเป็นศูนย์ตัดกันก่อนจึงแทนค่า

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x+1 = 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x^2+2x+4 = 12$$

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6}$$

3. หาตัวประกอบมาคูณบนและล่างโดยพิจารณาจากรูปแบบของฟังก์ชันที่กำหนดให้

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+1}-x = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

4. ลิมิตที่มีรูปแบบเฉพาะหรือต้องพิจารณาค่าของลิมิตจากกราฟ

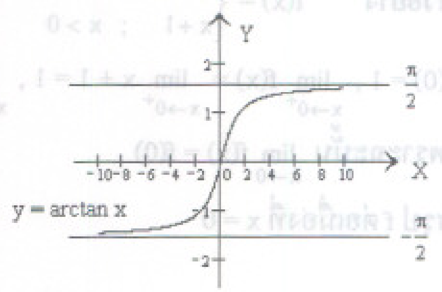
ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 0}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x} = 0$ ทุกค่า $n\in R^+$, $a>1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{a^x} = 0$$

โดยพิจารณาจากกราฟของ $y = \arctan x$ จะได้ว่า



$$\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

5. ใช้กฎของโลปิทัล

หมายเหตุ ทฤษฎีบทนี้เป็นเนื้อหาในวิชา CALCULUS ที่มีประโยชน์มากในการหาค่าลิมิต

ทฤษฎีบท ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, และ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ แล้ว $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

ตัวอย่าง $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{\frac{1}{4}}-1)'}{(x^{\frac{1}{3}}-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}}{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}=\frac{3}{4}$$

การใช้กฎโลปิทัลเป็นเนื้อหาที่เกินหลักสูตร ม.ปลาย แต่ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับการหาค่าลิมิตจะสามารถหาค่าของลิมิตได้ดีกว่าและเร็วกว่าการหาตัวประกอบมาคูณหรือใช้การแยกตัวประกอบ

ตัวอย่าง 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+4)^{\frac{1}{2}}-2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{((x+4)^{\frac{1}{2}}-2)'}{(x)'}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}}}{(1)}=\frac{1}{4}$$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^3+x^2-5x+3)'}{(x^2-3x+2)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{2x-3}=0$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}+1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{\frac{3}{2}}+1\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}}}{1}=\frac{3}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)'}{(x^{\frac{1}{2}}-1)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$

5. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{4-x^2}{x^4-16}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(4-x^2)'}{(x^4-16)'}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-2x}{4x^3}=\frac{-2(2)}{4(2^3)}=-\frac{4}{32}=-\frac{1}{8}$

2.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. คำนวณเฉพาะบางค่าของลิมิตเพื่อดูความเป็นไปได้ของค่าลิมิตว่าเป็นบวกหรือลบ ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 2.2.1 ค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$

3. ∞ 4. $-\infty$

การตัดตัวเลือก $x>0 \rightarrow \sqrt{x^2+1}>x$

$\rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0$

$\rightarrow x(\sqrt{x^2+1}-x)>0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)\geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4. ได้

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.2 ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{3}$ 2. $-\frac{2}{3}$

3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

การตัดตัวเลือก $(x\to 0^+) \rightarrow x>0$

$\rightarrow (1+x)^{\frac{3}{2}}>1$

$\rightarrow (1+x)^{\frac{3}{2}}-1>0$

$\rightarrow \dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}>0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(1+x^{\frac{3}{2}})-1}{x}\geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{((1+x)^{\frac{3}{2}}-1)((1+x)^{\frac{3}{2}}+1)}{x((1+x)^{\frac{3}{2}}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-1}{x((1+x)^{\frac{3}{2}}+1)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+3x+3x^2+x^3-1}{x((1+x)^{\frac{3}{2}}+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{3+3x+x^2}{(1+x)^{\frac{3}{2}}+1} = \frac{3}{2}$$

2. คำนวณเฉพาะค่าของลิมิตทางซ้ายหรือลิมิตทางขวาก็สามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 2.2.3 ค่าของ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 　　　　2. -2
3. $\frac{1}{2}$ 　　　　4. $-\frac{1}{2}$

การตัดตัวเลือก $h>0$ จะได้ว่า $1+h>1$

$$\sqrt{1+h}>1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}}<1$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1<0$$

$$\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)<0$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)\le 0$ 　　เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1-\sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}}\right) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{(1-\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}{(\sqrt{1+h})(1+\sqrt{1+h})}\right)$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1-(1+h)}{\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+h}(1+\sqrt{1+h})} = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2.2.4 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$ 　　　　2. $-\frac{1}{2}$
3. 1 　　　　4. $+\infty$

การตัดตัวเลือก เมื่อ $x>0$ จะได้ว่า $\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2}>0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2} \geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x^2(x+1)}+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|\sqrt{x+1}+x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\sqrt{x+1}+x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x(\sqrt{x+1})+x}{x^2}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{x} = +\infty$

3. ใช้เหตุผลว่า ถ้า f(a) หาค่าไม่ได้ แล้ว f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = a

ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้ แล้ว f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = a

ถ้า $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ไม่เท่ากัน แล้ว f ไม่มีความต่อเนื่องที่ x = a

ช่วยในการตัดตัวเลือกเกี่ยวกับโจทย์ที่ถามเกี่ยวกับความต่อเนื่อง

ตัวอย่างที่ 2.2.5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2+1 , & |x|>1 \\ 2x-1 , & |x|<1 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f ต่อเนื่องที่ x = 1

ข. f ต่อเนื่องที่ x = 2

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ผิด และ ข. ถูก
3. ก. ถูก และ ข. ผิด
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

การตัดตัวเลือก เพราะว่า f(1) โจทย์ไม่ได้กำหนดค่าให้ เพราะฉะนั้น f(1) หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 1 ดังนั้น ก. ผิด เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} x^2+1 = 5$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} x^2+1 = 5$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5 \neq f(2)$ เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2

2.3 การทำโจทย์ข้อสอบวิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 2.3.1 ค่าของ $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4x^2}-6}{3-|x|}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. -2
3. 4 4. -4

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** การคำนวณค่าลิมิตเมื่อ $x \to -3$ เราพิจารณาค่าลิมิตของ $\dfrac{\sqrt{4x^2}-6}{3-|x|}$ เมื่อ x เข้าใกล้ -3 ทางด้านบวกก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

บนช่วง $-3 < x < -2$ จะได้ $\sqrt{4x^2}-6 < 0$ และ $3-|x| > 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt{4x^2}-6}{3-|x|} < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4x^2}-6}{3-|x|} < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{4x^2}-6}{3-|x|} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2|x|-6}{3-|x|} = \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(-2)(3-|x|)}{3-|x|} = \lim\limits_{x\to -3}(-2) = -2$

ตัวอย่างที่ 2.3.2 ค่าของ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{1}{2}$ 2. $-\dfrac{1}{2}$
3. $\dfrac{1}{4}$ 4. $-\dfrac{1}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $x \to 1^+$ เราสามารถใช้การประมาณค่า $1 < x < 1.001$ เพื่อช่วยในการพิจารณาเครื่องหมายของ $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ว่าเป็นบวกหรือลบ

เมื่อ $x > 1$ จะได้ $\sqrt{x+3} > 2$ และ $x-1 > 0$

$\sqrt{x+3}-2 > 0$ และ $x-1 > 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} > 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \geq 0$

ความหมายของโจทย์จากเงื่อนไขของตัวเลือก กำหนดว่า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ ต้องหาค่าลิมิตได้ ดังนั้นต้องมีค่าลิมิต $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \geq 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\cdot\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.3 กำหนด $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & ; \ x<1\\[2mm] \dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} & ; \ x>1\end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้
2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)>0$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)<0$
3. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=2$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-2$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{1-x}}$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)\sqrt{1-x}}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{1-x} = 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}}$ (เพราะว่า $x>1$ เพราะฉะนั้น $|1-x|=x-1$)

$$= \lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{-(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} -(\sqrt{x}+1) = -2$$

สรุป $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)+\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=(-2)+(0)=-2$

ตัวอย่างที่ 2.3.4 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-2} & \text{เมื่อ } x \le -1 \\ x + \dfrac{1}{3} & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$ และ $f(2) = \frac{7}{3}$

เพราะฉะนั้น f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $f(-1) = \dfrac{2}{(-1)-2} = -\dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{2}{x-2} = -\dfrac{2}{3}$ และ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x + \dfrac{1}{3} = -\dfrac{2}{3}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = f(-1)$ สรุป f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = -1$

ตัวอย่างที่ 2.3.5 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -1 & , x \le 0 \\ \dfrac{x+3}{x-3} & , 0 < x < 2 \\ \sqrt{x+23} & , x \ge 2 \end{cases}$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0 , 2$
2. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0,2$
3. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$
4. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 2$ และ f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+3}{x-3} = -1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$ และเท่ากับ $f(0) = -1$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $f(2) = 5$ และ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x+3}{x-3} = -5$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

ตัวอย่างที่ 2.3.6 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x-3} & ; |x| < 3 \\ x^2-2x+5 & ; |x| > 3 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 8$ ข. $\lim\limits_{x\to -3} f(x) = -1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x^2-2x+5 = 8$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} x+2 = 5$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้นข้อความ ก. ผิด ทำให้เราตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{x^2-x-6}{x-3} = \lim\limits_{x\to -3^+} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3} = -1$

$\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3} x^2-2x+5 = 9+6+5 = 20$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 2.3.7 ค่าของ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $-\frac{2}{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เมื่อ $-1 < x < -0.99999$ จะได้ว่า $x+1 > 0$ และ $2x + \sqrt{x^2+3} > 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}} \geq 0$ และ $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}} \geq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x+1}{2x+\sqrt{x^2+3}} = \lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(2x-\sqrt{x^2+3})}{(2x+\sqrt{x^2+3})(2x-\sqrt{x^2+3})}$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-\sqrt{x^2+3})}{4x^2-(x^2+3)} = \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(2x-\sqrt{x^2+3})}{3(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{2x-\sqrt{x^2+3}}{3(x-1)} = \frac{2(-1)-\sqrt{(-1)^2+3}}{3(-1-1)} = \frac{-2-2}{-6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.8 กำหนด $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+4x+4}{|x+2|} & ;\ x\neq -2\\ k & ;\ x=-2\end{cases}$

k ต้องมีค่าเท่าใด จึงทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x=-2$

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** พิจารณาลิมิตเข้าใกล้ -2 ทางด้านบวกก็พอที่จะตัดตัวเลือกแล้ว

$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\frac{x^2+4x+4}{|x+2|} = \lim_{x\to-2^+}\frac{(x+2)^2}{x+2} = \lim_{x\to-2^+} x+2 = 0$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง ความหมายของโจทย์โดยดูจากตัวเลือกจะต้องสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to-2} f(x)$ ต้องหาค่าได้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = 0$ เพราะว่า f ต่อเนื่อง $x=-2$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = f(-2)$

สรุป $f(-2)$ ต้องเท่ากับ 0

ตัวอย่างที่ 2.3.9 กำหนด $f(x)=x+2$ และ $g(x)=\dfrac{4-x^2}{2-x}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(x)\neq g(x)$ และ $\lim\limits_{x\to2} f(x)\neq \lim\limits_{x\to2} g(x)$
2. $f(x)\neq g(x)$ และ $\lim\limits_{x\to2} f(x)= \lim\limits_{x\to2} g(x)$
3. $f(x)= g(x)$ และ $\lim\limits_{x\to2} f(x)= \lim\limits_{x\to2} g(x)$
4. $f(x)= g(x)$ และ $\lim\limits_{x\to2} f(x)\neq \lim\limits_{x\to2} g(x)$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f(x) = x + 2$ เพราะฉะนั้น $D_f = (-\infty , \infty)$

เพราะว่า $g(x) = \frac{4-x^2}{2-x}$ เพราะฉะนั้น $D_g = (-\infty , 2) \cup (2 , \infty)$

เพราะฉะนั้น $f(x) \neq g(x)$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x + 2 = 4$ และ $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} \frac{4-x^2}{2-x} = \lim\limits_{x\to 2} 2 + x = 4$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3 ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2.3.10 ค่าของ $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{3}$ 2. $-\frac{2}{3}$

3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** จากคำถามและตัวเลือกแสดงว่า $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ หาค่าได้

ดังนั้นพิจารณาค่าเมื่อ $x \to 1^+$ จะได้ว่า $\sqrt{x} - 1 > 0$ และ $\sqrt[3]{x} - 1 > 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ ทำให้ตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง **แบบที่ 1** $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{1}{2}}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{\frac{2}{6}}-1}{x^{\frac{3}{6}}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^{\frac{1}{6}})^2-1}{(x^{\frac{1}{6}})^3-1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x^{\frac{1}{6}}-1)(x^{\frac{1}{6}}+1)}{(x^{\frac{1}{6}}-1)(x^{\frac{2}{6}}+x^{\frac{1}{6}}+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{6}}+1}{x^{\frac{2}{6}}+x^{\frac{1}{6}}+1} = \frac{2}{3}$$

แบบที่ 2. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x^{\frac{1}{3}}-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}{(x^{\frac{1}{2}}-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^{\frac{1}{2}}+1)}{(x-1)(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.11 กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{x}-1} & ; x>\dfrac{1}{4}\\[2ex] \dfrac{1}{|4x|+1} & ; x\le\dfrac{1}{4}\end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x=\frac{1}{4}$

ข. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ $x=-\frac{1}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(-\frac{1}{4})=\dfrac{1}{|4(-\frac{1}{4})|+1}=\dfrac{1}{2}$

และ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}} f(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{1}{4}} \dfrac{1}{|4x|+1} = \dfrac{1}{2} = f(-\frac{1}{4})$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x=-\frac{1}{4}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} \dfrac{\sqrt{4x+3}-2}{2\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} \dfrac{(\sqrt{4x+3}-2)(\sqrt{4x+3}+2)(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{4x+3}+2)}$

$= \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} \dfrac{(4x+3-4)(2\sqrt{x}+1)}{(4x-1)(\sqrt{4x+3}+2)} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^+} \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{4x+3}+2} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}^-} \dfrac{1}{|4x|+1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \dfrac{1}{4x+1} = \dfrac{1}{2}$ และ $f(\frac{1}{4}) = \dfrac{1}{2}$

สรุป $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} f(x) = \dfrac{1}{2} = f(\frac{1}{4})$ เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x=\frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 2.3.12 ค่าของ $\lim\limits_{x\to-8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. −2
3. 4
4. −4

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $-8 < x$ จะได้ว่า $\sqrt{1-x}-3 < 0$ และ $2+\sqrt[3]{x} > 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} < 0$ ดังนั้น $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} \le 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim\limits_{x\to -8} \dfrac{(\sqrt{1-x}-3)(\sqrt{1-x}+3)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(2+x^{\frac{1}{3}})(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})(\sqrt{1-x}+3)}$

$$= \lim_{x\to -8} \frac{(1-x-9)(4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}})}{(8+x)(\sqrt{1-x}+3)} = -\lim_{x\to -8} \frac{4-2x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{1-x}+3} = -\frac{4+4+4}{3+3} = -2$$

ตัวอย่างที่ 2.3.13 กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+2 & ;\ x \le 1 \\ 3-kx^2 & ;\ x > 1 \end{cases}$

ค่าของ k ที่ทำให้ f มีความต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ เท่ากับเท่าใด

1. -1
2. 0
3. 1
4. 2

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+2 = 3$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ต้องเท่ากับ 3 จึงจะทำให้ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

เพราะฉะนั้น $3 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3-kx^2 = 3-k$ สรุป $k = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = x+2$ ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, 1)$ และ $f(1) = 3$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x+2 = 3$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 3-kx^2 = 3-k$

เพราะฉะนั้น $k = 0$ จึงจะทำให้ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = 3$ ต่อเนื่องบนช่วง $(1, \infty)$ สรุป $k = 0$ ทำให้ f ต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่างที่ 2.3.14 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^4-16}$ เท่ากับเท่าใด

1. -8
2. $-\dfrac{1}{8}$
3. 8
4. $\dfrac{1}{8}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เมื่อ $x \to 2^+$ จะได้ว่า $x > 2$ ดังนั้น $4 - x^2 < 0$ และ $x^2 - 16 > 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{4-x^2}{x^4-16} \le 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{x^4-16} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{(x^2+4)(x^2-4)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-1}{x^2+4} = -\dfrac{1}{8}$

ตัวอย่างที่ 2.3.15 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $(-\infty, \infty)$ และ f มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$

กำหนด $g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)(x^2-4)}{x-2} & ; x \ne 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$

ถ้ากราฟ $y = f(x)$ ตัดเส้นตรง $y = x + 3$ ที่ $x = 2$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ไม่มีจำนวนจริง a ที่ทำให้ g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$
2. ถ้า $a = 0$ แล้ว g มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$
3. g ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $a = 8$
4. g ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $a = 20$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เมื่อ $x \ne 2$ จะได้ $g(x) = \dfrac{f(x)(x^2-4)}{x-2} = \dfrac{f(x)(x-2)(x+2)}{x-2} = f(x)(x+2)$

เพราะว่า f(x) และ x + 2 ต่อเนื่องที่ $x = 2$ เพราะฉะนั้น g(x) ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง จาก $g(x) = \begin{cases} f(x)(x+2) & ; x \ne 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ เพราะว่า $y = f(x)$ ตัดกับ $y = x + 3$ เมื่อ $x = 2$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 5$ $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2} f(x)(x+2) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 2} (x+2) = f(2)(2+2) = 20$

ดังนั้น g ต่อเนื่องที่ $x = 2$ ก็ต่อเมื่อ $g(2) = 20 = a$

ตัวอย่างที่ 2.3.16 ค่าของ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. 3
2. -3
3. $\dfrac{1}{3}$
4. $-\dfrac{1}{3}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $x > 0$ จะได้ว่า $\sqrt[3]{x+1} - 1 > 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \geq 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} \geq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}+1)}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)-1}{x((\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}+1)} = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2.3.17 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{2x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 4.

แนวคิด **วิธีจริง** เพราะว่า $|x| = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{2x} & ; x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; x = 0 \\ \dfrac{x}{2x} & ; x > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & ; x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; x \geq 0 \end{cases}$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ และ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

เพราะฉะนั้น ก. ผิด และ ข. ผิด

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(0) = \dfrac{1}{2}$ และ f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = \dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นข้อความ ก. และ ข. ถ้าจะถูกก็ต้องถูกพร้อมกัน และถ้าจะผิดก็ต้องผิดพร้อมกัน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

ตัวอย่างที่ 2.3.18 ค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x^2+3x+1}-3x$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{3}$ 2. $-\frac{2}{3}$

3. $\frac{3}{2}$ 4. $-\frac{3}{2}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** $x > 0$; $\sqrt{4x^2+1} > 2x$

$$\sqrt{4x^2+1} - 2x > 0$$

และ $$\sqrt{x^2+3x+1} > x$$

$$\sqrt{x^2+3x+1} - x > 0$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2+3x+1} - 3x > 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2+3x+1} - 3x \geq 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $\sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2+3x+1} - 3x = (\sqrt{4x^2+1} - 2x) + (\sqrt{x^2+3x+1} - x)$

$$= \frac{\left(\sqrt{4x^2+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+1}+2x\right)}{\sqrt{4x^2+1}+2x} + \frac{(\sqrt{x^2+3x+1}-x)(\sqrt{x^2+3x+1}+x)}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

$$= \frac{4x^2+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+1}+2x} + \frac{x^2+3x+1-x^2}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} + \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x}$$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}+2x} = 0$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+1}+x} = \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{4x^2+1} + \sqrt{x^2+3x+1} - 3x = \frac{3}{2}$

ตัวอย่างที่ 2.3.19 กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; |x| < 1 \\ x^2-3 & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความ

ก. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$

ข. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -1$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $f(1) = -2$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 - 3 = -2$ และ $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x + 2 = 3$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 1 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $f(-1) = -2$ และ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} x + 2 = 1$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) \neq f(-1)$ แน่นอนจึงทำให้ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -1$

ดังนั้นข้อสรุปที่ถูกต้องคือ ก. ผิด และ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 2.3.20 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & ; x \neq 4 \\ k & ; x = 4 \end{cases}$

ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ x = 4 เมื่อ k มีค่าเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{4}$

3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{12}$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** คิดเฉพาะลิมิต $x \to 4^+$ ก็พอ

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to4^+} \frac{(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \frac{1}{4} = f(4) = k$ ด้วยจึงจะมีความต่อเนื่องที่ x = 4

เพราะฉะนั้น $k = f(4) = \frac{1}{4}$ ฟังก์ชัน f จึงจะต่อเนื่องที่ x = 4

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง ต้องหา $\lim\limits_{x\to4^-} f(x) = \frac{1}{4}$ แล้วจึงสรุปว่า $\lim\limits_{x\to4} f(x) = \frac{1}{4} = f(4) = k$

2.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = 0$
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2f(0)$
3. ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = a$ และ g ต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว $f(x) + g(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = a$
4. $\left|\lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right| = \left|\lim\limits_{x \to a^-} f(x)\right|$ ทุกค่า a และทุกฟังก์ชัน f
5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h}$ หาค่าได้เสมอ
6. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง (a , b] และ [b , c) แล้ว f ต่อเนื่องบนช่วง (a , c)
7. $\lim\limits_{x \to a} f(|x|) \geq 0$ ทุกค่า $a \in R$
8. ถ้า $f(x) > 0$ ทุกค่า $x \in D_f$ แล้ว $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) > 0$
9. ถ้า f ต่อเนื่องที่ $x = a$ และ g ต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
10. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง (a , b) แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a , b)
11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว $-f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$
12. ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $(-\infty , \infty)$ แล้ว $-f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(-\infty , \infty)$
13. ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ แล้ว f ต่อเนื่องที่ $x = a$
14. ถ้า $f(x) \leq g(x)$ ทุกค่า $x \in D_{f \cap g}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq \lim\limits_{x \to a} g(x)$ ทุกค่า $a \in D_{f \cap g}$
15. $f(x) = c$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน $(-\infty , \infty)$
16. ถ้า $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$
17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$ หาค่าไม่ได้
18. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้ทุกฟังก์ชัน f
19. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$ ทุกค่า $n = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots$
20. $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arccot} x = \pi$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่อง

1. **ถูกต้อง** เพราะว่า $f(0) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$

   เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq f(0)$ เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} 2 & ; x < 0 \\ 5 & ; x = 0 \\ 6 & ; x > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 6$, $f(0) = 5$

   ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq 2\,f(0)$

3. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} (\,f(x) + g(x)\,)$

   $= \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a) = (f+g)(a)$

   เพราะฉะนั้น f + g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} 4 & ; x \le 0 \\ 5 & ; x > 0 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 4$

   เพราะฉะนั้น $\left|\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right| \neq \left|\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\right|$

5. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -\dfrac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)}$

   $= \lim\limits_{-h\to 0} -\dfrac{f(x+(-h))-f(x)}{(-h)} = -f'(x)$ หาค่าได้เสมอ

6. **ถูกต้อง** เมื่อ f ต่อเนื่องบนช่วง (a , b] จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

   เมื่อ f ต่อเนื่องบนช่วง [b , c) จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$

   เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง (a , c)

7. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = -4$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(|\,x\,|) = \lim\limits_{x\to 0} -4 = -4$

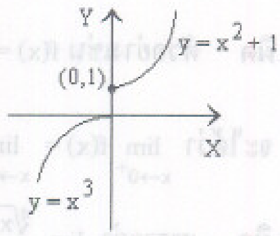
8. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ จะได้ว่า $f(x) > 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$

   แต่ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = 1$ และ $g(x) = 0$ จะได้ว่า f และ g ต่อเนื่องที่ x = 0

   แต่ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{0}$ หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $\dfrac{f}{g}$ ไม่ต่อเนื่องที่ x = 0

10. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} x^3 & ;\ x \le 0 \\ x^2 + 1 & ;\ x > 0 \end{cases}$



f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty, \infty)$

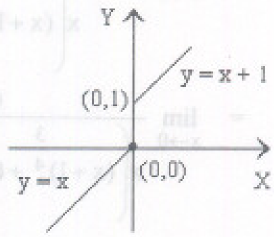
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + 1 = 1$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3 = 0$

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

11. ถูกต้อง เพราะว่า $\lim\limits_{x\to a} (-f)(x) = \lim\limits_{x\to a} -f(x) = -\lim\limits_{x\to a} f(x) = -f(a) = (-f)(a)$

เพราะฉะนั้น $-f$ ต่อเนื่องที่ $x = a$

12. ผิด ตัวอย่าง $f(x) = \begin{cases} x & ;\ x \le 0 \\ x+1 & ;\ x > 0 \end{cases}$



f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x + 1 = 1$

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

13. ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} x^2 & ;\ x < 0 \\ 10 & ;\ x = 0 \\ x^3 & ;\ x > 0 \end{cases}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^3 = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 = 0$ แต่ $f(0) = 10 \ne \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

เพราะฉะนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

14. ถูกต้อง ให้ $a \in D_{f\cap g}$

เพราะว่า $f(x) \le g(x) \quad \forall x \in D_{f\cap g}$

เพราะฉะนั้น $f(x) - g(x) \le 0$

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) \le 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) \le 0$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$$

15. ถูกต้อง เพราะว่าฟังก์ชันค่าคงตัว $f(x) = c$

มีค่า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} c = c = f(a)$ ทุกค่า $a \in (-\infty, \infty)$

เพราะฉะนั้น $f(x) = c$ ต่อเนื่องทุกจุด $x = a$ บน $(-\infty, \infty)$

16.ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} -x & ; x < 0 \\ 4 & ; x = 0 \\ x & ; x > 0 \end{cases}$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$ และ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 4 = f(0)$

17.ผิด เพราะว่า $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[4]{x+1} - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} (x+1)^{\frac{1}{4}} - 1$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left((x+1)^{\frac{1}{4}} - 1\right)\left((x+1)^{\frac{3}{4}} + (x+1)^{\frac{2}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} + 1\right)}{x\left((x+1)^{\frac{3}{4}} + (x+1)^{\frac{2}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+1) - 1}{x\left((x+1)^{\frac{3}{4}} + (x+1)^{\frac{2}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} + 1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(x+1)^{\frac{3}{4}} + (x+1)^{\frac{2}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} + 1} = \frac{1}{4}$$

18.ผิด ตัวอย่างเช่น $f(x) = |x|$ และ $x = 0$ จะได้ $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x} = +1$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$ หาค่าไม่ได้

19.ถูกต้อง เพราะว่า $(x+h)^n = x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{u}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n$

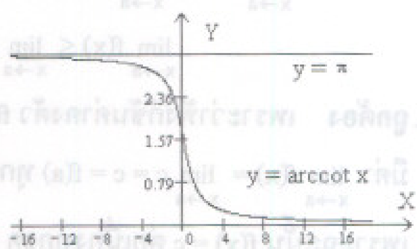
$$(x+h)^n - x^n = \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{u}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n$$

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{u}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim\limits_{h \to 0} nx^{n-1} + \binom{u}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} = nx^{n-1}$

20.ผิด เมื่อ $x > 0$ จะได้ $0 < \operatorname{arccot} x < \dfrac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to \infty} \operatorname{arccot} x \neq \pi$



กราฟของ y = arccotx

2.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ค่าของ $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x(x+2)} - x$ เท่ากับเท่าใด

   1. -1 2. 0
   3. 1 4. 2

2. กำหนด $f(x) = x\,|x-1|$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$

   ข. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

   ข้อสรุปใดถูกต้อง

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
   3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

3. กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{|x-4|}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 4$

   ข. $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ ข้อสรุปใดถูกต้อง

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด
   3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

4. ค่าของ $\lim_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}$ เท่ากับเท่าใด

   1. 0 2. 1
   3. -1 4. หาค่าไม่ได้

5. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & ; x > 0 \\ 4x^2+3 & ; x < 0 \end{cases}$ ตัวเลือกใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. f ต่อเนื่องที่ $x = 0$ 2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$
   3. $\lim_{x\to k} f(x) \neq 0$ ทุกค่า $k \in R$ 4. $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

6. ค่าของ $\lim_{x\to 2} \dfrac{2\sqrt[3]{3-x} - \sqrt[3]{10-x}}{x-2}$ เท่ากับเท่าใด

   1. $-\dfrac{7}{12}$ 2. $\dfrac{5}{12}$
   3. $-\dfrac{5}{12}$ 4. $\dfrac{7}{12}$

7. ค่าของ $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{8}{5}$ 2. $-\frac{8}{5}$

3. $\frac{5}{8}$ 4. $-\frac{5}{8}$

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4} & ; x \neq 4 \\ 8 & ; x = 4 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x\to -4} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ข. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 4$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

9. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x < 3 \\ 3 & ; 3 \leq x < 5 \\ x-2 & ; x \geq 5 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f ต่อเนื่องที่ $x = 3$

ข. f ต่อเนื่องที่ $x = 5$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

10. ค่าของ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2 2. -2

3. $\frac{1}{2}$ 4. $-\frac{1}{2}$

เฉลยคำตอบ 1. (3) 2. (1) 3. (3) 4. (4) 5. (3)

6. (1) 7. (3) 8. (3) 9. (3) 10. (1)

$$\sum_{n=1}^{100}\int_0^{n}\frac{d^3}{dx^3}x^4\,dx$$

บทที่ 3
อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

3.1 สรุปเนื้อหา

1. กำหนด $f : R \to R$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยจาก $x = x_1$ ไปยัง $x = x_2$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง $[x , x + \Delta x]$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

ตัวอย่าง $f(x) = x^2 + x + 1$ จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง $[x , x+\Delta x]$

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง $[x , x+\Delta x] = \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$$= \frac{(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)+1-(x^2+x+1)}{\Delta x}$$

$$= \frac{x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x+1-x^2-x-1}{\Delta x}$$

$$= 2x+\Delta x+1$$

3. ถ้า $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ หาค่าได้เรากล่าวว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด x และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่ x มีค่าเท่ากับ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ และใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $f'(x)$ หรือ $\dfrac{d}{dx}f(x)$ หรือ $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y = f(x)$

ตัวอย่าง $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^3+3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} 3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2 \quad = \quad 3x^2$$

ทฤษฎีบท ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด $x = a$ แล้ว f ต้องมีความต่อเนื่องที่ $x = a$

4. ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ ถ้า $y = f(x)$ แล้วจะได้ว่า $\frac{dy}{dx}$ เป็นความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$

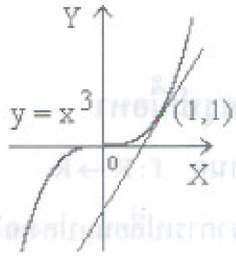
ตัวอย่าง $y = x^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$\frac{dy}{dx}(x = 1) = 3$ เพราะฉะนั้นจะได้ว่าเส้นตรง L ที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3$ ที่จุด (1 , 1) มีความชันเท่ากับ 3

ดังนั้นสมการเส้นตรง L คือ $y - 1 = (3)(x - 1)$

$$3x - y - 2 = 0$$



ข้อควรจำ เกี่ยวกับสมการเส้นตรง

1. ถ้า L_1 ขนาน L_2 แล้วความชัน L_1 เท่ากับ ความชัน L_2
2. ถ้า L_1 ตั้งฉากกับ L_2 แล้ว (ความชัน L_1) (ความชัน L_2) = -1
3. สมการเส้นตรงผ่านจุด (x_0 , y_0) มีความชันเท่ากับ m มีสมการเส้นตรงเป็น $y - y_0 = m(x - x_0)$
4. สมการเส้นตรงผ่านจุด (x_0 , y_0) , (x_1 , y_1) มีสมการเป็น $\frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$
5. ระยะทางจากจุด $P(x_0 , y_0)$ ไปยังเส้นตรง $ax + by + c = 0$ มีค่าเท่ากับ $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5. ความหมายของอนุพันธ์ในด้านอัตราของการเปลี่ยนแปลงค่า

เมื่อ $y = f(x)$

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ เป็นอัตราของการเปลี่ยนแปลงค่า y เทียบกับ x ขณะ $x = a$

เมื่อ $A(r) = \pi r^2$

$\left.\frac{d}{dr}A(r)\right|_{r=r_0}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี r ขณะ $r = r_0$

เมื่อ $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\left.\frac{d}{dr}V(r)\right|_{r=r_0}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงค่าของปริมาตรทรงกลมเทียบกับรัศมี r ขณะที่ $r = r_0$

ตัวอย่าง จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกล่องลูกบาศก์เทียบกับความยาวด้านขณะที่ความยาวด้าน = 10

วิธีทำ x = ความยาวด้าน

V = ปริมาตรกล่อง

$V(x) = x^3$

$\frac{dV}{dx} = 3x^2$

$\frac{dV}{dx}(x = 10) = 3(10)^2 = 300$

เพราะฉะนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาตรกล่องขณะที่ความยาว x = 10 มีค่าเป็น 300

6. สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ให้ y = f(x) เป็นฟังก์ชัน อนุพันธ์ของฟังก์ชันคือ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

1. ถ้า $f(x) = x^n$ จะได้ $f'(x) = nx^{n-1}$
2. ถ้า $f(x) = x$ จะได้ $f'(x) = 1$
3. ถ้า $f(x) = c$ จะได้ $f'(x) = 0$
4. ถ้า $f(x) = cg(x)$ จะได้ $f'(x) = c\,g'(x)$
5. ถ้า $f(x) = g(x) \pm h(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$
6. ถ้า $f(x) = g(x)h(x)$ จะได้ $f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$
7. ถ้า $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ จะได้ $f'(x) = \frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{[h(x)]^2}$
8. ถ้า $y = u^n$ และ $u = g(x)$ แล้ว $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = nu^{n-1}g'(x)$
9. ถ้า $f(x) = [g(x)]^n$ แล้ว $f'(x) = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

5. ความเร็วและความเร่ง

ให้ s = f(t) เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุตามแนวเส้นตรง ณ เวลา t ใดๆ

1. ความเร็วเฉลี่ยในช่วง t ถึง t + h คือ $\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$
2. ความเร็ว ณ เวลา t ใดๆ คือ $v = f'(t)$
3. ความเร่ง ณ เวลา t ใดๆ คือ $a = v'(t) = f''(t)$

ตัวอย่าง กำหนดสมการการเคลื่อนที่ $s(t) = 4t^2 - 2t - 5$ หน่วยเป็นเมตร , t หน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา $t = 2$

วิธีทำ $s(t) = 4t^2 - 2t - 5$

ความเร็ว $= v(t) = s'(t) = 8t - 2$

ความเร่ง $= a(t) = s''(t) = 8$

เมื่อเวลา $t = 2$ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 14 เมตร/วินาที

วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ 8 เมตร/วินาที^{2}

6. เครื่องหมายของ $f'(x)$ ช่วยในการตรวจสอบว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลด โดยมีเงื่อนไขดังนี้

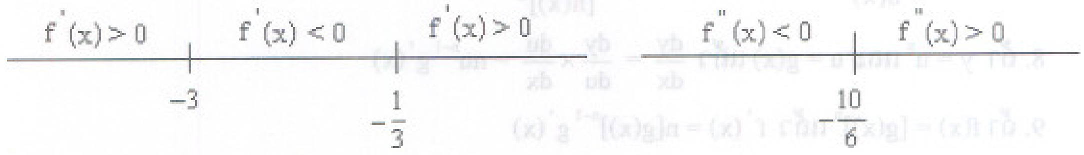
1. ถ้า $f'(x) > 0$ บนช่วง $[a , b]$ แล้ว f(x) มีค่าเพิ่มขึ้น (เป็นฟังก์ชันเพิ่ม) บนช่วง $[a , b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ บนช่วง $[a , b]$ แล้ว f(x) มีค่าลดลง (เป็นฟังก์ชันลด) บนช่วง $[a , b]$
3. ถ้า $f''(x) > 0$ บนช่วง $[a , b]$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง $[a , b]$
4. ถ้า $f''(x) < 0$ บนช่วง $[a , b]$ แล้ว $f'(x)$ มีค่าลดลงบนช่วง $[a , b]$

ตัวอย่าง $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4 , x \in (-\infty , \infty)$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดบนช่วงใด

วิธีทำ $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$

$f'(x) = 3x^2 + 10x + 3 = (3x + 1)(x + 3)$

$f''(x) = 6x + 10 = 6(x + \frac{10}{6})$



เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty , -3] , [-\frac{1}{3} , \infty)$

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-3 , -\frac{1}{3}]$

f' มีค่าลดลงบนช่วง $(-\infty , -\frac{10}{6}]$

f' มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง $[-\frac{10}{6} , \infty)$

7. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f : D_f \to R$, $c \in D_f$

ถ้า $f(x) \leq f(c)$ ทุกค่า $x \in D_f$ แล้ว $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์**ของ f บน D_f

ถ้า $f(x) \geq f(c)$ ทุกค่า $x \in D_f$ แล้ว $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์**ของ f บน D_f

ตัวอย่าง $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = [1, 2]$

เพราะว่า $1 \leq x \leq 2$

$1 \leq x^2 \leq 4$

$2 \leq x^2 + 1 \leq 5$

$2 \leq f(x) \leq 5$

$f(1) \leq f(x) \leq f(2) \quad \forall x \in [1, 2]$

เพราะฉะนั้น $f(2) = 5$ เป็นของสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[1, 2]$

$f(1) = 2$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน $[1, 2]$

ทฤษฎีบท 1. ถ้า f ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

แล้ว f ต้องมีทั้งค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ บน $[a, b]$

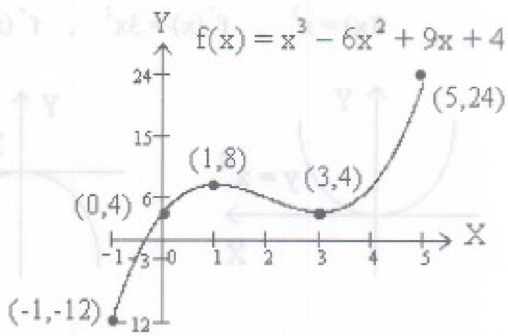
8. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f : D_f \to R$, $c \in D_f$

8.1 $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f บน D_f ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) \leq f(c)$ ทุกค่า $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D_f$

8.2 $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D_f ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $f(x) \geq f(c)$ ทุกค่า $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D_f$

ตัวอย่าง $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$; $D_f = [-1, 5]$



$f(-1) = -12$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(1) = 8$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

$f(3) = 4$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f(5) = 24$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

หมายเหตุ ค่าสุดขีด หมายถึง ค่าสูงสุดสัมบูรณ์หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ หมายถึง ค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ทุกค่าสุดขีดเป็นค่าสุดขีดสัมพัทธ์

9. การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท กำหนด

$f : [a , b] \to R$ และ $c \in [a , b]$

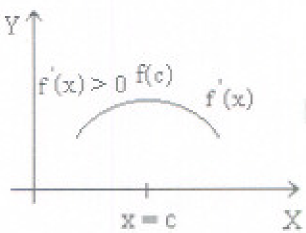
ถ้า $f(c)$ เป็นค่าสุดขีด แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

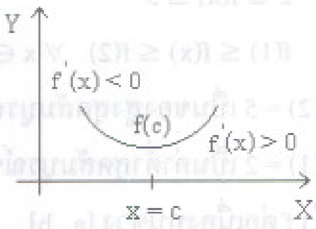
บทนิยาม $f : D_f \to R$ และ $c \in D_f$

$x = c$ เป็นจุดวิกฤต ถ้า $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > c$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบท ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > c$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์





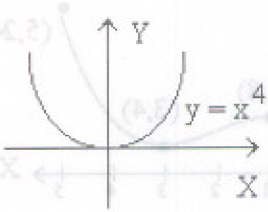
ทฤษฎีบท เมื่อ $x = c$ เป็นค่าวิกฤตและ $f''(c)$ หาค่าได้

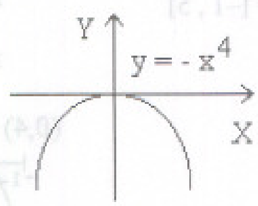
1. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
2. ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
3. ถ้า $f''(c) = 0$ แล้ว สรุปไม่ได้

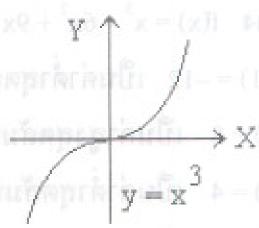
ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^4$, $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$

$f(x) = -x^4$, $f'(x) = -4x^3$, $f''(x) = -12x^2$, $f''(0) = 0$

$f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f''(0) = 0$



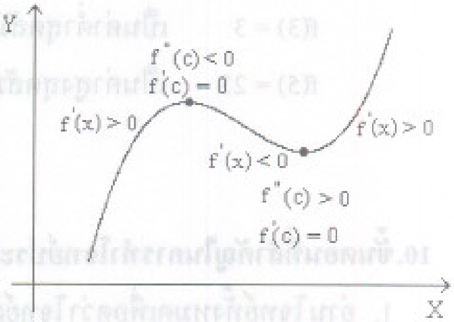




$f(0) = 0$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $f(0) = 0$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $f(0) = 0$ ไม่เป็นทั้งค่าสูงสุดและไม่เป็นค่าต่ำสุด

คำแนะนำ ขั้นตอนที่สำคัญในการหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $f : [a , b] \to R$

1. จาก $f(x)$ = สูตรที่กำหนดให้
2. หา $f'(x) = \ldots$
3. หา $f''(x) = \ldots$
4. หาจุดวิกฤต โดยใช้เงื่อนไข $f'(x) = 0$
   หรือ $f'(x)$ หาค่าไม่ได้ สมมติ $x = c$ เป็นค่าวิกฤต
5. ถ้า $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์
   ถ้า $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   ถ้า $f''(c) = 0$ ให้ตรวจสอบต่อไป โดยใช้ข้อ 6



6. 6.1 ถ้า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x > c$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์
   6.2 ถ้า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < c$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > c$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

กรณีที่ $D_f = [a , b]$ ต้องตรวจสอบค่า x ที่จุดขอบด้วยว่า $f(a)$, $f(b)$ เป็นค่าสุดขีดหรือไม่ เมื่อตรวจสอบค่าสุดขีดที่จุดวิกฤตทุกจุดแล้วจึงสรุปหาค่าสูงสุดสัมบูรณ์และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ได้

ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดและต่ำสุดของ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$; $D_f = [0 , 5]$

วิธีทำ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 3)(x - 1)$

$f''(x) = 6x - 12$

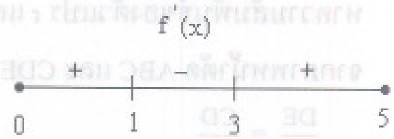
$f'(x) = 0 \leftrightarrow 3(x - 3)(x - 1) = 0$

$x = 1 , 3$

เพราะว่า $f''(1) = -6 < 0$ เพราะฉะนั้น $f(1) = 7$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f''(3) = 6 > 0$ เพราะฉะนั้น $f(3) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $f'(x) = 3(x - 3)(x - 1)$ มีเป็นบวกและลบบนช่วง $[0 , 4]$ เป็นดังนี้



เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , 1]$, $[3 , 5]$

f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[1 , 3]$

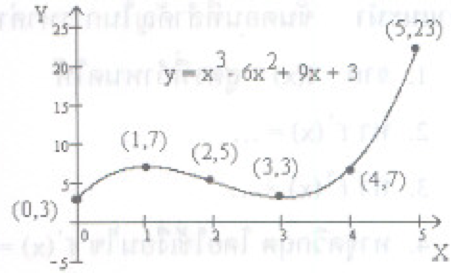
และ $f(0) = 3$, $f(5) = 23$, $f(1) = 7$, $f(2) = 5$, $f(3) = 3$

สรุป $f(0) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(1) = 7$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

$f(3) = 3$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

$f(5) = 23$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

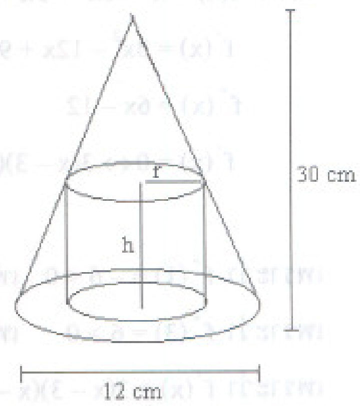


10. ขั้นตอนที่สำคัญในการทำโจทย์ประยุกต์ค่าสูงสุดและต่ำสุด

1. อ่านโจทย์ทั้งหมดเพื่อดูว่าโจทย์ต้องการหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของอะไร
2. วาดรูปประกอบ (ถ้าทำได้)
3. สมมติตัวแปรที่เกี่ยวข้องทั้งหมด เช่น f และ x
4. หาความสัมพันธ์ของตัวแปร
5. หาสูตรความสัมพันธ์ของตัวแปรและจัดรูปเป็น f(x) เทอมของ x
6. หาค่าสูงสุดและ หรือต่ำสุดของ f(x) โดยใช้วิธีจากที่ผ่านมา

ตัวอย่าง จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุดที่บรรจุในกรวยกลม ซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 เซนติเมตร และกรวยสูง 30 เซนติเมตร โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

วิธีทำ 1. อ่านโจทย์ทั้งหมด สรุปว่าต้องการหาปริมาตรมากที่สุด



2. วาดรูปประกอบ
3. สมมติตัวแปร

V = ปริมาตรทรงกระบอก (ต้องมีแน่ๆ เพราะ โจทย์ต้องการ)

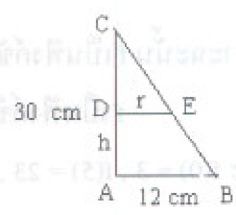
r = รัศมีทรงกระบอก

h = ความสูงทรงกระบอก

4. ความสัมพันธ์ของตัวแปร $V = \pi r^2 h$

หาความสัมพันธ์ของตัวแปร r และ h

จากภาพหน้าตัด ABC และ CDE เป็นสามเหลี่ยมคล้าย



$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

$$\frac{r}{12} = \frac{30-h}{30}$$

$$h = 30 - \frac{5r}{2}$$

5. หาสูตร V ในเทอมของ r เพราะฉะนั้น $V = \pi r^2(30 - \frac{5}{2}r)$

กำหนดให้ V เป็นฟังก์ชันของ r โดย $V(r) = 30\pi r^2 - \frac{5}{2}\pi r^3$

6. หาค่าสูงสุดของ V(r)

$V(r) = 30\pi r^2 - \frac{5}{2}\pi r^3 \quad ; \; 0 \le r \le 12$

$V'(r) = 60\pi r - \frac{15}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{2}r(120 - 15r) = \frac{15\pi r}{2}(8 - r)$

$V''(r) = 60\pi - 15\pi r$

$V'(r) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $60\pi r - \frac{15}{2}\pi r^2 = 0$

$r \neq 0 \; ; \; 60 - \frac{15}{2}r = 0$

$r = \frac{120}{15} = 8$

เพราะว่า $V''(8) = 60\pi - 15\pi(8) = -60\pi < 0$

เพราะฉะนั้น $V(8) = 30\pi(64) - \frac{5}{2}\pi(512) = 1920\pi - 1280\pi = 640\pi$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

เพราะว่า $V'(r) > 0$ เมื่อ $0 \le r < 8$ และ $V'(r) < 0$ เมื่อ $8 < r \le 12$

เพราะฉะนั้น $V(8) = 640\pi$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง [0 , 12]

สรุป ทรงกระบอกที่มีปริมาตรมากที่สุดที่บรรจุในกรวยกลม ซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 cm และกรวยสูง 30 cm โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวยมีปริมาตรเท่ากับ 640π cm^3

โปรแกรม MATHCAD สามารถคำนวณค่า ลิมิต อนุพันธ์และค่าอินทิกรัลได้

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} \qquad 1$$

$$\int x^2 + x + 4\,dx \qquad \frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^2 + 4\cdot x\right) \qquad x^2 + x + 4$$

คู่มือ MATHCAD หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

3.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร ใช้การแทนค่าบางค่าที่เหมาะสมช่วยในการตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 3.2.1 กำหนดให้ $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ g เทียบกับ x ในช่วง [x , x + h] คือข้อใด

1. $\dfrac{1}{(x+h+1)^2}$ 2. $\dfrac{1}{(x+1)(x+h+1)}$

3. $\dfrac{1}{(x+1)^2 - h^2}$ 4. $\dfrac{1}{h^2 + (x+1)^2}$

ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x , h แทนค่า x = 2 , h = 1

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ g เทียบกับ x ในช่วง [2 , 3] เท่ากับ

$$\frac{g(3)-g(2)}{3-2} = \frac{\left(2-\frac{1}{4}\right)-\left(2-\frac{1}{3}\right)}{1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

แทนค่า x = 2 , h = 1 ในทุกตัวเลือก

1. $\dfrac{1}{(x+h+1)^2} = \dfrac{1}{16}$ 2. $\dfrac{1}{(x+1)(x+h+1)} = \dfrac{1}{12}$

3. $\dfrac{1}{(x+1)^2 - h^2} = \dfrac{1}{8}$ 4. $\dfrac{1}{h^2 + (x+1)^2} = \dfrac{1}{10}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ g เทียบกับ x ในช่วง [x , x + h]

$$= \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{\left(2-\frac{1}{x+h+1}\right)-\left(2-\frac{1}{x+1}\right)}{h} = \frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+h+1}}{h}$$

$$= \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(x+1)(x+h+1)} = \frac{1}{(x+1)(x+h+1)}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.2 ถ้า $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ และ $h(x) = \dfrac{d}{dx}\left(f(x^2)\right)$ แล้ว h(x) มีค่าเท่ากับตัวเลือกใด

1. $\dfrac{2x(x^2-x-3)}{(x^2+1)^2}$ 2. $\dfrac{2x(x^2-x-3)}{(x^2-1)^2}$

3. $\dfrac{2x(x^2-x-3)}{(x^2+1)^2}$ 4. $\dfrac{x(x^2-x-3)}{(x^2-1)^2}$

ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก เพราะว่า f(1) หาค่าไม่ได้ เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}(f(x^2))$ ต้องหาค่าไม่ได้เมื่อ x = 1 เพราะฉะนั้น h(1) ต้องหาค่าไม่ได้ แต่ตัวเลือก 1. และ 3. หาค่าไม่ได้เมื่อ x = 1 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง
$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$
$$f(x^2) = \frac{x^2+2}{x^2-1}$$
$$\frac{d}{dx}(f(x^2)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)$$
$$h(x) = \frac{(x^2-1)(2x)-(x^2+2)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x-2x^3-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3-2x^2-6x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-x-3)}{(x^2-1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 3.2.3 กำหนดให้ $y = \frac{1}{2x+1}$ ค่าของ $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{4x^2+5}{(2x+1)^3}$
2. $\frac{4x^2+7}{(2x+1)^3}$
3. $\frac{2x^2+7}{(2x+1)^3}$
4. $\frac{2x^2+5}{(2x+1)^3}$

ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตร จากโจทย์ $y = \frac{1}{2x+1}$, $y(2) = \frac{1}{5}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2x+1)^2} \qquad \frac{dy}{dx}(x=2) = \frac{2}{25}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{(2x+1)^3} \qquad \frac{d^2y}{dx^2}(x=2) = \frac{8}{125}$$
$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y\right)(x=2) = \frac{8}{125}-\frac{2}{25}+\frac{1}{5} = \frac{8-10+25}{125} = \frac{23}{125}$$

แทนค่า x = 2 ในทุกตัวเลือกจะได้ 1. $\frac{4x^2+5}{(2x+1)^3} = \frac{21}{125}$ 2. $\frac{4x^2+7}{(2x+1)^3} = \frac{23}{125}$

3. $\frac{2x^2+7}{(2x+1)^3} = \frac{15}{125}$ 4. $\frac{2x^2+5}{(2x+1)^3} = \frac{13}{125}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $y = \dfrac{1}{2x+1} = (2x+1)^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{(2x+1)^2} = (-2)(x+1)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 4(2x+1)^{-3}(2) = 8(2x+1)^{-3} = \frac{8}{(2x+1)^3}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \frac{8}{(2x+1)^3} - \frac{2}{(2x+1)^2} + \frac{1}{2x+1} = \frac{8-2(2x+1)+(2x+1)^2}{(2x+1)^3}$$

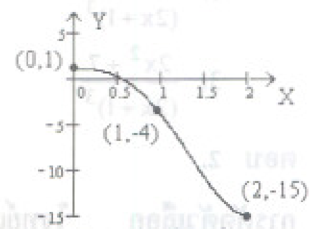
$$= \frac{8-4x-2+4x^2+4x+1}{(2x+1)^3} = \frac{4x^2+7}{(2x+1)^3}$$

2. คำถามเกี่ยวกับค่าสูงสุด , ค่าต่ำสุด , ฟังก์ชันเพิ่ม , ฟังก์ชันลด เราสามารถใช้การแทนค่าบางค่าของ x เพื่อช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 3.2.4 กำหนด $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$ บนช่วง $[0 , 2]$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , 2]$ 2. f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0 , 2]$
3. $f(0)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ 4. $f(2)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ตอบ 2.



$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$

การตัดตัวเลือก $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$

$f(0) = 1$, $f(1) = -4$, $f(2) = 48 - 64 + 1 = -15$

โดยการแทนค่าเพียง 3 จุดยืนยันได้ว่า

1. f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , 2]$
3. $f(0)$ ไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ 4. $f(2)$ ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 1$ $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 = 12x^2(x-2)$

บนช่วง $[0 , 2]$; $0 \le x \le 2$

$$-2 \le x - 2 \le 0$$

$$-24x^2 \le 12x^2(x-2) \le 0$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) \le 0$ บนช่วง $[0 , 2]$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0 , 2]$

ตัวอย่างที่ 3.2.5 ฟังก์ชัน $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}}$ บนช่วง $(-\infty , \infty)$ ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

1. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , \infty)$ 2. f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0 , \infty)$
3. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , 1]$ 4. f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0 , 1]$

ตอบ 4.

การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่า x บางค่าที่คิดเลขง่าย $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}}$

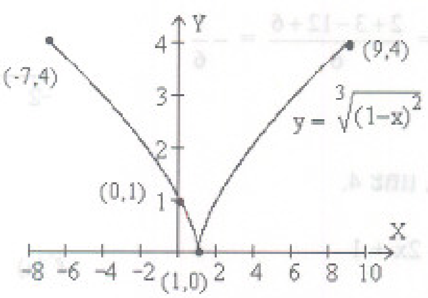
$f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(9) = 4$, $f(-7) = 4$

เพราะฉะนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , \infty)$

f ไม่เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0 , \infty)$

f ไม่เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[0 , 1]$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.



วิธีจริง $f(x) = (1-x)^{\frac{2}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(1-x)^{-\frac{1}{3}}(-1) = \frac{-2}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} = -\frac{2(1-x)^{\frac{2}{3}}}{3(1-x)} = \frac{2(1-x)^{\frac{2}{3}}}{3(x-1)}$$

เพราะว่า $\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{2}{3}} > 0$ ทุกค่า $x \neq 1$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = \frac{2}{3}\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)} > 0$ เมื่อ $x > 1$ และ $f'(x) = \frac{2(1-x)^{\frac{2}{3}}}{3(x-1)} < 0$ เมื่อ $x < 1$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันลดลงบนช่วง $[0 , 1]$

3. การนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์ จะทำให้เราสามารถตัดตัวเลือกที่ไม่ได้คะแนนออกไปได้ โดยเรานำค่าที่คิดเลขได้ง่ายๆ จากตัวเลือกออกมาใช้ก่อน

ตัวอย่างที่ 3.2.6 $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$ บนช่วง $[-2, 2]$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ เมื่อ x มีค่าเท่าใด

1. $x = -2$ 2. $x = 0$

3. $x = 1$ 4. $x = 2$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าในตัวเลือกไปแทนค่าในโจทย์

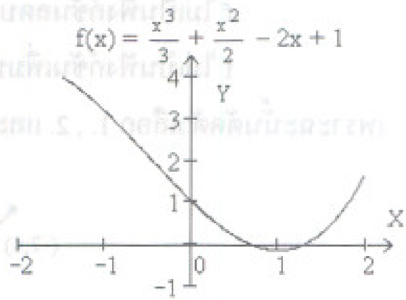
$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$$

$$f(-2) = -\frac{8}{3} + 2 + 4 + 1 = -\frac{8}{3} + \frac{21}{3} = \frac{13}{3}$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{2+3-12+6}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$f(2) = \frac{8}{3} + \frac{8-3}{3} = \frac{5}{3}$$

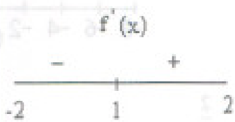


เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

$$f'(x) = x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

$$f''(x) = 2x + 1$$



เพราะว่า $f'(x) = (x-1)(x+2)$

เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ เมื่อ $-2 < x < 1$ $\longrightarrow$ f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[-2, 1]$

$f'(x) > 0$ เมื่อ $1 < x < 2$ $\longrightarrow$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[1, 2]$

เพราะฉะนั้น $f(-2) \geq f'(x) \quad \forall\, x \in [-2, 1]$

และ $f(2) \geq f(x) \quad \forall\, x \in [1, 2]$

เพราะว่า $f(-2) = \frac{13}{3} > \frac{5}{3} = f(2)$

สรุป $f(-2) = \frac{13}{3}$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[-2, 2]$

3.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 3.3.1 สมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด (1 , 3) และมีความชันของเส้นสัมผัส ณ. จุด (x , y) ใดๆ เป็น 2x + 5 คือสมการในตัวเลือกใด

1. $y = x^2 + 5x - 3$
2. $y = 2x^2 + 5x - 3$
3. $y = x^2 + 5x - 4$
4. $y = 2x^2 + 5x - 4$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า เมื่อ y = f(x) เป็นสมการเส้นโค้งจะได้ $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

การหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ของทุกตัวเลือกก็จะตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$
2. $\frac{dy}{dx} = 4x + 5$
3. $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$
4. $\frac{dy}{dx} = 4x + 5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

เพราะว่าเส้นโค้งต้องผ่านจุด (1 , 3) ดังนั้นแทนค่า x = 1 ในตัวเลือกที่เหลือจะได้

1. $y = 1^2 + 5(1) - 3 = 3$
3. $y = 1^2 + 5(1) - 4 = 2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

$$y = \int(\frac{dy}{dx})dx = \int(2x+5)dx = x^2 + 5x + c$$

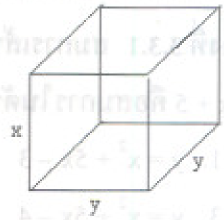
เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 3) เพราะฉะนั้น 3 = 1 + 5 + c , c = – 3

สรุป $y = x^2 + 5x - 3$

ตัวอย่างที่ 3.3.2 กล่องใบหนึ่งมีฐานเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสและมีปริมาตร 96 ลูกบาศก์นิ้ว ในการสร้างกล่องใบนี้ ค่าจ้างทำด้านข้าง 3 บาทต่อตารางนิ้ว และค่าจ้างทำด้านฐาน 4 บาท ต่อตารางนิ้ว และค่าจ้างทำด้านฝากล่อง 5 บาทต่อตารางนิ้ว ความสูงของกล่องนี้เท่ากับเท่าใดจึงจะทำให้เสียค่าใช้จ่ายในการทำกล่องน้อยที่สุด

1. 6 นิ้ว
2. 8 นิ้ว
3. 10 นิ้ว
4. 12 นิ้ว

ตอบ 1.



แนวคิด การตัดตัวเลือก x = ความสูง

y = ความยาวด้านฐาน

เพราะฉะนั้น $y^2x = 96$

$$y = \sqrt{\frac{96}{x}}$$

ค่าผลิตด้านข้าง $= 3(4(xy)) = 12xy = 12x\sqrt{\frac{96}{x}}$

ค่าผลิตด้านฐาน $= 4(y^2) = \frac{384}{x}$

ค่าผลิตด้านฝากล่อง $= 5(y^2) = \frac{480}{x}$

เพราะฉะนั้นค่าผลิตทั้งหมด = ค่าผลิตด้านข้าง+ ค่าผลิตด้านล่าง + ค่าผลิตฝา

$$= 12x\sqrt{\frac{96}{x}} + \frac{384}{x} + \frac{480}{x} = 12x\sqrt{\frac{96}{x}} + \frac{864}{x}$$

แทนค่า x จากทุกตัวเลือก เพื่อหาใช้จ่ายต่ำสุด

1. $x = 6$; $12(6)\sqrt{\frac{96}{6}} + \frac{864}{6} = 72(4) + 144 = 432$
2. $x = 8$; $12(8)\sqrt{\frac{96}{8}} + \frac{864}{8} = 96(\sqrt{12}) + 108 = 440.5$
3. $x = 10$; $12(10)\sqrt{\frac{96}{10}} + \frac{864}{10} = 120\sqrt{9.6} + 86.4 = 458.206$
4. $x = 12$; $12(12)\sqrt{\frac{96}{12}} + \frac{864}{12} = 144\sqrt{8} + 72 = 479.3$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $12x\sqrt{\frac{96}{x}} + \frac{864}{x} = 48x\sqrt{\frac{6}{x}} + \frac{864}{x} = 48\left(x\sqrt{\frac{6}{x}} + \frac{18}{x}\right) = 48(\sqrt{6}\,x^{\frac{1}{2}} + 18x^{-1})$

ให้ $f(x) = \sqrt{6}\,x^{\frac{1}{2}} + 18x^{-1}$

$f'(x) = \frac{\sqrt{6}}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 18x^{-2}$

$f'(x) = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\frac{\sqrt{6}}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 18x^{-2} = 0$

$x \neq 0$; $\frac{\sqrt{6}}{2} - 18x^{-\frac{3}{2}} = 0$

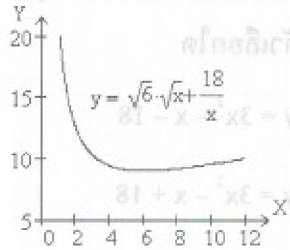
$$18x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$x^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{36}$$

$$x^{-\frac{3}{2}} = \frac{36}{\sqrt{6}}$$

$$x^3 = \frac{(36)^2}{6} = 6^3$$

$$x = 6$$



เพราะว่า $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < 6$ และ $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > 6$ เพราะฉะนั้น $f(6)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

เพราะฉะนั้น $12x\sqrt{\frac{96}{x}} + \frac{864}{x}$ มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = 6$ นิ้ว

ตัวอย่างที่ 3.3.3 กำหนด $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$ เป็นสมการเส้นโค้งที่มีเส้นสัมผัสตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 6y + 5 = 0$ สมการของเส้นสัมผัสคือเส้นใด

1. $6x - y - 24 = 0$
2. $6x + y - 3 = 0$
3. $6x - y + 18 = 0$
4. $6x + y - 12 = 0$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ความชันของเส้นตรง $x + 6y + 5 = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{6}$

ดังนั้นเส้นที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 6y + 5 = 0$ ต้องมีความชันเท่ากับ 6

ความชันของแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น 1. ความชัน = 6 2. ความชัน = – 6

3. ความชัน = 6 4. ความชัน = – 6

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = 3x^2 - 18x + 24$, $f'(x) = 6x - 18$

เส้นตรง $x + 6y + 5 = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{1}{6}$

ดังนั้นเส้นสัมผัส $y = f(x)$ จะตั้งฉากกับ $x + 6y + 5 = 0$ ต้องมีความชันเท่ากับ 6

เพราะฉะนั้น $6x - 18 = f'(x) = 6$ และ $6x - 18 = 6$

เพราะฉะนั้น $x = 4$ และ $y = f(4) = 3(4^2) - 18(4) + 24 = 48 - 72 + 24 = 0$

ดังนั้นสมการเส้นสัมผัสคือ $y - 0 = 6(x - 4)$ หรือ $6x - y - 24 = 0$

ตัวอย่างที่ 3.3.4 สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่ผ่านจุด $(4 , 2)$ และมีความชัน ณ. จุด $P(x , y)$ ใดๆ เป็น $3x - 1$ คือตัวเลือกใด

1. $y = 3x^2 - x - 18$ 2. $y = \dfrac{3x^2}{2} - x + 18$

3. $y = 3x^2 - x + 18$ 4. $y = \dfrac{3x^2}{2} - x - 18$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์กำหนดความชัน $= \dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$

ค่าของ $\dfrac{dy}{dx}$ ของแต่ละตัวเลือกคือ 1. $\dfrac{dy}{dx} = 6x - 1$ 2. $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$

3. $\dfrac{dy}{dx} = 6x - 1$ 4. $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

เพราะว่าเส้นโค้งต้องผ่านจุด $(4 , 2)$ แต่ $3(4)^2 - 4 - 18 \neq 2$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง เพราะว่า $\dfrac{dy}{dx}$ = ความชัน $= 3x - 1$ เพราะฉะนั้น $y = \int(\dfrac{dy}{dx})dx = \int(3x - 1)dx = \dfrac{3x^2}{2} - x + c$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด $(4 , 2)$ เพราะฉะนั้น $2 = \dfrac{3}{2}(4)^2 - 4 + c , c = -18$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นโค้งคือ $y = \dfrac{3x^2}{2} - x - 18$

ตัวอย่างที่ 3.3.5 กำหนดให้ $f(x) = (3x - 2)^2 + \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ ค่าของ $f'(x^2) - f'(1)$ เท่ากับเท่าใด

1. $6x^2 - 2 - \dfrac{4}{x^3}$ 2. $6x^2 - 4 - \dfrac{2}{x^3}$

3. $18x^2 - 14 - \dfrac{4}{x^3}$ 4. $18x^2 - 16 - \dfrac{2}{x^3}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f'(1)$ เป็นตัวเลขแน่นอน

เพราะฉะนั้นคิดจากพจน์ของ $f'(x^2)$ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

$$f(x) = (3x - 2)^2 + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2(3x - 2)(3) - 2x^{-\frac{3}{2}} = 18x - 12 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3} = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3}$$

ขอให้สังเกตดูจากพจน์ของ $18x^2$ และ $-\frac{2}{x^3}$ ก็สามารถตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $f(x) = (3x-2)^2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = 9x^2 - 12x + 4 + 4x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = 18x - 12 + 0 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}} = 18x - 12 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'(1) = 18 - 12 - 2 = 4$$

$$f'(x^2) = 18x^2 - 12 - 2x^{-3} = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x^2) - f'(1) = 18x^2 - 12 - \frac{2}{x^3} - 4 = 18x^2 - 16 - \frac{2}{x^3}$$

ตัวอย่างที่ 3.3.6 กำหนดให้ $f(x) = -\frac{1}{x}$

อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง x + h มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{-2x-h}{xh(x+h)}$　　2. $\frac{1}{x(x+h)}$
3. $\frac{2x+h}{xh(x+h)}$　　4. $\frac{1}{x^2}$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** **แบบที่ 1** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ h

ดังนั้นแทนค่า x = 1 และ h = 1

จะได้อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง 1 และ 2 เท่ากับ $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)-(-1)}{1} = \frac{1}{2}$

แทนค่า x = 1 , h = 1 ในตัวเลือกทั้ง 4 จะได้　1. $\frac{-2x-h}{xh(x+h)} = -\frac{3}{2}$　2. $\frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{2}$

3. $\frac{2x+h}{xh(x+h)} = \frac{3}{2}$　4. $\frac{1}{x^2} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เมื่อ $h \to 0$ จะได้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f บนช่วง x และ x + h เท่ากับ $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ เมื่อเราหาลิมิตของแต่ละตัวเลือกจะได้ว่า

1. $\lim_{h\to 0} \frac{-2x-h}{xh(x+h)} = \infty$　　2. $\lim_{h\to 0} \frac{1}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2}$

3. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2x+h}{xh(x+h)} = \infty$ 4. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ f ในช่วง x ถึง x + h มีค่าเท่ากับ = $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

และ $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{-\frac{1}{x+h}+\frac{1}{x}}{h} = \dfrac{-x+(x+h)}{hx(x+h)} = \dfrac{h}{hx(x+h)} = \dfrac{1}{x(x+h)}$

ตัวอย่างที่ 3.3.7 กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \dfrac{2x^3-3}{x^2}$; $x > 0$ ที่จุด (1 , – 1) เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ณ จุดสัมผัสจะตัดกับพาราโบลา $x = y^2$ ที่จุดใดต่อไปนี้

1. (1 , – 1) , (4 , 2) 2. (1 , – 1) , (16 –4)

3. (1 , – 1) , (25 , 5) 4. (1 , – 1) , (49 , – 7)

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $y = \dfrac{2x^3-3}{x^2} = 2x - \dfrac{3}{x^2}$, ความชัน = $\dfrac{dy}{dx} = 2 + \dfrac{6}{x^3}$

ที่จุด (1 , – 1) ; ความชัน = $2 + \dfrac{6}{12} = 8$ เพราะฉะนั้นเส้นตรง L มีความชัน = 8

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ต้องมีความชันเท่ากับ $-\dfrac{1}{8}$

เพราะฉะนั้นเส้นตรงที่โจทย์ต้องการต้องมีความชัน = $-\dfrac{1}{8}$

หากจุดในตัวเลือกอยู่บนเส้นตรงที่โจทย์ต้องการก็จะต้องมีความชันระหว่าง 2 จุด นั้นเท่ากับ $-\dfrac{1}{8}$

1. ความชัน = $\dfrac{2+1}{4-1} = 1$ 2. ความชัน = $\dfrac{-4+1}{16-1} = -\dfrac{3}{15}$

3. ความชัน = $\dfrac{5+1}{25-1} = \dfrac{1}{4}$ 4. ความชัน = $\dfrac{-7+1}{49-1} = -\dfrac{1}{8}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง ให้ M เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L เพราะว่าความชัน L เท่ากับ 8

เพราะฉะนั้นความชัน M เท่ากับ $(-\frac{1}{8})$ สมการเส้นตรง M คือ $y-(-1) = (-\frac{1}{8})(x-1)$

$$x + 8y + 7 = 0$$

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 M มีสมการเป็น $x + 8y + 7 = 0$ จุด (4 , 2) , (16 , – 4) , (25 , 5) ไม่อยู่บนเส้นตรง M เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ได้เหมือนกัน

วิธีจริงต่อไปอีก โดยการหาจุดตัดของเส้นตรง

M : $x + 8y + 7 = 0$ กับพาราโบลา $x = y^2$ จะได้จุดตัดเป็น (1 , 1) และ (49 , –7)

ตัวอย่างที่ 3.3.8 กำหนดให้ $f(x) = \frac{x+1}{x}$ เมื่อ $\frac{1}{100} \le x \le 100$

ถ้า f(a) เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[\frac{1}{100}, 100]$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{100}$ 2. 1
3. 2 4. 100

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์จะได้ว่า

1. $f\left(\frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 101$ 2. $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$
3. $f(2) = 1 + \frac{1}{2} = 1.5$ 4. $f(100) = 1 + \frac{1}{100} = 1.01$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3.

วิธีจริง $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0 \ \forall x \in [\frac{1}{100}, 100]$

เพราะฉะนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[\frac{1}{100}, 100]$

เพราะฉะนั้น $f(100) \le f(x) \ \forall x \in [\frac{1}{100}, 100]$

สรุป $f(100) = 1.01$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[\frac{1}{100}, 100]$

ตัวอย่างที่ 3.3.9 กำหนด $f(x) = 2\sin x + \cos 2x \ ; -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน f เท่ากับเท่าใดบนช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$ 2. 1
3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{3}{2}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่ามุมที่เราสามารถคิดเลขได้โดยง่ายเช่น

$f(0) = 2\sin 0 + \cos 0 = 1 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 3.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2\pi}{3} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1.732 - 0.5 > 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง $f(x) = 2\sin x + \cos 2x = 2\sin x + 1 - 2\sin^2 x = 1 + 2\sin x - 2\sin^2 x$

$= -2(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $f(x) \leq \frac{3}{2}$ ทุกค่า $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และ $f(x) = \frac{3}{2}$ ก็ต่อเมื่อ $\sin x - \frac{1}{2} = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6}$

ตัวอย่างที่ 3.3.10 ค่าของสูงสุดของ $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ บนช่วง $[0, 2\pi]$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{4}$
4. 1

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(0) = 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์แน่นอน

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \sin^4 x + (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)$

$= 2\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1 = 2(\sin^4 x - \sin^2 x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} + 1$

$= 2(\sin^2 x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ทุกค่า $x \in [0, 2\pi]$

และ $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ของ $f(x)$

เพราะว่า $\left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)^2$ มีค่ามากที่สุดเมื่อ $x = \pm 1$ หรือ 0

เพราะฉะนั้น $f(0) = \sin^4 0 + \cos^4 0 = 1$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์

ตัวอย่างที่ 3.3.11 ถ้า $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

แล้วค่าสูงสุดของความชันของเส้นสัมผัส $y = f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. 8   2. 10

3. 12   4. 15

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9$$

แทนค่า x บางค่าเช่น $f'(1) = -3 + 6 + 9 = 12 \rightarrow$ ตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

วิธีจริง $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 27$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3(x^2 - 2x + 1) + 3 + 9$$

$$= -3(x-1)^2 + 12 \leq 12$$

เพราะฉะนั้น $f'(x) \leq 12 \ \forall x \in (-\infty, \infty)$ และ $f'(1) = 12$

สรุป $f'(x)$ มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 12

ตัวอย่างที่ 3.3.12 กำหนด $f(x) = x|x|; x \in R$ ค่าของ $f'(x)$ เท่ากับเท่าใดบน $R - \{0\}$

1. $f'(x) = 2x$ 2. $f'(x) = -2x$

3. $f'(x) = 2|x|$ 4. $f'(x) = |x|$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = x|x| = \begin{cases} -x^2 & ; \ x < 0 \\ 0 & ; \ x = 0 \\ x^2 & ; \ x > 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & ; \ x < 0 \\ 2x & ; \ x > 0 \end{cases}, \ f'(x) \text{ หาค่าไม่ได้ที่ } x = 0$$

เพราะฉะนั้น $f'(1) = 2$ และ $f'(-1) = 2$ ค่าของ $f'(1)$ และ $f'(-1)$ ในแต่ละตัวเลือกคือ

1. $f'(1) = 2, f'(-1) = -2$ 2. $f'(1) = -2, f'(-1) = 2$

3. $f'(1) = 2, f'(-1) = 2$ 4. $f'(1) = 1, f'(-1) = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1., 2. และ 4.

วิธีจริง เมื่อ $f'(x) = \begin{cases} -2x & ; \ x < 0 \\ 2x & ; \ x > 0 \end{cases}$ จะได้ว่า $f'(x) = 2|x|; x \neq 0$

ตัวอย่างที่ 3.3.13 สมการเส้นสัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 31 = 0$ ที่จุด $(-3, 4)$ คือสมการใด

1. $x + y + 7 = 0$
2. $x - y + 7 = 0$
3. $y - x + 7 = 0$
4. $x - y - 7 = 0$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 แทนค่าจุด $(x = -3, y = 4)$ ในสมการเส้นตรงก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. $-3 + 4 + 7 \neq 0$
2. $-3 - 4 + 7 = 0$
3. $4 - (-3) + 7 \neq 0$
4. $-3 - 4 - 7 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง

$$x^2 + y^2 - 2x - 31 = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 2x - 31) = 0$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} - 1 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-x}{y}$$

เมื่อ $x = -3$, $y = 4$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{1-(-3)}{4} = 1$

สมการเส้นสัมผัสคือ $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$y - 4 = (1)(x + 3)$$

$$x - y + 7 = 0$$

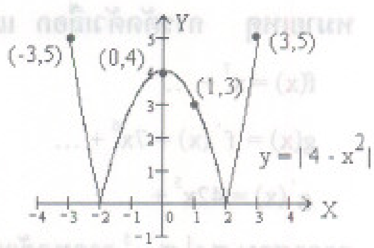
ตัวอย่างที่ 3.3.14 กำหนด $f(x) = |4 - x^2|$ เมื่อ $x \in [-3, 3]$ ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[-3, 3]$ เท่ากับเท่าใด

1. 5
2. 4
3. -4
4. -5

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการแทนค่าพบว่า $f(0) = 4$

เพราะฉะนั้น -4 , -5 ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f



เพราะว่า $f(3) = |4-9| = 5$

เพราะฉะนั้น 4 ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $[-3, 3]$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $y = |4-x^2| = |x^2-4| = |x-2|\cdot|x+2|$ มีกราฟเป็น

เพราะฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์เท่ากับ 5 บนช่วง $[-3, 3]$

ตัวอย่างที่ 3.3.15 กำหนด g(x) เป็นอนุพันธ์ของ f(x) จงหา $g'(x)$ เมื่อ $f(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2$

1. $g'(x) = 12x(x+1)^2(x^2+1)^2$
2. $g'(x) = 42x^5 + 90x^4 + 100x^3 + 84x^2 + 42x + 10$
3. $g'(x) = 7x^5 + 18x^4 + 25x^3 + 28x^2 + 21x + 10$
4. $g'(x) = 2(x+1)^2(x^2+1)(3x+1) + 4x(x+1)(3x^2+2x+5)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรดังนั้นหาค่า $g'(0)$, $g'(1)$ ก็สามารถตัดตัวเลือกได้ จากโจทย์กำหนด $f(x) = (x+1)^3(x^2+1)^2$ จะได้ว่า

$g(x) = f'(x) = 3(x+1)^2(x^2+1)^2 + (x+1)^3\,2(x^2+1)(2x) = 3(x+1)^2(x^2+1)^2 + 4x(x+1)^3(x^2+1)$

$$\begin{aligned} g'(x) = {} & 3(\,(2)(x+1)(x^2+1)^2 + (x+1)^2(2)(x^2+1)(2x)\,) \\ & + 4(\,(x+1)^3(x^2+1) + x(3)(x+1)^2(x^2+1) + x(x+1)^3(2x)\,) \qquad \ldots\ldots (1) \end{aligned}$$

$g'(0) = 3(2+0) + 4(1+0) = 10$

$g'(0)$ ในแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น

1. 0	2. 10
3. 10	4. 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

จากโจทย์ $g'(-1) = 3(0+0) + 4(0+0+0) = 0$ ตัวเลือกที่เหลือมีค่าเป็น

2. $g'(-1) = -42 + 90 - 100 + 84 - 42 + 10 = 0$
3. $g'(-1) = -7 + 18 - 25 + 28 - 21 + 10 = 3 \neq 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง กระจาย $g'(x)$ จากสมการที่ (1) จนได้คำตอบเป็น

$g'(x) = 42x^5 + 90x^4 + 100x^3 + 84x^2 + 42x + 10$

หมายเหตุ **การตัดตัวเลือก แบบที่ 2** กระจายสูตรของ $f'(x)$ โดยคิดเฉพาะ ส.ป.ส. x^7 จะได้

$f(x) = x^7 + \ldots$

$g(x) = f'(x) = 7x^6 + \ldots$

$g'(x) = 42x^5 + \ldots$

ตรวจสอบ ส.ป.ส. x^5 จากทุกตัวเลือกพบว่า

1. $g'(x) = 12x^5 + \ldots$ 2. $g'(x) = 42x^5 + \ldots$

3. $g'(x) = 7x^5 + \ldots$ 4. $g'(x) = 14x^5 + \ldots$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

ตัวอย่างที่ 3.3.16 ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $x^2 + y^2 - 3x + 4y = \frac{39}{4}$ ที่จุดซึ่ง $x = 1$ มีค่าเท่าใด

1. $\frac{1}{8}$ 2. $-\frac{1}{8}$

3. $\pm\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** $x^2 + y^2 - 3x + 4y = \frac{39}{4}$

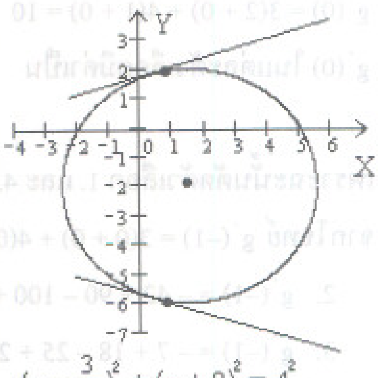
$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = \frac{39}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 4 = \frac{39}{4} + \frac{9}{4} + 4 = \frac{39+9+16}{4} = 16$$

$$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = 4^2$$

ที่ $x = 1$ มีเส้นสัมผัสวงกลม 2 เส้น

ที่มีความชันเป็นบวกหนึ่งเส้นและความชันเป็นลบหนึ่งเส้น

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.



$(x - \frac{3}{2})^2 + (y + 2)^2 = 4^2$

วิธีจริง $x^2 + y^2 - 3x + 4y = \frac{39}{4}$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 3x + 4y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{39}{4}\right)$$

$$2x + 2y \cdot \frac{dy}{dx} - 3 + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2y + 4)\frac{dy}{dx} = 3 - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3-2x}{2y+4}$$

เมื่อ $x = 1$; $1 + y^2 - 3 + 4y = 10$

$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$(y+6)(y-2) = 0$$

$$y = 2, -6$$

ที่จุด (1 , 2) ; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3-2(1)}{2(2)+4} = \dfrac{1}{8}$

ที่จุด (1 , –6); $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3-2(1)}{2(-6)+4} = -\dfrac{1}{8}$

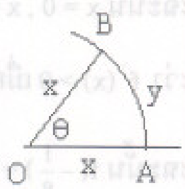
ตัวอย่างที่ 3.3.17 ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมฐานโค้งซึ่งเป็นเซกเตอร์ของวงกลมให้มีความยาวของเส้นรอบรูปเท่ากับ 20 เซนติเมตร จะมีพื้นที่มากที่สุดเท่ากับเท่าใด

1. 16 ตารางเมตร
2. 20 ตารางเมตร
3. 25 ตารางเมตร
4. 30 ตารางเมตร

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก การทำโจทย์ข้อนี้ต้องใช้วิธีจริงผสมการตัดตัวเลือก เมื่อเราทราบว่า $f(x) = x(10 - x)$ เป็นพื้นที่ของสามเหลี่ยมฐานโค้งที่มีรัศมีเป็น x โดยการแทนค่า $f(1) = 9$, $f(2) = 16$, $f(3) = 21$ ก็จะสามารถตัดตัวเลือก 1. และ 2. ได้

วิธีจริง กำหนดให้ x = รัศมี และ y = ความยาวส่วนโค้ง AB



เพราะว่าความยาวเส้นรอบรูป OAB = 20 cm

เพราะฉะนั้นจะได้ $2x + y = 20$ ดังนั้น $y = 20 - 2x$

พื้นที่ OAB = $\dfrac{\theta}{2\pi}(\pi x^2) = \dfrac{\theta x^2}{2}$

เพราะว่า มุม 2π รองรับความยาวส่วนโค้ง $2\pi x$

มุม θ รองรับความยาวส่วนโค้ง $\dfrac{2\pi x}{2\pi}(\theta) = \theta x$

เพราะฉะนั้น $y = \theta x$ และ $\theta = \dfrac{y}{x}$

ให้ f(x) = พื้นที่สามเหลี่ยมฐานโค้ง AOB = $\dfrac{\theta x^2}{2} = \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{x^2}{y}\right) = \dfrac{xy}{2} = \dfrac{x}{2}(20 - 2x) = x(10 - x)$

เพราะว่า $f(x) = -(x^2 - 10x) = -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -(x-5)^2 + 25 \leq 25$

เพราะฉะนั้น f มีค่ามากที่สุดเท่า 25 เมื่อ x = 5

ตัวอย่างที่ 3.3.18 กำหนด $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

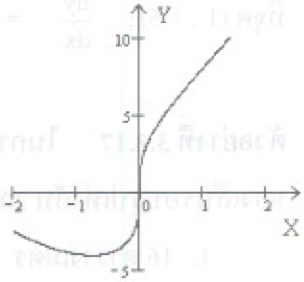
1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0 เมื่อ $x = 0$
2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0 เมื่อ $x = 0$
3. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $-\frac{9}{8}$ เมื่อ $x = -\frac{1}{8}$
4. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $-\frac{9}{8}$ เมื่อ $x = -\frac{1}{8}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{3}}(x+3)$

$-1 < x < 0 \quad \rightarrow \quad f(x) < 0$

$0 < x < 1 \quad \rightarrow \quad f(x) > 0$



$f(x) = 2x^{\frac{1}{3}}(x+3)$

เพราะฉะนั้น f(0) ไม่เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และไม่เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$, $f'(x) = 8x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{2}{3}} = 8x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{8x+1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x) = 0$ เมื่อ $x = -\frac{1}{8}$ และ f' หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้น $x = 0$, $x = -\frac{1}{8}$ เป็นค่าวิกฤต

เพราะว่า $f'(x) > 0$ เมื่อ $x > -\frac{1}{8}$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < -\frac{1}{8}$

เพราะฉะนั้น $f(-\frac{1}{8}) = 6(-\frac{1}{8})^{\frac{4}{3}} + 3(-\frac{1}{8})^{\frac{1}{3}} = -\frac{9}{8}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่างที่ 3.3.19 ในการประมาณการปลูกมันสำปะหลัง พบว่าถ้าขุดมันสำปะหลังขณะนี้จะได้มันสำปะหลัง 100 กิโลกรัม และขายได้กิโลกรัมละ 1.50 บาท ถ้ายังไม่ขุดและรอต่อไปจะได้มันสำปะหลังเพิ่มขึ้นสัปดาห์ละ 10 กิโลกรัม แต่ราคาขายจะลดลงไปสัปดาห์ละ 0.05 บาทต่อกิโลกรัม ดังนั้นควรจะขายมันสำปะหลังเมื่อใดจึงจะมีรายได้จากการขายมากที่สุด

1. ขายทันที
2. ขายเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 5
3. ขายเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 10
4. ขายเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่สิบห้า

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก คำนวณค่าจากแต่ละตัวเลือก

ตัวเลือก 1. ขายทันทีจะได้เงิน =(100)(1.5) = 150 บาท

ตัวเลือก 2. เมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 5

จำนวนมันสำปะหลัง = 100 + 5(10) = 150 กิโลกรัม

ราคาจะเหลือ = 1.5 – 5(0.05) = 1.25 บาทต่อกิโลกรัม

จำนวนเงินที่ได้ = (150)(1.25) = 187.5 บาท

ตัวเลือก 3. เมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 10

จำนวนมันสำปะหลัง = 100 + 10(10) = 200 กิโลกรัม

ราคามันสำปะหลัง = 1.5 – 10(0.05) = 1 บาทต่อกิโลกรัม

จำนวนเงินที่ได้ = (200)(1) = 200 บาท

ตัวเลือก 4. เมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 15

จำนวนมันสำปะหลัง = 100 + 10(15) = 250 กิโลกรัม

ราคามันสำปะหลัง = 1.5 – 15(0.05) = 0.75 บาทต่อกิโลกรัม

จำนวนเงินที่ได้ = (250)(0.75) = 187.5

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง x = จำนวนสัปดาห์ที่รอเก็บมันสำปะหลัง

$f(x)$ = จำนวนเงินที่ได้ทั้งหมด = (จำนวนมันสำปะหลัง)(ราคาบาทต่อกิโลกรัม)

$$= (100 + 10x)(1.5 - 0.05x)$$

$$= (150 + 10x - 0.5x^2)$$

$$= \frac{1}{10}(1500 + 100x - 5x^2)$$

$$= -\frac{5}{10}(x^2 - 20x - 300)$$

$$= -\frac{1}{2}[(x^2 - 20x + 100) - 400]$$

$$= -\frac{1}{2}(x - 10)^2 + 200 \le 200$$

เพราะฉะนั้น $f(x)$ มีค่ามากสุดเท่ากับ 200 เมื่อ $x = 10$

สรุปรอเก็บเมื่อสิ้นสัปดาห์ที่ 10 จะได้เงินมากที่สุด

ตัวอย่างที่ 3.3.20 สมการเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = x^3 - x + 1$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $2x + 4y - 5 = 0$ **คือสมการในข้อใด**

1. $2x - y + 1 = 0$ และ $2x - y - 3 = 0$
2. $4x - 2y - 1 = 0$ และ $4x + 2y + 3 = 0$
3. $2x + y - 1 = 0$ และ $2x - y - 3 = 0$
4. $2x - y - 1 = 0$ และ $2x - y + 3 = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ความชันของ $2x + 4y - 5 = 0$ คือ $-\frac{1}{2}$

เส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $2x + 4y - 5 = 0$ ต้องมีความชัน $= 2$

ตัวเลือก 2. $4x + 2y + 3 = 0$ มีความชัน $= -2$

ตัวเลือก 3. $2x + y - 1 = 0$ มีความชัน $= -2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $y = x^3 - x + 1$

ความชัน $= \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$

ความชันเส้นตรง L : $2x + 4y - 5 = 0$ มีค่าเท่ากับ $m = -\frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้นความชันเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L ต้องมีความชันเท่ากับ 2

จากสมการ ความชันเส้นสัมผัส = 2

$$\frac{dy}{dx} = 2$$

$$3x^2 - 1 = 2$$

$$x = \pm 1$$

ที่ $x = 1$; $y = 1 - 1 + 1 = 1$ สมการเส้นสัมผัสคือ $y - 1 = (2)(x - 1)$

$$2x - y - 1 = 0$$

ที่ $x = -1$; $y = -1 + 1 + 1 = 1$ สมการเส้นสัมผัสคือ $y - (1) = (2)(x - (-1))$

$$2x - y + 3 = 0$$

3.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. ถ้า $f'(x) = g'(x)$ แล้ว $f(x) = g(x)$ ทุกค่า $x \in D_{f \cap g}$
2. ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$ แล้ว $f'(a)$ หาค่าได้เสมอ
3. ถ้า $f(a)$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์ แล้ว $f'(a) = 0$
4. ถ้า $f'(x) \geq 0$ แล้ว $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in D_f$
5. ถ้า $f(x) = |x^2|$ แล้ว $f'(x) = 2|x|$
6. ถ้า $f'(x) = g'(x)$ บนช่วง (a, b) แล้ว $f(x) - g(x)$ = ค่าคงตัว บนช่วง (a, b)
7. ถ้า $f'(a)$ หาค่าได้ แล้ว f มีความต่อเนื่องที่ $x = a$
8. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า x แล้ว $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{h}$
9. มีฟังก์ชัน f และ g ที่ทำให้ $f'(x) = g'(x)$ โดยที่ $f(x) \neq g(x)$ ทุกค่า $x \in R$
10. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ≥ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน D_f เสมอ
11. ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อนุพันธ์หาค่าได้ทุกค่า แล้ว $f'(-x) = -f'(x)$ ทุกค่า x
12. ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรีที่ n แล้ว $f'(0)$ สัมประสิทธิ์ของ x กำลัง 1
13. ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดบนวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ แล้วความชันเส้นสัมผัสวงกลม ที่จุด $P(x, y)$ เท่ากับ $-\dfrac{x-h}{y-k}$
14. อัตราการเพิ่มของพื้นที่วงกลมเทียบกับรัศมี เท่ากับอัตราการเพิ่มของเส้นรอบวงของวงกลม เทียบกับรัศมี เมื่อรัศมีวงกลมมีค่าเท่ากับ 1 เท่านั้น
15. ถ้า $f(x) = 8^x$ แล้ว $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, \infty)$
16. $\dfrac{d}{dx} \arcsin x > 0$ ทุกค่า $x \in (-1, 1)$
17. ทุกฟังก์ชัน f จะได้ว่า $D_{f'} = D_f$
18. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุกค่า $x \in D_f$ แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 บนช่วง D_f
19. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ $f(x) = \sin x + \cos x$ บนช่วง $[0, 2\pi]$ มีค่าเท่ากับ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
20. $\dfrac{d}{dx}(f(x+1)) = \dfrac{d}{dx}(f(x-1))$ ทุกค่า $x \in D_f$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 + 2$ บน $(-\infty, \infty)$ จะได้ $f'(x) = 2x = g'(x)$

   แต่ $f(x) \neq g(x)$ บนช่วง $(-\infty, \infty)$

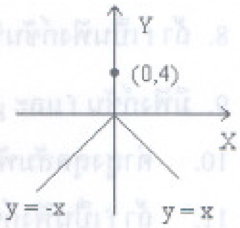
2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = |x|$ จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} |x|$

   เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = 0$

   แต่
$$\lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$
$$\lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

   เพราะฉะนั้น f' หาค่าไม่ได้ที่ $x = 0$

3. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} x & x<0 \\ 4 & x=0 \\ -x & x>0 \end{cases}$ จะได้ว่ากราฟของ $y = f(x)$ คือ



   เพราะฉะนั้น $f(0) = 4$ เป็นค่าสูงสุดสัมบูรณ์แต่ f' หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^3 - 1 ; x \in (-\infty, \infty)$ จะได้ว่า $f'(x) = 3x^2$

   เพราะฉะนั้น $f'(x) \geq 0 \ \forall\ x \in (-\infty, \infty)$ แต่ $f(0) = -1 < 0$

5. **ผิด** $f(x) = |x^2| = x^2$

   $f'(x) = 2x \neq 2|x|$

6. **ถูกต้อง** $f'(x) = g'(x)$

   $\int f'(x)dx = \int g'(x)dx$

   $f(x) + c_1 = g(x) + c_2$

   $f(x) - g(x) = c_2 - c_1$ เป็นค่าคงตัว

7. **ถูกต้อง** สมมติ $f'(a)$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ หาค่าได้

$$f(x) = \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)(x-a) + f(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)-(a)}{x-a}\right)(x-a)+f(a)\right] = \left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)\lim_{x\to a}(x-a) + f(a)$$

$$= (f'(a))(0) + f(a) = f(a)$$

   เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่ $x = a$

8. **ผิด** เพราะว่า $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+(-h)-f(x)}{-(-h)} = -\lim_{-h\to 0}\frac{f(x+(-h)-f(x)}{(-h)} = -f'(x)$$

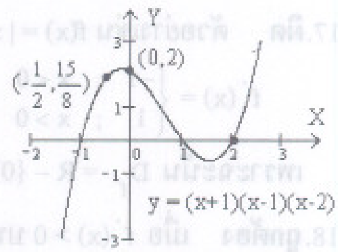
ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1-h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} -2+h = -2 \neq f'(1)$$

9. **ถูกต้อง** $f(x) = 4$, $g(x) = 12$

$f(x) \neq g(x)\ \forall\, x \in (-\infty , \infty)$ แต่ $f'(x) = 0 = g'(x)$

10. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$ บนช่วง $[-\frac{1}{2}, 2]$



มีกราฟเป็น

$f(-\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{15}{8}$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

$f(2) = 0$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

11. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$; $x \in(-\infty , \infty)$ จะได้ $f'(x) = 2x$

เพราะฉะนั้น $f'(-x) = -2x \neq f'(x)$

12. **ถูกต้อง** $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$

$f'(0) = a_1$

13. **ถูกต้อง** $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$\frac{d}{dx}\left((x-h)^2+(y-k)^2\right) = \frac{d}{dx}r^2$$

$$2(x-h) + 2(y-k)\frac{d}{dx}(y-k) = 0$$

$$(x-h) + 2(y-k)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} = -\frac{(x-h)}{(y-k)}$$

เพราะฉะนั้นความชันที่จุด $P(x , y)$ เท่ากับ $-\dfrac{(x-h)}{(y-k)}$

14. **ถูกต้อง** $A(r)$ = พื้นที่วงกลมรัศมี $r = \pi r^2$

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r$$

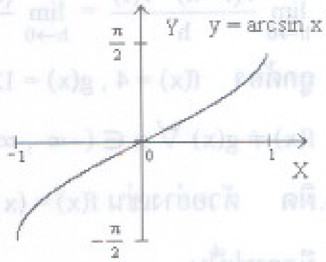
$L(r)$ = ความยาวของเส้นรอบวงกลมรัศมี $r = 2\pi r$

$\frac{dL}{dr} = 2\pi$

เพราะฉะนั้น $\frac{dA}{dr} = \frac{dL}{dr}$ ก็ต่อเมื่อ $r = 1$

15. **ถูกต้อง** เพราะว่า $f(x) = 8^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $f'(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty , \infty)$



16. **ถูกต้อง** เพราะว่า $y = \arcsin x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

เพราะฉะนั้น $\frac{d}{dx}\arcsin x > 0 \ \forall \ x \in (-1 , 1)$

17. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = |x|$; $D_f = (-\infty , \infty)$

$f'(x) = \begin{cases} -1 & ; \ x < 0 \\ 1 & ; \ x > 0 \end{cases}$ และ f' หาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 0$

เพราะฉะนั้น $D_{f'} = R - \{0\}$

18. **ถูกต้อง** เมื่อ $f'(x) > 0$ บน D_f จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน D_f

เพราะฉะนั้นไม่มีค่า $x_1 , x_2 \in D_f$ โดยที่ $x_1 \neq x_2$ และ $f(x_1) = f(x_2)$

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1 – 1

19. **ถูกต้อง**

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x + \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right) \\ &= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{2}$$

เพราะฉะนั้นค่าสูงสุดของ $f(x) = \sqrt{2}$ เมื่อ $x = \frac{\pi}{4}$

20. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$

$f(x + 1) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ และ $f(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

$\frac{d}{dx}(f(x + 1)) = 2x + 2$ และ $\frac{d}{dx}(f(x - 1)) = 2x - 2$

3.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. จุดบนเส้นโค้ง $y = 2x^2 - x + 3$ ที่มีความชันของเส้นสัมผัสเป็น -5 คือจุดใด

   1. $(-2, 13)$ 2. $(-1, 4)$

   3. $(-5, 58)$ 4. $(-1, 6)$

2. กำหนด $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

   ค่า N ที่มากที่สุดที่ทำให้ $f(x) \geq N$ ทุกค่า $x \in [-2, 0]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. -1 2. 0

   3. 1 4. 2

3. กำหนด $f(x) = x^2 - 6x + 5$; $D_f = [2, 6]$ ตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $= 0$, ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $= -14$
   2. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $= 5$, ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $= 3$
   3. ค่าสูงสุดสัมบูรณ์ $= 5$, ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์ $= -4$
   4. ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์

4. ถ้า P(a , b) เป็นจุดบนเส้นโค้งที่สุด $y = 2x^2 - 8x + 5$ ที่ทำให้สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด P ขนานกับแกน X แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

   1. 5 2. -1

   3. 1 4. -5

5. กำหนด $f(x) = x|x| + 2|x|$ ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $f'(-5) + f''(3) = 16$
   2. เส้นตรง $4x - y + 1 = 0$ สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $(1, 3)$
   3. ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(-1, 1)$
   4. ฟังก์ชัน $y = f(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด $(0, 0)$

6. กำหนด a , b , c เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = (x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2$

   f(x) เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เมื่อ x เท่ากับเท่าใด

   1. $\dfrac{a+b+c}{4}$ 2. $\dfrac{a+b+c}{6}$

   3. $\dfrac{a+b+c}{2}$ 4. $\dfrac{a+b+c}{3}$

7. กำหนด $f(x) = x^2 + x + 1$ ค่าของ $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{h}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $4x$ 2. $4x + 1$
   3. $4x + 2$ 4. $2x + 1$

8. กำหนด $f(x) = x^3 - 3x + 1$ และ $h(x) = \frac{d}{dx} f(3x + 2)$ ค่าของ $h(x)$ เท่ากับเท่าใด

   1. $27(3x + 1)(x + 1)$ 2. $27(3x - 1)(x + 1)$
   3. $27(3x - 1)(x - 1)$ 4. $27(3x + 1)(x - 1)$

9. กำหนด $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่มในช่วงใดต่อไปนี้

   1. $[1 , 2]$ 2. $[1 , 3]$
   3. $[0 , \frac{3}{2}]$ 4. $[3 , 4]$

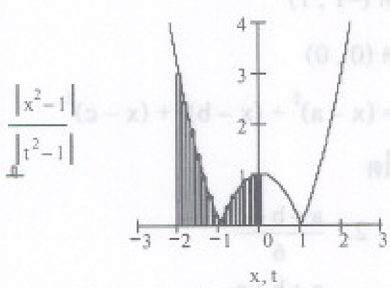
10. กำหนด $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; $D_f = (-\infty , \infty)$ ตัวเลือกใดถูกต้อง

   1. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์บนช่วง $(-\infty , \infty)$
   2. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $(-\infty , \infty)$
   3. f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(0 , \infty)$
   4. f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $(-\infty , 0)$

เฉลยคำตอบ 1. (4) 2. (1) 3. (3) 4. (2) 5. (3)

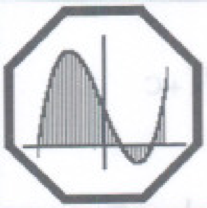
6. (4) 7. (3) 8. (1) 9. (4) 10. (2)

โปรแกรม MATHCAD สามารถเขียนกราฟแบบปกติ และ แรเงา และอินทิเกรตหาพื้นที่ได้



$$\int_{-2}^{0} \left| x^2 - 1 \right| dx = 2$$

คู่มือ MATHCAD หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย



บทที่ 4
การอินทิเกรต

4.1 สรุปเนื้อหา

1. **ปฏิยานุพันธ์** ถ้า $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้วเราเรียก $F(x)$ ว่าเป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$

ตัวอย่างเช่น $\frac{d}{dx}(x^2+4) = 2x$

$\frac{d}{dx}(x^2-5) = 2x$

เพราะฉะนั้น x^2+4 และ x^2-5 ต่างก็เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$

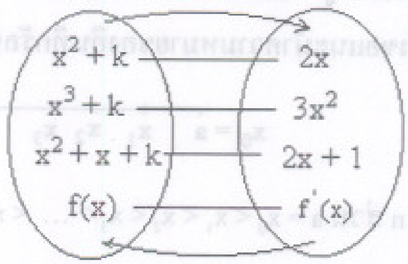
นอกจากนั้นเราสามารถสรุปได้ว่า x^2+k เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $2x$

ข้อตกลง ถ้า $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้วจะได้ว่า $\int f(x)dx = F(x)$

เราเรียกว่า อินทิเกรต $f(x)$ เทียบกับ x ได้เป็น $F(x)$

2. ความหมายของอนุพันธ์และปฏิยานุพันธ์ในรูปแบบของแผนภาพการส่งสูตรฟังก์ชัน

การหาอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}$



การอินทิเกรต , ปฏิยานุพันธ์

สูตรการอินทิเกรตที่สำคัญ

1. $\int k\,dx = kx + c$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \;;\; n \neq -1$

หมายเหตุ $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$

3. $\int (c_1 f(x)+c_2 g(x))dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int g(x)dx$

ตัวอย่าง $\int (x^2+2x+4)dx = \dfrac{x^3}{3}+x^2+4x+C$, $\int \sqrt{x}\,dx = \dfrac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C = \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

$$\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (x^{-2}+4x^{-\frac{1}{2}})dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}+4\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}+C = -x^{-1}+8x^{\frac{1}{2}}+C = -\frac{1}{x}+8\sqrt{x}+C$$

เทคนิคการอินทิเกรตโดยการแทนค่า

จงหาค่าของ $\int \sqrt{4x+1}\,dx$ แทนค่า $v = 4x+1$, $\dfrac{dv}{dx} = 4$, $dx = \dfrac{dv}{4}$

$$\int \sqrt{4x+1}\,dx = \int v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{4} = \frac{1}{4}\frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)}+C = \frac{1}{6}v^{\frac{3}{2}}+C = \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$$

3. ความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขตในระดับ ม. ปลาย มีการให้ความหมายโดยง่ายดังนี้

ถ้า $F(x) = \int f(x)dx$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

หรือ ถ้า $\dfrac{d}{dx}F(x) = f(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

เราเรียก $\int_a^b f(x)dx$ ว่าเป็นอินทิกรัลจำกัดเขตของ f บนช่วง [a , b]

หมายเหตุ ในการศึกษาระดับสูงขึ้นเรามีความจำเป็นต้องนำเรื่องของอินทิกรัลจำกัดเขตไปอธิบายความหมายต่างๆ จึงขอแนะนำความหมายของอินทิกรัลจำกัดเขตที่ใช้ในวิชาแคลคูลัสดังนี้

$f : [a , b] \to R$

แบ่งช่วง [a , b] ออกเป็น n ส่วน $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$; $x_i^* \in [x_{i-1} , x_i]$

ถ้า $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ หาค่าได้ แล้ว เราเรียกว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง [a , b]

และ $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$ เรียกว่า **อินทิกรัลจำกัดเขต** ของ f บนช่วง [a , b]

จะเห็นได้ว่า เมื่อเราประยุกต์ใช้งานค่าของ $\int_a^b f(x)dx$ จะมีหน่วยแปรเปลี่ยนตามหน่วยของ f(x) คูณกับหน่วยของ x เช่น ผลคูณออกมาเป็นพื้นที่หรือปริมาตรก็ได้

ตัวอย่าง $\int_1^2 (x^2+x+1)dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

วิธีทำ แบบที่ 1 $F(x) = \int (x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

$$\int_1^2 (x^2+x+1)dx = F(2)-F(1) = (\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2+C)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+C)$$

$$= \frac{7}{3}+\frac{3}{2}+1 = \frac{14+9+6}{6} = \frac{29}{6}$$

แบบที่ 2 $\int_1^2 (x^2+x+1)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Bigg|_{x=1}^{x=2} = (\frac{8}{3}+\frac{4}{2}+2)-(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1) = \frac{29}{6}$

โดยไม่ต้องคิดค่าคงตัวเมื่อเราต้องการหาอินทิกรัลจำกัดเขต

การหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตกรณีฟังก์ชันนิยามเป็นช่วงๆ ให้ทำการอินทิเกรตโดยการแบ่งช่วงออกตามข้อกำหนดของฟังก์ชันตามช่วงต่าง ๆ

ตัวอย่าง กำหนด $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ; \quad x < 0 \\ 4x^3 & ; \quad x \geq 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\int_{-1}^2 f(x)dx$

วิธีทำ $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 3x^2 dx + \int_0^2 4x^3 dx$

$$= (x^3 \Big|_{x=-1}^{x=0}) + (x^4 \Big|_{x=0}^{x=2}) = (0+1)+(16-0) = 17$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-1}^2 3x|x|dx$

วิธีทำ $\int_{-1}^2 3x|x|dx = \int_{-1}^0 3x|x|dx + \int_0^2 3x|x|dx = \int_{-1}^0 3x(-x)dx + \int_0^2 3x(x)dx$

$$= -\int_{-1}^0 3x^2 dx + \int_0^2 3x^2 dx = -x^3\Big]_{-1}^0 + x^3\Big]_0^2$$

$$= (-0+(1))+(8-0) = 9$$

5. การหาสมการเส้นโค้งเมื่อกำหนดความชัน $m = \frac{dy}{dx}$ และจุดผ่าน (x_0, y_0)

   1. หาค่า $y = \int(\frac{dy}{dx})dx$

   2. แทนค่า $x = x_0$, $y = y_0$ เพื่อหาค่าคงตัว

ตัวอย่าง กำหนดความชันที่จุด P(x , y) ใดๆ เป็น 6x + 1 และเส้นโค้งผ่านจุด (4 , 2) จงหาสมการเส้นโค้ง

วิธีทำ $y = \int(\frac{dy}{dx})dx$ ความชันที่จุดใดๆ คือ $m = \frac{dy}{dx} = 6x + 1$

เพราะฉะนั้น $y = \int(6x+1)dx = 3x^2 + x + C$ เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด x = 4 , y = 2

เพราะฉะนั้น $2 = 3(4^2) + 4 + C = 48 + 4 + C$ ดังนั้น $C = -50$

สรุปสมการเส้นโค้ง คือ $y = 3x^2 + x - 50$

6. การหาสมการเส้นโค้งเมื่อกำหนด อัตราการเปลี่ยนแปลงความชันที่จุดใดๆ , และค่าความชัน m_0 ที่จุด (x_0, y_0) มีขั้นตอนดังนี้

   1. อัตราการเปลี่ยนแปลงความชัน = $\frac{d^2y}{dx^2}$

   2. $\frac{dy}{dx} = \int(\frac{d^2y}{dx^2})dx$ แทนค่าความชัน m_0 ที่จุด $x = x_0$ เพื่อหาค่าคงตัว

   3. อินทิเกรต $y = \int(\frac{dy}{dx})dx$

   4. แทนค่า $x = x_0$, $y = y_0$ เพื่อหาค่าคงตัว

ตัวอย่าง กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันที่จุด (x , y) ใดๆ เป็น 2x + 1 เส้นโค้งผ่านจุด(1 , 2) และเส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4 ที่จุด (1 , 2) จงหาสมการเส้นโค้ง

วิธีทำ อัตราการเปลี่ยนแปลงความชัน = $\frac{d^2y}{dx^2} = 2x + 1$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = \int(\frac{d^2y}{dx^2})dx = \int(2x+1)dx = x^2 + x + C$

เพราะว่าที่จุด (1 , 2) เส้นสัมผัสเส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4

เพราะฉะนั้น $4 = \frac{dy}{dx} = 1 + 1 + C$ ดังนั้น $C = 2$

ดังนั้น $\frac{dy}{dx} = x^2 + x + 2$

เพราะว่า $y = \int(\frac{dy}{dx})dx = \int(x^2 + x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + C$

และเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 2) เพราะฉะนั้น $2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + C$ ดังนั้น $C = \frac{5}{6}$

สรุปสมการเส้นโค้งคือ $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{5}{6}$

7. การหาสมการการเคลื่อนที่เมื่อกำหนดความเร็ว v(t) และ จุดผ่านเมื่อเวลา $t = t_0$
   1. $s(t) = \int v(t)dt$
   2. แทนค่า S เมื่อเวลา $t = t_0$ เพื่อหาค่าคงตัว

ตัวอย่าง กำหนดความเร็วเมื่อเวลา t ใดๆ เป็น $v(t) = t^2 + 1$ ของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง และวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง (0 , 4) เมื่อเวลา t = 0 จงหาสมการเคลื่อนที่

วิธีทำ $s(t) = \int v(t)dt = \int(t^2 + 1)dt = \frac{t^3}{3} + t + C$

เมื่อ t = 0 , s(0) = 4 จะได้ C = 4 เพราะฉะนั้น $s(t) = \frac{t^3}{3} + t + 4$

8. การหาสมการการเคลื่อนที่เมื่อกำหนด ความเร่ง a(t) เมื่อเวลา t ใดๆ มาให้และกำหนดความเร็วและตำแหน่งเมื่อเวลา $t = t_0$ มาให้
   1. หาค่า $v(t) = \int a(t)dt$
   2. แทนค่าความเร็วเมื่อเวลา $t = t_0$ เพื่อหาค่าคงตัว
   3. หาค่า $s(t) = \int v(t)dt$
   4. แทนค่าตำแหน่งเมื่อเวลา $t = t_0$ เพื่อหาค่าคงตัว

ตัวอย่าง กำหนดความเร็วของการเคลื่อนที่ในแนวระดับเมื่อเวลา t ใดๆ เป็น $a(t) = 2t - 1$ และวัตถุมีความเร็วเท่ากับ 4 เมื่อเวลา t = 0 และวัตถุเริ่มเคลื่อนที่ออกจากจุด (10 , 0) เมื่อเวลา t = 0

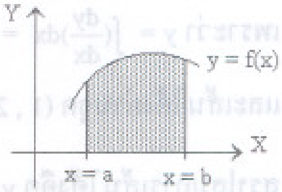
วิธีทำ $v(t) = \int a(t)dt = \int(2t - 1)dt = t^2 - t + C$

เพราะว่า v(0) = 4 เพราะฉะนั้น C = 4 ดังนั้น $v(t) = t^2 - t + 4$

$s(t) = \int v(t)dt = \int(t^2 - t + 4)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 4t + C$

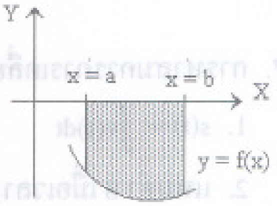
เพราะว่า s(0) = 10 เพราะฉะนั้น C = 10 สรุปสมการการเคลื่อนที่คือ $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 4t + 10$

9. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a , b]$



9.1 ถ้า $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in [a, b]$

แล้วพื้นที่ = $\int_a^b f(x)dx$

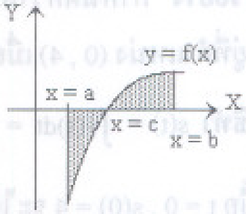


9.2 ถ้า $f(x) \leq 0$ ทุกค่า $x \in [a, b]$

แล้ว พื้นที่ = $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = -\int_a^b f(x)dx$

หมายเหตุ ถ้ามีกรณีที่ $f(x) \geq 0$ หรือ $f(x) \leq 0$ บนช่วง $[a , b]$

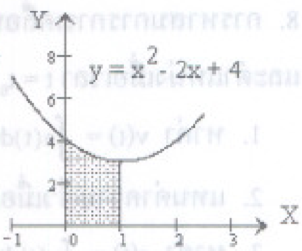
ให้ทำการจำแนกการอินทิเกรตออกเป็นช่วงย่อยๆ ตัวอย่างเช่น



พื้นที่ = $\left|\int_a^c f(x)dx\right| + \int_c^b f(x)dx$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 4$ กับแกน X บนช่วง $[0 , 1]$

$$\text{พื้นที่} = \int_{x=0}^{x=1} f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 4)dx$$



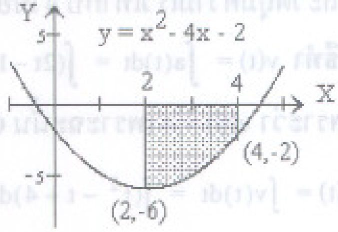
$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right|_{x=0}^{x=1}$$

$$= \left(\left(\frac{1}{3} - 1 + 4\right) - (0)\right)$$

$$= \frac{10}{3}$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 4x - 2$ กับแกน X บนช่วง $[2 , 4]$

$$\text{พื้นที่} = \left|\int_{x=2}^{x=4} f(x)dx\right| = \left|\int_2^4 (x^2 - 4x - 2)dx\right|$$



$$= \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 2x\right]_2^4\right|$$

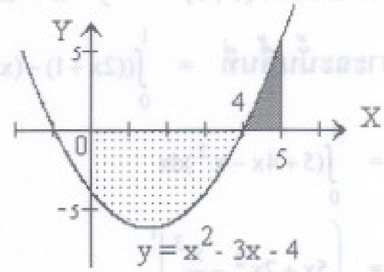
$$= \left|\left(\frac{64}{3} - 32 - 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8 - 4\right)\right|$$

$$= \left|\frac{56}{3} - 24 - 4\right| = \left|\frac{56 - 84}{3}\right| = \frac{28}{3}$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x - 4$ กับแกน X บนช่วง $[0, 5]$

วิธีทำ บนช่วง $[0, 4]$ $\quad f(x) \le 0$

บนช่วง $[4, 5]$ $\quad f(x) \ge 0$



บนช่วง $[0, 4]$

$$\text{พื้นที่} = \left|\int_0^4 (x^2 - 3x - 4)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x\right)\Big|_0^4\right|$$

$$= \left|\frac{64}{3} - \frac{48}{2} - 16\right| = \left|\frac{128 - 144 - 96}{6}\right| = \frac{112}{6} = \frac{56}{3}$$

บนช่วง $[4, 5]$

$$\text{พื้นที่} = \int_4^5 (x^2 - 3x - 4)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x\right)\Big|_4^5 = \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 20\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right)$$

$$= \left(\frac{250 - 225 - 120}{6}\right) - \left(-\frac{56}{3}\right) \qquad = \left(-\frac{95}{6}\right) + \left(\frac{56}{3}\right) = \frac{17}{6}$$

สรุปพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 3x - 4$ กับแกน X บนช่วง $[0, 5]$

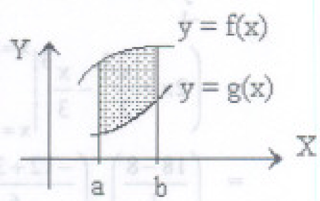
เท่ากับ $\frac{112}{6} + \frac{17}{6} = \frac{129}{6} = \frac{43}{2}$

10. การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับ $y = g(x)$ บนช่วง $[a, b]$

10.1 กรณี $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ และ $f(x) \ge g(x)$

ไม่ตัดกันบนช่วง $[a, b]$

$$\text{พื้นที่} = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



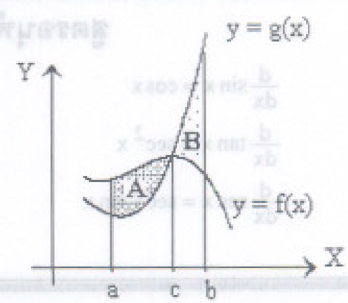
10.2 กรณี $y = f(x)$ และ $y = g(x)$ มีการตัดกันบนช่วง $[a, b]$

ต้องทำการหาจุดตัดและทำการอินทิเกรตแยกช่วงตามค่า x ที่เป็นจุดตัด

$$\text{พื้นที่ A} = \int_a^c (f(x) - g(x))dx$$

$$\text{พื้นที่ B} = \int_c^b (g(x) - f(x))dx$$

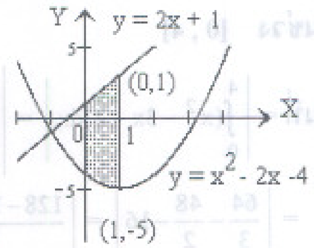
พื้นที่ทั้งหมด = พื้นที่ A + พื้นที่ B



ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x - 4$ และ $y = 2x + 1$ บนช่วง [0 , 1]

วิธีทำ บนช่วง [0 , 1] $y = x^2 - 2x - 4$, $y = 2x + 1$ ไม่ตัดกัน และ $(2x + 1) \geq (x^2 - 2x - 4)$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ $= \int_0^1 ((2x+1)-(x^2-2x-4))dx$



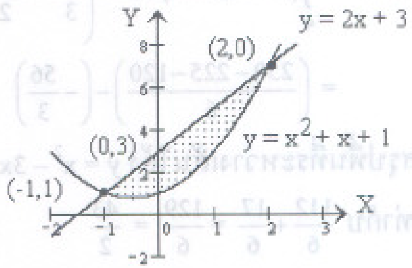
$= \int_0^1 (5+4x-x^2)dx$

$= \left(5x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$

$= (5+2-\frac{1}{3})-0 = \frac{20}{3}$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ปิดล้อมเส้นโค้ง $y = x^2 + x + 1$ และ $y = 2x + 3$

วิธีทำ จุดตัดของเส้นโค้งหาได้จากรากของสมการ



$x^2 + x + 1 = 2x + 3$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x - 2)(x + 1) = 0$

$x = 2 , -1$

พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = x^2 + x + 1$ และ $y = 2x + 3$ มีค่าเท่ากับ

$$= \int_{-1}^{2}((2x+3)-(x^2+x+1))dx = \int_{-1}^{2}(2+x-x^2)dx$$

$$= \left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2} = \left(4+2-\frac{8}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{18-8}{3}\right)-\left(\frac{-12+3+2}{6}\right) = \frac{20+7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

สูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$	$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
$\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}\cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$
$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$

4.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์ที่ถามเกี่ยวกับสมการเส้นโค้ง เมื่อกำหนดความชันและจุดผ่านมาให้ เราสามารถนำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าเพื่อหาอนุพันธ์แล้วเทียบกับความชันของโจทย์ หรือนำค่าจุดผ่านแทนค่าในตัวเลือกก็จะสามารถหาคำตอบและตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 4.2.1 กำหนดความชันที่จุด P(x , y) ใดๆ ของเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีค่าเป็น $x^3 - x$ และเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 2) สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือตัวเลือกใด

1. $y = x^4 - x^2 + 2$ 2. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}$

3. $y = x^4 + x^2 + 2$ 4. $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{4} + 2$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าโจทย์กำหนดว่าเส้นโค้งต้องผ่านจุด (1 , 2)

เพราะฉะนั้น แทนค่า x = 1 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. 2 2. 2

3. 4 4. 2

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

เพราะว่าโจทย์กำหนด $\frac{dy}{dx}$ = ความชันที่จุด $P(x , y) = x^3 - x$

เพราะฉะนั้นหาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 2x$ 2. $\frac{dy}{dx} = x^3 - x$

4. $\frac{dy}{dx} = x^3 - \frac{x}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง $f'(x)$ = ความชันที่จุด $P(x , y) = x^3 - x$

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (x^3 - x)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + C$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 2)

เพราะฉะนั้น $2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + C$ ดังนั้น $C = \frac{9}{4}$

สรุป $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{4}$

ตัวอย่างที่ 4.2.2 กำหนดให้ $f''(x) = 2x + 1$ และเส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4 ที่จุด (1 , 4) สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือตัวเลือกใด

1. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{6}$ 　　2. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x+\frac{7}{6}$

3. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\frac{7}{6}$ 　　4. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+\frac{7}{6}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 4)
เพราะฉะนั้นแทนค่า $x = 1$ ในทุกตัวเลือกจะได้ค่า y เป็น

1. $y = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2+\frac{7}{6} = 4$ 　　2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2+\frac{7}{6} = 0$

3. $y = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+4+\frac{7}{6} = 6$ 　　4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1+\frac{7}{6} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4

วิธีจริง $f''(x) = 2x+1$

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int(2x+1)dx = x^2+x+C$$

ที่จุด (1 , 4) เส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 4 เพราะฉะนั้น $f'(x) = 4$

$1+1+C = 4$ 　　ดังนั้น $C = 2$

เพราะฉะนั้น $f'(x) = x^2+x+2$

เพราะว่า $f(x) = \int f'(x)dx = \int(x^2+x+2)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+C$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1 , 4) เพราะฉะนั้น $4 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2+C$ ดังนั้น $C = \frac{7}{6}$

สรุปสมการเส้นโค้งคือ $y = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{6}$

2. โจทย์ข้อสอบที่ถามเกี่ยวกับค่าของ $\int f(x)dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ให้ทำการหาอนุพันธ์ของตัวเลือกแต่ละตัวเลือกโดยใช้เหตุผลว่า $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$

ถ้าตัวเลือกใดหาอนุพันธ์แล้วค่าไม่เท่ากับโจทย์ก็ต้องตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้

ตัวอย่างที่ 4.2.3 ค่าของ $\int(x^2-x)^4(2x-1)dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $(x^2-x)^5+C$ 　　2. $5(x^2-x)^5+C$

3. $\frac{x^5}{5}(x-1)^5+C$ 　　4. $x^5(x-1)^5+C$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $(x^2-x)^4(2x-1)$ เป็นพหุนามดีกรี 9

เพราะฉะนั้น $\int(x^2-x)^4(2x-1)dx$ ต้องเป็นพหุนามดีกรี 10 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

เพราะว่า $\frac{d}{dx}\left(\int(x^2-x)^4(2x-1)dx\right) = (x^2-x)^4(2x-1)$

และ 3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^5}{5}(x-1)^5+C\right) = x^4(x-1)^5 + x^5(x-1)^4$

$$= (x-1)^4x^4(x-1+x) = (x-1)^4x^4(2x-1) = (x^2-x)^4(2x-1)$$

4. $\frac{d}{dx}(x^5(x-1)^5+C) = 5x^4(x-1)^5 + 5x^5(x-1)^4 \neq (x^2-x)^4(2x-1)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

วิธีจริง $\int(x^2-x)^4(2x-1)dx = \int(2x^9-9x^8+16x^7-14x^6+6x^5-x^4)dx$

$$= \frac{2x^{10}}{10} - x^9 + \frac{16x^8}{8} - \frac{14x^7}{7} + \frac{6x^6}{6} - \frac{x^5}{5} + C$$

$$= \frac{x^5}{5}(x^5-5x^4+10x^3-10x^2+5x-1)+C = \frac{x^5}{5}(x-1)^5+C$$

หมายเหตุ ตามหลักสูตร ม. ปลาย ถือว่านักเรียนสามารถแยกตัวประกอบแบบยากๆ ได้แต่ใน วิชา CALCULUS มีการอินทิเกรตแบบแทนค่า จะทำให้ง่ายขึ้นดังนี้

แทนค่า $v = x^2 - x$, $\frac{dv}{dx} = 2x-1$, $dv = (2x-1)dx$

$$\int(x^2-x)^4(2x-1)dx = \int v^4 dv = \frac{v^5}{5}+C = \frac{(x^2-x)^5}{2}+C = \frac{x^5(x-1)^5}{5}+C$$

ตัวอย่างที่ 4.2.4 ค่าของ $\int x^3\sqrt{2x^4+1}\,dx$ เท่ากับเท่าใด

1. $(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$
2. $\frac{1}{3}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$
3. $\frac{1}{12}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$
4. $\frac{1}{6}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{d}{dx}\left(\int x^3\sqrt{2x^4+1}dx\right) = x^3\sqrt{2x^4+1}$

เพราะฉะนั้นหาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกจะช่วยในการตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{d}{dx}\left((2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C\right) = \frac{3}{2}(2x^4+1)^{\frac{1}{2}}(8x^3) = 8x^3\sqrt{2x^2+1}$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(2x^4+1)^{\frac{1}{2}}(8x^3) = 4x^3\sqrt{2x^4+1}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)(2x^4+1)^{\frac{1}{2}}(8x^3) = x^3\sqrt{2x^4+1}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)(2x^4+1)^{\frac{1}{2}}(8x^3) = 2x^3\sqrt{2x^4+1}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง ต้องใช้การอินทิเกรตโดยวิธีแทนค่าเท่านั้นซึ่งเป็นเนื้อหาในวิชา CALCULUS

แทนค่า $v = 2x^4 + 1$, $\frac{dv}{dx} = 8x^3$, $\frac{dv}{8} = x^3dx$

เพราะฉะนั้น $\int x^3\sqrt{2x^2+1}\,dx = \int\sqrt{2x^2+1}\,x^3dx = \int\sqrt{v}\cdot\frac{dv}{8} = \frac{1}{8}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{8}\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}+C$

$$= \frac{1}{12}(2x^4+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

3. ใช้เหตุผลการเปรียบเทียบโดยการแทนค่าที่คิดเลขง่ายๆ ระหว่างค่าอินทิกรัลของโจทย์กับค่าตัวเลขในตัวเลือกก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 4.2.5 $\int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{5}{3}$ 2. $\frac{13}{3}$

3. $\frac{16}{3}$ 4. $\frac{19}{3}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่าบนช่วง (0 , 2) จะได้ว่า

$$1 < 4x+1 < 9$$

$$1 < (4x+1)^{\frac{1}{2}} < 3$$

$$\int_0^2 1\,dx < \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx < \int_0^2 3\,dx$$

$$2 < \int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx < 6$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง แทนค่า $v = 4x + 1$, $\frac{dv}{dx} = 4$, $dx = \frac{dv}{4}$

$$\int (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \int v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{4} = \frac{v^{\frac{3}{2}}}{6} + C = \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{6} + C$$

$$\int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(4x+1)^{\frac{3}{2}}}{6}\Bigg|_{x=0}^{x=2} = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

ตัวอย่างที่ 4.2.6 ค่าของ $\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{27}$ 2. $\frac{6}{27}$
3. $\frac{8}{27}$ 4. $\frac{28}{27}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า บนช่วง $[0, 1]$ $1 < 2x + 1 < 3$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2x+1} < 1$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 < \frac{1}{(2x+1)^3} < 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 dx < \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx < \int_0^1 1\,dx$$

$$\frac{1}{27} < \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx < 1 = \frac{27}{27}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง แทนค่า $v = 2x + 1$, $\frac{dv}{dx} = 2$, $dx = \frac{dv}{2}$

$$\int \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \int \frac{1}{v^3}\frac{dv}{2} = \frac{1}{2}\int v^{-3}dv = \frac{1}{2}\frac{v^{-2}}{(-2)} + C = -\frac{1}{4v^2} + C = -\frac{1}{4(2x+1)^2} + C$$

$$\int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^3}dx = \left(-\frac{1}{4(2x+1)^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{9}-1\right) = \frac{2}{9}$$

4.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 4.3.1 ปฏิยานุพันธ์ของ $5x^3 - 2x^2 + x - 6$ คือข้อใด

1. $\frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$
2. $\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$
3. $\frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$
4. $15x^2 - 4x + 1 + C$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าปฏิยานุพันธ์ของ $5x^3$ ต้องมีกำลังสูงขึ้น

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4.

เพราะว่า $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + k$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง ปฏิยานุพันธ์ของ $5x^3 - 2x^2 + x - 6 = \int (5x^3 - 2x^2 + x - 6)dx$

$$= \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + C$$

ตัวอย่างที่ 4.3.2 กำหนดกราฟของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ผ่านจุด $(-3, -\frac{3}{2})$ และมีความชันที่จุดใดๆ เป็น $\frac{dy}{dx} = (x+1)(x+2)$ สมการ $y = f(x)$ คือตัวเลือกใด

1. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$
2. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$
3. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$
4. $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x$

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** หา $\frac{dy}{dx}$ ของทุกตัวเลือก

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2 \neq (x+1)(x+2)$
2. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$
3. $\frac{dy}{dx} = x^2 + 3x + 1 \neq (x+1)(x+2)$
4. $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + 3x + 1 \neq (x+1)(x+2)$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $\frac{dy}{dx} = (x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$, $y = \int (x^2 + 3x + 2)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด $(-3, -\frac{3}{2})$ เพราะฉะนั้น $-\frac{3}{2} = \frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 + 2(-3) + C$

ดังนั้น $C = -\frac{3}{2} + 9 - \frac{27}{2} + 6 = 0$ เพราะฉะนั้น $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$

ตัวอย่างที่ 4.3.3 กำหนด $f'(x) = |x|$ และ $f(0) = 0$ แล้ว $f(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $f(x) = \frac{1}{2}x^2$
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x|x|$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $x > 0$ จะได้ $f'(x) = |x| = x$

ตัวเลือกแต่ละตัวจะมีค่า $f'(x)$ เมื่อ $x > 0$ เป็น

1. $f'(x) = x$
2. $f'(x) = -x$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x(+x) = \frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = x$
4. $f(x) = -\frac{1}{2}x(+x) = -\frac{1}{2}x^2$; $f'(x) = -x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่าโจทย์ $f'(x) = |x| = -x$

ตัวเลือกที่เหลือมีค่า $f'(x)$ เมื่อ $x < 0$ เป็น

1. $f(x) = x$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x|x| = \frac{1}{2}x(-x) = -\frac{x^2}{2}$; $f'(x) = -x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง เพราะว่า $f'(x) = |x|$ และ $f(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $f'(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$

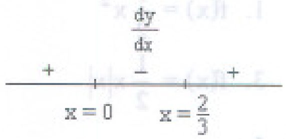
เพราะฉะนั้น $f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x^2}{2} & x > 0 \end{cases} = \left(\frac{1}{2}x\right)\begin{cases} -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x & x > 0 \end{cases} = \frac{1}{2}x|x|$ สรุป $f(x) = \frac{1}{2}x|x|$

ตัวอย่างที่ 4.3.4 ความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุดใดๆ มีค่าเท่ากับ $3x^2 - 2x$ ถ้าเส้นโค้งนี้ผ่านจุด $(0, 2)$ แล้ว ข้อต่อไปนี้ข้อใดผิด

1. $f(x)$ ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty, \infty)$
2. $f(x)$ ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty, \infty)$
3. $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (-\infty, 0)$
4. $f(x) \geq 0$ ทุกค่า $x \in (0, \infty)$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$



เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[\frac{2}{3}, \infty)$ และ $(-\infty\ , 0)$

เพราะฉะนั้น f ไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty\ , \infty)$

และ f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนช่วง $(-\infty\ , \infty)$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง เพราะว่า $\frac{dy}{dx}$ = ความชันของ $(y = (x))$ ที่จุด x ใดๆ $= 3x^2 - 2x$

เพราะฉะนั้น $y = \int\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int(3x^2 - 2x)dx = x^3 - x^2 + C$

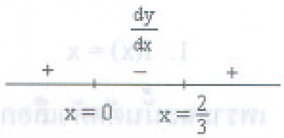
เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (0, 2) เพราะฉะนั้น $2 = 0 - 0 + C$, $C = 2$

ดังนั้นสมการเส้นโค้งคือ $f(x) = y = x^3 - x^2 + 2$

หมายเหตุ $f(-2) = -8 - 4 + 2 = -10 < 0$

เพราะฉะนั้นตัวเลือก 3. ผิด จึงเลือกเป็นคำตอบได้ 2 คะแนนแน่นอน

เพราะว่า $f'(x) = 3x^2 - 2x = 3x(x - \frac{2}{3})$ และ $f''(x) = 6x - 2 = 3(x - 1)$

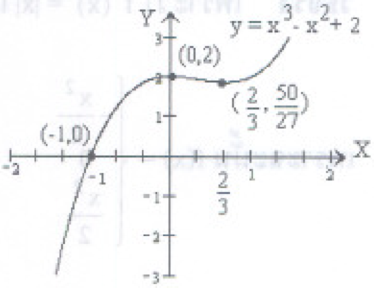


เพราะฉะนั้น f(x) เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $(-\infty\ , 0]$, $[\frac{2}{3}, \infty)$

f(x) เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[0, \frac{2}{3}]$

เพราะว่า $f''(0) = -2 < 0$ ดังนั้น f(0) เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์

และ $f''(\frac{2}{3}) = 1 > 0$ ดังนั้น $f(\frac{2}{3})$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์



ตัวอย่างที่ 4.3.5 กำหนดกราฟของ $y = f(x)$ มี $f''(x) = x$ และกราฟมีความชันเท่ากับ $\frac{5}{2}$ ที่จุด (1 , 2) ตัวเลือกใดคือ $y = f(x)$

1. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x - \frac{1}{6}$
2. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x - \frac{1}{6}$
3. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{x}{6} - \frac{1}{6}$
4. $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + 2x - \frac{1}{6}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หา $f'(x)$ และ $f''(x)$ ของทุกตัวเลือกก็จะตัดตัวเลือกได้

1. $f'(x)=\frac{x^2}{2}+1, f''(x)=x, f'(1)=\frac{3}{2}$ 2. $f'(x)=\frac{x^2}{2}-2, f''(x)=x, f'(1)=-\frac{3}{2}$

3. $f'(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{6}, f''(x)=x, f'(1)=\frac{2}{3}$ 4. $f'(x)=\frac{x^2}{2}+2, f''(x)=x, f'(1)=\frac{5}{2}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง เพราะว่า $f''(x) = x$ เพราะฉะนั้น $f'(x) = \int f''(x)dx = \frac{x^2}{2}+C$

เพราะว่าที่จุด (1 , 2) ความชันเท่ากับ $\frac{5}{2}$ เพราะฉะนั้น $\frac{5}{2} = \frac{1}{2}+C$ ดังนั้น $C = 2$

เพราะว่า $f'(x) = \frac{x^2}{2}+2$ เพราะฉะนั้น $f(x) = \int f'(x)dx = \frac{x^3}{6}+2x+C$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1, 2) เพราะฉะนั้น $2 = \frac{1}{6}+2+C$; $C = -\frac{1}{6}$

สรุป $f(x) = \frac{1}{6}x^3+2x-\frac{1}{6}$

ตัวอย่างที่ 4.3.6 กำหนดความชันของเส้นโค้ง ณ จุด (x , y) ใดๆ เป็น $3x^2-4x-5$ และเส้นโค้งนี้ผ่านจุด (1 , – 6) สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือข้อใด

1. $y = 3x^3-4x^2-5x$ 2. $y = x^3-2x^2-5x$

3. $y = 3x^3-2x^2-5x-2$ 4. $y = x^3-x^2-5x-1$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์กำหนด $\frac{dy}{dx} = 3x^2-4x-5$

ดังนั้นหา $\frac{dy}{dx}$ ของทุกตัวเลือกก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{dy}{dx} = 9x^2-8x-5$ 2. $\frac{dy}{dx} = 3x^2-4x-5$

3. $\frac{dy}{dx} = 9x^2-4x-5$ 4. $\frac{dy}{dx} = 3x^2-2x-5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $y = \int\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int(3x^2-4x-5)dx = x^3-2x^2-5x+C$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (1 , – 6)

เพราะฉะนั้น $-6 = 1-2-5+C$, $C = 0$

สรุปสมการเส้นโค้งคือ $y = x^3-2x^2-5x$

ตัวอย่างที่ 4.3.7 ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุดใดๆ มีค่าเป็น $x - 1$ และเส้นโค้งมีความชันเท่ากับ 1 ที่จุด $(-1, 0)$ แล้วสมการ $y = f(x)$ คือข้อใด

1. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$ 2. $y = \frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$

3. $y = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$ 4. $y = x^3 - \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{13}{6}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันเท่ากับ $x - 1$ และ $f'(-1) = 1$ และ $y = 0$ เมื่อ $x = -1$ เพราะฉะนั้น $y'' = x - 1$ พิจารณาค่าแต่ละตัวเลือกพบว่า

1. $y' = x - 1$, $y'' = 1$ 2. $y' = x - 1$, $y'' = 1$

3. $y' = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$, $y'' = x - 1$, $y'(-1) = 1$ 4. $y' = 3x^2 - x - \frac{3}{2}$, $y'' = 6x - 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง จากโจทย์กำหนด $f''(x) = x - 1$, $f'(x) = \int f''(x)dx = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C$

เพราะว่า $f'(-1) = 1$ เพราะฉะนั้น $1 = \frac{1}{2} + 1 + C$, $C = -\frac{1}{2}$

เพราะว่า $f'(x) = \frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \int f'(x)dx = \int\left(\frac{x^2}{2} - x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + C$

เพราะว่า $x = -1$, $y = 0$ ดังนั้น $0 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + C$, $C = \frac{1}{6}$

สรุป $f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}$

ตัวอย่างที่ 4.3.8 ให้ $f'(x) = 4 - 2x$ และ $f(x) > 0$ ในช่วง $(-1, 5)$ ดังนั้น $f(x)$ เท่ากับข้อใด

1. $f(x) = 5 + 4x - x^2$ 2. $f(x) = 1 + 4x - x^2$

3. $f(x) = 11 + 4x - 2x^2$ 4. $f(x) = 6 + 4x - 2x^2$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

1. $f'(x) = 4 - 2x$ 2. $f'(x) = 4 - 2x$

3. $f'(x) = 4 - 4x$ 4. $f'(x) = 4 - 4x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า ตัวเลือก $f(4.5) = 1 + 4(4.5) - (4.5)^2 < 0$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง เพราะว่า $f'(x) = 4 - 2x$ เพราะฉะนั้น $f(x) = \int f'(x)dx = \int(4-2x)dx = 4x - x^2 + C$

เพราะว่า $f(x) > 0$ บนช่วง $(-1, 5)$ เพราะฉะนั้น $C \geq 5$

สรุปเลือก $f(x) = 5 + 4x - x^2$ ตรงกับตัวเลือก 1.

ตัวอย่างที่ 4.3.9 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$ และ ค่าของ $y = 12$ เมื่อ $x = 1$ ดังนั้น f(x) ตรงกับข้อใด

1. $x^3 - x^2 + 5x$
2. $x^3 - x^2 + 5x + 7$
3. $3x^3 - 2x^2 + 5x$
4. $3x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หา $\frac{dy}{dx}$ ของทุกตัวเลือก

1. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$
2. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$
3. $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5$
4. $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

เพราะว่า $y = 12$ เมื่อ $x = 1$ ดังนั้นแทนค่า $x = 1$ ในตัวเลือกที่เหลือจะได้ว่า

1. $(1)^3 - (1)^2 + 5(1) = 5$
2. $(1)^3 - (1)^2 + 5(1) + 7 = 12$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง $y = \int\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int(3x^2 - 2x + 5)dx = x^3 - x^2 + 5x + C$ เพราะว่า $y = 12$ เมื่อ $x = 1$

เพราะฉะนั้น $12 = 1 - 1 + 5 + C$ ดังนั้น $C = 7$ สรุป $f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 7$

ตัวอย่างที่ 4.3.10 กำหนด $f'(x) = \sqrt[3]{x^2}$ แล้ว f(x) เท่ากับเท่าใด

1. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + C$
2. $f(x) = x^{\frac{5}{3}} + C$
3. $f(x0 = \frac{5}{3}x^{\frac{5}{3}} + C$
4. $f(x) = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกได้เป็น

1. $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ 2. $f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$

3. $f'(x) = \frac{25}{9}x^{\frac{2}{3}}$ 4. $f'(x) = x^{\frac{2}{3}}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง เพราะว่า $f'(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

เพราะฉะนั้น $f(x) = \int f'(x)dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5}x + C$

ตัวอย่างที่ 4.3.11 ค่าของ $\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx$ เท่ากับเท่าใด

1. $(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$ 2. $\frac{1}{3}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\frac{1}{2}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$ 4. $\frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{d}{dx}\left(\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx\right) = x\sqrt{2x^2+1}$

เพราะฉะนั้นเราหาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกก็จะตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{d}{dx}\left((2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\right) = \frac{3}{2}(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4x) = 6x\sqrt{2x^2+1}$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4x) = 2x\sqrt{2x^2+1}$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4x) = 3x\sqrt{2x^2+1}$

4. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\right) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}(4x) = x\sqrt{2x^2+1}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง การหาค่า $\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx$

ใช้การอินทิเกรตด้วยการแทนค่า แทนค่า $v = 2x^2 + 1$

จะได้ $\frac{dv}{dx} = 4x$, $dv = 4xdx$, $xdx = \frac{dv}{4}$

$$\int x\sqrt{2x^2+1}\,dx = \int(\sqrt{2x^2+1})(xdx) = \int\sqrt{v}\,\frac{dv}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int v^{\frac{1}{2}}dv = \frac{1}{4}\left(\frac{v^{\frac{3}{2}}}{(\frac{3}{2})}\right)+C = \frac{1}{6}v^{\frac{3}{2}}+C = \frac{1}{6}(2x^2+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

ตัวอย่างที่ 4.3.12 ถ้าความชันเส้นโค้งที่จุด (x , y) ใดๆ เป็น $\frac{x^2}{2}-x+1$ สมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ณ จุดสัมผัส $(-1, \frac{1}{2})$ คือสมการในข้อใด

1. $4x - 10y - 1 = 0$ 2. $4x - 10y = 0$
3. $4x + 10y + 1 = 0$ 4. $4x + 10y - 1 = 0$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์กำหนด $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2}-x+1$

ดังนั้นความชันเส้นโค้งเมื่อ $x = -1$ คือ $\frac{1}{2}+1+1 = \frac{5}{2}$

เพราะว่าเส้นตรงที่ตั้งฉากกันต้องมีความชันคูณกันเท่ากับ – 1

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่โจทย์ต้องการต้องมีความชัน $= -\frac{2}{5}$

ความชันของเส้นตรงแต่ละตัวเลือกคือ

1. $4x - 10y - 1 = 0$ มีความชันเท่ากับ $\frac{2}{5}$
2. $4x - 10y = 0$ มีความชันเท่ากับ $\frac{2}{5}$
3. $4x + 10y + 1 = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{5}$
4. $4x + 10y - 1 = 0$ มีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{5}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

เพราะว่าเส้นตรงต้องผ่านจุด $(-1 , \frac{1}{2})$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 3. ทิ้ง

วิธีจริง สมการเส้นตรงที่โจทย์ต้องการคือ

$$y-\frac{1}{2} = \left(-\frac{2}{5}\right)(x-(-1))$$

$$10y - 5 = -4x - 4$$

$$4x + 10y - 1 = 0$$

ตัวอย่างที่ 4.3.13 เส้นโค้ง $y = f(x)$ มีความชัน ณ จุด $(x , f(x))$ ใดๆ เป็น $-2x$ และเส้นโค้งผ่านจุด $(1 , 1)$ สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือข้อใด

1. $f(x) = 2 + x^2$ 2. $f(x) = 2 - x^2$

3. $f(x) = 2 + \frac{x^2}{2}$ 4. $f(x) = x^2 - 2$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์กำหนด $f'(x) = -2x$

ดังนั้นหา $f'(x)$ ของทุกตัวเลือกก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. $f'(x) = 2x$ 2. $f'(x) = -2x$

3. $f'(x) = x$ 4. $f'(x) = 2x$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $f'(x) = -2x$ เพราะฉะนั้น $f(x) = \int f'(x)dx = \int -2xdx = -x^2 + C$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด $(1 , 1)$ เพราะฉะนั้น $1 = -1 + C$, $C = 2$ สรุป $f(x) = -x^2 + 2$

ตัวอย่างที่ 4.3.14 กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันของเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x , y) ใดๆ มีค่าเป็น $\frac{1}{x^3}$ ถ้าความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $(-1 , 0)$ มีค่าเท่ากับ 1 แล้วสมการเส้นโค้งคือข้อใด

1. $y = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + 1$ 2. $y = \frac{1}{2x} + \frac{3x}{2} + 2$

3. $y = \frac{1}{2x} + \frac{3x}{2} - 2$ 4. $y = \frac{1}{2x} + \frac{x}{2} + 1$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก หา $\frac{dy}{dx}$ ของทุกตัวเลือกแล้วแทนค่า $x = -1$ เพื่อดูว่าความชัน = 1 หรือไม่ก็สามารถตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งได้

1. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$; $\frac{dy}{dx}(x = -1) = 0$ ตัดตัวเลือก 1.
2. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$; $\frac{dy}{dx}(x = -1) = 1$
3. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{3}{2}$; $\frac{dy}{dx}(x = -1) = 1$
4. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2}$; $\frac{dy}{dx}(x = -1) = 0$ ตัดตัวเลือก 4.

นำจุดผ่าน (–1 , 0) แทนค่า ก็สามารถตัดตัวเลือกได้

1. $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$
2. $y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2 = 0$
3. $y = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 2 \neq 0$
4. $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

วิธีจริง อัตราการเปลี่ยนแปลงความชัน = $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^3}$

$$\frac{dy}{dx} = \int\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx = \int\frac{1}{x^3}dx = \int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2} + k$$

ที่จุด (–1 , 0) ความชันเท่ากับ 1 เพราะฉะนั้น $1 = -\frac{1}{2} + k$, $k = \frac{3}{2}$

เพราะฉะนั้น $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3}{2}$

$$y = \int\left(\frac{dy}{dx}\right)dx = \int\left(-\frac{1}{2}x^{-2} + \frac{3}{2}\right)dx = \frac{x^{-1}}{2} + \frac{3x}{2} + C$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (–1 , 0) ดังนั้น $0 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + C$, $C = 2$

สรุปเส้นโค้งมีสมการเป็น $y = \frac{1}{2x} + \frac{3x}{2} + 2$

ตัวอย่างที่ 4.3.15 ให้ y = f(x) เป็นกราฟของพาราโบลาที่มีจุดยอด (0 , 1) และเส้นตรง $y = \frac{5}{4}$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง y = f(x) กับแกน X บนช่วง [–1 , 1] มีค่าเท่าใด

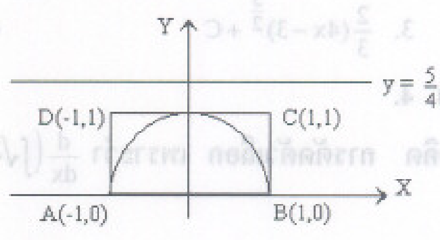
1. $\frac{4}{3}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย
3. 2 ตารางหน่วย
4. 4 ตารางหน่วย

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก วาดรูปประกอบและประมาณค่าพื้นที่

พาราโบลามีไดเรกตริกซ์ $y = \frac{5}{4}$ จุดยอด (0 , 1)

เพราะฉะนั้นค่า $C = -\frac{1}{4}$



สมการพาราโบลาคือ $(x-0)^2 = 4\left(-\frac{1}{4}\right)(y-1)$

$$x^2 = -y + 1$$

$$y = 1 - x^2$$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ปิดล้อมด้วย $y = 1 - x^2$ และแกน X บนช่วง $[-1 , 1]$

ต้องน้อยกว่าพื้นที่ □ ABCD

เพราะว่าพื้นที่ □ ABCD = 2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง พื้นที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลา $y = 1 - x^2$ กับแกน X บนช่วง $[-1 , 1]$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx = \left(x - \frac{x^3}{3}\right|_{x=-1}^{x=1} = (1-\frac{1}{3})-(-1+\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.16 พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{4-x^2}$ กับแกน X มีค่าเท่ากับเท่าใด

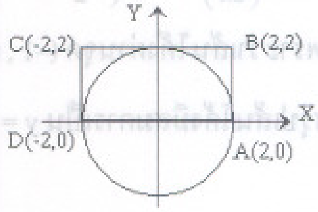
1. π 2. 2π

3. 3π 4. 4π

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

$$y = \sqrt{4-x^2}$$
$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$



พื้นที่ปิดล้อมด้วย $y = \sqrt{4-x^2}$ กับแกน X < พื้นที่ □ ABCD = 8

แต่ $3\pi = 3(3.14) > 8$ และ 4 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3. และ 4.

วิธีจริง พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{4-x^2}$ กับแกน X

= พื้นที่ครึ่งวงกลมรัศมี 2 $= \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi$

ตัวอย่างที่ 4.3.17 ค่าของ $\int\sqrt{4x-3}\ dx$ เท่ากับเท่าใด

1. $(4x-3)^{\frac{1}{2}} + C$ 2. $(4x-3)^{\frac{3}{2}} + C$

3. $\frac{2}{3}(4x-3)^{\frac{3}{2}} + C$ 4. $\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}} + C$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\frac{d}{dx}\left(\int\sqrt{4x-3}\ dx\right) = \sqrt{4x-3}$

เพราะฉะนั้นหาอนุพันธ์ของทุกตัวเลือกก็จะตัดตัวเลือกได้

1. $\frac{d}{dx}((4x-3)^{\frac{1}{2}}+C) = \frac{1}{2}(4x-3)^{-\frac{1}{2}}(4) \neq \sqrt{4x-3}$

2. $\frac{d}{dx}((4x-3)^{\frac{3}{2}}+C) = \frac{3}{2}(4x-3)^{\frac{1}{2}}(4) = 6(4x-3)^{\frac{1}{2}} \neq \sqrt{4x-3}$

3. $\frac{d}{dx}(\frac{2}{3}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+C) = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(4x-3)^{\frac{1}{2}}(4) = 4(4x-3)^{\frac{1}{2}} \neq \sqrt{4x-3}$

4. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+C) = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(4x-3)^{\frac{1}{2}}(4) = \sqrt{4x-3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง แทนค่า $v = 4x-3$, $\frac{dv}{dx} = 4$, $dx = \frac{dv}{4}$

$$\int\sqrt{4x-3}\ dx = \int v^{\frac{1}{2}}\frac{dv}{4} = \frac{1}{4}\cdot\frac{v^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}+C = \frac{1}{6}(4x-3)^{\frac{3}{2}}+C = \frac{(4x-3)^{\frac{3}{2}}}{6}+C$$

ตัวอย่างที่ 4.3.18 กำหนด $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = \frac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{x}}$

พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และแกน X มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{20}{3}$
2. 3
3. $\frac{72}{5}$
4. 5

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $f(x) = \sqrt{x}$ จะได้ $f^{-1}(x) = x^2$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \frac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$

เพราะว่าบนช่วง $[1, 4]$; $x^{\frac{3}{2}} \geq 1$, $x^{-\frac{1}{2}} \geq 1$ เพราะฉะนั้น $g(x) \geq 2$ บนช่วง $[1, 4]$

ดังนั้น $\int_1^4 g(x)dx \geq \int_1^4 2dx = (2x]_{x=1}^{x=4} = 8-2 = 6$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 4.

วิธีจริง $f(x) = \sqrt{x}$; $D_f = [0, \infty)$, $y = \sqrt{x}$, $y^2 = x$, สลับ x กับ y จะได้ $y = x^2$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(x) = x^2$ โดยมี $D_{f^{-1}} = [0, \infty)$ และ $R_{f^{-1}} = [0, \infty)$

เพราะฉะนั้น $g(x) = \dfrac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}$

เพราะว่า $x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \geq 0$ ทุกค่า x บนช่วง [1 , 4]

เพราะฉะนั้น พื้นที่ปิดล้อมด้วย g(x) บนช่วง [1 , 4] กับแกน X

$$= \int_1^4 g(x)dx = \int_1^4 (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=4} = \left(\frac{2}{5}(32) + 2(2)\right) - \left(\frac{2}{5} + 2\right)$$

$$= \left(\frac{64}{5} + 4\right) - \left(\frac{2}{5} + 2\right) = \frac{62}{5} + 2 = \frac{72}{5}$$

ตัวอย่างที่ 4.3.19 กำหนดให้ $y = f(x)$ เป็นสมการเส้นโค้งที่มีความชันที่จุด (x , y) ใดๆ เท่ากับ $-2x$ และผ่านจุด (2 , 0) จงหาพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟของเส้นโค้ง f และแกน X บนช่วง [–2 , 1]

1. 9 ตารางหน่วย
2. 12 ตารางหน่วย
3. 16 ตารางหน่วย
4. 18 ตารางหน่วย

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $\dfrac{dy}{dx} = -2x$ เพราะฉะนั้น $y = -x^2 + C$

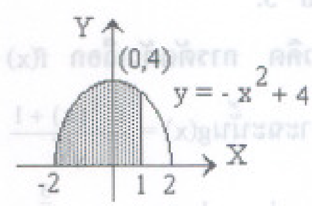
เส้นโค้งผ่านจุด (2 , 0) จะได้ ; $0 = -4 + c$, $c = 4$ เพราะฉะนั้น เส้นโค้ง f คือ $y = -x^2 + 4$

เพราะว่าบนช่วง [– 2 , 1] จะได้ $0 \leq -x^2 + 4 \leq 4$

$$0 \leq \int_{-2}^{1}(-x^2+4)dx \leq \int_{-2}^{1}4dx = 4(1-(-2)) = 12$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง ความชันที่จุด (x , y) ; $\dfrac{dy}{dx} = -2x$



$$y = \int \frac{dy}{dx}dx = \int(-2x)dx = -x^2 + C$$

เพราะว่าเส้นโค้งผ่านจุด (2 , 0) ; $0 = -4 + C$, $C = 4$

เพราะฉะนั้นสมการเส้นโค้ง $y = -x^2 + 4$

พื้นที่ระหว่าง $y = -x^2 + 4$ กับแกน X บนช่วง [– 2 , 1] $= \displaystyle\int_{-2}^{1}(-x^2+4)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=1}$

$$= \left(-\frac{1}{3} + 4\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -\frac{9}{3} + 12 = 9$$

ตัวอย่างที่ 4.3.20 กำหนดให้ $f(x) = |(x+1)(x-2)|$ ค่าของ $\int_{-2}^{2} f(x)dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -4
2. 0
3. $-\frac{19}{3}$
4. $\frac{19}{3}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า $f(x) = |(x+1)(x-2)| > 0$ บนช่วง $(-2, 2)$

เพราะฉะนั้น $\int_{-2}^{2} f(x)dx > 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง $f(x) = |(x+1)(x-2)| = |x+1| \cdot |x-2|$

$$= \begin{cases} (x+1)(x-2) & ; \quad x < -1 \\ -(x+1)(x-2) & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ (x+1)(x-2) & ; \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - x - 2 & ; \quad x < -1 \\ -x^2 + x + 2 & ; \quad -1 \le x \le 2 \\ x^2 - x - 2 & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)dx + \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=-1} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{x=-1}^{x=2}$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right] + \left[\left(-\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{-2-3+12}{6}\right) - \left(\frac{-16-12+24}{6}\right)\right] + \left[\left(\frac{-16+12+24}{6}\right) - \left(\frac{2+3-12}{6}\right)\right]$$

$$= \frac{7}{6} + \frac{4}{6} + \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{38}{6} = \frac{19}{3}$$

สูตรอินทิเกรตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + C$ $\qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$ $\qquad \int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

4.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับการอินทิเกรต

1. ค่า $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ เท่ากับพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง y = f(x) กับแกน X บนช่วง [a , b]

2. ถ้า $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$ แล้ว $f(x) \ge g(x)$ ทุกค่า $x \in [a , b]$

3. ถ้า $f(x) \ge g(x)$ ทุกค่า $x \in [a , b]$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$

4. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ ทุกฟังก์ชัน f ที่อินทิเกรตได้บนช่วง [a , b]

5. $\int |x|\,dx = \frac{|x|^2}{2} + C$

6. $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ เมื่อ $g(x) \ne 0$

7. $\int_a^b f(x)g(x)dx = (\int_a^b f(x)dx)(\int_a^b g(x)dx)$ ทุกฟังก์ชัน f, g บนช่วง [a , b]

8. ถ้า $\int_a^b f(x)dx = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ ทุกค่า $x \in [a , b]$

9. ถ้า $\int_a^b f(x)dx$ หาค่าได้ แล้ว f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a , b)

10. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง [a , b] แล้ว $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

11. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ทุกฟังก์ชัน f ที่อินทิเกรตได้บนช่วง [a , b]

12. ถ้า $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ แล้ว $f(x) = g(x)$ ทุกค่า $x \in [a , b]$

13. $\int_a^b |f(x)|\,dx$ = พื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง y = f(x) กับแกน X บนช่วง [a , b]

14. $\int_{-1}^{1} \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\pi$

15. ถ้า $F(x) = \int_0^x t^2 dt$ แล้ว $F'(1) = 1$

16. ถ้า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ บนช่วง $[-a, a]$ แล้ว $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

หมายเหตุ f เป็นฟังก์ชันคู่บนช่วง $[-a, a]$ ถ้า $f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-a, a]$

f เป็นฟังก์ชันคี่บนช่วง $[-a, a]$ ถ้า $f(-x) = -f(x)\ \forall x \in [-a, a]$

17. ถ้า f เป็นฟังก์ชันคี่บนช่วง $[-a, a]$ แล้ว $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

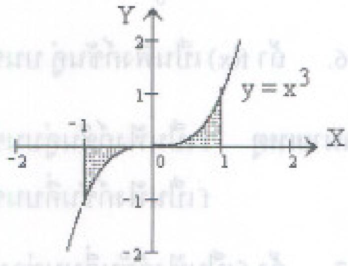
18. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$

19. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$

20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \int_0^1 \arcsin x dx$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับการอินทิเกรต

1. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^3$ บนช่วง $[-1, 1]$



$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

แต่จากกราฟของ $y = x^3$

พื้นที่บนช่วง $[0, 1]$ เท่ากับ $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} = \left|\int_{-1}^{0} x^3 dx\right|$

เพราะฉะนั้นพื้นที่ระหว่าง $y = x^3$ กับแกน X บนช่วง $[-1, 1]$ เท่ากับ $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$

2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $g(x) = x^3$; $[0, 1]$, $f(x) = \frac{1}{2}$; $[0, 1]$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4}, \quad \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{2} dx = \frac{x}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\int_0^1 f(x)dx \geq \int_0^1 g(x)dx$ แต่ $f(1) = \frac{1}{2} < 1 = g(1)$

3. **ถูกต้อง** $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$

$f(x) - g(x) \geq 0$

$$\int_a^b (f(x) - g(x))dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

4. **ถูกต้อง** $f(x) \leq |f(x)|\ \forall x \in [a, b]$ จะได้ $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$

เพราะฉะนั้น $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$

เพราะว่า $|f(x)| \geq 0$ เพราะฉะนั้น $\int_a^b |f(x)|dx \geq 0$

ดังนั้น $\left|\int_a^b |f(x)|dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$ สรุป $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

5. **ผิด** เมื่อ $x > 0$ จะได้ $\int |x|\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

เมื่อ $x < 0$ จะได้ $\int |x|\,dx = \int -x\,dx = \frac{-x^2}{2} + C$

เพราะฉะนั้น $\int |x|\,dx = \frac{|x|^2}{2} + C$ จึงผิด

6. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^2$ บนช่วง $[1, 2]$, $g(x) = x$ บนช่วง $[1, 2]$, $\frac{f(x)}{g(x)} = x$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}, \quad \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int_1^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3}{2} \text{ ดังนั้น } \int_1^2 \frac{f(x)}{g(x)} dx \neq \frac{\int_1^2 f(x)dx}{\int_1^2 g(x)dx}$$

7. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x$, $g(x) = x$ บนช่วง $[1, 2]$

$$\int_1^2 f(x)g(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

$$\int_1^2 f(x)dx \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 x\,dx \int_1^2 x\,dx = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} \neq \frac{7}{3}$$

8. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = x^3$; $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^1 = 0 \text{ แต่ } f(x) \neq 0 \text{ ทุกค่า } x \in [-1, 1]$$

9. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \; 1 < x < 2 \\ 2 & ; \; 2 < x \le 3 \end{cases}$ จะได้ว่า

$$\int_1^3 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^2 1dx + \int_2^3 2dx = (2-1) + 2(3-2) = 3$$

แต่ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 2$

10. **ผิด** $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[-2, -1]$

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{x=-2}^{x=-1} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

11. **ถูกต้อง** ให้ $F(x) = \int f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$

12. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $f(x) = \begin{cases} 1 , & x = 1 \\ x^2 , & 1 < x < 2 \\ 2 , & x = 2 \end{cases}$

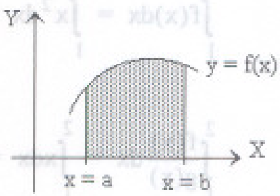
$$g(x) = \begin{cases} 4 , & x = 1 \\ x^2 , & 1 < x < 2 \\ 10 , & x = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} , \int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 x^2 dx = \frac{7}{3}$$

แต่ $f(1) \neq g(1)$ และ $f(2) \neq g(2)$

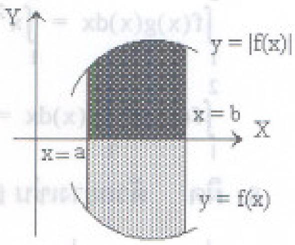
13. **ถูกต้อง**

1. ถ้า $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$



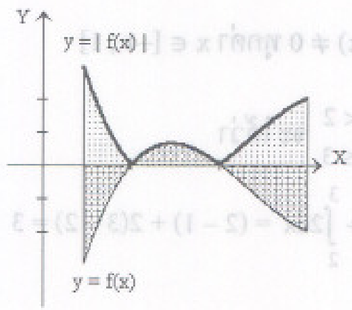
แล้ว $\int_a^b |f(x)| dx$ = พื้นที่ระหว่าง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a , b]$

2. ถ้า $f(x) \leq 0$ แล้ว $|f(x)| \geq 0$



และ $\int_a^b |f(x)| dx$ = พื้นที่ระหว่าง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a , b]$

3. ถ้า $f(x)$ มีทั้งส่วนที่อยู่เหนือแกนและใต้แกน

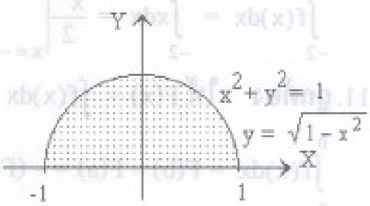


จะได้ว่า $\int_a^b |f(x)| dx$ = พื้นที่ระหว่าง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a , b]$

14. **ถูกต้อง** $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx$ เท่ากับพื้นที่ปิดล้อมด้วย

เส้นโค้ง $y = \sqrt{1 - x^2}$ กับแกน X บนช่วง $[-1 , 1]$

ซึ่งมีค่าเท่ากับพื้นที่ครึ่งวงกลมรัศมี 1 มีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{2}$



15. **ถูกต้อง** $F(x) = \int_0^x t^2 dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^3}{3}$, $F'(x) = x^2$, $F'(1) = 1$

16. **ถูกต้อง** กำหนด $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่บนช่วง $[-a , a]$

เพราะฉะนั้น $f(-x) = f(x)$ บนช่วง $[-a , a]$

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ แทนค่า $x = -t$ จะได้ว่า $dx = -dt$ เมื่อ $x = -a$ จะได้ว่า $t = a$ เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $t = 0$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) = \int_{a}^{0} f(t)(-dt) = -\int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(t)dt = \int_{0}^{a} f(x)dx$$

เพราะฉะนั้น $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$

17. **ถูกต้อง** $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

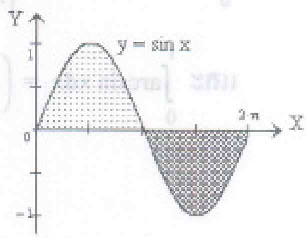
พิจารณาค่า $\int_{-a}^{0} f(x)dx$

แทนค่า $t = -x$ จะได้ $x = -t$ และ $dx = -dt$ เมื่อ $x = 0$ จะได้ว่า $t = 0$ เมื่อ $x = -a$ จะได้ว่า $t = a$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{x=-a}^{x=0} f(x)dx = \int_{t=a}^{t=0} f(-t)d(-t) = \int_{a}^{0} -f(t)(-dt) = \int_{a}^{0} f(t)dt = -\int_{0}^{a} f(t)dt$$

เพราะฉะนั้น $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

18. **ถูกต้อง** กราฟของ $y = \sin x$ บนช่วง $[0 , 2\pi]$ คือ



เพราะว่า $\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

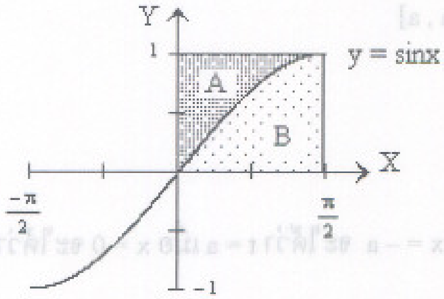
เพราะฉะนั้น พื้นที่บนช่วง $[0 , \pi]$ กับแกน X และ $[\pi , 2\pi]$ กับแกน X

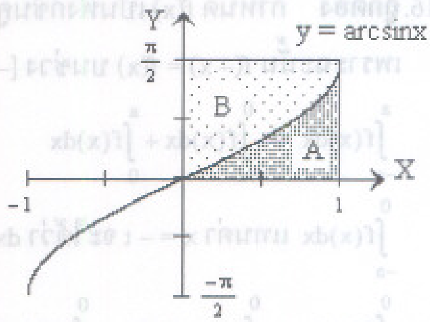
มีค่าเท่ากันแต่เครื่องหมายต่างกัน เพราะฉะนั้น $\int_{0}^{2\pi} \sin x dx = 0$

19. **ถูกต้อง** เพราะว่า $\sin(-x) = -\sin x$ บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

เพราะฉะนั้น $\sin x$ เป็นฟังก์ชันคี่บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ เพราะฉะนั้น $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 0$

20.ผิด กราฟ $y = \sin x$ บนช่วง $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และ กราฟของ $y = \arcsin x$ บนช่วง $[-1 , 1]$ คือ





เพราะว่า $y = \sin x$, $y = \arcsin x$ เป็นอินเวอร์สฟังก์ชันซึ่งกันและกัน

และ $A = \int_0^1 \arcsin x\,dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$ และ $A + B =$ พ.ท. □ ที่มีพื้นที่เป็น $\frac{\pi}{2}$

เพราะว่า $y = \sin x$ ไม่เป็นเส้นตรง เพราะฉะนั้น $A \neq B$

นอกจากนั้นเราจะได้ว่า $\int_0^1 \arcsin x\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

หมายเหตุ ในวิชา CALCULUS เราแสดงได้ว่า

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = (-\cos x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} = (-\cos\frac{\pi}{2}) - (-\cos 0) = 1$$

และ $$\int_0^1 \arcsin x\,dx = \left(x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \right|_{x=0}^{x=1} = (\arcsin 1 + 0) - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} - 1 = 0.571$$

4.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงความชันเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด (x , y) ใดๆ เป็น $6x - 6$ และที่จุด $(1 , 3)$ บนเส้นโค้งมีความชันเส้นสัมผัสเท่ากับ 2 สมการเส้นโค้งคือข้อใด

   1. $y = x^3 - 3x^2 - 5x$ 2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x$
   3. $y = x^3 + 3x^2 + 5x$ 4. $y = x^3 + 3x^2 - 5x$

2. กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 2 และสัมผัสเส้นโค้ง $y = x^2 + 2$ ถ้า $P(a , b)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L และใกล้จุด $(0 , 0)$ มากที่สุด แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

   1. $-\frac{1}{5}$ 2. $\frac{1}{5}$
   3. $-\frac{2}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$

3. กำหนดอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้งที่จุด $P(x , y)$ ใดๆ มีค่าเป็น $\frac{6}{x^4}$ และเส้นโค้งนี้สัมผัสเส้นตรง $2x - y - 5 = 0$ ที่จุด $(1 , -3)$ จงหาสมการเส้นโค้ง

   1. $y = \frac{1}{x^2} + 4x - 8$ 2. $y = \frac{1}{x} + 4x - 8$
   3. $y = x^2 + 4x - 8$ 4. $y = \frac{1}{x^2} - 4x - 8$

4. พื้นที่ระหว่างเส้นตรง $6x - 5y + 5 = 0$ กับแกน X บนช่วง $[0 , 5]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. 30 2. 24
   3. 20 4. 18

5. ค่าของ $\int (4x+1)^{-\frac{1}{3}} dx$ เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{3}{2}(4x+1) + C$ 2. $\frac{1}{4}(4x+1)^{\frac{2}{3}} + C$
   3. $\frac{3}{2}(4x+1)^{\frac{2}{3}} + C$ 4. $\frac{3}{8}(4x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

6. พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นตรง $y = 3x + 5$, $y = -2x + 5$ และ $y = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{125}{12}$ ตารางหน่วย 2. $\frac{125}{6}$ ตารางหน่วย
   3. $\frac{125}{4}$ ตารางหน่วย 4. $\frac{125}{3}$ ตารางหน่วย

7. ค่าของ $\int_{-1}^{2}|x-1|dx$ เท่ากับเท่าใด

1. 2
2. 2.5
3. 3
4. 3.5

8. พื้นที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $x = y^2$ และ $x = 3y - 2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{1}{3}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{1}{6}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{4}{5}$ ตารางหน่วย

9. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\int_{0}^{\pi}\cos x dx = \int_{0}^{2\pi}\sin x dx$

ข. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

10. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\int_{0}^{\pi}\sin 2x dx = \int_{0}^{\pi}\cos 2x dx$

ข. $\int_{-1}^{1}|x|dx = \int_{0}^{1}|2x|dx$

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลยคำตอบ

1. (2)	2. (1)	3. (1)	4. (3)	5. (4)
6. (1)	7. (2)	8. (3)	9. (2)	10. (1)

บทที่ 5
วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

5.1 สรุปเนื้อหา

1. การนับจำนวนวิธีในการทำงาน

ทฤษฎีบท การทำงานอย่างหนึ่งแบ่งการทำงานเป็น k ขั้นตอน

ขั้นที่ 1 มีทางเลือกในการทำงาน n_1 วิธี

ขั้นที่ 2 มีทางเลือกในการทำงาน n_2 วิธี

⋮

ขั้นที่ k มีทางเลือกในการทำงาน n_k วิธี

จะได้ว่าจำนวนวิธีทั้งหมดที่จะทำงานมี $n_1n_2n_3...n_k$ วิธี

ตัวอย่าง การนำตัวเลขจาก {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} ไปเขียนเป็นตัวเลข 2 หลักโดยไม่ซ้ำ

ขั้นที่ 1 หลักหน่วยเลือกเลขได้ 6 วิธี

ขั้นที่ 2 หลักสิบเลือกเลขได้ 5 วิธี

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด = (6) (5) = 30 วิธี

ตัวอย่าง จำนวนเต็มบวกที่หาร 108 ลงตัวมีทั้งหมดกี่ตัว

เพราะว่า $108 = 2^2 \cdot 3^3$ เพราะฉะนั้นตัวเลขที่หาร 108 ลงตัวต้องมี 2 , 3 เป็นตัวประกอบ

ขั้นที่ 1 เลือกตัวประกอบของ 2 คือ 2^0 , 2^1 , 2^2 ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกตัวประกอบของ 3 คือ 3^0 , 3^1 , 3^2 , 3^3 ทำได้ 4 วิธี

สรุปจำนวนเต็มบวกที่หาร 108 ลงตัวมีทั้งหมด = (3) (4) = 12 ตัว

สูตรทั่วไป ในการหาจำนวนเต็มบวกที่หาร M ลงตัว

แยกตัวประกอบ $M = p_1^{n1} p_2^{n2} p_3^{n3} p_4^{n4} ... p_k^{nk}$; p_i เป็นจำนวนเฉพาะ

จำนวนเต็มบวกที่หาร M ลงตัวมี $(n_1 + 1)(n_2 + 1)(n_3 + 1) ... (n_k + 1)$ ตัว

ตัวอย่าง M = 400 แยกตัวประกอบ $M = 2^4 \cdot 5^2$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หาร 400 ลงตัวมี (4 + 1)(2 + 1) = 15 ตัว

2. แฟกทอเรียล n!

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$\vdots$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$

เพราะฉะนั้น $n! = (n-1)!\, n$ เมื่อ $n = 1 , 2 , 3 , \ldots$

3. วิธีเรียงสับเปลี่ยน การจัดลำดับจะถือว่าลำดับของสิ่งของต่างกันถือว่าต่างกันเช่น 12 , 21 ถือว่าต่างกันวิธีจัดลำดับของ n สิ่งต่างกันมีวิธีทั้งหมดดังนี้

ทฤษฎีบท สิ่งของทั้งหมด n สิ่งต่างกัน นำออกมาจัดลำดับตามแนวเส้นตรงคราวละ r สิ่ง$(r \leq n)$ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนมีค่าเท่ากับ $P_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ วิธี

หมายเหตุ สัญลักษณ์ $P_{n,r}$ อาจแทนด้วย nPr หรือ $P(n , r)$ หรือ ^nP_r

ตัวอย่าง มีตัวเลข 1 , 2 , 3 , ... , 8 , 9 นำไปจัดลำดับโดยการเขียนเลข 4 หลัก คราวละ 4 ตัว โดยไม่ซ้ำทำได้

$$P_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 3024$$

ตัวอย่าง มีนักเรียน 10 คน เลือกตัวแทนออกมา 3 คน เพื่อทำหน้าที่ ประธานนักเรียน รองประธาน และเลขานุการ สามารถทำได้กี่วิธี

การเลือกคนมาทำหน้าที่เหมือนกับการจัดลำดับ (มีตำแหน่งกำหนดไว้)

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธี $= P_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$

หมายเหตุ 1. มีของต่างกันทั้งหมด n สิ่ง นำมาจัดลำดับทั้งหมด ทำได้ n! วิธี

2. มีของต่างกันทั้งหมด n สิ่ง นำออกมาจัดลำดับ 0 สิ่ง ทำได้ $0! = 1$ วิธี

3. การจัดลำดับหากมีของบางส่วนซ้ำกันให้หารทิ้งด้วยแฟกทอเรียลของจำนวนในกลุ่มที่ซ้ำกัน

ทฤษฎีบท สิ่งของทั้งหมด n แบ่งออกเป็น k กลุ่มที่มีการซ้ำกัน

กลุ่มที่ 1 มีจำนวน n_1

กลุ่มที่ 2 มีจำนวน n_2

:

กลุ่มที่ k มีจำนวน n_k โดยที่ $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนหรือการจัดลำดับของทั้งหมด n สิ่งทำได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างปัญหาการจัดลำดับตัวอักษรและตัวเลข

ตัวอย่าง วิธีเรียงลำดับอักษรทั้งหมดในคำว่า "mathematics" ได้กี่วิธี

วิธีทำ จำแนกกลุ่มอักษรที่ซ้ำ m 2 ตัว , a 2 ตัว , t 2 ตัว , h 1 ตัว , e 1 ตัว , i 1 ตัว , c 1 ตัว , s 1 ตัว อักษรทั้งหมดมี 11 ตัว เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีจัดลำดับทั้งหมด = $\dfrac{11!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 4989600$ วิธี

ตัวอย่าง จำนวนวิธีจัดลำดับอักษรจากคำว่า "STATISTICS" โดยนำมาจัดลำดับคราวละ 3 ตัวทำได้กี่วิธี

วิธีทำ จำแนกอักษรที่ซ้ำ S 3 ตัว , T 3 ตัว , A 1 ตัว , I 2 ตัว , C 1 ตัว

กรณีที่ 1 เหมือนกัน 3 ตัว ทำได้ 2 วิธีคือ SSS , TTT

กรณีที่ 2 ซ้ำกัน 2 ตัว ขั้นที่ 1 เลือก SS หรือ TT หรือ II ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 2 เลือก 1 ตัวจาก 4 แบบที่เหลือทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 3 เรียงลำดับได้ $\dfrac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$

รวมวิธีในขั้นตอนของกรณีที่ 2 ได้ (3)(4)(3) = 36 วิธี

กรณีที่ 3 ต่างกันทุกตัว ขั้นที่ 1 เลือกอักษรทำได้ $\dbinom{5}{3} = 15$

ขั้นที่ 2 จัดลำดับทำได้ 3! = 6

กรณีที่ 3 จะมีวิธีต่างกัน = (15)(6) = 90

รวมทั้ง 3 กรณีจะมีวิธีทั้งหมด = 2 + 36 + 90 = 128 วิธี

ตัวอย่าง การจัดลำดับของ 6 สิ่งคือ 1 , 1 , 2 , 2 , 2 , 2 พร้อมกันทำได้ = $\dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$

การจัดลำดับของ 8 สิ่ง คือ 0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 2 , 2 , 2 พร้อมกันทำได้ = $\dfrac{8!}{2!\cdot 3!\cdot 3!} = 560$

4. วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม

ทฤษฎีบท ของทั้งหมด n สิ่งต่างกันทั้งหมด นำมาจัดลำดับในแนววงกลมทำได้ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่าง 1 , 2 , 3 นำมาจัดลำดับแนววงกลมทำได้ 2 วิธี

A , B , C , D , E นำมาจัดลำดับแนววงกลมทำได้ $(5-1)! = 24$ วิธี

หมายเหตุ การจัดแนววงกลมหากมีเงื่อนไขอื่นเพิ่มเติมต้องคิดตามเหตุการณ์จริง

ตัวอย่าง ชาย 3 คน หญิง 3 คน จัดลำดับตามแนววงกลมด้วยเงื่อนไขต่าง

1. จัดลำดับตามแนววงกลมไม่มีเงื่อนไขทำได้ $(6-1)! = 120$ วิธี
2. ชาย 3 คนและหญิง 3 คนต้องอยู่ติดกันทำได้ $(3!)(3!) = 36$ วิธี
3. ชายหญิงสลับกัน

ขั้นที่ 1 หญิง 3 คน จัดตามแนววงกลมทำได้ $(3-1)! = 2$

ขั้นที่ 2 ชาย 3 คน เข้าไปนั่งแทรกทำได้ $3! = 6$

รวมจำนวนทั้งหมดของการนั่งสลับกันทำได้ $(2)(6) = 12$ วิธี

5. วิธีจัดหมู่

การจัดลำดับเราถือว่าลำดับต่างกันจะมีความหมายต่างกันเช่น 123 ต่างกับ 132

การจัดหมู่สนใจลักษณะโดยร่วมว่าเหมือนกันหรือไม่ เช่น การได้ 123 หรือ 132 จะถือว่าเป็นการจัดหมู่ที่เหมือนกัน

ทฤษฎีบท มีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n สิ่ง นำออกมาจัดหมู่คราวละ r สิ่ง $(r \le n)$ จะมีวิธีทำได้ = $^{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี หรือ $\dbinom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี

ตัวอย่าง 1. เลือกอักษร 3 ตัวจาก {a , b , c , d , e} ทำได้ $\dbinom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$ วิธี

2. เลือกตัวแทนนักเรียน 4 คนจากนักเรียนทั้งหมด 10 คนทำได้ $\dbinom{10}{4} = \dfrac{10!}{6!\,4!} = 210$

3. นักเรียนทั้งหมดประกอบด้วยนักเรียนชาย 10 คน นักเรียนหญิง 8 คนเลือกตัวแทน 8 คน โดยให้จำนวนชายและหญิงเท่ากัน

ขั้นที่ 1 เลือกชายทำได้ $\dbinom{10}{4} = 210$

ขั้นที่ 2 เลือกหญิงทำได้ $\dbinom{8}{4} = 70$

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด = 210)(70) = 14700 วิธี

4. กล่องดินสอมีดินสอทั้งหมด 12 แท่ง เป็นสีแดง 4 แท่ง สีขาว 3 แท่ง และที่เหลือเป็นสีน้ำเงิน หยิบดินสอออกมาโดยสุ่มพร้อมกันจำนวน 3 แท่ง จำนวนวิธีที่จะได้ครบทุกสีเท่ากับเท่าใด

ขั้นที่ 1 เลือกสีแดง 1 แท่งจาก 4 แท่ง ทำได้ $\binom{4}{1} = 4$

ขั้นที่ 2 เลือกสีขาว 1 แท่งจาก 3 แท่ง ทำได้ $\binom{3}{1} = 3$

ขั้นที่ 3 เลือกสีน้ำเงิน 1 แท่งจาก 5 แท่ง ทำได้ $\binom{5}{1} = 5$

สรุปจำนวนวิธีเลือกทั้งหมด = (4)(3)(5) = 60 วิธี

ปัญหาการนับจำนวนวิธีในการแบ่งกลุ่ม

ตัวอย่าง มีตัวเลข 1 , 2 , 3 , 4 แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 1 กับ 3 ทำได้กี่วิธี

วิธีทำ โดยการแจงกรณีจะได้

1. {1} , {2 , 3 , 4}
2. {2} , {1 , 3 , 4}
3. {3} , {1 , 2 , 4}
4. {4} , {1 , 2 , 3}

ตอบ 4 วิธี

ตัวอย่าง มีตัวเลข 1 , 2 , 3 , 4 แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 2 ทำได้กี่วิธี

วิธีทำ โดยการแจงกรณีจะได้

1. {1 , 2} , {3 , 4}
2. {1 , 3} , {2 , 4}
3. {1 , 4} , {2 , 3}

ตอบ 3 วิธี

ทฤษฎีบท มีสิ่งของทั้งหมด n สิ่งแตกต่างกันทั้งหมดแบ่งออกเป็น k กลุ่มๆ ละ $n_1 , n_2 , \ldots , n_k$ ตามลำดับ ถ้า $n_i \neq n_j$ ทุกค่า $i \neq j$ และ $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$ แล้วจำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม = $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$

ตัวอย่าง การแบ่งอักษร A , B , C , D , E , F ออกเป็น 3 กลุ่มๆ ละ 1 , 2 , 3 ทำได้ $\dfrac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!} = 60$ วิธี

การแบ่งดินสอ 10 แท่งที่มีสีต่างกันทั้งหมดออกเป็น 4 กลุ่มๆ ละ 1, 2, 3, 4 ทำได้ $\dfrac{10!}{1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!} = 12600$

หมายเหตุ การแบ่งกลุ่มในกรณีที่มีจำนวนกลุ่มซ้ำกันเช่น แบ่งดินสอ 12 แท่งออกเป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 4 แท่ง การแบ่งดินสอ 12 แท่งออกเป็น 4 กลุ่มๆ ละ 2 , 2 , 4 , 4 ให้ใช้แนวคิดแบบข้างต้น และทำการหารทิ้งด้วยจำนวนกลุ่มที่ซ้ำกัน

ตัวอย่าง แบ่ง {1 , 2 , 3 , 4} ออกเป็น 2 กลุ่มๆ ละ 2 ทำได้ $\left(\frac{4!}{2!\cdot 2!}\right)\left(\frac{1}{2!}\right) = 3$

แบ่งดินสอ 12 แท่งเป็น 3 กลุ่มๆ ละ 4 ทำได้ $\left(\frac{12!}{4!\cdot 4!\cdot 4!}\right)\left(\frac{1}{3!}\right) = 5775$

แบ่งดินสอ 12 แท่ง ออกเป็น 4 กลุ่มๆ ละ 2 , 2 , 4 , 4 ทำได้ $= \left(\frac{12!}{2!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 4!}\right)\left(\frac{1}{2!}\right)\left(\frac{1}{2!}\right) = 51975$

ทฤษฎีบท มีของทั้งหมด n สิ่งต่างกันแบ่งออกเป็น m กลุ่ม

$$\overbrace{\underbrace{n_1 , n_1 , \ldots n_1}_{\text{ซ้ำ } r_1} , \underbrace{n_2 , n_2 , \ldots , n_2}_{\text{ซ้ำ } r_2} , \ldots , \underbrace{n_m , n_m , \ldots , n_m}_{\text{ซ้ำ } r_m}}^{m \text{ กลุ่ม}}$$

$$\text{จำนวนวิธีแบ่งกลุ่ม} = \frac{n!}{(n_1!)^{r_1}(n_2!)^{r_2}\ldots(n_m!)^{r_m}(r_1!)(r_2!)\ldots(r_m!)}$$

6. การกระจายทวินาม

จากสูตรพีชคณิตระดับ ม.ต้น $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

เมื่อ n = 1 , 2 , 3 , 4 , ... การกระจาย $(a+b)^n$ เราใช้ผลของทฤษฎีบททวินาม

ทฤษฎีบททวินาม n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$$

พจน์ที่ T_{r+1} ของการกระจาย $(a+b)^n$ คือ $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$

ตัวอย่าง $(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ข้อควรจำ 1. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$

2. $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$

3. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

4. $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$
5. $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$; $0 \le k \le n$
6. $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$
7. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
8. $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ และ $\binom{n}{r} + \binom{n}{n-r} = \binom{n+1}{r+1}$
9. n เป็นเลขคู่ $n = 2k$ จะได้ว่า $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2k} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2k-1} = 2^{n-1}$
10. $\binom{n}{k} < \binom{n}{k+1}$ ก็ต่อเมื่อ $k < \frac{n-1}{2}$
11. $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n$

    $A = \left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{u}{n}\right\}$ ค่าสูงสุดของสมาชิกใน A คือ $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

    และ $\binom{n}{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ เป็นค่าสูงสุดของสมาชิกใน A เมื่อ n เป็นเลขคี่

คำถามพื้นฐานเกี่ยวกับการกระจายทวินาม

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 4 ของการกระจาย $(2x+3)^{10}$

วิธีทำ $T_4 = T_{3+1} = \binom{10}{3}(2x)^{10-3}(3)^3 = 120\,(2^7)(3)^3\,x^7 = 414720x^7$

2. จงหาค่าคงตัวของการกระจายพจน์ $(x^2 + \frac{1}{x})^{12}$

วิธีทำ $T_{r+1} = \binom{12}{r}(x^2)^{12-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{12}{r}x^{24-3r}$ ค่าคงตัวเกิดจาก r ที่ทำให้ $24 - 3r = 0$, $r = 8$

สรุปพจน์ค่าคงตัวคือ $T_8 = \binom{12}{8} = 495$

3. สัมประสิทธิ์ของ x^4 ในการกระจายพจน์ $(x^3 + \frac{2}{x})^{12}$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $T_{r+1} = \binom{12}{r}(x^3)^{12-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r = \binom{12}{r}x^{36-4r}2^r$

$x^{36-4r} = x^4$ เมื่อ $r = 8$ เพราะฉะนั้น $T_9 = \binom{12}{8}x^4 2^8 = 126720x^4$

หมายเหตุ $f(x) = (a + bx)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

จะได้ว่า 1. ค่าคงตัวของการกระจาย = $f(0)$

2. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทั้งหมดของการกระจาย = $a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = f(1)$

3. สัมประสิทธิ์ a_k หาได้จาก $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

ตัวอย่าง กำหนด $f(x) = 1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + ... + (1 + x)^{50}$

ค่าคงตัวของ $f(x)$ มีค่าเท่ากับ $f(0) = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = 51$

ผลบวกของสัมประสิทธิ์ทุกตัวใน $f(x)$ เท่ากับ $f(1)$ มีค่าเท่ากับ

$$f(1) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{50} = \frac{1-2^{51}}{1-2} = 2^{51} - 1$$

$$f'(x) = 1 + 2(1 + x) + 3(1 + x)^2 + 4(1 + x)^3 + ... + 50(1 + x)^{49}$$

$$f'(0) = 1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{50}{2}(1 + 50) = 1275$$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x กำลังหนึ่งใน $f(x)$ เท่ากับ 1275

7. สามเหลี่ยมปาสคาล

$$(a + b)^0 = 1$$
$$(a + b)^1 = a + b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

สามเหลี่ยมปาสคาลเป็นสามเหลี่ยมที่ประกอบด้วยตัวเลขซึ่งแสดงสัมประสิทธิ์ของการกระจาย $(a + b)^n$ ในกรณีที่ n ไม่มากนักเราสามารถหาพจน์ที่ T_{r+1} ของ $(a + b)^n$ โดยใช้สามเหลี่ยมปาสคาลได้ แต่หาก n มีค่ามากเช่น n = 20 การหาพจน์ที่ T_{r+1} ของ $(a + b)^{20}$ ใช้สูตร $T_{r+1} = \binom{n}{r}a^{n-r}b^r$ จะเป็นวิธีที่ดีกว่า

ตัวอย่างคำถามเกี่ยวกับสามเหลี่ยมปาสคาล

1. ผลบวกของตัวเลขใน 10 บรรทัดแรกของสามเหลี่ยมปาสคาล มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $1 + (1 + 1) + (1 + 2 + 1) + ... + (1 + 10 + 45 + ... + 45 + 10 + 1)$

$$= 1^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{10} = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1$$

หมายเหตุ ผลบวกของตัวเลข n บรรทัดแรกจากบนลงล่างของสามเหลี่ยมปาสคาล

$$= 2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

8. ปัญหาการจับคู่

ในการนำตัวเลข 1 , 2 , 3 , ... , n ไปทำการเรียงสับเปลี่ยนเลขบางตัวอาจอยู่ที่ตำแหน่งเดิม , เลขบางตัวอาจอยู่ตำแหน่งอื่นๆ ตัวอย่างเช่น (1 , 2 , 3) เมื่อนำเลข 1 , 2 , 3 ไปเรียงใหม่ทำได้ 6 วิธีคือ 123 , 132 , 213 , 231 , 312 , 321 จะเห็นได้ว่า

123 ตรงตำแหน่งเดิมทุกตัว

132 ตรงตำแหน่งเดิมเพียงตัวเดียว

312 ไม่ตรงตำแหน่งเดิมแม้แต่ตัวเดียว

ปัญหาการจับคู่ที่เราสนใจคือ ในการเรียงสับเปลี่ยน 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... , n จะมีกี่วิธีที่การเรียงสับเปลี่ยนนั้นจะตรงตำแหน่ง x ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 1234 เมื่อเรียงสับเปลี่ยนจะได้ว่า การเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด = 4! = 24 จำแนกตามจำนวนที่ตรงตำแหน่ง

จำนวนตำแหน่งที่ตรง	แจงกรณีได้เป็น	จำนวนวิธี
4	1234	1
3	–	0
2	1243 , 1432 , 1324 , 4231 , 3214 , 2134	6
1	1342 , 1423 , 3241 , 4213 , 4132 , 2431 , 3124 , 2314	8
0	นับจากส่วนที่เหลือ 24 – (1 + 0 + 6 + 8) = 9	9

กรณีทั่วไป การเรียงสับเปลี่ยน 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... , n

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีตัวใดตรงตำแหน่งเดิมแม้แต่ตัวเดียว

$= n! - n!(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!})$

ปัญหาการจับคู่ 1 , 2 , 3 , ... , n	จำนวนวิธีที่ไม่มีคู่ใดตรงตำแหน่ง
1	0
2	1
3	$3! - 3!(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}) = 6 - (6 - 3 + 1) = 6 - 4 = 2$
4	$4! - 4!\,(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}) = 24 - (24 - 12 + 4 - 1) = 9$
5	$5! - 5!(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!}) = 120 - (120 - 60 + 20 - 5 + 1) = 44$

โจทย์ประยุกต์ปัญหาการจับคู่

1. นักเรียน 5 คนนำของขวัญมาจับฉลากร่วมกัน จะมีกี่วิธีที่ทุกคนไม่ได้ของขวัญของตัวเอง

วิธีทำ คนที่ 1 , 2 , 3 , 4 , 5

ของขวัญ 1 , 2 , 3 , 4 , 5

ไม่มีคนได้ของตัวเองคือการจัดลำดับ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 โดยไม่มีตรงตำแหน่งเดิมทำได้ 44 วิธี

2. นักศึกษาวิชาทหาร 10 คน วางหมวกรวมกันไว้ในลัง เมื่อทุกคนกลับมาหยิบหมวกจะมีกี่วิธีที่มีเพียงคน 6 คน เท่านั้นหยิบได้หมวกของตัวเอง

วิธีทำ ขั้นที่ 1 เลือกคน 6 คน ที่ได้หมวกตัวเองทำได้ $\binom{10}{6} = 210$

ขั้นที่ 2 4 คน ที่เหลือไม่มีใครได้หมวกของตัวเองทำได้ 9 วิธี

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีทั้งหมด = (210) (9) = 1890 วิธี

การนับจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่ตรงตำแหน่งเดิมโดยใช้สูตรลดทอน

กำหนดให้ D_n = จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่มีการตรงตำแหน่งของการเรียงสับเปลี่ยนของ n สิ่ง

ตัวอย่างเช่น $D_1 = 0$

$D_2 = 1$

$D_3 = 2$

$D_4 = 9$

$D_5 = 44$

กรณีทั่วไปจะได้ว่า $D_n = n! - n!(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

หรือสูตร D_n ในพจน์ที่ต่ำกว่าคือ $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$; $n \geq 2$

หรือ $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$B = \{f \mid f : A \longrightarrow A$, มีเพียง $f(1) = 1$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นนอกนั้น $f(k) \neq k$ ทุกค่า $k = 2, 3, \dots, 9\}$

จะได้ว่า n(E) = จำนวนเรียงสับเปลี่ยน {2 , 3 , ... , 9} ที่ไม่ตรงตำแหน่ง

$= D_8$	$= 8D_7 + (-1)^8$	$= 8D_7 + 1$
$= 8(7D_6 + (-1)^7) + 1$	$= 8(7D_6 - 1) + 1$	$= (8)(7)D_6 - 7$
$= (8)(7)(6D_5 + (-1)^6) - 7$	$= (8)(7)(6)D_5 + 56 - 7$	$= (8)(7)(6)(4) + 49 = 14833$

หรือโดยสูตร $D_8 = 8! - 8!\,(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{8!})$

$= 8! - (8! - \frac{8!}{2!} + \frac{8!}{3!} - \frac{8!}{4!} + \frac{8!}{5!} - \frac{8!}{6!} + \frac{8!}{7!} - \frac{8!}{8!})$

$= 20160 - 6720 + 1680 - 336 + 56 - 8 + 1 = 14833$

9. ปัญหาการนับจำนวนฟังก์ชัน

9.1 $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$; $B = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$; $n \le m$

$S = \{f \mid f : A \longrightarrow B\}$ $\qquad n(S) = (m)(m)(m)\ldots(m) = m^n$

$E = \{f \in S \mid f : A \longrightarrow B$ และ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง$\}$

$n(E) = (m)(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = {}^{m}P_{n}$

9.2 $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$S = \{f \mid f : A \longrightarrow A\}$ $\qquad n(S) = n^n$

$E = \{f \in S \mid f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหน่วย$\}$ $\qquad n(E) = n!$

9.3 $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$S = \{f \mid f : A \longrightarrow A$ และ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง$\}$

$E_1 = \{f \in S \mid f(1) = 1\}$ $\qquad n(E_1) = (n-1)!$

$E_2 = \{f \in S \mid f(1) = 1$ และ $f(2) = 2\}$ $\qquad n(E_2) = (n-2)!$

$F = \{f \in S \mid f(k) \ne k$ ทุกค่า $k\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ F คือการจับคู่ n ตัวและไม่ตรงคู่แม้แต่ตัวเดียว

$n(F) = n! - n!\,(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!})$

โจทย์ประยุกต์การนับจำนวนฟังก์ชัน

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{f \mid f : A \longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และ $f(1) < f(2)\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของ E

วิธีทำ กรณีที่ 1 $f(1) = 1$ $\quad f(2), f(3), f(4), f(5)$ เลือกส่งค่าทุกแบบทำได้ $4! = 24$ วิธี

กรณีที่ 2 $f(1) = 2$

$f(2)$ เลือกส่งค่าได้ 3 แบบ

$f(3), f(4), f(5)$ เลือกส่งค่าได้ $3! = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นกรณี 2 มีฟังก์ชัน f ได้ $(3)(6) = 18$ วิธี

กรณีที่ 3 $f(1) = 3$

$f(2) = 4$ หรือ $f(2) = 5$ เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ เลือกส่งค่าได้ $3! = 6$ วิธี

เพราะฉะนั้นกรณี 3 มีฟังก์ชัน f ได้ $(2)(6) = 12$ วิธี

กรณีที่ 4 $f(1) = 4$ และ $f(2) = 5$ เท่านั้น

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ ส่งค่าได้ $3! = 6$ วิธี

รวมทุกกรณีจะได้ว่า $n(E) = 24 + 18 + 12 + 6 = 60$

ตัวอย่าง $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E = \{f \mid f : A \longrightarrow A$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 , $f(1) = 2$ และ $f(2) = 3\}$ จำนวนสมาชิกของ E เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ พิจารณาการส่งค่า $\{3, 4, 5, 6\} \longrightarrow \{1, 4, 5, 6\}$ ที่เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 ทำได้ $4! = 24$ วิธี

เพราะฉะนั้น $n(E) = 24$

10. ปัญหาเกี่ยวกับจำนวนตัวเลขที่มีการหารลงตัว

ตัวอย่าง จำนวนเต็มที่หาร 200 ลงตัวมีกี่ตัว

วิธีทำ $200 = 2^3 \cdot 5^2$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หาร 200 ลงตัวมี $(3 + 1)(2 + 1) = 12$ ตัว

ตัวอย่าง $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวก , 42 หาร x ลงตัว และมีจำนวนเต็มบวกที่หาร x ลงตัวมี 42 ตัว$\}$ ค่าของ $n(A)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

สมมติ $x = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ ดังนั้น $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = (1 + 1)(2 + 1)(6 + 1)$

เพราะฉะนั้น $\{a, b, c\} = \{1, 2, 6\}$

ดังนั้น x เกิดจากการสลับค่าของ 1 , 2 , 6 ซึ่งทำได้ 3! วิธี

สรุป $A = \{2^1 \cdot 3^2 \cdot 7^6, 2^1 \cdot 3^6 \cdot 7^2, 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^6, 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^1, 2^6 \cdot 3^1 \cdot 7^2, \cdot 2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^1\}$

ตัวอย่าง $X = \{1, 2, \ldots, 2500\}$

$E = \{x \in X \mid 3$ หาร x ลงตัว , 5 หาร x ไม่ลงตัว$\}$ $n(E)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2500\}$

$A = \{x \in X \mid 3$ หาร x ลงตัว$\} = \{3, 6, 9, 12, \ldots, 2448\}$

$n(A) = n(\{3 , 6 , 9 , 10 , ... 2448\}) = n(\{1 , 2 , 3 , 4 , ... 816\}) = 816$

$B = \{x \in X \mid 5$ หาร x ลงตัว$\} = \{5 , 10 , 15 , ... , 2500\}$ $n(B) = 500$

$A \cap B = \{x \in X \mid 3$ หาร x ลงตัวและ 5 หาร x ลงตัว$\}$

$= \{x \in X \mid 15$ หาร x ลงตัว$\} = \{15 , 30 , 45 , ... , 2490\}$

$n(A \cap B) = 166$

$E = \{x \in X \mid 3$ หาร x ลงตัว และ 5 หาร x ไม่ลงตัว$\} = A \cap B' = A - B = A - A \cap B$

$n(E) = n(A - A \cap B) = n(A) - n(A \cap B) = 816 - 166 = 650$

ตัวอย่าง $X = \{1 , 2 , 3 , ... , 1000\}$

$A = \{x \in X \mid$ ห.ร.ม $(x , 28) = 4\}$ $n(A)$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ $20 = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 2^2 \cdot 7$

$A = \{x \in X \mid$ ห.ร.ม $(x , 20) = 4\} = \{x \in X \mid 4$ หาร x ลงตัว และ 7 หาร x ไม่ลงตัว$\}$

$B = \{x \in X \mid 4$ หาร x ลงตัว$\} = \{4 , 8 , 12 , ... , 1000\}$ $n(B) = 250$

$C = \{x \in X \mid 7$ หาร x ลงตัว$\} = \{7 , 14 , 21 , ... , 994\}$ $n(C) = 142$

$B \cap C = \{x \in X \mid 4$ หาร x ลงตัว และ 7 หาร x ลงตัว$\} = \{x \in X \mid 28$ หาร x ลงตัว$\}$

$= \{28 , 56 , 84 , ... , 980\}$

$n(B \cap C) = 35$

$n(A) = n(B \cap C') = n(B - C) = n(B - (B \cap C)) = n(B) - n(B \cap C) = 250 - 30 = 215$

11.ปัญหาการนับจำนวนจุด , จำนวนเส้น , จำนวนสามเหลี่ยม , ...

แนวคิด 1. เส้นตรง 2 เส้นตัดกัน 1 จุด , มีจุด 2 จุด ลากเส้นได้ 1 เส้น

2. จุด 3 จุด ทำให้เกิดสามเหลี่ยม 1 รูป

3. เส้นขนาน 2 คู่ตัดกันจะเกิดสี่เหลี่ยม 1 รูป

ตัวอย่าง จุด 12 จุดบนเส้นรอบวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วยมีระยะห่างเท่าๆ กัน

1. โยงทุกจุดเข้าด้วยกันจะได้คอร์ดทั้งหมด $\binom{12}{2} = 66$ เส้น

2. โยงทุกจุดด้วยเส้นตรงจะได้สามเหลี่ยม $= \binom{12}{3} = 220$ รูป

3. โยงทุกจุดด้วยเส้นตรงจะได้สี่เหลี่ยม $= \binom{12}{4} = 495$ รูป

ตัวอย่าง เส้นขนาน 10 เส้นตัดกับเส้นขนาน 12 เส้นเกิดสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$= \binom{10}{2}\binom{12}{2} = (45)(66) = 2970$ รูป

สูตรทั่วไป เส้นขนาน m เส้นตัดกับเส้นขนาน n เส้นจะเกิดสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= \binom{m}{2}\binom{n}{2}$ เส้น

ตัวอย่าง จงหาจำนวนจุดตัดที่มากที่สุดที่เกิดจากเส้นตรง 4 เส้นและวงกลม 5 วงตัดกัน (ไม่มีเส้นซ้อนกันและวงกลมซ้อนกัน)

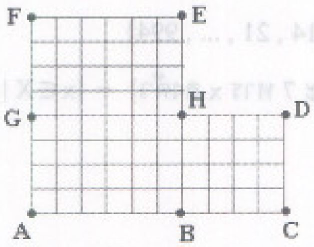
วิธีทำ กรณีที่ 1. จุดเกิดจากเส้นตรงตัดกัน $\binom{4}{2} = 12$

กรณีที่ 2. จุดเกิดจากวงกลมตัดกัน $\binom{5}{2} = 20$

กรณีที่ 3. เส้นตรงตัดกับวงกลม $2(4)(5) = 40$

รวมจุดตัดมากที่สุดที่เป็นไปได้ = 12 + 20 + 40 = 72 จุด

ตัวอย่าง จากรูปที่กำหนด มีจำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมดกี่รูป



วิธีทำ จำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมดใน ABEF $= \binom{9}{2}\binom{7}{2} = (36)(21) = 756$

จำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมดใน ACDG $= \binom{11}{2}\binom{5}{2} = (55)(10) = 210$

จำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมดใน ABHG $= \binom{7}{2}\binom{5}{2} = (21)(10) = 210$

เพราะฉะนั้นจำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมด

= จำนวนสี่เหลี่ยมใน ABEF + จำนวนสี่เหลี่ยมใน ACDG – จำนวนสี่เหลี่ยมใน ABHG

= 756 + 550 – 210 = 1096

5.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์และตัวเลือกที่สูตร เช่น คำถามเกี่ยวกับสูตร ${}^nP_r$, ${}^nC_r$ หรือการกระจายทวินาม , สูตรสัมประสิทธิ์กำลังต่างๆ คำถามเหล่านี้การแทนค่า n , r ที่เหมาะสมจะทำให้เราสามารถตัดตัวเลือกที่ไม่ต้องการทิ้งไปได้

ตัวอย่างที่ 5.2.1 ถ้า $7\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}$ แล้วค่า n มีค่าเท่าใด

1. 9 2. 10
3. 11 4. 12

การตัดตัวเลือก แทนค่า n = 9 จะได้ $7\binom{n}{2} = 7\binom{9}{2} = 7\left(\frac{9!}{7!\cdot 2!}\right) = 7(36) = 252$

$$3\binom{n}{3} = 3\binom{9}{3} = 3\left(\frac{9!}{6!\cdot 3!}\right) = 3(84) = 252$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง $7\binom{n}{2} = 3\binom{n}{3}$

$$7\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right) = 3\left(\frac{n!}{3!(n-3)!}\right)$$

$$7(n-3)! = 3(n-2)!$$

$$7 = n-2$$ เพราะฉะนั้น n = 9

ตัวอย่างที่ 5.2.2 กำหนด m , n และ r เป็นจำนวนเต็มบวก

ค่าของ $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\binom{m}{2}\binom{n}{r-2}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{m!n!}{r!}$ 2. $\binom{m+n}{r}$
3. $\binom{mn}{r}$ 4. $\frac{(m+n)!}{r!}$

การตัดตัวเลือก แทนค่า m = 2 , n = 3 , r = 2 จะได้

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{2}{0}\binom{3}{2}+\binom{2}{1}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}\binom{3}{0} = (1)(3)+(2)(3)+(1)(1) = 10$$

ตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น 1. $\frac{m!n!}{r!} = \frac{2!\cdot 3!}{2!} = 6$ 2. $\binom{m+n}{r} = \binom{5}{2} = 10$

3. $\binom{mn}{r} = \binom{6}{2} = 15$ 4. $\frac{(m+n)!}{r!} = \frac{5!}{2!} = 60$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง ของทั้งหมดมี m + n สิ่ง แบ่งกลุ่มเป็น 2 กลุ่ม คือกลุ่มที่ 1 มี m สิ่ง กลุ่มที่ 2 มี n สิ่ง การเลือกของ r สิ่งจากทั้งหมด m + n สิ่งทำได้ $\binom{m+n}{r}$ แต่ดังทำการแจงกรณีจะได้ว่า

1	2	จำนวนวิธี
0	r	$\binom{m}{0}\binom{n}{r}$
1	r – 1	$\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	0	$\binom{m}{r}\binom{n}{0}$

สรุป จำนวนวิธีทั้งหมด = $\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\ldots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{r}$

2. ใช้การคิดบางส่วนของลักษณะที่โจทย์กำหนดหรือทำการแจงสมาชิกบางส่วน หรือทั้งหมด เพื่อนับจำนวนสมาชิก ในกรณีที่ตัวเลขไม่มากนักจะได้คะแนนเร็วกว่าการพยายามจะคิด โดยใช้สูตร

ตัวอย่างที่ 5.2.3 นำอักษรจากคำว่า "BANGKOK" มาเรียงลำดับแบบวงกลมคราวละ 4 ตัว จะทำได้กี่วิธี

1. 30
2. 60
3. 90
4. 120

การตัดตัวเลือก เราคิดเฉพาะกรณี 4 ตัว ต่างกันหมดจะได้ว่า

เลือกตัวอักษร 4 ตัวจากที่ต่างกันทั้งหมด 6 ตัว ทำได้ $\binom{6}{4} = 15$

อักษร 4 ตัว ที่ต่างกันนำมาจัดวงกลมทำได้ (4 – 1)! = 6 วิธี

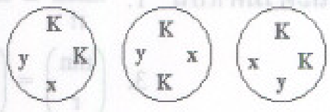
รวมจำนวนวิธีทั้งหมด = (15)(16) = 90 วิธี

เพราะฉะนั้นวิธีทั้งหมดต้องมากกว่า 90 วิธี เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง การเรียงลำดับแบ่งเป็น 2 กรณี คือมีอักษร KK ซ้ำ และ 4 ตัวไม่ซ้ำกัน

กรณี 1 มี KK อีก 2 ตัว เลือกได้ $\binom{5}{2} = 10$

KKxy จัดลำดับแบบวงกลมได้ 3 แบบคือ



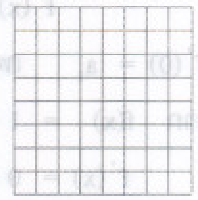
เพราะฉะนั้นกรณีที่ 1 จัดได้ 30 แบบ

กรณี 2 4 ตัวต่างกันเลือกอักษรได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

อักษร 4 ตัว ต่างกันจัดแบบวงกลมทำได้ $3! = 6$ วิธี

กรณีที่ 2 จะจัดลำดับแบบวงกลมได้ $(15)(16) = 90$ วิธี รวมทั้ง 2 กรณีจะจัดให้ 120 วิธี

ตัวอย่างที่ 5.2.4 เส้นขนาน 9 เส้นตัดกับเส้นขนาน 9 จะเกิดสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมดกี่รูป



1. 64 2. 81
3. 324 4. 1296

การตัดตัวเลือก ดูจากตารางหมากรุกก็จะพบว่าเกิดจากเส้นขนาน 9 เส้น ตัดกับเส้นขนาน 9 เส้น สี่เหลี่ยมเล็กที่สุดในตารางหมากรุก เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน ซึ่งเกิน 64 รูปแล้ว เมื่อนับสี่เหลี่ยมด้านขนานที่กว้าง 1 ช่อง และยาว 2 ช่อง รวมเข้าไปก็จะเกิน 81 รูปแล้ว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ได้

วิธีจริง ข้อสอบแบบนี้ใช้สูตรเลยดีกว่า เส้นขนานแนวระดับ 2 เส้น ตัดกับเส้นขนาน 2 เส้น ในแนวอื่น จะทำให้เกิดสี่เหลี่ยมด้านขนาน 1 รูป

เพราะฉะนั้นจะมีสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด $= \binom{9}{2}\binom{9}{2} = (36)(36 = 1296$

ตัวอย่างที่ 5.2.5 มีจำนวนเต็มบวกทั้งหมดกี่ตัวที่หาร 2000 ลงตัว

1. 4 2. 5
3. 10 4. 20

การตัดตัวเลือก โดยการแจกสมาชิกตัวเลขที่หาร 2000 ลงตัว คือ 1 , 2 , 4 , 8 , 5 , 10 , 20 , 100 , 500 , 1000 , 400 แค่นี้ก็ตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง $2000 = (2^4)(5^3)$ จากสูตร $x = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} \ldots p_n^{k_n}$ เมื่อ $p_1 , p_2 , \ldots p_n$ เป็นจำนวนเฉพาะ จำนวนเต็มบวกที่หาร x ลงตัวมีทั้งหมด $= (k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_n + 1)$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หาร 2000 ลงตัวมีทั้งหมด $= (4 + 1)(3 + 1) = 20$

3. การกระจายทวินาม เราสามารถนำความรู้เรื่องอนุพันธ์และอนุกรมเรขาคณิตมาช่วยหาคำตอบและตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 5.2.6 สัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีเทอม x กำลังหนึ่งในการกระจาย

$1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + \ldots + (1 + x)^{19} + (1 + x)^{20}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 55 2. 105

3. 210 4. 420

การตัดตัวเลือก $f(x) = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{19} + (1+x)^{20}$

สูตร $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{20}x^{20}$

$f'(x) = a_1 + 2a_2x + \dots + 20a_{20}x^{19}$

$f'(0) = a_1$ เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ x คือ $f'(0)$

จาก $f(x) = 1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^{19} + (1+x)^{20}$

$f'(x) = 0 + 1 + 2(x+1) + 3(1+x)^2 + \dots + 19(1+x)^{18} + 20(1+x)^{19}$

$f'(0) = 1 + 2 + 3 + \dots + 19 + 20 = \frac{20}{2}(1+20) = 210$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. ได้เลย

วิธีจริง $1 + (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{19} + (1+x)^{20} = (1)(1-(1+x)^{21})$

$= \frac{(1+x)^{21}-1}{x}$

สัมประสิทธิ์ x^2 ใน $(1+x)^{21}$ คือ $\binom{21}{2} = 210$ เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ x ใน $\frac{(1+x)^{21}-1}{x}$ คือ 210

ตัวอย่างที่ 5.2.7 สัมประสิทธิ์ของ x^2 ในการกระจาย $(x + \frac{1}{x})^{10}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 210 2. 105

3. 45 4. 15

การตัดตัวเลือก ใช้การแจงกรณี $(x + \frac{1}{x})^{10} = \frac{(x^2+1)^{10}}{x^{10}} = \frac{1}{x^{10}}(1+x^2)^{10}$

$(1+x^2)^{10} = \binom{10}{0} + \binom{10}{1}x^2 + \binom{10}{2}x^4 + \binom{10}{3}x^6 + \dots + \binom{10}{6}x^{12} + \dots + \binom{10}{10}x^{20}$

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $(x + \frac{1}{x})^{10}$ คือ $\frac{\binom{10}{6}x^{12}}{x^{10}}$ มีค่าเท่ากับ $\binom{10}{6} = 210$

วิธีจริง $(x + \frac{1}{x})^{10}$ มีพจน์ $T_{r+1} = \binom{n}{r}x^{n-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r = \binom{n}{r}x^{n-2r} = \binom{10}{r}x^{10-2r}$

หาค่า r ที่ทำให้ $10 - 2r = 2$ เพราะฉะนั้น $r = 6$

เพราะว่า $\binom{10}{6} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210$ สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $(x + \frac{1}{x})^{10}$ คือ 210

5.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 5.3.1 ค่าของ $\dfrac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{r}{n-r}$ 2. $\dfrac{n-r+1}{r}$

3. $\dfrac{r}{n-r+1}$ 4. $\dfrac{n-r}{r+1}$

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n , r แทนค่า n = 5 , r = 2 จะได้

$$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{5}{2}} = \frac{10}{10} = 1$$

1. $\dfrac{r}{n-r} = \dfrac{2}{5-2} = \dfrac{2}{3}$ 2. $\dfrac{n-r+1}{r} = \dfrac{5-2+1}{2} > 1$

3. $\dfrac{r}{n-r+1} = \dfrac{2}{5-2+1} = \dfrac{2}{4}$ 4. $\dfrac{n-r}{r+1} = \dfrac{5-2}{2+1} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง $$\frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\left(\dfrac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}\right)}{\left(\dfrac{n!}{r!(n-r)!}\right)} = \frac{n!r!(n-r)!}{n!(r+1)!(n-r-1)!} = \frac{n-r}{r+1}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.2 ถ้า $\binom{n+4}{n-2} = 1$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 6 2. 4

3. 3 4. 2

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** นำค่าในตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

1. $\binom{6+4}{6-2} = \binom{10}{4} = \dfrac{10!}{6!4!} \neq 1$ 2. $\binom{4+4}{4-2} = \binom{8}{2} = \dfrac{8!}{6!2!} \neq 1$

3. $\binom{3+4}{3-2} = \binom{7}{1} = \dfrac{7!}{6!1!} \neq 1$ 4. $\binom{2+4}{2-2} = \binom{6}{0} = 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง $\binom{n+4}{n-2} = 1$

$$\frac{(n+4)!}{(n-2)!6!} = 1$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1) = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)(n)(n-1) = (2+4)(2+3)(2+2)(2+1)(2)(2-1)$$

เพราะฉะนั้น $n = 2$

หมายเหตุ $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$ เพียง 2 กรณีเท่านั้น

เพราะฉะนั้น $\binom{n+4}{n-2} = 1$ เมื่อ $n-2 = 0$ หรือ $n+4 = n-2$ เพราะฉะนั้น $n = 2$

ตัวอย่างที่ 5.3.3 ค่าของ $1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$ เท่ากับเท่าใด

1. 2^n
2. $n(2^{n-1})$
3. 2^{n-1}
4. $n(2^n)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า n = 4 จะได้

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = 1\binom{4}{1} + 2\binom{4}{2} + 3\binom{4}{3} + 4\binom{4}{4}$$

$$= 4 + 2(6) + 3(4) + 4(1) = 4 + 12 + 12 + 4 = 32$$

ค่าแต่ละตัวเลือกมีค่าเป็น
1. 16
2. 32
3. 8
4. 64

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$

$$\frac{d}{dx}(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx}\binom{n}{k} x^k$$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$$

แทนค่า $x = 1$; $n(2^{n-1}) = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n}{k} k = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$

ตัวอย่างที่ 5.3.4 ถ้า $(n-1)! + n! + (n+1)! = 36(4!)$ แล้ว ค่าของ $(n+3)!$ เท่ากับเท่าใด

1. 720　　　　2. 5040

3. 40320　　　　4. 362880

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ใช้การแทนค่าแบบย้อนกลับจากทุกตัวเลือก

1. $720 = 6! = (3+3)! \quad \rightarrow \quad n = 3$

$(3-1)! + 3! + (3+1)! = 2! + 3! + 4! \neq 36(4!)$

2. $5040 = 7! = (4+3)! \quad \rightarrow \quad n = 4$

$(4-1)! + 4! + (4+1)! = 3! + 4! + 5! = 6 + 24 + 120 \neq 36(4!)$

3. $40320 = 8! = (5+3)! \quad \rightarrow \quad n = 5$

$(5-1)! + 5! + (5+1)! = 4! + 5! + 6! = 24 + 120 + 720 = 864 = 36(24) = 36(4!)$

เพราะฉะนั้นเลือกตัวเลือก 3. เป็นคำตอบ

วิธีจริง $(n-1)! + n! + (n+1)! = 36(4!)$

$(n-1)!\,(1 + n + n(n+1)) = 36(4!)$

$(n-1)!\,(1 + n + n^2 + n) = 36(4!)$

$(n-1)!\,(n+1)^2 = (4!)\,(6)^2$

เลือก $n = 5$ จะได้ $(5-1)!(5+1)! = 4!(6)^2$

สรุป $n = 5$ และ $(5+3)! = 8! = 40320$

ตัวอย่างที่ 5.3.5 ค่าของ $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!)$ เท่ากับเท่าใด

1. $n! + n$　　　　2. $(n+1)! - 1$

3. $(n+1)!\,n$　　　　4. $(n-1)!\,(n+1)$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า $n = 3$ จะได้

$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \ldots + n(n!) = 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) = 1 + 4 + 18 = 23$

แทนค่า $n = 3$ ในทุกตัวเลือก

1. $n! + n = 3! + 3 = 6 + 3 = 9$　　　　2. $(n+1)! - 1 = 4! - 1 = 23$

3. $(n+1)!\,n = (4!)3 = 72$ 4. $(n-1)!\,(n+1) = (2!)(4) = 8$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $0! + 1(1!) = 2!$

$2! + 2(2!) = (1+2)2! = 3!$

$3! + 3(3!) = (1+3)3! = 4!$

$\vdots$

เพราะฉะนั้น $0! + 1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = 2! + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!)$

$= 3! + 3(3!) + \dots + n(n!)$

$\vdots$

$= n! + n(n!)$

$= (n+1)!$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = (n+1)! - 1$

ตัวอย่างที่ 5.3.6 มีจำนวนเก้าอี้เรียงเป็นเส้นตรงทั้งหมด x ตัว จะทำการจัดให้คน y คนเข้าไปนั่งเก้าอี้ โดยให้นั่งชิดกันจะจัดได้ทั้งหมดกี่วิธี เมื่อกำหนด $(y < x)$

1. $(x-1)(y!)$ 2. $(x-y)(y!)$

3. $(x-y+1)(y!)$ 4. $(x+y-1)\,y!$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ y สมมติ $x = 5$ และ $y = 4$ การจัดลำดับให้คน 4 คน นั่งเก้าอี้โดยให้นั่งชิดกันจะได้ 2 กรณี

กรณีที่ 1. ชิดกันทางด้านหัวแถว ทำได้ $4! = 24$

กรณีที่ 2. ชิดกันทางด้านท้ายแถว ทำได้ $4! = 24$

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด $= 24 + 24 = 48$

แทนค่า $x = 5$, $y = 4$ ในทุกตัวเลือก

1. $(x-1)(y!) = (5-1)(4!) = 96$ 2. $(x-y)(y!) = (5-4)(4!) = 24$

3. $(x-y+1)(y!) = (5-4+1)(4!) = 48$ 4. $(x+y-1)(y!) = (5+4-1)(4!) = 192$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง เก้าอี้มีทั้งหมด x ตัว , คนมีทั้งหมด y คน

ขั้นที่ 1. เลือกเก้าอี้ y ตัวติดกันจาก x ตัว ทำได้ $x - y + 1$ วิธี

ขั้นที่ 2. คน y คนนั่งเก้าอี้ y ตัว ทำให้ $y!$

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด $= (x - y + 1)(y!)$

ตัวอย่างที่ 5.3.7 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก ผลคูณ$(1)(3)(5)(7)\ldots(2n-1)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{(2n)!}{(2n)n!}$ 2. $\dfrac{(2n)!}{2^n}$

3. $\dfrac{(2n)!}{n!}$ 4. $\dfrac{(2n)!}{(n!)2^n}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า $n = 4$ จะได้

$(1)(3)(5)(7)\ldots(2n-1) = (1)(3)(5)(7) = 105$ และตัวเลือกแต่ละตัวมีค่าเป็น

1. $\dfrac{(2n)!}{(2n)n!} = \dfrac{8!}{(8)(4!)} = \dfrac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ 2. $\dfrac{(2n)!}{2^n} = \dfrac{8!}{2^4} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{16} = 2520$

3. $\dfrac{(2n)!}{n!} = \dfrac{8!}{4!} = 1680$ 4. $\dfrac{(2n)!}{2^n(n!)} = \dfrac{8!}{2^4(4!)} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{16(24)} = 105$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3. ทิ้ง

วิธีจริง $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2n-1) = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\ldots(2n-3)(2n-2)(2n-1)(2n)}{2\cdot4\cdot6\ldots(2n-2)(2n)}$

$$= \frac{(2n)!}{2^n(1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)n)} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.8 กำหนด $\binom{n-1}{8} + \binom{n-1}{x} = \binom{n}{x}$ ค่าของ $\binom{12}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. 66 2. 220

3. 495 4. 792

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า $n = 10$ จะได้

$$\binom{10-1}{8} + \binom{10-1}{x} = \binom{10}{x}$$

$$\binom{9}{8}+\binom{9}{x}=\binom{10}{x}$$

ลองแทนค่า $x = 1, 2, \ldots, 9$ จะได้ว่า $x = 9$ ได้ เพราะฉะนั้น $\binom{12}{9} = \frac{12!}{9!\,3!} = 220$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง

$$\binom{n-1}{8}+\binom{n-1}{x} = \binom{n}{x}$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-1-8)!\,8!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-x)!\,x!} = \frac{n!}{(n-x)!\,x!}$$

$$\frac{1}{(n-9)!8!} + \frac{1}{(n-1-x)!\,x!} = \frac{n}{(n-x)!\,x!}$$

$$(n-1-x)!\,x!\,(n-x)!\,x! + (n-9)!\,8!\,(n-x)!\,x! = n(n-9)!\,8!\,(n-1-x)!\,x!$$

$$(n-1-x)!\,x!\,(n-x)! + (n-9)!\,8!\,(n-x)! = n(n-9)!\,8!\,(n-1-x)!$$

$$x!\,(n-x)! + (n-9)!\,8!\,(n-x) = n(n-9)!\,8!$$

$$x!\,(n-x)! + n(n-9)!\,8! - x(n-9)!\,8! = n(n-9)!\,8!$$

$$x!\,(n-x)! - x(n-9)!\,8! = 0$$

$$x!\,(n-x)! = x\,(n-9)!\,8!$$

$$(x-1)!\,(n-x)! = (n-9)!\,8!$$

$$(x-1)!\,(n-x)! = (n-9)!\,(9-1)!$$

เพราะฉะนั้น $x = 9$ สรุป $\binom{12}{x} = \binom{12}{9} = \frac{12!}{9!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12}{3!} = 220$

หมายเหตุ สูตร $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ เป็นสูตรที่สำคัญในเรื่องของการกระจายทวินาม ถ้านักเรียนจำสูตรนี้ได้ก็จะทำงานง่ายขึ้น นั่นคือ $\binom{n-1}{8}+\binom{n-1}{x}=\binom{n}{x}$ จะต้องได้ว่า $x = 9$

ตัวอย่างที่ 5.3.9 ในการเรียงเลขโดดจาก 0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 3 , 4 , 5 , 6 โดยนำมาเรียงทั้งหมดเป็นแถวยาว โดยการเรียงจากซ้ายไปขวา จะสามารถทำได้กี่วิธี เมื่อกำหนดว่าในการอ่านแต่ละตัวจากซ้ายไปขวา ต้องพบ 0 ก่อน 2 และ พบ 2 ก่อน 4 ทุกครั้ง

1. 362880 　　2. 90720

3. 15120 　　4. 2520

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** มีตัวเลขทั้งหมด 9 ตัว แต่มีการซ้ำกันบางตัว และเพราะว่าการจัดลำดับของ 9 สิ่ง ไม่ซ้ำทำได้ 9! = 362880 เพราะฉะนั้นการจัดทำได้ < 362880

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

การจัดลำดับของ 9 สิ่ง ที่มีการซ้ำ 1 , 2 อย่างละ 2 ตัวทำได้ = $\frac{9!}{2!\,2!} = 90720$

แต่ในบรรดา 90720 วิธีนี้จะมีกรณี 420113356 ปนอยู่ด้วย

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่โจทย์ต้องการต้องน้อยกว่า 90720

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง ตัวเลขมีทั้งหมด 9 ตัว มี 1 ซ้ำ 2 ตัว , มี 3 ซ้ำ 2 ตัว

จำนวนวิธีจัดลำดับทำได้ = $\frac{9!}{2!\,2!} = \frac{362880}{4} = 90720$

เพราะว่า 024 สลับที่กันได้ 3! = 6 วิธี เช่น 042 , 204 , ... และเราสนใจวิธีที่ พบ 0 ก่อน 2 และ พบ 2 ก่อน 4 ดังนั้นเราสนใจกรณี 0 , ... 2 , ... 4 เท่านั้นซึ่งทำได้ 1 วิธีเท่านั้น

สรุปจำนวนวิธี = $\frac{90720}{3!} = 15120$

ตัวอย่างที่ 5.3.10 จำนวนเต็มบวกที่หาร 5760 ลงตัวมีทั้งหมดกี่ตัว

1. 26 2. 48

3. 62 4. 68

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** ทำการแยกตัวประกอบ $5760 = (2^7)(3^2)(5)$

จำนวนตัวเลขที่หาร 5760 ลงตัวอาจจะประกอบด้วย $2^0 , 2^1 , \ldots , 2^7$

เพราะฉะนั้นจำนวนที่หาร 5760 ลงตัวต้องหารด้วย 8 ลงตัว

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง ใช้สูตร $M = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} \ldots p_n^{k_n}$ เมื่อ $p_1 , p_2 , \ldots p_n$ เป็นจำนวนเฉพาะ

แล้วจำนวนที่หาร M ลงตัวมีทั้งหมด = $(k_1 + 1)(k_2 + 1)(k_3 + 1) \ldots (k_n + 1)$

เพราะฉะนั้นจำนวนที่หาร $5760 = (2^7)(3^2)(5)$ ลงตัว

มีจำนวน = (7 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 48 ตัว

ตัวอย่างที่ 5.3.11 สัมประสิทธิ์ของ x^r ในการกระจาย $(x^2+\frac{1}{x})^{2n}$ คือข้อใด

1. $\dfrac{(2n)!}{(\frac{2n+r}{3})!\left(\frac{4n-r}{3}\right)!}$ 2. $\dfrac{(2n)!}{(\frac{4n-r}{3})!}$

3. $\dfrac{(2n)!}{r!(2n-r)!}$ 4. $\dfrac{(2n)!}{(2r)!}$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n และ r แทนค่า n = 1 จะได้

$(x^2+\frac{1}{x})^{2n} = (x^2+\frac{1}{x})^2 = x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}$ .... (1)

เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ x^4 มีค่าเท่ากับ 1 ต่อไป แทนค่า n = 1 และ r = 4 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $\dfrac{(2n)!}{(\frac{2n+r}{3})!\left(\frac{4n-r}{3}\right)!} = \dfrac{2!}{(2!)(0!)} = 1$ 2. $\dfrac{(2n)!}{(\frac{4n-r}{3})!} = \dfrac{2!}{0!} = 2$

3. $\dfrac{(2n)!}{r!(2n-r)!} = \dfrac{2!}{4!(2-4)!}$ หาค่าไม่ได้ 4. $\dfrac{(2n)!}{(2r)!} = \dfrac{2!}{8!} \neq 1$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4

วิธีจริง $(x^2+\frac{1}{x})^{2n} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(x^2)^{2n-k}(\frac{1}{x})^k = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^{4n-3k}$

การหาสัมประสิทธิ์ x^r ทำโดยการหาค่า k ที่ทำให้ $x^{4n-3k} = x^r$

$$4n-3k = r$$

$$k = \frac{4n-r}{3}$$

ดังนั้นสัมประสิทธิ์ x^r คือ $\dbinom{2n}{(\frac{4n-r}{3})} = \dfrac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!\left(2n-\left(\frac{4n-r}{3}\right)\right)!} = \dfrac{(2n)!}{\left(\frac{4n-r}{3}\right)!\left(\frac{2n+r}{3}\right)!}$

ตัวอย่างที่ 5.3.12 กล่องใบหนึ่งใส่บัตร 6 ใบ แต่ละใบเขียนแต้มตัวเลข 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 ใบละหนึ่งตัว ให้นาย ก. , นาย ข. , นาย ค. หยิบบัตรออกจากกล่องคนละใบ โดย นาย ก. หยิบก่อน ตามด้วย นาย ข. และ นาย ค. โดยไม่มีการใส่คืน จำนวนวิธีที่ นาย ก. จะได้แต้มมากกว่า นาย ข. และ นาย ข. ได้แต้มมากกว่านาย ค. มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 20 วิธี 2. 40 วิธี

3. 60 วิธี 4. 120 วิธี

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** การแจกนับบางกรณีก็สามารถตัดตัวเลือกบางตัวทิ้งได้

ก.	ข.	ค.	จำนวนวิธี	จำนวนวิธีสะสม
6	5	4 , 3 , 2 , 1	4	4
	4	3 , 2 , 1	3	7
	3	2 , 1	2	9
	2	1	1	10
5	4	3 , 2 , 1	3	13
	3	2 , 1	2	15
	2	1	1	16
4	3	2 , 1	2	18
	2	1	1	19
3	2	1	1	20

สรุป ทำได้อย่างมาก 20 วิธี เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง กรณีที่มีตัวเลขน้อยๆ ขอให้ใช้การแจงกรณีแบบข้างต้นดีกว่า แต่ถ้าในกล่องมีบัตร 100 ใบ และเขียนแต้ม 1 , 2 , 3 , ... , 100 ขอแนะนำวิธีทั่วไปดังนี้เรียงลำดับ 1 , 2 , 3 , 4 , ... , n

ขั้นที่ 1 เลือก 3 ตัวจาก n ตัวได้เป็น a_1 , a_2 , a_3 ทำได้ $\binom{n}{3}$ วิธี

ขั้นที่ 2 a_1 , a_2 , a_3 เรียงค่าจากน้อยไปมาก ก $= a_1 <$ ข $= a_2 <$ ค $= a_3$ ทำได้ 1 วิธีเท่านั้น

สรุปจำนวนวิธี $= \binom{n}{3}(1) = \dfrac{n!}{3!(n-3)!}$

สำหรับโจทย์ของข้อนี้ $n = 6$; 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

สรุปจำนวนวิธี $= \binom{n}{3} = \binom{6}{3} = 20$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5.3.13 บ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นรูปวงกลม อนุญาตให้เข้าตกปลาได้ที่ละ 4 คน โดยให้นั่งตกปลารอบบ่อ ถ้ามีครอบครัวหนึ่งมาด้วยกัน 6 คน จะมีจำนวนวิธีจัดคนในครอบครัวนี้นั่งตกปลารอบบ่อทีละ 4 คนได้กี่วิธี

1. 15
2. 24
3. 45
4. 90

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าการจัดลำดับรอบวงกลมที่มี 4 ที่นั่งทำได้ (4 – 1) = 3! = 6 เพราะฉะนั้น 6 ต้องหารคำตอบลงตัว ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

การเลือกคน 4 คนจาก 6 คนไปนั่งทำได้ $\binom{6}{4} = 15$ วิธี

ดังนั้นคำตอบต้องหารด้วย 15 ลงตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง ขั้นตอนการนับมีดังนี้

ขั้นที่ 1. เลือกคน 4 คนจาก 6 คน ทำได้ $\binom{6}{4} = 15$

ขั้นที่ 2. คน 4 คน ที่เลือกมานั่งรอบวงกลม ทำได้ $(4-1)! = 3! = 6$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธี = (15)(6) = 90 วิธี

ตัวอย่างที่ 5.3.14 สัมประสิทธิ์ของ x^2 จากอนุกรม $1 + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{12}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -78 2. 78
3. -286 4. 286

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1 สัมประสิทธิ์ของ x^2 จะเกิดเมื่อ $(-x)$ ถูกยกกำลังสอง ดังนั้นสัมประสิทธิ์ของ x^2 ต้องเป็นเลขบวก เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 เมื่อ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + ...$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + ...$$

เพราะฉะนั้น $f''(0) = 2a_2$ ทำให้ $a_2 = \frac{f''(0)}{2}$ เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^2 ใน $f(x)$

จากโจทย์ $f(x) = 1 + (1-x) + (1-x)^2 + (1-x)^3 + ... + (1-x)^{12}$

$$f'(x) = -1 - 2(1-x) - 3(1-x)^2 - 4(1-x)^3 - ... - 12(1-x)^{11}$$

$$f''(x) = 2 + (3)(2)(1-x) + (4)(3)(1-x)^2 + (5)(4)(1-x)^3 + ... + (12)(11)(1-x)^{10}$$

และ $f''(0) = 2 + (3)(2) + (4)(3) + ... + (12)(11) > 0$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้ง

เมื่อคำนวณต่อไปจะได้ $f''(0) = 572$ เพราะฉะนั้น $a_2 = \frac{f''(0)}{2} = 286$

วิธีจริง $1 + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{12}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต $a = 1$, $r = 1 - x$, $n = 13$

เพราะฉะนั้น $1 + (1-x) + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{12} = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$= \dfrac{(1)(1-(1-x)^{13})}{1-(1-x)} = \dfrac{1-(1-x)^{13}}{x}$

$(1-x)^{13} = \sum_{n=0}^{13} \binom{13}{n}(1)^{13-n}(-x)^n$ มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ x^3 คือ $\binom{13}{3}(-1)^3 = \dfrac{13!}{3!10!} = -286$

$\dfrac{1-(1-x)^{13}}{x}$ มีสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มี x^2 คือ $(\dfrac{-(-286)x^3}{x} = 286x^2) = 286$

หมายเหตุ กรณีทั่วไป $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ จะได้ว่า $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$

วิธีจริง แบบที่ 2. $(1-x)^2$ มีสัมประสิทธิ์ x^2 เป็น $\binom{2}{2}$

$(1-x)^3$ มีสัมประสิทธิ์ x^2 เป็น $\binom{3}{2}$

$(1-x)^4$ มีสัมประสิทธิ์ x^2 เป็น $\binom{4}{2}$

$\vdots$

$(1-x)^{12}$ มีสัมประสิทธิ์ x^2 เป็น $\binom{12}{2}$

เพราะฉะนั้น $1 + (1-x) + (1-x)^2 + ... + (1-x)^{12}$ มีสัมประสิทธิ์ x^2

$= \binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+ ... +\binom{12}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + ... + 66 = 286$

ตัวอย่างที่ 5.3.15 สัมประสิทธิ์ x^2 ในการกระจายพหุนาม $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^5$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. -95
2. -102
3. -105
4. -110

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ถ้า $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ แล้ว $a^2 = \dfrac{f''(0)}{2!}$

จากโจทย์ $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^5$

$f'(x) = 5(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4 (3x^2 - 6x + 3)$

$f''(x) = 20(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^3 (3x^2 - 6x + 3)^2 + 5(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4 (6x - 6)$

$f''(0) = 20(-1)^3 (3^2) + 5(-1)^4 (-6) = -180 - 30 = -210$

เพราะฉะนั้น $a_2 = \dfrac{f''(0)}{2!} = -105$ สรุปสัมประสิทธิ์ของ x^2 คือ -105

วิธีจริง $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^5 = \left((x-1)^3\right)^5 = (x-1)^{15}$

พจน์ที่มีเทอมของ x^2 คือ $\dbinom{15}{13}x^{15-13}(-1)^{13} = \dfrac{15!}{13!\cdot 2!}x^2(-1) = -105x^2$

ตัวอย่างที่ 5.3.16 ถ้า $x + \dfrac{1}{x} = k$ แล้ว $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ เท่ากับเท่าใดในเทอมของ k

1. $k^5 - 5k^3 + 5k$
2. $k^5 - 3k^3 + 3k$
3. $k^5 - 5k^3 + 10k$
4. $k^5 - 3k^3 + 10k$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ x และ k

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $k = 2$ และ $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = 2$ แทนค่าในตัวเลือกทั้ง 4 ตัวจะมีค่าเป็น

1. $k^5 - 5k^3 + 5k = 32 - 40 + 10 = 2$
2. $k^5 - 3k^3 + 3k = 32 - 24 + 6 = 14$
3. $k^5 - 5k^3 + 10k = 32 - 40 + 20 = 12$
4. $k^5 - 3k^3 + 10k = 32 - 24 + 20 = 28$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $(x + \dfrac{1}{x})^3 = k^3$ เพราะฉะนั้น $x^3 + 3x + \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^3} = k^3$

และ $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = k^3 - 3(x + \dfrac{1}{x}) = k^3 - 3k$

$$(x+\frac{1}{x})^5 = x^5 + 5x^4\left(\frac{1}{x}\right) + 10x^3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 10x^2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + 5x\left(\frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{x^5}$$

$$k^5 = x^5 + \frac{1}{x^5} + 5(x^3 + \frac{1}{x^3}) + 10(x + \frac{1}{x}) = x^5 + \frac{1}{x^5} + 5(k^3 - 3k) + 10k$$

เพราะฉะนั้น $x^5 + \dfrac{1}{x^5} = k^5 - 5k^3 + 15k - 10k = k^5 - 5k^3 + 5k$

ตัวอย่างที่ 5.3.17 ในการจัดประชุมของผู้เข้าประชุมที่เป็นผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 5 คน โดยที่โต๊ะประชุมเป็นโต๊ะกลม จะมีการจัดได้กี่วิธี โดยให้ผู้หญิงทั้ง 5 คนต้องนั่งติดกันเสมอ

1. 10!
2. 9!
3. (5!) (5!)
4. (4!) (5!)

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

การจัดลำดับของ n สิ่งแตกต่างกันรอบวงกลมแบบไม่มีเงื่อนไขใดๆ ทำได้ $(n-1)!$

เพราะฉะนั้นการจัดแบบมีเงื่อนไขของโจทย์ต้องน้อยกว่า $(10-1)! = 9!$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง ขั้นตอนการนับมีดังนี้

ขั้นที่ 1. ผู้หญิงทั้ง 5 คน นำมาเรียงติดกันทำได้ 5! วิธี

ขั้นที่ 2. ผู้หญิงทั้ง 5 คน ถือว่าเป็นหนึ่งหน่วยของการนับ รวมกับผู้ชายอีก 5 คน นำมาจัดลำดับรอบวงกลม 6 ตำแหน่งทำได้ $(6-1)! = 5!$

สรุปจำนวนวิธีทั้งหมด = (5!)(5!)

ตัวอย่างที่ 5.3.18 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีมากกว่า 4 ค่าของ $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9)$ ในรูปแบบของแฟกทอเรียลเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{n!}{(n-4)!}$ 2. $\dfrac{(n+3)!}{(n-4)!}$

3. $\dfrac{(n-3)!}{(n-4)!}$ 4. $\dfrac{(n^2-9)!}{(n-1)!}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า n = 5 จะได้

$n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) = 5(25-1)(25-4)(25-9) = 5(24)(21)(16) = 40320$

ค่าของตัวเลือกแต่ละตัวเมื่อ n = 5 มีค่าเป็น

1. $\dfrac{n!}{(n-4)!} = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$ 2. $\dfrac{(n+3)!}{(n-4)!} = \dfrac{8!}{(5-4)!} = 40320$

3. $\dfrac{(n-3)!}{(n-4)!} = \dfrac{(5-3)!}{(5-4)!} = 2$ 4. $\dfrac{(n^2-9)!}{(n-1)!} = \dfrac{16!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \ldots (15)(16) > 40320$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $n(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) = n(n+1)(n-1)(n-2)(n+2)(n-3)(n+3)$

$= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$

$= \dfrac{(n-4)!(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n-4)!} = \dfrac{(n+3)!}{(n-4)!}$

ตัวอย่างที่ 5.3.19 ค่าของ $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+...+n\binom{n}{n}x^{n-1}$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(1+x)^{n-1}$
2. $\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}$
3. $\frac{(1+x)^{n-1}}{n-1}$
4. $(n-1)(1+x)^n$

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n และ x

แทนค่า n = 3 และ x = 0 จะได้ว่าโจทย์มีค่าเป็น

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+...+n\binom{n}{n}x^{n-1}=\binom{3}{1}=3$$

แทนค่า n = 3 และ x = 0 ในทุกตัวเลือกจะได้

1. $(3)(1-0)^2=3$
2. $\frac{(1+0)^4}{3+1}=\frac{1}{4}$
3. $\frac{(1+0)^{n-1}}{3-1}=\frac{1}{2}$
4. $(3-1)(1+0)^3=2$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+...+\binom{n}{n}x^n$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้ง 2 ข้างจะได้

$$\frac{d}{dx}\left((1+x)^n\right)=\frac{d}{dx}\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\binom{n}{3}x^3+...+\binom{n}{n}x^n\right)$$

$$n(1+x)^{n-1}=0+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+3\binom{n}{3}x^2+...+\binom{n}{n}x^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 5.3.20 กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก

ค่าของ $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}2+\binom{n}{2}2^2+\binom{n}{3}2^3+...+\binom{n}{n-1}2^{n-1}+\binom{n}{n}2^n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 2^{2n}
2. $n(2^n)$
3. 3^n
4. $3^n+n^3-6n^2+11n-6$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n แทนค่า n ที่จำแนกตัวเลือกได้เช่น n = 4 จะได้ตัวเลือกมีค่าเป็น

1. $2^8 = 256$ 2. 64

3. $3^4 = 81$ 4. $3^4 + 4^3 - 6(4^2) + 11(4) - 6 = 87$

แทนค่า n = 4 ในโจทย์จะได้

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 + \binom{n}{3}2^3 + \dots + \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n$$

$$= \binom{4}{0} + \binom{4}{1}2 + \binom{4}{2}2^2 + \binom{4}{3}2^3 + \binom{4}{4}2^4$$

$$= 1 + (4)(2) + (6)(4) + (4)(8) + 16 = 81$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้ง

วิธีจริง $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \dots + \binom{n}{n}x^n$

แทนค่า x = 2 จะได้ $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}2 + \binom{n}{2}2^2 + \dots + \binom{n}{n}2^n = (1+2)^n = 3^n$

การทดสอบอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

โดยการเปรียบเทียบ

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง

1. ถ้ามี $n_0 \in N$ ที่ $0 \le a_n \le b_n$ ทุกค่า $n \ge n_0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

2. ถ้ามี $n_0 \in N$ ที่ $0 \le c_n \le a_n$ ทุกค่า $n \ge n_0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

โดยใช้อัตราส่วน

$a_n \ne 0$ และ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ เมื่อ L เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. ถ้า L < 1 แล้ว จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

2. ถ้า L > 1 หรือ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = +\infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

3. ถ้า L = 1 แล้ว จะสรุปไม่ได้

5.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

1. กำหนด n และ r เป็นจำนวนเต็มบวก $P(n, r) = C(n, r)$ ก็ต่อเมื่อ $r = 1$
2. ทุกจำนวนเต็มบวก $n > 1$ จำนวน $n!$ เป็นจำนวนคู่เสมอ
3. ถ้า m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $m < n$ แล้ว $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ เป็นจำนวนเต็มเสมอ
4. $a^n > n + 1$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และ $a > 1$
5. กำหนด n เป็นจำนวนเต็มบวก และ f(n) เท่ากับจำนวนของจำนวนเต็มบวกที่หาร n ลงตัว $f(n) \leq n$ เสมอ
6. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ แล้ว $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots+\binom{n}{n}=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots+\binom{n}{n-1}$
7. $\sin 5x = 5 \sin x - 15 \sin^3 x + 16 \sin^5 x$, $\cos 5x = 5 \cos x - 20 \cos^3 x + 16 \cos^5 x$ ทุกจำนวนจริง x
8. 20 หาร $111^{111} - 1$ ลงตัว
9. 100 หาร $2541^{100} - 1$ ลงตัว
10. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของ x กำลังเลขคี่ในการกระจายพจน์ $(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots - x^9 + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^9 + x^{10})$ มีค่าเท่ากับ 0
11. ผลบวกของสัมประสิทธิ์ของ x กำลังเลขคู่ในการกระจายพจน์ $(1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots - x^{27} + x^{30})(1 + x^3 + x^6 + x^9 + \ldots + x^{27} + x^{30})$ มีค่าเท่ากับ 0
12. ค่าคงตัวของพจน์ที่ได้จากการกระจาย $(1 + \frac{1}{x})^3 (\frac{1}{(1-x)^3})$ มีค่าเท่ากับ 0
13. การจัดลำดับตัวอักษร 2 , 0 , 0 , 0 รอบวงกลมทำได้ 2 วิธี
14. สัมประสิทธิ์ของ x ในการกระจาย $(2x + \frac{1}{2x})^{10}$ มีค่ามากที่สุดคือสัมประสิทธิ์ของพจน์ x^{10}
15. จำนวนตัวเลขที่เป็นจำนวนเต็มบวกและหาร 10! ลงตัวมีมากกว่า 200 ตัว
16. $(1 + \sqrt{2})^{10} + (1 - \sqrt{2})^{10}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
17. จำนวนเต็มบวก 3 จำนวน ที่บวกกันมีค่าเท่ากับ 20 มีทั้งหมด 171 ชุด
18. $(x + \frac{1}{x})^n \geq 2^n$ ทุกค่า $x > 0$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$
19. 2^{2000} หารด้วย 5 ลงตัว
20. จำนวนของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากเซต $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ไปยังเซต $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ มีทั้งหมด 120 ฟังก์ชัน

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับวิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

1. ถูกต้อง $P(n, r) = C(n, r)$

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

$$r! = 1$$

เพราะว่า r เป็นจำนวนเต็มบวก เพราะฉะนั้น $r = 1$

2. ถูกต้อง เมื่อ $n > 1$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ เพราะฉะนั้น n! เป็นจำนวนคู่เสมอ

3. ถูกต้อง เพราะว่า $\frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$ = จำนวนวิธีเลือกสิ่งของ m สิ่งจาก n สิ่ง

เพราะฉะนั้น $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

4. ถูกต้อง เมื่อ $a \geq 1$ จะได้ว่า $a = 1 + k ; k \geq 0$

$$a^n = (1+k)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}k + \binom{n}{2}k^2 + \ldots + \binom{n}{n}k^n = 1 + nk + \frac{n(n-1)}{2}k^2 + \ldots + k^n > 1 + n$$

สรุป $a^n \geq 1 + n$ ทุกค่า $a \geq 2$ และ $n = 1, 2, 3, \ldots$

5. ถูกต้อง $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots p_k^{n_k}$ เมื่อ $p_i, i = 1, 2, \ldots, k$ เป็นจำนวนเฉพาะ

$$f(n) = (n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1)$$

เพราะว่า $n_i + 1 \leq p_i^{n_i}$, $I = 1, 2, \ldots, k$

เพราะฉะนั้น $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \ldots (n_k + 1) \leq p_1^{n_1} p_2^{n_2} p_3^{n_3} \ldots p_k^{n_k}$

$$f(n) \leq n$$

6. ถูกต้อง เมื่อ n เป็นเลขคู่ให้ $n = 2k$

$$(1+x)^n = (1+x)^{2k} = \binom{2k}{0} + \binom{2k}{1}x + \binom{2k}{2}x^2 + \ldots + \binom{2k}{r}x^r + \ldots + \binom{2k}{2k}x^{2k}$$

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $0 = \binom{2k}{0} - \binom{2k}{1} + \binom{2k}{2} - \binom{2k}{3} + \ldots + \binom{2k}{0}(-1)^r + \ldots + \binom{2k}{2k}$

เพราะฉะนั้น $\binom{2k}{0} + \binom{2k}{2} + \binom{2k}{4} + \ldots + \binom{2k}{2k} = \binom{2k}{1} + \binom{2k}{3} + \ldots + \binom{2k}{2k-1}$

สรุป $\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1}$

7. ถูกต้อง $(\cos x + i \sin x)^5 = \binom{5}{0}\cos^5 x + \binom{5}{1}\cos^4 x\,(i \sin x) + \binom{5}{2}\cos^3 x\,(i \sin x)^2$

$$+ \binom{5}{3}\cos^2 x\,(i \sin x)^3 + \binom{5}{4}\cos x\,(i \sin x)^4 + \binom{5}{5}(i \sin x)^5$$

$\cos 5x + i \sin 5x$

$= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \sin x - 10\cos^3 x \sin^2 x - 10i\cos^2 x \sin^3 x + 5\cos x \sin^4 x + i\sin^5 x$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x + (5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x)\, i$

เพราะฉะนั้น $\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x(1-\cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2$

$= \cos^5 x - 10\cos^3 x + 10\cos^5 x + 5\cos x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)$

$= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$

$\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$

$= 5(1-\sin^2 x)^2 \sin x - 10(1-\sin^2 x)\sin^3 x + \sin^5 x$

$= 5(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\sin x - 10\sin^3 x + 10\sin^5 x + \sin^5 x$

$= 5\sin x - 15\sin^3 x + 16\sin^5 x$

8. ผิด จากสูตร $x^{111} - 1 = (x-1)(x^{110} + x^{109} + x^{99} + \ldots + x + 1)$

เพราะฉะนั้น $111^{111} - 1 = (111-1)(111^{110} + 111^{109} + 111^{108} + \ldots + 111 + 1)$

$= (110)(111^{110} + 111^{109} + 111^{108} + \ldots + 111 + 1)$

เพราะว่า $111^{110} + 111^{109} + 111^{108} + \ldots + 111 + 1$ เป็นผลบวกของเลขคี่จำนวน 111 ตัว

เพราะฉะนั้น $111^{110} + 111^{109} + 111^{108} + \ldots + 111 + 1$ เป็นเลขคี่

ดังนั้น 2 หาร $111^{110} + 111^{109} + \ldots + 111 + 1$ ไม่ลงตัว

20 หาร $(110)(111^{110} + 111^{109} + \ldots + 111 + 1)$ ไม่ลงตัว

สรุป 20 หาร $111^{111} - 1$ ไม่ลงตัว

9. ถูกต้อง $2541^{100} - 1 = (2541-1)(2541^{99} + 2541^{98} + \ldots + 2541 + 1)$

$= (2540)(2541^{99} + 2541^{98} + \ldots + 2541 + 1)$

ผลบวกของ $2541^{99} + 2541^{98} + \ldots + 2541 + 1$ มีหลักหน่วยที่เป็นเลข 1 บวกกัน 100 ตัว

เพราะฉะนั้น 10 หาร $2541^{99} + 2541^{98} + \ldots + 2541 + 1$ ลงตัว

100 หาร $(2540)(2541^{99} + 2541^{98} + \ldots + 2541 + 1)$ ลงตัว

สรุป 100 หาร $2541^{100} - 1$ ลงตัว

10. ถูกต้อง $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots - x^9 + x^{10} = \dfrac{1+x^{11}}{1+x}$

$1 + x + x^2 + \ldots + x^9 + x^{10} = \dfrac{1-x^{11}}{1-x}$

$(1-x+x^2-x^3+\ldots-x^9+x^{10})\,(1+x+x^2+\ldots+x^9+x^{10})$

$$= \frac{1+x^{11}}{1+x}\cdot\frac{1-x^{11}}{1-x} \qquad = \frac{1-x^{22}}{1-x^2}$$

$$= \frac{(1-x^2)(1+x^2+x^4+\ldots+x^{18}+x^{20})}{1-x^2} \qquad = 1+x^2+x^4+\ldots+x^{18}+x^{20}$$

สรุป ผลบวกสัมประสิทธิ์ของ x กำลังเลขคี่ในการกระจาย

$(1-x+x^2-\ldots-x^9+x^{10})(1+x+x^2+\ldots+x^9+x^{10})$ มีค่าเท่ากับ 0

11.**ผิด** ให้ $f(x) = (1-x^3+x^6-x^9+\ldots-x^{27}+x^{30})\,(1+x^3+x^6+x^9+\ldots+x^{27}+x^{30})$

$= [(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{30})-(x^3+x^9+x^{15}+\ldots+x^{27})]\,[(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{30})$
$+(x^3+x^9+\ldots+x^{27})]$

$= [(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{30})-x^3(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{24})]\,[(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{30})$
$+x^3(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{24})]$

$= (1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{30})^2-x^6(1+x^6+x^{12}+\ldots+x^{24})^2$

เพราะฉะนั้น f(x) มีแต่พจน์ของ x กำลังเลขคู่

ผลบวกของสัมประสิทธิ์ใน f(x) คือ f(1)

และ $f(1) = (1-1+1-1+\ldots-1+1)\,(1+1+1+1+\ldots+1) = (1)(11) = 11$

12.**ผิด** $(1+\frac{1}{x})^3 = 1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

โดยการตั้งหารของ $\frac{1}{(1-x)^3} = 1+3x+6x^2+10x^3+\ldots$

$$(1+\frac{1}{x})^3\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right) = (1+\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3})\,(1+3x+6x^2+10x^3+\ldots)$$

มีค่าคงตัวเกิดจาก $(1)(1)+(3)(3)+(3)(6)+(1)(10) = 1+9+18+10 = 38$

13.**ผิด** เพราะว่าเราสามารถจัด 2 , 0 , 0 , 0 รอบวงกลมได้เพียงแบบเดียวคือ

14.**ผิด** ตัวอย่างเช่น

$$T_3 = \binom{10}{2}(2x)^8\left(\frac{1}{2x}\right)^2 = \binom{10}{2}(2)^6x^6 = 2880x^6$$

$$T_1 = \binom{10}{0}(2x)^{10}\left(\frac{1}{2x}\right)^{10} = 2^{10}x^{10} = 1024x^{10}$$

15. **ถูกต้อง** $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 7 \cdot (2^3) \cdot (3^2) \cdot (2 \cdot 5)$

$= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$

เพราะฉะนั้นจำนวนเต็มบวกที่หาร 10! ลงตัวมีทั้งหมด $(8 + 1)(4 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 270$ ตัว

16. **ผิด** $(a + b)^{10} = \binom{10}{0}a^{10} + \binom{10}{1}a^9b + \binom{10}{2}a^8b^2 + \ldots + \binom{10}{10}b^{10}$

$(a - b)^{10} = \binom{10}{0}a^{10} - \binom{10}{1}a^9b + \binom{10}{2}a^8b^2 + \ldots + \binom{10}{10}b^{10}$

เพราะฉะนั้น $(1 + \sqrt{2})^{10} + (1 - \sqrt{2})^{10}$

$= 2\left(\binom{10}{0} + \binom{10}{2}(\sqrt{2})^2 + \binom{10}{4}(\sqrt{2})^4 + \binom{10}{6}(\sqrt{2})^6 + \binom{10}{8}(\sqrt{2})^8 + \binom{10}{10}(\sqrt{2})^{6}\right)$

$= 2(1 + 45(2) + 210(4) + 210(8) + 45(16) + 32) = 2(1+ 90 + 840 + 1680 + 720 + 32) = 6726$

17. **ผิด** $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = 20$

เลือกเครื่องหมายบวก 2 ตัวจาก 19 ตัว ที่มีอยู่ออกแล้วบวกตัวเลขส่วนที่เหลือจะได้เลข 3 ตัว

บวกกันมีค่าเท่ากับ 20 ตัวอย่างเช่น 1 1 18

1 2 17

เลือกของ 2 สิ่งจาก 19 สิ่ง ทำได้ $\binom{19}{2}$ แต่ใน 171 วิธีมีชุดที่ซ้ำกันเช่น 1 1 18 , 1 18 1

ดังนั้นตัวเลขบวก 3 ตัว ที่บวกกันได้ 20 ต้องมีน้อยกว่า 171 ชุด

18. **ถูกต้อง** $x > 0$; $(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}) \geq 0$

$x - 2 + \frac{1}{x} \geq 0$

$x + \frac{1}{x} \geq 2$

$(x + \frac{1}{x})^n \geq 2^n$

19. **ผิด** เพราะว่า 2^{2000} เป็นเลขจำนวนเต็มที่ไม่ลงท้ายด้วย 5 เพราะฉะนั้น 5 หาร 2^{2000} ไม่ลงตัว

20. **ถูกต้อง** การนับจำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือกสมาชิก 4 ตัวจาก B ทำให้ $\binom{5}{4} = 5$ วิธี
2. การส่งค่าจาก $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ ไปยังเซตที่มี 4 ตัว ซึ่งเลือกจากขั้นตอนที่ 1 ทำได้ 4! วิธี

สรุป จำนวนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งมีทั้งหมด $= (5)(4!) = 120$ ตัว

5.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. จำนวนวิธีทั้งหมดในการจัด ชาย 5 คน และหญิง 5 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม โดยให้ชายและหญิงนั่งสลับกัน และนาย ก. กับ นางสาว ข. ต้องนั่งติดกัน มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. (5!)(5!) 2. (5!)(4!)
   3. (4!)(4!) 4. (4!)(4!)(2!)

2. สมศรีมีเครื่องประดับที่เป็นทองและเพชรที่แตกต่างกัน 6 ชิ้น ต้องการบริจาคช่วยชาติ 3 ชิ้น จำนวนวิธีที่สมศรีจะบริจาคเครื่องประดับคือข้อใดต่อไปนี้

   1. 18 2. 20
   3. 40 4. 60

3. รถยนต์คันหนึ่งมีที่นั่งด้านหน้า 2 ที่ และด้านหลัง 3 ที่ ต้องการจัดคนเข้านั่งรถโดยให้คนขับรถเป็นเท่านั้นนั่งหน้า จำนวนวิธีที่จะจัดคน 5 คน ซึ่งใน 5 คนนี้มีคนขับรถเป็น 3 คน เข้านั่งรถได้กี่วิธี

   1. 12 2. 18
   3. 36 4. 42

4. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน 5 ลูก พร้อมกัน 1 ครั้ง จะมีกี่วิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้มต่างกันเพียง 2 หน้าเท่านั้น โดยที่มี 2 ลูก ขึ้นแต้มแบบแรกและ 3 ลูกที่เหลือขึ้นแต้มแบบที่สอง

   1. 10 2. 15
   3. 150 4. 300

5. ในการแบ่งหลอดไฟที่มีสีต่างกันทั้งหมด 24 หลอด และมีหลอดเสียปนอยู่ด้วย 4 หลอด แบ่งให้ วิจารณ์ และ สมรักษ์ คนละ 12 หลอดเท่ากัน วิธีที่วิจารณ์ และ สมรักษ์ จะได้หลอดเสียคนละ 2 หลอดเท่ากันมีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\binom{20}{10}$ 2. $\binom{24}{12}$
   3. $\binom{20}{10}\binom{4}{2}$ 4. $2\cdot\binom{20}{10}\binom{4}{2}$

6. พจน์ที่ไม่มี x ในการกระจาย $(2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}})^{10}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. -210 2. 210
   3. -252 4. 252

7. สัมประสิทธิ์ของ x^5 ในการกระจาย $x(1-x+x^2)(1+x)^5$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 5　　2. 10

3. -5　　4. -10

8. มีกี่วิธีที่จำนวนเต็มบวก 2 จำนวนสามารถบวกกันแล้วมีค่าเท่ากับ 15

1. 5　　2. 7

3. 14　　4. 21

9. จำนวนเต็มที่หารจำนวน 10800 ลงตัวมีกี่ตัว

1. 30　　2. 60

3. 120　　4. 150

10. ข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง เมื่อ r , n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $r \le n$

ก. $\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$

ข. $\binom{n+1}{r} = \frac{n+1}{n+1-r}\binom{n}{r}$

1. ก. ถูก และ ข. ถูก　　2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก　　4. ก. ผิด และ ข. ผิด

เฉลยคำตอบ

เฉลยคำตอบ	1. (4)	2. (2)	3. (3)	4. (4)	5. (3)
	6. (3)	7. (1)	8. (2)	9. (3)	10.(1)

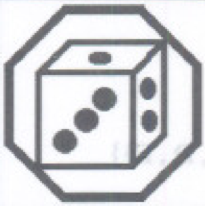
การทดสอบว่าอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกโดยใช้ลิมิตของการเปรียบเทียบ

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง $a_n \ge 0$ และ $b_n > 0$ ทุกค่า n

1. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าด้วยกัน หรือไม่ก็ต้องลู่ออกด้วยกัน

2. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

3. ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก



บทที่ 6
ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

6.1 สรุปเนื้อหา

1. **การทดลองสุ่ม และ แซมเปิลสเปซ** (Sample space)

การทดลองสุ่ม หมายถึง การทดลองที่เราสามารถรู้ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ แต่ไม่สามารถบอกได้ว่า เมื่อทดลองครั้งต่อไปนั้นผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นอะไรในของทั้งหมดที่เราทราบค่านั้นในการทดลองแต่ละครั้งเช่น การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดตามที่เราสนใจเช่น {ได้แต้มคู่ , ได้แต้มคี่} , {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6} , {ได้ 1 , ไม่ได้ 1}

เซตของผลลัพธ์ที่สามารถจำแนกเหตุการณ์ของการทดลอง ได้ดีที่สุดขณะนี้คือ{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

ความหมายของ**แซมเปิลสเปซ**คือ เซตของผลลัพธ์ของการทดลองทั้งหมดที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก ให้ S แทนแซมเปิลสเปซ S อาจเป็น

S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

S = {ได้แต้มเป็นเลขคู่ , ได้แต้มเป็นเลขคี่}

S = {ได้แต้มเป็น 1 , ไม่ได้แต้มเป็น 1}

แซมเปิลสเปซที่เหมาะสมแก่การใช้งานในหลักสูตรระดับ ม. ปลาย คือแซมเปิลสเปซที่จำแนกเหตุการณ์ได้ดีที่สุดและสมาชิกแต่ละตัวมีโอกาสเกิดเท่ากัน

ดังนั้นการทดลองนี้ควรเลือก S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

ตัวอย่าง แซมเปิลสเปซ S = {(1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (1 , 4) , (1 , 5) , (1 , 6)

(2 , 1) , (2 , 2) , (2 , 3) , (2 , 4) , (2 , 5) , (2 , 6)

⋮

(6 , 1) , (6 , 2) , (6 , 3) , (6 , 4) , (6 , 5) , (6 , 6)}

การทดลองโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน

แซมเปิลสเปซ S = {HH , HT , TH , TT}

การทดลองโยนเหรียญพร้อมกัน 3 อัน

แซมเปิลสเปซ S = {HHH , HHT , HTH , HTT , THH , THT , TTH , TTT}

การทดลองหยิบอักษร 4 ตัวจาก A , B , C , D , E มี แซมเปิลสเปซ

S = {{A , B , C , D} , {A , B , C , E} , {A , B , D , E} , {A , C , D , E} , {B , C , D , E}}

การทดลองจัดลำดับอักษรคราวละ 2 ตัวจาก x , y , z มี

แซมเปิลสเปซ S = {xy , yx , xz , zx , yz , zy}

2. **เหตุการณ์** (Event) การทดลองต่าง ๆ ที่เราสนใจ จะต้องมีแซมเปิลสเปซซึ่งเป็นเซตของผลลัพธ์ของการทดลองทั้งหมดเสมอ คำว่าเหตุการณ์ หมายถึงสับเซตของแซมเปิลสเปซ

ตัวอย่าง การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก S = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6}

E = เหตุการณ์ที่แต้มเป็นเลขคู่ = {2 , 4 , 6}

F = เหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนเฉพาะ = {2 , 3 , 5}

ตัวอย่าง การทดลองโยนเหรียญ 3 อันพร้อมกัน

S = {HHH , HHT , HTH , HTT , THH , THT , TTH , TTT}

E = เหตุการณ์ที่ได้หัว 2 อัน = {HHT , HTH , THH}

F = เหตุการณ์ที่ได้เหมือนกันทั้ง 3 เหรียญ = {HHH , TTT}

ตัวอย่าง การทดลองโยนลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน

S = {(1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , … , (6 , 5) , (6 , 6)}

E = เหตุการณ์ที่แต้มลูกเต๋า 2 ลูกเท่ากัน = {(1 , 1) , (2 , 2) , (3 , 3) , (4 , 4) , (5 , 5) , (6 , 6)}

F = เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเท่ากับ 10 = {(4 , 6) , (5 , 5) , (6 , 4)}

G = เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมีค่าต่ำกว่า 4 = {(1 , 1) , (1 , 2) , (2 , 1)}

ตัวอย่าง การทดลองจัดลำดับตัวเลข 4 หลักที่ประกอบด้วย 1 , 2 , 3 , 4

S = {1234 , 1243 , 1324 , 1342 , … , 4321}

E = เหตุการณ์ที่ตัวเลข 4 หลักมีค่าต่ำกว่า 2000} = {1234 , 1243 , 1324 , 1342 , 1423 , 1432}

3. **ความน่าจะเป็น** (Propability)

จากการทดลองสุ่ม เมื่อเรามีแซมเปิลสเปซ S และ A เป็นเหตุการณ์ที่สนใจ

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ A ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย P(A) มีค่าเท่ากับ $\frac{n(A)}{n(S)}$

หมายเหตุ สูตรนี้ใช้ได้กับกรณีที่ S เป็นเซตจำกัด แต่ถ้า S เป็นเซตอนันต์แล้ว ความน่าจะเป็นต้องคำนวณด้วยค่าสัดส่วน เช่น สัดส่วนพื้นที่ , สัดส่วนของความยาว

ตัวอย่าง การทดลองโยนลูกเต๋า 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มเกิน 2

วิธีทำ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $n(S) = 6$

A = เหตุการณ์ได้แต้มเกิน 2 = $\{3, 4, 5, 6\}$; $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

ตัวอย่าง การทดลองโยนเหรียญ 3 อัน พร้อมกัน

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวอย่างน้อย 2 เหรียญ

วิธีทำ $S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$; $n(S) = 8$

A = เหตุการณ์ได้หัวอย่างน้อย 2 เหรียญ = $\{HHH, HHT, HTH, THH\}$; $n(A) = 4$

$$P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง การทดลองโยนลูกเต๋า 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของแต้มอย่างน้อย 10

วิธีทำ $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$; $n(S) = 36$

A = เหตุการณ์ได้ผลบวกของแต้มอย่างน้อย 10 = $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4), (5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$

$n(A) = 6$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ตัวอย่าง การทดลองจัดลำดับเลข 4 ตัว จาก 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 โดยไม่ใช้เลขซ้ำ

จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่

วิธีทำ $S = \{1234, 1235, \ldots.\}$

$n(S)$ = จำนวนวิธีจัดลำดับของ 4 สิ่งจาก 9 สิ่ง = ${}^{9}P_4 = \frac{9!}{5!} = 3024$

A = เหตุการณ์ที่ได้เลขคู่ = $\{1234, 1236, \ldots.\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ A □ □ □ □

ขั้นที่ 1 ตำแหน่งของหลักหน่วยเป็นการเลือกเลขคู่ 1 ตัวจาก $\{2, 4, 6, 8\}$ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นที่ 2 3 หลักที่เหลือเป็นการจัดลำดับของ 3 สิ่งจาก 8 สิ่งทำได้ ${}^{8}P_3 = \frac{8!}{5!} = 336$

เพราะฉะนั้น $n(A) = (4)(336) = 1344$ สรุป $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1344}{3024} = \frac{4}{9}$

ตัวอย่าง ในกล่องใส่ถุงเท้ามีถุงเท้าอยู่ทั้งหมด 6 คู่ หยิบถุงเท้าออกมา 4 ข้าง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าคู่เดียวกันอย่างน้อย 1 คู่

วิธีทำ S = แซมเปิลสเปซของการหยิบถุงเท้า 4 ข้างจาก 6 คู่

n(S) = จำนวนวิธีหยิบสิ่งของพร้อมกัน 4 จากของที่ต่างกันทั้งหมด 12 = $\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = 495$

A = เหตุการณ์ที่ได้ถุงเท้าคู่เดียวกันอย่างน้อย 1 คู่

การนับจำนวนสมาชิกของ A ขั้นที่ 1 เลือกถุงเท้า 1 คู่ จาก 6 คู่ ทำได้ $\binom{6}{1} = 6$

ขั้นที่ 2 เลือกถุงเท้า 2 ข้างจาก 10 ข้างที่เหลือ ทำได้ $\binom{10}{2} = 45$

เพราะฉะนั้น n(A) = (6)(45) สรุป $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6(45)}{495} = \frac{6}{11}$

4. สมบัติของความน่าจะเป็น S เป็นแซมเปิลสเปซ A , B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

1. $P(\phi) = 0$, $P(S) = 1$, และ $0 \le P(A) \le 1$
2. $P(A') = 1 - P(A)$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
5. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \le P(B)$
6. ถ้า $B \subset A$ แล้ว $P(A - B) = P(A) - P(B)$
7. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
8. ถ้า $A \cap B = \phi$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
9. $P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$

ตัวอย่าง กำหนด $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{4}{8}$ และ $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$

จงหาค่าของ $P(A')$, $P(A' \cap B)$, $P(A \cup B)$ และ $P(A - B)$

วิธีทำ $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

$P(A' \cap B) = P(B \cap A') = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

5. ปัญหาการหาความน่าจะเป็นกรณีที่ S เป็นเซตอนันท์ จะได้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ P(A) = อัตราส่วนของ A ต่อ S เช่น อัตราส่วนของความยาว, อัตราส่วนของพื้นที่

ตัวอย่าง สุ่มตัวเลขจำนวนจริง 1 ตัว ออกมาจากช่วง $[0, 1]$ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนที่มีค่าน้อยกว่า 0.2

วิธีทำ สุ่มตัวเลขออกมาจากช่วง $[0, 1]$ เพราะฉะนั้น $S = [0, 1]$

$A = \{x \mid x \in [0, 1]$ และ $x < 0.2\}$ เพราะฉะนั้น $A = [0, 0.2)$

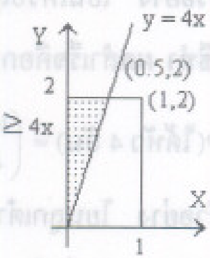
$$P(A) = \frac{\text{ความยาวช่วง A}}{\text{ความยาวช่วง S}} = \frac{0.2}{1} = 0.2$$

ตัวอย่าง $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ สุ่มตัวอย่างจุด (x, y) บนช่วง $[0, 1] \times [0, 2]$ จงหาความน่าจะเป็นที่ $y \geq 4x$

วิธีทำ เพราะว่า $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ เพราะฉะนั้น $S = [0, 1] \times [0, 2]$

พื้นที่ $S = (1)(2) = 2$ ตารางหน่วย

$A = \{(x, y) \mid (x, y) \in [0, 1] \times [0, 2]$ และ $4x \leq y\}$



พื้นที่ $A = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)(2) = \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น $P(A) = \dfrac{\text{พื้นที่ A}}{\text{พื้นที่ S}} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)}{2} = \dfrac{1}{4}$

ตัวอย่าง สุ่มตัวเลข x จากช่วง $(0, 4]$ จงหาความน่าจะเป็นที่ $\log_3 x < \log_x 3$

วิธีทำ $S = (0, 4]$, ความยาวช่วง $S = 4$, $A = \{x \mid x \in S, \log_3 x < \log_x 3\}$

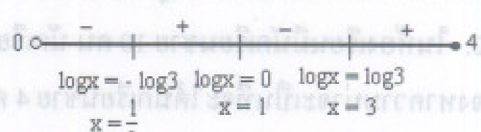
$$\log_3 x < \log_x 3$$

$$\frac{\log x}{\log 3} < \frac{\log 3}{\log x}$$

$$\frac{\log x}{\log 3} - \frac{\log 3}{\log x} < 0$$

$$\frac{(\log x)^2 - (\log 3)^2}{\log 3 \log x} < 0$$

$$\frac{(\log x - \log 3)(\log 3 - \log x)}{\log 3 \log x} < 0$$



เพราะฉะนั้น $A = (0, \frac{1}{3}) \cup (1, 3)$

ผลรวมของความยาวช่วงของ $A = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$ เพราะฉะนั้น $P(A) = \dfrac{\left(\frac{7}{3}\right)}{4} = \dfrac{7}{12}$

6. **การหาความน่าจะเป็นแบบทวินาม**

ตัวอย่างการทดลอง โยนเหรียญ 1 อัน 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัว 4 ครั้ง

โยนลูกเต๋า 1 ลูก 6 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 จำนวน 4 ครั้ง

ลักษณะการทดลองโดยทั่วไป

1. การทดลองแต่ละครั้งมีผล 2 แบบ เรียกว่า ผลสำเร็จ , ผลไม่สำเร็จ

P(ผลสำเร็จ) = p , P(ผลไม่สำเร็จ) = 1 – p

2. ทำการทดลองทั้งหมด n ครั้ง

3. X = จำนวนครั้งของผลสำเร็จ = 0 , 1 , 2 , 3 , … , n

4. $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 1 อัน 10 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ หัว 4 อัน

วิธีทำ ผลสำเร็จคือการได้หัว $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{1}{2}$, n = 10

$P(\text{ได้หัว 4 อัน}) = \binom{10}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{10-4} = \frac{210}{1024}$

ตัวอย่าง โยนลูกเต๋า 1 ลูก 9 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 เป็นจำนวน 4 ครั้ง

วิธีทำ ผลสำเร็จคือการได้แต้ม 1 P(ได้แต้ม 1) = P = $\frac{1}{6}$, n = 9

x = จำนวนครั้งที่ขึ้นแต้ม 1 ในการโยนทั้งหมด 9 ครั้ง = 0 , 1 , 2 , … , 9

$P(\text{ได้แต้ม 1 จำนวน 4 ครั้ง}) = P(x = 4) = \binom{9}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^{9-4} = \frac{126}{6^9}$

7. **การหาความน่าจะเป็นแบบไฮเพอร์จีออเมตริกซ์**

ตัวอย่างปัญหาเช่น

1. ในกล่องมีลูกแก้วสีแดง 6 ลูก และสีดำ 4 ลูก หยิบออกมาพร้อมกัน 4 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีแดง 2 ลูก

2. ในห้องเรียนมีนักเรียนชาย 10 คน นักเรียนหญิง 12 คน เลือกตัวแทนนักเรียนออกมา 6 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนชาย 4 คน

รูปแบบทั่วไปของการทดลอง

1. มีของทั้งหมด N สิ่ง

2. แบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มผลสำเร็จมี k สิ่ง และ กลุ่มผลไม่สำเร็จมี N – k สิ่ง

3. หยิบสิ่งของออกมาพร้อมกัน n
4. X = จำนวนผลสำเร็จ = 0 , 1 , 2 , … , n

ความน่าจะเป็น $P(X = x) = \dfrac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

จากตัวอย่าง 1. N = 10 ผลสำเร็จคือ การได้ลูกแก้วสีแดง

k = 6 , n = 4 , X = 0 , 1 , 2 , 3 , 4

$$P(X = x) = \frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{6}{x}\binom{4}{4-x}}{\binom{10}{4}}$$

$$P(\text{ได้ลูกแก้วสีแดง 2 ลูก}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{(15)(12)}{210} = \frac{6}{7}$$

จากตัวอย่าง 2. N = 22 , n = 6

ผลสำเร็จคือ การได้นักเรียนชาย , k = 10

X = จำนวนนักเรียนชายที่ได้ = 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6

$$P(X = x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{12}{6-x}}{\binom{22}{6}}$$

$$P(\text{ได้นักเรียนชาย 4 คน}) = \frac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}} = \frac{(210)(66)}{74613} = \frac{210(2)}{2261} = \frac{30(2)}{323} = \frac{60}{323}$$

ข้อพิสูจน์ของปัญหานี้หาอ่านได้จากคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 18

p เป็นจำนวนเต็มบวก $(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p+1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p+2)) + \ldots$

$\ldots + (n(n+1) \ldots (n+p-1)) = \dfrac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$

คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 18 หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

6.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. ใช้เหตุผลของการเปรียบเทียบค่าของความน่าจะเป็นเช่น
   1. ถ้า $A \subset B$ แล้ว $P(A) \le P(B)$
   2. ถ้า $A = \phi$ แล้ว $P(A) = 0$
   3. $P(A) \le P(A \cup B)$
   4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ตัวอย่างที่ 6.2.1 กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$

ค่าของ $P(A' \cup B)$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{3}{4}$

3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{5}{6}$

การตัดตัวเลือก เพราะว่า $B \subset A' \cup B$ เพราะฉะนั้น $P(B) \le P(A' \cup B)$

ดังนั้น $\frac{1}{2} \le P(A' \cup B)$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3.

วิธีจริง $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

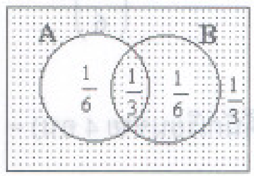
$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

จากผลการคำนวณข้างต้นสรุปความน่าจะเป็น

ของสมาชิกแต่ละส่วนในแผนภาพเวนน์ได้เป็น



เพราะฉะนั้น $P(A' \cup B) = P(A') + P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$

2. โจทย์ตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของ n , ในเทอมของจำนวนสมาชิก , จำนวนของเหตุการณ์เรา สามารถทำการสมมติค่าให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 6.2.2 กล่องใบหนึ่งมีบัตรจำนวน n ใบ $(n \ge 3)$ บัตรแต่ละใบเขียนเลขกำกับไว้จาก 1 ถึง n โดยไม่ซ้ำกัน ถ้าทำการหยิบบัตรออกมาพร้อมกัน 2 ใบ โดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรใบหนึ่งเป็นหมายเลข 3 และบัตรอีกใบหนึ่งมีหมายเลขต่ำกว่า 3 เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{n^2}$ 2. $\frac{2}{n(n-1)}$

3. $\frac{3}{n(n-1)}$ 4. $\frac{4}{n(n-1)}$

การตัดตัวเลือก สมมติ $n = 3$ เพราะฉะนั้นฉลากทั้ง 3 ใบ มีหมายเลขเป็น 1 , 2 , 3

การหยิบออกมาทีละ 2 ใบ พร้อมกันทำได้ $\binom{3}{2} = 3$ วิธี

เหตุการณ์ที่ได้แต้ม 3 หนึ่งใบ และอีก 1 ใบ ได้แต้มต่ำกว่าคือ การได้ {3 , 2} หรือ {3 , 1}

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 3 และอีกใบมีแต้มต่ำกว่า $= \frac{2}{3}$

แทนค่า $n = 3$ ในตัวเลือกจะได้ 1. $\frac{2}{n^2} = \frac{2}{9}$ 2. $\frac{2}{n(n-1)} = \frac{1}{3}$

3. $\frac{3}{n(n-1)} = \frac{1}{2}$ 4. $\frac{4}{n(n-1)} = \frac{2}{3}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง การหยิบฉลาก 2 ใบจากทั้งหมด n ใบ ทำได้ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้ หนึ่งใบเป็นแต้ม 3 และอีกหนึ่งใบต้องเป็น 1 หรือ 2 ทำได้ 2 วิธี

คือ {3 , 1} หรือ {3 , 2} เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 3 และอีกใบมีแต้มต่ำกว่า 3 มีค่า

เท่ากับ $= \dfrac{2}{\left(\dfrac{(n-1)n}{2}\right)} = \dfrac{4}{n(n-1)}$

ตัวอย่างที่ 6.2.3 ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ โดยที่ $n(A - B) = n(A \cap B) = n(B - A)$

ถ้า $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$ แล้วความน่าจะเป็น $P(A \cup B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0.1 2. 0.2

3. 0.3 4. 0.4

ตอบ 3.

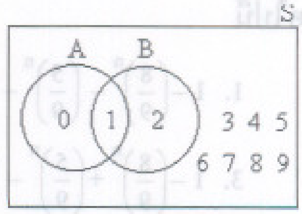
แนวคิด การตัดตัวเลือก จากทฤษฎีของเซตจะได้ว่า $A \cap B' = A - B$, $B \cap A' = B - A$

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเซต A , B

และจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ

เลือก S = {0 , 1 , 2 , 3 , … , 9} และเลือกสมาชิก

แต่ละส่วนของแผนภาพเวนน์เป็นดังนี้



จากแผนภาพจะได้ว่า $P(A \cap B) = P(A \cap B') = P(A' \cap B) = \frac{1}{10}$

สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ จากแผนภาพ $P(A \cup B) = \frac{3}{10}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง $P(A \cup B) = P((A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A))$

และเพราะว่า $A \cap B$, $B - A$ และ $A - B$ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

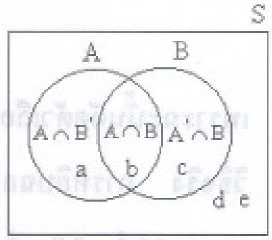
เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A-B) + P(A \cap B) + P(B-A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A')$

$$= 0.1 + 0.1 + 0.1 = 0.3$$

ตัวอย่างที่ 6.2.4 ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S

ถ้า $P(A' \cap B) = P(A \cap B') = P(A \cap B) = 0.2$ แล้ว $P((A \cup B)')$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0.3
2. 0.4
3. 0.5
4. 0.6



การตัดตัวเลือก โดยใช้แผนภาพของเวนน์

เลือกสมาชิกให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ เช่น เลือก

$S = \{a , b , c , d , e\}$ จะได้ว่า $P(A' \cap B) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B') = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

จากแผนภาพจะได้ $P((A \cup B)') = \frac{2}{5} = 0.4$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 3. และ 4.

วิธีจริง $A \cup B = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A) = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A')$

$$P(A \cup B) = P((A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (B \cap A'))$$

$$= P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A') = 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6$$

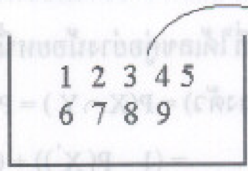
เพราะฉะนั้น $P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

ตัวอย่างที่ 6.2.5 กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 9 ใบ หมายเลข 1, 2, 3, ... , 9 อย่างละ 1 ใบ สุ่มหยิบบัตรทีละ 1 ใบ n ครั้ง โดยที่ใส่คืนก่อนหยิบครั้งต่อไป และบัตรแต่ละใบมีโอกาสถูกหยิบเท่า ๆ กัน ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของ n จำนวนที่ปรากฏบนบัตรที่สุ่มได้ จะหารด้วย 10 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$
2. $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$
3. $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$
4. $1 + \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n - \left(\frac{4}{9}\right)^n$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แบบที่ 1



สุ่มหยิบบัตรทีละ 1 ใบ แล้วคืนก่อนหยิบใบถัดไป

โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ n ดังนั้นแทนค่า n = 1

จะเห็นว่า P(ตัวเลขนั้นหารด้วย 10 ลงตัว) = 0 ต่อไปแทนค่า n = 1 ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $1-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=-\frac{8}{9}\neq 0$ **ตัวเลือก 2.** $1-\frac{8}{9}-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}=0$

ตัวเลือก 3. $1-\frac{8}{9}+\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{2}{9}\neq 0$ **ตัวเลือก 4.** $1+\frac{8}{9}-\frac{5}{9}-\frac{4}{9}=\frac{8}{9}\neq 0$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1., 3. และ 4. ทิ้งได้

การตัดตัวเลือก แบบที่ 2 ใช้เหตุผลว่าความน่าจะเป็นต้องเป็นเลขบวกเสมอ ดังนั้นหากแทนค่า n บางค่าแล้วค่าในตัวเลือกเป็นเลขลบ ก็จะตัดตัวเลือกนั้นทิ้งได้ เช่น n = 1 ทำให้ตัดตัวเลือก 1. ทิ้งได้

วิธีจริง แบบที่ 1 เหตุการณ์ที่จะได้ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว เป็นเหตุการณ์ที่ตรงกันข้ามกับ (เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัว หรือ เป็นเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5)

A = เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขคี่ทุกครั้งของการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก {1, 3, 5, 7, 9} ทุกครั้ง $P(A)=\left(\frac{5}{9}\right)^n$

B = เหตุการณ์ที่หยิบไม่ได้เลข 5 ทุกครั้งจากการหยิบทั้งหมด n ครั้ง

= เหตุการณ์ที่หยิบได้เลขจาก {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} $P(B)=\left(\frac{8}{9}\right)^n$

$A\cap B$ = เหตุการณ์ที่ได้เลขจาก {1, 3, 7, 9} ทุกครั้งที่หยิบ $P(A\cap B)=\left(\frac{4}{9}\right)^n$

E = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ลงตัว

E' = เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข n ตัวหารด้วย 10 ไม่ลงตัว

= เหตุการณ์ที่ได้เลขคี่ทุกตัวหรือเหตุการณ์ที่ไม่ได้เลข 5

= $A\cup B$

$$P(E') = P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B) = \left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$P(E) = 1-P(E') = 1-\left(\frac{5}{9}\right)^n-\left(\frac{8}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n = 1-\left(\frac{8}{9}\right)^n-\left(\frac{5}{9}\right)^n+\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

วิธีจริง แบบที่ 2 เหตุการณ์ที่ผลคูณของตัวเลขจะหารด้วย 10 ลงตัว คือเหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อย 1 ตัว และได้เลขคู่อย่างน้อย 1 ตัว

ให้ X = เหตุการณ์ที่ได้เลข 5 อย่างน้อยหนึ่งตัว

Y = เหตุการณ์ที่ได้เลขคู่อย่างน้อยหนึ่งตัว

P(ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว) $= P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cup Y)$

$$= (1 - P(X')) + (1 - P(Y')) - (1 - P((X \cup Y)'))$$

$$= 1 - P(X') + 1 - P(Y') - 1 + P((X' \cap Y'))$$

$$= 1 - P(X') - P(Y') + P(X' \cap Y')$$

$P(X')$ = P(ไม่ได้เลข 5 เลยแม้แต่ตัวเดียว) $= \left(\frac{8}{9}\right)^n$

$P(Y')$ = P(ไม่ได้เลขคู่เลยแม้แต่ตัวเดียว) $= \left(\frac{5}{9}\right)^n$

$P(X' \cap Y')$ = P(ไม่ได้เลขคู่และไม่ได้เลข 5) $= \left(\frac{4}{9}\right)^n$

สรุป P(ผลคูณหารด้วย 10 ลงตัว) $= 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$

ตัวอย่างที่ 6.2.6 ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้วความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{31}{36}$

3. $\frac{1}{9}$ 4. $\frac{5}{36}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์ไม่สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์ $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = \frac{12}{36}$

ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์ไม่สอบผ่านวิชาเคมี $= 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} = \frac{20}{36}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้ต้องมีค่าต่ำกว่า $\frac{20}{36}$

ค่าของแต่ละตัวเลือกคือ

1. $\frac{3}{4} = \frac{27}{36}$ 2. $\frac{31}{36}$

3. $\frac{1}{9} = \frac{4}{36}$ 4. $\frac{5}{36}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง M = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์

C = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาเคมี

จากโจทย์ $P(M) = \frac{2}{3}$, $P(C) = \frac{4}{9}$, $P(M \cap C) = \frac{1}{4}$

ความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้ต้องมีค่า

$= P((M \cup C)') = 1 - P(M \cup C) = 1 - (P(M) + P(C) - P(M \cap C)) = 1 - (\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{1}{4}) = \frac{5}{36}$

ตัวอย่างที่ 6.2.7 โยนลูกเต๋ามาตรฐาน n ลูก 1 ครั้ง

จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้ม j (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6) n_j ลูก เมื่อ $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = n$

1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n\ 6!\ n!}$ 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6!\ n!}$

3. $\frac{n!}{6^n\ 6!\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$ 4. $\frac{n!}{6^n\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในพจน์ของ $n, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ ดังนั้นแทนค่าบางค่าก็สามารถตัดตัวเลือกทิ้งได้

แทนค่า $n = 1, n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0, n_4 = 0, n_5 = 0, n_6 = 0$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{6}$

แทนค่า $n, n_1, n_2, \ldots, n_6$ ในทุกตัวเลือก

ตัวเลือก 1. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n 6!n!} = \frac{1!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!}{6^1\cdot6!\cdot1!} = \frac{1}{6\cdot6!} \neq \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!}{6^1\cdot1!} = \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 3. $\frac{n!}{6^n\ 6!\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1\cdot6!\cdot1!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!} = \frac{1}{6\cdot6!} \neq \frac{1}{6}$

ตัวเลือก 4. $\frac{n!}{6^n\ n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!} = \frac{1!}{6^1\cdot1!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!\cdot0!} = \frac{1}{6}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

แทนค่า $n = 2$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = 0$, $n_4 = 0$, $n_5 = 0$, $n_6 = 0$

P(โยนลูกเต๋าสองลูกแล้วได้แต้ม 1 และ 2 อย่างละลูก) = $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

ตัวเลือก 2. $\frac{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}{6^n n!} = \frac{1!\cdot 1!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!\cdot 0!}{6^2 \cdot 2!} = \frac{1}{72} \neq \frac{1}{18}$

ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

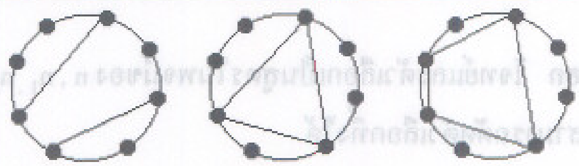
วิธีจริง จำนวนวิธีที่โยนลูกเต๋า n ลูกแล้วได้แต้ม 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 เท่ากับ $n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , n_5 , n_6$ มีจำนวนเท่ากับการจัดลำดับของ n สิ่ง ที่มีการซ้ำกันเป็น 1 , 2 , ….. , 6 เป็น $n_1 , n_2 , n_3 , n_4 , n_5 , n_6$ มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$

การโยนลูกเต๋า 1 ลูก มีผล 6 วิธี การโยนลูกเต๋า n ลูก มีผล 6^n วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้ม 1 , 2 , 3 , ….. , 6 เป็น $n_1 , n_2 , \ldots , n_6$

$$= \left(\frac{\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}}{6!}\right)$$

$$= \frac{n!}{6^n n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!n_6!}$$



จุด n จุดบนเส้นรอบวงของวงกลม เมื่อลากเส้นตรงเชื่อมโยงจุดทุกจุดเข้าด้วยกันจะทำให้ได้

จำนวนเส้นตรง(หรือจำนวนคอร์ด)ทั้งหมด = $\binom{n}{2}$ เส้น

จำนวนสามเหลี่ยมทั้งหมด = $\binom{n}{3}$ เส้น

จำนวนสี่เหลี่ยมทั้งหมด = $\binom{n}{4}$ เส้น

จำนวนห้าเหลี่ยมทั้งหมด = $\binom{n}{5}$ เส้น

⋮

จำนวน k เหลี่ยม ($k \leq n$) ทั้งหมด = $\binom{n}{k}$ เส้น

หมายเหตุ จุด n จุดที่ 3 จุดใดๆ ไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันสามารถใช้สูตรข้างต้นได้

6.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 6.3.1 กำหนด $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ ค่าของ $P(A' \cup B')$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{10}$ 2. $\frac{7}{10}$

3. $\frac{13}{20}$ 4. $\frac{7}{20}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $P(A) = \frac{1}{2} = \frac{10}{20}$, จะได้ $P(A') = \frac{10}{20}$

$P(B) = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$, จะได้ $P(B') = \frac{8}{20}$

เพราะว่า $A' \subset A' \cup B'$, $B' \subset A' \cup B'$ เพราะฉะนั้น $P(A') \le P(A' \cup B')$ และ $P(B') \le P(A' \cup B')$

$\frac{10}{20} \le P(A' \cup B')$ และ $\frac{8}{20} \le P(A' \cup B')$ เพราะฉะนั้น ตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$

$$P(A' \cup B') = P((A \cap B)') \qquad = 1 - P(A \cap B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cup B))$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{10 + 12 - 15}{20}\right) = 1 - \frac{7}{20} = \frac{13}{20}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.2 ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีน้ำเงิน 3 ลูก และสีขาว 2 ลูก ถ้าสุ่มหยิบออกมาทีละลูกโดยไม่ใส่คืนก่อนหยิบครั้งถัดไป จนได้ครบ 3 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วทั้ง 3 ลูก เป็นสีเดียวกันเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{2}{7}$ 2. $\frac{2}{105}$

3. $\frac{1}{21}$ 4. $\frac{5}{84}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ทำการคิดบางกรณีก็สามารถตัดตัวเลือกได้

P (ได้ลูกแก้วสีแดงทั้ง 3 ลูก) = P(ครั้งที่ 1 ได้แดง , ครั้งที่ 2 ได้แดง , ครั้งที่ 3 ได้แดง)

= P(ครั้งที่ 1 ได้แดง) . P(ครั้งที่ 2 ได้แดง) . P(ครั้งที่ 3 ได้แดง) $= \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{2}{7}\right) = \frac{1}{21}$

เพราะว่า ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีเดียวกัน > ความน่าจะเป็นที่จะได้สีแดงทั้ง 3 ลูก

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ต้องการ $> \frac{1}{21}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 3.

P(ได้ลูกแก้วสีน้ำเงินทั้ง 3 ลูก)

$= $ P(ครั้งที่ 1 ได้น้ำเงิน) . P(ครั้งที่ 2 ได้น้ำเงิน) . P(ครั้งที่ 3 ได้ น้ำเงิน) $= \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{84}$

เพราะว่า P(ได้สีเดียวกันทั้ง 3 ลูก) > P(ได้แดง 3 ลูก) + P(ได้น้ำเงิน 3 ลูก) $= \frac{1}{21} + \frac{1}{84} = \frac{5}{84}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง P(ได้ลูกแก้วสีเดียวกันทั้ง 3 ลูก)

$= $ P(ได้สีแดงทั้ง 3 ลูก) + P(ได้สีน้ำเงินทั้ง 3 ลูก) + P(ได้สีขาวทั้ง 3 ลูก)

$$= \left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{3}{9}\right)\left(\frac{2}{8}\right)\left(\frac{1}{7}\right) + 0 = \frac{24+6}{(9)(8)(7)} = \frac{5}{84}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.3 ในการหยิบฉลาก 1 ใบจากกล่องที่มีสลากตั้งแต่หมายเลข 200 ถึง 499 ความน่าจะเป็นที่จะได้ฉลากเป็นหมายเลขที่หารด้วย 2 ลงตัว หรือ หารด้วย 5 ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{179}{300}$ 2. $\frac{180}{300}$

3. $\frac{181}{300}$ 4. $\frac{89}{300}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โดยการคำนวณค่าบางส่วนเช่น คิดเฉพาะ 2 หารลงตัว หรือ เฉพาะที่ 5 หารลงตัวก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างเช่นตัวเลขที่ 2 หารลงตัว คือ 200 , 202 , 204 , … , 498 มีจำนวนตัวเลข

$= n(\{200, 202, 204, \ldots, 498\})$	**หมายเหตุ**	เทคนิคการนับจำนวนสมาชิก
$= n(\{100, 101, 102, \ldots, 249\})$		หารตลอดด้วย 2
$= n(\{1, 2, 3, \ldots, 150\})$		ลบตลอดด้วย 99
$= 150$		

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขที่หารด้วย 2 ลงตัวเท่ากับ $\frac{150}{300}$

เพราะว่าความน่าจะเป็นที่ตัวเลขจะหารด้วย 2 ลงตัวต้องน้อยกว่า ความน่าจะเป็นที่ตัวเลขนั้นจะหารด้วย 2 หรือ 5 ลงตัว เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 4. ทิ้ง

วิธีจริง A = เหตุการณ์ที่ 2 หารตัวเลขในฉลากลงตัว $P(A) = \frac{150}{300}$

B = เหตุการณ์ที่ 5 หารตัวเลขในฉลากลงตัว

$n(B) = n(\{200, 205, 210, \ldots, 495\})$ **หมายเหตุ** เทคนิคการนับจำนวนสมาชิก

$= n(\{40, 41, 42, \ldots, 99\})$ หารตลอดด้วย 5

$= n(\{1, 2, 3, \ldots, 60\})$ ลบตลอดด้วย 39

$= 60$

$P(B) = \frac{60}{300}$

$A \cap B$ = เหตุการณ์ที่ 2 หารตัวเลขในฉลากลงตัว และ 5 หารตัวเลขในฉลากลงตัว

$A \cap B = n(\{200, 210, 220, 230, \ldots, 490\})$ **หมายเหตุ** เทคนิคการนับจำนวนสมาชิก

$= n(\{20, 21, 22, \ldots, 49\})$ หารตลอดด้วย 10

$= n(\{1, 2, 3, \ldots, 30\}) = 30$ ลบตลอดด้วย 19

$P(A \cap B) = \frac{30}{300}$

เพราะฉะนั้น $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{150}{300} + \frac{60}{300} - \frac{30}{300} = \frac{180}{300}$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ตัวเลขในฉลากจะหารด้วย 2 หรือ 5 ลงตัวเท่ากับ $\frac{180}{300}$

ตัวอย่างที่ 6.3.4 ความน่าจะเป็นที่นาย ก. , นาย ข. และ นาย ค. จะสอบได้เกรด 4 ในวิชาคณิตศาสตร์มีค่าเท่ากับ 0.5 , 0.6 และ 0.8 ตามลำดับ

ความน่าจะเป็นที่ทั้งสามคนจะสอบได้เกรด 4 อย่างน้อย 2 คน เท่ากับเท่าใด

1. 0.46 2. 0.48
3. 0.66 4. 0.7

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก

P(ก. สอบได้ และ ข. สอบได้) = P(ก. สอบได้) P(ข. สอบได้) = (0.5)(0.6) = 0.3

P(ก. สอบได้ และ ค. สอบได้) = P(ก. สอบได้) P(ค. สอบได้) = (0.5)(0.8) = 0.4

P(ข. สอบได้ และ ค. สอบได้) = P(ข. สอบได้) P(ค. สอบได้) = (0.6)(0.8) = 0.48

เพราะว่า P(อย่างน้อย 2 คน สอบได้) > P(ข. สอบได้ และ ค. สอบได้) = 0.48

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้ง

วิธีจริง A = เหตุการณ์ที่ นาย ก. สอบได้เกรด 4 ; $P(A) = 0.5$, $P(A') = 0.5$

B = เหตุการณ์ที่ นาย ข. สอบได้เกรด 4 ; $P(B) = 0.6$, $P(B') = 0.4$

C = เหตุการณ์ที่ นาย ค. สอบได้เกรด 4 ; $P(C) = 0.8$, $P(C') = 0.2$

เหตุการณ์ทั้งสามเหตุการณ์เป็นอิสระจากกัน

P(นาย ก , นาย ข , นาย ค. อย่างน้อย 2 คน สอบได้เกรด 4)

$= P(A \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C') + P(A \cap B' \cap C) + P(A' \cap B \cap C)$

$= P(A)P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C') + P(A)P(B')P(C) + P(A')P(B)P(C)$

$= (0.5)(0.6)(0.8) + (0.5)(0.6)(0.2) + (0.5)(0.4)(0.8) + (0.5)(0.6)(0.8)$

$= 0.24 + 0.06 + 0.16 + 0.24 = 0.7$

ตัวอย่างที่ 6.3.5 กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยมีค่าความน่าจะเป็น

$P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

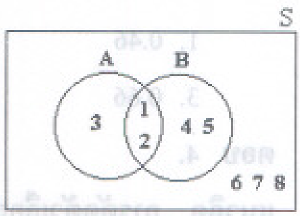
ค่าของ $P(A' \cap B') + P(A' \cup B') + P(A \cap B')$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{4}{5}$ 2. $\frac{3}{2}$

3. $\frac{5}{4}$ 4. $\frac{5}{2}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** โจทย์และตัวเลือกเป็นสูตรในเทอมของเซต A , B , S และสมาชิกของ S เลือก $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ และเลือกสมาชิกให้สอดคล้องค่าของโจทย์โดยใช้แผนภาพเวนน์ จะเห็นได้ว่าแผนภาพสมาชิกสอดคล้องเงื่อนไข



$P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ และ $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

จากแผนภาพ $A' \cap B' = \{6, 7, 8\}$; $P(A' \cap B') = \frac{3}{8}$

$A' \cup B' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $P(A' \cup B') = \frac{6}{8}$, $A \cap B' = \{3\}$; $P(A \cap B') = \frac{1}{8}$

$P(A' \cap B') + P(A' \cup B') + P(A \cap B') = \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

โดยใช้การยกตัวอย่างสมาชิกแบบนี้ทำให้เราสามารถตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง $P(A' \cup B') = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B) = 1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))$

$= 1 - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \left(\frac{3+4-2}{8}\right) = \frac{3}{8}$

$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

สรุป $P(A' \cup B') + P(A' \cap B') + P(A \cap B') = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

ตัวอย่างที่ 6.3.6 ในการเลี้ยงปีใหม่มีคู่สามี – ภรรยา มาร่วมงานทั้งหมด 6 คู่ ในการเลือกตัวแทนจากคน 12 คน ที่เป็นคู่สามี – ภรรยากัน ออกมา 4 คน โดยวิธีสุ่ม

ความน่าจะเป็นที่คนทั้ง 4 คนนี้จะมี คู่สามี – ภรรยากันอย่างน้อย 1 คู่ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{33}$ 2. $\frac{7}{33}$

3. $\frac{16}{33}$ 4. $\frac{17}{33}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เราทำการคำนวณบางกรณีแล้วใช้การเปรียบเทียบค่าที่ได้กับตัวเลือกก็จะสามารถตัดตัวเลือกได้

กรณีเจาะจงคู่ สามี – ภรรยา ออกมาเลยหนึ่งคู่ ซึ่งเราเลือกได้ 4 วิธี ที่เหลืออีก 2 คน เลือกได้ $\binom{10}{2}$ จะทำได้ $= (4)\binom{10}{2} = (4)(45)$ วิธี

การเลือกคน 4 คน จาก 12 คน ทำได้ $\binom{12}{4} = 495$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้คู่สามีภรรยากันอย่างน้อย หนึ่งคู่ ต้องมากกว่า $\frac{4(45)}{495} = \frac{12}{33}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง P(ได้คู่สามีภรรยากันอย่างน้อย 1 คู่) = 1 – P(ไม่ได้คู่สามี – ภรรยาแม้แต่คู่เดียว)

การเลือกคน 4 คน จาก 12 คน ทำได้ $\binom{12}{4} = 495$ วิธี

จำนวนวิธีที่จะไม่ได้ คู่สามีภรรยาแม้แต่คู่เดียว มีการนับดังนี้

ขั้นที่ 1 เลือกคู่สามี – ภรรยา 4 คู่ จาก 6 คู่ ทำได้ $\binom{6}{4} = 15$

ขั้นที่ 2 ในแต่ละคู่ของสามี – ภรรยาให้เลือกตัวแทนออกมา 1 คน จะทำได้ $2^4 = 16$

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่ได้คน 4 คน ไม่เป็นคู่สามีภรรยากัน = (15)(16) = 240

ความน่าจะเป็นที่คน 4 คนไม่เป็นคู่สามี – ภรรยากัน = $\frac{240}{495}$ วิธี

P(ได้คู่สามี – ภรรยากัน อย่างน้อย 1 คน) $= 1 - \frac{240}{495} = \frac{255}{495} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

ตัวอย่างที่ 6.3.7 ในการเลือกจำนวนเต็มหนึ่งจำนวน จากจำนวนเต็มตั้งแต่ 10 ถึง 59 จะได้ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนเต็มที่หารด้วย 7 ลงตัว หรือเป็นจำนวนคี่ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 0.36 2. 0.5
3. 0.58 4. 0.64

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่า S = {10 , 11 , 12 , … , 59} มีสมาชิก 50 ตัว และเป็นจำนวนเต็มคี่อยู่ 25 ตัวคือ {11 , 13 , … , 59}

เพราะฉะนั้น P(ได้เลขที่หารด้วย 7 ลงตัว หรือเป็นเลขคี่) > $\frac{25}{50} = 0.5$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง S = {10 , 11 , 12 , … , 59} , n(S) = 50

A = {x ∈ S|x เป็นเลขคี่} = {11 , 13 , 15 , … , 59} , n(A) = 25

B = {x ∈ S|7 หาร x ลงตัว} = {14 , 21 , 28 , … , 56}

n(B) = n({14 , 21 , 28 , … , 56}) = n({2 , 3 , 4 , … , 8}) = n({1 , 2 , 3 , … , 7}) , n(B) = 7

$A \cap B = \{21 , 35 , 49\}$, $n(A \cap B) = 3$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{50} + \frac{7}{50} - \frac{3}{50} = \frac{30}{50} = \frac{29}{50} = 0.58$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคี่ 7 หารลงตัว หรือเป็นจำนวนคี่ = 0.58

ตัวอย่างที่ 6.3.8 พนักงานพิมพ์ดีดประกอบด้วย พนักงานชาย 6 คน และพนักงานหญิง 4 คน ซึ่งในกลุ่มนี้เป็นผู้ที่ถนัดมือซ้าย 7 คน ซึ่งใน 7 คนนี้เป็นชาย 5 คน ในการสุ่มเลือกพนักงาน 3 คน จากทั้งหมด ความน่าจะเป็นที่จะได้พนักงานชายถนัดมือซ้ายมากกว่าพนักงานหญิงที่ถนัดมือซ้ายเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{5}{24}$ 2. $\frac{6}{24}$

3. $\frac{12}{24}$ 4. $\frac{15}{24}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จากข้อมูลของโจทย์จำแนกได้เป็น

	ถนัดซ้าย	ถนัดขวา	รวม
ชาย	5	1	6
หญิง	2	2	4
รวม	7	3	10

P(ได้ชายถนัดซ้าย 3 คน) = $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120} = \frac{2}{24}$

P(ได้ชายถนัดซ้าย 2 คน และอีกคนต้องไม่ใช่ชายถนัดซ้าย) = $\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{(10)(5)}{120} = \frac{50}{120} = \frac{10}{24}$

เพราะว่าความน่าจะเป็นที่จะได้ชายถนัดซ้ายมากกว่าหญิงถนัดซ้าย > $\frac{2}{24} + \frac{10}{24} = \frac{12}{24}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง P(ชายถนัดซ้าย 3 คน) = $\frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10}{120}$

P(ชายถนัดซ้าย 2 คน และอีก 1 คนอะไรก็ได้ที่ไม่ใช่ชายถนัดซ้าย) = $\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{50}{120}$

P(ชายถนัดซ้าย 1 คน และอีก 1 คน ต้องไม่เป็นหญิงที่ถนัดซ้าย) = $\frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{(5)(3)}{120}$

สรุปความน่าจะเป็นที่จะได้ชายถนัดซ้ายมากกว่าหญิงถนัดซ้าย = $\frac{10}{120} + \frac{50}{120} + \frac{15}{120} = \frac{75}{120} = \frac{15}{24}$

ตัวอย่างที่ 6.3.9 สมศรีและสมศักดิ์เล่นเกมโยนลูกเต๋า 2 ลูก โดยผลัดกันโยนทีละ 2 ลูก หากใครได้ผลรวมของแต้มเท่ากับ 7 ก่อนจะเป็นผู้ชนะ

ถ้าสมศรีเป็นคนโยนลูกเต๋าก่อน และตัวเลือกใดถูกต้อง

1. P(สมศรีเป็นผู้ชนะ) $= \frac{1}{6}$
2. P(สมศรีเป็นผู้แพ้) $= \frac{5}{6}$
3. P(สมศรีและสมศักดิ์เสมอกัน) $= \frac{5}{36}$
4. P(สมศักดิ์เป็นผู้ชนะ) $= \frac{5}{11}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ลักษณะของการแข่งขันแบบนี้จะต้องมีผู้ชนะและผู้แพ้แน่นอน จึงเป็นไปไม่ได้ที่จะเสมอกัน เพราะฉะนั้น P(สมศรีและสมศักดิ์เสมอกัน) = 0 ดังนั้นตัดตัวเลือก 3.

$S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$, $A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

P(สมศรีชนะในการโยนครั้งแรก) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ เพราะว่ายังมีเหตุการณ์แบบอื่นๆ อีกที่ทำให้สมศรีชนะ เพราะฉะนั้น P(สมศรีชนะ) $> \frac{1}{6}$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง $S = \{(1,1), (1,2), \ldots, (6,5), (6,6)\}$, $n(S) = 36$

A = เหตุการณ์ที่สมศรีโยนได้แต้ม 7 $= \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

B = เหตุการณ์ที่สมศักดิ์โยนได้แต้ม 7 $= \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$P(A) = \frac{1}{6}$, $P(A') = \frac{5}{6}$, $P(B) = \frac{1}{6}$, $P(B') = \frac{5}{6}$

เหตุการณ์ที่สมศรีชนะ $= (A) \cup (A' \cap B' \cap A) \cup (A' \cap B' \cap A' \cap B' \cap A) \cup \ldots$

P(สมศรีชนะ) $= \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots = \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{\left(\frac{6}{36}\right)}{\left(\frac{11}{36}\right)} = \frac{6}{11}$$

เหตุการณ์ที่สมศักดิ์ชนะ $= (A' \cap B) \cup (A' \cap B' \cap A' \cap B) \cup (A' \cap B' \cap A' \cap B' \cap A' \cap B) \cup \ldots$

P(สมศักดิ์ชนะ) $= \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{36}\left(\frac{5}{36}\right)^4 + \ldots = \frac{\left(\frac{5}{36}\right)}{1-\left(\frac{5}{36}\right)} = \frac{5}{11}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.10 โรงงานแห่งหนึ่งมีคนทำงานทั้งหมด 30 คน แบ่งออกเป็น ผู้จัดการฝ่าย 3 คน พนักงานขาย 7 คน และคนงานทั่วไป 20 คน ในการเลือกตัวแทนของโรงงาน 3 คนจากทั้งหมด ความน่าจะเป็นที่ตัวแทนทั้ง 3 คน จะประกอบด้วย ผู้จัดการฝ่ายอย่างมาก 1 คน และเป็นพนักงานขาย 1 คน มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{25}{116}$ 2. $\frac{50}{116}$

3. $\frac{66}{116}$ 4. $\frac{78}{116}$

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก P(ได้พนักงานขาย 1 คน , คนงานทั่วไป 2 คน) = $\dfrac{\binom{7}{1}\binom{20}{2}}{\binom{30}{3}} = \dfrac{38}{116}$

ดังนั้น P(ได้ผู้จัดการอย่างมาก 1 คนและเป็นพนักงานขาย 1 คน) > $\frac{38}{116}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง

ผู้จัดการฝ่าย 3
พนักงานขาย 7
คนงานทั่วไป 20

เลือกออกมา 3 คน

คนงานทั้งหมด 30 คนเลือกออกมา 3 คน ทำได้ $\binom{30}{3} = \dfrac{30!}{27!3!} = 4060$

P(ได้พนักงานขาย 1 คน , คนงานทั่วไป 2 คน) $\dfrac{\binom{7}{1}\binom{20}{2}}{\binom{30}{3}} = \dfrac{1330}{4060} = \dfrac{38}{116}$

P(ได้พนักงานขาย 1 คน , ผู้จัดการฝ่าย 1 คน , คนงานทั่วไป 1 คน) = $\dfrac{\binom{7}{1}\binom{3}{1}\binom{20}{1}}{\binom{30}{3}} = \dfrac{420}{4060} = \dfrac{12}{116}$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ผู้จัดการฝ่ายอย่างมาก 1 คน และพนักงานขาย 1 คน)

= P(ได้พนักงานขาย 1 คน , คนงานทั่วไป 2 คน)

+ P(ได้พนักงานขาย 1 คน , ผู้จัดการฝ่าย 1 คน , คนงานทั่วไป 1 คน)

$= \dfrac{38}{116} + \dfrac{12}{116} = \dfrac{50}{116}$

ตัวอย่างที่ 6.3.11 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีขาว 3 ลูก สีแดง 4 ลูก และสีน้ำเงิน 5 ลูก ถ้าหยิบออกมาพร้อมกัน 2 ลูก แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอล 2 ลูก มีสีเหมือนกันมีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{6}{66}$ 2. $\frac{10}{66}$
3. $\frac{19}{66}$ 4. $\frac{47}{66}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** P(ได้น้ำเงิน 2 ลูก) = $\dfrac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \dfrac{10}{66}$

เพราะว่า P(ได้ลูกบอล 2 ลูก สีเหมือนกัน) > P(ได้น้ำเงิน 2 ลูก) = $\frac{10}{66}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง P(ได้สีเดียวกัน) = P(ได้ขาว 2 ลูก) + P(ได้แดง 2 ลูก) + P(ได้น้ำเงิน 2 ลูก)

$$= \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{66} + \frac{6}{66} + \frac{10}{66} = \frac{19}{66}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.12 ในการเลือกกรรมการ 4 คน จาก คู่สามี – ภรรยา 5 คู่ ความน่าจะเป็นที่กรรมการทั้ง 4 คน ไม่เป็นคู่สามี – ภรรยากัน มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{21}$ 2. $\frac{5}{21}$
3. $\frac{8}{21}$ 4. $\frac{11}{21}$

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** จำนวนวิธีเลือกคน 4 คน จาก 10 คนทำได้ $\binom{10}{4} = 210$

P(ได้ชายทั้ง 4 คน) = $\dfrac{\binom{5}{4}}{210} = \dfrac{5}{210}$, P(ได้หญิงทั้ง 4 คน) = $\dfrac{\binom{5}{4}}{210} = \dfrac{5}{210}$

P(ได้คน 4 คน ไม่เป็นคู่สามีภรรยากัน) > P(ได้ชาย 4 คน) + P(ได้หญิง 4 คน)

$$> \frac{5}{210} + \frac{5}{210} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง การนับจำนวนวิธีที่ไม่ได้ คู่สามี – ภรรยา แม้แต่คู่เดียว

ขั้นที่ 1 เลือกคู่สามี – ภรรยา 4 คู่ จาก 5 คู่ ออกมาก่อนทำได้ $\binom{5}{4} = 5$

ขั้นที่ 2 ในแต่ละคู่ที่เลือกออกมา เราเลือกตัวแทนคู่ ว่าจะเลือก สามี หรือ เลือกภรรยาเป็น ตัวแทน ทำได้ 2^4 วิธี

จำนวนวิธีที่จะได้คนที่ไม่เป็นคู่สามีภรรยากัน $= (5)(2^4) = 80$

จำนวนวิธีเลือกคน 4 คน จาก 10 คน ทำได้ $\binom{10}{4} = 210$

P(ได้คน 4 คน ไม่เป็นคู่สามี – ภรรยา) $= \frac{80}{210} = \frac{8}{21}$

ตัวอย่างที่ 6.3.13 คณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบด้วย คน 4 คน จากบุคคลที่เลือกจากนักคณิตศาสตร์ 10 คน และนักวิทยาศาสตร์ 5 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้ตัวแทนทั้งสองสาขาวิชานี้มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{43}{273}$ 2. $\frac{143}{273}$

3. $\frac{230}{273}$ 4. $\frac{243}{273}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก ทำได้โดยการคิดค่าความน่าจะเป็นบางกรณี

$$P(\text{ได้นักคณิตศาสตร์ 3 คน , นักวิทยาศาสตร์ 1 คน}) = \frac{\binom{10}{3}\binom{5}{1}}{\binom{15}{4}} = \frac{600}{1365} = \frac{120}{273}$$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

$$P(\text{ได้นักคณิตศาสตร์ 2 คน , นักวิทยาศาสตร์ 2 คน}) = \frac{\binom{10}{2}\binom{5}{2}}{\binom{15}{4}} = \frac{450}{1365} = \frac{90}{273}$$

เพราะฉะนั้น P(ได้ตัวแทนทั้ง 2 สาขา) $> \frac{120}{273} + \frac{90}{273}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2.

วิธีจริง จำนวนวิธีเลือกคน 4 คน จาก 15 คน $= \binom{15}{4} = \frac{15!}{4!11!} = 1365$

จำนวนวิธีเลือกนักคณิตศาสตร์ 4 คน จาก 10 คน = $\binom{10}{4} = 210$

จำนวนวิธีเลือกนักวิทยาศาสตร์ 4 คน จาก 5 คน = $\binom{5}{4} = 5$

P(ได้นักคณิตศาสตร์และนักวิทยาศาสตร์อย่างน้อย อย่างละ 1 คน)

= 1 – (P (ได้นักคณิตศาสตร์ 4 คน) + P(ได้นักวิทยาศาสตร์ 4 คน))

$= 1 - \left(\frac{210}{1365} + \frac{5}{1365}\right) = 1 - \left(\frac{215}{1365}\right) = \frac{1150}{1365} = \frac{230}{273}$

ตัวอย่างที่ 6.3.14 ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้าย มีผู้เข้ารอบ 3 คน ผู้เข้ารอบจะต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลงจาก 5 เพลง ที่คณะกรรมการประกวดกำหนดไว้ให้

ความน่าจะเป็นที่มีผู้เข้าประกวดอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกันเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{8}{25}$ 2. $\frac{9}{25}$

3. $\frac{12}{25}$ 4. $\frac{13}{25}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก จำนวนวิธีเลือกร้องเพลงของ 3 คน จากเพลงที่เลือก 5 เพลงสามารถทำได้ = (5)(5)(5) = 125

เหตุการณ์ที่ 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกันและอีกหนึ่งคนร้องเพลงอื่น

ขั้นที่ 1. เลือก 2 คน จาก 3 คน ร้องเพลงเดียวกัน = $\binom{3}{2} = 3$

ขั้นที่ 2. เลือกเพลงให้ 2 คนนั้นร้อง = $\binom{5}{1} = 5$

ขั้นที่ 3. คนที่ 3 เลือกเพลงจาก 4 เพลงที่เหลือ ทำได้ 4

รวมจำนวนวิธี = (3)(5)(4) = 60

เพราะฉะนั้น P(อย่างน้อย 2 คน ร้องเพลงเดียวกัน) > $\frac{60}{125} = \frac{12}{25}$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 3.

วิธีจริง แบบที่ 1 คำนวณความน่าจะเป็นบางกรณีก็จะตัดตัวเลือกได้

กำหนดเพลงทั้ง 5 เพลงคือ A , B , C , D , E และผู้เข้ารอบ 3 คน คือ ก. , ข. และ ค.

จำนวนวิธีในการเลือกร้องเพลง 5 เพลงของคน 3 คน = (5)(5)(5) = 25

กรณีที่ 1 ทุกคนร้องเพลงเดียวกัน มี 5 วิธี

กรณีที่ 2 มีคน 2 คนร้องเพลงเดียวกันส่วนอีกหนึ่งคนร้องเพลงอื่น

ขั้นที่ 1 เลือกคน 2 คน ทำได้ $\binom{3}{2} = 3$

ขั้นที่ 2 เลือกเพลง 1 เพลงจาก 5 เพลง ทำได้ $\binom{5}{1} = 5$

ขั้นที่ 3 คนที่ 3 เลือกเพลงใดก็ได้จาก 4 เพลงทำได้ $= 4$

รวมจำนวนวิธีทั้งหมด $= (3)(5)(4) = 60$

P(มีอย่างน้อย 2 คนร้องเพลงเดียวกัน) $= \frac{5+60}{125} = \frac{13}{25}$

วิธีจริง แบบที่ 2 กำหนดชื่อเพลงทั้ง 5 เพลงคือ A , B , C , D , E

ก. , ข. และ ค. เป็นนักร้องที่เข้ารอบ

เพราะฉะนั้นจำนวนวิธีที่เลือกร้องเพลง $= (5)(5)(5) = 125$ วิธี

การนับจำนวนวิธีที่ทุกคนร้องเพลงต่างกัน $= {}^5P_3 = \frac{5!}{2!} = 60$

P(ทุกคนร้องเพลงต่างกัน) $= \frac{60}{125}$

P(มีคนอย่างน้อย 2 คน ร้องเพลงเดียวกัน) = 1 – P(ทุกคนร้องเพลงต่างกัน)

$$= 1 - \frac{60}{125} = \frac{65}{125} = \frac{13}{25}$$

ตัวอย่างที่ 6.3.15 มีเลข 8 จำนวนเป็นเลขบวก 6 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 3 จำนวน จำนวนคี่ 3 จำนวน และมีจำนวนลบ 2 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 1 จำนวน จำนวนคี่ 1 จำนวน

ถ้าสุ่มตัวเลขดังกล่าวมา 4 จำนวน

แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขทั้งสี่จำนวนมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{70}$ 2. $\frac{10}{70}$

3. $\frac{14}{70}$ 4. $\frac{28}{70}$

ตอบ 1.

แนวคิด การตัดตัวเลือก สมมติค่าตามเงื่อนไขของโจทย์

ให้ U เป็นเซตของตัวเลขที่โจทย์กำหนด เลือก U = {2 , 4 , 6 , 1 , 3 , 5 , –1 , –2}

การเลือกเลข 4 ตัวจากเซต U ทำได้ $\binom{8}{4} = 70$

เพราะว่ามีกรณีเดียวที่จะได้เลข 4 ตัว คูณกันเป็นจำนวนเลขคี่ และน้อยกว่า 0 คือ หยิบได้ $\{1, 3, 5, -1\}]$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 4 ตัว จะเป็นจำนวนคี่และน้อยกว่า 0 มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{70}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง การเลือกเลข 4 ตัว จาก 8 ตัว ทำได้ $\binom{8}{4} = 70$ วิธี

เหตุการณ์ที่ผลคูณของเลข 4 ตัว คูณกันมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นจำนวนเลขคี่ คือ หยิบได้ เลขคี่ทั้งหมด 4 ตัว ที่มีอยู่ซึ่งทำได้ 1 วิธี

สรุป ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของเลขทั้งสี่จำนวนมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่เท่ากับ $\frac{1}{70}$

ตัวอย่างที่ 6.3.16 ในการเลือกสมาชิก 4 คน จากสมาชิกทั้งหมด 12 คน เพื่อเป็นตัวแทนเข้าร่วมประชุม โดยที่สมาชิกทั้ง 12 คนนี้ มีสามีภรรยาคู่หนึ่งอยู่ด้วย ความน่าจะเป็นที่ตัวแทนเข้าประชุมจะมีคู่สามีภรรยาคู่นั้นเป็นตัวแทน หรือไม่มีคู่สามีภรรยาคู่นั้นร่วมเป็นตัวแทน มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{33}$
2. $\frac{14}{33}$
3. $\frac{17}{33}$
4. $\frac{16}{33}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก โจทย์ถาม 2 เหตุการณ์คือ 1. ได้คู่สามีภรรยาร่วมเป็นตัวแทนทั้ง 2 คน 2. ไม่ได้คู่สามีภรรยาร่วมเป็นตัวแทนทั้ง 2 คน

เราคิดกรณีไม่ได้คู่สามีภรรยาโดยเลือกคน 4 คน จาก 10 คน ทำได้ $\binom{10}{4} = 210$

การเลือกคน 4 คน จาก 12 คน ทำได้ $\binom{12}{4} = 495$

เพราะฉะนั้นคำตอบที่ต้องการ $> \frac{210}{495} = \frac{14}{33}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง จำนวนวิธีเลือกตัวแทน 4 คนจาก 12 คน ทำได้ $\binom{12}{4} = 495$

กรณีที่ 1 ไม่มีคู่สามีภรรยา เลือกได้ $\binom{10}{4} = 210$

กรณีที่ 2 ได้คู่สามีภรรยา และคนอื่นอีก 2 คน = $\binom{10}{2} = 45$

เพราะฉะนั้น P(ได้คู่สามีภรรยา หรือไม่มีคู่สามีภรรยา) = $\dfrac{210+45}{495} = \dfrac{255}{495} = \dfrac{51}{99} = \dfrac{17}{33}$

ตัวอย่างที่ 6.3.17 ในการเลือกเลข 3 ตัว จากเซต $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ โดยเลือกทีละตัว และ ไม่คืนก่อนหยิบตัวถัดไป

ความน่าจะเป็นที่ได้เลขสามตัว มีผลคูณเท่ากับ 6 หรือ 8 มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\dfrac{3}{84}$ 2. $\dfrac{4}{84}$

3. $\dfrac{8}{84}$ 4. $\dfrac{10}{84}$

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก การเลือกเลข 3 ตัว จาก 9 ตัว ทำได้ $\binom{9}{3} = 84$

$A = \{\{x, y, z\} \mid xyz = 6$ หรือ $xyz = 8\}$ โดยการแจงสมาชิกบางตัวจะได้

$A = \{\{1, 2, 3\}, \{1, -2, -3\}, \{-1, 2, -3\}, \{-1, -2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \ldots$

เพราะฉะนั้น $n(A) \geq 5$ ดังนั้น $P(A) \geq \dfrac{5}{84}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง $\{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ มีสมาชิก 9 ตัว

เมื่อเลือกออกมา 3 ตัวพร้อมกันทำได้ $\binom{9}{3} = 84$ วิธี

กรณีที่ 1 ผลคูณเท่ากับ 6 ได้จาก $(\pm1)(\pm2)(\pm3)$

เลือกเลข 1 , 2 , 3 ทำได้วิธีเดียว

เลือกเครื่องหมาย + 2 ตัว และ – หนึ่งตัว ทำได้ $\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

เลือกเครื่องหมายทุกตัวเป็นบวก

สรุปผลคูณเป็นบวก 6 มีได้ 4 ตัวคือ $\{1, 2, 3\}, \{1, -2, -3\}, \{-1, 2, -3\}, \{-1, -2, 3\}$

กรณีที่ 2 ผลคูณเท่ากับ 8 ได้จาก $(\pm1)(\pm2)(\pm4)$

เลือกเลข 1 , 2 , 4 ทำได้วิธีเดียว

เลือกเครื่องหมาย + 2 ตัวและ – หนึ่งตัว ทำได้ $\dfrac{3!}{2!\,1!} = 3$

เลือกเครื่องหมาย + ทั้ง 3 ตัวทำได้ 1 วิธี

สรุปผลคูณเป็น 8 มีได้ 4 วิธีคือ $\{1, 2, 4\}$, $\{1, -2, -4\}$, $\{-1, 2, -4\}$, $\{-1, -2, 4\}$

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลข 3 ตัว จะเป็น 6 หรือ 8 เท่ากับ $\frac{4+4}{84} = \frac{2}{21}$

ตัวอย่างที่ 6.3.18 กำหนด S เป็นแซมเปิลสเปซ และ A , B , C เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ถ้า $P(A \cup B \cup C) = 0.9$ โดยที่ $P(A \cap B' \cap C') = P(B \cap A' \cap C') = P(C \cap A' \cap B') = 0.1$ และ $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0.2$ แล้ว $P(A \cap B \cap C)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0
2. 0.05
3. 0.1
4. 0.15

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เลือกสมาชิกของ S , A , B , C ให้สอดคล้องเงื่อนไขของโจทย์ จะสามารถช่วยในการตัดตัวเลือก ได้ตัวอย่างเช่นเลือก $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

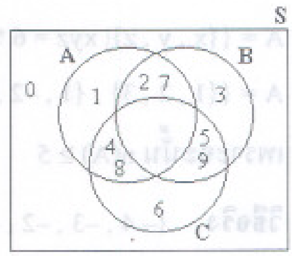
$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(C \cap A) = 0.2$

จะได้ว่า $A \cap B$, $B \cap C$, $C \cap A$ มีสมาชิกอย่างละ 2 ตัว

$P(A \cap (B' \cap C')) = P(A \cap (B \cup C)') = P(A - (B \cup C)) = 0.1$

ในทำนองเดียวกัน $P(B - (A \cup C)) = 0.1$, $P(C - (A \cup B)) = 0.1$

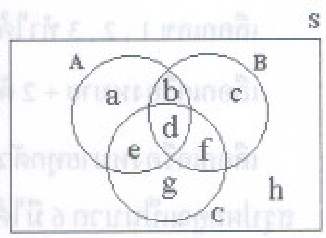
เลือกสมาชิกตามแผนภาพเวนน์เป็น



เพราะฉะนั้น $A \cap B \cap C = \phi$, $P(A \cap B \cap C) = 0$ ดังนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4.

วิธีจริง ใช้แผนภาพเวนน์แสดงความน่าจะเป็นแต่ละบริเวณเป็น a , b , c , d , … , h ตามลำดับ

$A \cap (B' \cap C') = A \cap (B \cup C)' = A - (B \cup C)$



เพราะว่า	เพราะฉะนั้น
$P(A \cup B \cup C) = 0.9$	$a + b + c + d + e + f + g = 0.9$ …(1)
$P(A \cap B' \cap C') = 0.1$	$a = 0.1$ …(2)
$P(B \cap A' \cap C') = 0.1$	$c = 0.1$ …(3)
$P(C \cap A' \cap B') = 0.1$	$g = 0.1$ …(4)
$P(A \cap B) = 0.2$	$b + d = 0.2$ …(5)
$P(B \cap C) = 0.2$	$f + d = 0.2$ …(6)
$P(A \cap C) = 0.2$	$e + d = 0.2$ …(7)

$(2)+(3)+\ldots+(7)$; $\quad a+b+c+3d+e+f+g=0.9 \quad \ldots(8)$

$(8)-(1)$; $\quad 3d=0$

$$d=0$$

เพราะฉะนั้น $P(A\cap B\cap C)=0$

ตัวอย่างที่ 6.3.19 นายสมบัติเล่นเกมส์โยนเหรียญ 1 อัน พร้อมกับลูกเต๋า 2 ลูก โดยมีกติกาว่า ถ้าโยนเหรียญขึ้นหัวจะได้เงินเท่ากับผลบวกของแต้มลูกเต๋าทั้งสองลูก แต่ถ้าเหรียญขึ้นก้อยจะได้เงินเท่ากับผลต่างของแต้มของลูกเต๋าทั้งสองลูก ความน่าจะเป็นที่นายสมบัติจะได้เงินอย่างมาก 4 บาท เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{3}{36}$ 2. $\frac{4}{36}$

3. $\frac{17}{36}$ 4. $\frac{20}{36}$

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก $S=\{(x,y,z)\mid x=$ หัว , ก้อย ; $y,z=1,2,\ldots,6\}$, $n(S)=(2)(6)(6)=72$

โดยการแจกแจงกรณีสมาชิกของ S จะได้ว่า E = เหตุการณ์ที่จะได้เงินไม่เกิน 4 บาท

เหตุการณ์ที่จะได้เงินไม่เกิน 4 บาท คือ (H , 1 , 1) , (H , 1 , 2) , (H , 1 , 3) , (H , 2 , 1) , (H , 2 , 2) , (H , 3 , 1) , (T , 1 , 1) , (T , 1 , 2) , (T , 1 , 3) , (T , 1 , 4) , …

เพราะฉะนั้น $P(E)\geq\frac{10}{72}=\frac{5}{36}$ เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2. ทิ้งได้

วิธีจริง $S=\{(x,y,z)\mid x=$ หัว , ก้อย ; $y,z=1,2,3,\ldots,6\}$, $n(S)=(2)(6)(6)=72$

$A=\{(H,y,z)\mid y+z\leq 4\}$

เหตุการณ์ที่แต้มลูกเต๋าบวกกันน้อยกว่าหรือเท่ากับ 4 คือ (1 , 1) , (1 , 2) , (1 , 3) , (2 , 1) , (2 , 2) , (3 , 1) เพราะฉะนั้น $n(A)=6$

$U=\{(T,y,z)\mid y,z=1,2,\ldots,6\}$, $n(U)=36$

$B=\{(T,y,z)\mid |y-z|\leq 4\}$;

$B'=\{(T,y,z)\mid |y-z|>4\}=\{(T,6,1),(T,1,6)\}$, เพราะฉะนั้น $n(B)=36-2=34$

เพราะว่า $A\cap B=\phi$ เพราะฉะนั้น $n(A\cup B)=n(A)+n(B)=40$

สรุป P(ได้เงินอย่างมาก 4 บาท) $=P(A\cup B)=\frac{40}{72}=\frac{20}{36}$

ตัวอย่างที่ 6.3.20 กำหนดให้ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำเสียเท่ากับ 0.2 ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสียเท่ากับ 0.1 ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำหรือห้องครัวเสียเท่ากับ 0.25

แล้วความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.05 2. 0.1

3. 0.3 4. 0.75

ตอบ 1.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและหลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสียพร้อมกันเป็นสับเซตของเหตุการณ์ที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย

เพราะฉะนั้นคำตอบข้อนี้ต้องน้อยกว่า 0.1

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. , 3. และ 4

วิธีจริง A = เหตุการณ์หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำเสีย ; P(A) = 0.2

B = เหตุการณ์หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย ; P(B) = 0.1

โจทย์กำหนด $P(A \cup B) = 0.25$

เพราะว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เพราะฉะนั้น $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$

ข้อพิสูจน์ของปัญหานี้หาอ่านได้จากคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 18

1. จงแสดงว่า $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \ldots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$

2. จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

3. จงแสดงว่า $\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n \Big|_{x=c} = 0$ ทุกค่า k = 0, 1, 2, ..., n − 1

4. จงแสดงว่า $\frac{d^k}{dx^k}[q(x)(x-c)^n]\Big|_{x=c} = 0$ ทุกค่า k = 0, 1, 2,… , n − 1

6.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

1. ถ้า $P(A) = 0$ แล้ว $P(A - B) = 0$
2. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มเป็นเลขคู่เท่ากับความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มเป็นเลขคี่
3. ในการโยนลูกเต๋า 3 ลูก พร้อมกันความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มลูกเต๋าเป็นเลขคู่ มีค่าเป็น 7 เท่าของความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มลูกเต๋าเป็นเลขคี่
4. $P(A - B) = P(B - A)$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \phi$
5. ในการสุ่มตัวเลขจำนวนเต็มออกมา 1 ตัว จากเซตของจำนวนเต็มบวก ความน่าจะเป็นที่จะได้เป็นจำนวนเฉพาะมีค่าไม่เกิน 0.4
6. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{f \mid f : A \to A$ เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ และทั่วถึง$\}$

   $C = \{f \mid f \in B \mid f(k) \neq k$ และ $f(k) \leq 3$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3\}$ แล้ว $P(C) = \frac{3}{5}$
7. ถ้า A มีสมาชิก n ตัว , B มีสมาชิก m ตัว , $n \leq m$ แล้วความน่าจะเป็นที่ฟังก์ชันจาก A ไปยัง B จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง มีค่าเท่ากับ $\frac{m!}{m^n (m-n)!}$
8. ถ้า $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{f \mid f : A \to A$ เป็นฟังก์ชัน $1 - 1\}$

   $E = \{f \in S \mid f(k) \neq k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3, 4\}$ แล้ว $P(E) = \frac{9}{24}$
9. $A = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$

   ความน่าจะเป็นที่ B ซึ่งเป็นสมาชิกสับเซตของ A จะมี 0 เป็นสมาชิกของ B มีค่าเท่ากับ 0.5
10. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$

    ถ้า X เป็นสับเซตของ A และ Y เป็นสับเซตของ B แล้ว $P(X \cap Y = \phi)$ มีมากกว่า $\frac{1}{2}$
11. ถ้า $U = \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$

    $E = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว , 3 หาร x ลงตัว แต่ 7 หาร x ไม่ลงตัว$\}$ แล้ว $P(E) < 0.25$
12. ถ้า $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $x + y + z = 11\}$

    $E = \{(x, y, z) \in S \mid x < y < z\}$ แล้ว $P(E) = \frac{1}{9}$
13. ถ้า $S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a + b + c + d = 11\}$

    $E = \{(a, b, c, d) \in S \mid a, b, c, d$ ต่างกันทุกตัว$\}$ แล้ว $P(E) = \frac{1}{5}$

14. ถ้า $X = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $S = \{A \times B \mid A \subset X, B \subset X\}$

$E = \{A \times B \in S \mid A \cup B = X$ และ $A \cap B = \{0\}\}$ แล้ว $P(E) = \frac{1}{10}$

15. ถ้า $P(A \cap B') = P(A \cap B) = P(A' \cap B) = 0.3$ แล้ว $P(A \cup B) = 3P(A \cap B)$

16. ถ้า $A \cap B = B \cap C = C \cap A = \phi$ และ $P(A \cup B) = P(B \cup C) = P(C \cup A)$

แล้ว $P(A) = P(B) = P(C)$

17. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{ r \mid r$ เป็นความสัมพันธ์บน $A\}$

$E = \{ r \in S \mid r$ มีคุณสมบัติ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r\}$ จะได้ว่าค่า $P(E) = \frac{1}{4}$

18. ในการนำตัวเลข 0 , 0 , 0 , 0 , 1 , 1 , 1 ไปจัดลำดับในแนววงกลม

ความน่าจะเป็น 0 อยู่ติดกันทั้ง 4 ตัว เท่ากับความน่าจะเป็นที่ 1 จะอยู่ติดกันทั้ง 3 ตัว

19. ถ้า $P(A \cap B) = P(A \cap C)$ แล้ว $P(B) = P(C)$

20. ถ้า $P(A) \leq P(B)$ และ $A \cap B \neq \phi$ แล้ว $A \subset B$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

1. **ถูกต้อง** เพราะว่า $A - B \subset A$, $P(A - B) \leq P(A)$, $P(A - B) \leq 0$, เพราะฉะนั้น $P(A - B) = 0$

2. **ถูกต้อง** $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$; $n(S) = 36$

$A = \{(x, y) \mid x + y$ เป็นเลขคู่ $\} = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), \ldots, (6, 4), (6, 6)\}$

$n(A) = 18$, $P(A) = \frac{18}{36}$, $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{18}{36} = \frac{18}{36}$

เพราะฉะนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มเป็นเลขคู่ เท่ากับ ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มเป็นเลขคี่

3. **ถูกต้อง** $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $n(S) = (6)(6)(6) = 216$

$A = \{(x, y, z) \in S \mid xyz$ เป็นเลขคี่ $\}$

xyz เป็นเลขคี่ ก็ต่อเมื่อ x เป็นเลขคี่ และ y เป็นเลขคี่ และ z เป็นเลขคี่

เพราะฉะนั้น $n(A) = (3)(3)(3) = 27$, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$, $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3\}$, $A - B = \{2\}$, $B - A = \{3\}$

$P(A - B) = \frac{1}{4}$ $P(B - A) = \frac{1}{4}$, แต่ $A \cap B = \{1\}$

5. **ถูกต้อง** $S = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะ$\}$

   การหาความน่าจะเป็น $P(A)$ ต้องคิดในรูปแบบอัตราส่วน

   $B = \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $C = \{5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$, $P(B) = \frac{1}{5}$

   $D = \{10, 20, 30, \ldots\}$, $P(D) = P(B \cap C) = \frac{1}{10}$

   $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10}$

   เพราะว่า $A \subset S - (B \cup C)$

   เพราะฉะนั้น $P(A) \leq P(S - (B \cup C)) = 1 - P(B \cup C) = 1 - 0.6 = 0.4$

6. **ผิด** $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $S = \{f \mid f : A \to A$, เป็นฟังก์ชัน $1 - 1$ และทั่วถึง $\}$

   $n(S) = 5! = 120$, การนับสมาชิกของ C , $f \in C$

   ขั้นที่ 1 $f(k) \neq k$ ทุกค่า $k = 1, 2, 3$ เลือกได้ 2 แบบคือ $(f(1) = 3, f(2) = 1, f(3) = 2)$

   หรือ $(f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1)$

   ขั้นที่ 2 $f(4)$ เลือกส่งค่าได้ 2 วิธี คือเป็น 4 หรือ 5

   ขั้นที่ 3 $f(5)$ เลือกส่งค่าได้ 1 วิธี คือค่าที่เหลือ

   สรุป f มีทางเลือกได้ $(2)(2)(1) = 4$ วิธี เพราะฉะนั้น $n(C) = 4$ สรุป $P(C) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$

7. **ถูกต้อง** $A = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $B = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ $n \leq m$, $S = \{f \mid f : A \to B\}$

   $n(S) = m^n$ $E = \{f \in S \mid f$ เป็นฟังก์ชัน $1 - 1\}$

   การนับสมาชิกของ E ขั้นที่ 1 เลือกสมาชิก n ตัวจาก m ตัวของ B ทำได้ $\binom{m}{n}$

   ขั้นที่ 2 เลือกส่งค่าจาก A มายังสมาชิก n ตัวที่เลือกได้ ทำได้ $n!$

   เพราะฉะนั้น $n(E) = n!\binom{m}{n}$ สรุป $P(E) = \dfrac{n!\binom{m}{n}}{m^n} = \dfrac{n!\left(\frac{m!}{n!(m-n)!}\right)}{m^n} = \dfrac{m!}{m^n(m-n)!}$

8. **ถูกต้อง** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $S = \{f \mid f : A \to A$ เป็นฟังก์ชัน $1 - 1\}$; $n(S) = 24$

   $E_i = \{f \in S \mid f(i) = i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ เพราะฉะนั้น $n(E_i) = 3! = 6$

   $E_i \cap E_j = \{f \in S \mid f(i) = i$ และ $f(j) = j\}$; $i, j = 1, 2, 3, 4$ และ $i \neq j$ $n(E_i \cap E_j) = 2! = 2$

   $E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4' = (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)'$

$n(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) + n(E_4) - n(E_1 \cap E_2) - n(E_1 \cap E_3) - n(E_1 \cap E_4)$

$- n(E_2 \cap E_3) - n(E_2 \cap E_4) - n(E_3 \cap E_4) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

$+ n(E_1 \cap E_2 \cap E_4) + n(E_1 \cap E_3 \cap E_4) + n(E_2 \cap E_3 \cap E_4) - n(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \cap E_4)$

$= 6 + 6 + 6 + 6 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 - 2 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 24 - 12 + 4 - 1 = 15$

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \dfrac{15}{24}$

$P(E_1' \cap E_2' \cap E_3' \cap E_4') = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \dfrac{9}{24}$

9. **ถูกต้อง** $A = \{0, 1, 2, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$; $n(A) = 6$ $\quad n(P(A)) = 2^6 = 64$

$B = \{0\} \cup C$ โดยที่ $C \subset \{1, 2, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}\}$

เพราะฉะนั้น $n(B) = 2^5 = 32$ $\qquad$ เพราะฉะนั้น $P(B) = \dfrac{32}{64} = \dfrac{1}{2}$

10. **ถูกต้อง** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $n(P(A)) = 2^4 = 16$, $B = \{0, 1, 2\}$, $n(P(B)) = 2^3 = 8$

$A \cap B = \{1, 2\}$, $S = \{X \cap Y \mid X \in P(A), Y \in P(B)\}$, $n(S) = (16)(8) = 128$

กรณี 1. $X \in P(A)$, $Y \in P(B)$, $X \cap Y = \{1\}$

เลือก $X = \{1\} \cup$ สับเซตของ $\{2, 3, 4\}$ ทำได้ $2^3 = 8$ วิธี

เลือก $Y = \{1\} \cup$ สับเซตของ $\{0, 2\}$ ทำได้ $2^2 = 4$ วิธี

เพราะฉะนั้นมีวิธีทั้งหมด $= (8)(4) = 32$

กรณี 2. $X \in P(A)$, $Y \in P(B)$, $X \cap Y = \{2\}$

ในทำนองเดียวกันกับกรณี 1 จะได้วิธีทั้งหมด = 32 วิธี

กรณี 3. $X \in P(A)$, $Y \in P(B)$, $X \cap Y = \{1, 2\}$

เลือก $X = \{1, 2\} \cup$ สับเซตของ $\{3, 4\}$ ทำได้ $2^2 = 4$ วิธี

เลือก $Y = \{1, 2\} \cup$ สับเซตของ $\{0\}$ ทำได้ $2 =$ วิธี

เพราะฉะนั้นมีวิธีทั้งหมด $= (4)(2) = 8$

จากทั้ง 3 กรณีจะได้ว่า $X \cap Y \neq \phi$ มีทั้งหมด $= 32 + 32 + 8 = 72$ วิธี

สรุป $P(X \cap Y \neq \phi) = \dfrac{72}{128} = \dfrac{9}{16}$ $\qquad$ $P(X \cap Y = \phi) = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

11. **ถูกต้อง** $U = \{1, 2, 3, \ldots, 2000\}$

$A = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว$\} = \{2, 4, \ldots, 2000\}$, $n(A) = 1000$

$B = \{x \in U \mid 3$ หาร x ลงตัว$\} = \{3, 6, 9, \ldots, 1998\}$, $n(B) = 666$

$C = \{x \in U \mid 7$ หาร x ลงตัว$\} = \{7, 14, 21, \ldots, 1995\}$, $n(C) = 285$

$A \cap B = \{x \in U \mid 6$ หาร x ลงตัว$\} = \{6, 12, \ldots, 1998\}$, $n(A \cap B) = 333$

$A \cap B \cap C = \{x \in U \mid 42$ หาร x ลงตัว$\} = \{42, 84, 126, \ldots, 1974\}$, $n(A \cap B \cap C) = 47$

$E = \{x \in U \mid 2$ หาร x ลงตัว , 3 หาร x ลงตัว และ 7 หาร x ไม่ลงตัว$\}$

$= A \cap B \cap C' = (A \cap B) - C = (A \cap B) - (A \cap B \cap C) = 333 - 47 = 286$

สรุป $P(E) = \dfrac{286}{2000} = 0.143$

12. **ถูกต้อง** $S = \{(x, y, z) \mid x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มบวก และ $x + y + z = 11\}$

การนับจำนวนสมาชิกของ S พิจารณาจาก

$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$

มีเครื่องหมาย + อยู่ 10 ตัว เมื่อเราดึงเครื่องหมาย + ออก 2 ตัว และแทนด้วย , แล้วนำส่วนที่ติดกันด้วยเครื่องหมาย (+) บวกเข้าด้วยกันก็จะได้ $(x, y, z) \in S$ และ $x + y + z = 11$

เพราะฉะนั้น $n(S) = \binom{10}{2} = 45$

$E = \{(x, y, z) \in S \mid x < y < z\} = \{(1, 2, 8), (1, 3, 7), (1, 4, 6) (2, 3, 6), (2, 4, 5)\}$

$n(E) = 5$, $P(E) = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$

13. **ถูกต้อง** $S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d$ เป็นจำนวนเต็มบวกและ $a + b + c + d = 11\}$

$n(S) = \binom{10}{3} = 120$ เพราะว่าเลข 4 ตัว ต่างกันและบวกกันได้ 11 คือ $\{1, 2, 3, 5\}$

และ $E = \{(a, b, c, d) \in S \mid a, b, c, d$ ต่างกันทุกตัว$\}$

เพราะฉะนั้น $n(E) = 4! = 24$ สรุป $P(E) = \dfrac{24}{120} = \dfrac{1}{5}$

14. **ผิด** $X = \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $n(X) = 10$; $n(P(X)) = 2^{10}$, $n(S) = (2^{10})(2^{10}) = 2^{20}$

$E = \{A \times B \in S \mid A \cup B = X$ และ $A \cap B = \{0\}\}$

เลือก $A = \{0\} \cup C$ โดยที่ $C \subset \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ เพราะฉะนั้นเลือก A ได้ 2^9 วิธี

เพราะว่า $B \cap A = \{0\}$ และ $B \cup A = X$

เพราะฉะนั้น $B = \{0\} \cup (\{1, 2, 3, \ldots, 9\} - A = \{0\} \cup (\{1, 2, 3, \ldots, 9\} - (\{0\} \cup C))$

ดังนั้นจำนวนวิธีเลือก $A \times B$ เพื่อเป็นสมาชิกของ E

$A \times B = (\{0\} \cup C) \times (\{0\} \cup (\{1, 2, 3, \ldots, 9\} - (\{0\} \cup C)))$

จึงเท่ากับการเลือก C ที่เป็นสับเซตของ $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$

สรุป $n(E) = 2^9$ เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{2^9}{2^{20}} = \frac{1}{2^{11}}$

15. **ถูกต้อง** จากสูตร $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) + P(B \cap A')$

$= 0.3 + 0.3 + 0.3 = 0.9 = 3P(A \cap B)$

16. **ถูกต้อง** $P(A \cup B) = P(B \cup C) = P(C \cup A)$

$P(A) + P(B) = P(B) + P(C) = P(C) + P(A)$

เพราะฉะนั้น $P(A) = P(B) = P(C)$

17. **ผิด** $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $r \subset A \times A$ การเลือกสมาชิกของ r เพื่อสอดคล้องเงื่อนไข พิจารณาจากการเลือกสมาชิกดังนี้

1. เลือกสมาชิกจาก $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
2. เลือกจาก $C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

เลือก $X \cup Y$ โดย $X \subset B$ และ $Y \subset C$ สามารถทำได้ $(2^4)(2^6) = 2^{10}$ วิธี

เลือก $r = X \cup Y \cup \{(y, x) \mid (x, y) \in Y\}$

เพราะฉะนั้น r จะสอดคล้องเงื่อนไข ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r$

สรุป $E = \{r \subset A \times A \mid$ ถ้า $(x, y) \in r$ แล้ว $(y, x) \in r\}$ มีสมาชิกทั้งหมด 2^{10} ตัว

$n(A) = 4$, $n(A \times A) = 16$, $S = \{r \mid r \subset A \times A\}$, $n(S) = 2^{16}$ เพราะฉะนั้น $P(E) = \frac{2^{10}}{2^{16}} = \frac{1}{64}$

18. **ถูกต้อง** เพราะว่าเหตุการณ์ที่ 0 ติดกัน 4 ตัว เป็นเหตุการณ์เดียวกันกับ 1 ติดกัน 3 ตัว

19. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{1\}$

$A \cap B = \{1\}$, $A \cap C = \{1\}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ แต่ $P(B) \neq P(C)$

20. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $S = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 3, 4\}$

จะได้ $P(A) = \frac{2}{4} < \frac{3}{4} = P(B)$ และ $A \cap B = \{1\}$ แต่ $A \not\subset B$

6.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ในการเลือกกรรมการนักเรียนจำนวน 4 คน จากผู้สมัครจำนวน 6 คน ซึ่งประกอบด้วยชาย 4 คน และหญิง 2 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้จะประกอบด้วยนักเรียนชายไม่ต่ำกว่า 3 คน เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{8}{15}$

   3. $\frac{9}{15}$ 4. $\frac{10}{15}$

2. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข 1 – 10 เขียนกำกับ ถ้าต้องการหยิบสลาก 8 ใบ พร้อมกัน โดยให้ได้สลากที่มีหมายเลขต่ำกว่า 5 อยู่ 3 ใบ เท่านั้น แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากดังกล่าวได้มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{8}{15}$

   3. $\frac{2}{35}$ 4. $\frac{11}{156}$

3. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก นาย ก. และ นาย ข. ผลัดกันหยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนไปเรื่อยๆ และหยุดเมื่อมีคนใดคนหนึ่งหยิบได้ลูกบอลสีแดง ถ้า นาย ก. หยิบลูกบอลเป็นคนแรก แล้วความน่าจะเป็นที่ นาย ก. จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงเท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{2}{7}$ 2. $\frac{5}{7}$

   3. $\frac{3}{8}$ 4. $\frac{5}{8}$

4. กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ในแซมเปิลสเปซ S พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. $P(A \cap B) - P(A) = P(B) - P(A \cup B)$

   ข. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. ก. ถูก และ ข.ถูก 2. ก. ถูก และ ข. ผิด

   3. ก. ผิด และ ข.ถูก 4. ก. ผิด และ ข. ผิด

5. ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีเขียว 6 ลูก สุ่มหยิบออกมาทีละลูกแล้วคืนทำแบบนี้ 4 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วสีเขียว 1 ครั้ง เท่ากับเท่าใด

   1. 0.0384 2. 0.0864

   3. 0.1536 4. 0.3456

6. เด็กชายนิดมีหนังสือ 5 เล่มแตกต่างกัน และเด็กชายหน่อยมีหนังสือ 8 เล่ม แตกต่างกัน เด็กทั้งสองต้องการแลกหนังสือกันคนละ 2 เล่ม จะมีวิธีแลกหนังสือกี่วิธี

   1. 10   2. 140

   3. 280   4. 560

7. ก. ข. และ ค. ตกลงทำธุรกิจร่วมกัน ทั้ง 3 คน ช่วยกันหาสถานที่ที่จะทำการเปิดสำนักงาน ก. และ ข. เสนอสถานที่ที่คาดว่าจะถูกเลือกเป็นสำนักงานด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน ส่วน ค. เสนอสถานที่ที่คาดว่าจะถูกเลือกด้วยความน่าจะเป็น 2 เท่า ของ ก. ความน่าจะเป็นที่สถานที่ที่ ค. เสนอจะไม่ได้รับเลือกเป็นสำนักงานมีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. 0.2   2. 0.25

   3. 0.5   4. 0.75

8. กำหนด $x \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 10\}$, $P({}^{10}C_x = {}^{10}P_x)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. 0   2. $\frac{1}{10}$

   3. $\frac{1}{11}$ 4. $\frac{2}{11}$

9. กำหนด $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

   $S = \{f \mid f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $D_f = A\}$

   $E = \{f \in S \mid f$ เป็นฟังก์ชัน 1 – 1 $\}$, P(E) เท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{10}{343}$ 2. $\frac{60}{343}$

   3. $\frac{120}{343}$ 4. $\frac{120}{4^7}$

10. กำหนด $S = \{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$, $E = \{x \in S \mid x$ หาร 1000 ลงตัว$\}$, P(E) มีค่าเท่ากับเท่าใด

   1. $\frac{1}{125}$ 2. $\frac{2}{125}$

   3. $\frac{3}{125}$ 4. $\frac{4}{125}$

เฉลยคำตอบ 1. (3) 2. (2) 3. (2) 4. (1) 5. (3)

6. (3) 7. (3) 8. (4) 9. (3) 10. (2)

บทที่ 7
ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

7.1 สรุปเนื้อหา

ข้อมูลต่างๆ ที่เราเกี่ยวข้องในชีวิตประจำวันส่วนใหญ่จะมีความเกี่ยวข้องกัน เช่น น้ำหนักกับความสูง , อายุกับรายได้ , คะแนนสอบกับจำนวนชั่วโมงที่ดูหนังสือ , คะแนนสอบคณิตศาสตร์กับคะแนนสอบภาษาอังกฤษ ฯลฯ นอกจากนั้นในส่วนของการประยุกต์ใช้งานเราอาจต้องศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง อัตราดอกเบี้ยเงินกู้กับปริมาณเงินฝากประจำ , จำนวนค่าโฆษณากับรายได้รวมของบริษัท , ราคาสินค้าต่อหน่วยกับปริมาณที่ขายได้ ฯลฯ

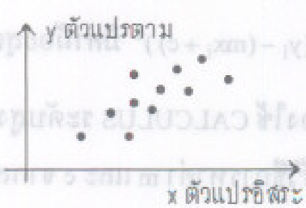
1. ตัวแปรอิสระและตัวแปรตาม

ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ตัว **ตัวแปรอิสระ** หมายถึงตัวแปรที่สามารถควบคุมค่าได้และสามารถนำไปพยากรณ์ค่าอื่นๆ ได้ **ตัวแปรตาม** หมายถึงตัวแปรที่เปลี่ยนค่าตามค่าของตัวแปรอิสระ

ตัวอย่าง	**ตัวแปรอิสระ x**	**ตัวแปรตาม y**
	น้ำหนัก	ความสูง
	ความสูง	น้ำหนัก
	ค่าโฆษณา	รายได้รวมของบริษัท
	ราคาสินค้าต่อหน่วย	ปริมาณสินค้าที่ขายได้

2. แผนภาพการกระจายของข้อมูล

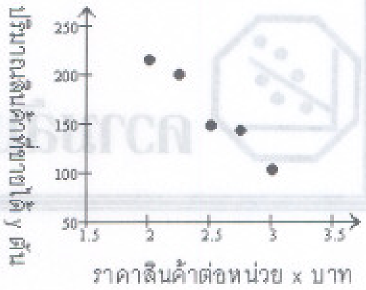
แผนภาพการกระจายของข้อมูล เป็นการนำข้อมูลที่เราเก็บรวบรวมมาทำการเขียนกราฟ



เพื่อดูรูปแบบและลักษณะของความสัมพันธ์ y = f(x) ที่เหมาะสม

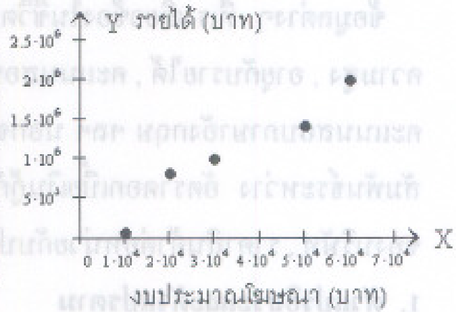
ตัวอย่าง แผนภาพการกระจายของข้อมูล

ราคาสินค้าต่อหน่วย (บาท)	ปริมาณสินค้าที่ขายได้ (ตัน)
3.00	102
2.75	143
2.50	148
2.25	200
2.00	215



ตัวอย่าง แผนภาพการกระจายของข้อมูล

งบประมาณโฆษณา (บาท)	รายได้ (บาท)
60,000	2,000,000
50,000	1,400,000
30,000	1,000,000
20,000	800,000
10,000	50,000



3. การหาความสัมพันธ์ในรูปแบบเชิงเส้น $y = mx + c$

กำหนดข้อมูล

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

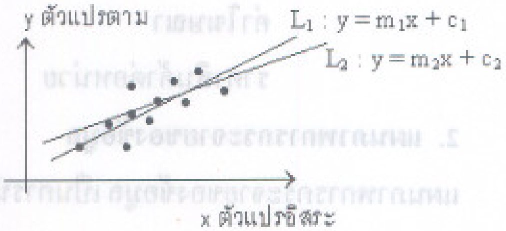
การหาสมการเส้นตรง $y = f(x) = mx + c$

เพื่อใช้แสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล

ว่าเราควรจะใช้ค่า m และ c เท่าใดดี

เราใช้แนวคิด

ของ **วิธีกำลังสองสัมบูรณ์มีค่าน้อยสุด**



โดยการหาค่า m และ c ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (mx_i + c))^2$ มีค่าน้อยสุด

หมายเหตุ การคำนวณค่า m , c ต้องใช้ CALCULUS ระดับสูง

สำหรับนักเรียนระดับ ม. ปลาย จึงใช้วิธีการหาค่า m และ c จากสมการปกติ

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

หรือนักเรียนจะจำเป็นสูตรเลยก็ได้ $m = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$ และ $c = \bar{y} - m\bar{x}$

ค่าพยากรณ์ของ $y(x_0) = mx_0 + c$

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูล

X	Y
2	4
4	15
7	27
12	34

จงหาสมการแสดงความสัมพันธ์ $y = mx + c$ และจงพยากรณ์ค่าของ y เมื่อ $x = 15$

วิธีทำ การคำนวณในรูปแบบตารางจะสะดวกที่สุด

X	Y	XY	X^2
2	4	8	4
4	15	60	16
7	27	189	49
12	34	408	144
25	**80**	**665**	**213**

จากตาราง $\sum_{i=1}^{4} x_i = 25$, $\sum_{i=1}^{4} y_i = 80$, $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 665$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 213$

สมการปกติ คือ $25m + 4c = 80$

$213m + 25c = 665$

แก้สมการหาค่า m และ c หรือโดยการใช้สูตร

$$m = \frac{4\sum_{i=1}^{4} x_i y_i - \sum_{i=1}^{4} x_i \sum_{i=1}^{4} y_i}{4\sum_{i=1}^{4} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2} = \frac{4(665) - (25)(80)}{4(213) - (25)^2} = \frac{2660 - 2000}{852 - 625} = \frac{660}{227} = 2.9075$$

$$c = \bar{y} - m\bar{x} = \frac{80}{4} - \left(\frac{660}{227}\right)\left(\frac{25}{4}\right) = 20 - 18.1718 = 1.8282$$

เพราะฉะนั้นสมการแสดงความสัมพันธ์เชิงเส้นตรงคือ $y = 2.9075x + 1.8282$

เมื่อ $x = 15$ จะได้ว่า $y(15) = 2.9075(15) + 1.8282 = 45.4407$

4. การหาความสัมพันธ์ในรูปแบบพาราโบลา $y = ax^2 + bx + c$

กำหนดข้อมูล

X	Y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด เราจะต้องหาค่า a , b , c ที่ทำให้ $\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i^2 + bx_i + c))^2$ มีค่าน้อยสุดซึ่งสามารถหาค่า a , b , c ได้จากระบบสมการ 3 ตัวแปร 3 สมการ ซึ่งเราเรียกว่า **สมการปกติ**

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูล

x	y
1	10
2	16
3	30
4	42

จงหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในรูปแบบ $y = ax^2 + bx + c$ และหาค่าพยากรณ์เมื่อ x = 5

วิธีทำ ทำการคำนวณในรูปแบบตาราง

X	Y	X^2	X^3	X^4	XY	X^2Y
1	10	1	1	1	10	10
2	16	4	8	16	32	64
3	30	9	27	81	90	270
4	42	16	64	256	168	672
10	**98**	**30**	**100**	**354**	**300**	**1016**

สมการปกติคือ $a\sum x^2 + b\sum x + 4c = \sum y$

$$a\sum x^3 + b\sum x^2 + cx = \sum xy$$

$$a\sum x^4 + b\sum x^3 + cx^2 = \sum x^2 y$$

แทนค่าจากตารางจะได้ $30a + 10b + 4c = 98$

$$100a + 30b + 100 = 300$$

$$354a + 100b + 30c = 1016$$

โดยการแก้สมการจะได้ $a = 1.5$, $b = 3.5$, $c = 4.5$ เพราะฉะนั้น $y = (1.5)x^2 + (3.5)x + 4.5$

ค่าพยากรณ์ $y\ (x = 5) = (1.5)(25) + (3.5)(5) + 4.5 = 59.5$

5. การหาความสัมพันธ์ในรูปแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล $y = a(b^x)$

รูปแบบ $y = a(b^x)$ สามารถเปลี่ยนรูปแบบได้เป็น $\log y = \log a + x \log b$ โดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด เราสามารถหาค่า $\log a$ และ $\log b$ ได้จาก **สมการปกติ**

$$\log b \sum_{i=1}^{n} x_i + n \log a = \sum_{i=1}^{n} \log y_i$$

$$\log b \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \log a \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i$$

ตัวอย่าง กำหนดข้อมูล

X	Y
2	12000
3	25000
5	48000
10	80000

จงหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในรูปแบบ $y = a(b^x)$

วิธีทำ

X	Y	log Y	X log Y	X^2
2	12000	4.08	8.16	4
3	25000	4.40	13.20	9
5	48000	4.68	23.40	25
10	80000	4.90	49.00	100
20		**18.06**	**93.76**	**138**

สมการปกติคือ $\log b(\sum x) + n \log a = \sum \log x$

$$\log b(\sum x^2) + \log a(\sum x) = \sum x \log y$$

แทนค่าจากตาราง $20 \log b + 4 \log a = 18.06$

$$138 \log b + 20 \log a = 93.76$$

โดยการแก้สมการจะได้ $\log b = 0.091$, $b = 1.233$

$$\log a = 4.06 , a = 1148$$

เพราะฉะนั้น $y = 1148(1.233)^x$

6. ข้อมูลอนุกรมเวลา

ข้อมูลอนุกรมเวลา เป็นลักษณะของข้อมูลที่เก็บมาตามลำดับของเวลา ซึ่งข้อมูลนั้นอาจเป็นมูลค่าสินค้า , ปริมาณสินค้า , รายได้ ฯลฯ และลำดับของเวลาอาจเป็น ปี , เดือน , สัปดาห์ ... โดยทั่วไป x เป็นตัวแปรแทนเวลา y เป็นข้อมูลอนุกรมเวลา สิ่งที่เราสนใจศึกษาคือสูตรความสัมพันธ์ $y = f(x)$

หมายเหตุ สมการ $y = f(x)$ เรียกว่า**สมการแนวโน้มของข้อมูลอนุกรมเวลา**

การหาสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลเวลา x และข้อมูลอนุกรมเวลา y เราเลือกให้ x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม ความสัมพันธ์ของ y ในเทอมของ x ที่เราสนใจในหลักสูตร ม. ปลาย คือ ความสัมพันธ์เชิงเส้นตรง $y = mx + c$ เนื่องจากข้อมูลเวลาอาจเป็น พ.ศ. 2543 ซึ่งเป็นตัวเลขขนาดใหญ่เราจึงต้องมีการเปลี่ยนตัวแปรเวลาเป็น ... , –2 , –1 , 0 , 1 , 2 , ...
หรือ ... , –3 , –1 , 0 , 1 , 3 , ... เพื่อช่วยในการคำนวณง่ายขึ้น

การหาสมการ $y = mx + c$ เราทำการเปลี่ยนตัวแปรเวลาเป็นค่าที่ทำให้การคำนวณง่ายขึ้นดังนี้

กรณี 1 จำนวนข้อมูลเป็นเลขคู่ เราจะเปลี่ยนเวลาตรงช่วงกลางเป็น + 1 และ – 1 และเวลาช่วงอื่นมีค่าเพิ่ม / ลด ทีละ ± 2 ตัวอย่างเช่น

พ.ศ.	x	y
2540	–3	y_1
2541	–1	y_2
2542	1	y_3
2543	3	y_4

x = 0 ตรงกับวันที่ 1 ม.ค. 2542 ซึ่งผลของการเปลี่ยนตัวแปรจะทำให้ $\sum x = 0$

กรณี 2 จำนวนข้อมูลเป็นเลขคี่ เราจะเปลี่ยนตัวแปร โดยให้ตัวค่าตรงกลางเป็น 0 และเวลาช่วงอื่นมีค่าเพิ่ม / ลด ทีละ ± 1 ตัวอย่างเช่น

พ.ศ.	x	y
2539	–2	y_1
2540	–1	y_2
2541	0	y_3
2542	1	y_4
2543	2	y_5

x = 0 ตรงกับวันที่ 1 กรกฎาคม 2541 ซึ่งการเปลี่ยนตัวแปรแบบนี้จะทำให้ $\sum x = 0$

ผลจากการเปลี่ยนตัวแปรทั้ง 2 แบบจะทำให้ $y = mx + c$ มีค่า $m = \dfrac{\sum xy}{\sum x^2}$ และ $a = \bar{y}$

การนำสมการ $y = mx + c$ ต้องมีการเปลี่ยนค่า พ.ศ. ให้เป็นค่า x ที่ถูกต้องตามที่เราเลือกใช้ เช่น x = 0 ในวันที่ 1 มกราคม หรือ x = 0 ในวันที่ 1 กรกฎาคม

ตัวอย่าง ข้อมูลของมูลค่าการส่งออก

พ.ศ.	มูลค่าการส่งออก (หน่วย : พันล้าน)
2540	42
2541	45
2542	38
2543	40

จงหาค่าของมูลค่าการส่งออกในปี 2544 ณ. วันที่ 1 มกราคม 2544

วิธีทำ

พ.ศ.	x	y	x^2	xy
2540	–3	42	9	–126
2541	–1	45	1	–45
2542	1	38	1	38
2543	3	40	9	120
	$\sum x = 0$	$\sum y = 165$	$\sum x^2 = 20$	$\sum xy = -13$

x = 0 ในวันที่ 1 มกราคม 2542

เพราะฉะนั้นสมการแสดงความสัมพันธ์ $y = mx + c$

$$m = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{-13}{20} = -0.65 \text{ , } c = \bar{y} = \frac{165}{4} = 41.25$$

สมการ $y = -0.65x + 41.25$

ในวันที่ 1 มกราคม 2544 จะได้ค่า $x = 4$

เพราะฉะนั้น $y = -0.65\,(4) + 41.25 = 38.65$

สรุปมูลค่าการส่งออก ณ. วันที่ 1 มกราคม 2544 มีค่า 38.64 พันล้านบาท

ตัวอย่าง ข้อมูลรายได้ของบริษัทแห่งหนึ่งในช่วงปี พ.ศ. 2539 – 2543 เป็นดังนี้

พ.ศ.	รายได้ (หน่วย : ล้านบาท)
2539	4
2540	2
2541	2
2542	5
2543	3

จงหาสมการ $y = mx + c$ และประมาณรายได้ของบริษัทในปี 2544

วิธีทำ

พ.ศ.	x	y	x^2	xy
2539	– 2	4	4	– 8
2540	– 1	2	1	– 2
2541	0	2	0	0
2542	1	5	1	5
2543	2	3	4	6
		16	10	1

$m = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{1}{10} = 0.1$, $c = \bar{y} = \frac{16}{5} = 3.2$ เพราะฉะนั้น $y = mx + c = (0.1)x + 3.2$

การพยากรณ์รายได้ในปี 2544 ; $x = 3$, $y = (0.1)(3) + 3.2 = 3.5$

เพราะฉะนั้นในวันที่ 1 กรกฎาคม 2544 บริษัทมีรายได้ = 3.5 ล้านบาท

7.2 เทคนิคการตัดตัวเลือก

1. โจทย์ที่ถามเกี่ยวกับการพิจารณาข้อความว่าถูกหรือผิดให้คิดจากตัวเลือกที่อ่านเข้าใจง่ายกว่า แล้วจึงทำการตัดตัวเลือกนั้นทิ้ง หรือ เลือกเป็นคำตอบเลย

ตัวอย่างที่ 7.2.1 ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างรายได้ x และรายจ่าย y โดยเฉลี่ยต่อเดือนของครอบครัวที่อาศัยอยู่ในอำเภอหนึ่งเป็น $y = 200 + 0.85x$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ครอบครัวสองครอบครัวซึ่งมีรายได้ต่างกัน 1,000 บาท จะมีรายจ่ายต่างกัน 850 บาท
2. แต่ละครอบครัวมีรายจ่ายโดยเฉลี่ยประมาณ 1,900 บาท เมื่อมีรายได้ 2,000 บาท
3. ครอบครัวหนึ่งซึ่งมีรายได้เดือนละ 2,000 บาท จะมีรายจ่ายโดยเฉลี่ยประมาณ 1,900 บาท
4. แต่ละครอบครัวจะมีรายได้มากกว่ารายจ่ายเสมอ

ตอบ 4.

การตัดตัวเลือก ตัวเลือก 4. เป็นคำตอบที่คิดง่ายที่สุด เมื่อรายได้เท่ากับ 0 รายจ่ายจะเป็น 200 เพราะฉะนั้นไม่ต้องคิดตัวเลือกอื่นเลย

วิธีจริง ตัวเลือก 1. **ถูกต้อง** เพราะว่า ให้ A , A + 1000 แทนรายได้ของครอบครัวที่ 1 และ 2 ตามลำดับ $y(A + 100) - y(A) = (200 + 0.85A) - (200 + 0.85(A + 1000)) = 850$

เพราะฉะนั้นทั้งสองครอบครัวมีรายได้ต่างกัน 850 บาท

ตัวเลือก 2. **ถูกต้อง** เพราะว่า ถ้า $x = 2000$ บาท แล้ว $y = 200 + 0.85(2000) = 1900$ บาท

ตัวเลือก 3. **ถูกต้อง** เพราะว่า ถ้า $y = 1900$ บาท แล้ว $x = 2000$ บาท

ตัวอย่าง 4. ผิด ถ้าครอบครัวมีรายได้เดือนละ 0 บาท จะต้องมีรายจ่ายเดือนละ 200 บาท

2. โจทย์ที่ถามเกี่ยวกับการพยากรณ์ค่าเราสามารถใช้การประมาณค่าช่วยในการตัดตัวเลือกได้

ตัวอย่างที่ 7.2.2 ในการประมาณความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของ x และ y ด้วยฟังก์ชันเส้นตรงโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าคงตัวเมื่อมีข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	0	1	2
y	5	2	1

ค่า y ที่ทำนายได้เมื่อ $x = \frac{1}{3}$ เท่ากับเท่าใด

1. 8   2. 4

3. 3   4. 2

ตอบ 2.

การตัดตัวเลือก จากลักษณะของข้อมูลจะได้ว่าค่าพยากรณ์ $y(x = \frac{1}{3})$ ต้องอยู่ระหว่าง 5 กับ 2 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. กับ 4. ทิ้งได้

วิธีจริง

x	y	x^2	xy
0	5	0	0
1	2	1	2
2	1	4	2
$\sum x = 3$	$\sum y = 8$	$\sum x^2 = 5$	$\sum xy = 4$

สมการปกติคือ $\sum y = m\sum x + \sum c$

$\sum xy = m\sum x^2 + c\sum x$

เพราะฉะนั้น $8 = m3 + 3c$ … (1)

และ $4 = m5 + 3c$ … (2)

เพราะฉะนั้น $m = -2$, $c = \frac{14}{3}$

ดังนั้น $y = -2x + \frac{14}{3}$ เมื่อ $x = \frac{1}{3}$ จะได้ $y = -2(\frac{1}{3}) + \frac{14}{3} = 4$

7.3 การทำโจทย์ข้อสอบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก

ตัวอย่างที่ 7.3.1 จากการทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) และระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่ได้ดังนี้

t (วินาที)	1	2	3	4
s (เมตร)	2	8	18	32

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันข้อมูลชุดนี้เป็นแบบเส้นตรง แล้วเราจะทำนายระยะที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ขณะที่ t เท่ากับ 1.5 วินาที ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 เมตร
2. 4 เมตร
3. 5 เมตร
4. 10 เมตร

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เมื่อ $y = mx + c$ จะได้ว่า $y(1.5) = 2$ หรือ $y(1.5) = 10$ เป็นไปได้น้อยมาก เพราะฉะนั้นหากจำสูตรไม่ได้หรือทำไม่ทัน ตัดตัวเลือก 1. และ 4. ดีกว่า

วิธีจริง จากความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลา

t	s	st	t^2
1	2	2	1
2	8	16	4
3	18	54	9
4	32	128	16
$\sum t = 10$	$\sum s = 60$	$\sum st = 200$	$\sum t^2 = 30$

ความสัมพันธ์ $s = mt + c$ มีสมการปกติเป็น $\sum s = m\sum t + \sum c$

$$\sum st = m\sum t^2 + c\sum t$$

เพราะฉะนั้นจากตารางจะได้ $60 = 10m + 4c$ …(1)

$$200 = 30m + 10c \quad \text{…(2)}$$

โดยการแก้สมการจะได้ $m = 10$, $c = -10$ เพราะฉะนั้น $y = 10x - 10$ และ $y(1.5) = 5$

ตัวอย่างที่ 7.3.2 จากการสอบถามครอบครัว n ครอบครัว ที่มีรายได้ต่อเดือนตั้งแต่ 5,000 บาท ถึง 20,000 บาท เกี่ยวกับรายจ่ายต่อเดือน ปรากฏผลดังนี้

รายได้ (หน่วยเป็นพันบาท) : x	$x_1, x_2, \ldots, x_n$
รายจ่าย (หน่วยเป็นพันบาท) : y	$y_1, y_2, \ldots, y_n$

และ $\bar{x} = 12, \bar{y} = 5$ โดยที่สมการเส้นตรงซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่าย (y) และรายได้ (x) ตัดแกน Y ที่จุด (0,–3)

ถ้าครอบครัวหนึ่งมีรายได้ 15,000 บาท แล้วจะมีรายจ่ายโดยประมาณเท่ากับเท่าไร

1. 4000 บาท　　　　2. 7000 บาท
3. 8000 บาท　　　　4. 21000 บาท

ตอบ 2.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าครอบครัวมีรายได้ต่อเดือนตั้งแต่ 5,000 บาท ถึง 20,000 บาท เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 4.

วิธีจริง สมมติความสัมพันธ์ระหว่างรายจ่าย (y) กับรายได้ (x) คือ $y = mx + c$

เพราะว่า ตัดแกนY ที่จุด (0,– 3) เพราะฉะนั้น $c = -3$

เพราะว่า $\bar{x} = 12, \bar{y} = 5$ เพราะฉะนั้น $m = \dfrac{\bar{y} - c}{\bar{x}} = \dfrac{5-(-3)}{12} = \dfrac{2}{3}$ เพราะฉะนั้น $y = \dfrac{2}{3}x - 3$

ครอบครัวหนึ่งที่มีรายได้ 15,000 บาท จะได้ว่า $x = 15$ และ $y(15) = \dfrac{2}{3}(15) - 3 = 7$

เพราะฉะนั้นครอบครัวที่มีรายได้ 15,000 บาทจะมีรายจ่ายโดยประมาณเดือนละ 7000 บาท

ตัวอย่างที่ 7.3.3 ในการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ x และตัวแปรตาม y ของข้อมูลจากตัวอย่างพบว่า

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

และคำนวณได้ $y = 0.545 + 0.636\,x$ ข้อความใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. ในการทำนายค่า y ถ้า x มีค่าเท่ากับ 9 จะทำนายค่า y เป็น 7
2. ในการทำนายค่า x ถ้า y มีค่าเท่ากับ 8 จะทำนายค่า x เป็น 11
3. ในการทำนายค่า x ถ้า y มีค่าเท่ากับ 7 จะทำนายค่า x เป็น 10.149
4. ในการทำนายค่า y ถ้า x มีค่าเท่ากับ 11 จะทำนายค่า y เป็น 7.541

ตอบ 4.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่า $y = 0.545 + 0.636\,x$ ใช้พยากรณ์ค่า y ได้เท่านั้น เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. และ 3.

วิธีจริง $y = 0.545 + 0.636x$ เป็นสมการของความสัมพันธ์ที่ใช้พยากรณ์ค่า y

ถ้า $x = 9$ จะได้ $y = 0.545 + (0.636)(9) = 6.269$ ถ้า $x = 11$ จะได้ $y = 0.545 + (0.636)(11) = 7.541$

ตัวอย่างที่ 7.3.4 จากการสอบถามถึงรายจ่ายของครอบครัว 8 ครอบครัว ที่มีรายได้ตั้งแต่ 1,000 บาท ถึง 14,000 บาท ได้สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของรายได้ (X) และรายจ่าย (Y) คือ $Y = 0.636x + 0.545$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. เราสามารถใช้สมการข้างต้นทำนายรายได้เมื่อทราบรายจ่าย

ข. ถ้าเพิ่มข้อมูลโดยการสอบถามเพิ่มอีก 7 ครอบครัว แล้วสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์ของ X และ Y ยังคงเป็นสมการเดิม

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. และ ข. ผิด

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก เพราะว่าการเพิ่มข้อมูล สมการอาจมีการเปลี่ยนแปลง เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิดแน่นอน ดังนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 3. ทิ้งได้

วิธีจริง จากสมการ $y = 0.636x + 0.545$ เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของรายได้ (x) กับรายจ่าย (y) ที่หาจากครอบครัวเพียง 8 ครอบครัวเท่านั้น เราไม่สามารถพยากรณ์ค่า x เมื่อทราบค่า y เพราะฉะนั้น ข้อความ ก. ผิด

ตัวอย่างที่ 7.3.5 มูลค่าอุตสาหกรรมสิ่งทอที่ประเทศไทยส่งออกไปขายยังต่างประเทศ ระหว่างปี พ.ศ. 2540 – 2544 เป็นดังนี้

พ.ศ.	2540	2541	2542	2543	2544
มูลค่า (ล้านบาท)	1	3	4	5	9

ถ้าพยากรณ์โดยใช้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง โดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดแล้วมูลค่าการส่งออกของปี พ.ศ. 2545 จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4.5 ล้านบาท
2. 4.9 ล้านบาท
3. 9.8 ล้านบาท
4. 10.8 ล้านบาท

ตอบ 3.

แนวคิด **การตัดตัวเลือก** เพราะว่าแนวโน้มมูลค่าการส่งออกมีค่ามากขึ้นมูลค่าการส่งออกในปี 2545 ต้องมากกว่า 9 ล้านบาท เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. และ 2.

วิธีจริง โจทย์ข้อนี้เป็นความสัมพันธ์ $y = mx + c$ เมื่อ x แทนเวลา และ y แทนข้อมูล เราจะหาค่า m และ c เพื่อนำไปใช้จากสมการต่อไปนี้ $\sum y = m\sum x + nc$ …(1)

$\sum xy = m\sum x^2 + c\sum x$ …(2)

ข้อมูลต่างๆ หาได้จากตารางต่อไปนี้

พ.ศ.	x	มูลค่า(y)	xy	x^2
2540	−2	1	−2	4
2541	−1	3	−3	1
2542	0	4	0	0
2543	1	5	5	1
2544	2	9	18	4
	$\sum x = 0$	$\sum y = 22$	$\sum xy = 18$	$\sum x^2 = 10$

จาก (1) และ (2) จะได้ $22 = m(0) + 5(c)$

$18 = m(10) + c(0)$

เพราะฉะนั้น $c = \frac{22}{5} = 4.4$ และ $m = \frac{18}{10} = 1.8$

สมการความสัมพันธ์คือ $y = 1.8x + 4.4$

ปี 2545 จะได้ $x = 3$ และ $y = (1.8)(3) + 4.4 = 9.8$ ล้านบาท

ตัวอย่างที่ 7.3.6 ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างระยะเวลา (พ.ศ.) x กับปริมาณเนื้อหมูโดยเฉลี่ย (กิโลกรัม) ที่แต่ละคนในอำเภอหนึ่งบริโภคต่อปี y_1 ระหว่างปี พ.ศ. 2535 – 2539 แสดงได้ด้วยสมการ $y_1 = 0.05x^2 + 0.25x + 10.5$ และความสัมพันธ์ระหว่างเวลา (พ.ศ.) x กับปริมาณเนื้อวัวโดยเฉลี่ย (กิโลกรัม) ที่แต่ละคนในอำเภอเดียวกันบริโภคต่อปี y_2 ระหว่างปี พ.ศ. 2535 – 2539 แสดงได้ด้วยสมการ $y_2 = 0.04x^2 + 0.60x + 9.4$ (เมื่อ x = 0 แทน พ.ศ. 2537 และ x มีหน่วยเป็นปี) การทำนายปริมาณเนื้อหมูโดยเฉลี่ยและปริมาณเนื้อวัวโดยเฉลี่ยที่แต่ละคนในอำเภอนี้บริโภคต่อปีในช่วง พ.ศ. 2540 – 2542 ในข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ปริมาณเนื้อหมูเท่ากับปริมาณเนื้อวัวในทุกปี

2. ปริมาณเนื้อหมูน้อยกว่าปริมาณเนื้อวัวทุกปี

3. ปริมาณเนื้อหมูเท่ากับปริมาณเนื้อวัวในบางปี

4. ปริมาณเนื้อหมูมากกว่าปริมาณเนื้อวัวในบางปี

ตอบ 4.

แนวคิด การตัดตัวเลือก การบริโภคเนื้อหมู จากสมการ $y_1 = 0.05x^2 + 0.25x + 10.5$

ถ้า x = 0 แทน พ.ศ. 2537 (x มีหน่วยเป็นปี)

x = 3 แทน พ.ศ. 2540 จะได้ $y_1 = 0.05(3)^2 + 0.25(3) + 10.5 = 11.7$

เพราะฉะนั้นในปี พ.ศ. 2540 แต่ละคนบริโภคเนื้อหมู 11.7 กิโลกรัมต่อปี

การบริโภคเนื้อวัว จากสมการ $y_2 = 0.04x^2 + 0.60x + 9.4$

x = 3 จะได้ $y_2 = 0.36 + 1.8 + 9.4 = 11.56$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 2. ทิ้งได้

วิธีจริง

การบริโภคเนื้อหมู จากสมการ $y_1 = 0.05x^2 + 0.25x + 10.5$

x = 4 แทน พ.ศ. 2541 จะได้ $y_1 = 0.05(4)^2 + 0.25(4) + 10.5 = 12.3$

เพราะฉะนั้นในปี พ.ศ. 2541 แต่ละคนบริโภคเนื้อหมู 12.3 กิโลกรัมต่อปี

x = 5 แทน พ.ศ. 2542 จะได้ $y_1 = 0.05(5)^2 + 0.25(5) + 10.5 = 13$

เพราะฉะนั้นในปี พ.ศ. 2542 แต่ละคนบริโภคเนื้อหมู 13 กิโลกรัมต่อปี

ในช่วงปี 2540 – 2542 รวม 3 ปี แต่ละคนบริโภคเนื้อหมูเท่ากับ 11.7 + 12.3 + 13 = 37 กิโลกรัม

ปริมาณเนื้อหมูโดยเฉลี่ยที่แต่ละคนบริโภคต่อปี ในช่วง 2540 – 2542 = $\frac{37}{3}$ = 12.33 กิโลกรัมต่อปี

การบริโภคเนื้อวัว จากสมการ $y_2 = 0.04x^2 + 0.60x + 9.4$

x = 4 จะได้ $y_2 = 0.64 + 2.4 + 9.4 = 12.44$ x = 5 จะได้ $y_2 = 1 + 3 + 9.4 = 13.4$

เฉลี่ยจากทั้ง 3 ปีจะได้ $\frac{11.56 + 12.44 + 13.4}{3} = \frac{37.4}{3} = 12.47$

สรุปโดยเฉลี่ยแต่ละปีใน 2540 – 2542 แต่ละคนบริโภคปริมาณเนื้อหมูน้อยกว่าเนื้อวัว

ตัวอย่างที่ 7.3.7 ถ้าค่าตัวแปร x และ y คือ

x	− 1	0	1	2	3
y	1	0	1	3	10

และสมการที่ใช้ประมาณความสัมพันธ์ระหว่างสองตัวแปรนี้ คือ $y = kx^2$ แล้วโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดค่า k คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{5}$ 2. $\frac{3}{4}$

2. 1 4. 3

ตอบ 3.

แนวคิด การตัดตัวเลือก นำค่าของตัวเลือกมาแทนค่าในโจทย์

ตัวเลือก 1. $\sum_{i=1}^{5}(y_i - kx_i^2)^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \frac{3}{5}x_i^2)^2 = 21.84$

ตัวเลือก 2. $\sum_{i=1}^{5}(y_i - kx_i^2)^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - \frac{3}{4}x_i^2)^2 = 10.688$

ตัวเลือก 3. $\sum_{i=1}^{5}(y_i - kx_i^2)^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - x_i^2)^2 = 2$

ตัวเลือก 4. $\sum_{i=1}^{5}(y_i - kx_i^2)^2 = \sum_{i=1}^{5}(y_i - 3x_i^2)^2 = 378$

เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1. , 2. และ 4.

วิธีจริง

x	x^2	y
− 1	1	1
0	0	0
1	1	1
2	4	3
3	9	10
$\sum x = 5$	$\sum x^2 = 15$	$\sum y = 15$

เพราะว่าสมการที่ต้องการคือ $y = kx^2$ เพราะฉะนั้นสมการปกติคือ $\sum y_i = \sum k x_i^2$

เพราะฉะนั้น 15 = k (15) สรุป k = 1

เพราะฉะนั้น ตัวเลือก ค. ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 7.3.8 จากข้อมูลอนุกรมเวลา (y) มีค่าแสดงในตารางข้างล่างนี้

พ.ศ.	2539	2540	2541	2542	2543
y	20	30	20	40	60

ถ้า Y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับเวลา (X) ในลักษณะเส้นตรง แล้วสามารถทำนายค่าของ y ในปี 2548 ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 60
2. 97
3. 110
4. 120

ตอบ 2.

แนวคิด การตัดตัวเลือก แนวโน้มของค่า y ต้องมากกว่า 60 ในปี 2548 เพราะฉะนั้นตัดตัวเลือก 1.

วิธีจริง จากโจทย์เราสามารถสร้างเป็นตารางตามแบบอนุกรมเวลาได้ดังนี้

ปี พ.ศ.	x	y	x^2	xy
2539	-2	20	4	-40
2540	-1	30	1	-30
2541	0	20	0	0
2542	1	40	1	40
2543	2	60	4	120
	$\sum x = 0$	$\sum y = 17$	$\sum x^2 = 10$	$\sum xy = 90$

ความสัมพันธ์ $y = mx + c$ มีสมการปกติเป็น $\sum y = m\sum x + nc$ ...(1)

$\sum xy = m\sum x^2 + c\sum x$ ...(2)

เพราะฉะนั้น $170 = 5c$ ดังนั้น $c = 34$

และ $90 = m(10)$ ดังนั้น $m = 9$

เพราะฉะนั้น $y = 9x + 34$

ปี 2548 จะได้ $x = 7$

เพราะฉะนั้น $y = 9(7) + 34 = 97$

7.4 ปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. ถ้าข้อมูลประกอบด้วยตัวแปรสองตัวแล้วตัวแปรทั้งสองตัวนั้นต้องมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงเสมอ
2. กำหนด x เป็นตัวแปรอิสระ และ y เป็นตัวแปรตาม มีความสัมพันธ์เป็น $y = mx + c$, $m \neq 0$ เมื่อเราเปลี่ยนเงื่อนไขให้ x เป็นตัวแปรตามและ y เป็นตัวแปรอิสระ แล้วจะได้ความสัมพันธ์ $x = \frac{1}{m}y - \frac{c}{m}$ เสมอ
3. ข้อมูลที่ประกอบตัวแปร 2 ตัว ต้องมีข้อมูลเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่จะสามารถเป็นตัวแปรอิสระได้
4. ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในรูปแบบสมการเอกซ์โพเนนเชียล ตัวแปรอิสระและตัวแปรตามต้องมีค่าเพิ่มด้วยกันเสมอ
5. แผนภาพการกระจายของข้อมูลเป็นการนำเสนอข้อมูลทางสถิติ
6. เมื่อมีข้อมูล 2 ตัวแปรและตัวแปรทั้งสองนั้นมีความสัมพันธ์กัน การอธิบายความสัมพันธ์ของข้อมูล 2 ตัวแปรนั้นด้วยสมการเส้นตรง จะสามารถอธิบายความสัมพันธ์ได้ดีกว่าความสัมพันธ์แบบสมการพาราโบลา
7. ข้อมูลอนุกรมเวลาหน่วยของเวลาต้องเป็นปีเสมอ
8. สมการเส้นตรง $y = mx + c$ ที่คำนวณได้จากข้อมูล เมื่อนำมาพยากรณ์ค่าของตัวแปรตามอาจจะไม่เท่ากับค่าของข้อมูลจริงที่เก็บมาแม้แต่จุดเดียว
9. ข้อมูลอนุกรมเวลาที่คำนวณโดยใช้หน่วยของเวลาเป็นปี สามารถเปลี่ยนหน่วยของเวลาเป็นเดือนได้
10. ข้อมูลทางธุรกิจที่มีตัวแปรมากกว่า 3 ตัวขึ้นไป จะไม่สามารถหาความสัมพันธ์ของตัวแปรทีละ 2 ตัวได้

ข้อพิสูจน์ของปัญหานี้หาอ่านได้จากคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 19

1. จงหาค่าของ $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$
2. จงหาค่าของ $(3)(2)x + (4)(3)x^2 + (5)(4)x^3 + (6)(5)x^4 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$
3. จงหาค่าของ $x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + 25x^5 + \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

เฉลยปัญหาถูกหรือผิดเกี่ยวกับความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล

1. **ผิด** ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของตัวแปรทั้งสองตัวอาจไม่มีความสัมพันธ์ หรือ มีความสัมพันธ์ที่อาจเป็นความสัมพันธ์แบบไม่เป็นเส้นตรงก็ได้
2. **ผิด** ตัวอย่างเช่น

x	y
1	5
2	12
3	13

เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระจะได้ $y = 4x + 2$ เมื่อ y เป็นตัวแปรอิสระจะได้ $x = 0.211y - 0.105$

3. **ผิด** ในการวิเคราะห์ข้อมูลทางสถิติและการคำนวณทางคณิตศาสตร์ เราสามารถเลือกให้ตัวแปรใดๆ เป็นตัวแปรอิสระ หรือตัวแปรตามก็ได้แต่ในทางปฏิบัติเราควรจะเลือกตัวแปรอิสระให้เหมาะสมกับงานและข้อมูลนั้นๆ
4. **ผิด** ตัวอย่างเช่น $y = 4(3^x)$ จะได้ว่า x เพิ่ม , y เพิ่มตามแต่ $y = 4\left(\frac{1}{5}\right)^x$ จะได้ว่า x เพิ่ม แต่ y ลดค่าลง
5. **ถูกต้อง** เมื่อเรามีข้อมูล x และ y และนำมาเขียนกราฟแผนภาพการกระจายถือได้ว่าเป็นการนำเสนอข้อมูลรูปแบบหนึ่ง
6. **ผิด** ในทางคณิตศาสตร์ เมื่อมีข้อมูล x , y เราสามารถหาสมการ $y = mx + c$ และ $y = ax^2 + bx + c$ ได้เสมอ แต่การสรุปว่าสมการใดดีกว่ากัน จะยังไม่สามารถสรุปได้จนกว่าจะใช้เหตุผลอื่นมาประกอบ
7. **ผิด** หน่วยของเวลาในข้อมูลอนุกรมเวลาอาจเป็น ปี เดือน สัปดาห์ หรือวัน ก็ได้
8. **ถูกต้อง** ตัวอย่างเช่นข้อมูล

x	y
2	4
5	7
13	19
20	30

จะได้ $y = 1.465x + 0.354$ และ $y(2) = 3.284$, $y(5) = 7.679$, $y(13) = 19.399$, $y(20) = 29.654$

9. **ถูกต้อง** ข้อมูลอนุกรมเวลาเมื่อเราเปลี่ยนหน่วยจากปีเป็นเดือน สามารถทำได้โดยแทนค่าเวลา $t = 1$ ปี เป็น $t = 12$ เดือน
10. **ผิด** การหาความสัมพันธ์ของตัวแปร เราสามารถหาทีละคู่หรือพร้อมกันทั้งหมดก็ได้

7.5 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. สมการแทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างต้นทุน (y : หน่วยเป็นพันบาท) กับจำนวนสินค้าที่ผลิต (x : หน่วยเป็นร้อยชิ้น) คือ $y = 2x + 5$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. ถ้าต้นทุน 7,000 บาท คาดว่าจะผลิตสินค้าได้ 100 ชิ้น

   ข. ถ้าผลิตสินค้าเพิ่ม 200 ชิ้น คาดว่าต้นทุนจะเพิ่ม 4,000 บาท ข้อใดต่อไปนี้ถูก

   1. ก. ถูกและ ข. ถูก
   2. ก. ผิดและ ข. ผิด
   3. ก. ถูกและ ข. ผิด
   4. ก. ผิดและ ข. ถูก

2. ในการประมาณความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของ x และ y ด้วยฟังก์ชันเส้นตรงโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุดในการประมาณค่าคงตัวเมื่อมีข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	1	3	5	8
y	5	12	13	20

   ค่าพยากรณ์ของค่า y ที่เมื่อ x = 12 เท่ากับเท่าใด

   1. 18
   2. 28
   3. 38
   4. 48

3. พิจารณาข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	-3	-1	0	1	3
y	0	a	a + 3	a + 4	a + 6

   เมื่อ a เป็นค่าคงตัวให้ x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นตรง โดยที่ความชันเท่ากับ 1.55 ถ้า x = 4 จะประมาณค่า y ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 8.7
   2. 10.8
   3. 11.2
   4. 12.8

4. อุณหภูมิ 100 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 212 องศาฟาเรนไฮต์ ในขณะที่อุณหภูมิ 0 องศาเซลเซียส มีค่าสอดคล้องกับอุณหภูมิ 32 องศาฟาเรนไฮต์ สมมติว่าอุณหภูมิที่วัดในมาตราองศาเซลเซียส(C) และองศาฟาเรนไฮต์(F) มีความสัมพันธ์กันในลักษณะเชิงเส้น สมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง F และ C คือข้อใดต่อไปนี้

   1. $F = 32 + \frac{9}{5}C$
   2. $F = 32 + 9C$
   3. $F = 32 - \frac{9}{5}C$
   4. $F = 32 - 9C$

5. การประมาณค่าของค่าคงตัวโดยใช้ระเบียบวิธีกำลังสองน้อยที่สุด ในเรื่องความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล ค่าในข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าน้อยที่สุด

   1. $(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$
   2. $\sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - x_i)^2$
   3. $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$
   4. $\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$

6. ในการหาความสัมพันธ์ระหว่างเงินเดือนกับค่าใช้จ่ายของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีเงินเดือนต่างๆ กัน โดยการสุ่มพนักงานของบริษัทนี้มา 5 คน แล้วสอบถามเกี่ยวกับเงินเดือนและค่าใช้จ่ายได้ผลดังตารางต่อไปนี้

พนักงานคนที่	1	2	3	4	5
เงินเดือน(x_i) (10,000 บาท)	1	2	3	4	5
ค่าใช้จ่าย(y_i) (10,000 บาท)	1	1	2	2	3

พบว่าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของเงินเดือนกับค่าใช้จ่ายมีกราฟเป็นเส้นตรง ถ้าพนักงานคนหนึ่งในบริษัทนี้มีเงินเดือน 80,000 บาท จงทำนายว่าเขาจะมีค่าใช้จ่ายประมาณเดือนละเท่าใด

   1. 37,000 บาท
   2. 40,000 บาท
   3. 43,000 บาท
   4. 53,000 บาท

เฉลยคำตอบ 1. (4) 2. (2) 3. (3) 4. (1) 5. (4) 6. (3)

บทที่ 8
เลขดัชนี

8.1 สรุปเนื้อหา

1. **เลขดัชนี** คือค่าตัวเลขที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของลักษณะที่เราสนใจศึกษาในระหว่างสองช่วงเวลาใดๆ หรือเป็นการเปรียบเทียบลักษณะที่เราสนใจในช่วงเวลาที่ต้องการศึกษา กับช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบ ซึ่งจะเรียกว่าเป็นช่วงเวลาฐาน เช่น ต้องการทราบว่าในจังหวัดเชียงใหม่ ราคาลำไยในปี พ.ศ. 2543 เปลี่ยนแปลงไปมากน้อยเพียงใดจากปี พ.ศ. 2542

เลขดัชนีที่นิยมใช้กันแบ่งออกได้เป็น 4 ชนิดคือ

1. ดัชนีราคา
2. ดัชนีปริมาณ
3. ดัชนีมูลค่า
4. ดัชนีซึ่งสร้างขึ้นตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ

1. ดัชนีราคา คือ ค่าที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าหรือบริการในระหว่างสองช่วงเวลาใดๆ เช่น ดัชนีราคาของคอมพิวเตอร์ของ พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 เท่ากับ 1.20 หรือ 120 เปอร์เซ็นต์ หมายความว่าราคาของคอมพิวเตอร์ ในปี พ.ศ. 2543 สูงกว่าราคาคอมพิวเตอร์ปี พ.ศ. 2542 อยู่ 20 เปอร์เซ็นต์

2. ดัชนีปริมาณ คือค่าที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของปริมาณสินค้าหรือบริการในระหว่างสองช่วงเวลาใด ๆ เช่น ดัชนีปริมาณของคอมพิวเตอร์ของ พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 ที่บริษัทแห่งหนึ่งจำหน่ายได้เท่ากับ 0.95 หรือ 95 เปอร์เซ็นต์ หมายความว่า จำนวนคอมพิวเตอร์ที่บริษัทแห่งนั้นจำหน่ายได้ในปี พ.ศ. 2543 ต่ำกว่าจำนวนคอมพิวเตอร์ชนิดเดียวกันที่จำหน่ายได้ในปี พ.ศ. 2542 อยู่ 5 เปอร์เซ็นต์

3. ดัชนีมูลค่า คือค่าที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของมูลค่าสินค้าหรือบริการในระหว่างสองช่วงเวลาใด ๆ เช่น ดัชนีมูลค่าของคอมพิวเตอร์ของ พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 เท่ากับ 1.08 หรือ 108 เปอร์เซ็นต์ หมายความว่า มูลค่าของคอมพิวเตอร์ที่ร้านค้าแห่งนั้นจำหน่ายได้ในปี พ.ศ.

2543 สูงกว่ามูลค่าของคอมพิวเตอร์ชนิดเดียวกันที่ร้านค้าจำหน่ายได้ ในปี พ.ศ. 2542 อยู่ 8 เปอร์เซ็นต์

4. ดัชนีซึ่งสร้างขึ้นตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการ ดัชนีซึ่งสร้างขึ้นตามวัตถุประสงค์ที่ต้องการอาจจะเป็นดัชนีราคา ดัชนีปริมาณหรือดัชนีมูลค่าก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ในการใช้งาน เช่น ดัชนีราคาผู้บริโภค ซึ่งใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าและบริการ โดยเฉลี่ยที่ประชาชนใช้ในการอุปโภคบริโภคเป็นประจำในระหว่าง 2 ช่วงเวลาใด ๆ ดัชนีราคาหุ้นซึ่งใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาหุ้นหรือหลักทรัพย์ในระหว่าง 2 ช่วงเวลาใด ๆ หรือดัชนีราคาข้าวโพดที่เกษตรกรขายได้ ซึ่งใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาข้าวโพดที่เกษตรกรขายได้ในระหว่าง 2 ช่วงเวลาใด ๆ

2. ดัชนีราคา ดัชนีราคาซึ่งเป็นค่าที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าหรือบริการต่าง ๆ ในสองช่วงเวลาใดๆ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 พวกใหญ่ๆ คือ ดัชนีราคาไม่ถ่วงน้ำหนัก และ ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนัก

2.1 ดัชนีราคาไม่ถ่วงน้ำหนัก คือดัชนีราคาที่เป็นการเปรียบเทียบราคาของสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดเพียงหน่วยเดียว เช่น ราคาของวิทยุเครื่องเดียว ราคาสบู่ก้อนเดียว

ดัชนีราคาไม่ถ่วงน้ำหนักแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดคือ

1. ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม
2. ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม คือเลขดัชนีที่หาได้จากการเปรียบเทียบราคารวมต่อหน่วยของสินค้าหรือบริการทุกชนิดในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนีกับราคารวมต่อหน่วยของสินค้าหรือบริการทุกชนิดในช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบ

I_{SA} เป็นดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{0i} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบหรือช่วงเวลาฐาน

m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม ได้จากสูตร $I_{SA} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}} \times 100$

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ คือเลขดัชนีที่หาได้จากการเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ของสินค้าหรือบริการแต่ละชนิด ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนีกับช่วงเวลาฐาน

I_{SR} เป็นดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{oi} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบหรือช่วงเวลาฐาน

m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ $I_{SR} = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{P_{ni}}{P_{oi}}\right)\times 100$

ตัวอย่าง

รายการสินค้า	ปริมาณ (หน่วย)		ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	2542	2543	2542	2543
สบู่	100	120	10	12
ยาสีฟัน	125	150	12	18
ผงซักฟอก	200	210	28	30

กำหนดให้ปี 2542 เป็นปีฐาน ดัชนีราคารวมอย่างง่ายของปี 2543 = $(\frac{12+18+30}{10+12+28})\times 100 = 120$

เพราะฉะนั้นดัชนีราคารวมอย่างง่ายมีค่าเพิ่มขึ้น 20%

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์ของปี 2543 = $\frac{1}{3}\left(\frac{12}{10}+\frac{18}{12}+\frac{30}{28}\right)\times 100$

$= \frac{1}{3}(3.7714285)100 = 125.71428$

เพราะฉะนั้นดัชนีราคารวมอย่างง่ายแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์มีค่าเพิ่มขึ้น 25.71%

2.2 ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนัก คือดัชนีราคาที่ให้ความสำคัญหรือน้ำหนักแก่ปริมาณหรือมูลค่าของสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดที่นำมาคำนวณหาเลขดัชนี กล่าวคือเป็นการเปรียบเทียบผลรวมของมูลค่าของสินค้าหรือบริการทุก ๆ ชนิดในสองช่วงเวลา ดังนั้น ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักจะมีความถูกต้องและเชื่อถือได้มากกว่าดัชนีราคาไม่ถ่วงน้ำหนักดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวม
2. ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ค่าเฉลี่ยราคาสัมพัทธ์

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวม คือดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดดัชนีราคาชนิดนี้นิยมหาด้วยวิธีต่างๆ ดังต่อไปนี้

2.2.1 วิธีของลาสไพเยอเรส เป็นดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดในช่วงเวลาที่เป็นฐาน

ให้ I_L เป็นดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของลาสไพเยอเรส

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{0i} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาฐาน

Q_{oi} เป็นปริมาณสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาฐาน

m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของลาสไพเยอเรส $I_L = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{oi}} \times 100$

2.2.2 วิธีของพาเช่อ เป็นดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_P เป็นดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของพาเช่อ

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{0i} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาฐาน

Q_{ni} เป็นปริมาณสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของพาเช่อ $I_P = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{ni}} \times 100$

2.2.3 วิธีถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยของสินค้าหรือบริการ แต่ละชนิดในช่วงเวลาฐานและช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_A เป็นดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยของช่วงเวลาฐานและช่วงเวลาที่ต้องการเลขดัชนี

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{oi} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบหรือช่วงเวลาฐาน

Q_{ni} เป็นปริมาณสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

Q_{oi} เป็นปริมาณสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาฐาน

m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยของสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดในช่วงเวลาฐานและช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนีได้จากสูตร $I_A = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}\{\frac{1}{2}(Q_{oi}+Q_{ni})\}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}\{\frac{1}{2}(Q_{oi}+Q_{ni})\}} \times 100$

ตัวอย่าง

รายการสินค้า	ปริมาณ (หน่วย)		ราคาต่อหน่วย (บาท)	
	2542	2543	2542	2543
ปากกา	100	150	3	5
ดินสอ	200	240	2	3
ยางลบ	80	110	1	2

กำหนดปี 2542 เป็นปีฐาน

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของลาส ไพเยอเรสของปี 2543

$$= \frac{(5)(100)+(3)(200)+(2)(80)}{(3)(100)+(2)(200)+(1)(80)} \times 100 = \frac{2100}{13} = 161.538$$

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมโดยวิธีของพาเช่อ

$$= \frac{(5)(150)+(3)(240)+(2)(110)}{(3)(150)+(2)(240)+(1)(110)} \times 100 = \frac{325}{2} = 162.5$$

ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยของสินค้าในปีฐานและปีปัจจุบัน 2543

$$= \left[\frac{(5)\left(\frac{100+150}{2}\right)+(3)\left(\frac{200+240}{2}\right)+(2)\left(\frac{80+110}{2}\right)}{(3)\left(\frac{100+150}{2}\right)+(2)\left(\frac{200+240}{2}\right)+(1)\left(\frac{80+110}{2}\right)}\right] \times 100 = \frac{6000}{37} = 162.162$$

2.2.4 วิธีถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดในช่วงเวลาที่กำหนดให้

I_G เป็นดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมถ่วง

P_{ni} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่ต้องการหาเลขดัชนี

P_{oi} เป็นราคาสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาฐาน

Q_{gi} เป็นปริมาณสินค้าหรือบริการชนิดที่ i ในช่วงเวลาที่กำหนดให้
m เป็นจำนวนสินค้าหรือบริการทั้งหมดที่นำมาหาดัชนีราคา
ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณสินค้าหรือบริการแต่ละชนิดในช่วงเวลาที่กำหนดให้ ได้จากสูตร $I_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{gi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{gi}} \times 100$

ข้อควรจำไว้ในการสอบ

1. ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมนิยมใช้วิธีของลาสไพเยอเรส เนื่องจากปริมาณสินค้าและบริการในปีฐานหาได้เสมอ
2. ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักแบบใช้ราคารวมวิธีของพาเช่ต้องรอให้เก็บข้อมูลปริมาณสินค้าและบริการของปีปัจจุบันเรียบร้อยก่อนจึงจะหาค่าดัชนีได้
3. ดัชนีราคาถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยของสินค้าและบริการในปีฐานและปีปัจจุบันใช้ในกรณีที่อาจเกิดเหตุการณ์ไม่ปกติเช่น น้ำท่วม, แผ่นดินไหว ซึ่งจะทำให้ปริมาณสินค้าใน 2 ปี มีความแตกต่างกันมากจึงต้องนำปริมาณสินค้ามาเฉลี่ยค่ากัน

3. ดัชนีราคาผู้บริโภค

ดัชนีราคาผู้บริโภค หรือ **ดัชนีค่าครองชีพ** คือค่าที่ใช้วัดการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าและบริการโดยเฉลี่ยที่ครอบครัวซึ่งมีรายได้จากค่าจ้างซื้อมาใช้อุปโภคและบริโภคเป็นประจำ ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของคนไทยใน พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับช่วงเวลาฐานคือ พ.ศ. 2542 เท่ากับ 125 หมายความว่า ราคาสินค้าและบริการโดยเฉลี่ยที่ครอบครัวต่าง ๆ ซึ่งอาศัยอยู่ในประเทศซื้อมาเพื่ออุปโภคบริโภคเป็นประจำใน พ.ศ. 2543 สูงกว่า พ.ศ. 2542 อยู่ 25 เปอร์เซ็นต์ หรืออีกนัยหนึ่งค่าของเงิน 125 บาท ในพ.ศ. 2543 จะมีค่าเทียบเท่ากับเงิน 100 บาท ใน พ.ศ. 2542 ซึ่งแสดงให้เห็นว่าอำนาจการซื้อของเงินตราลดลง การที่อำนาจการซื้อของเงินตราลดลงนี้จะมีผลทำให้รายได้ที่เป็นตัวเงินซึ่งครอบครัวได้รับ มีค่าที่แท้จริงของรายได้ลดลงด้วย เช่น ในปี พ.ศ. 2543 นายสมชายได้รับเงินเดือนประจำ 20,000 บาท แสดงว่าเมื่อเทียบกับรายได้ในปี พ.ศ. 2542 แล้ว รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงในปี พ.ศ. 2543 จะเท่ากับ 16,000 เท่านั้น ซึ่งหาได้จากสูตรดังนี้

$$\text{รายได้ที่แท้จริงของปีที่ต้องการหา} = \frac{\text{รายได้ที่เป็นตัวเงินของปีนั้น}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคของปีนั้น}} \times 100 = \frac{20000}{125} \times 100 = 16000$$

4. ประโยชน์ของการใช้ดัชนีราคาในวงการธุรกิจ

4.1 ใช้ดัชนีราคาวัดความมีเสถียรภาพของสินค้าหรือกลุ่มของสินค้าๆ หากดัชนีราคาของสินค้าในช่วงเวลาที่ต้องการเปรียบเทียบมีค่าเท่ากับ 100 เปอร์เซ็นต์หรือสูงกว่า 100 เปอร์เซ็นต์เล็กน้อย แสดงว่าธุรกิจเกี่ยวกับสินค้าในช่วงเวลาดังกล่าวมีเสถียรภาพดี แต่ถ้าดัชนีราคาของสินค้านั้นสูงกว่า 100 เปอร์เซ็นต์มากแสดงว่าธุรกิจเกี่ยวกับสินค้าในช่วงเวลาดังกล่าวมีเสถียรภาพที่ไม่ค่อยดี

4.2 ใช้ดัชนีราคาปรับยอดขายของสินค้าเพื่อวัดประสิทธิภาพในการขาย เพราะว่าการวัดประสิทธิภาพในการขายหรือการดำเนินงานไม่สามารถพิจารณาจากยอดขายโดยตรงได้ เพราะว่ายอดขายขึ้นอยู่กับปริมาณสินค้าหรือบริการที่ขายได้กับราคาต่อหน่วยของสินค้าหรือบริการนั้น ดังนั้นยอดขายสินค้าหรือบริการอาจจะสูงแต่ปริมาณสินค้าหรือบริการที่ขายได้อาจจะน้อยกว่าที่เคยขายได้มาก่อน

4.3 ใช้ดัชนีราคาเปรียบเทียบการเปลี่ยนแปลงของราคาสินค้าหรือบริการในช่วงใดๆ ของธุรกิจตั้งแต่ 2 แห่งขึ้นไป เช่นดัชนีราคาวัตถุดิบของธุรกิจหนึ่ง ใน พ.ศ. 2535 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2534 เท่ากับ 110 และดัชนีราคาวัตถุดิบของธุรกิจเดียวกันอีกแห่งหนึ่งใน พ.ศ. 2535 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2534 เท่ากับ 120 แสดงว่าต้นทุนของธุรกิจหลังสูงขึ้นมากกว่าธุรกิจแรก

4.4 ใช้ดัชนีราคาเพื่อการพยากรณ์สิ่งที่นักธุรกิจต้องการทราบ ในกรณีที่ทราบความสัมพันธ์ระหว่างราคากับสิ่งที่ต้องการทราบนั้น เช่นสามารถใช้ดัชนีราคาวัตถุดิบพยากรณ์ราคาขายหรือพยากรณ์กำไรจากการประกอบธุรกิจ

4.5 ใช้ดัชนีราคาสินค้าเพื่อการปรับค่าจ้างในการทำงานตามสัญญาหากสินค้าหรือวัตถุดิบที่สำคัญซึ่งจำเป็นต้องใช้ในการผลิตหรือบริการงานตามสัญญานั้นมีการเปลี่ยนแปลงราคาในทางที่เพิ่มขึ้นหรือลดลงมาก เช่น เพิ่มขึ้นหรือลดลงตั้งแต่ 10 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป ทั้งนี้เพื่อให้เกิดความเป็นธรรมแก่ผู้จ้างและผู้รับจ้างมากขึ้น กล่าวคือเมื่อสินค้ามีราคาสูงขึ้นมาก ผู้ว่าจ้างก็ควรจะจ่ายค่าจ้างเพิ่ม แต่ถ้าสินค้ามีราคาลดลงมาก ผู้รับจ้างก็ควรลดค่าจ้างหรือค่าบริการลง เพื่อให้สอดคล้องกับดัชนีราคาสินค้าที่เปลี่ยนไป

4.6 ใช้ดัชนีราคาผู้บริโภคปรับค่าของเงินในช่วงเวลาใด ๆ ให้เป็นค่าของเงินในช่วงเวลาที่ต้องการ โดยหาได้จากสูตร

$$\text{ค่าของเงินในช่วงเวลาที่ต้องการ} = \frac{\text{จำนวนเงินในช่วงเวลานั้น ๆ}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคของช่วงเวลานั้น}} \times 100$$

เช่น ต้องการปรับค่าของเงินใน พ.ศ. 2543 ให้เป็นค่าของเงินใน พ.ศ. 2542 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคใน พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 เท่ากับ 125 ดังนั้น ค่าของเงิน 1 บาทใน พ.ศ. 2543 จะเท่ากับ $\frac{1}{125}\times 100$ หรือ 0.80 บาท ใน พ.ศ. 2542 เท่านั้น

4.7 ใช้ดัชนีราคาผู้บริโภคปรับค่าแรงงานให้สอดคล้องกับภาวะค่าครองชีพหรือภาวะความเป็นอยู่ของประชาชนในท้องที่นั้น ๆ ตัวอย่างเช่น ใช้ดัชนีราคาผู้บริโภคของกรุงเทพมหานครไปปรับเงินเดือนหรือค่าแรงของพนักงานหรือคนงานซึ่งทำงานอยู่ในเขตกรุงเทพมหานครในปัจจุบันให้สอดคล้องกับค่าครองชีพที่สูงขึ้น หากดัชนีราคาผู้บริโภคของ พ.ศ. 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 ในเขตกรุงเทพมหานครเท่ากับ 120 และอัตราค่าแรงของผู้ใช้แรงงานในเขตกรุงเทพมหานครใน พ.ศ. 2542 เท่ากับ 180 บาท ดังนั้นอัตราค่าแรงของผู้ใช้แรงงานในเขตกรุงเทพมหานครในปี 2543 เมื่อเทียบกับ พ.ศ. 2542 ควรจะเท่ากับ $\frac{180}{100}\times 120 = 216$

4.8 ใช้ดัชนีราคาผู้บริโภควัดภาวะเงินเฟ้อ กล่าวคือเปรียบเทียบผลต่างระหว่างดัชนีราคาผู้บริโภค ณ เวลาที่ต้องการดูภาวะเงินเฟ้อและดัชนีราคาผู้บริโภค ณ เวลาที่ต้องการเปรียบเทียบกับดัชนีราคาผู้บริโภค ณ เวลาที่ต้องการเปรียบเทียบ

ข้อพิสูจน์ของปัญหานี้หาอ่านได้จากคณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 19

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{10} ใน $(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + \ldots)^{10}$
2. จงหาสัมประสิทธิ์ x^{18} ในพหุนาม $(x^2 + x^3 + \ldots + x^7)^4$
3. ค่าคงตัวที่มีในอนุกรม $(1 + \frac{1}{x})^4(\frac{1}{(1-x)^4})$ เท่ากับเท่าใด
4. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^{16} จากอนุกรม $(x^2 + x^3 + x^4 + \ldots)^5$
5. การกระจาย $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{10})(1 + x + x^2 + \ldots)^6$ สัมประสิทธิ์ x^{16} เท่ากับเท่าใด

คณิตศาสตร์ปรนัยเล่มที่ 19 หาซื้อได้ที่ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

8.2 โจทย์เสริมประสบการคำนวณเกี่ยวกับดัชนีราคา

ตัวอย่างที่ 8.2.1 ร้านขายขนมในเทศกาลตรุษจีน ได้รวบรวมข้อมูลการจำหน่ายขนมไว้ดังนี้

	ปริมาณ(พันหน่วย)			ราคาต่อหน่วย		
รายการสินค้า	2537	2538	2539	2537	2538	2539
ขนมเทียนไส้เค็ม	2	3	4	3.00	3.50	4.00
ขนมเทียนไส้หวาน	2	2	4	3.00	3.50	4.00
ขนมเข่งธรรมดา	2	3.5	4	2.00	2.50	3.00
ขนมเข่งใส่กะทิ	2	1.5	4	2.00	3.00	4.00

กำหนด พ.ศ. 2537 เป็นปี ฐาน พ.ศ. 2539 เป็นปีที่ต้องการหาเลขดัชนี โดยให้

I_1 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

I_2 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_3 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐานและปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

I_4 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $I_1 = I_2$ และ $I_3 \neq I_4$ 2. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 = I_4$

3. $I_1 \neq I_2$ และ $I_3 \neq I_4$ 4. $I_1 = I_2$ และ $I_3 = I_4$

ตอบ 4.

แนวคิด I_1 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีฐาน

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{oi}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{oi}} \times 100 = \left(\frac{(4)(2)+(4)(2)+(3)(2)+(4)(2)}{(3)(2)+(3)(2)+(2)(2)+(2)(2)}\right) \times 100 = \left(\frac{30}{20}\right) \times 100 = 150$$

I_2 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณในปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}Q_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}Q_{ni}} \times 100 = \left(\frac{(4)(4)+(4)(4)+(3)(4)+(4)(4)}{(3)(4)+(3)(4)+(2)(4)+(2)(4)}\right) \times 100 = \left(\frac{60}{40}\right) \times 100 = 150$$

I_3 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยถ่วงน้ำหนักด้วยปริมาณเฉลี่ยระหว่างปริมาณในปีฐาน และ ปีที่ต้องการหาเลขดัชนี

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2})}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}(\frac{Q_{ni}+Q_{oi}}{2})} \times 100 = (\frac{(4)(\frac{2+4}{2})+(4)(\frac{2+4}{2})+(3)(\frac{2+4}{2})+(4)(\frac{2+4}{2})}{(3)(\frac{2+4}{2})+(3)(\frac{2+4}{2})+(2)(\frac{2+4}{2})+(2)(\frac{2+4}{2})}) \times 100$$

$$= (\frac{(4)(3)+(4)(3)+(3)(3)+(4)(3)}{(3)(3)+(3)(3)+(2)(3)+(2)(3)}) \times 100 = (\frac{45}{30}) \times 100 = 150$$

I_4 คือ ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวมโดยไม่ถ่วงน้ำหนัก

$$= \frac{\sum_{i=1}^{m} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{m} P_{oi}} \times 100 = \frac{4+4+3+4}{3+3+2+2} \times 100 = \frac{15}{10} \times 100 = 150$$

ตัวอย่างที่ 8.2.2 จากตารางแสดงดัชนีราคาผู้บริโภคในแต่ละปี ดังนี้

ปี	ดัชนีราคาผู้บริโภค
2533	90
2534	119
2535	125
2536	140
2537	160

ถ้าในปี 2533 นาย ก. ได้รับเงินเดือนๆ ละ 4,500 บาท แล้ว จงหาว่าในปี 2537 นาย ก. จะต้องได้รับเงินเดือนมากกว่าปี 2535 เดือนละเท่าไรจึงจะทำให้ฐานะความเป็นอยู่ของเขาดีเท่ากับปี 2533

1. 8000 บาท
2. 6250 บาท
3. 3500 บาท
4. 1750 บาท

ตอบ 4.

แนวคิด I_{2533} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2533 I_{2535} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2535

I_{2537} = ดัชนีราคาผู้บริโภคปี 2537 ฐานของตัวเลขเงินเดือนที่ใช้ต้องเป็นของปี 2533

นาย ก. ได้เงินเดือน 4,500

เพื่อให้เงินของปี 2535 มีค่าเท่ากับ 4,500 ในปี 2533 ต้องคิดจากสูตร

$$\frac{I_{2535}}{I_{2533}} \times \text{รายได้ปี 2533} = \frac{125}{90} \times 4500 = 6250$$

เพื่อให้เงินของปี 2537 มีค่าเท่ากับเงิน 4,500 ในปี 2533 ต้องคิดจากสูตร

$$\frac{I_{2537}}{I_{2533}} \times \text{รายได้ปี 2533} = \frac{160}{90} \times 4500 = 8000$$

สรุปในปี 2537 นาย ก. จะต้องได้รับเงินมากกว่าปี 2535 เท่ากับ 8000 – 6250 = 1750 จึงจะทำให้ฐานะความเป็นอยู่ของเขาดีเท่าปี 2533

ตัวอย่างที่ 8.2.3 ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านค้าใน พ.ศ. 2537 และ พ.ศ. 2538

รายการสินค้า	ราคาต่อโหล	
	พ.ศ. 2537	พ.ศ. 2538
ปากกา	108	121
น้ำหมึก	180	216
ยาลบหมึก	240	300
ดินสอ	48	60

จากข้อมูลในตาราง ถ้าเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของน้ำหมึกและยาลบหมึกจากโหลเป็นขวด โดยมีราคาต่อหน่วยเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบใช้มวลรวม (เมื่อใช้ปี พ.ศ. 2537 เป็นปีฐาน) เมื่อราคาของน้ำหมึกและยาลบหมึกคือ ราคาต่อขวดจะมีค่าเท่ากับข้อใด

1. 117.27% 2. 118.54%
3. 121% 4. 121.41%

ตอบ 1.

แนวคิด ดัชนีราคาแบบใช้มวลรวมในโจทย์ข้อนี้ต้องหมายถึงดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม จึงจะได้คำตอบที่มีในตัวเลือก ตารางราคาสินค้าเมื่อเปลี่ยนหน่วยน้ำหมึกและยาลบหมึกเป็นขวด

สินค้า	ราคาสินค้า	
	2537	2538
ปากกา(โหล)	108	121
น้ำหมึก(ขวด)	$\frac{180}{12} = 15$	$\frac{216}{12} = 18$
ยาลบหมึก(ขวด)	$\frac{240}{12} = 20$	$\frac{300}{12} = 25$
ดินสอ(โหล)	48	60
ผลรวม	191	224

ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวม $= \dfrac{\sum_{i=1}^{4} P_{ni}}{\sum_{i=1}^{4} P_{oi}} \times 100 = \dfrac{121+18+15+60}{108+15+20+48} \times 100$

$= \dfrac{224}{191} \times 100 = 117.27\%$

ตัวอย่างที่ 8.2.4 กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2534 เป็น 120 ถ้านายวิบูลย์ได้รับเงินเดือน 8,400 บาท ในปี 2537 เขาจะมีรายได้ที่แท้จริงเมื่อเทียบกับปี 2534 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6000 บาท　　2. 6720 บาท
3. 7000 บาท　　4. 10180 บาท

ตอบ 3.

แนวคิด ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2534 เป็น 120 รายได้นายวิบูลย์ในปี 2537 เท่ากับ 8400

รายได้แท้จริงของนายวิบูลย์เมื่อเทียบกับปี 2534

$= \dfrac{\text{รายได้ปีของนายวิบูลย์ในปี 2537}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537 เทียบกับปี 2534}} \times 100 = \dfrac{8400}{120} \times 100 = 7000$

ตัวอย่างที่ 8.2.5 ตารางต่อไปนี้แสดงค่าจ้างเฉลี่ยต่อชั่วโมง ของคนงานในโรงงานแห่งหนึ่งในปี พ.ศ. 2530 – 2533

	2530	2531	2532	2533
ค่าจ้างเฉลี่ย (บาท/ช.ม.)	1.20	1.30	1.40	1.50
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100.00	113.00	114.00	116.00

ค่าจ้างเฉลี่ยที่แท้จริงต่อชั่วโมง เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เพิ่มขึ้นปีละ 0.10 บาทต่อชั่วโมง　　2. เพิ่มขึ้นปีละ 0.15 บาทต่อชั่วโมง
3. เพิ่มขึ้นปีละ 0.12 บาทต่อชั่วโมง　　4. เพิ่มขึ้นปีละไม่เท่ากัน

ตอบ 4.

แนวคิด คิดค่าจ้างเฉลี่ยของทุกปีเทียบกับปี 2530

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2531} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2531}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2531}} \times 100 = \frac{1.30}{113} \times 100 = 1.15$$

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2532} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2532}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2532}} \times 100 = \frac{1.4}{114} \times 100 = 1.12$$

$$\text{ค่าจ้างเฉลี่ยแท้จริงปี 2533} = \frac{\text{ค่าจ้างเฉลี่ยปี 2533}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2533}} \times 100 = \frac{1.5}{116} \times 100 = 1.29$$

สรุปค่าจ้างเฉลี่ยที่แท้จริงต่อชั่วโมงเพิ่มขึ้นปีละไม่เท่ากัน

ตัวอย่างที่ 8.2.6 สมมติว่าข้อมูลที่กำหนดให้เป็นดัชนีราคาผู้บริโภคของจังหวัดหนึ่ง โดยมีปี 2533 เป็นปีฐาน และเงินเดือนที่สมศักดิ์ได้รับในปีต่าง ๆ

ปี	2533	2535	2537
ดัชนีราคาผู้บริโภค	100	108.9	114.8
เงินเดือน	1,950	2,100	2,350

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าของเงิน 114.8 บาท ในปี 2537 มีค่าเทียบเท่ากับเงิน 100 บาท ในปี 2533

ข. รายได้ที่แท้จริงของสมศักดิ์ในปี 2537 เท่ากับ $\frac{2,350}{114.8}$ เมื่อใช้ปี 2533 เป็นปีฐาน

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด
3. ก. ผิด และ ข. ถูก
4. ก. ผิด และ ข. ผิด

ตอบ 2.

แนวคิด พิจารณาข้อความ ก.

$$\text{จากสูตร ค่าของเงินในช่วงเวลาที่ต้องการ} = \frac{\text{จำนวนเงินในช่วงเวลานั้นๆ}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคของช่วงเวลานั้น}} \times 100$$

เพราะฉะนั้น ค่าของเงิน 114.8 บาท ในปี 2537 $= \frac{114.8}{114.8} \times 100 = 100$

สรุป ค่าของเงิน 114.8 บาท ในปี 2537 มีค่าเทียบเท่ากับเงิน 100 บาท ในปี 2533

เพราะฉะนั้น ข้อความ ก. ถูกต้อง

พิจารณาข้อความ ข. เมื่อเทียบค่าเงินโดยใช้ปี 2533 เป็นปีฐาน

รายได้ที่แท้จริงของสมศักดิ์ในปี 2537 เมื่อเทียบกับปี 2533

$$= \frac{\text{จำนวนเงินเดือนในปี 2537}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภคในปี 2537}} \times 100 = \frac{2350}{114.8} \times 100 \neq \frac{2350}{114.8}$$

เพราะฉะนั้นข้อความ ข. ผิด

ตัวอย่างที่ 8.2.7 ในปี 2529 ชายคนหนึ่งมีรายได้เดือนละ 4,000 บาท ภริยามีรายได้ 3,500 บาท และลูกยังไม่มีรายได้ ต่อมาในปี 2535 เขามีรายได้เดือนละ 5,050 บาท ภริยามีรายได้ 4,550 บาท และลูกมีรายได้ 2,400 บาท ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของ พ.ศ. 2535 เท่ากับ 130.0 (พ.ศ. 2529 = 100) แล้ว รายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของครอบครัวนี้ในปี 2535 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ (รายได้ต่อเดือนของครอบครัวหมายถึงผลรวมของรายได้ต่อเดือนของคนที่มีรายได้ในครอบครัวทุกคน)

1. 9230.77 บาท　　2. 9750.00 บาท
3. 10961.54 บาท　　4. 12000.00 บาท

ตอบ 1.

แนวคิด ในปี 2535 รายได้รวมของครอบครัวเท่ากับ 5050 + 4550 + 2400 = 12000

เพราะฉะนั้นรายได้ต่อเดือนที่แท้จริงของครอบครัวปี 2535

$$= \frac{\text{รายได้รวมปี 2535}}{\text{ดัชนีราคาผู้บริโภค 2535}} \times 100$$

$$= \frac{12000}{130} \times 100 = 9230.77 \text{ บาท}$$

ตัวอย่างที่ 8.2.8 ถ้าราคาและปริมาณของกระติกน้ำร้อนยี่ห้อหนึ่ง 3 ขนาดที่ร้านจำหน่ายเครื่องการไฟฟ้าจำหน่ายในเวลา 3 ปี เป็นดังนี้

ขนาดของกระติกน้ำร้อน	ราคาต่อหน่วย (ร้อยบาท)		
	2534	2535	2536
ขนาดเล็ก	5.5	5.0	4.0
ขนาดกลาง	7.0	6.5	6.0
ขนาดใหญ่	11.5	11.0	10.0

เมื่อใช้ปี 2534 เป็นปีฐาน ดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของปี 2535 เป็นเท่าใด

1. 103.75 2. 93.75

3. 113.75 4. 97.75

ตอบ 2.

แนวคิด ราคารวมของปี 2534 เท่ากับ 5.5 + 7.0 + 11.5 = 24

ราคารวมของปี 2535 เท่ากับ 5.0 + 6.5 + 11.0 = 22.5

เพราะฉะนั้นดัชนีราคาอย่างง่ายแบบใช้ราคารวมของปี 2535 เท่ากับ $\frac{22.5}{24}\times 100 = 93.75$

ตัวอย่างที่ 8.2.9 กำหนดให้ x = –3, –2, –1, 0 1, 2, 3 แทนปี พ.ศ. 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537 ตามลำดับ และ y แทนราคาปุ๋ย (หน่วยเป็น 100 บาท) โดยมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y เป็นสมการ $y = 0.25x^2 - 0.5x + 1.25$

ถ้าใช้ปี พ.ศ. 2533 เป็นปีฐานแล้ว ดัชนีราคาของปุ๋ยในปี พ.ศ. 2537 จะเท่ากับเท่าใด

1. 90 2. 100

3. 110 4. 115

ตอบ 2.

แนวคิด ดัชนีราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2537 เมื่อกำหนดปีฐานเป็นปี พ.ศ. 2533

$$= \frac{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ.2537}}{\text{ราคาปุ๋ยปี พ.ศ. 2533}} \times 100 = \frac{y(\text{พ.ศ.2537})}{y(\text{พ.ศ.2533})} \times 100$$

$$= \frac{y(x=3)}{y(x=-1)}\times 100 = \frac{(0.25)(3^2)-0.5(3)+1.25}{(0.25)(-1)^2-0.5(-1)+1.25}\times 100 = 100$$

ตัวอย่างที่ 8.2.10 ตารางต่อไปนี้แสดงราคาสินค้าของร้านค้าใน พ.ศ. 2530 และ พ.ศ. 2536

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย	
	พ.ศ.2530	พ.ศ.2536
สบู่(ก้อน)	11	13
ยาย้อมผม(หลอด)	190	210
แชมพู(ขวด)	75	80
ยาสีฟัน(หลอด)	45	50

ในการคิดดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐานจะได้ 109.97% ถ้าเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล โดยมีราคาต่อก้อนเท่าเดิมแล้ว ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน) เมื่อราคาต่อหน่วยของสบู่คือราคาต่อโหล จะมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 108.97% 2. 109.97%

3. 111.63% 4. 112.22%

ตอบ 4.

แนวคิด เมื่อเปลี่ยนหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหล จะได้ข้อมูลดังนี้

รายการสินค้า	ราคาต่อหน่วย	
	พ.ศ.2530	พ.ศ.2536
สบู่ (โหล)	132	156
ยาย้อมผม (หลอด)	190	210
แชมพู (ขวด)	75	80
ยาสีฟัน (หลอด)	45	50

จากข้อมูลในตารางที่ได้ใหม่

ดัชนีราคาแบบใช้ราคารวม (เมื่อใช้ พ.ศ. 2530 เป็นปีฐาน)

$$= \left[\frac{156+210+80+50}{132+190+75+45}\right] \times 100$$

$$= \left(\frac{496}{442}\right) \times 100 \;\; = 112.22\%$$

หมายเหตุ แนวทางในการเฉลยข้างต้นเป็นการคำนวณตามตัวเลขที่เปลี่ยนไปโดยไม่สนใจว่าหน่วยของสินค้าทั้ง 4 ชนิด สอดคล้องสัมพันธ์กันหรือไม่ซึ่งในความเป็นจริงนั้น สินค้าที่มีลักษณะการใช้และการขายคล้ายกันนั้น การกำหนดราคาต่อหน่วยควรจะเป็นเหมือนกันและสอดคล้องกัน เช่น 1 ก้อน, 1 หลอด, 1 ขวด, 1 ถัง, 1 ถุง เนื่องจาก ราคาต่อหน่วยของสบู่ให้คิดเป็นโหล ดังนั้น ราคาต่อหน่วยของยาย้อมผม, แชมพู, ยาสีฟัน เราก็ควรจะคิดราคาต่อหน่วยเป็นโหล ซึ่งการคิดแบบนี้จะมีผลทำให้คำตอบเป็น 109.97% เหมือนเดิมอย่างไรก็ตาม จากโจทย์บังคับให้เราเปลี่ยนเฉพาะหน่วยของสบู่จากก้อนเป็นโหลดังนั้นคำตอบตามตัวเลขที่คำนวณข้างต้นจึงมีค่าเท่ากับ 112.22%

ตัวอย่างที่ 8.2.11 ให้สมการค่าจ้างรายวันของคนงานก่อสร้างเป็น $y = 6.5(x - 2529) + 60$ เมื่อ x เป็น พ.ศ. y เป็นค่าจ้าง มีหน่วยเป็นบาท ถ้าใน พ.ศ. 2536 ดัชนีราคาผู้บริโภคเท่ากับ 110% เมื่อเทียบกับปี พ.ศ. 2535 แล้วค่าจ้างรายวันแท้จริงในปี พ.ศ. 2536 เมื่อเทียบกับค่าจ้างรายวันในปี พ.ศ. 2535 เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. เพิ่มขึ้น 2.80 บาท
2. เพิ่มขึ้น 6.50 บาท
3. ลดลง 3.10 บาท
4. ลดลง 9.90 บาท

ตอบ 3.

แนวคิด รายได้ในปี 2536 จะได้ $y = 6.5(2536 - 2529) + 60 = 105.5$

รายได้ในปี 2535 $y = 6.5(2535 - 2529) + 60 = 99$

เพราะฉะนั้นรายได้แท้จริงของปี 2536 คือ $\frac{105.5}{1.10} = \frac{105.5}{110} \times 100 = 95.9$

ดังนั้นรายได้ในปี 2536 ลดลงจากปี 2535 = 99 – 95.9 = 3.10

8.3 โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. กำหนดดัชนีราคาผู้บริโภคของปีต่าง ๆ โดยมีปี 2535 เป็นปีฐาน ดังนี้

ปี	2535	2536	2537
ดัชนี	100	90	108

ถ้ารายได้ที่เป็นตัวเงินของชายผู้หนึ่งในปี 2536 เท่ากับ 900 บาท และรายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2537 เท่ากับรายได้ที่แท้จริงของเขาในปี 2536 เมื่อเทียบกับรายได้ในปี 2535 แล้ว รายได้ที่เป็นตัวเงินที่เขาควรจะได้รับในปี 2537 เท่ากับเท่าใด

1. 1080 บาท
2. 1200 บาท
3. 1120 บาท
4. 1300 บาท

2. ปี พ.ศ. 2542 สบู่ราคาก้อนละ 12.25 บาท ถ้าดัชนีราคาสบู่ ปี พ.ศ. 2542 เทียบกับ ปี พ.ศ. 2541 เท่ากับ 140% แล้ว ราคาสบู่ ปี พ.ศ. 2541 มีค่าเท่ากับกี่บาท

1. 8.00 บาท
2. 8.25 บาท
3. 8.50 บาท
4. 8.75 บาท

3. ในปี พ.ศ.2536 สุเมธมีรายได้ 10,000 บาทต่อเดือน ในปี พ.ศ.2537 เขามีรายได้เพิ่มขึ้น 15 เปอร์เซ็นต์จากปี พ.ศ.2536 ถ้าดัชนีราคาผู้บริโภคของปี พ.ศ.2537 เมื่อให้ปี พ.ศ.2536 เป็นปีฐานเท่ากับ 200 แล้วรายได้ที่แท้จริงของสุเมธในปี พ.ศ.2537 เมื่อเทียบกับปี พ.ศ.2536 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 5,075   2. 5,750

   3. 6,500   4. 11,500

4. ดัชนีราคาผู้บริโภคของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2537 – 2540 เป็นดังนี้

พ.ศ. :	2537	2538	2539	2540
ดัชนี :	100	107	116	138

   โดยการเปรียบเทียบกับปีฐาน (พ.ศ. 2537) จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2539 ร้อยละ 19

   ข. ค่าครองชีพของคนกรุงเทพฯ ใน พ.ศ. 2540 สูงกว่าใน พ.ศ. 2538 ร้อยละ 31

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. ก. และ ข. ถูกทั้งคู่   2. ก. ถูก ข. ผิด

   3. ก. ผิด ข. ถูก   4. ก. และ ข. ผิดทั้งคู่

5. สมศรีผ่านการคัดเลือกเข้าทำงานในบริษัทแห่งหนึ่ง ซึ่งมีสาขาอยู่ที่จังหวัดเชียงใหม่และสงขลา บริษัทได้เสนอเงินเดือนดังตารางข้างล่าง

จังหวัด	เงินเดือน(บาท)	ดัชนีราคาผู้บริโภค
กทม.	54,000	120
เชียงใหม่	49,000	90
สงขลา	52,000	110

   ถ้าพิจารณาจากเงินเดือนแท้จริงที่ได้รับด้วยฐานของค่าดัชนีเดียวกันสมศรีจะเลือกทำงานในจังหวัดใดต่อไปนี้

   1. กทม.   2. เชียงใหม่

   3. สงขลา   4. จังหวัดใดก็ได้

เฉลยคำตอบ 1. (1)   2. (4)   3. (2)   4. (3)   5. (2)

โจทย์ระคน
เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

1. ถ้า $f'(x) = g(x)$ และ $g'(x) = h(x)$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. $\int g(x)dx = f(x) + C$ 2. $\int h(x)dx = f'(x) + C$
   3. $\int g'(x)dx = h(x) + C$ 4. $\int f''(x)dx = f'(x) + C$

2. กำหนดให้ ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำเสีย เท่ากับ 0.2
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องครัวเสีย เท่ากับ 0.1
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำหรือห้องครัวเสีย เท่ากับ 0.25 แล้ว
ความน่าจะเป็นที่หลอดไฟฟ้าในห้องน้ำและห้องครัวเสียพร้อมกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 0.05 2. 0.1 3. 0.3 4. 0.75

3. ถ้า $1 + \cos^2\theta + \cos^4\theta + \dots = a$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง
แล้ว $\cos(\pi - 2\theta)\sin(\frac{\pi}{2} - 2\theta)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $-(\frac{a-2}{a})^2$ 2. $(\frac{a-2}{a})^2$ 3. $-(\frac{a}{a+2})^2$ 4. $(\frac{a}{a+2})^2$

4. ค่าของ $\lim_{x\to 2}(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{1}{4}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$

5. ค่าของอินทิกรัลจำกัดเขต $\int_{-1}^{3} |3x^2 - 6x|\,dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 8 2. 10 3. 12 4. 16

6. จำนวนวิธีจัดเลข 3 หลักที่มีค่ามากกว่า 300 จากเลข 0 , 1 , 2 , 3 , 4 และ 5 โดยตัวเลขเหล่านี้สามารถนำมาใช้ได้ครั้งเดียว มีเท่ากับค่าใดในข้อต่อไปนี้

   1. 12 2. 24 3. 60 4. 154

7. ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1\cdot 2}{3} + \frac{2\cdot 3}{3^2} + \frac{3\cdot 4}{3^3} + \frac{4\cdot 5}{3^4} + \dots$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{7}{4}$ 4. $\frac{9}{4}$

8. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีฐานยาว 10 หน่วย สูง 6 หน่วย และมุมทั้งสามเป็นมุมแหลมรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ใหญ่ที่สุดซึ่งบรรจุในสามเหลี่ยมรูปนี้มีพื้นที่เท่าใด

1. 15 ตารางหน่วย
2. 20.5 ตารางหน่วย
3. 25 ตารางหน่วย
4. 27.5 ตารางหน่วย

9. ให้ $a+3$, a , $a-2$ เป็น 3 พจน์เรียงกันของลำดับเรขาคณิตที่มีอัตราส่วนร่วมเป็น r แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. 8
2. 9
3. 16
4. 27

10. พจน์แรกที่เป็นจำนวนเต็มลบของลำดับเลขคณิต 200 , 182 , 164 , 146 , ... มีค่าต่างจากพจน์ที่ 10 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 54
2. 38
3. 22
4. 20

11. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{4}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้ทั้งคู่
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

12. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ โดยที่ $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A' \cap B') = 0.2$ $P(A \cap B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1
2. 0.3
3. 0.8
4. 0.9

13. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $1 + \sin\theta + \sin^2\theta + \sin^3\theta + \ldots = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos^2\theta}$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

(ข.) $1 - \cos 2\theta + \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta + \ldots = \dfrac{1}{2\cos 4\theta}$ ทุกค่า $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

ข้อสรุปในตัวเลือกใดถูกต้อง

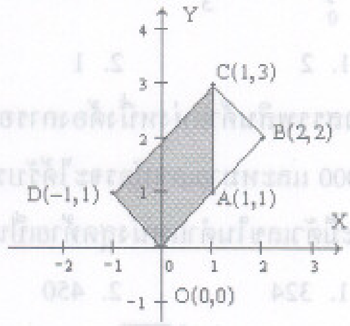
1. (ก.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
2. (ข.) ถูกต้องเพียงข้อเดียว
3. (ก.) และ (ข.) ผิดทั้งสองข้อ
4. (ก.) และ (ข.) ถูกต้องทั้งสองข้อ

14. กำหนดให้ $\theta \in [-\pi , \pi]$ เซตคำตอบของสมการ $1 + \tan^2\theta + \tan^4\theta + ... + \tan^{2n}\theta + ... = \frac{3}{2}$ ตรงกับเซตในข้อใด

1. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\}$ 2. $\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

3. $\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\}$ 4. $\{-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$

15. พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม OACD เท่ากับเท่าใด



1. $\int_{-1}^{1} (x + 2 - |x|)dx$

2. $\int_{-1}^{1} (|x| + x + 2)dx$

3. $\int_{-1}^{1} (|x| - x + 2)dx$

4. $\int_{-1}^{1} (|x| - 2)dx$

16. ค่าของ $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - ... - (2n-1)^2 + (2n)^2$ เท่ากับเท่าใด

1. $n(2n+1)$ 2. $-(2n+1)$ 3. $n(2n-1)$ 4. $-n(2n-1)$

17. กำหนดให้วันหมายถึง วันอาทิตย์ วันจันทร์ วันอังคาร วันพุธ วันพฤหัสบดี วันศุกร์ และวันเสาร์ ความน่าจะเป็นที่คน 2 คน จะเกิดวันต่างกันมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{49}$ 2. $\frac{1}{7}$ 3. $\frac{6}{49}$ 4. $\frac{6}{7}$

18. มีไม้ทำรั้วยาว 1600 เมตร ต้องการกั้นรั้วรอบคอกม้าเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากให้มีพื้นที่มากที่สุด จะได้พื้นที่เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 80,000 ตารางเมตร 2. 160,000 ตารางเมตร

3. 360,000 ตารางเมตร 4. 480,000 ตารางเมตร

19. บริษัทหนึ่งมีตำแหน่งงานว่างอยู่ 2 ตำแหน่ง ที่แตกต่างกัน ถ้ามีผู้สมัครเข้าทำงาน 4 คน คือ ก ข ค และ ง เมื่อทำการสัมภาษณ์แล้ว ปรากฏว่าคนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 1 คือ ก ข ค คนที่เหมาะสมกับตำแหน่งที่ 2 คือ ข ค ง ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนวิธีที่แตกต่างกัน ที่บริษัทจะบรรจุคนเข้าทำงาน โดยให้คนเหมาะสมกับงาน

1. 9 2. 7 3. 6 4. 3

20. ถ้าความน่าจะเป็นที่แดงจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.6 ความน่าจะเป็นที่ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.9 และ ความน่าจะเป็นที่แดง หรือ ดำ จะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้าเท่ากับ 0.96 แล้วข้อใดต่อไปนี้คือความน่าจะเป็นที่ แดง และ ดำจะมีอายุยืนถึง 20 ปีข้างหน้า

1. 0.04 2. 0.46 3. 0.54 4. 0.96

21. ถ้า $\int_0^{\sin\theta} x^2 dx = -\frac{2}{3}$ แล้ว $1 + \sin\theta + \cos\theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 1 3. 0 4. -1

22. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งต้องการออกบัตรสมนาคุณแก่ลูกค้าโดยมีหมายเลขตั้งแต่ 00001 ถึง 10000 และหมายเลขบัตรจะได้รับรางวัลต้องเป็นหมายเลขที่มีตัวเลขในตำแหน่งที่ 3 เป็นเลข 5 และมีตัวเลขในตำแหน่งสุดท้ายเป็นเลขคี่จำนวนบัตรที่ลูกค้าจะได้รับรางวัลคือข้อใดต่อไปนี้

1. 324 2. 450 3. 499 4. 500

23. ค่าของ $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+2}-3}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{3}$ 4. $-\frac{1}{3}$

24. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2+3x}{x^2+2x} & , x < 0 \\ \frac{x+2\sqrt{x}-3}{x^2+x-2} & , x \ge 0 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และ $x = 1$ 2. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และ $x = 0$
3. f มีความต่อเนื่องที่ $x = -2$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$
4. f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ และไม่ต่อเนื่องที่ $x = 1$

25. อนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งอัตราส่วนของผลบวกของ r พจน์แรกต่อผลบวกของ s พจน์แรกเท่ากับ $\frac{r^2}{s^2}$ อัตราส่วนของพจน์ที่ 7 ต่อพจน์ที่ 20 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{7}{20}$

26. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3+4x^2-x-4}{x^2-1}$ ถ้าต้องการให้ F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง แล้วจะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f(-1) = 3$ และ $f(1) = -5$ 2. $f(-1) = 3$ และ $f(1) = 5$
3. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = -5$ 4. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 5$

27.ถ้า $f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1$ แล้ว สมการของเส้นโค้ง $y = f(x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x + 2$ 2. $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + x + 2$

3. $f(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + 2$ 4. $f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + 2$

28.กำหนด $f(x) = \log(1 + x)$ สำหรับ $x \in R$ ค่าของ $f(1) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) + \ldots + f(\frac{1}{n})$ เท่ากับเท่าใด

1. $f(n + 1)$ 2. $f(n)$ 3. $f(\frac{1}{n})$ 4. $f(\frac{1}{n+1})$

29.ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์สอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์และวิชาเคมีเป็น $\frac{2}{3}$ และ $\frac{4}{9}$ ตามลำดับ ถ้าความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้เป็น $\frac{1}{4}$ แล้วความน่าจะเป็นที่เขาจะสอบไม่ผ่านทั้งสองวิชานี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{31}{36}$ 3. $\frac{1}{9}$ 4. $\frac{5}{36}$

30.กำหนดให้ $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^3$ สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1 , 2) และมีความชันเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $x = -1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7x + 3y - 13 = 0$ 2. $11x + 3y - 17 = 0$

3. $-7x + 3y + 1 = 0$ 4. $-11x + 3y + 5 = 0$

31.กำหนดให้ $f(x) = px^2 + qx + r$ เมื่อ p , q , r เป็นจำนวนจริง ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$ และ $F(0) = 0$ แล้ว $F(1) + F(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. p 3. q 4. r

32.จำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 100 และ 999 ซึ่งมีหลักหน่วยหรือหลักร้อยเป็นจำนวนเฉพาะมีจำนวนทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

1. 350 2. 380 3. 470 4. 500

33.ผลบวก $1 - \cos 2x + \cos^2 2x - \cos^3 2x + \cos^4 2x - \cos^5 2x + \ldots$ ลู่เข้าสู่ค่าใด

1. $\frac{\cos^2 x}{2}$ 2. $\frac{\sin^2 x}{2}$ 3. $\frac{\sec^2 x}{2}$ 4. $\frac{\operatorname{cosec}^2 x}{2}$

34.กำหนด $a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n , \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + \ldots + a_{2535} = 3170$ และ $a_{1269} + a_{1270} + a_{1271} + \ldots + a_{1308} = a_{2088}$ แล้ว a_1 เท่ากับเท่าใด

1. -1267 2. -1268 3. -6335 4. -6337

35. ให้ a_n เป็นพจน์ที่ n ของลำดับเรขาคณิต โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม

ถ้า $\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+a_{n+1}}=2n$ แล้ว r คือข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. -2 4. 2

36. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y=\sqrt[3]{x^2+2}$ ที่จุด x = 5 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $10x-27y+31=0$ 2. $5x-13y+14=0$

3. $27x-10y-105=0$ 4. $13x-5y-50=0$

37. กล่องใบหนึ่งมีเหรียญอยู่ 3 ชนิด ชนิดที่ 1 มี 3 เหรียญ แต่ละเหรียญมีหน้าหัวทั้ง 2 ด้าน ชนิดที่ 2 มี 4 เหรียญแต่ละเหรียญมีหน้าก้อยทั้ง 2 ด้าน ชนิดที่ 3 มี 2 เหรียญแต่ละเหรียญเป็นเหรียญปกติมาตรฐานคือมีหน้าหัวและหน้าก้อยอย่างละด้านและโอกาสขึ้นหน้าหัวและหน้าก้อยเท่ากัน ถ้าสุ่มหยิบเหรียญจากกล่อง 1 เหรียญแล้วโยนเหรียญนั้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะขึ้นหัว

1. $\frac{4}{9}$ 2. $\frac{5}{9}$ 3. $\frac{4}{18}$ 4. $\frac{5}{18}$

38. ให้ $a_n=e^{\frac{1}{2}\ln(3^{-n})}$ และ $b_n=\log_{\frac{1}{3}}(a_n)$ ทุก $n\in N$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
2. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
3. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ แต่ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์
4. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ ต่างก็เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์

39. ให้ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $4^a=\log_{\frac{1}{2}}a$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sum_{n=1}^{\infty}a^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(\log_{\frac{1}{2}}a)^n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

3. มี $x\in R$ ที่ $\sec x=a$ 4. ไม่มี $x\in R$ ที่ $e^x=a$

40. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\lim_{x\to1}\left[\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x^2-3x+2}\right]=1$ (2) $\lim_{x\to-2^-}\frac{|x^2-4|+|x+2|}{x^2-3x-10}=\frac{5}{7}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง 2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง 4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

41. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ และ $g(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (1) f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

(2) g มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

42. ให้ $y = 3^{\ln(x^2+1)}$ แล้ว $\frac{dy}{dx}$ คือข้อใด

1. $\frac{2x\,3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
2. $\frac{3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
3. $\frac{2x(\ln 3)3^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}$
4. $\frac{2x\,3^{\ln(x^2+1)}}{(x^2+1)\ln 3}$

43. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (1) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx = \pi$

(2) $\int_{0}^{1}(1+\sqrt{x^4-2x^2+1})\,dx = \frac{1}{3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง
2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง
3. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นจริง
4. ทั้งข้อ (1) และ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

44. สมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{27}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ ที่จุด x = 5 คือข้อใดต่อไปนี้

1. $10x + 9y + 131 = 0$
2. $9x + 10y - 131 = 0$
3. $10x + 9y - 131 = 0$
4. $10x + 5y - 31 = 0$

45. กำหนดให้ $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$ และ $g(x) = \sqrt{3x^2+1}$ อนุพันธ์ของ $[f(x) + g(x)]$ ที่ $x = 1$ เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{7}{2}$
2. $-\frac{19}{4}$
3. $\frac{13}{2}$
4. $\frac{21}{4}$

46. สินค้าชนิดหนึ่งขายในราคาชิ้นละ 24 บาท ต้นทุนในการผลิต x ชิ้นเท่ากับ $16 + 6x + 0.2x^{\frac{3}{2}}$ บาท ถ้า N เป็นจำนวนชิ้นของสินค้าที่ผลิตเพื่อให้ได้กำไรสูงสุดแล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $1 \leq N < 2000$
2. $2000 \leq N < 4000$
3. $4000 \leq N < 6000$
4. $6000 \leq N < 8000$

47. ถ้า $a_n = \int_0^1 x^n\,dx$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ เป็นจริงตามข้อใด

1. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ 2. มีผลบวกเป็น $\frac{2}{3}$
3. มีผลบวกเป็น $\frac{1}{2}$ 4. มีผลบวกเป็น 1

48. ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = \frac{f^{-1}(x)+1}{\sqrt{x}}$ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = g(x)$ จาก $x = 1$ ถึง $x = 4$ และแกน X เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{20}{3}$ 2. 3 3. $\frac{72}{5}$ 4. 5

49. ในการทอดลูกเต๋าลูกเดียวหนึ่งครั้ง ถ้าถ่วงน้ำหนักลูกเต๋าลูกนี้จนกระทั่งทำให้ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 มีค่าเรียงกันเป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้ม 1 เท่ากับ $\frac{1}{9}$ แล้วความน่าจะเป็นที่จะขึ้นแต้มคู่มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{15}$ 2. $\frac{8}{15}$ 3. $\frac{13}{15}$ 4. $\frac{14}{15}$

50. ในการประกวดร้องเพลงรอบสุดท้าย มีผู้เข้ารอบ 4 คน ผู้เข้ารอบแต่ละคนต้องร้องเพลงเพียงหนึ่งเพลง โดยเลือกเพลงจากเพลงทั้งหมด 6 เพลง ที่กองประกวดจัดไว้ให้ ความน่าจะเป็นที่จะมีผู้เข้ารอบอย่างน้อย 2 คน เลือกร้องเพลงเดียวกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{18}$ 2. $\frac{5}{18}$ 3. $\frac{15}{18}$ 4. $\frac{13}{18}$

51. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2-1}$ ถ้าต้องการให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริงแล้วจะต้องนิยามเพิ่มตามข้อใดต่อไปนี้

1. $f(-1) = 1$ และ $f(1) = -1$ 2. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = -1$
3. $f(-1) = -1$ และ $f(1) = -3$ 4. $f(-1) = -3$ และ $f(1) = 3$

52. ให้ $f(x) = 3x - 10$ และ $h(x) = (f\circ g)(x) = ax^2 + bx + c$
ถ้า $h(0) = 1$ และ h มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$ คือ 5 แล้วค่าของ $g(1)$ คือข้อใด

1. 2 2. 3 3. 5 4. 6

53. สัมประสิทธิ์ของ x^{54} ในอนุกรม $1 + (1 + x^2) + (1 + x^2)^2 + \ldots + (1 + x^2)^{50}$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\binom{50}{27}$ 2. $\binom{50}{28}$ 3. $\binom{51}{27}$ 4. $\binom{51}{28}$

54. ถ้าความชันของเส้นโค้งที่จุด (x , y) ใดๆ เป็น $2 - 2x$ และพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งนี้ จากจุด $x = 0$ ถึง $x = 3$ เท่ากับ 9 แล้วเส้นโค้งผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(3 , 0)$ 2. $(1 , 0)$ 3. $(0 , -3)$ 4. $(0 , -1)$

55. โรงงานแกะสลักไม้แห่งหนึ่งมีคนงาน 15 คน เป็นหญิง 6 คน ชาย 9 คน ผู้จัดการรับงานมา 3 ชนิด โดยงานชนิดที่หนึ่งใช้คนงานหญิง 3 คน งานชนิดที่สองใช้คนงานชาย 5 คน ส่วนงานชนิดที่สามใช้คนงานชายหรือหญิงก็ได้จำนวน 3 คน จำนวนวิธีที่ผู้จัดการจะเลือกคนงานให้แกะสลักไม้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 37,800 2. 68,250 3. 75,600 4. 88,200

56. ให้ $f(x) = 2 - |x^3 - 3|$, $g(x) = x^3$ และ $F(x) = f(g^{-1}(x))$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) $\lim\limits_{x\to 3^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} F(x)$ (ข.) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{F(x)-F(3)}{x-3}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. และ ข. ถูก 2. ก. ถูก ข. ผิด 3. ก. ผิด ข. ถูก 4. ก. และ ข. ผิด

57. มีเลข 8 จำนวนเป็นเลขบวก 6 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 3 จำนวน จำนวนคี่ 3 จำนวน และมีเลขลบ 2 จำนวน ซึ่งเป็นจำนวนคู่ 1 จำนวนคี่ 1 จำนวน ถ้าสุ่มเลขจำนวนดังกล่าวมา 4 จำนวนแล้ว ความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขทั้งสี่จำนวนมีค่าน้อยกว่า 0 และเป็นเลขคี่คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{70}$ 2. $\frac{10}{70}$ 3. $\frac{14}{70}$ 4. $\frac{28}{70}$

58. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้ $1 + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 2 + \ldots + \log_{\sqrt[n]{2}} 2 = n^2 - 21$ แล้ว $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 63 2. 127 3. 255 4. 511

59. จำนวนเต็มบวก m ที่มากที่สุดที่ทำให้อนุกรม $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^{m+2}} + \frac{1}{2^{m+3}} + \ldots$ มีผลบวกมากกว่า 0.01 เป็นสมาชิกของเซตใดต่อไปนี้

1. $\{1 , 2 , 3\}$ 2. $\{4 , 5 , 6\}$ 3. $\{7 , 8 , 9\}$ 4. $\{10 , 11 , 12\}$

60. ให้ $f(x) = \sqrt{x} + x$ แล้วเซตของจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $f'(x) \geq 3$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(0 , \frac{1}{16}]$ 2. $[0 , \frac{1}{16}]$ 3. $(0 , \frac{1}{4}]$ 4. $[0 , \frac{1}{4}]$

61. ในการสุ่มหยิบลูกกวาดจากกล่องใบหนึ่งซึ่งมีลูกกวาดอยู่ 4 ชนิด ชนิดละ 2 เม็ด ให้แก่เด็กชายสองคน คนละ 4 เม็ด ความน่าจะเป็นที่เด็กแต่ละคนได้ลูกกวาดครบทั้ง 4 ชนิด เท่ากับข้อใด

1. $\frac{8}{35}$ 2. $\frac{6}{35}$ 3. $\frac{4}{35}$ 4. $\frac{2}{35}$

62. ให้ R เป็นเซตจำนวนจริงและ $A = \{a \in R \mid a > 0$ และ $a \neq 1\}$

สำหรับทุก $a \in A$ นิยาม $f: R \longrightarrow R$ โดย $f_a(x) = a^{x+1}$

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_a(\log_a n)$ มีคุณสมบัติตามข้อใดต่อไปนี้

1. คอนเวอร์เจนต์ของ $a \in A$
2. ไดเวอร์เจนต์ทุก $a \in A$
3. คอนเวอร์เจนต์ทุก $a \in A$ ซึ่ง $0 < a < 1$ และไดเวอร์เจนต์ทุก $a \in A$ ซึ่ง $a > 1$
4. ไดเวอร์เจนต์ทุก $a \in A$ ซึ่ง $0 < a < 1$ และคอนเวอร์เจนต์ทุก $a \in A$ ซึ่ง $a > 1$

63. ถ้า S คือระยะทางจากจุด $(16, \frac{1}{2})$ ไปยังจุด (x, y) บนเส้นโค้ง $y = x^2$

แล้ว ค่าที่น้อยที่สุดของ S^2 เท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1215}{4}$ 2. $\frac{1377}{4}$ 3. $\frac{833}{4}$ 4. $\frac{735}{4}$

64. จากอาจารย์ 4 คน นักเรียนชาย 5 คน นักเรียนหญิง 2 คน ต้องการเลือกตัวแทน 4 คน

จำนวนวิธีที่จะได้ตัวแทนครบทุกประเภทเท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. 40 2. 80 3. 160 4. 275

65. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ ทุกจำนวนนับ n

ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ถ้า $a_n = 2^{n-1}$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว $s_n = 2^n - 1$ ทุกจำนวนนับ n
2. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ หาค่าได้แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
3. ถ้า $a_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{2}{3}$
4. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

66. ในการกระจาย $(xy - 2y^{-3})^8$ พจน์ที่มีผลบวกของกำลังของ x กับกำลังของ y เท่ากับ -4

มีสัมประสิทธิ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -488 2. 1120 3. 70 4. 56

67. ข้อสอบปรนัยวิชาหนึ่งมี 6 ข้อ ข้อที่ 1 และข้อที่ 2 มีคะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน ข้ออื่นๆ มีคะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน หากนักเรียนตอบข้อใดถูกต้อง จะได้คะแนนเต็มของข้อนั้นหากตอบผิดจะได้คะแนน 0 จำนวนวิธีที่นักเรียนจะทำคะแนนวิชานี้ได้ 60 เปอร์เซ็นต์เท่ากับข้อใด

1. 6 2. 7 3. 8 4. 9

68. กำหนดให้ $y = f(x)$ ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงของ y เทียบกับ x เท่ากับ $Kx^3 - 10x + 6$ เมื่อ x มีค่าใดๆ และ K เป็นค่าคงตัวและ $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 6   2. -9 3. 10   4. -13

69. ให้ R คือเซตของจำนวนจริง และ $f : R \rightarrow R$ กำหนดโดย $f(x) = \det\begin{bmatrix} x & -1 \\ -x & 1-x \end{bmatrix}$ ค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $(f \circ f) - f$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 0   2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

70. ถ้าเส้นโค้งหนึ่งซึ่งมีสมการเป็น $y = f(x)$ มีอัตราการเปลี่ยนแปลงของความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ เท่ากับ 2 และความชันของเส้นโค้งนี้ที่จุด $(1 , 4)$ มีค่าเท่ากับ 4 แล้วข้อใดต่อไปนี้ผิด

   1. กราฟของ f ผ่านจุด $(0 , 0)$
   2. ที่จุด $(-1 , 0)$ เส้นสัมผัสโค้งนี้มีความชันเป็น 0
   3. f มีค่าเพิ่มขึ้นในช่วง $(1 , \infty)$
   4. f มีค่าลดลงในช่วง $(-\infty , -1)$

71. พิจารณาข้อความ
   1. $3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4^2 + \ldots + 3 \cdot 4^{19} = 4^{20} - 1$
   2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + 19 \cdot 20 = 2660$

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. 1 และ 2 ถูก   2. 1 และ 2 ผิด   3. 1 ถูก แต่ 2 ผิด   4. 1 ผิด แต่ 2 ถูก

72. เราทราบว่า $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

   ดังนั้นอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} [\frac{5}{2^n} - \frac{3}{n(n+1)}]$ มีผลบวกเท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

   1. 0   2. 2   3. 4   4. 5

73. กำหนดให้ A คือ เมตริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ถ้า $a_n = \det(\frac{1}{2}A)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

   1. เป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์
   2. มีผลบวกเป็น 0
   3. มีผลบวกเป็น 1
   4. มีผลบวกเป็น 2

74. บริษัทแห่งหนึ่งเปิดรับพนักงานใหม่เข้าทำงานใน 4 แผนก แผนกละ 4 คน โดยให้แต่ละแผนกมีพนักงานใหม่เป็นชาย 2 คน หญิง 2 คน มีผู้สมัครเป็นชาย 10 คน หญิง 9 คน จะมีจำนวนวิธีคัดเลือกพนักงานเข้าทำงานในแผนกต่างๆ ทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{10!\,9!}{(8!)^2}$ 2. $\frac{10!\,9!}{2^4}$ 3. $\frac{10!\,9!}{2^9}$ 4. $\frac{10!\,9!}{(4!)^2}$

75. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก นอกนั้นเป็นสีเหลือง สุ่มหยิบลูกแก้วมา 2 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วต่างสีกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{54}{78}$ 2. $\frac{26}{78}$ 3. $\frac{24}{78}$ 4. $\frac{13}{78}$

76. ถ้า $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ ทุกจำนวนจริง x ซึ่งทำให้อนุกรมคอนเวอร์จ และ $g(x) = 1 - x^2$ ทุกจำนวนจริง x แล้ว ข้อใดต่อไปนี้จริง เมื่อ D เป็นโดเมนของ $f \cdot g$

1. $D = (-\infty, \infty)$ และ $(g \cdot f)(x) = 1 + x$ ทุก $x \in D$
2. $D = (-1, 1)$ และ $(g \cdot f)(x) = 1 + x$ ทุก $x \in D$
3. $D = (-\infty, \infty)$ และ $(g \cdot f)(x) = 1 - x$ ทุก $x \in D$
4. $D = (-1, 1)$ และ $(g \cdot f)(x) = 1 - x$ ทุก $x \in D$

77. ผลบวก 10 พจน์แรกอนุกรมเลขคณิตอนุกรมหนึ่งเท่ากับ 430 ถ้าพจน์ที่ 10 ของอนุกรมนี้คือ 79 แล้ว ผลบวก 3 พจน์แรกมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 44 2. 45 3. 46 4. 47

78. ถ้าเส้นโค้ง $y = x^2 + ax + b$ และ $y = cx - x^2$ สัมผัสกันที่จุด (1, 0) แล้ว ค่าของ b คือข้อใด

1. 4 2. 3 3. 2 4. 1

79. สำหรับจำนวนเต็มบวก n > 1 ใดๆ ให้ a_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^{n+2} ในการกระจาย $(1 + 2x)^{2n}$ และ b_n เป็นสัมประสิทธิ์ของ x^n ในการกระจาย $(2 + 3x)^{2n}$ ลำดับ $3^n \cdot \frac{a_n}{b_n}$ เป็นจริงตามข้อใด

1. มีลิมิตเป็น 0 2. มีลิมิตเป็น $\frac{4}{3}$ 3. มีลิมิตเป็น 4 4. เป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

80. นาย ก. ข และ ค จะขึ้นลิฟท์ซึ่งมีทั้งหมด 3 ตัว จำนวนวิธีที่นาย ก และ ข ขึ้นด้วยกัน แต่นาย ค ขึ้นคนเดียวมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 7 3. 8 4. 9

81. ตู้ใบหนึ่งมีเสื้อสีแดงแบบต่างๆ กัน 6 ตัว และเสื้อสีขาวแบบต่างๆ กัน 4 ตัว ถ้าสุ่มหยิบเสื้อจากตู้ใบนี้มา 5 ตัว ให้มีสีคละกันแล้ว จำนวนวิธีที่จะหยิบได้เสื้อสีแดงมากกว่าเสื้อสีขาวคือข้อใด

1. 60 วิธี 2. 120 วิธี 3. 180 วิธี 4. 240 วิธี

82. เลือกจำนวนเต็มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัวมาหนึ่งจำนวนให้มีค่าอยู่ระหว่าง 10 ถึง 200 ความน่าจะเป็นที่จำนวนที่เลือกมานี้จะหารด้วย 7 ลงตัวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{7}$ 2. $\frac{2}{7}$ 3. $\frac{3}{7}$ 4. $\frac{4}{7}$

83. กำหนดให้เซต A มีสมาชิก 4 ตัว และเซต B มีสมาชิก 5 ตัว ถ้าสร้างฟังก์ชันจาก A ไป B แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้ฟังก์ชัน 1 – 1 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{24}{625}$ 2. $\frac{120}{625}$ 3. $\frac{24}{196}$ 4. $\frac{120}{196}$

84. กล่องใบหนึ่งบรรจุปากกา 1 โหล เป็นปากกาสีแดง 3 ด้าม สีเขียว 4 ด้าม ที่เหลือเป็นสีน้ำเงิน ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบปากกามา 3 ด้าม แล้วได้ครบทุกสีมีค่าเท่ากับในข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{60}$ 2. $\frac{1}{22}$ 3. $\frac{3}{11}$ 4. $\frac{3}{12}$

85. กำหนดให้ ℓ เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชัน 2 และสัมผัสโค้ง $y = x^2 + 2$ ถ้า (a, b) เป็นจุดบนเส้นตรง ℓ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{5}$ 2. $\frac{1}{5}$ 3. $-\frac{2}{5}$ 4. $\frac{2}{5}$

86. ให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง และ $f : R \to R$ นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} 2^{-x} & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$ อนุกรมในข้อใดต่อไปนี้หาผลบวกได้

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(f \circ f)(-1)$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}(f+f)(n)$ 3. $\sum_{n=1}^{\infty}(f \cdot f)(-n)$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{f})(n)$

87. ถ้า $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันที่ซึ่ง $f''(x) = 3 + 2x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และมีค่าสูงสุดของ f เท่ากับ 3 ที่จุด $x = -1$ แล้ว $f(1)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{23}{3}$ 2. $\frac{23}{6}$ 3. 0 4. -3

88. บริษัทแห่งหนึ่งขายสินค้าได้ 100 ชิ้น ได้กำไร 6,800 บาท โดยมีอัตราการเปลี่ยนแปลงของกำไรเทียบกับจำนวนสินค้าที่ขายได้ของบริษัทคือ $78 - 0.08x$ เมื่อ x คือจำนวนสินค้าที่ขายได้ ในการผลิตสินค้านี้ บริษัทจะมีโอกาสทำกำไรได้มากที่สุดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 17,421 บาท 2. 27,522 บาท 3. 37,425 บาท 4. 47,427 บาท

89. ในการสร้างสามเหลี่ยมฐานโค้งซึ่งเป็นเซกเตอร์ของวงกลมให้มีความยาวของเส้นรอบรูปเท่ากับ 20 เซนติเมตร จะมีพื้นที่มากที่สุดได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 cm^2 2. 20 cm^2 3. 25 cm^2 4. 30 cm^2

90. จะจัดพนักงาน 6 คน เป็น 3 กลุ่ม แบ่งกันไปทำงาน 3 งาน ซึ่งแตกต่างกัน โดยจัดกลุ่มละกี่คนก็ได้ จำนวนวิธีที่จะจัดได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 270 2. 540 3. 810 4. 1080

91. มีลูกแก้ว 7 ลูก ซึ่งมีสีต่างกันทั้งหมด โดยมีสีแดง สีขาว สีน้ำเงิน และสีอื่นๆ จำนวนวิธีที่จะวางเรียงลูกแก้วเป็นวงกลม โดยให้ลูกแก้วสีแดงและสีขาวอยู่เรียงติดต่อกัน แต่ลูกแก้วสีแดงไม่ติดกับลูกแก้วสีน้ำเงิน มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 96 2. 192 3. 216 4. 240

92. ในการเลือกจำนวนเต็มหนึ่งจำนวนจากจำนวนเต็มตั้งแต่ 10 ถึง 59 จะได้ความน่าจะเป็นที่เลขจำนวนนั้นหารด้วย 7 ลงตัว หรือเป็นเลขคี่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.36 2. 0.50 3. 0.58 4. 0.64

93. คนกลุ่มหนึ่งเป็นชาย 6 คน และหญิง 4 คน ในกลุ่มนี้มีผู้ถนัดซ้าย 7 คน ซึ่งเป็นชาย 5 คน ถ้าสุ่มเลือกคนมา 3 คน จากกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่ได้ชายที่ถนัดซ้ายมากกว่าหญิงที่ถนัดซ้ายเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{24}$ 2. $\frac{6}{24}$ 3. $\frac{12}{24}$ 4. $\frac{15}{24}$

94. ในการลากเส้นเชื่อมจุดยอด 2 จุดใดๆ ของรูปสิบเหลี่ยมด้านเท่าที่แนบในวงกลม โดยที่เส้นนั้นๆ ไม่ใช่ด้านของรูปสิบเหลี่ยมดังกล่าว ความน่าจะเป็นที่เส้นเชื่อมนั้นไม่ใช่เส้นรอบรูปและไม่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{6}{7}$ 2. $\frac{8}{9}$ 3. $\frac{13}{14}$ 4. $\frac{17}{18}$

95. กำหนดให้ $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = 0 เมื่อ x = 0 2. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ = 0 เมื่อ x = 0

3. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $-\frac{9}{8}$ เมื่อ $x = -\frac{1}{8}$

4. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่ากับ $-\frac{9}{8}$ เมื่อ $x = -\frac{1}{8}$

96. ในการกระจาย $(1+x)^{43}$ ถ้าสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $(2r+1)$ เท่ากับสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ $(r+2)$ และ $r > 1$ แล้วสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 3r มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 43 2. 86 3. 903 4. 1806

97. กำหนดให้ $f_1(x) = \sqrt{x}$ และ $f_n(x) = (f_1 \circ f_{n-1})(x)$, $n \geq 2$

ถ้า $a_n = f_1(2)\, f_2(2)\, f_3(2) \ldots f_n(2)$ และ $b_n = \ln a_n$ แล้ว ลำดับ b_n มีลิมิตเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(\ln 2)^2$ 2. $\ln 2$

3. $\frac{1}{2} \ln 2$ 4. หาไม่ได้เพราะลำดับนี้เป็นลำดับไดเวอร์เจนท์

98. สลาก 20 ใบ มีหน่วยเลขกำกับตั้งแต่ 1 ถึง 20 สลากหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 มีรางวัล 1,000 , 500, 300 และ 200 บาท ตามลำดับ ชายผู้หนึ่งหยิบสลาก 2 ใบ แบบสุ่มจากสลากทั้งหมดความน่าจะเป็นที่เขาจะได้รางวัลรวมกัน 500 บาท พอดี มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{190}$ 2. $\frac{16}{190}$ 3. $\frac{2}{190}$ 4. $\frac{1}{190}$

99. นักเรียน 4 ห้อง ส่งผู้แทนไปคัดเลือกเป็นกรรมการห้องละ 2 คน เป็นชาย 1 คน หญิง 1 คน ความน่าจะเป็นที่จะคัดเลือกกรรมการ 4 คน จากผู้แทนทั้ง 8 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน โดยที่ชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากห้องเดียวกัน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{12}{35}$ 2. $\frac{15}{35}$ 3. $\frac{18}{35}$ 4. $\frac{32}{35}$

100. ตารางแสดงความสัมพันธ์ของสุขภาพผู้สูบบุหรี่ทั้งหมด 300 คน เป็นดังนี้

สุขภาพของผู้สูบ	จำนวนมวนบุหรี่ที่สูบใน 1 วัน			
บุหรี่	0 – 4	5 – 20	มากกว่า 20	รวม
เป็นมะเร็ง	8	7	25	40
ไม่เป็นมะเร็ง	150	70	40	260

จงใช้ตารางข้างต้นตอบคำถามต่อไปนี้

ผู้สูบบุหรี่มากกว่า 20 มวนใน 1 วันมีความน่าจะเป็นที่จะไม่เป็นมะเร็งมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8}{13}$ 2. $\frac{2}{13}$ 3. $\frac{2}{15}$ 4. $\frac{13}{15}$

101. มีหลอดไฟลักษณะแตกต่างกัน 6 หลอด เป็นหลอดไฟสีแดง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด นำหลอดไฟทั้งหมดมาจัดเรียงประดับเป็นวงกลม ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่เรียงติดต่อกันเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$ 2. $\frac{1}{20}$ 3. $\frac{1}{30}$ 4. $\frac{1}{60}$

102. ยิงปืนขึ้นไปในแนวดิ่งจากพื้นราบ ได้สมการของการเคลื่อนที่ของลูกปืนเป็น $x = 128t - 16t^2$, $t \geq 0$ โดยที่ t แทนเวลามีหน่วยเป็นวินาที และ s แทนความสูงของลูกปืนเมื่อเวลาผ่านไป t วินาที และมีหน่วยเป็นเมตรข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ลูกปืนอยู่สูงจากพื้นราบเป็นระยะ 156 เมตร เมื่อ t = 1.5 วินาที เพียงเวลาเดียวเท่านั้น
2. ระยะที่ลูกปืนขึ้นไปได้สูงสุดคือ 256 เมตร
3. เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที ลูกปืนจะอยู่ที่พื้นราบ
4. เมื่อเวลาผ่านไป 6 วินาที ลูกปืนจะเดินทางไปได้เป็นระยะทางทั้งหมด 192 เมตร

103. ลำดับในข้อใดเป็นลำดับไดเวอร์เจนต์

1. $a_n = \sin^2\frac{1}{n} + \cos^2\frac{1}{n}$ 2. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \ldots$

3. $a_n = (-1)^{n+1}(\frac{n-1}{n})$ 4. $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

104. อนุกรมเรขาคณิตอนุกรมหนึ่ง มีพจน์ที่สอง เท่ากับ 4 และมีผลบวกของอนุกรมเท่ากับ 16 ผลบวก 3 พจน์แรกของอนุกรมนี้เท่ากับค่าในข้อใด

1. ผลต่างร่วมของอนุกรมเลขาคณิต $1 + 17 + 33 + 49 + 65 + \ldots$

2. $\sum_{k=1}^{5}(k-1)$ 3. $\sum_{k=1}^{4}(k^2-4)$

4. ผลบวกของอนุกรม $4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$

105. บ่อปลาแห่งหนึ่งเป็นวงกลม อนุญาตให้เข้าตกปลาได้ทีละ 6 คน โดยให้นั่งอยู่รอบบ่อ ถ้าครอบครัวหนึ่งมากัน 8 คน จะจัดคนในครอบครัวนี้นั่งรอบบ่อตกปลาได้ทั้งหมดกี่วิธี

1. 120 วิธี 2. 840 วิธี 3. 1680 วิธี 4. 3360 วิธี

106. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลอยู่ 13 สี สีละ 4 ลูก โดยที่ลูกบอลในแต่ละสี มีหลายเลข 1 , 2 , 3 , 4 ตามลำดับ สุ่มหยิบลูกบอลมา 3 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลมีสีเหมือนกัน 2 ลูกเท่านั้น

1. $\frac{72}{425}$ 2. $\frac{72}{850}$ 3. $\frac{36}{425}$ 4. $\frac{36}{850}$

107. ความชันของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ จุดใดๆ เท่ากับ $3x^2 - 2x$ ถ้าเส้นโค้งนี้ผ่านจุด (0, 2) แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. ข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้เพียงพอที่จะหาสมการของเส้นโค้งได้

2. ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = 2$

3. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ น้อยกว่า 0

4. ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ น้อยกว่าค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$

108. การผลิตสินค้าชนิดหนึ่งของบริษัทแห่งหนึ่งเสียค่าใช้จ่ายหน่วยละ $0.2x + 4 + \frac{400}{x}$ บาท รัฐบาลเก็บภาษีอีกหน่วยละ 22 บาท บริษัทขายหน่วยละ $400 - 2x$ บาท โดยที่ x หมายถึง จำนวนหน่วยที่ผลิตต่อเดือน ถ้าจะให้ได้กำไรต่อเดือนมากที่สุด บริษัทจะต้องผลิตสินค้านี้เป็นจำนวน

1. 85 หน่วย/เดือน 2. 90 หน่วย/เดือน 3. 95 หน่วย/เดือน 4. 100 หน่วย/เดือน

109. กำหนดให้ $v(t) = t^2 - 4t + 10$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุ ณ เวลา t และมีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที ขณะที่ $t = 0$ วัตถุเคลื่อนที่ได้ระยะทาง $\frac{4}{3}$ เมตร เมื่อความเร่งของวัตถุเท่ากับ 0 เมตร/วินาที^{2} ความเร็วและระยะทางมีค่าเท่ากับ

1. 6 เมตร/วินาที, 16 เมตร 2. 6 เมตร/วินาที, 8 เมตร
3. 16 เมตร/วินาที, 6 เมตร 4. 6 เมตร/วินาที, $\frac{44}{3}$ เมตร

110. ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ถ้า $f'(x) = 3\sqrt{x}$ และ $f(1) = 0$ แล้ว $f(0) = -2$
2. ถ้า $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + 1$ แล้ว $f'(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}$
3. ถ้า $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{2}$ แล้ว อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เทียบกับ x ในช่วง $x = a$ ถึง $x = a + h$ เท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}$
4. ถ้า $f(x) = 1 - x^2$ แล้ว $f'(x) \geq 0$ เมื่อ $x \geq 0$ และ $f'(x) < 0$ เมื่อ $x < 0$

111. สมการของเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = x^3 - x + 1$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $2x + 4y - 5 = 0$ คือสมการในข้อใด

1. $2x - y + 1 = 0, 2x - y - 3 = 0$ 2. $4x - 2y - 1 = 0, 4x - 2y + 3 = 0$
3. $2x - y - 1 = 0, 2x - y - 3 = 0$ 4. $2x - y - 1 = 0, 2x - y + 3 = 0$

112. กำหนดให้ A เป็นอนุกรม $1 + m + m^2 + m^3 + \ldots$ และ B เป็นอนุกรม $1 + m^2 + m^4 + m^6 + \ldots$ ถ้าอนุกรม A และ B ต่างก็เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ทั้งคู่ และผลบวกของอนุกรม A เป็นสองเท่าของผลบวกของอนุกรม B แล้ว m จะมีค่าเท่ากับ

1. -1 2. $-1 < m < 1$ 3. 1 4. m หาค่าไม่ได้

113. กำหนด $a \in R^+ - \{1\}$, $\log_a a^2 + \log_{\sqrt{a}} a^2 + \log_{\sqrt[3]{a}} a^2 + \log_{\sqrt[4]{a}} a^2 + \ldots + \log_{\sqrt[n]{a}} a^2 = 2550$ ค่าของ $\frac{2+4+6+\ldots+2n}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{50}{49}$ 2. $\frac{51}{50}$ 3. $\frac{52}{51}$ 4. $\frac{53}{52}$

114. กำหนดให้ $F'(x) = f(x) = (1 - x)^2$ แล้ว $F(x)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{x^3}{3} - x^2 + x + c$ 2. $-2(1 - x) + c$ 3. $2x^2 - 2x + c$ 4. $\frac{(1-x)^3}{3} + c$

115. กำหนดให้กราฟของ $y = x^4 + ax^3 + bx^2$ มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X ที่จุด $x = -2, 0, 1$ แล้ว $a - b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{8}{3}$ 2. $\frac{8}{3}$ 3. $-\frac{16}{3}$ 4. $\frac{16}{3}$

116. ถ้าเขียนพจน์ทุกพจน์ของการกระจาย $(a + b)^{10}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a \neq b$ ลงบนสลากขนาดเท่ากันสลากละหนึ่งพจน์ ใส่สลากทั้งหมดนี้ลงในกล่อง แล้วหยิบสลากออกมา 1 ใบโดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้สลากมีพจน์ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ทวินามเป็น 252 เท่ากับ

1. 0 2. $\frac{1}{11}$ 3. $\frac{1}{10}$ 4. $\frac{2}{11}$

117. ในการสัมภาษณ์ผู้สมัครเข้าทำงานของสำนักงานแห่งหนึ่ง มีผู้สมัครเป็นชาย 5 คน เป็นหญิง 5 คน ถ้าผู้สัมภาษณ์ตัดสินใจเรียกผู้สมัครมาสัมภาษณ์เพียง 5 คน โดยเลือกชาย 3 คน และ หญิง 2 คน จากผู้สมัครทั้งหมดโดยการสุ่มดังนั้นการจัดลำดับเข้าสอบสัมภาษณ์ทีละคนโดยให้ผู้สมัครที่เป็นชายเข้าสอบติดต่อกัน จะมีจำนวนวิธีเท่ากับ

1. 100 วิธี 2. 200 วิธี 3. 1,200 วิธี 4. 3,600 วิธี

118. ให้ u และ v เป็นฟังก์ชันของ x โดยที่ $v(x) = x^2 - 2x$ ถ้า $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ และ $u(3) = -9$ $u'(3) = 3$ แล้วค่าของ $f'(3)$ เท่ากับเท่าใด

1. -5 2. 5 3. -3 4. 3

119. ในการจัดประชุมครั้งหนึ่งมีผู้แทนจาก 3 ประเทศเข้าร่วมประชุม โดยมีผู้แทนประเทศละ 3 คน จำนวนวิธีทั้งหมดที่จะจัดให้ผู้แทนแต่ละประเทศต้องนั่งติดกันในการประชุมรอบโต๊ะกลมเท่ากับเท่าใด

1. 108 2. 216 3. 432 4. 864

120. ให้ a เป็นจำนวนจริง กำหนดพจน์ที่ n ของอนุกรมคือ $\frac{1+(n-2)\sqrt{a}}{1-a}$ ถ้าพจน์ที่ m คือ $\frac{1+38\sqrt{a}}{1-a}$ แล้วผลบวก m พจน์แรกของอนุกรมนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{40+740\sqrt{a}}{1-a}$ 2. $\frac{40+790\sqrt{a}}{1-a}$ 3. $\frac{40+720\sqrt{a}}{1-a}$ 4. $\frac{40+760\sqrt{a}}{1-a}$

121. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{4 - x^2}$ เมื่อ $x \neq \pm 2$ และ $f(2) = a$, $f(-2) = b$ แล้ว a และ b เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้

1. $a = 1, b = -3$ 2. $a = 1, b = 3$ 3. $a = -1, b = -3$ 4. $a = -1, b = 3$

122. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟผ่านจุด (0,2) และ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ แล้วค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 6 4. 8

123. ให้ A = {1,2,3} และ B = {3,4} ถ้า $S = \{f \mid f : A \cup B \rightarrow A \times B \mid f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง$\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120 2. 240 3. 360 4. 480

124. ในจำนวนเด็ก 12 คน มีคนถนัดซ้าย 4 คน ถ้าเลือกเด็ก 5 คน โดยสุ่มจากเด็กเหล่านี้ แล้วความน่าจะเป็นที่จะมีเด็กถนัดซ้ายอยู่ในกลุ่มที่เลือกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{35}{99}$ 2. $\frac{47}{99}$ 3. $\frac{63}{99}$ 4. $\frac{92}{99}$

125. พิจารณาข้อมูลของ x และ y ดังนี้

x	−2	−1	0	1	2
y	4	7	12	15	22

ให้ x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นกราฟเส้นตรง ถ้า x = 10 จะประมาณค่า y ได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 26 2. 36 3. 46 4. 56

126. ให้ $F(x) = f(g(x))$ ถ้า $g(x) = x^3 + 2x + 2$ และ $\int F(x)dx = 5x^3 + 2x + c$ แล้ว ค่าของ $f'(5)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6 2. 5 3. 4 4. 3

127. กล่องใบหนึ่งบรรจุขนม 24 ชิ้น แต่ละชิ้นมี 4 ชั้นๆ ละสี ซึ่งมีสีเขียว ขาว แดง เหลือง การเรียงลำดับสีของแต่ละชิ้นทั้ง 24 ชิ้นแตกต่างกันหมด ถ้าหยิบขนม 1 ชิ้นออกจากกล่องนี้โดยสุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ชิ้นที่หยิบได้มีสองชั้นบนไม่ใช่สีแดงและไม่ใช่สีเหลืองเท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{24}$ 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{6}$ 4. $\frac{1}{4}$

128. ในการจัดหญิง 8 คน เข้าพักในเรือนรับรองหลังหนึ่งซึ่งมี 4 ห้องที่แตกต่างกัน ถ้ามี 1 ห้อง ที่อยู่ได้ 3 คน มี 2 ห้อง ที่อยู่ได้ห้องละ 2 คน และมี 1 ห้อง ที่อยู่ได้ 1 คน ถ้าอ้อยและอ่อนเป็นหญิงสองคนในจำนวน 8 คนนี้แล้วความน่าจะเป็นที่อ้อยและอ่อนได้อยู่ห้องเดียวกันเท่ากับ

1. $\frac{1}{28}$ 2. $\frac{1}{14}$ 3. $\frac{5}{28}$ 4. $\frac{9}{28}$

129. ดัชนีราคาเนื้อไก่สดในปี พ.ศ. 2541 คาดว่าสูงกว่าปี พ.ศ. 2520 อยู่ 20 เปอร์เซ็นต์ ผู้ประกอบอาหารสำเร็จรูป กำหนดวิธีตั้งราคาขายให้เป็น 2 เท่าของราคาเนื้อไก่สด ถ้าราคาเนื้อไก่สดในปี พ.ศ. 2540 เท่ากับ 40 บาทต่อกิโลกรัม ผู้ประกอบอาหารสำเร็จรูป จะตั้งราคาเนื้อไก่ปรุงแล้วสำหรับปี พ.ศ. 2541 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 70 บาทต่อกิโลกรัม　　2. 80 บาทต่อกิโลกรัม
3. 96 บาทต่อกิโลกรัม　　4. 100 บาทต่อกิโลกรัม

130. กำหนดให้ $k(x) = 3x^2 - 1 + f(x)$ ถ้า $f'(2) = -1$ แล้ว $k'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10　　2. 11　　3. 12　　4. 13

131. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{เมื่อ } x \le 0 \text{ หรือ } x > 2 \\ 2 & \text{เมื่อ } 0 < x \le 2 \end{cases}$

f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x เมื่อ x สอดคล้องข้อใดต่อไปนี้

1. $x < 0$　　2. $x = 0$　　3. $0 < x < 2$　　4. $x = 2$

132. อักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัว แตกต่างกัน ประกอบด้วยพยัญชนะ 2 ตัว และสระ 3 ตัว นำมาจัดเรียงโดยไม่ให้พยัญชนะอยู่ติดกัน และสระอยู่ติดกันจำนวนวิธีการจัดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8　　2. 10　　3. 11　　4. 12

133. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = x + \frac{2}{x}$ ที่จุด (1, 3) คือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = -x + 4$　　2. $y = x + 2$　　3. $y = 2x + 1$　　4. $y = 5 - 2x$

134. กำหนดให้ A เป็นเหตุการณ์ในแซมเปิลสเปซ S

ถ้า $2P(A) = 3P(A')$ แล้ว P(A) มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.3　　2. 0.4　　3. 0.5　　4. 0.6

135. ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x) = 3x^2 - 6x + 3$

ถ้า $F(0) = -1$ และ F มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ในช่วง [0, 2] ที่จุด $x = c$ แล้ว F(c) มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. −1　　2. 0　　3. 1　　4. 2

136. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1.5 & , x < 0 \\ 1.6 & , x = 2 \\ 2x + 2.25 & , x > 0 \end{cases}$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$

1. 2.25　　2. −1.5　　3. 1.6　　4. −2.25

137. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน 1 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองลูกจะเป็นเลขที่หารด้วย 4 ไม่ลงตัว มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $\frac{4}{5}$

138. ถ้าให้สมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ที่ใช้สำหรับการประมาณจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริง (แทนด้วย y) จากจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้า (แทนด้วย x) คือ $y = a + 0.75x$ โดยที่ $\bar{x} = 40$ และ $\bar{y} = 60$ ถ้า $x = 60$ จำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริงโดยประมาณเท่ากับเท่าใด

1. 72 2. 75 3. 80 4. 82

139. กำหนดให้ $f(x) = ax^3 + x^2 + x + b$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง และ $f(1) = 3,\ f'(1) = 0$ ถ้า $g(x) = f''(x)$ แล้ว $(gof)(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -16 2. -4 3. 4 4. 16

140. ถ้าลำดับเลขคณิต $a_1, a_2, a_3, \ldots$ มีพจน์ที่ 10 และพจน์ที่ 15 เป็น -19 และ -34 ตามลำดับ แล้ว $\sum_{i=1}^{20}(a_i + 2i)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -30 2. -15 3. 10 4. 20

141. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + cx^2 - 9x$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง ถ้าค่าวิกฤตค่าหนึ่งของ f คือ 1 แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดในเซตใดต่อไปนี้

1. $(-3, 1)$ 2. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
3. $(-1, 4)$ 4. $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

142. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ครั้งหนึ่ง มีนักเรียนเข้าสอบ จำนวน 20 คนผลการสอบดังตาราง

คะแนน	ความถี่
5 – 10	3
11 – 15	13
16 – 20	4

ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะได้คะแนนไม่ต่ำกว่า 16 คะแนน คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{13}$

143. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ และ $g(x) = (x+1)f(x)$ ถ้า $\int g(x)dx = x^2 - x + c$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{4}$ 2. $\frac{5}{4}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. $\frac{5}{2}$

144. ในโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีนักกีฬาฟุตบอลและนักกีฬาบาเกสบอลรวมกัน 30 คน เป็นนักกีฬาฟุตบอล 17 คน และนักกีฬาบาสเกตบอล 18 คน ถ้าจะเลือกประธานกีฬาของโรงเรียน 1 คน และรองประธานกีฬา 1 คน จากนักกีฬากลุ่มนี้ โดยที่ประธานต้องเป็นทั้งนักกีฬาฟุตบอลและนักกีฬาบาสเกตบอล แล้วจำนวนวิธีการเลือกดังกล่าวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 125 2. 130 3. 145 4. 150

145. ถ้าต้องการเขียนจำนวนที่มี 7 หลัก โดยใช้ตัวเลขโดด 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 และให้มี เลขโดด 3, 4, 5, อยู่ติดกันตรงกลางระหว่างกลุ่มเลขโดดคู่และกลุ่มเลขโดดที่โดยแต่ละจำนวนไม่มีเลขซ้ำ แล้วจะเขียนได้ทั้งหมดเป็นกี่จำนวน

1. 8 2. 16 3. 24 4. 48

146. ถ้า $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x > 1 \\ x-1 & ; \quad 0 < x \le 1 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases}$ แล้ว $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x^2) + \lim\limits_{x \to 1^+} \left[\frac{f(x-1)}{x+2} \right]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{4}{3}$ 2. -1 3. 0 4. $\frac{1}{3}$

147. กล่องใบหนึ่งมีลูกหินสีขาว 5 ลูก สีเขียว 3 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก ถ้าหยิบลูกหินอย่างสุ่ม ครั้งละ 1 ลูก โดยไม่ใส่คืน 3 ครั้ง แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกหินสีเดียวกันอย่างน้อย 2 ลูก มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{24}$ 2. $\frac{23}{24}$ 3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{3}{4}$

148. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \ge 0 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$

ข. $g(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ก. ถูก , ข. ถูก 2. ก. ถูก , ข. ผิด 3. ก. ผิด , ข. ถูก 4. ก. ผิด , ข. ผิด

149. $\lim\limits_{h \to 2} \frac{2+h-h^2}{2-h}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3 2. 2 3. 0 4. -1

150. จากพยัญชนะในคำ "กรุงเทพมหานคร" เลือกมาจัดลำดับคราวละ 5 ตัว ให้ E คือเหตุการณ์ที่พยัญชนะ 5 ตัว ที่เรียงลำดับมี 2 ตัว เหมือนกัน P(E) เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{9}$ 3. $\frac{4}{13}$ 4. $\frac{1}{28}$

151. ในงานเลี้ยงสังสรรค์รุ่นของคนกลุ่มหนึ่ง คนกลุ่มนี้มีบางคนรับประทานอาหารเจ เมื่อเลือกสั่งอาหาร ผู้รับประทานอาหารเจจะสั่งอาหารเจ 1 ชุด และผู้ที่ไม่รับประทานอาหารเจจะไม่สั่งอาหารเจ แต่จะสั่งสเต็กคนละหนึ่งชุดทุกคน ซึ่งอาจเป็นสเต็กหมูหรือสเต็กเนื้อ มีคนอยู่ 29 คน ที่ไม่เลือกสเต็กเนื้อ และมีคนอยู่ 35 คน ที่ไม่เลือกสเต็กหมู ถ้าจำนวนคนที่ต้องการสเต็กมีทั้งหมด 40 คน เมื่อเลือกผู้มาสังสรรค์งานนี้หนึ่งคนอย่างสุ่มขึ้นมากล่าวปราศรัย ความน่าจะเป็นที่ผู้ถูกเลือกคนนี้เป็นผู้รับประทานอาหารเจ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{13}$ 2. $\frac{3}{13}$ 3. $\frac{2}{5}$ 4. $\frac{3}{5}$

152. นายทักษิณมีบุตร 6 คน เขาเลือกโรงเรียน 3 โรงเรียน เพื่อส่งบุตรเข้าเรียน โดยทุกโรงเรียนดังกล่าวต้องมีบุตรของเขาเข้าเรียนอย่างน้อย 1 คน ถ้าบุตรคนโตและบุตรคนสุดท้องจะต้องเรียนโรงเรียนเดียวกันแล้ว จำนวนวิธีทั้งหมดในการเลือกโรงเรียนเพื่อส่งบุตรเข้าเรียนของนายทักษิณ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 729 2. 243 3. 150 4. 50

153. ถ้ากราฟของสมการเส้นตรง $y = f(x)$ ผ่านจุด (0, 0) , (4, 6) แล้ว $\int_0^4 f(x)dx$ เท่ากับเท่าใด

1. 12 2. 14 3. 16 4. 18

154. กำหนด $F(x) = \int \frac{(4x-1)(x+1)}{x^2}dx$ เซตคำตอบของ $F'(x) < 0$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \mid x < -1\}$ 2. $\{x \mid x > \frac{1}{4}\}$

3. $\{x \mid -1 < x < \frac{1}{4}\}$ 4. $\{x \mid -1 < x < 0$ หรือ $0 < x < \frac{1}{4}\}$

155. กำหนด $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ และ $\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$ และเส้นโค้ง C มีสมการเป็น $y = \sin^2 x + \frac{1}{2}$ เส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด $(\frac{\pi}{4}, 1)$ คือสมการในข้อใด

1. $x - y + 1 - \frac{\pi}{4} = 0$ 2. $x - 2y + 2 - \frac{\pi}{2} = 0$

3 $2x - y + 2 - \frac{\pi}{4} = 0$ 4. $\sqrt{2}\,x - y + 1 - \frac{\sqrt{2}\pi}{4} = 0$

156. ค่าของ $\lim\limits_{x \to -2} \frac{|3x+2|-4}{2-|x|}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. -3 3. -4 4. 3

157. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-3x-4} \ ; & 0 \le x < 4 \\ -kx & ; x \ge 4 \end{cases}$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ $x = 4$ แล้วค่าของ k เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$ 2. $-\frac{1}{4}$ 3. $\frac{1}{16}$ 4. $-\frac{1}{16}$

158. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน 5 ลูก 1 ครั้ง จะมีกี่วิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นเพียงสองหน้าโดยที่ 2 ลูก ขึ้นหน้าหนึ่ง และอีก 3 ลูก ขึ้นอีกหน้าหนึ่ง

1. 10 วิธี 2. 15 วิธี 3. 150 วิธี 4. 300 วิธี

159. ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีเขียว 6 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงใบนี้ครั้งละ 1 ลูก 4 ครั้ง โดยใส่ลูกแก้วคืนถุงก่อนหยิบครั้งต่อไปทุกครั้ง จงหาความน่าเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีเขียวเพียงครั้งเดียว

1. 0.0384 2. 0.0864 3. 0.1536 4. 0.3456

160. จำนวนเต็มคู่ 9 หลัก ที่ประกอบด้วยเลข 1, 2, 3, ..., 9 ซึ่งไม่มีตัวเลขในหลักใดซ้ำกันและหลักที่เป็นจำนวนเฉพาะไม่อยู่ติดกัน มีทั้งหมดกี่ตัว

1. 720 2. 1728 3. 2448 4. 4896

161. ในการส่งผลไม้ชนิดหนึ่งเป็นสินค้าออก บรรจุในลัง มีการควบคุมคุณภาพของสินค้าโดยสุ่มหยิบ 3 ผลพร้อมกันจากแต่ละลังขึ้นมาตรวจ ถ้าทั้ง 3 ผลอยู่ในเกณฑ์มาตรฐานผลไม้ลังนั้นก็จะถูกส่งเป็นสินค้าออก ถ้าไม่เป็นเช่นนั้น ผลไม้ลังนั้นจะไม่ถูกส่งเป็นสินค้าออก จงหาความน่าจะเป็นที่ผลไม้ลังหนึ่งซึ่งมีผลไม้ 120 ผล ในจำนวนนี้มีผลไม้ต่ำกว่าเกณฑ์มาตรฐาน 10 ผล จะถูกส่งเป็นสินค้าออก

1. $(\frac{11}{12})^3$ 2. $(\frac{1}{12})^3$ 3. $\frac{10,791}{14,042}$ 4. $\frac{10,791}{14,400}$

162. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 24 หลอดที่แตกต่างกัน ในจำนวนนี้เป็นหลอดเสีย 4 หลอด ถ้าแบ่งให้วิจารณ์ 10 หลอด และให้พรชัย 14 หลอด จำนวนวิธีที่หลอดเสียทั้ง 4 หลอดอยู่ที่คนคนเดียวกันเท่ากับเท่าใด

1. $\binom{20}{6}$ วิธี 2. $\binom{20}{10}$ วิธี 3. $\binom{10}{4}+\binom{14}{4}$ วิธี 4. $\binom{20}{6}+\binom{20}{10}$ วิธี

163. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2+\sqrt{9+x}-3}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. $\frac{1}{6}$ 4. $-\frac{1}{6}$

164. ตัวเลข 0 ห้าตัว และตัวเลข 1 สามตัว ใช้ในการแทนความหมายของตัวเลขในระบบเลขฐาน 2 ได้ทั้งหมดกี่ค่าที่แตกต่างกัน

1. 2 2. 16 3. 56 4. 256

165. การแข่งขันฟุตบอลแบบพบกันหมดซึ่งแต่ละทีมพบกันหนึ่งครั้ง โดยมีทีมชาติสวีเดน อังกฤษ เดนมาร์ก และฝรั่งเศส เข้าแข่งขันกัน ในการแข่งขันแต่ละนัด ทีมชนะได้ 3 คะแนน ทีมที่เสมอได้ 1 คะแนน และทีมแพ้ได้ 0 คะแนน จำนวนวิธีที่ทีมฝรั่งเศสได้ 7 คะแนน เท่ากับเท่าใด

1. 3 2. 2 3. 1 4. 0

166. ให้ $S = \{k \in I^+ \mid k = 2^n, n = 1, 2, 3, ..., 1000\}$

$E = \{k \in S \mid$ หลักหน่วยของ k เท่ากับ 2$\}$ P(E) เท่ากับเท่าใด

1. 0.25 2. 0.50 3. 0.60 4. 0.75

167. มีฉลาก 10 ใบ เขียนเลข 1, 2, 3, ..., 10 ในฉลาก ใบละหนึ่งหมายเลข สุ่มหยิบฉลากขึ้นมา 3 ใบพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่ผลรวมของตัวเลขที่ได้มีค่าเท่ากับ 15 เป็นเท่าใด

1. $\frac{21}{120}$ 2. $\frac{14}{120}$ 3. $\frac{10}{120}$ 4. $\frac{7}{120}$

168. กำหนด $S = \{1, 2, 3\}$, $M = \{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S\}$, $D = \{A \in M \mid \det(A) \neq 0\}$

จำนวนสมาชิกของเซต D เท่ากับเท่าใด

1. 15 2. 36 3. 48 4. 66

169. การเล่นเกมส์ทายตัวเลขจำนวนเต็ม 4 หลักที่ไม่มีการซ้ำ โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่เป็นเลขศูนย์ ความน่าจะเป็นที่จะทายตัวเลขได้ถูกต้องทั้ง 4 ตัว แต่หลักของตัวเลขผิดไปเพียง 2 หลักเท่านั้น มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{126}$ 2. $\frac{1}{252}$ 3. $\frac{1}{504}$ 4. $\frac{3}{504}$

170. ค่าของ $\lim_{x\to\infty} x(x-\sqrt{x^2+4})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. 2 3. -4 4. 4

171. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4|x-1|}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 4 & ; \quad x = 1 \end{cases}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 1

ข. f ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 0

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก , ข. ถูก 2. ก. ถูก , ข. ผิด 3. ก. ผิด , ข. ถูก 4. ก. ผิด , ข. ผิด

172. โยนลูกเต๋ามาตรฐาน 7 ลูก 1 ครั้ง จำนวนวิธีที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้มครบทุกแต้มเท่ากับเท่าใด

1. 1890 วิธี 2. 3780 วิธี 3. 7560 วิธี 4. 15120 วิธี

173. ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วสีแดง 4 ลูก สีเขียว 6 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วจากถุงใบนี้ครั้งละ 1 ลูก 4 ครั้ง โดยใส่ลูกแก้วคืนถุงก่อนหยิบครั้งต่อไปทุกครั้ง ความน่าเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีต่างกันทุกครั้งสลับกันไปเท่ากับเท่าใด

1. 0.0288 2. 0.0576 3. 0.1152 4. 0.2304

174. ให้ $a_0 = 1$ และสำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $a_n = 8^{2n-1}\, a_{n-1}$

ถ้า $\log_{\frac{1}{8}} a_0 + \log_{\frac{1}{8}} a_1 + \log_{\frac{1}{8}} a_2 + \ldots + \log_{\frac{1}{8}} a_n = -91$ แล้ว n อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[1, 7)$ 2. $[7, 12)$ 3. $[12, 13)$ 4. $[13, \infty)$

175. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{n-1}} = 4$

(2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{2n^2+1} = \dfrac{1}{2}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (1) เท่านั้นเป็นจริง 2. ข้อ (2) เท่านั้นเป็นจริง

3. ทั้งข้อ (1) , (2) ต่างก็เป็นจริง 4. ทั้งข้อ (1) และข้อ (2) ต่างก็เป็นเท็จ

176. เด็กชายนิคมีหนังสือการ์ตูน 7 เล่ม เด็กชายหน่อยมีหนังสือการ์ตูน 9 เล่ม เด็กทั้งสองต้องการแลกหนังสือกันคนละ 2 เล่ม จะมีวิธีแลกหนังสือทั้งสิ้นกี่วิธี

1. 63 2. 120 3. 756 4. 3024

177. ในระนาบหนึ่งเส้นตรงที่ขนานกันชุดหนึ่งมี 8 เส้นตัดกับเส้นตรงที่ขนานกันอีกชุดหนึ่งซึ่งมี n เส้น ทำให้เกิดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานทั้งหมด 420 รูป จงหาว่า $P_{n,2}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 2. 20 3. 12 4. 6

178. จำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 ซึ่งหารด้วย 2, 5 และ 9 ไม่ลงตัวมีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10 2. 15 3. 20 4. 35

179. จำนวนเต็ม 8 หลัก ที่ประกอบด้วยเลข 1 , 2 , 3 , ... , 8 ซึ่งไม่มีตัวเลขในหลักใดซ้ำกันและตัวเลขที่เป็นจำนวนเฉพาะไม่อยู่ติดกัน มีทั้งหมดกี่ตัว

1. 24 2. 48 3. 96 4. 1152

180. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-3x-4} & ,0 \le x < 4 \\ a+\dfrac{3x}{8} & ,x \ge 4 \end{cases}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x = 4 แล้วค่าของ a เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. $-\frac{5}{4}$

181. ถ้า $\int f(x)dx = \frac{2}{15}(15x^2+12x+8)\sqrt{(x-1)^3} + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวแล้ว f(x) เท่ากับเท่าใด

1. $3x^2\sqrt{x-1}$ 2. $5x^2\sqrt{x-1}$ 3. $7x^2\sqrt{x-1}$ 4. $9x^2\sqrt{x-1}$

182. กำหนดให้ $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ โดยที่ $0 \le x \le 3$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าลดในช่วง (0, 1) และเป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มในช่วง (1, 3)
2. f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มในช่วง (0, 1) และเป็นฟังก์ชันที่มีค่าลดในช่วง (1, 3)
3. f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าลดลงตลอด
4. f(x) เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นตลอด

183. กำหนดให้ $\ell n(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots$ เมื่อ $|x| < 1$

ผลบวกของอนุกรมอนันต์ $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5^2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5^4} + \ldots$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4} + \ell n\frac{4}{5}$ 2. $\frac{1}{4} - \ell n\frac{4}{5}$ 3. $\frac{4}{5} + \ell n\frac{4}{5}$ 4. $\frac{4}{5} - \ell n\frac{4}{5}$

184. ผลบวก $1 + \frac{5}{3} + \frac{12}{3^2} + \frac{22}{3^3} + \frac{35}{3^4} + \ldots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{15}{8}$ 2. $\frac{25}{8}$ 3. $\frac{35}{8}$ 4. $\frac{45}{8}$

185. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งมีนักเรียนในชั้นอนุบาลสอง 10 คน ในจำนวนนี้มีเด็กที่ถนัดมือซ้าย 2 คน ถ้าเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียนชั้นอนุบาลสองทั้งหมดโดยการสุ่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนถนัดมือซ้ายมากกว่าหรือเท่ากับ 1 คน เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{4}{15}$ 2. $\frac{7}{15}$ 3. $\frac{8}{15}$ 4. $\frac{11}{15}$

186. ถ้า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. 1 3. -1 4. ∞

187 ถ้า $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ แล้ว $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\sin x}{2\sin^2(\frac{x}{2})}$ เท่ากับเท่าใด

1. 0 2. -1 3. 1 4. 2

188. ค่าของ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $\frac{4}{5}$ 4. $\frac{5}{4}$

189. ค่าของ $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2-2x-3}{|x+1|}$ เท่ากับเท่าใด

1. -4 2. 4 3. -2 4. 2

190. ถ้า $P(A)=0.3$, $P(B)=0.5$, $P((A\cap B)')=0.8$ แล้ว $P(A\cup B)$ เท่ากับเท่าใด

1. 0.2 2. 0.4 3. 0.5 4. 0.6

เฉลยคำตอบโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1 – 10	3	1	1	2	3	3	4	1	4	1
11 – 20	1	2	1	2	1	1	4	2	2	3
21 – 30	3	4	2	4	1	2	1	3	4	2
31 – 40	3	1	3	3	1	1	1	2	1	1
41 – 50	1	3	4	3	1	2	4	3	2	4
51 – 60	2	1	4	1	4	2	1	3	2	1
61 – 70	1	2	3	3	4	2	4	2	2	1
71 – 80	1	2	3	3	1	4	2	3	3	1
81 – 90	3	1	2	3	1	2	1	3	3	2
91 – 100	2	3	4	1	3	1	2	1	2	1
101 – 110	1	2	3	3	4	1	3	1	1	1
111 – 120	4	4	2	1	4	2	4	2	3	1
121 – 130	4	3	3	4	4	1	3	3	3	2
131 – 140	2	4	1	4	3	1	3	2	1	3
141 – 150	1	3	1	3	4	1	4	2	1	2
151 – 160	2	3	1	4	1	2	4	4	3	3
161 – 170	3	4	3	3	1	1	3	4	3	1
171 – 180	4	4	3	2	3	3	1	4	4	4
181 – 190	3	1	1	4	3	1	4	2	1	4

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩ ❶❷❸❹❺❻❼❽❾❿ ①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩ ❶❷❸❹❺❻❼❽❾❿

คณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 23

คู่มือตัดตัวเลือกคณิตศาสตร์ ม.6

สรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์ ม.6

เป็นหนังสือที่มีโจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ระดับ ม. 6 มากกว่า 400 ข้อ มีการสรุปเนื้อหาคณิตศาสตร์จากหนังสือ คณิตศาสตร์ ค. 015 และ ค. 016 โดยมีเนื้อหาต่างๆ คือ ลำดับและอนุกรม ลิมิตและความต่อเนื่อง อนุพันธ์ของฟังก์ชัน การอินทิเกรต วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่ ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล และ เลขดัชนี การสรุปเนื้อหาประกอบด้วย

- สรุปเนื้อหาที่ข้อสอบชอบออก
- เทคนิคการตัดตัวเลือกที่สำคัญ
- เฉลยแบบ วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
- ปัญหาถูกหรือผิด
- โจทย์เสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือก

นอกจากนั้นยังมีโจทย์ระคนเสริมประสบการณ์การตัดตัวเลือกอีก 190 ข้อเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกหัดทำโดยเลือกมาจากข้อสอบต่างๆ เช่น ข้อสอบคัดเลือก ENTRANCE ระบบใหม่ คณิตศาสตร์ ๑ และ คณิตศาสตร์ ๒ พร้อมทั้ง คณิตศาสตร์ ก. คณิตศาสตร์ กข. และ ข้อสอบแข่งขันอื่นๆ

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท เขตปทุมวัน กรุงเทพฯ 10330
ศาลาพระเกี้ยว โทร. 2187000 โทรสาร 2554441
สยามสแควร์ โทร. 2189888 โทรสาร 2549495
http://www.cubook.com หรือ http://www.chulabook.com
e - mail : cubook@chula.ac.th

คณิตศาสตร์ปรนัย ล. 23 คู่มือตัด
ISBN 974-346-539-1
9 789743 465390
C112
7016 199.00 บาท