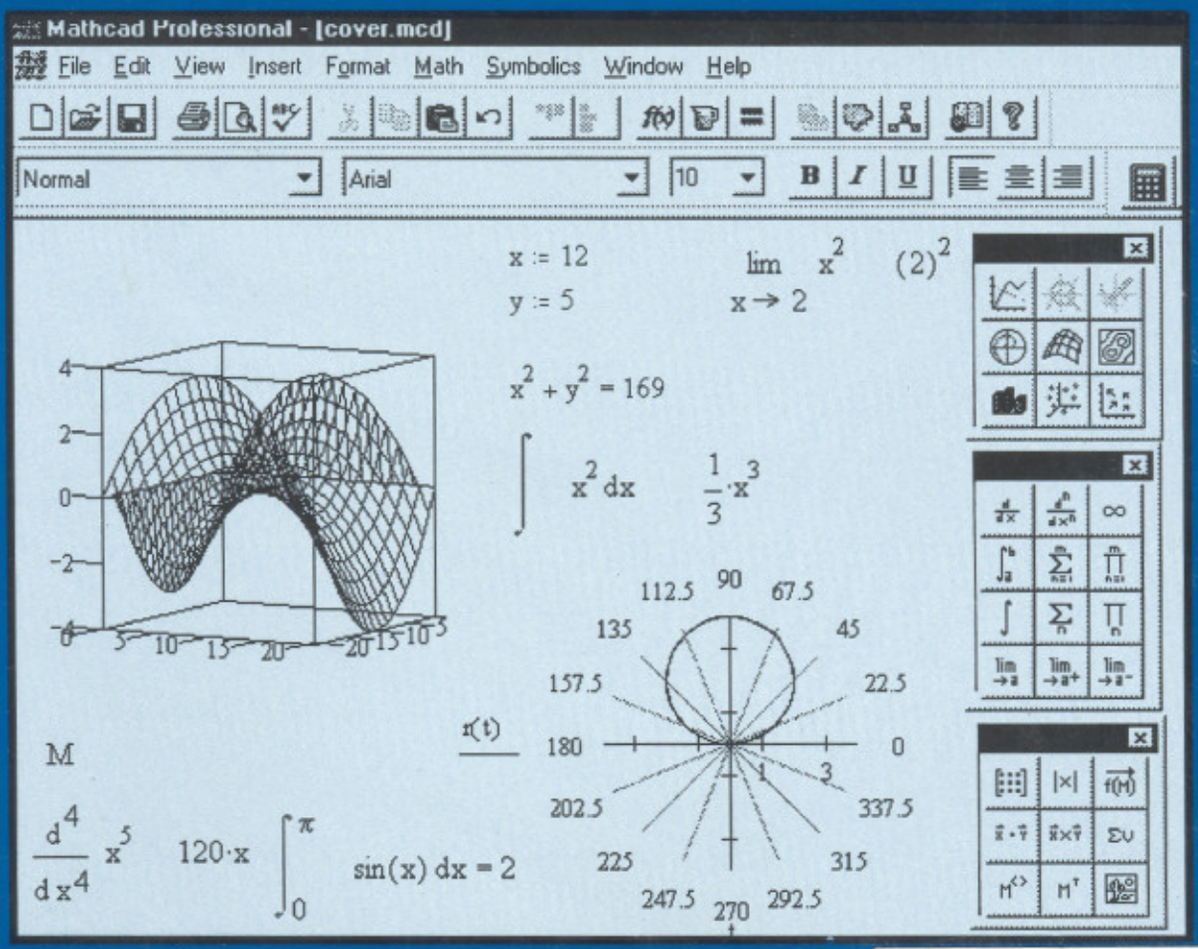
คู่มือ MATHCAD

ประยุกต์กับการคำนวณคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และ อุดมศึกษา



รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

MATHCAD

คู่มือ

MATHCAD

MATHCAD

คู่มือ

MATHCAD

ประยุกต์กับ
การคำนวณคณิตศาสตร์
ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย และ อุดมศึกษา

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ดำรงค์ ทิพย์โยธา

คู่มือ MATHCAD / ดำรงค์ ทิพย์โยธา

ประยุกต์กับการคำนวณคณิตศาสตร์

— คณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย

— คณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษา

ISBN 974-639-160-7

จัดจำหน่ายโดยศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

โทร. 2183980, 2187000, 2554433 โทรสาร 2554441

e-mail:cubook@chula.edu
http://www.chula.edu/cubook/index.htm

พิมพ์ที่โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612, 2153626

คำนำ

หนังสือ คู่มือ **MATHCAD** เป็นหนังสือที่จะช่วยให้ผู้อ่านทุกท่านมีความสามารถที่จะใช้โปรแกรม MATHCAD ช่วยแก้ปัญหาต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งระดับมัธยมศึกษา และระดับอุดมศึกษา

โปรแกรม MATHCAD เป็นโปรแกรมที่มีความสะดวกต่อการใช้เป็นอย่างมาก เพราะสามารถที่จะทำการคำนวณโดยตรงแบบเครื่องคิดเลขหรือจะคำนวณในรูปแบบโปรแกรมก็ได้ นอกจากนั้นขณะที่ใช้โปรแกรมเมื่อเราพิมพ์สูตรต่างๆเข้าไป ตัวโปรแกรมจะช่วยจัดรูปแบบบนจอภาพให้มีลักษณะเหมือนกับเราเขียนด้วยมือ ตัวอย่างเช่น

$$\frac{2540}{25} = 101.6 \qquad \frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} = 0.966 \qquad \sin(75\cdot\mathrm{deg}) = 0.966 \qquad \sin\left(\frac{5\cdot\pi}{12}\right) = 0.966$$

ความสามารถในการพิมพ์สูตรที่มีความยุ่งยากและซับซ้อน ตัวอย่างเช่น

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \frac{d^5}{dx^5}\frac{\ln\left(10^{\sqrt{x^2+4}}\right)}{\sqrt[5]{\sin\left(x^3+2\right)}}$$

ความสามารถในการคำนวณที่ได้ทั้งผลลัพธ์เป็นตัวเลขและผลลัพธ์เป็นสูตร ตัวอย่างเช่น

$$x := 1 \quad f(x) := x^2 + 3\cdot x + 4 \quad \frac{d}{dx}f(x) = 5 \quad \frac{d}{dx}\left(x^2 + 3\cdot x + 4\right) \quad 2\cdot x + 3$$

ความสามารถของการคำนวณในรูปแบบ $\sum$ ตัวอย่างเช่น $\left[\sum_{n=1}^{2}\left(n^2+n+1\right)\right] = 10$

ความสามารถในการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์และเวกเตอร์

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \qquad 3\cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 9 & 30 \end{pmatrix} \qquad |A| = 2 \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

ความสามารถในการเขียนกราฟ 2 มิติ 3 มิติ กราฟพิกัดเชิงขั้ว และ กราฟรูปแบบอื่นๆ

เนื้อหาภายในหนังสือเล่มนี้จะช่วยให้ผู้อ่านสามารถใช้งานโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD และนำไปประยุกต์กับการคำนวณทางคณิตศาสตร์ได้ทั้งระดับ ม. ปลาย (ค. 011 – ค. 016) และระดับอุดมศึกษา

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา

สารบัญ

บทที่ 1

ความสามารถเบื้องต้นของโปรแกรม MATHCAD

ในบทนี้จะเป็นการนำความสามารถต่าง ๆ ที่โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD ทำได้มานำเสนอให้ดูก่อนเพื่อผู้อ่านจะได้เห็นความสามารถทางการคำนวณที่สำคัญของโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

1.1. การคำนวณเบื้องต้นบวก ลบ คูณ หาร

$$15 \cdot 3 = 45$$

$$\frac{49}{7} = 7$$

$$56 + 12 = 68$$

$$3.25 - 16.5 = -13.25$$

$$\frac{(42 + 13) \cdot 12}{100} = 6.6$$

หมายเหตุ MATHCAD สามารถทำการคำนวณได้อย่างต่อเนื่อง และ จัดรูปแบบการพิมพ์ได้

1.2 สามารถเลือกแสดงผลการคำนวณเป็นทศนิยมได้หลายตำแหน่ง

$$\frac{2}{9} = 0.22222$$

$$\frac{2}{9} = 0.2222222222$$

$$\frac{2}{9} = 0.222222222222222$$

$$\pi = 3.14159265$$

$$\pi = 3.1415926536$$

$$\pi = 3.141592653589793$$

1.3 มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ ให้เลือกใช้มากมาย

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5$ $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\mathrm{asin}(1) = 1.570796$ $\mathrm{acos}(1) = 0$ $\mathrm{atan}(0) = 0$

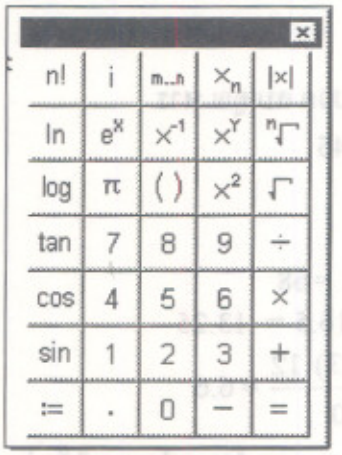
$\log(100) = 2$ $\ln(100) = 4.60517$

$\exp(1) = 2.718282$ $e = 2.718282$ $e^2 = 7.389056$

หมายเหตุ asin คือ arcsin acos คือ arccos atan คือ arctan

log มีทั้งฐาน 10 และ ฐาน e

ตัวอย่างฟังก์ชันอื่น ๆ ดูได้จากแถบเครื่องคิดเลขนี้



1.4 ความสามารถที่จะกำหนดสูตรของฟังก์ใช้งานเองได้

$f(x) := x^2 + 3\cdot x + 1$

$f(1) = 5$

$f(2) = 11$

$f(0) = 1$

1.5 สร้างตารางคำนวณค่าของฟังก์ชันได้โดยง่าย

$x := 1..5$

$f(x) := x^2$

$g(x) := 2\cdot x + 1$

x	f(x)	g(x)
1	1	3
2	4	5
3	9	7
4	16	9
5	25	11

1.6 สามารถเปลี่ยนหน่วยของการคำนวณโดยง่าย

$\sin(30 \cdot deg) = 0.5$

$\sin(45 \cdot deg) = 0.707107$

$\tan(45 \cdot deg) = 1$

$\mathrm{asin}(1) = 1.570796 \cdot rad$

$\mathrm{asin}(1) = 90 \cdot deg$

$\mathrm{atan}(1) = 45 \cdot deg$

1.7 สามารถแสดงหน่วยของผลการคำนวณได้

$s := 1000 \cdot km$

$t := 20 \cdot sec$

$v := \frac{s}{t}$

$v = 50 \cdot sec^{-1} \cdot km$

$v = 50000 \cdot m \cdot sec^{-1}$

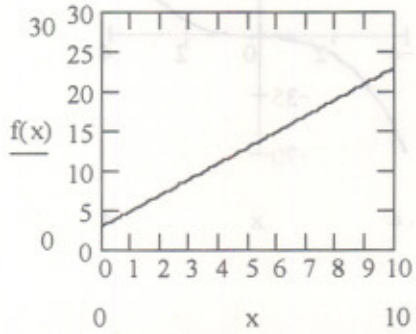
1.8 มีความสะดวกในการเขียนกราฟ และ สามารถเขียนกราฟได้หลายรูปแบบ

1.8.1 กราฟเส้น

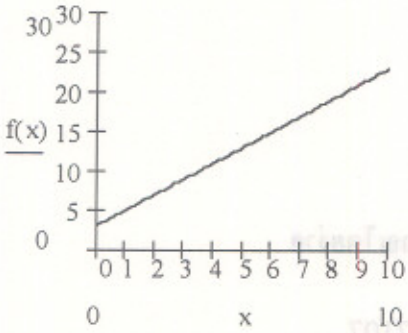
เขียนกราฟ f(x) โดยมีแกน X และ Y อยู่ที่ขอบ

$x := 0, 0.1 .. 10$

$f(x) := 2 \cdot x + 3$



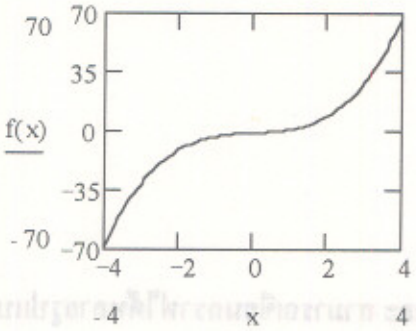
เขียนกราฟ f(x) โดยมีแกน X และ Y อยู่ที่ขอบและไม่ใช้กรอบ



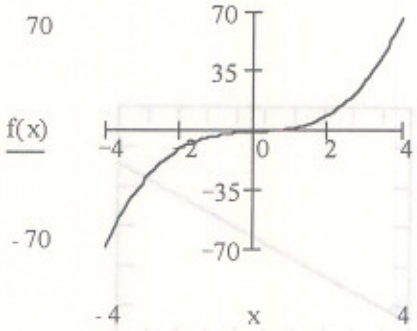
เขียนกราฟ f(x) โดยมีแกน X และ Y อยู่ที่ขอบ

$x := -4, -3.9 .. 4$

$f(x) := x^3 + x - 1$



เขียนกราฟ f(x) โดยมีแกน X และ Y อยู่ตรงกลาง

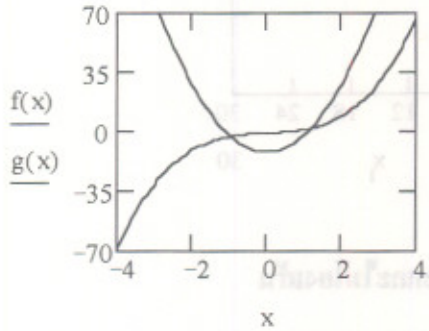


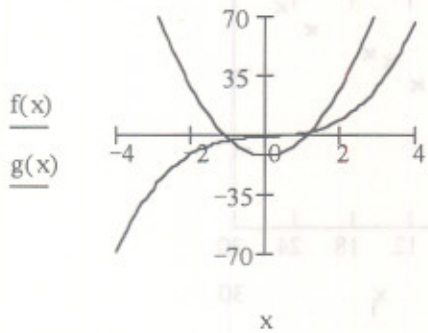
เขียนกราฟได้มากกว่า 1 เส้นพร้อมกัน

$x := -4, -3.9 .. 4$

$g(x) := 10 \cdot x^2 - 12$

$f(x) := x^3 + x - 1$

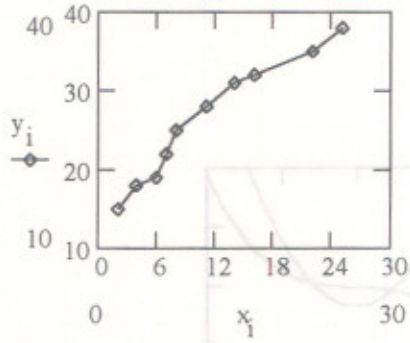




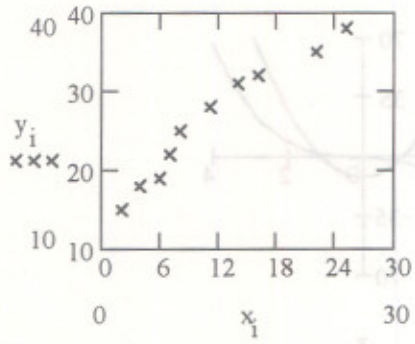
1.8.2 กราฟของคู่ลำดับ

ORIGIN:= 1 $\quad i := 1 .. 10 \quad x := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 16 \\ 22 \\ 25 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 19 \\ 22 \\ 25 \\ 28 \\ 31 \\ 32 \\ 35 \\ 38 \end{bmatrix}$

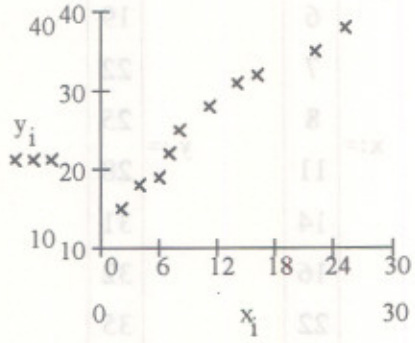
เขียนกราฟเป็นจุดสี่เหลี่ยมและโยงเส้น



เขียนกราฟเป็นจุดกากบาทและและไม่โยงเส้น

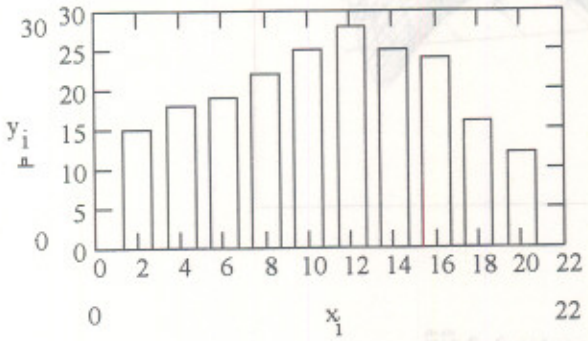


เขียนกราฟเป็นจุดกากบาทและและไม่โยงเส้นและไม่มีกรอบสี่เหลี่ยม



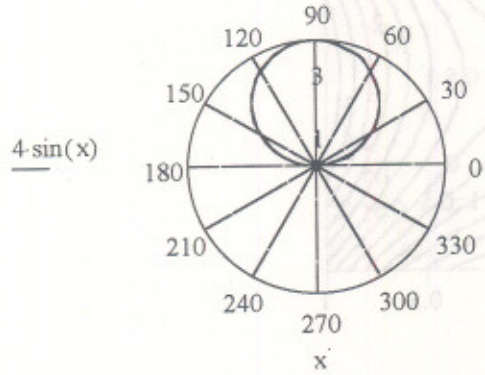
1.8.3 ความสามารถในการเขียนกราฟแท่ง (bar graph)

ORIGIN:= 1 $\quad i := 1..10 \quad x := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \\ 20 \end{bmatrix} \quad y := \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 19 \\ 22 \\ 25 \\ 28 \\ 25 \\ 24 \\ 16 \\ 12 \end{bmatrix}$



1.8.4 ความสามารถในการเขียนกราฟในพิกัดเชิงขั้ว

$x := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$

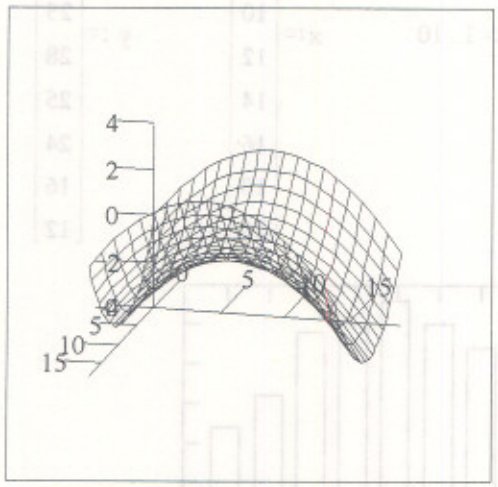


1.8.5 กราฟ 3 มิติ

$i := 1..20$ $\qquad$ $j := 1..20$

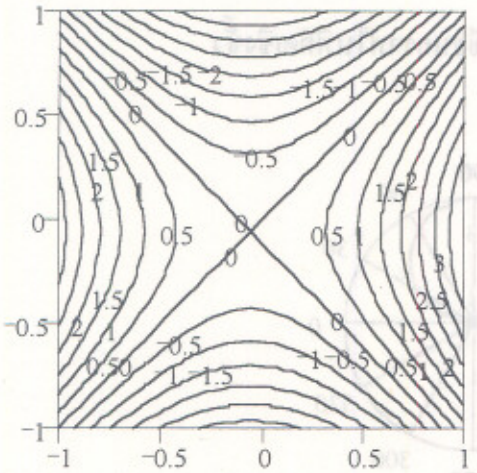
$x_i := -2 + 0.2 \cdot i$ $\qquad$ $y_j := -2 + 0.2 \cdot j$

$f(x,y) := x^2 - y^2$ $\qquad$ $M_{(i,j)} := f(x_i, y_j)$



M

1.8.6 กราฟของเส้นคอนทัวร์ (contour) 3 มิติ



M

1.9 การคำนวณในรูปแบบของเลขฐานอื่นๆ

$1o + 2o = 3$ $\qquad$ 1 ฐาน 8 บวกกับ 2 ฐาน 8 ได้ 3 ฐาน 10

$4o + 4o = 8$

$12o + 17o = 25$

$123o + 11o = 92$

$2h + 3h = 5$ 2 ฐาน 16 บวกกับ 3 ฐาน 16 ได้ 5 ฐาน 10

$16h + 16h = 44$

$111h + 11h = 290$

$20h + 23h = 67$

1.10 การคำนวณในรูปแบบเวกเตอร์

$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $v := \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$u - v = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ $2 \cdot v + 3 \cdot v = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$

$u \cdot v = 10$

$|u| = 2.236068$ $|v| = 5$

1.11 การคำนวณในรูปแบบเมทริกซ์

$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B := \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 \\ 1 & -0.5 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -2.5 & 2 \end{bmatrix}$

$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ $-4 \cdot B = \begin{bmatrix} -16 & -8 \\ -20 & -12 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ $A \cdot B = \begin{bmatrix} 19 & 11 \\ 28 & 16 \end{bmatrix}$

$|A| = -2$ $|B| = 2$

$|A \cdot B| = -4$

1.12 การคำนวณจำนวนเชิงซ้อน

$z := 3 + 4i$ $w := 12 - 5i$

$|z| = 5$ $|w| = 13$

$|z + w| = 15.033296$ $z + w = 15 - i$

$3 \cdot z - 4 \cdot w = -39 + 32i$

1.13 การหาผลบวกในรูปแบบ $\sum$

$$\sum_{i=1}^{10} i = 55 \qquad \sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$$

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 = 3025 \qquad \left[\sum_{i=1}^{10} \left(i^2 + 3 \cdot i + 4\right)\right] = 590$$

ORIGIN := 1 $\qquad$ i := 1 .. 6

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 30 \qquad \sum_{i=1}^{6} \left(x_i\right)^2 = 224 \qquad \sum_{i=1}^{6} y_i = 50$$

$$\sum_{i=1}^{6} \left(y_i\right)^2 = 626 \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot y_i = 369$$

1.14 การคำนวณค่าสถิติเบื้องต้น

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

mean(x) = 5	mean(y) = 8.333333
var(x) = 12.333333	var(y) = 34.888889
stdev(x) = 3.511885	stdev(y) = 5.906682
min(y) = 2	min(x) = 1
max(x) = 11	max(y) = 20
median(x) = 4	median(y) = 7.5

1.15 สมการแสดงความสัมพันธ์ของข้อมูล $y = mx + c$

$$x := \begin{bmatrix} 1.1 \\ 2.3 \\ 3.2 \\ 4.5 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 5.1 \\ 7.2 \\ 10.6 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

$m := \text{slope}(x, y)$ $\qquad m = 2.279596$

$c := \text{intercept}(x, y)$ $\qquad c = 2.524121$

1.16 ความสามารถในการจัดรูปแบบทางพีชคณิต

1.16.1 การกระจายพหุนาม

$(x - 1)\cdot(x + 2)$

กระจายได้เป็น

$x^2 + x - 2$

$(x - 1)\cdot(x - 2)\cdot(x + 3)\cdot(x - 4)$

กระจายได้เป็น

$x^4 - 4\cdot x^3 - 7\cdot x^2 + 34\cdot x - 24$

$(x + 1)^4$

กระจายได้เป็น

$x^4 + 4\cdot x^3 + 6\cdot x^2 + 4\cdot x + 1$

$(x + 1)^5$

กระจายได้เป็น

$x^5 + 5\cdot x^4 + 10\cdot x^3 + 10\cdot x^2 + 5\cdot x + 1$

1.16.2 การแยกตัวประกอบ

$x^4 - 2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2$

แยกตัวประกอบได้เป็น

$(x-2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

$x^5 + 4\cdot x^4 + x^3 - 10\cdot x^2 - 4\cdot x + 8$

แยกตัวประกอบได้เป็น

$(x+2)^3\cdot(x-1)^2$

$x^9 + x^8 - 4\cdot x^7 - 10\cdot x^6 - 6\cdot x^5 + 12\cdot x^4 + 29\cdot x^3 + 29\cdot x^2 + 16\cdot x + 4$

แยกตัวประกอบได้เป็น

$(x-2)^2\cdot\left(x^2+x+1\right)^2\cdot(x+1)^3$

1.16.3 การจัดรูปแบบทางพีชคณิต

$\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ จัดรูปแบบทางพีชคณิตได้เป็น $-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}$

$\dfrac{4}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}$ จัดรูปแบบทางพีชคณิตได้เป็น $7\cdot\sqrt{2}-1$

$\dfrac{x+1}{\left(x^2+1\right)}+\dfrac{x}{(x-1)}$ จัดรูปแบบทางพีชคณิตได้เป็น

$$\frac{\left(x^2-1+x^3+x\right)}{\left[\left(x^2+1\right)\cdot(x-1)\right]}$$

1.17 ความสามารถในการหาอนุพันธ์เป็นสูตรและค่าตัวเลข

1.17.1 การหาอนุพันธ์เป็นค่าตัวเลข

$f(x) := 3\cdot x^2 + 4\cdot x + 1$

$x := 2$

$$\frac{d}{dx}f(x) = 16$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = 6$$

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = 0$$

1.17.2 การหาอนุพันธ์เป็นสูตร

$\frac{d}{dx}\left(3\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)$ ผลการหาอนุพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD คือ

$6\cdot x + 4$

$\frac{d}{dx}(6\cdot x + 4)$ ผลการหาอนุพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD คือ 6

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\left(3\cdot x^2 + 4\cdot x + 1\right)\right)$$

ผลการหาอนุพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD คือ

6

1.18 ความสามารถในการหาปริพันธ์เป็นสูตรและค่าตัวเลข

$$\int_0^1 x^2\,dx = 0.333333$$

$$\int_4^{10} x^2\,dx = 312$$

$\int_t^{t+1} x^2\,dx$ ผลการคำนวณเป็นสูตรคือ $t^2 + t + \frac{1}{3}$

$\int x^2\,dx$ ผลการคำนวณเป็นสูตรคือ $\frac{1}{3}\cdot x^3$

1.19 สามารถหาค่าลิมิตได้

$$\lim_{x \to 1} x^2 + x + 1$$ หาค่าลิมิตได้เป็น 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2 \cdot x}{x - 2}$$ หาค่าลิมิตได้เป็น 2

$$\lim_{x \to -1^+} \frac{|x + 1|}{x + 1}$$ หาค่าลิมิตได้เป็น 1

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$ หาค่าลิมิตได้เป็น -1

1.20 ความสามารถในการคำนวณเป็นโปรแกรม

โปรแกรมหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อรู้ความยาวทั้งสามด้าน

$a := 3$

$b := 4$

$c := 5$

$s := \frac{a + b + c}{2}$

$Area := \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

$Area = 6$

เมื่อเปลี่ยนค่า a , b , c ใหม่จะได้ผลการคำนวณเป็นดังนี้

$a := 5$

$b := 12$

$c := 13$

$s := \frac{a + b + c}{2}$

$Area := \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$

$Area = 30$

โปรแกรมหา adj(A) ของเมทริกซ์ A

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -17$$

$$adjA := |A| \cdot A^{-1}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

เมื่อเปลี่ยนเมทริกซ์จะได้ผลการคำนวณใหม่ดังนี้

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1$$

$$adjA := |A| \cdot A^{-1}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

1.21 ความสามารถในการหารากของสมการ f(x) = 0

$$f(x) := x^2 - 2$$

$$x := 1$$

$$root(f(x), x) = 1.414216$$

รากสมการ $x^2 - 2 = 0$ คือ x = 1.414216

$$f(x) := x^2 - 3$$

$$x := 1$$

$$root(f(x), x) = 1.732142$$

รากสมการ $x^2 - 3 = 0$ คือ x = 1.732142

$$f(x) := \sin(x) - \cos(x) \qquad x := 0$$

$$root(f(x), x) = 0.785517 \qquad root(f(x), x) = 45 \cdot deg$$

รากสมการ sinx - cosx = 0 คือ x = 0.785517 radian หรือ 45 degree

1.22 ความสามารถในการหาคำตอบของระบบสมการ

1.22.1 ระบบสมการเชิงเส้น

$x := 0$

$y := 0$

$z := 0$

Given

$2 \cdot x + y - 8 \cdot z = -5$

$x + y + 5 \cdot z = 7$

$2 \cdot x - 3 \cdot y + 4 \cdot z = 3$

$$\text{Find}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.22.1 ระบบสมการไม่เชิงเส้นก็หาคำตอบได้

$x := 0$

$y := 0$

Given

$x + y = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 0.707107 \\ -0.707107 \end{bmatrix}$$

ความสามารถอื่น ๆ การสั่งให้โปรแกรมทำงานต่าง ๆ และการประยุกต์เข้าสู่เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ มีในเนื้อหาของบทต่อไป

บทที่ 2

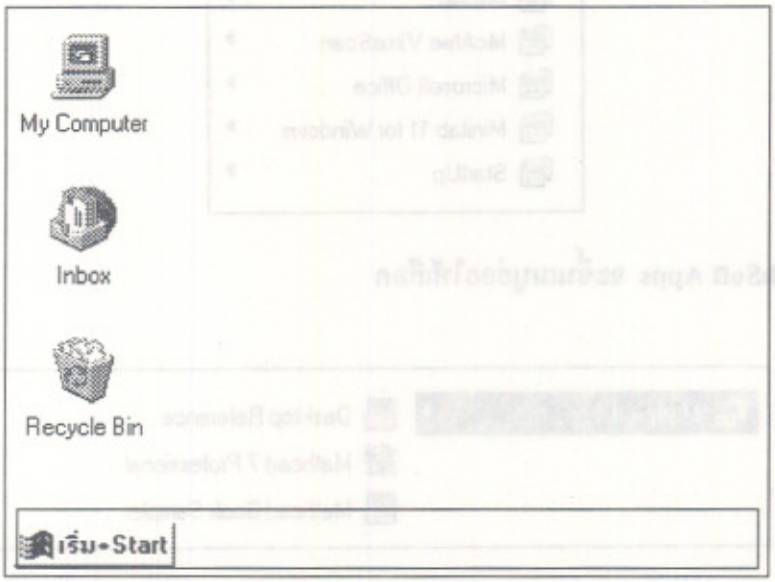
การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

ในบทนี้จะเรียนรู้เกี่ยวกับการนำโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เข้ามาทำงาน และการทำงานเบื้องต้นกับคำสั่งของ MATHCAD

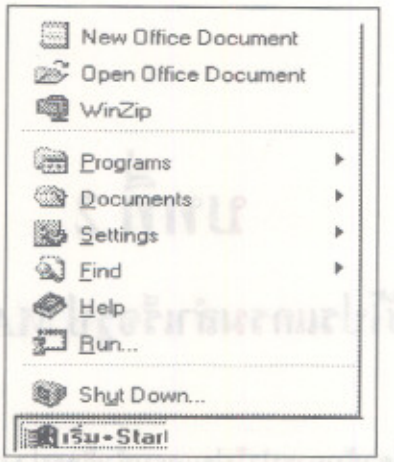
หมายเหตุ โปรแกรม MATHCAD ที่ใช้ในขณะนี้จะเป็น VERSION7.0 Professional หาก MATHCAD เป็น VERSION 5.0 หรือ 6.0 ก็จะมีลักษณะใช้งานที่ใกล้เคียงกัน

2.1 การเรียกโปรแกรม MATHCAD ขึ้นมาใช้งาน

1. เปิดเครื่องคอมพิวเตอร์
2. รอจนจอภาพขึ้น



คลิกที่ปุ่ม **START** จะมีเมนูให้เลือก



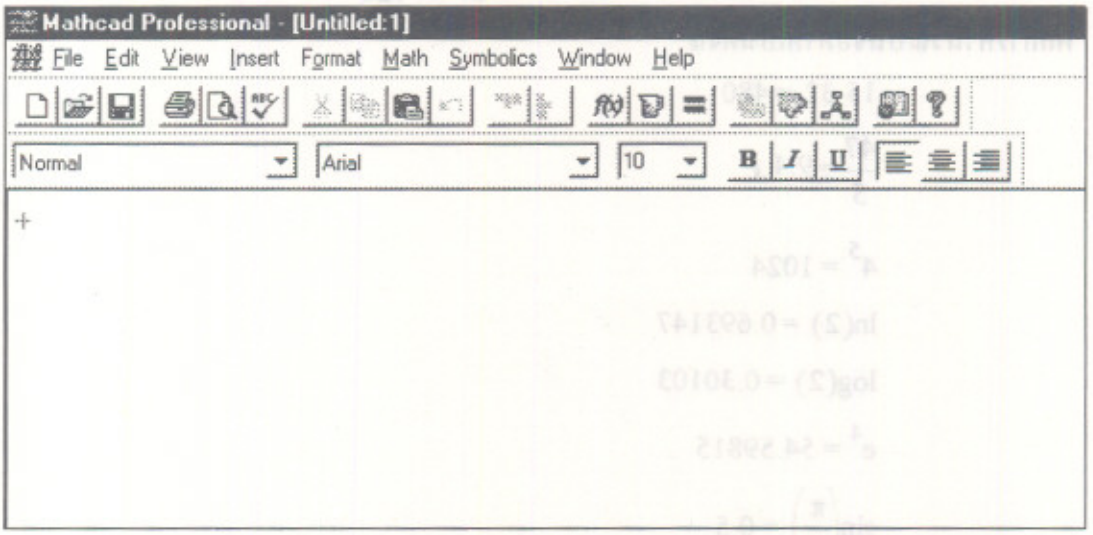
คลิกที่เมนู **Program** จะมีเมนูย่อยให้เลือก

คลิกที่ **MathSoft Apps** จะขึ้นเมนูย่อยให้เลือก

คลิกที่ **Mathcad 7 Professional** จะเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม MATHCAD

หมายเหตุ LOGO ของ MATHCAD อาจแตกต่างกันใน VERSION อื่นๆ

เมื่อเข้าสู่การทำงานของโปรแกรม MATHCAD เรียบร้อยแล้วจอภาพจะเป็นดังนี้



2.2 การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เป็นโปรแกรมที่ช่วยในด้านการคำนวณทางคณิตศาสตร์เราสามารถให้คอมพิวเตอร์คำนวณได้โดยง่ายเช่น

การหาผลบวกของ 45.25 + 17.5

1. ให้พิมพ์ 45.25 + 17.5
2. แล้วพิมพ์ = จะได้ผลลัพธ์ทันที

ผลบนจอภาพ MATHCAD คือ

$$45.25 + 17.5 = 62.75$$

ตัวอย่างการคำนวณแบบอื่น ๆ เช่น

$$\frac{47}{5} = 9.4$$
$$15 \cdot 32 = 480$$
$$4^5 = 1024$$
$$\log(2) = 0.301$$
$$\ln(2) = 0.6931$$
$$e^4 = 54.5982$$
$$\sin(\frac{\pi}{6}) = 0.5$$
$$\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$$
$$5! = 120$$

ผลการคำนวณบนจอภาพเป็นดังนี้

$$15 \cdot 32 = 480$$

$$\frac{47}{5} = 9.4$$

$$4^5 = 1024$$

$$\ln(2) = 0.693147$$

$$\log(2) = 0.30103$$

$$e^4 = 54.59815$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$5! = 120$$

เนื่องจากตัวโปรแกรม MATHCAD จะทำการจัดรูปแบบการพิมพ์บนจอภาพให้สอดคล้องกับความหมายทางคณิตศาสตร์เสมอเช่น การหาค่า $\frac{47}{5} = 9.4$

ขั้นที่ 1 พิมพ์ 47

ขั้นที่ 2 เมื่อเรากดเครื่องหมายหาร (/) บนจอภาพจะจัดรูปแบบเป็นลักษณะของเศษส่วนทันที

$$\frac{47}{\blacksquare}$$

ขั้นที่ 3 ต่อไปจึงพิมพ์ 5 แล้วกด = จะได้ผลการคำนวณที่ต้องการ

$$\frac{47}{5} = 9.4 \blacksquare$$

เพราะฉะนั้นข้อแนะนำในการใช้งานเบื้องต้นขอให้ทดลองพิมพ์ช้า ๆ และดูผลของการจัดรูปแบบของ MATHCAD ตามตารางการคำนวณเบื้องต้นดังนี้

การคำนวณด้วยโปรแกรม MATHCAD

1. การหาผลบวก 45.25 + 17.5

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
45.25+17.5=↵	45.25 + 17.5 = 62.75 ■

หมายเหตุ 1. การคำนวณใหม่หรือขึ้นบรรทัดใหม่ต้องกด <ENTER>

2. เครื่องหมาย = เป็นการสั่งให้ทำการคำนวณ

2. การหาผลหาร $\frac{47}{5}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
47	47

/	$\frac{47}{\blacksquare}$
5	$\frac{47}{5}$
=	$\frac{47}{5} = 9.4$
↵	$\frac{47}{5} = 9.4$

3. การหาผลคูณของ 15 กับ 32

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
15	15
*	$15 \cdot \blacksquare$
32	$15 \cdot 32$
=	$15 \cdot 32 = 480$
↵	$15 \cdot 32 = 480$

4. การคำนวณเลขยกกำลัง 4^5 และ e^4

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
4	4

^	$4^{\blacksquare}$
5=	$4^{5} = 1024$
↵	$4^{5} = 1024$
e	e
^	$e^{\blacksquare}$
4=↵	$e^{4} = 54.59815$

5. การคำนวณโดยการใช้ฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ log(2) , ln(2) , $\sin(\frac{\pi}{6})$, $\sqrt{3}$, 5!

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
log(2)=↵	log(2) = 0.30103
ln(2)=↵	ln(2) = 0.693147
sin(	$\sin(\blacksquare$
<ctrl>+P หมายเหตุ กด Ctrl ค้างไว้แล้วกด P	$\sin(\pi$
/	$\sin\left(\frac{\pi}{\blacksquare}\right.$

6)	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$
=	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$
↵	$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5$
การหารากที่ 2 ของ เลข 3 \	$\sqrt{\blacksquare}$
3=↵	$\sqrt{3} = 1.732051$
5!=↵	$5! = 120$

6. การกำหนดค่าให้กับตัวแปร , การกำหนดสูตรฟังก์ชัน

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x	x
: หมายเหตุ กด : จะได้ :=	$x := \blacksquare$
4↵	$x := 4$
f(x)	$f(x)$

:	$f(x) := \blacksquare$
x^2↵	$f(x) := x^2$
f(x)=↵	$f(x) = 16$
f(3)=↵	$f(3) = 9$

หมายเหตุ สัญลักษณ์ := หมายถึงการกำหนดค่าให้เป็น หรือ การกำหนดสูตรให้เป็น

ผลการคำนวณจริงบนจอภาพ

$$x := 4$$

$$f(x) := x^2$$

$$f(x) = 16$$

$$f(3) = 9$$

7. การหาค่าปริพันธ์ $\int_a^b f(x)dx$ ตัวอย่างเช่น $\int_1^4 (x^2 + 4)dx$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x):	$f(x)$
:	$f(x) := \blacksquare$
x^2	$f(x) := x^2$
<Space bar>	$f(x) := x^2$

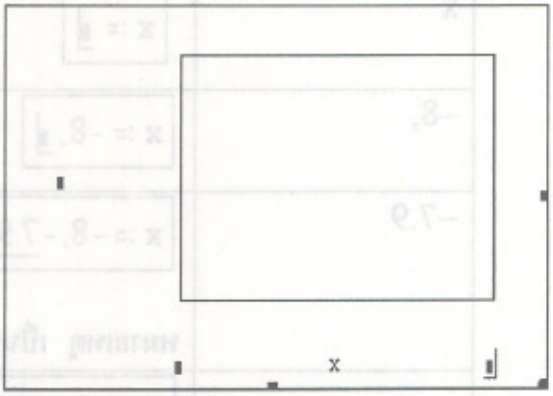
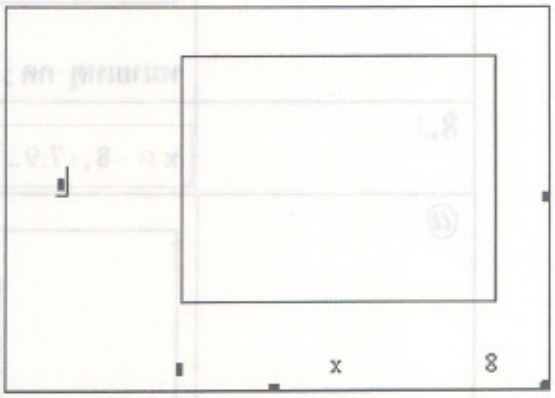
+	$f(x) := x^2 + \blacksquare$
4↵	$f(x) := x^2 + 4$
& หมายเหตุ กด & จะได้ เครื่องหมายปริพันธ์	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare \, d\blacksquare$
f(x)<Tab>	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} f(x)\, d\blacksquare$
x<Tab>	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} f(x)\, dx$
1<Tab>	$\int_{1}^{\blacksquare} f(x)\, dx$
4=↵	$\int_{1}^{4} f(x)\, dx = 33$

2.3 การเขียนกราฟของฟังก์ชัน

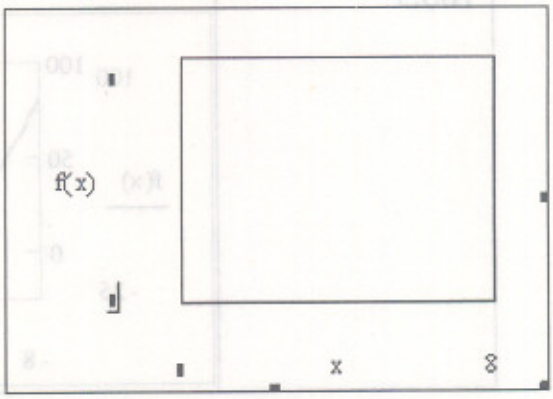
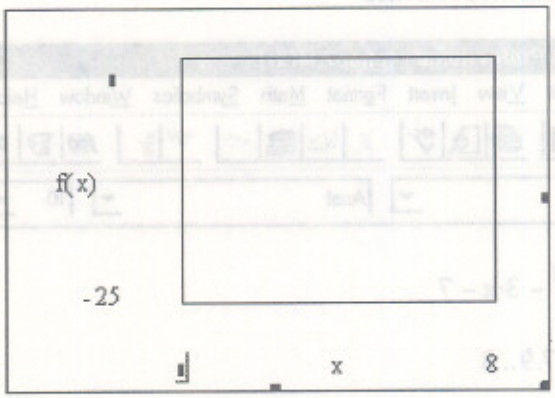
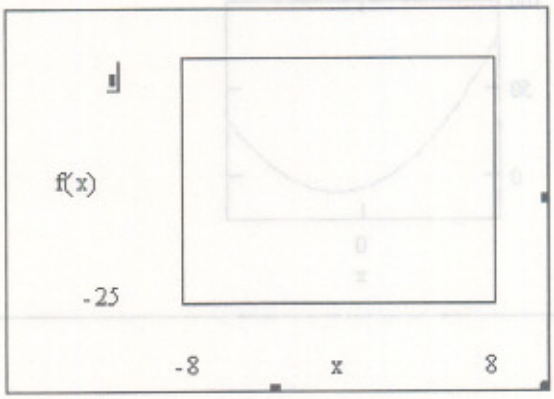
ตัวอย่างเช่นการเขียนกราฟของ $f(x) = x^2 - 3x - 7$ บนช่วง [–8, 8]

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x)	$f(x)$

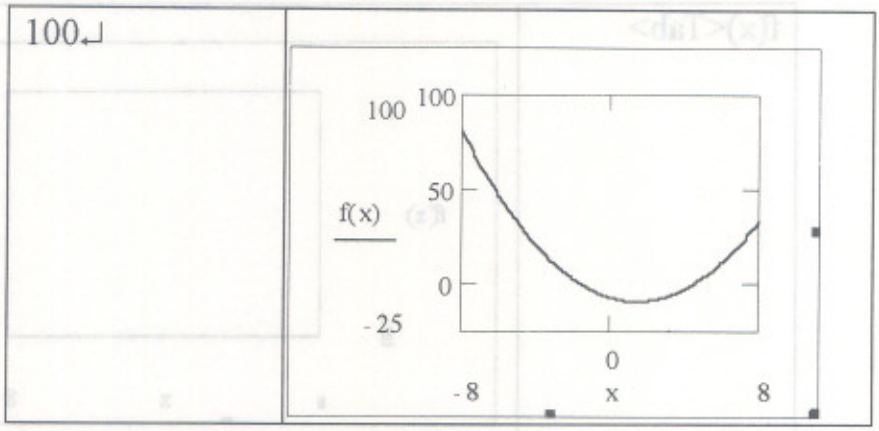
:	f(x) :=
x^2	f(x) := x^2
<Space bar>	f(x) := x^2
–3*x–7↵	f(x) := $x^2 - 3 \cdot x - 7$
x	x :=
–8,	x := -8,
–7.9	x := -8, -7.9 หมายเหตุ เป็นการกำหนดให้ค่า x เพิ่มทีละ 0.1
;	x := -8, -7.9.. หมายเหตุ กด ; แต่จะได้สัญลักษณ์ ..
8↵	x := -8, -7.9.. 8
@ หมายเหตุ กด @ จะได้รูปแบบการเขียนกราฟ	

x	
<Tab>	
8<Tab>	

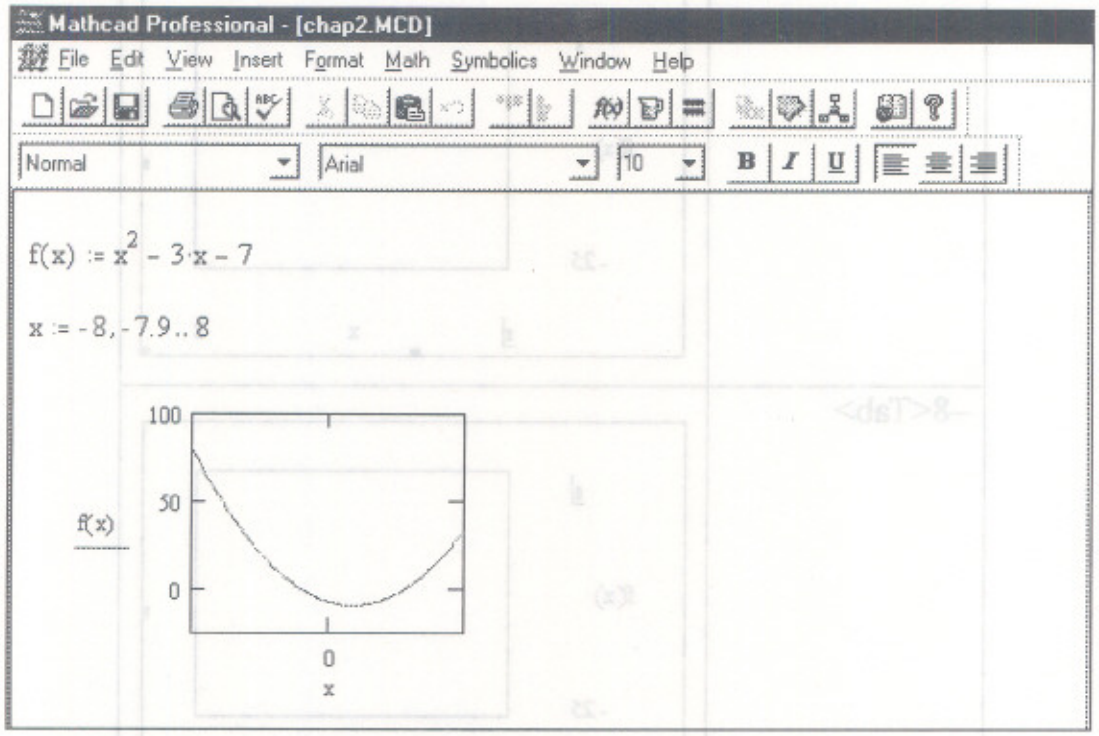
หมายเหตุ Mathcad 7.0 จะมีกรอบสี่เหลี่ยมให้เราเติม X แล้วจึงเกิดช่องให้เราเติมค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ของ X และ เติม f(x) แล้วจึงเกิดช่องให้เราเติมค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ของ f(x) แต่ Mathcad 5.0 , 6.0 จะมีกรอบของกราฟและตำแหน่งต่างๆ ทั้ง 6 ตำแหน่งขึ้นมาทันทีเมื่อเรากด @

f(x)<Tab>	
–25<Tab>	
–8<Tab>	

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติจริง เรายังไม่ต้องพิมพ์ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ของ f(x) ก็ได้ เพราะว่าโปรแกรม Mathcad จะทำการคำนวณและเติมค่าให้เอง เพื่อให้เราสามารถเปลี่ยนแปลงค่าภายหลังตามความเหมาะสม

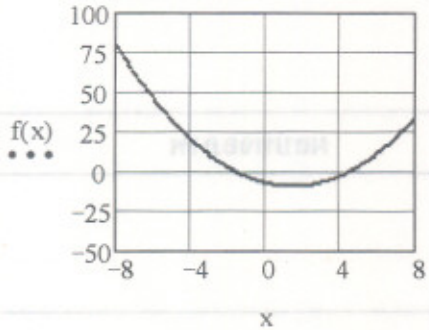


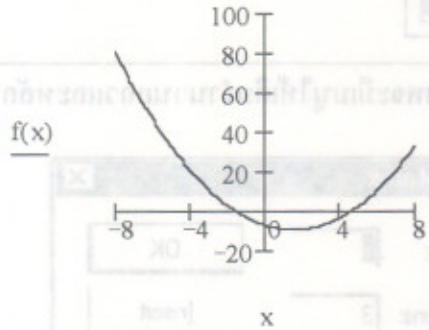
ผลการคำนวณบนจอภาพคือ

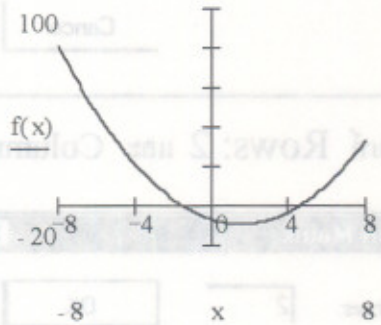


หมายเหตุ กราฟที่ได้อาจแตกต่างจากรูปนี้ได้ ซึ่งอาจเป็นผลมาจากมีการกำหนดรูปแบบของกราฟค้างไว้ การเปลี่ยนรูปแบบของกราฟดูได้ที่บทที่ 3

หมายเหตุ โปรแกรม MATHCAD สามารถจัดรูปแบบของกราฟได้หลายลักษณะเช่น



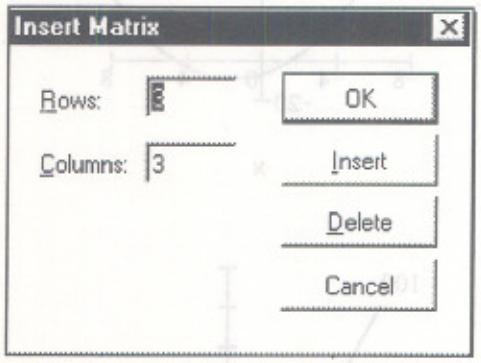
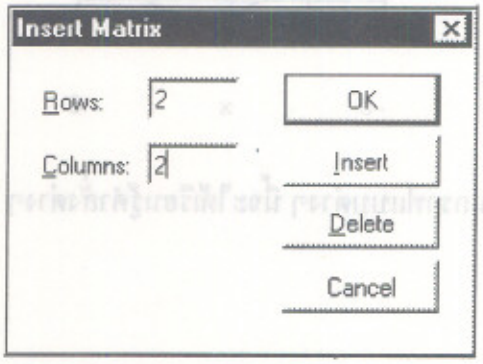




การขียนกราฟแบบต่างๆ นี้จะได้เรียนรู้คำสั่งต่างๆ ในบทต่อไป

2.4 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

ตัวอย่างเช่นการกำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
A	A
:	A :=
<Ctrl>+M	บนจอภาพจะมีเมนูให้เติมจำนวนแถวและหลัก  ให้พิมพ์ Rows: 2 และ Column: 2  เสร็จแล้วคลิก OK จะได้ผลบนจอเป็น

	$A := \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$
4<Tab>	$A := \begin{bmatrix} 4 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$
–2<Tab>	$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$
–5<Tab>	$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & \blacksquare \end{bmatrix}$
3↵	$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

ในทำนองเดียวกันกำหนด $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

การหาค่า AB ,4A , A^2 , A^{-1} , A^T , det(A)

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
A=↵	$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
B=↵	$B := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

การบวกเมทริกซ์	
A+B=↵	$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$
สเกลาร์คูณเมทริกซ์	
4*A=↵	$4 \cdot A = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -20 & 12 \end{bmatrix}$
เมทริกซ์ยกกำลัง	
A^	$A^{\blacksquare}$
2=↵	$A^2 = \begin{bmatrix} 26 & -14 \\ -35 & 19 \end{bmatrix}$
เมทริกซ์คูณเมทริกซ์	
A*B=↵	$A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -7 & -16 \end{bmatrix}$
การคำนวณเมทริกซ์ผกผัน	
A^	$A^{\blacksquare}$
–1=↵	$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix}$

การหาค่ากำหนดของเมทริกซ์	
|	$\boxed{\lvert \blacksquare \rvert}$
A=↵	$\boxed{\lvert A \rvert = 2}$
เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	
A	$\boxed{A}$
<Ctrl>+!	$\boxed{A^T}$
=↵	$\boxed{A^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}$

ผลการคำนวณบนจอภาพคือ

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad 4 \cdot A = \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -20 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 26 & -14 \\ -35 & 19 \end{bmatrix} \qquad A \cdot B = \begin{bmatrix} 6 & 14 \\ -7 & -16 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 \\ 2.5 & 2 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \lvert A \rvert = 2$$

การกำหนดดรรชนีล่าง (subscript) สำหรับอ้างอิงใช้งานกับสมาชิกของเมทริกซ์

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
A=↵	$A := \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$
ORIGIN:1↵	ORIGIN := 1
i:1;2↵	i := 1 .. 2
j:1;2↵	j := 1 .. 2
A[	$A_{\blacksquare}$
(1,1)=↵	$A_{(1,1)} = 4$
A[(1,2)=↵	$A_{(1,2)} = -2$

หมายเหตุ ตัวแปรที่มี ดรรชนีล่างอาจมีจุดเริ่มต้นเป็น 0 หรือ 1 ก็ได้ตามความเหมาะสมของเนื้อหาคณิตศาสตร์ เช่น ลำดับ อนุกรม มีค่าเริ่มต้นที่ 1

ในเรื่องของเมทริกซ์ดรรชนีล่าง ของ A_{ij} ต้องเริ่มที่ 1 เราจึงต้องกำหนด ORIGIN := 1 เพื่อกำหนดจุดเริ่มต้นของตัวดรรชนีล่างเป็นเลข 1

2.5 การกำหนดค่าและการคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์

สำหรับข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์เช่น $U = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $V = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
u :	u :=
<Ctrl>+M	บนจอภาพจะมีเมนูให้เติมจำนวนแถวและหลัก Insert Matrix Rows: 2 OK Columns: 3 Insert Delete Cancel ให้พิมพ์ Rows: 2 และ Column: 1 เสร็จแล้วคลิก OK จะได้ผลบนจอเป็น $u := \begin{bmatrix} \blacksquare \\ \blacksquare \end{bmatrix}$
–3<Tab>	$u := \begin{bmatrix} -3 \\ \blacksquare \end{bmatrix}$
4↵	$u := \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

ในทำนองเดียวกันกำหนด $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

การหาค่า u + v , 4u , u dot v , |u|

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
u=↵	$u = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$
v=↵	$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
การบวกเวกเตอร์	
u+v=↵	$u + v = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$
สเกลาร์คูณเวกเตอร์	
4*u=↵	$4 \cdot u = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix}$
u dot v	
u*v=↵	$u \cdot v = 5$
การหาขนาดของเวกเตอร์	
|	$\lvert \blacksquare \rvert$

u=↵	$\lvert u \rvert = 5$
|v=↵	$\lvert v \rvert = 2.236068$

ผลการคำนวณบนจอภาพคือ

$$u := \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad v := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

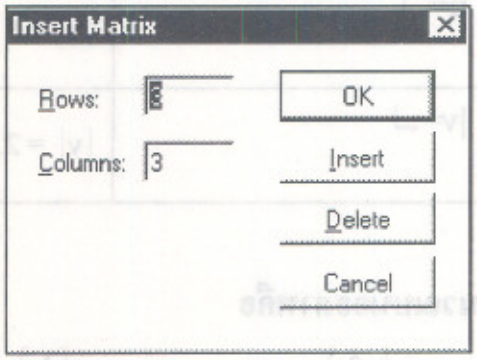
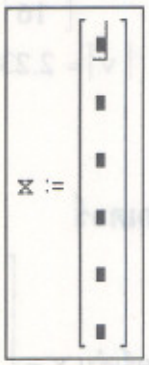
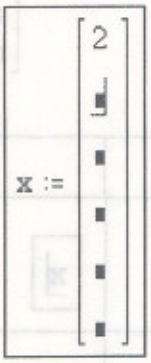
$$u + v = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad 4 \cdot u = \begin{bmatrix} -12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\lvert u \rvert = 5 \qquad \lvert v \rvert = 2.236 \qquad u \cdot v = 5$$

2.6 การกำหนดข้อมูลในรูปแบบเวกเตอร์

สำหรับข้อมูลที่อยู่ในรูปแบบของเวกเตอร์เช่น $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x	$\boxed{x}$
:	$\boxed{x := \blacksquare}$
<Ctrl>+M	บนจอภาพจะมีเมนูให้เติมจำนวนแถวและหลัก

	 ให้พิมพ์ Rows: 6 และ Column: 1 เสร็จแล้วคลิก OK จะได้ผลบนจอเป็น 
2<Tab>	

3<Tab> 5<Tab> 7<Tab> 8<Tab> 15<Tab>↵	$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$

ใน MATHCAD มีฟังก์ชันที่ช่วยคำนวณค่าทางด้านสถิติของข้อมูลดังนี้

mean(x) = ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลใน x

var(x) = ค่าความแปรปรวนของข้อมูลใน x

stdev(x) = ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลใน x

length(x) = จำนวนข้อมูลใน x

median(x) = ค่ามัธยฐาน ของข้อมูล ใน x

max(x) = ค่าสูงสุดของข้อมูลใน x

min(x) = ค่าต่ำสุดของข้อมูลใน x

ตัวอย่างเช่น mean(x) = 6.666667

var(x) = 18.222222

stdev(x) = 4.268749

length(x) = 6

median(x) = 6

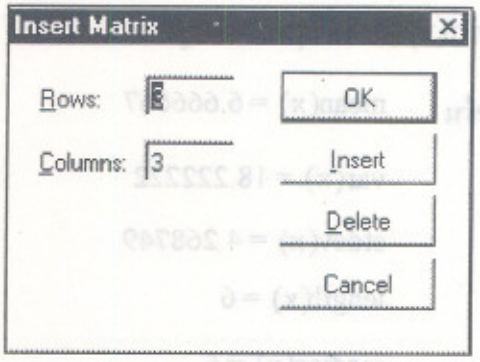
max(x) = 15

min(x) = 2

2.7 การกำหนดข้อมูลในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างเช่นต้องการกำหนดข้อมูลเป็น

X	Y
1	7
2	8
3	9
4	10
5	11
6	12

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x	x
:	x :=
<Ctrl>+M	บนจอภาพจะมีเมนูให้เติมจำนวนแถวและหลัก  ให้พิมพ์ Rows: 6 และ Column: 2

	$x := \begin{bmatrix} \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$
1<Tab>	$x := \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \\ \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix}$
7<Tab> 2<ab> 8<Tab> 3<Tab> 9<Tab> 4<Tab> 10<Tab> 5<Tab> 11<Tab> 6<Tab> 12↵	$x := \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \\ 3 & 9 \\ 4 & 10 \\ 5 & 11 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$
ORIGIN:1↵	ORIGIN:= 1

x<Ctrl>^1=↵ หมายเหตุ $x^{<1>}$ เป็นการเลือกเฉพาะหลักที่ 1 มาใช้งาน	$x^{<1>} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$
x<Ctrl>^2=↵	$x^{<2>} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}$
x[(1,1)=↵	$x_{(1,1)} = 1$
x[(2,1)=	$x_{(2,1)} = 2$

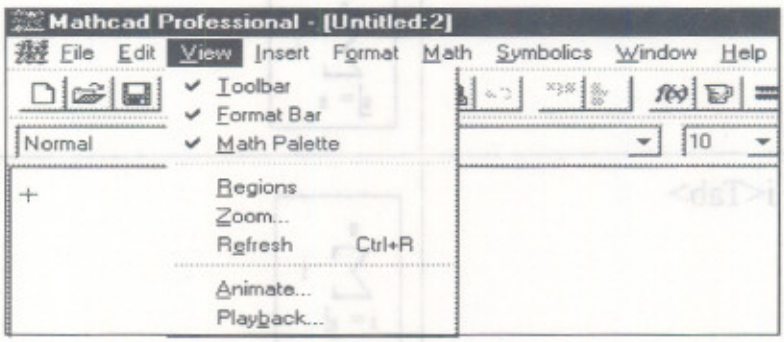
หมายเหตุ ค่าปกติของตัว subscript และ superscript จะมีค่าเริ่มต้นที่ 0 แต่เนื้อหาทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเมทริกซ์ เราต้องการให้ subscript และ superscript จะมีค่าเริ่มต้นที่ 1 ดังนั้นหากผลการคำนวณไม่ถูกต้องขอให้ตรวจสอบค่า ORIGIN := 1 พิมพ์ถูกต้องหรือไม่

2.8 การคำนวณค่าเกี่ยวกับผลบวกในรูปแบบ $\sum$

ตัวอย่างเช่นการหาค่าของ $\sum_{i=1}^{10} i$, $\sum_{i=1}^{10} i^2$, $\sum_{i=1}^{10} (i^2 - 4i - 5)$

ขั้นที่ 1 เรียกแถบสัญลักษณ์ของการคำนวณคลิกที่เมนู View

ขั้นที่ 2 คลิกที่เมนูย่อย Math Palette



เมื่อคลิกที่เมนูย่อย Math Palette จะได้ แถบสัญลักษณ์

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่สัญลักษณ์ 	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้ 

คลิกที่สัญลักษณ์ $\sum_{n=1}^{\blacksquare}$	$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$
i<Tab>	$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} i$
i<Tab>	$\sum_{i=\blacksquare}^{\blacksquare} i$
1<Tab>	$\sum_{i=1}^{\blacksquare} i =$
10=↵	$\sum_{i=1}^{10} i = 55$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$

$$\left[\sum_{i=1}^{10}\left(i^2 - 4\cdot i - 5\right)\right] = 115$$

2.9 การคำนวณค่าปริพันธ์ $\int_a^b f(x)\,dx$

ตัวอย่างเช่นการหาค่าของ $\int_0^1 x^2\,dx$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่สัญลักษณ์ 	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้ 
คลิกที่สัญลักษณ์ 	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} \blacksquare\, d\blacksquare$
x^2<Tab>	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} x^2\, d\blacksquare$
x<Tab>	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare} x^2\, dx$

0<Tab>	$\int_0^{\blacksquare} x^2\,dx$
1=↵	$\int_0^1 x^2\,dx = 0.333$

หมายเหตุ ในกรณีที่เรากำหนด $f(x) = x^2$ จะทำให้การคำนวณสะดวกขึ้นดังนี้

$f(x) := x^2$

$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.333333$ $\qquad$ $\int_{-1}^1 f(x)\,dx = 0.666667$

$\int_1^2 f(x)\,dx = 2.333333$

หรือจะกำหนดสูตรอื่นๆ ก็ได้เช่น $\int_0^1 \left(x^3 + x + 1\right) dx = 1.75$

2.10 การคำนวณค่าอนุพันธ์ $\frac{d}{dx}f(x)$ หรือ $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$

ตัวอย่างเช่น การคำนวณ $\frac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ $f(x) = x^2$ ที่ $x = 1$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x):x^2↵	$f(x) := x^2$
x:1↵	$x := 1$

คลิกที่สัญลักษณ์ $\int \frac{d^2y}{dx}$	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้ 
คลิกที่สัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}$	$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$
f(x)<Tab>	$\frac{d}{d\blacksquare}f(x)$
x=↵	$\frac{d}{dx}f(x) = 2$

การคำนวณ $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$ เมื่อ $f(x) = x^4$ ที่ $x = 2$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x):x^4↵	$f(x) := x^4$
x:2↵	$x := 2$
คลิกที่สัญลักษณ์ $\int \frac{d^2y}{dx}$	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้

	
คลิกที่สัญลักษณ์ 	$\frac{d^{\blacksquare}}{d\,\blacksquare^{\blacksquare}}\,\blacksquare$
f(x)<Tab>	$\frac{d^{\blacksquare}}{d\,\blacksquare^{\blacksquare}}\,f(x)$
x<Tab>	$\frac{d^{\blacksquare}}{d\,x^{\blacksquare}}\,f(x)$
2=↵	$\frac{d^{2}}{d\,x^{2}}\,f(x) = 48$

หมายเหตุ สัญลักษณ์บน Keyboard ที่แทน $\frac{d}{d\,\blacksquare}\,\blacksquare$ คือ เครื่องหมาย ?

2.11 การกำหนดหน่วยให้กับผลการคำนวณ

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
sin(30)=↵	sin(30) = -0.988032 หมายเหตุ ขณะนี้คอมพิวเตอร์จะคิดเป็นหน่วยเรเดียน
sin(30*deg)=↵	sin(30·deg) = 0.5 หมายเหตุ 30.deg คือ 30 องศา
atan(1)=	atan(1) = 0.785 หมายเหตุ ขณะนี้คอมพิวเตอร์จะคิดเป็นหน่วยเรเดียน
<Tab>	atan(1) = 0.785
deg↵	atan(1) = 45 ·deg

ในทำนองเดียวกัน

$\cos(30) = 0.154251$ $\qquad$ $\cos(30 \cdot deg) = 0.866025$

$\mathrm{asin}(1) = 1.570796$ $\qquad$ $\mathrm{asin}(1) = 90 \cdot deg$

$s := 1000 \cdot m$ $\qquad$ $t := 5 \cdot sec$ $\qquad$ $\frac{s}{t} = 200 \cdot m \cdot sec^{-1}$

$s := 12000 \cdot cm$ $\qquad$ $t := 2 \cdot min$ $\qquad$ $\frac{s}{t} = 1 \cdot m \cdot sec^{-1}$

2.12 การคำนวณในรูปแบบของเลขฐานอื่นๆ

ตัวอย่างเช่น 12o + 17o = 25

10o × 10o = 64

1oh + 10h = 32

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
12o+17o=↵	12o + 17o = 25 หมายเหตุ 12 ฐาน 8 บวก 17 ฐาน 8 ได้ 25 ฐาน 10
10o*10o=↵	10o·10o = 64 หมายเหตุ 10 ฐาน 8 คูณ 10 ฐาน 8 ได้ 64 ฐาน 10
10h+10h=↵	10h + 10h = 32 หมายเหตุ 10 ฐาน 16 บวก 10 ฐาน 16 ได้ 32 ฐาน 10

2.13 การหาผลบวกในรูปแบบ $\sum x_i$

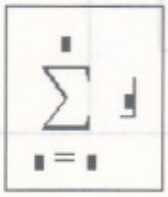
ตัวอย่างการคำนวณเช่น

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 30 \qquad \sum_{i=1}^{6} (x_i)^2 = 224 \qquad \sum_{i=1}^{6} y_i = 50$$

$$\sum_{i=1}^{6} (x_i)^2 = 224 \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot y_i = 369$$

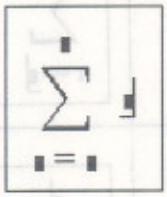
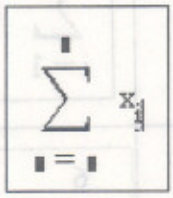
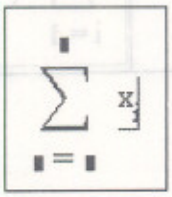
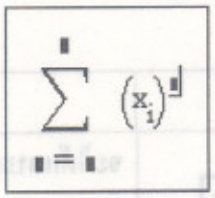
การกำหนดเมทริกซ์ x และ y ดูที่หัวข้อ 2.6 การพิมพ์เพื่อหาผลบวก $\sum_{i=1}^{6} x_i = 30$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่สัญลักษณ์ 	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้ 
คลิกที่สัญลักษณ์ 	

x[i<Tab>	$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare} x_{\blacksquare}$
i<Tab>	$\sum_{i=\blacksquare}^{\blacksquare} x_i$
1<Tab>	$\sum_{i=1}^{\blacksquare} x_i$
6=↵	$\sum_{i=1}^{6} x_i = 30$

การพิมพ์เพื่อหาผลบวก $\sum_{i=1}^{6} (x_i)^2 = 224$

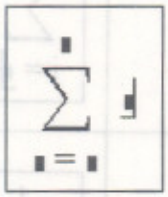
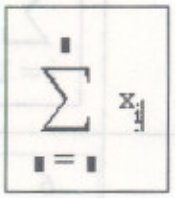
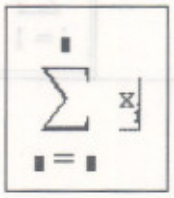
พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่สัญลักษณ์ $\int \frac{d^2y}{dx^2}$	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้

	
คลิกที่สัญลักษณ์ 	
x[i	
<Space Bar>	
^	

2<Tab>	$\sum_{i=1}^{1} (x_i)^2$
i<Tab>	$\sum_{i=1}^{1} (x_i)^2$
1<Tab>	$\sum_{i=1}^{1} (x_i)^2$
6=↵	$\sum_{i=1}^{6} (x_i)^2 = 224$

การพิมพ์เพื่อหาผลบวก $\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot y_i = 369$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่สัญลักษณ์ $\int \frac{d^2y}{dx}$	จะได้แถบเครื่องมือดังนี้

	
คลิกที่สัญลักษณ์ 	
x[i	
<Space Bar>	
*	

y[i<Tab>	$\sum_{i=\blacksquare}^{\blacksquare} x_i \cdot y_i$
i<Tab>	$\sum_{i=\blacksquare}^{\blacksquare} x_i \cdot y_i$
1<Tab>	$\sum_{i=1}^{\blacksquare} x_i \cdot y_i$
6=↵	$\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot y_i = 369$

2.14 การสร้างตารางฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น

$x := 1..4 \qquad f(x) := 2 \cdot x + 4$

x	f(x)
1	6
2	8
3	10
4	12

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x:1;4↵	x := 1 .. 4
f(x):2*x+4↵	f(x) := 2·x + 4
x=↵	x 1 2 3 4
f(x)=	f(x) 6 8 10 12

ในกรณีที่ค่า x เพิ่มไม่เท่ากันสามารถคำนวณในรูปแบบตารางได้ดังนี้

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad f(x) := 2 \cdot x + 100 \qquad f(x) = \begin{bmatrix} 104 \\ 114 \\ 116 \\ 124 \end{bmatrix}$$

2.15 การคำนวณค่าเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน

ตัวอย่างเช่น **(3 + 5i) + (2 – 3i) = 5 + 2i**

| 3 + 4i | = 5

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
z : 3+5i↵	z := 3 + 5i
w : 2–3i↵	w := 2 – 3i
z+w=↵	z + w = 5 + 2i
|	$\boxed{\lvert \blacksquare \rvert}$
z=↵	|z| = 5.831

2.16 การหารากของสมการ f(x) = 0

ตัวอย่างเช่น การหารากของสมการ $x^2 - 2 = 0$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x):x^2	$\boxed{f(x) := x^2}$
<Space Bar>	$\boxed{f(x) := x^2}$
–2↵	$\boxed{f(x) := x^2 - 2}$

x:1↵	x := 1
root(f(x),x)=↵	root(f(x), x) = 1.414

หมายเหตุ คำสั่ง root เป็นคำสั่งที่ใช้หารากของสมการ f(x) = 0 โดยวิธีของนิวตัน โดยกำหนดจุดเริ่มต้นของการหารากที่ x = 0

ตัวอย่างการหารากของสมการอื่น ๆ เช่น

$f(x) := x^2 - 3$	x := 1	root(f(x), x) = 1.732
	x := -1	root(f(x), x) = -1.732
$f(x) := x^2 + x - 2$	x := 1	root(f(x), x) = 1
	x := -1	root(f(x), x) = -2

2.17 การหาคำตอบของระบบสมการ

ตัวอย่างเช่น การหาคำตอบของระบบสมการ

$$2x + 3y = 8$$
$$x + y = 3$$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x:0↵	x := 0
y:0↵	y := 0
Given↵	Given
2*x+3*y	$2 \cdot x + 3 \cdot y$

<Ctrl>+= หมายเหตุกด <Ctrl>+= จะได้สัญลักษณ์ = ตามรูปแบบของชุดคำสั่ง Given	$2 \cdot x + 3 \cdot y = \blacksquare$ หมายเหตุ เครื่องหมาย = ในชุดคำสั่ง Given ต้องได้มาจาก การกด <Ctrl>+=
8↵	$2 \cdot x + 3 \cdot y = 8$
x+y	$x + y$
<Ctrl>+=	$x + y = \blacksquare$
3↵	$x + y = 3$
Find(x,y)=↵	$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

หมายเหตุ ชุดคำสั่ง Given และ Find เป็นคำสั่งที่ใช้หาคำตอบของระบบสมการด้วยวิธีของนิวตันโดยกำหนดจุดเริ่มต้นของการหาคำตอบ x = 0 และ y = 0 ตัวอย่างอื่นๆ เช่น

$x := 1$

$y := 1$

Given

$x^2 + y^2 = 1$

$x - y = 0$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

2.18 การคำนวณค่า ${}^{n}C_{r}$ และ ${}^{n}P_{r}$

จากสูตร ${}^{n}C_{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ เราสามารถกำหนดเป็นสูตรในโปรแกรม MATHCAD ได้ดังนี้

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
C(n,r):	$C(n,r) := \blacksquare$
n!/	$C(n,r) := \dfrac{n!}{\blacksquare}$
r!*	$C(n,r) := \dfrac{n!}{r!\cdot\blacksquare}$
(n–r)!↵	$C(n,r) := \dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$
C(5,1)= ↵	$C(5,1) = 5$
C(5,2)= ↵	$C(5,2) = 10$

ตัวอย่างการใช้งาน

$C(10,2) = 45$

$C(20,12) = 125970$

$C(20,8) = 125970$

จากสูตร ${}^{n}P_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
P(n,r):	$P(n,r) := \blacksquare$
n!/	$P(n,r) := \dfrac{n!}{\blacksquare}$
(n–r)!↵	$P(n,r) := \dfrac{n!}{(n-r)!}$
P(5,1)= ↵	$P(5,1) = 5$
P(5,2)= ↵	$P(5,2) = 20$

ตัวอย่างการใช้งาน

$P(10,1) = 10$

$P(10,10) = 3628800$

$P(10,5) = 30240$

2.19 การคำนวณที่ให้ผลลัพธ์เป็นสูตร

โปรแกรม MATHCAD สามารถคำนวณและแสดงผลออกมาในรูปแบบของสูตรได้เช่น

การกระจายพหุนาม $(x-1)\cdot(x+2)$ กระจายได้เป็น x^2+x-2

การแยกตัวประกอบ

$x^4-2\cdot x^2-3\cdot x-2$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x-2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

การจัดรูปแบบทางพีชคณิต $\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ จัดรูปแบบทางพีชคณิตได้เป็น $-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}$

การหาอนุพันธ์เป็นสูตร $\frac{d}{dx}\left(3\cdot x^2+4\cdot x+1\right)$ ผลการหาอนุพันธ์ $6\cdot x+4$

การหาปริพันธ์เป็นสูตร $\int x^2\,dx$ ผลการคำนวณเป็นสูตรคือ $\frac{1}{3}\cdot x^3$

สามารถหาค่าลิมิตได้ $\lim_{x\to 1} x^2+x+1$ หาค่าลิมิตได้เป็น 3

การคำนวณมีขั้นตอนดังนี้

1. **เลือกบริเวณที่ต้องการคำนวณ**
2. **เลือกคำสั่งที่ต้องการ**

ตัวอย่างเช่น

การกระจายพหุนาม $(x-1)\cdot(x+2)$ กระจายได้เป็น x^2+x-2

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
(x–1)*(x+2)↵	$(x-1)\cdot(x+2)$
<Space bar>	$(x-1)\cdot(x+2)$
คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น

	Symbolics Window Help Evaluate ▸ Simplify Expand Factor Collect Polynomial Coefficients Variable ▸ Matrix ▸ Transform ▸ Evaluation Style...
คลิกที่ Expand บนแถบเมนู	จะได้ผลของการกระจายคือ $x^2 + x - 2$

หมายเหตุ 1. การกด <Space bar> จะเป็นการกำหนดบริเวณที่ จะทำการคำนวณ ซึ่งอาจจะต้องกดหลายครั้งเพื่อให้คลุมบริเวณที่ต้องการ

2. การสั่งอีกแบบคือ <Alt>+s แล้วกด x

3. การลดขนาดของบริเวณ สี่เหลี่ยมที่คลุมสูตรให้กด ↓

การแยกตัวประกอบ

$x^4 - 2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(x-2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
x^4<Space bar>-2*x^2 <Space bar>-3*x-2↵	$x^4 - 2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2$
กด <Space bar> 5 ครั้ง หมายเหตุ การกด <Space bar> แต่ละครั้งจะมีเส้นตั้งฉากเพิ่มขึ้นมาคลุมสูตรที่เราจะทำการคำนวณ	$x^4 - 2\cdot x^2 - 3\cdot x - 2$

คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น Symbolics Window Help Evaluate Simplify Expand Factor
คลิกที่ Factor บนแถบเมนู	จะได้ผลของการแยกตัวประกอบคือ $(x-2)\cdot(x+1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$

การจัดรูปแบบทางพีชคณิต

$\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ จัดรูปแบบทางพีชคณิตได้เป็น $-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
2/	$\frac{2}{\square}$
\2<Space bar>	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
+\3<Space bar>	$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

กด <Space bar> 3 ครั้ง	$\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น Symbolics Window Help Evaluate Simplify Expand Factor
คลิกที่ Factor บนแถบเมนู	จะได้จัดรูปคือ $-2\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{3}$

การหาอนุพันธ์เป็นสูตร $\frac{d}{dx}x^2$ ผลการหาอนุพันธ์ $2\cdot x$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
?	$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$
x^2 <Tab>	$\frac{d}{d\blacksquare}x^2$
x	$\frac{d}{dx}x^2$

<Space bar>	$\frac{d}{dx}x^2$
คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น Symbolics Window Help Evaluate Simplify Expand Factor
คลิกที่ Simplify บนแถบเมนู	$2\cdot x$

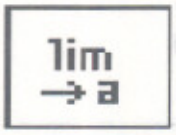
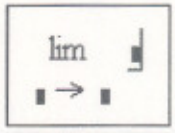
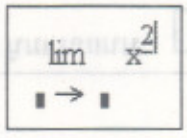
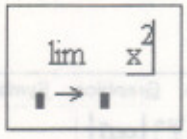
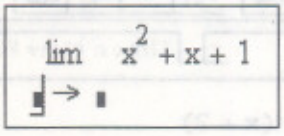
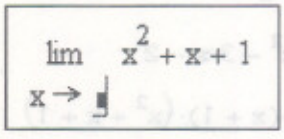
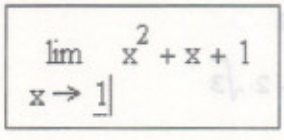
การหาปริพันธ์เป็นสูตร $\int x^2\,dx$ ผลการคำนวณเป็นสูตรคือ $\frac{1}{3}\cdot x^3$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่ $\int\frac{d^2y}{dx^2}$	จะได้แถบเครื่องมือ
คลิกที่ $\int$	$\int \blacksquare\, d\blacksquare$

x^2 <Tab>	$\int x^2 \, d\blacksquare$
x	$\int x^2 \, dx$
<Space bar>	$\int x^2 \, dx$
คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น Symbolics Window Help Evaluate Simplify Expand Factor
คลิกที่ Simplify บนแถบเมนู	$\frac{1}{3} \cdot x^3$

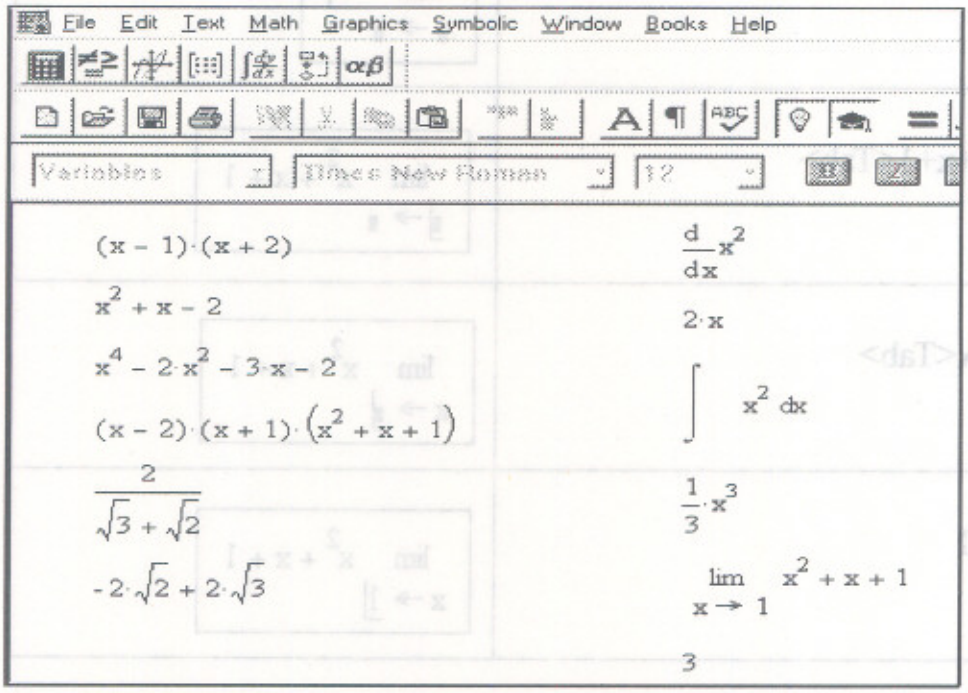
การหาค่าลิมิต ตัวอย่างเช่น $\lim_{x \to 1} x^2 + x + 1$ หาค่าลิมิตได้เป็น 3

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิกที่ $\int \frac{dy}{dx}$	จะได้แถบเครื่องมือ

	
คลิกที่ 	
x^2	
<Space bar>	
+x+1<Tab>	
x<Tab>	
1	

<Space bar>	$\lim_{x \to 1} x^2 + x + 1$
คลิกที่ Symbolic บนแถบเมนู	จะได้เมนูย่อยเป็น Symbolics Window Help Evaluate Simplify Expand Factor
คลิกที่ Simplify บนแถบเมนู	3

ผลการคำนวณทั้งหมดบนจอภาพคือ



แบบฝึกหัด 2.

1. จงคำนวณค่าต่อไปนี้

1.1 $25+(12)(15)$ 1.2 $e^{1.5}$ 1.3 $\log(14)$

1.4 $\sin(\frac{\pi}{24})$ 1.5 $\ln(1440)$ 1.6 $1!+2!+3!+4!+5!$

1.7 $\sqrt[5]{16}$ 1.8 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 1.9 $\arctan(2)$

2. จงคำนวณเขียนกราฟฟังก์ชัน $f(x)=x^3+x-2$ บนช่วง $[-4,4]$

3. จงคำนวณค่า

3.1 $1+2+3+4+\ldots+100$ 3.2 $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+100^2$

3.3 $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{100}}$ 3.4 $(1)(3)+(3)(5)+\ldots+(101)(103)$

4. จงคำนวณค่า $\sum_{n=1}^{20} n(n+1)(n+2)$ และ $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{n^2}$

5. กำหนด $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&3&4\\0&4&3\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&-3&1\\2&-1&1\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

5.1 $A+B$ 5.2 $\det(A)$ 5.3 $\det(B)$

6. กำหนด $u=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$, $v=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

6.1 $|u|$ 6.2 $|v|$ 6.3 $2u+3v$ 6.4 มุมระหว่าง u และ v 6.5 uv

7. จงหาผลคูณของ

7.1 $(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$ 7.2 $(x^3-1)\cdot(x^2+x+1)\cdot(x^2+1)$

8. จงแยกตัวประกอบ

8.1 $x^{10}+6\cdot x^6+2\cdot x^8+12\cdot x^4+5\cdot x^2+10$ 8.2 $x^6+x^2+3\cdot x^5+3\cdot x+2\cdot x^4+2$

9. จงหาอนุพันธ์ของ

9.1 x^6+x^3-3x+5 9.2 $\frac{x^2+x+1}{x-1}$

10. จงหาค่าปริพันธ์

10.1 $\int x^2+x-1\,dx$ 10.2 $\int \frac{x+1}{2\cdot\sqrt{x}}\,dx$

11 จงหาสูตรผลบวกของ $\sum_{i=1}^{n} i^4 \quad \sum_{i=1}^{n} i^5 \quad \sum_{i=1}^{n} (i+1)\cdot(i-1)$

12. จงหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน ความแปรปรวน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูล

12.1 1 , 2 , 3 , 5 , 7

12.2 12 , 23 , 25 , 28 , 35

12.3 12 , 13 , 14 , 15 , 17 , 19 , 22 , 25 , 23 , 35 , 40

13. กำหนด $z = 3 + 4i$, $w = 5 - 2i$ จงหาค่าของ

13.1 $3z + 2w$ 13.2 zw 13.3 $|z + w|$

13.4 $\frac{z}{w}$ 13.5 $z^4 + w^2$

14. จงหารากของสมการ

14.1 $x^3 - 4 = 0$ 14.2 $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$

15. จงหาคำตอบของระบบสมการ

15.1
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 6 \\ 2x + y - 3z &= 10 \\ x + 2y + 3z &= 12 \end{aligned}$$

15.2
$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ x^2 + y^2 &= 36 \end{aligned}$$

16. จงหาลิมิตต่อไปนี้

16.1 $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 16.2 $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 16.3 $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$

16.4 $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|\sqrt{x}-1|}$ 16.5 $\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{|\sqrt{x}-1|}$ 16.6 $\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1}{|\sqrt{x}-1|}$

17. กำหนดข้อมูล

x	6	12	13	24	25	36
y	21	45	58	63	81	120

17.1 จงหาค่า $\sum_{i=1}^{6} x_i$, $\sum_{i=1}^{6} y_i$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{6} y_i^2$, $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i$

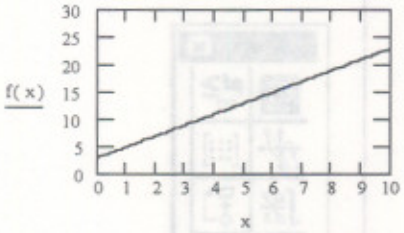
17.2 จงหาสมการ $y = mx + c$

บทที่ 3

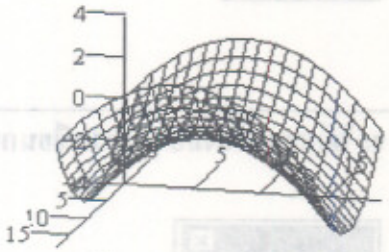
การเขียนกราฟด้วย MATHCAD

ในบทที่ 3 นี้จะเป็นทำงานเกี่ยวกับเขียนกราฟรูปแบบต่างๆ เพื่อให้ได้ทั้งความเหมาะสม และ ความสวยงาม ตัวอย่างของกราฟบางรูปแบบที่โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD ทำได้เช่น

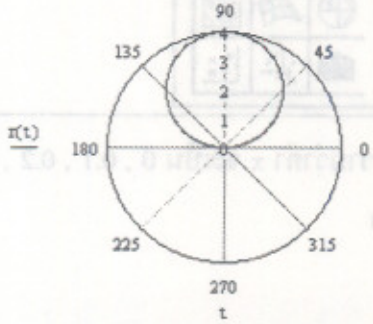
กราฟ 2 มิติ



กราฟ 3 มิติ

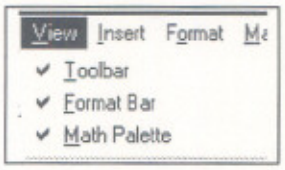


กราฟในพิกัดเชิงขั้ว

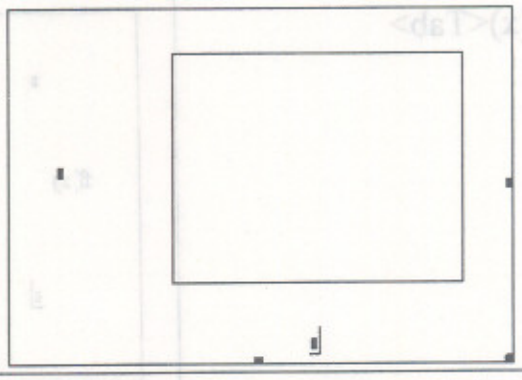
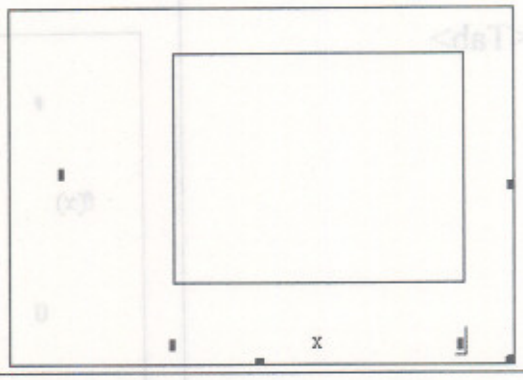
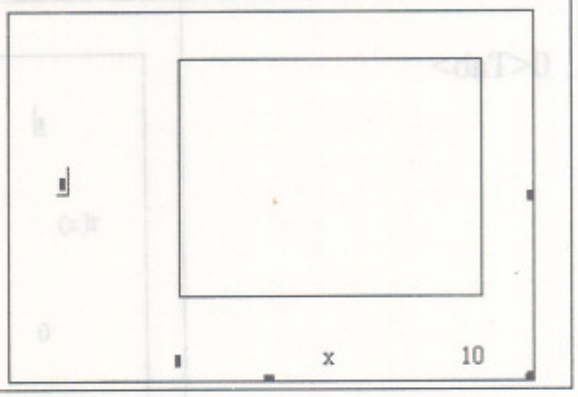


3.1 การเขียนกราฟของ y = f(x)

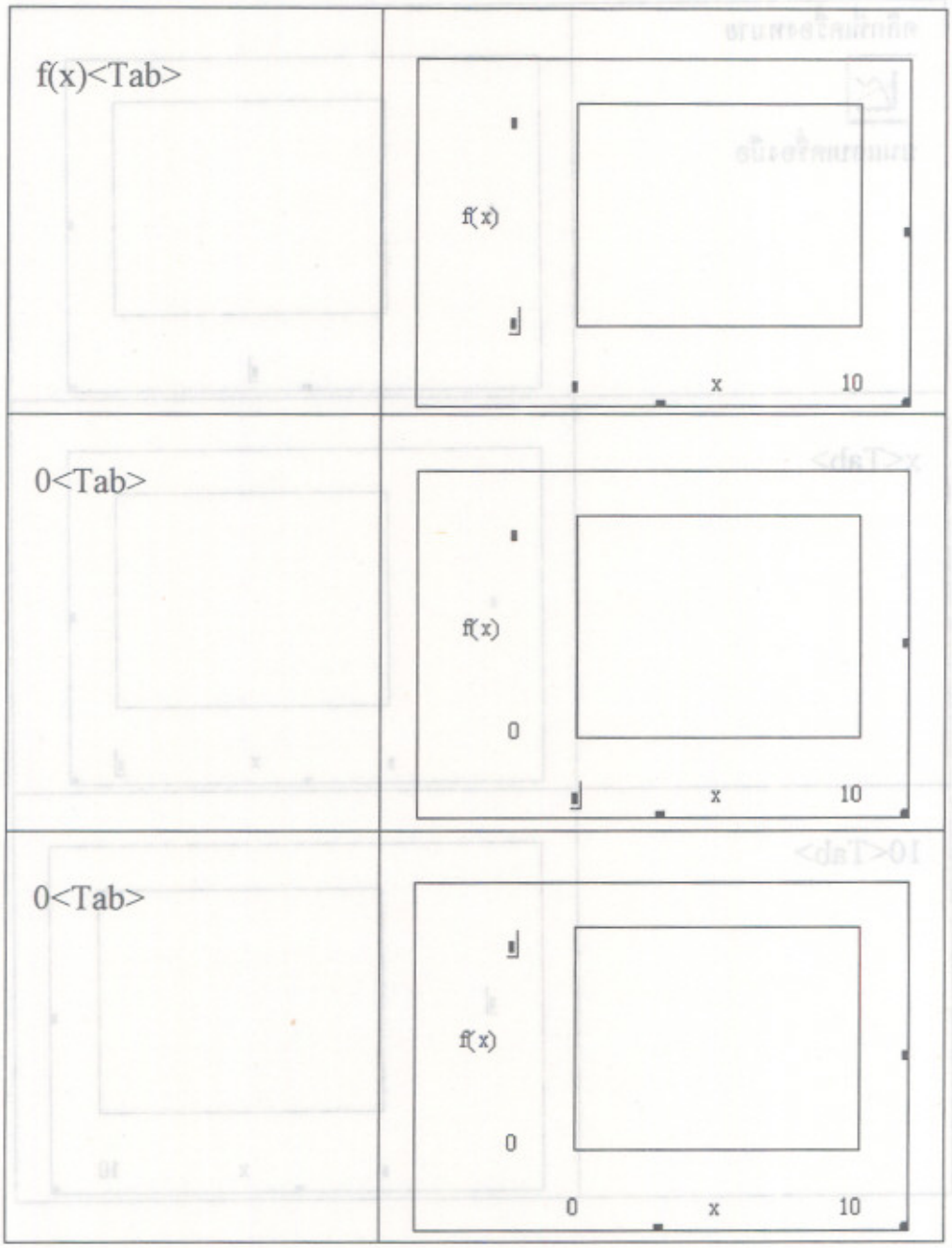
ตัวอย่างเช่นการเขียนกราฟของ f(x) = 2 x + 3 บนช่วง [0 , 10]

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x)	f(x) :=
2*x+3↵	f(x) := 2·x + 3
x:0,0.1;10	x := 0, 0.1 .. 10
เรียกชุดเครื่องมือ โดยการคลิกที่ View และ เลือก Math Palette 	จะได้แถบเครื่องมือ 
คลิกที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ	จะได้แถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ 

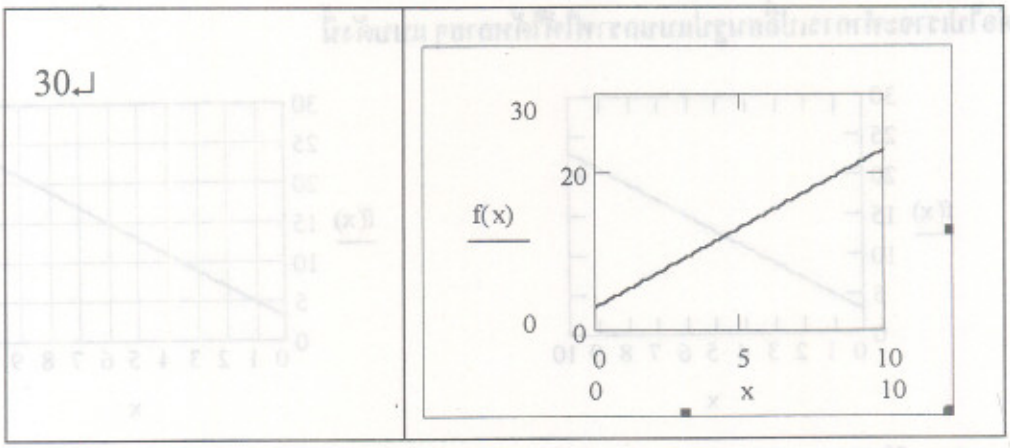
หมายเหตุ การกำหนด x := 0,0.1..10 หมายความว่าค่า x จะเป็น 0 , 0.1 , 0.2 , 0.3 , 0.4 , ... , 10 เพราะฉะนั้นจะมีการ Plot จุดทั้งหมด 101 จุด

คลิกที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือ	
x<Tab>	
10<Tab>	

หมายเหตุ ในทางปฏิบัติจริง เรายังไม่ต้องพิมพ์ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ของ x ก็ได้ เพราะว่า โปรแกรม Mathcad จะนำค่า x ที่เรากำหนด x := 0,0.1..10 ไว้มาใช้

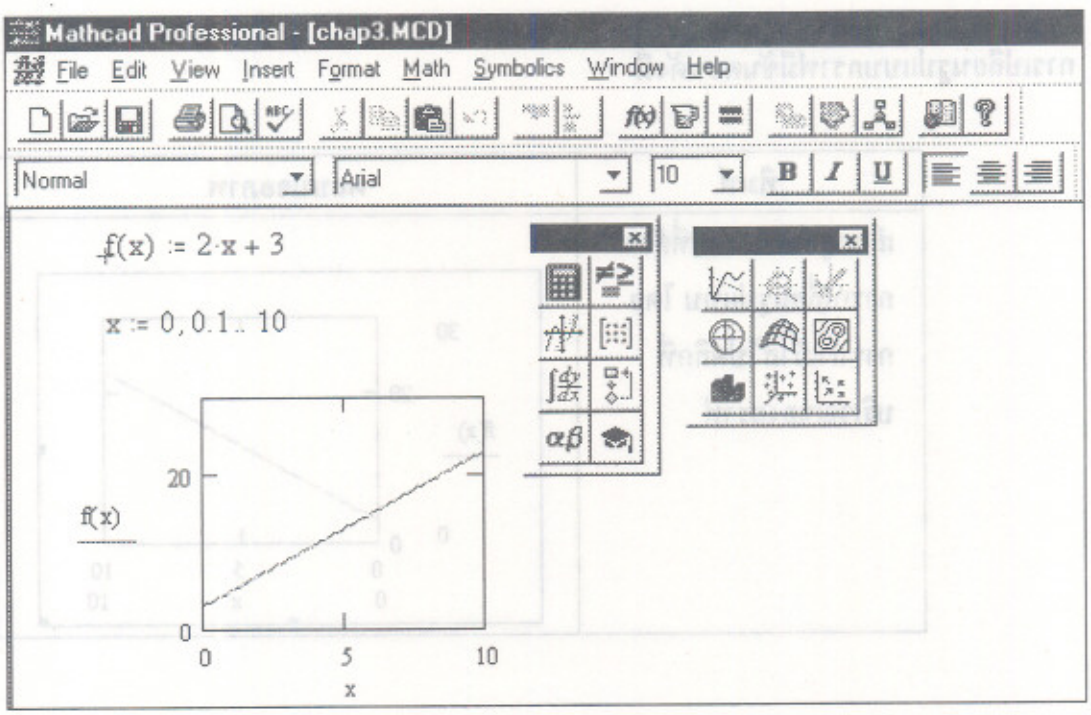


หมายเหตุ ในทางปฏิบัติจริง เรายังไม่ต้องพิมพ์ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ของ f(x) ก็ได้ เพราะว่าโปรแกรม Mathcad จะทำการคำนวณและเติมค่าให้เอง เพื่อให้เราสามารถเปลี่ยนแปลงค่าภายหลังตามความเหมาะสม

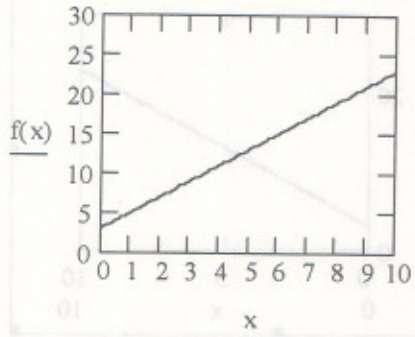


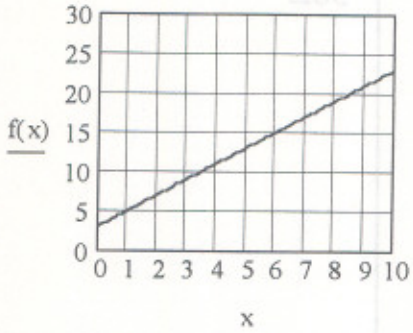
หมายเหตุ กดสัญลักษณ์ @ บนแป้นพิมพ์จะได้รูปแบบของการเขียนกราฟเหมือนกัน

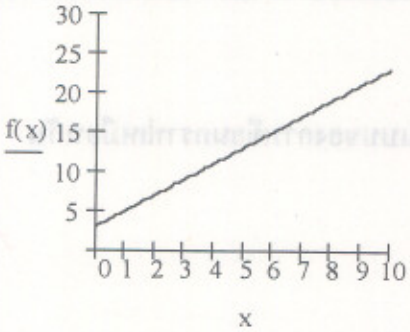
กราฟที่ได้บนจอภาพคือ

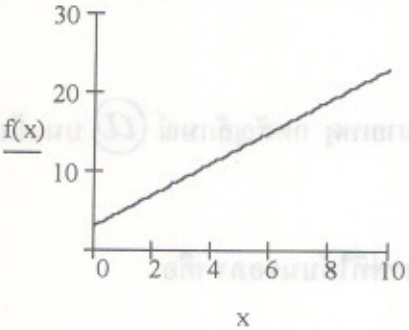


ต่อไปเราจะทำการเปลี่ยนรูปแบบกราฟให้ได้หลายๆ แบบดังนี้

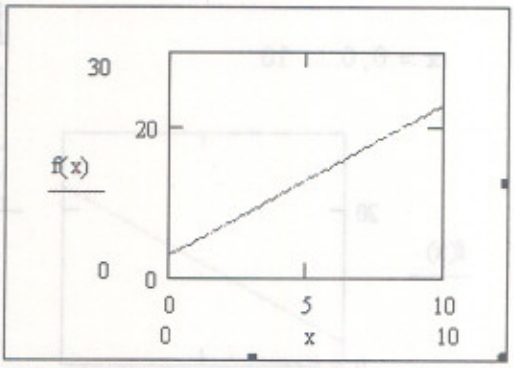


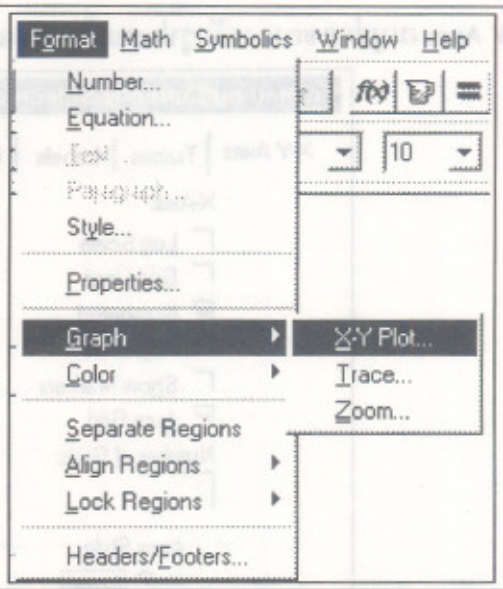
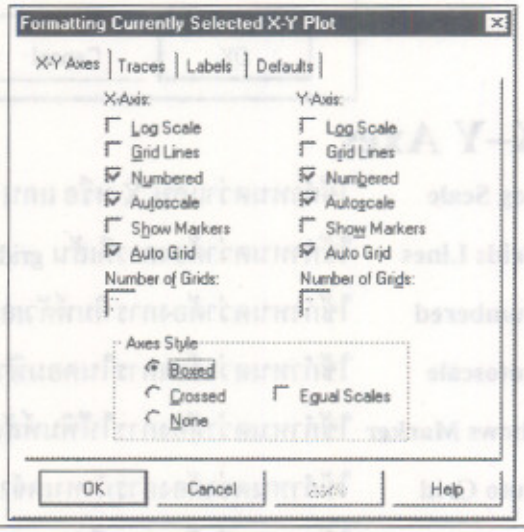






การเปลี่ยนรูปแบบกราฟมีขั้นตอนดังนี้

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
เลือกรูปของกราฟที่ต้องการเปลี่ยนรูปแบบ โดยการนำเม้าส์ไปคลิกที่บริเวณของกราฟ	

คลิกที่คำสั่ง **Format** ที่เมนูบาร์ เลือกเมนูย่อย **Graph**	
คลิกที่คำสั่ง **X-Y Plot**	จะได้แถบของคำสั่งย่อยต่างๆ ดังนี้ 

หมายเหตุ วิธีที่สะดวกที่สุดในการเปลี่ยนรูปแบบกราฟคือกดดับเบิลคลิกในบริเวณของกราฟที่เราต้องการจัดรูปแบบ

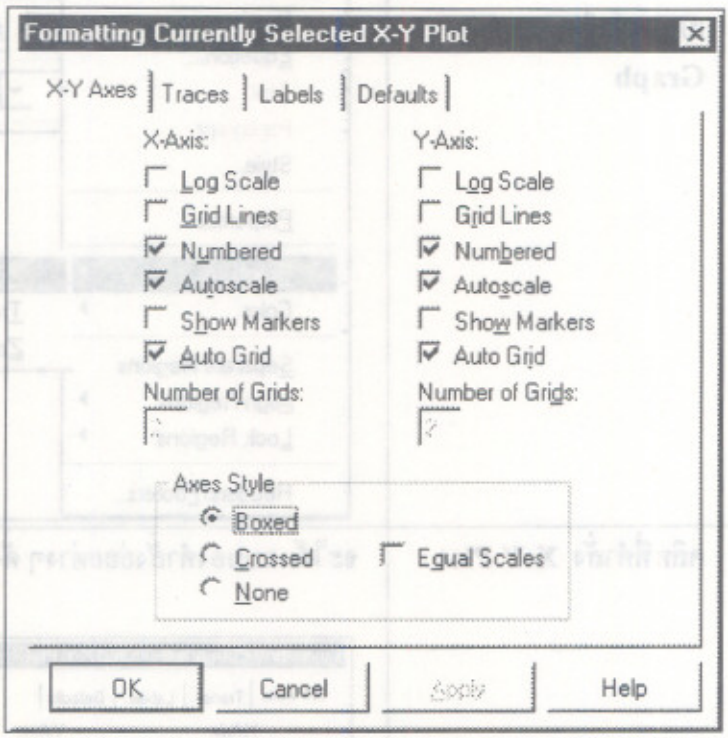
เมนูย่อยที่มีคือ **X-Y Axes** เมนูย่อยเกี่ยวกับลักษณะของกรอบ และ สเกล

Traces เมนูย่อยเกี่ยวกับลักษณะของเส้นกราฟ สีของกราฟ การพล็อตจุด

Labels เมนูย่อยเกี่ยวกับการพิมพ์ชื่อของ แกน X แกน Y

Defaults เมนูย่อยของการกำหนดค่ามาตรฐานของการเขียนกราฟ

X-Y Axes เมนูย่อยของการจัดรูปแบบเกี่ยวกับแกนพิกัด



X–Y Axes

Log Scale ใช้กำหนดว่าแกน X หรือ แกน Y เป็นสเกล log

Grids Lines ใช้กำหนดว่าต้องการตีเส้น grid หรือไม่

Numbered ใช้กำหนดว่าต้องการพิมพ์ตัวเลขที่แกน X หรือ แกน Y หรือไม่

Autoscale ใช้กำหนดว่าต้องการในคอมพิวเตอร์คำนวณสเกลให้หรือไม่

Shows Marker ใช้กำหนดว่าต้องการให้พิมพ์สัญลักษณ์ที่ Plot กราฟหรือไม่

Auto Grid ใช้กำหนดว่าต้องการกำหนดจำนวน grid เองหรือไม่

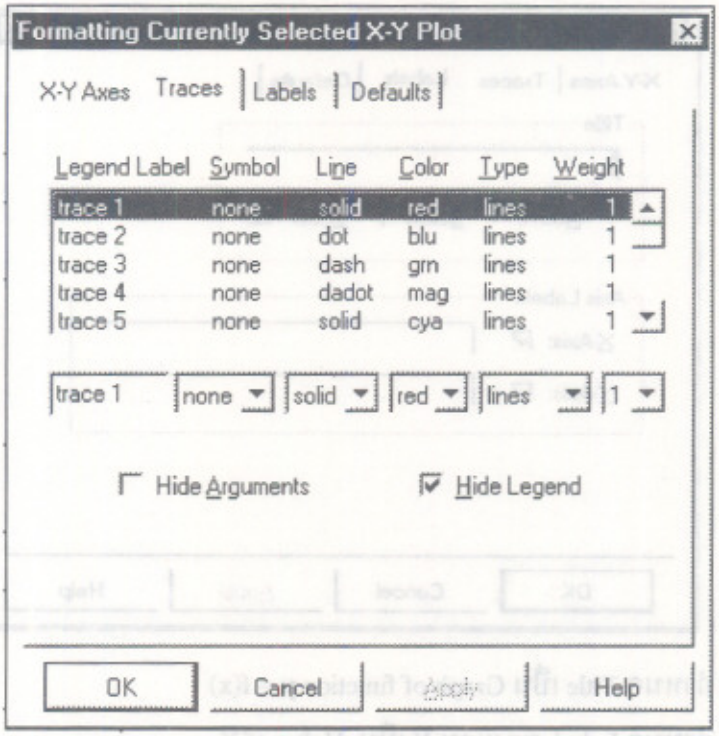
Boxed ใช้กำหนดว่าต้องการเขียนกราฟในกรอบสี่เหลี่ยม

Crossed ใช้กำหนดว่าต้องการเขียนกราฟโดยไม่มีกรอบสี่เหลี่ยมล้อมรอบ

None เป็นการกำหนดว่าไม่ต้องเขียนแกน X และ แกน Y

หมายเหตุ มีเครื่องหมาย ถูก ในช่องสี่เหลี่ยมแปลว่าต้องการทางเลือก (Option) นั้น

Traces เมนูย่อยของการจัดรูปแบบเกี่ยวกับการพล็อตจุดของกราฟ



Trace

Legend Label ใช้กำหนดหมายเลขเส้นกราฟ

Symbol ใช้กำหนดเครื่องหมายในการพล็อตกราฟเช่นการพล็อตเป็น เครื่องหมาย + , x

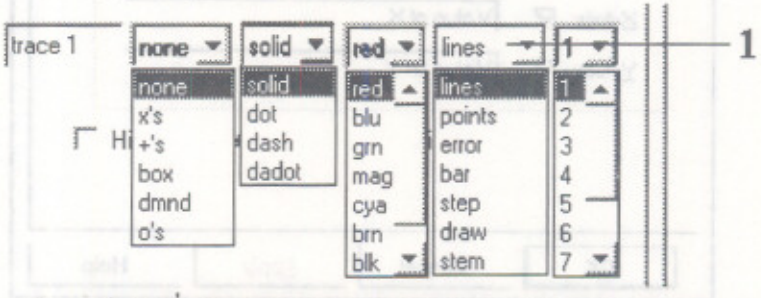
Lines ใช้กำหนดชนิดของเส้นกราฟเป็นเส้นทึบ เส้นปะ

Color ใช้กำหนดสีของเส้นกราฟเป็น สีดำ สีแดง สีน้ำเงิน

Types ใช้กำหนดรูปแบบของเส้นกราฟ พล็อตเป็นจุด พล็อตเป็นจุดและโยงเส้น

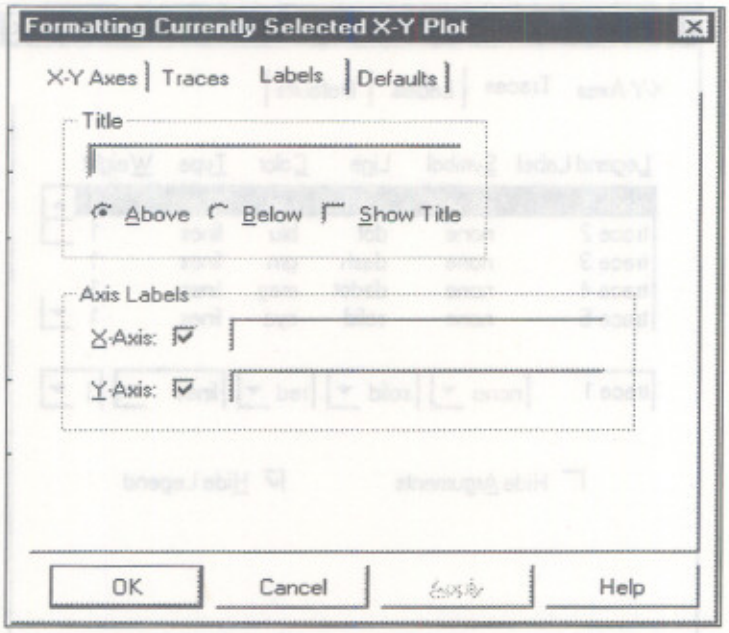
Weigth ใช้กำหนดความเข้มหรือความหนาของเส้นกราฟโดยที่ความเข้มเพิ่มจาก 1 ถึง 9

ตัวอย่างของทางเลือก (Options) ที่มีให้เลือกดูจากภาพนี้



หมายเหตุ การเลือกให้คลิกที่บริเวณของช่องตรงตำแหน่งหมายเลข 1

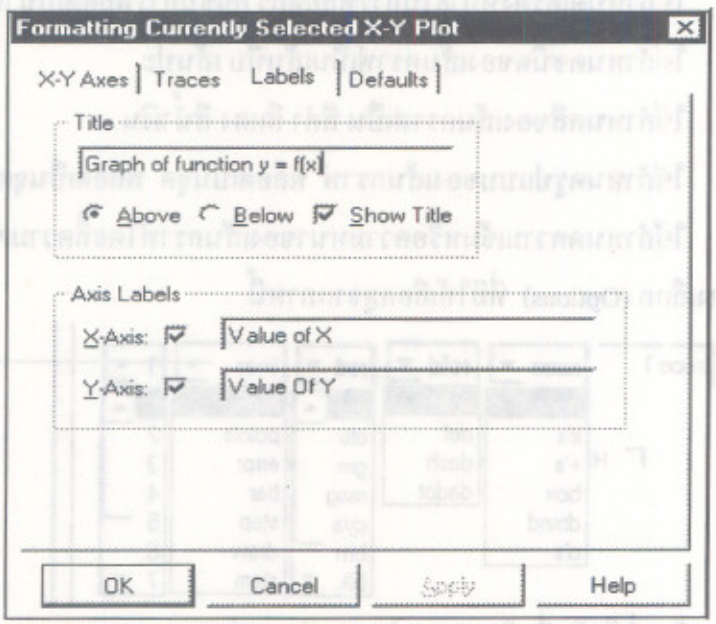
Label เมนูย่อยของการกำหนดคำอธิบายเกี่ยวกับแกนต่างๆ



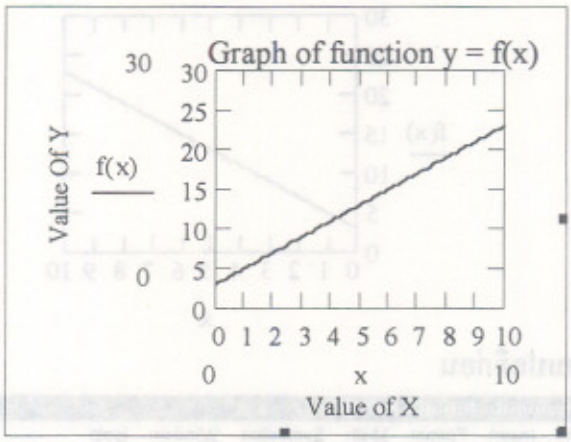
ตัวอย่างเช่น กำหนด Title เป็น Graph of function y = f(x)

กำหนด Label ของแกน X เป็น Value of X

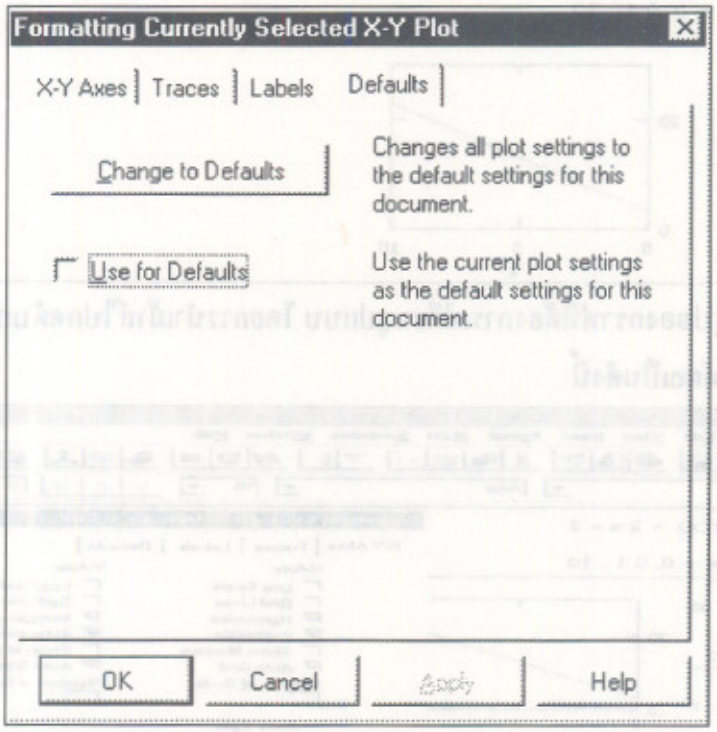
กำหนด Label ของแกน Y เป็น Value of Y



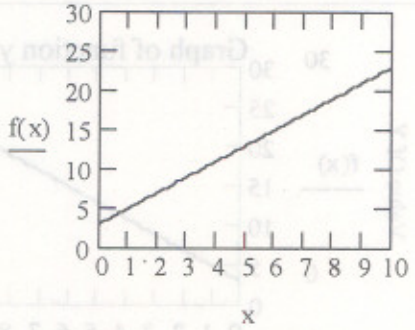
ภาพที่ได้คือ



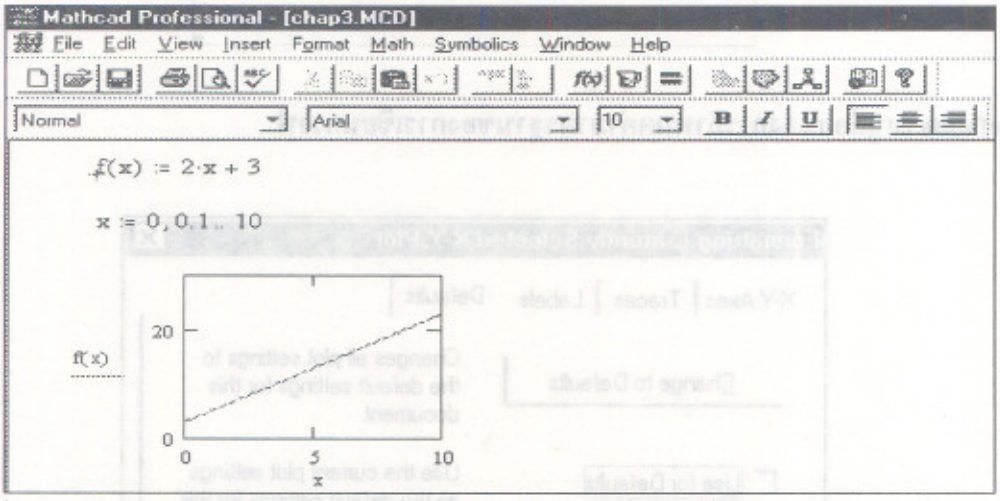
Defaults เมนูย่อยของการกำหนดค่ามาตรฐานของการเขียนกราฟ



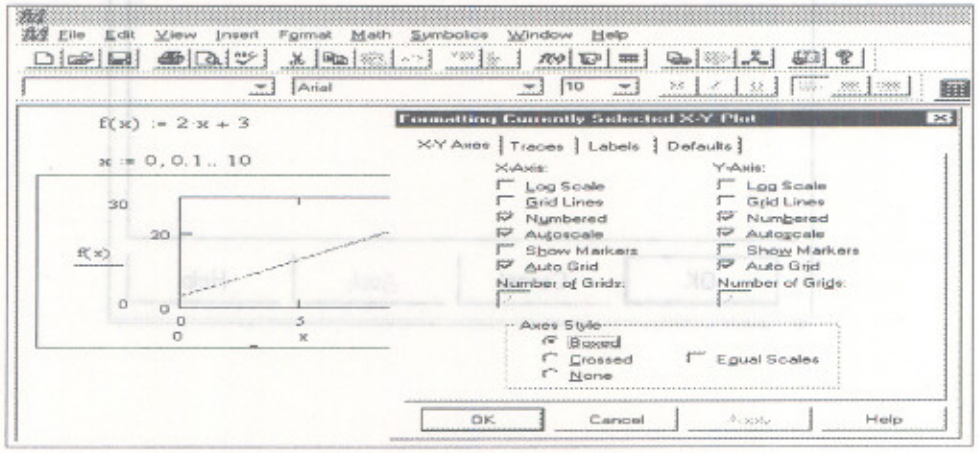
การเขียนกราฟของ $f(x) = 2x + 3$ บนช่วง [0 , 10] ให้ได้รูปแบบนี้



ขั้นที่ 1 เขียนกราฟตามปกติก่อน

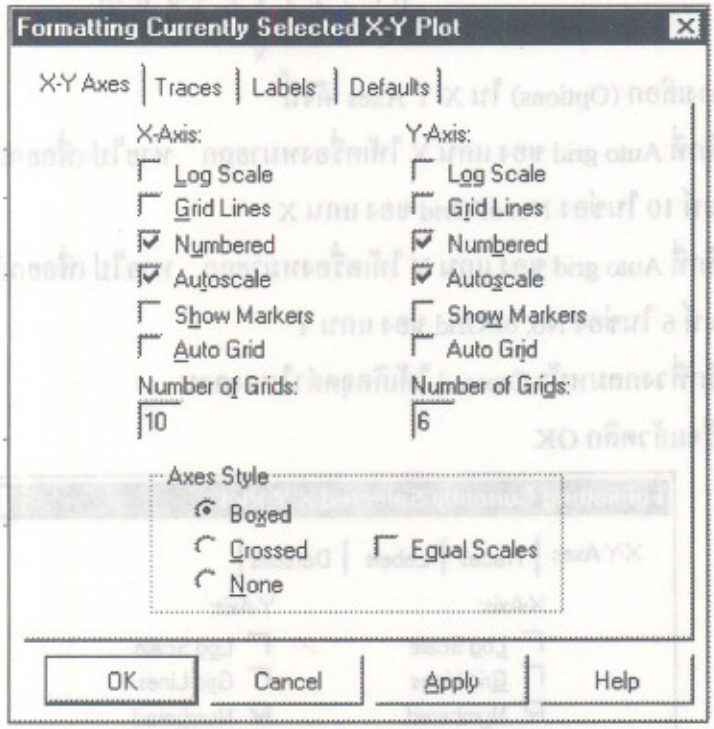


ขั้นที่ 2 เลือกรูปของกราฟที่ต้องการเปลี่ยนรูปแบบ โดยการนำเม้าส์ไปกดดับเบิลคลิกที่บริเวณของกราฟจะได้ผลเป็นดังนี้

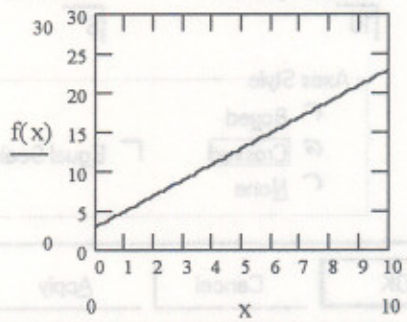


ขั้นที่ 3. ต้องกำหนดทางเลือก (Options) ใน X-Y Axes ดังนี้

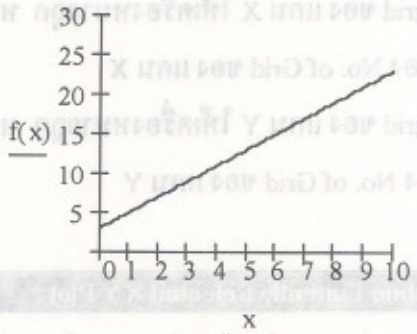
1. คลิกที่ Auto grid ของ แกน X ให้เครื่องหมายถูก หายไปเพื่อยกเลิก Auto grid
2. พิมพ์ 10 ในช่อง No. of Grid ของ แกน X
3. คลิกที่ Auto grid ของ แกน Y ให้เครื่องหมายถูก หายไปเพื่อยกเลิก Auto grid
4. พิมพ์ 6 ในช่อง No. of Grid ของ แกน Y



เสร็จแล้วคลิก **OK** จะได้กราฟตามที่ต้องการดังนี้

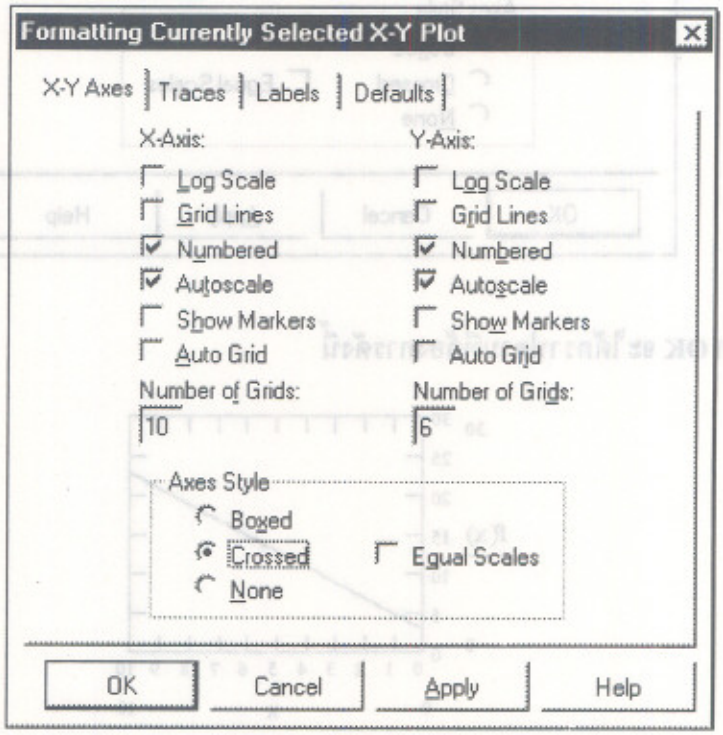


ถ้าเราต้องการกราฟรูปแบบ

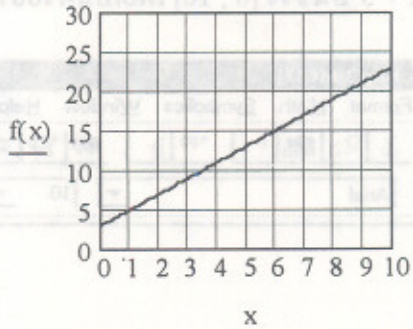


ต้องกำหนดทางเลือก (Options) ใน X-Y Axes ดังนี้

1. คลิกที่ Auto grid ของ แกน X ให้เครื่องหมายถูก หายไป เพื่อยกเลิก Auto grid
2. พิมพ์ 10 ในช่อง No. of Grid ของ แกน X
3. คลิกที่ Auto grid ของ แกน Y ให้เครื่องหมายถูก หายไป เพื่อยกเลิก Auto grid
4. พิมพ์ 6 ในช่อง No. of Grid ของ แกน Y
5. คลิกที่วงกลมหน้า Crossed ให้เกิดจุดดำในวงกลม
6. เสร็จแล้วคลิก **OK**

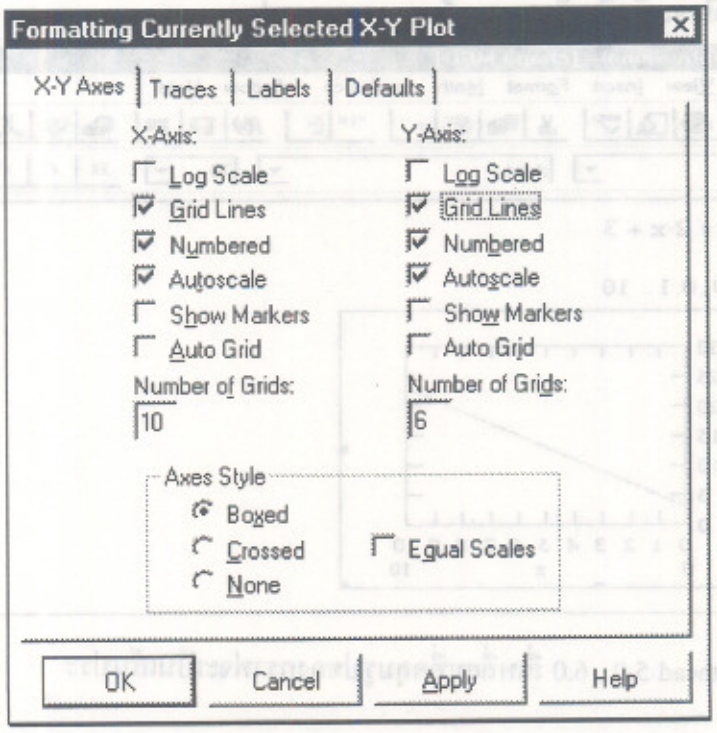


ถ้าเราต้องการกราฟรูปแบบ



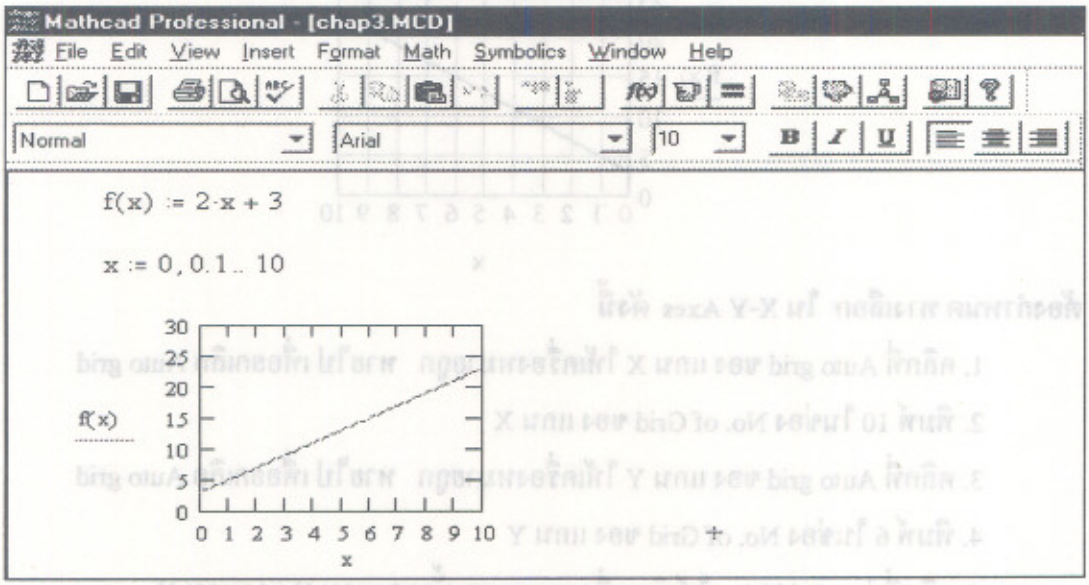
ต้องกำหนด ทางเลือก ใน X-Y Axes ดังนี้

1. คลิกที่ Auto grid ของ แกน X ให้เครื่องหมายถูก หายไป เพื่อยกเลิก Auto grid
2. พิมพ์ 10 ในช่อง No. of Grid ของ แกน X
3. คลิกที่ Auto grid ของ แกน Y ให้เครื่องหมายถูก หายไป เพื่อยกเลิก Auto grid
4. พิมพ์ 6 ในช่อง No. of Grid ของ แกน Y
5. คลิกที่ช่อง Grid Line ให้เกิดเครื่องหมาย ถูก ทั้งของแกน X และแกน Y
6. เสร็จแล้วคลิก OK

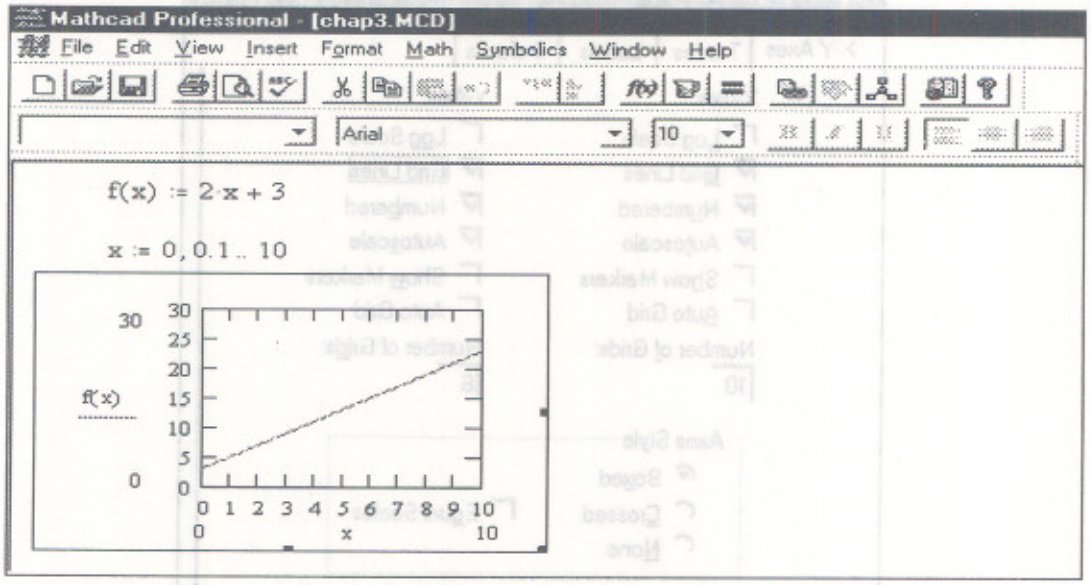


3.2 การย่อและขยายขนาดของกราฟ

เขียนกราฟของ $f(x) = 2x + 3$ บนช่วง [0 , 10] เพื่อเป็นตัวอย่างในการย่อและขยาย

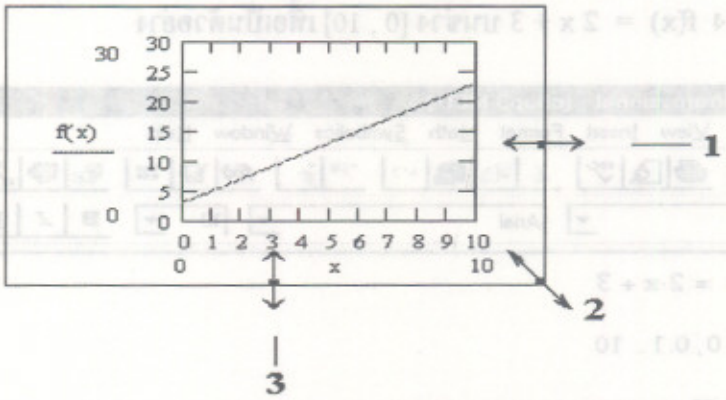


ลากเมาส์เข้าไปคลุมบริเวณของกราฟ จะเกิดกรอบสี่เหลี่ยมที่มีเส้นแบบเส้นไข่ปลาล้อมรอบกราฟ และ เมื่อปล่อยมือจะเกิดสี่เหลี่ยมขอบเส้นตรงคลุมกราฟ



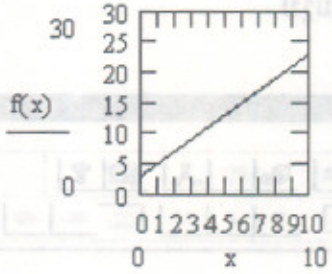
หมายเหตุ Mathcad 5.0 , 6.0 สี่เหลี่ยมที่คลุมรูปของกราฟจะเป็นเส้นประ

ลากเมาส์ไปที่ขอบสี่เหลี่ยมจะเกิดสัญลักษณ์ ↔ หรือ ↕

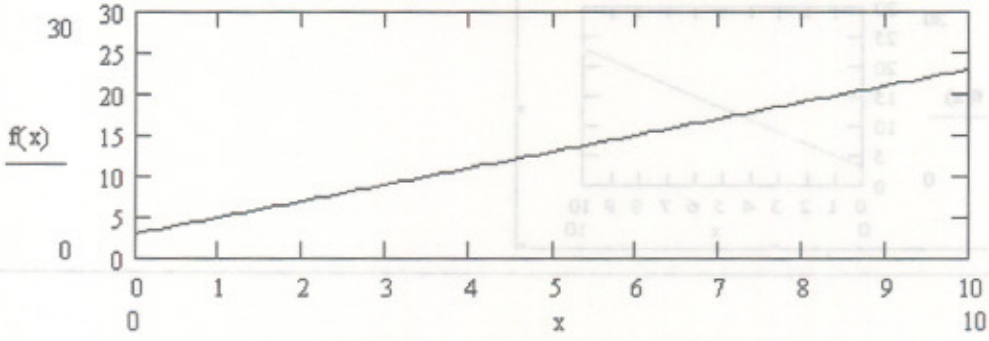


1. ย่อหรือขยายทางด้านข้าง
2. ย่อหรือขยายทางด้านบน และ ล่าง
3. ย่อหรือขยายทั้งสองด้านพร้อมกัน

ตัวอย่างเช่น ย่อให้เล็กลง

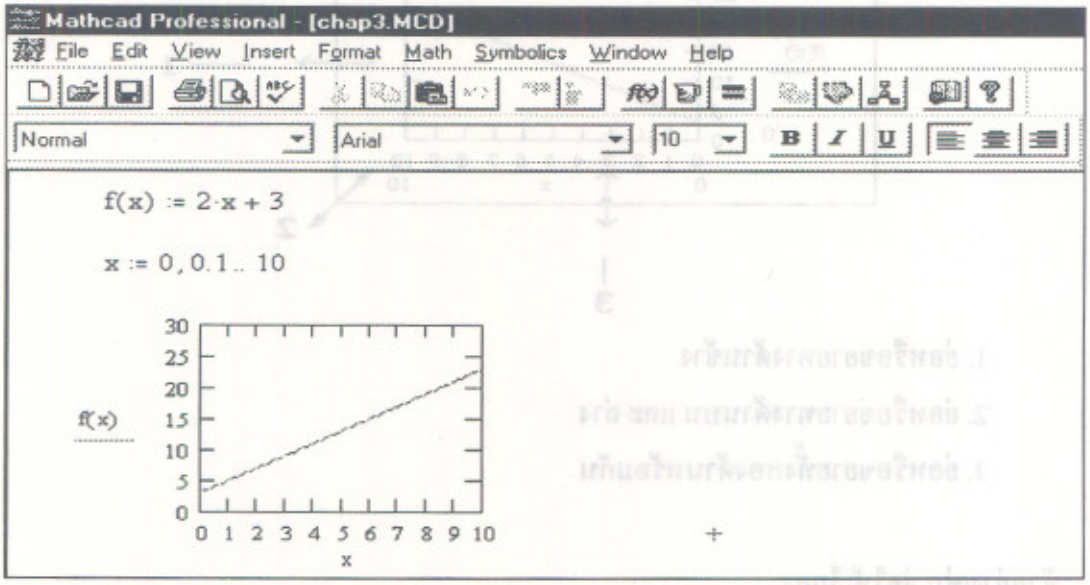


ขยายให้ใหญ่ขึ้น

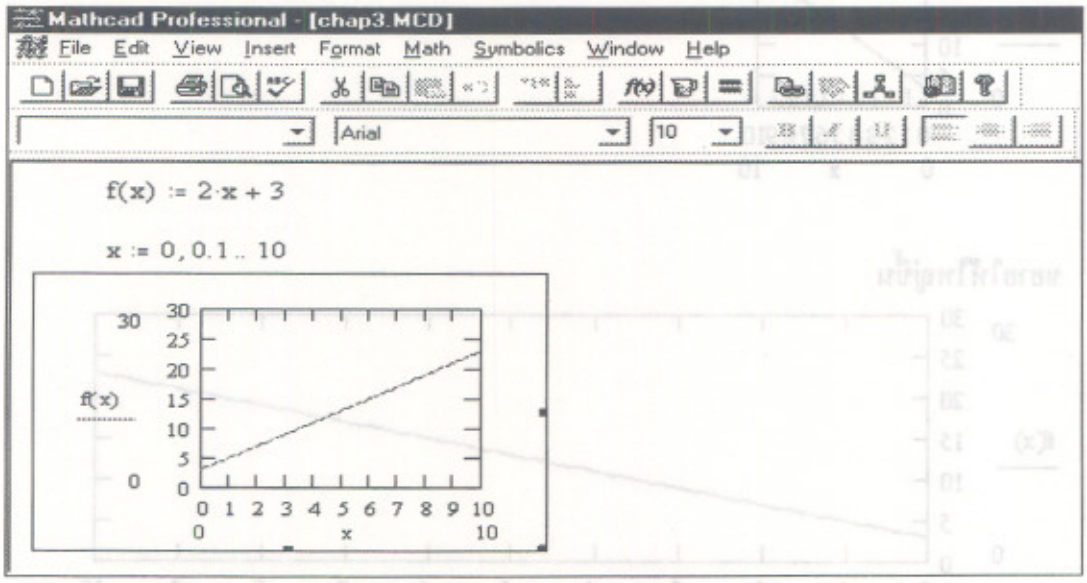


3.3 การ COPY CUT และ PASTE กราฟ

เขียนกราฟของ $f(x) = 2x + 3$ บนช่วง [0 , 10] เพื่อเป็นตัวอย่าง

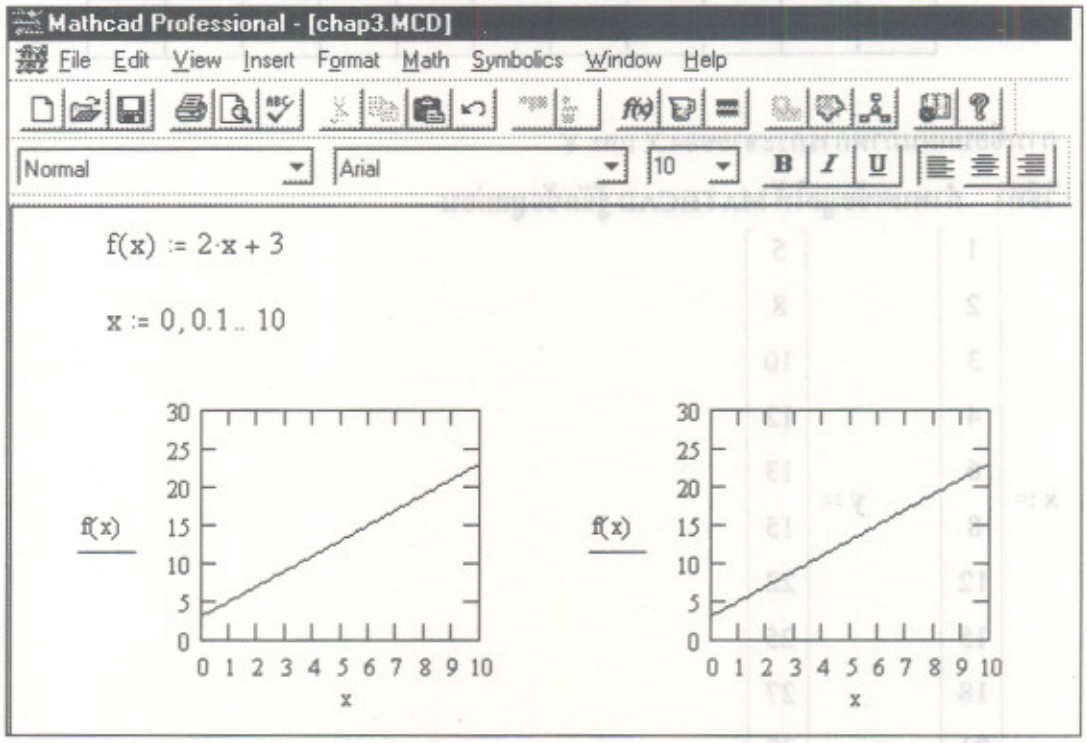


นำเมาส์เข้าไปคลิกที่บริเวณของกราฟจะได้สี่เหลี่ยมที่มีเส้นทึบคลุมรูป



กด F2 เป็นการ COPY กราฟรูปนี้ เลื่อน CURSER ไปที่บริเวณอื่นนอกกราฟรูปเดิม
กด F4 เป็นการ PASTE กราฟที่เรา COPY ไว้ลงตรงตำแหน่งที่ CURSER อยู่

ตัวอย่างเช่น



หมายเหตุ หากต้องการลบกราฟในกรอบทิ้งให้กด **F3**

การเคลื่อนย้ายรูปของกราฟโดยการลากเม้าส์

ขั้นที่ 1 ลากเม้าส์มาที่เส้นกรอบสี่เหลี่ยม จะเกิดรูปมือที่ขอบของรูปสี่เหลี่ยม

ขั้นที่ 2 กดเม้าส์และลากเม้าส์ไปด้วย กราฟรูปนั้นก็จะเคลื่อนย้ายตาม

ข้อควรจำ	F2	COPY
	F3	CUT
	F4	PASTE

3.4 การเขียนกราฟของแผนภาพการกระจายของข้อมูล

กำหนดข้อมูล X และ Y

X	1	2	3	4	6	8	12	15	18	21
Y	5	8	10	12	13	15	22	25	27	32

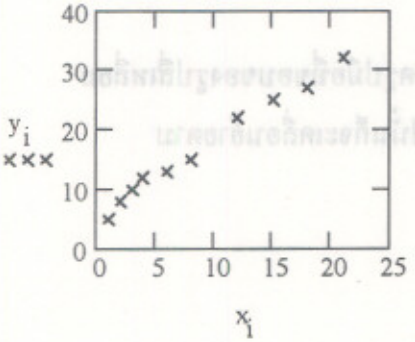
การเขียนแผนภาพการกระจายของ X และ Y

วิธีทำ กำหนดข้อมูลให้ MATHCAD รู้จักข้อมูลก่อน

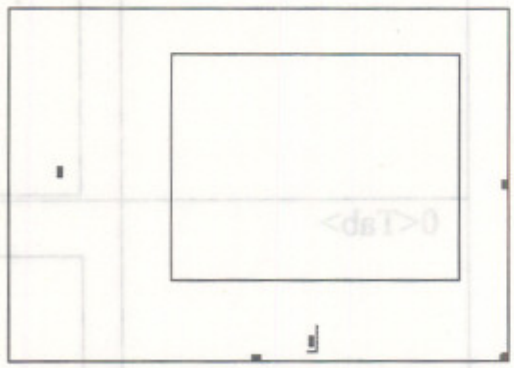
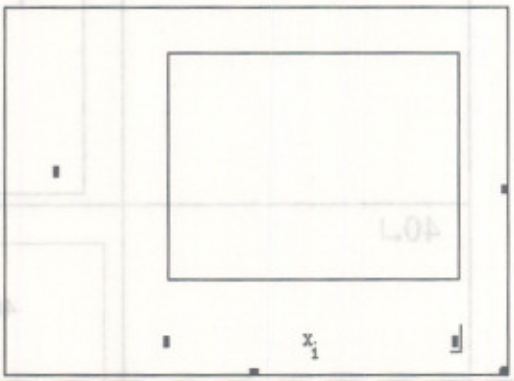
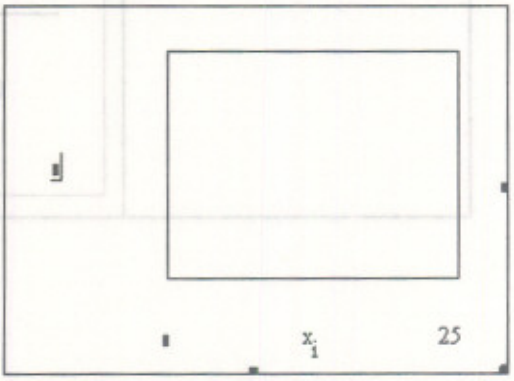
$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 12 \\ 15 \\ 18 \\ 21 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 10 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \\ 22 \\ 25 \\ 27 \\ 32 \end{bmatrix}$$

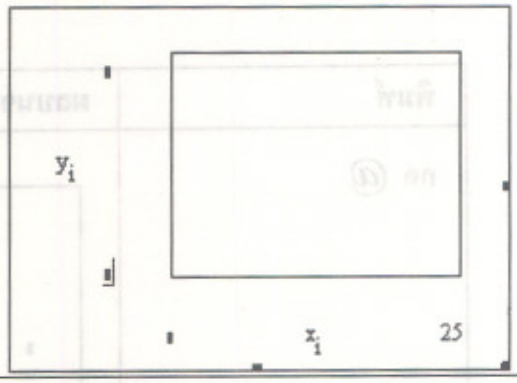
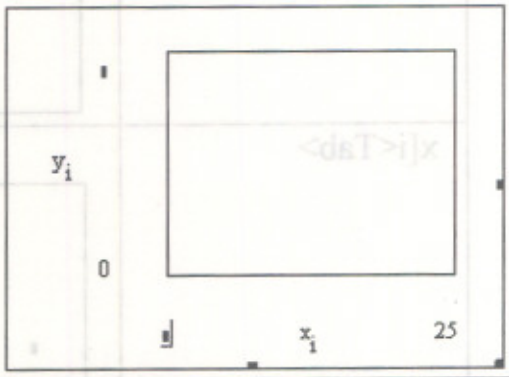
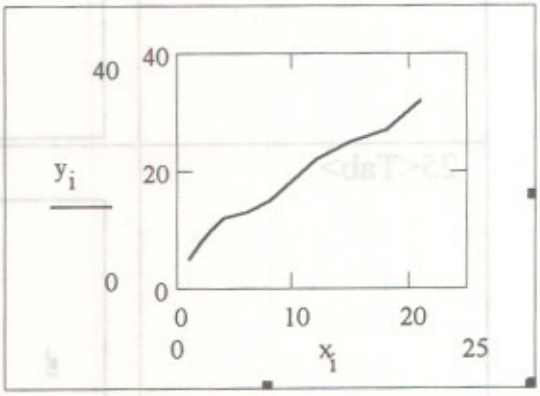
ORIGIN := 1

i := 1 .. 10

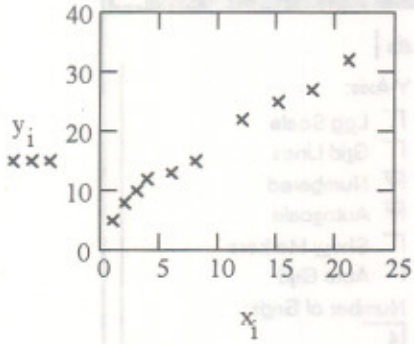


ขั้นตอนการเขียนกราฟของแผนภาพการกระจายของข้อมูล

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
กด @	
x[i<Tab>	
25<Tab>	

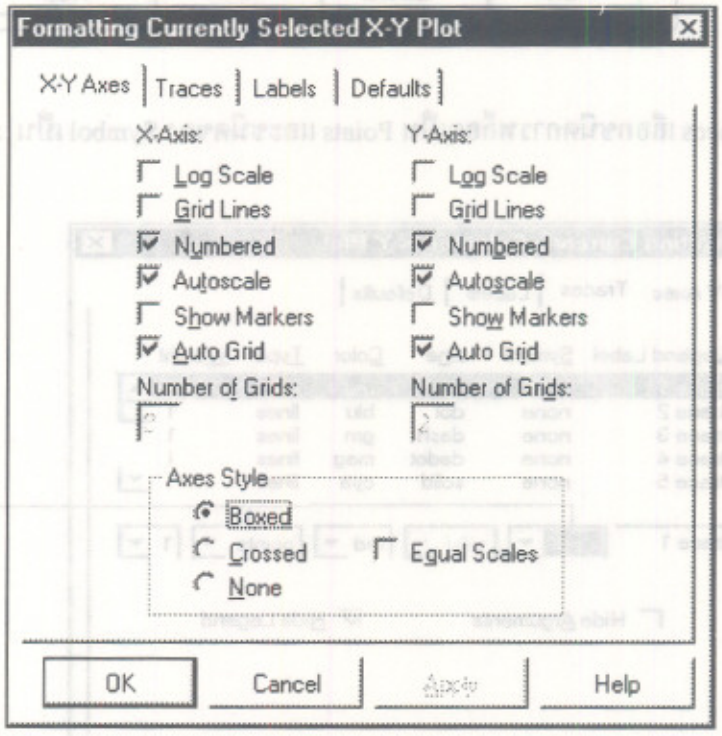
y[i<Tab>	
0<Tab>	
40↵	

กราฟที่ได้ยังไม่เป็นแผนภาพการกระจาย ต่อไปเราจะทำการ Format กราฟให้เป็นรูปแบบนี้



การเปลี่ยนรูปแบบกราฟให้เป็นแผนภาพการกระจายมีขั้นตอนดังนี้

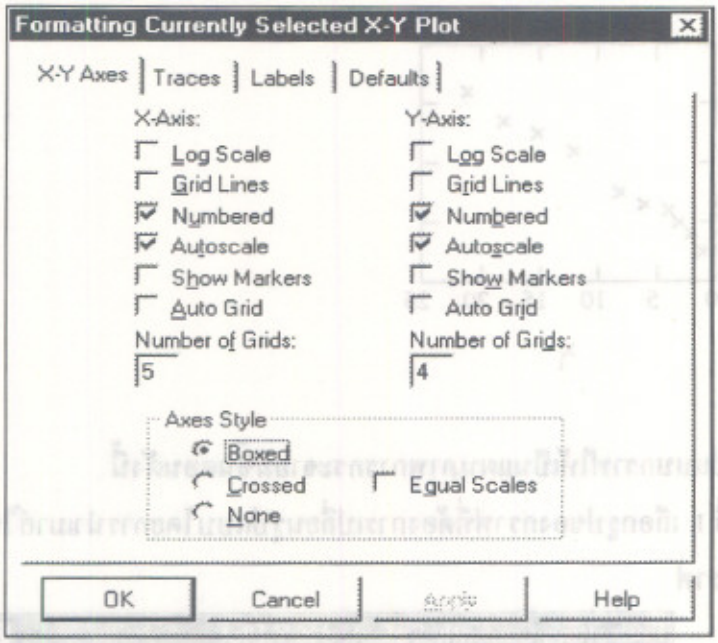
ขั้นที่ 1 เลือกรูปของกราฟที่ต้องการเปลี่ยนรูปแบบโดยการนำเมาส์ไปกดดับเบิลคลิกที่บริเวณของกราฟ



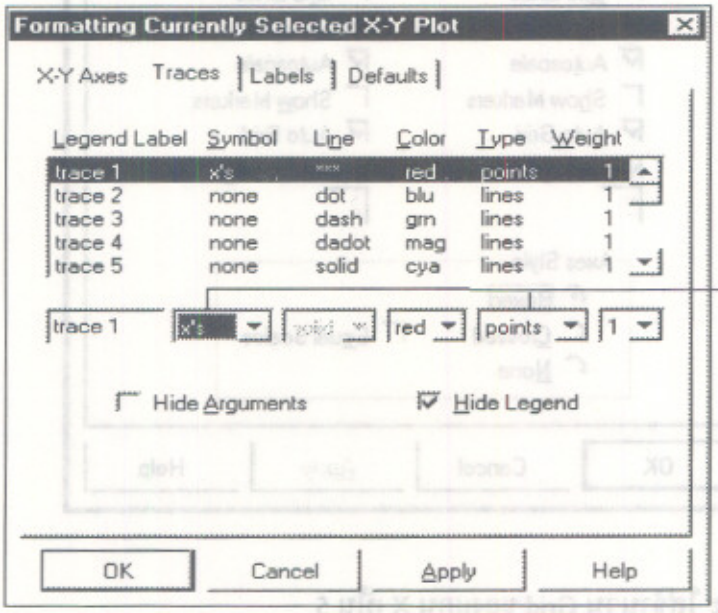
ยกเลิก Auto Grid และ ใส่จำนวน Grid ของแกน X เป็น 5

และ ใส่จำนวน Grid ของแกน Y เป็น 4

คลิกไปที่ Traces เลือกชนิดการพล็อตเป็น Points และชนิดของ Symbol เป็น x's

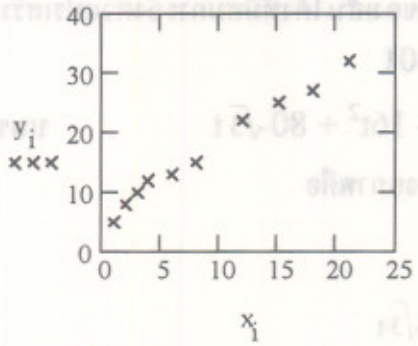


คลิกไปที่ Traces เลือกชนิดการพล็อตเป็น Points และชนิดของ Symbol เป็น x's

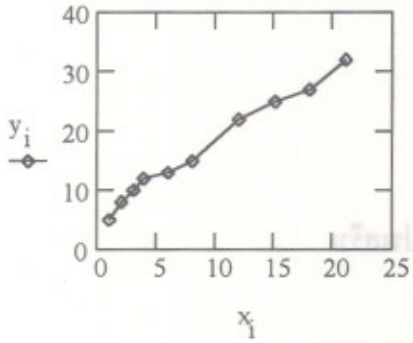


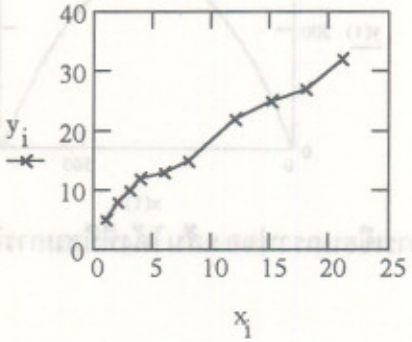
(*)

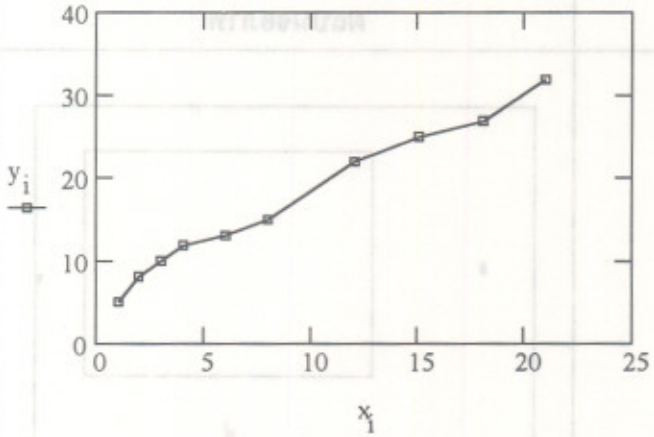
เสร็จแล้วคลิกที่ OK จะได้กราฟเป็นดังนี้



หมายเหตุ รูปแบบอื่นๆ ที่ทำได้







3.5 การเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม

ตัวอย่างเช่นการเขียนกราฟของเส้นโค้งที่มีสมการอิงตัวแปรเสริม

$$x(t) = 80t$$

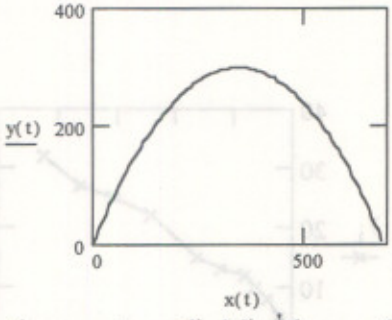
$$y(t) = -16t^2 + 80\sqrt{3}\,t \qquad \text{บนช่วง } 0 < t < 8$$

วิธีทำ ผลการคำนวณบนจอภาพคือ

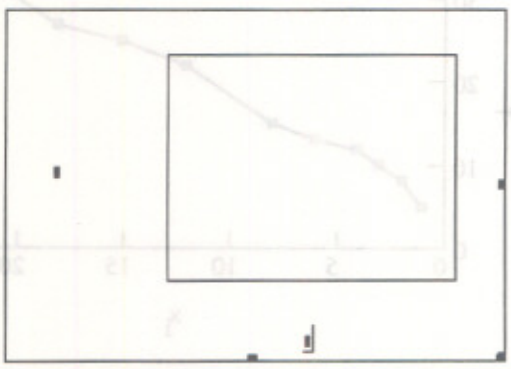
$x(t) := 80 \cdot t$

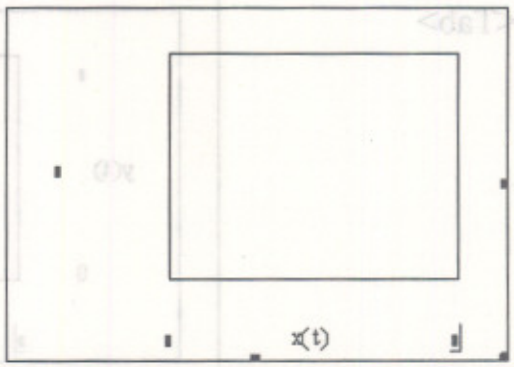
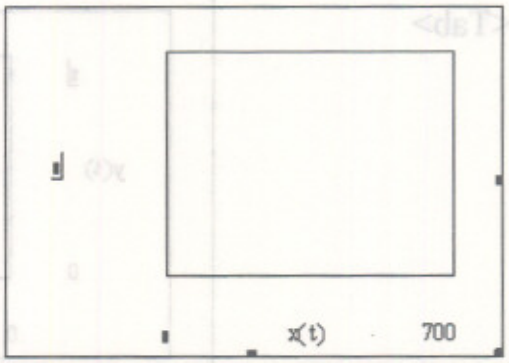
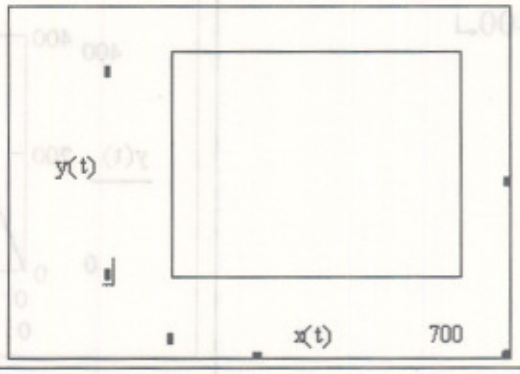
$y(t) := -16 \cdot t^2 + 80 \cdot \sqrt{3} \cdot t$

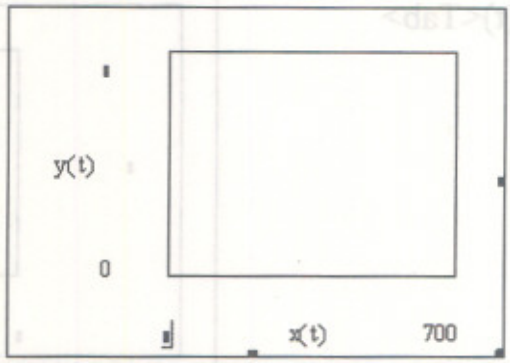
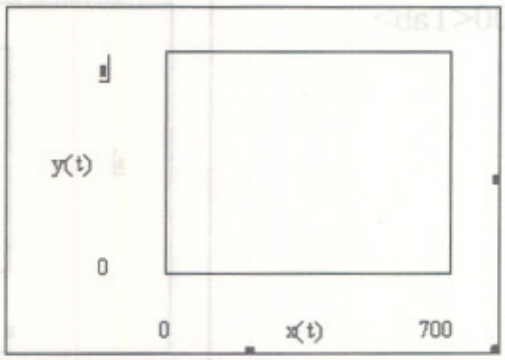
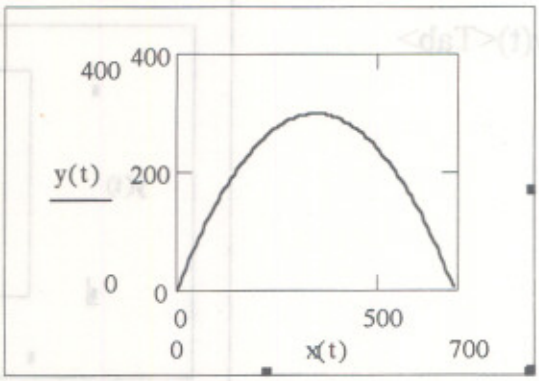
$t := 0, 0.1 .. 5 \cdot \sqrt{3}$



ขั้นตอนการเขียนกราฟของเส้นโค้งที่มีสมการอิงตัวแปรเสริม

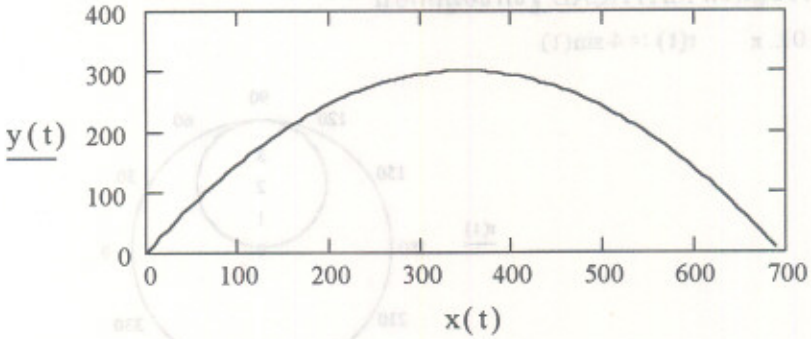
พิมพ์	ผลบนจอภาพ
กด @	

x(t)<Tab>	
700<Tab>	
y(t)<Tab>	

0<Tab>	
0<Tab>	
400↵	

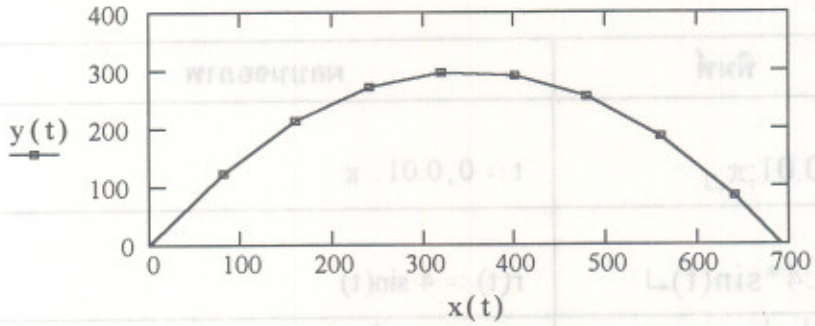
การฟที่ได้สามารถจัดรูปแบบได้หลายลักษณะเช่น

กำหนดให้แกน X แบ่งเป็น 8 ส่วน แกน Y แบ่งเป็น 4 ส่วน แสดงตำแหน่งของจุดต่อเนื่องกัน



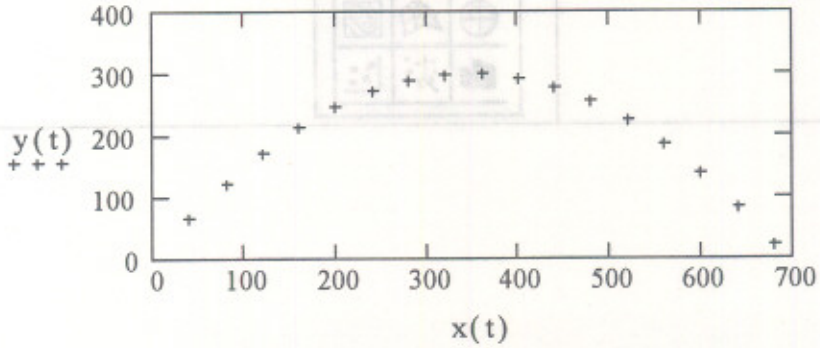
กำหนดให้มีการแสดงตำแหน่งของจุดและโยงเส้นระหว่างจุด

$t := 0, 1 .. 5 \cdot \sqrt{3} + 1$



กำหนดให้มีการแสดงตำแหน่งของจุดด้วย x และไม่โยงเส้นระหว่างจุด

$t := 0, 0.5 .. 5 \cdot \sqrt{3} + 1$

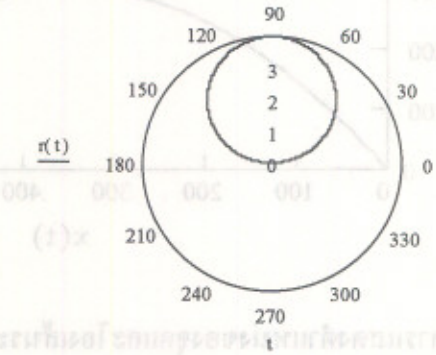


3.6 การเขียนกราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่างเช่นการเขียนกราฟของฟังก์ชัน $r(t) = 4\sin t$ บนช่วง $[0, \pi]$

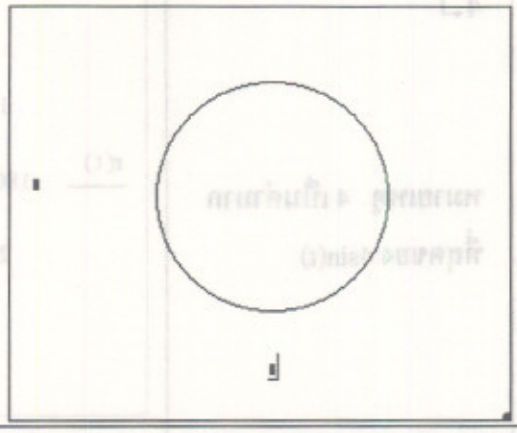
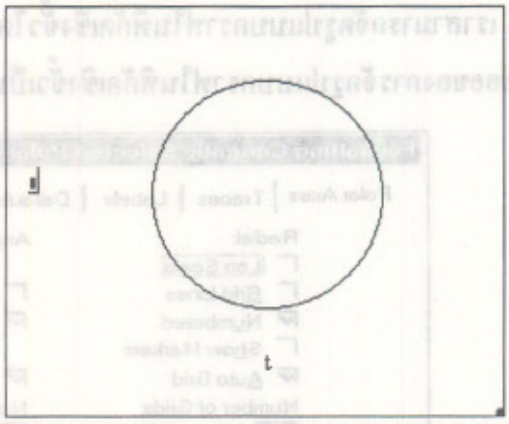
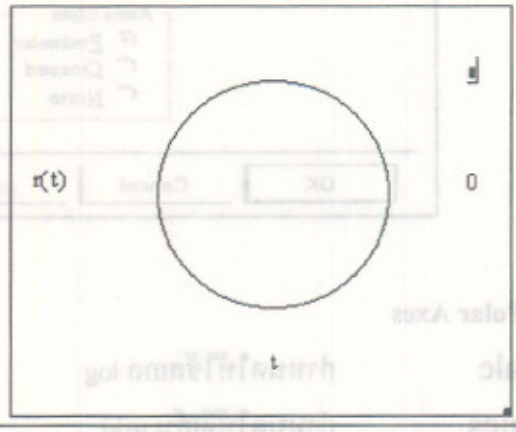
วิธีทำ กำหนดข้อมูลให้ MATHCAD รู้จักข้อมูลก่อน

$t := 0, 0.01 .. \pi$ $\quad r(t) := 4 \cdot \sin(t)$



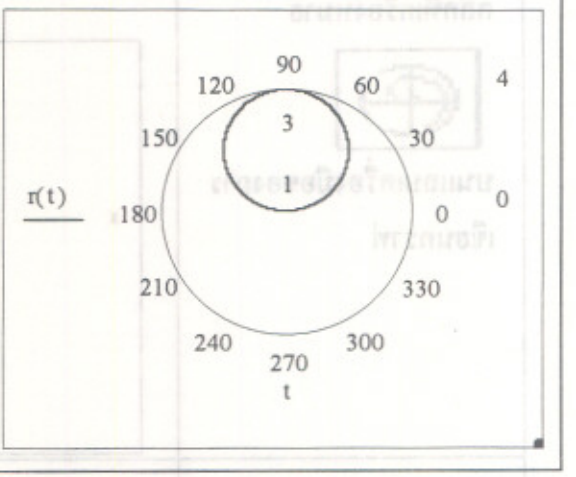
ขั้นตอนการเขียนกราฟพิกัดเชิงขั้ว

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
t:0,0.01;π↵	$t := 0, 0.01 .. \pi$
r(t):4*sin(t)↵	$r(t) := 4 \cdot \sin(t)$
คลิกที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือ	จะได้แถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ 

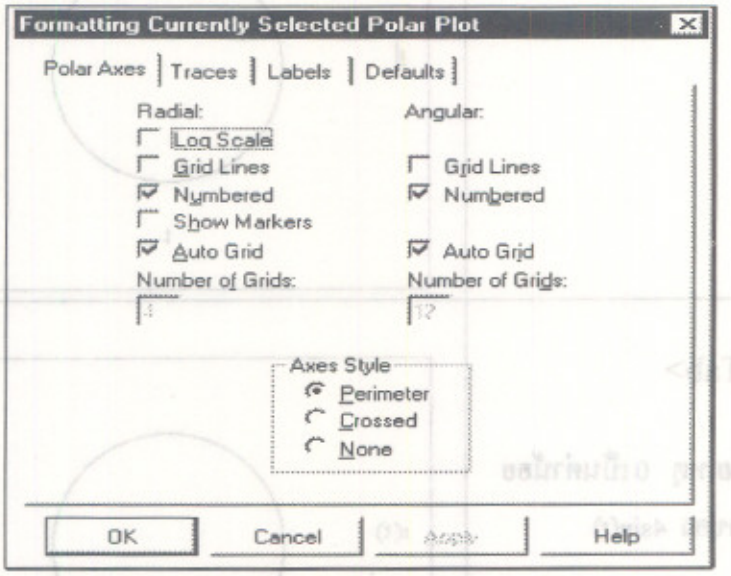
คลิกที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ	
t<Tab>	
0<Tab> หมายเหตุ 0 เป็นค่าน้อยที่สุดของ 4sin(t)	

4↵

หมายเหตุ 4 เป็นค่ามากที่สุดของ 4sin(t)



หมายเหตุ เราสามารถจัดรูปแบบกราฟในพิกัดเชิงขั้วโดย การกดดับเบิลคลิกที่บริเวณของกราฟ จะได้เมนูย่อยของการจัดรูปแบบกราฟในพิกัดเชิงขั้วเป็นดังนี้



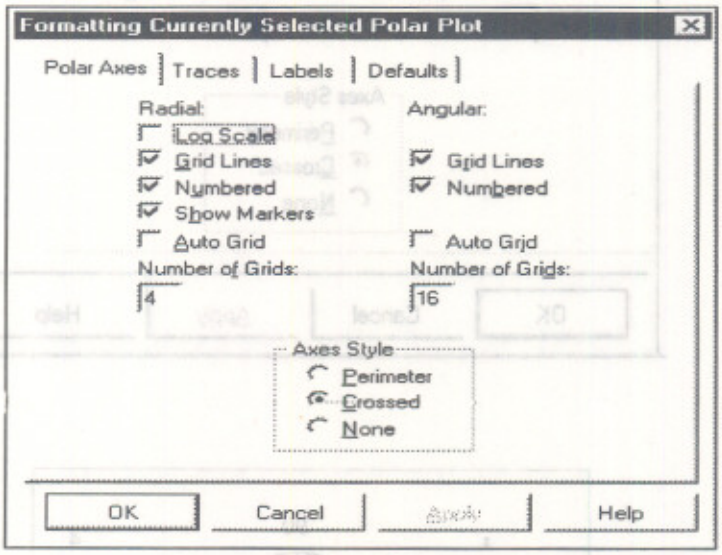
เมนูย่อย Polar Axes

Log Scale	กำหนดให้ใช้สเกล log
Grid Lines	กำหนดให้ตีเส้น grid
Numbers	กำหนดให้มีการเขียนตัวเลขกำกับสเกล

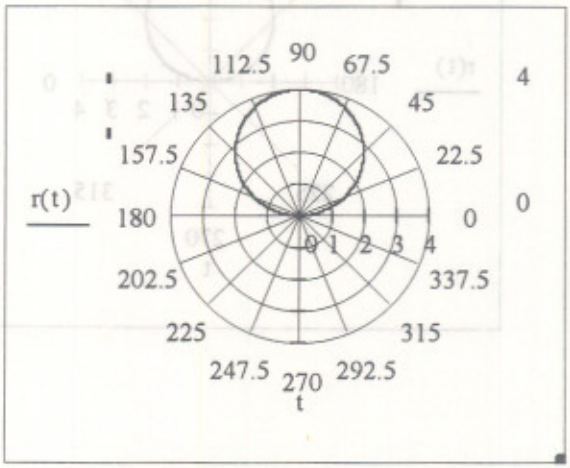
Show Markers	กำหนดให้แสดงชนิดของการ Plot
Auto Grids	กำหนดจำนวน Grid -ของแนวมุม และ แนวรัศมี
Perimeter	กำหนดให้ Plot กราฟในแบบวงกลม
Cross	กำหนดให้ Plot กราฟในแบบที่มีแกน X และ Y ตัดกัน
None	เลือก Plot กราฟแบบไม่มีแกนพิกัด

เมนูย่อย Traces เมนูย่อย Labels เมนูย่อย Defaults มีหน้าที่เหมือนเดิม (อ่านที่หัวข้อ 3.1)

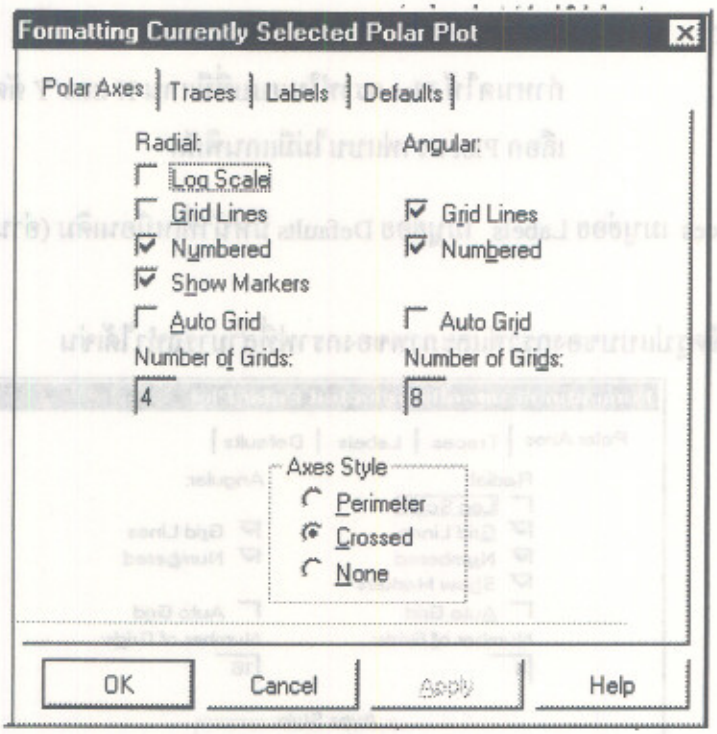
ตัวอย่างการจัดรูปแบบของกราฟและภาพของกราฟที่สามารถทำได้เช่น

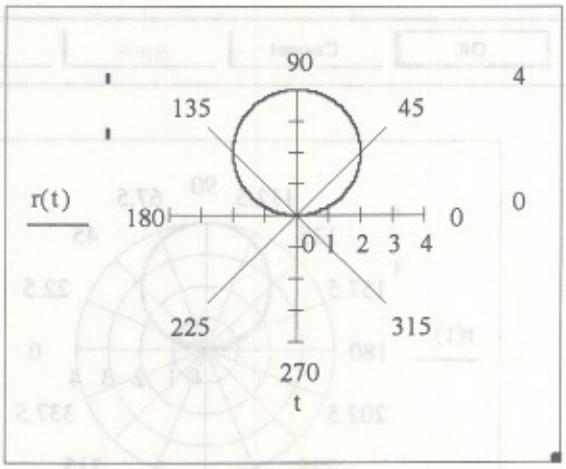


กราฟที่ได้คือ



ตัวอย่างการจัดรูปแบบและกราฟที่ได้





3.7 การเขียนกราฟแบบ 3 มิติ

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $f(x,y) = x^2 - y^2$ บนช่วง $[-2, 2] \times [-2, 2]$

ขั้นที่ 1. กำหนดจำนวนจุดตามแนวแกน X

ขั้นที่ 2. กำหนดจำนวนจุดตามแนวแกน Y

ขั้นที่ 3. กำหนดค่า $x_1, x_2, x_3, \ldots$

ขั้นที่ 4. กำหนดค่า $y_1, y_2, y_3, \ldots$

ขั้นที่ 5. กำหนดสูตรของ f(x,y)

ขั้นที่ 6. คำนวณเมทริกซ์ M ของการพล็อตกราฟ

$$i := 1..20$$

$$j := 1..20$$

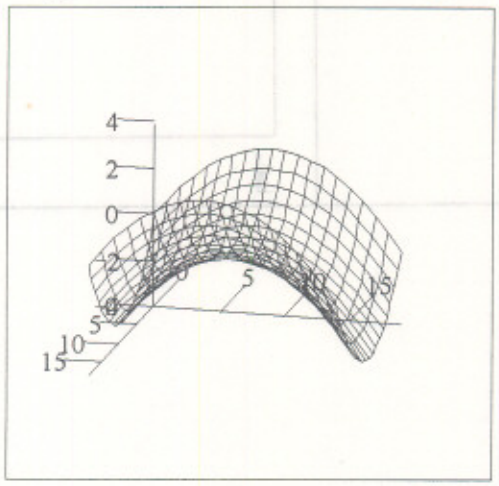
$$x_i := -2 + 0.2 \cdot i$$

$$y_j := -2 + 0.2 \cdot j$$

$$f(x,y) := x^2 - y^2$$

$$M_{(i,j)} := f(x_i, y_j)$$

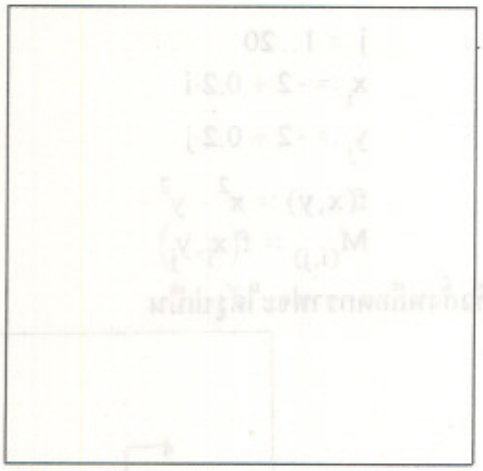
เสร็จแล้วสั่งพล็อตกราฟจะได้รูปเป็น

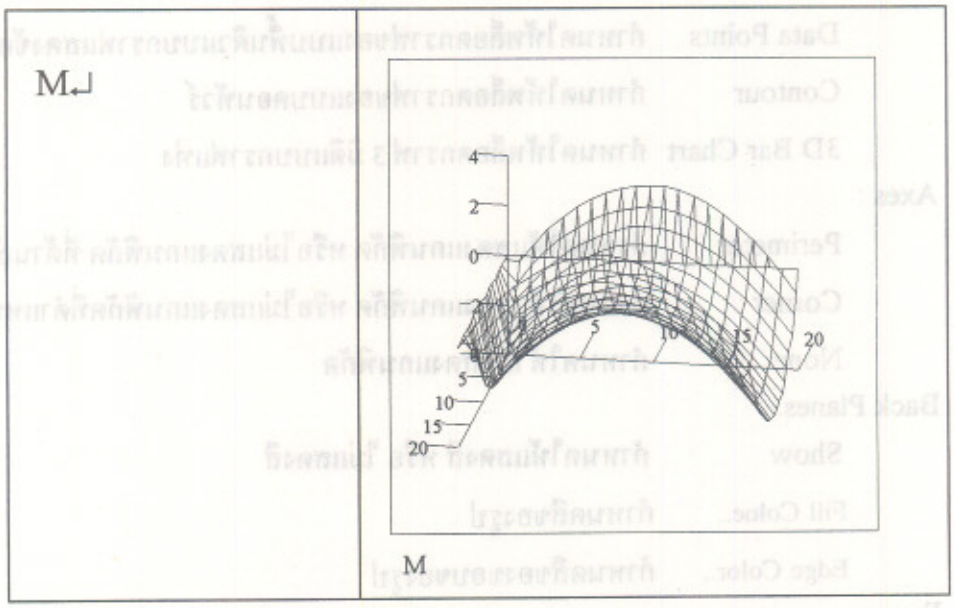


M

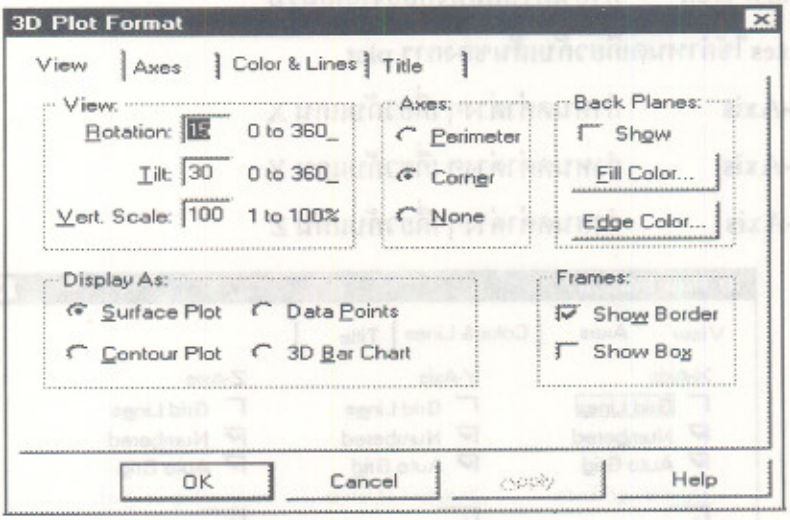
ขั้นตอนของการสั่งพล็อตกราฟ 3 มิติ

เมื่อกำหนดค่าต่างตามขั้นตอน 1 – 6 แล้วการสั่งเขียนกราฟทำตามขั้นตอนต่อไปดังนี้

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
คลิ้กที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือ	จะได้แถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ 
คลิ้กที่เครื่องหมาย  บนแถบเครื่องมือ	



การจัดรูปแบบของการพล็อตกราฟ 3 มิติ ทำได้โดยการ กดดับเบิลคลิกที่รูปของกราฟ จะได้เมนูย่อยของการพล็อตกราฟ 3 มิติคือ



เมนูย่อย View ใช้กำหนดเกี่ยวกับมุมมองของภาพ

Rotation	กำหนดมุมที่หมุนขนานกับพื้นของภาพ ในการมองภาพ
Tilt	กำหนดมุมก้ม หรือ มุมเงย ของสายตาในการมองภาพ
Vert. Scale	กำหนดขนาดของการทดสเกลในการเขียนกราฟ

Display As:

Surface	กำหนดให้พล็อตกราฟของแบบพื้นผิว

Data Points กำหนดให้พล็อตกราฟของแบบพื้นผิวแบบกราฟแสดงข้อมูล

Contour กำหนดให้พล็อตกราฟของแบบคอนทัวร์

3D Bar Chart กำหนดให้พล็อตกราฟ 3 มิติแบบกราฟแท่ง

Axes :

Perimeter กำหนดให้แสดงแกนพิกัด หรือไม่แสดงแกนพิกัด ที่ด้านล่างของกราฟ

Corner กำหนดให้แสดงแกนพิกัด หรือไม่แสดงแกนพิกัดที่ตำแหน่งจริงในรูป

None กำหนดให้ไม่แสดงแกนพิกัด

Back Planes:

Show กำหนดให้แสดงสี หรือ ไม่แสดงสี

Fill Coloe.. กำหนดสีของรูป

Edge Color.. กำหนดสีของขอบของรูป

Frames:

Show Border กำหนดให้แสดงขอบของรูป

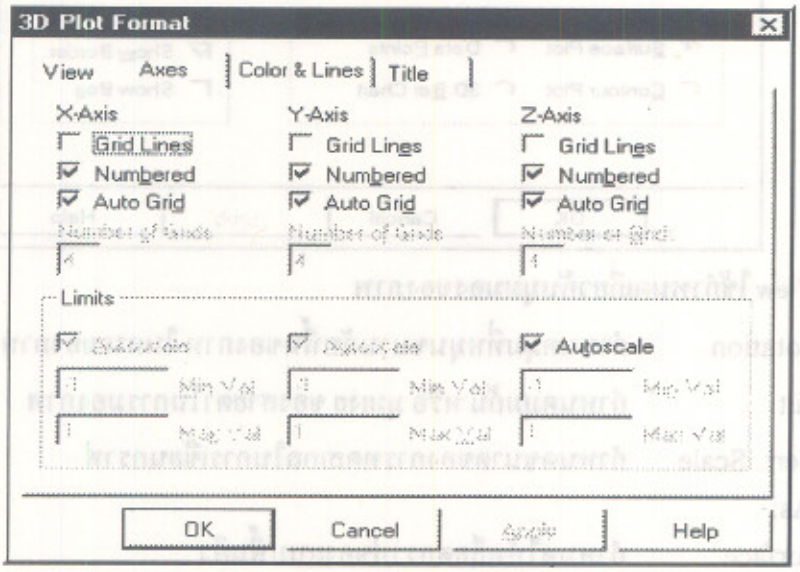
Show Box กำหนดให้แสดงกล่องที่คลุมรูป

เมนูย่อย Axes ใช้กำหนดเกี่ยวกับเส้นของการ plot

X-Axis กำหนดค่าต่างๆ เกี่ยวกับแกน X

Y-Axis กำหนดค่าต่างๆ เกี่ยวกับแกน Y

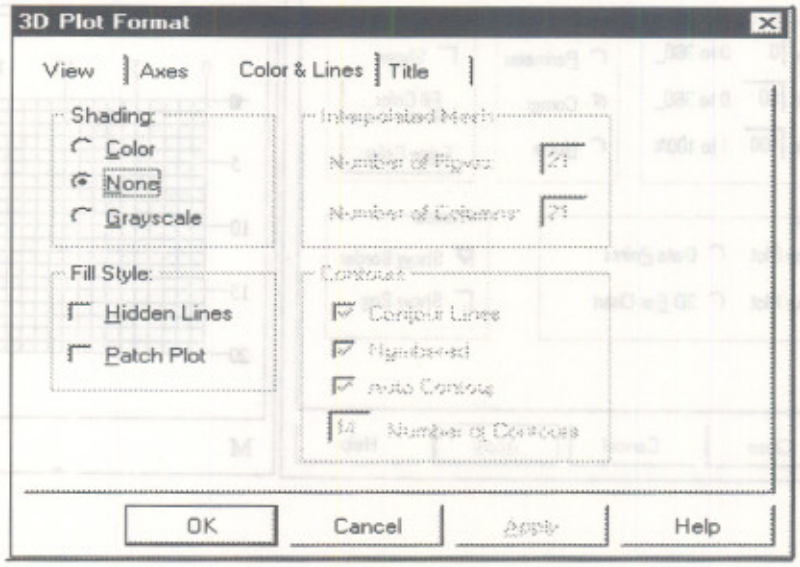
Z-Axis กำหนดค่าต่างๆ เกี่ยวกับแกน Z



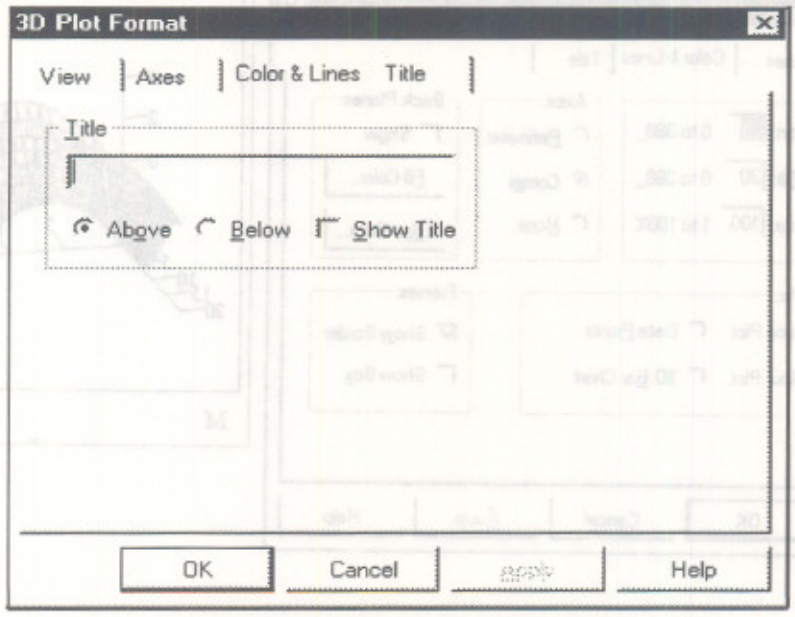
เมนูย่อย Color& Lines ใช้กำหนดเกี่ยวกับเส้นของการพล็อต

Shading :

Color	กำหนดให้แสดงสี
None	กำหนดให้แสดงเป็น ขาวดำ
Grayscale	กำหนดให้แสดงเป็นรูปแบบของการแรเงาขาวดำ

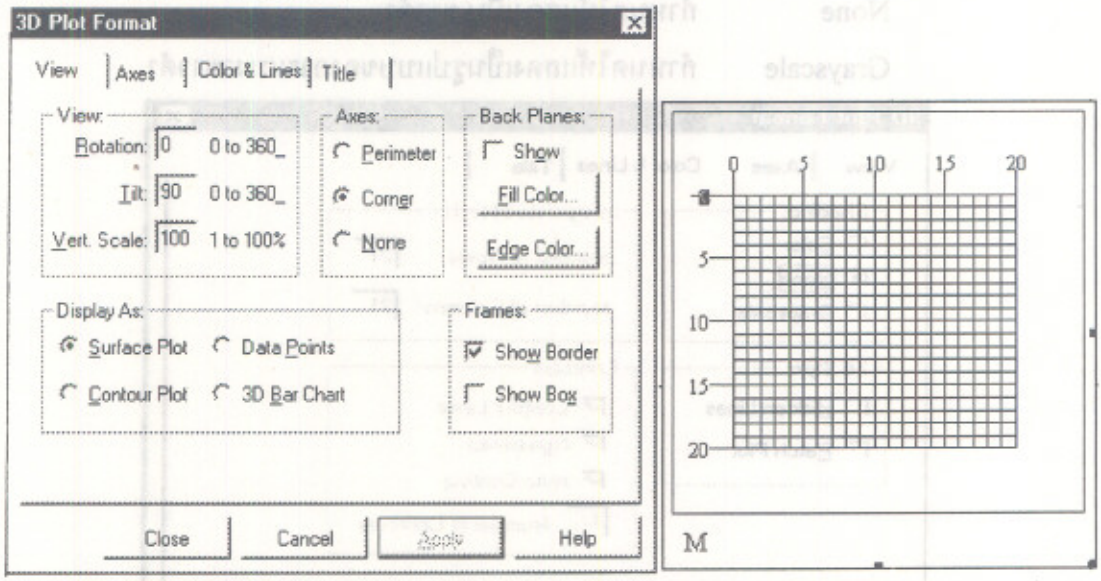


เมนูย่อย Title ใช้กำหนดเกี่ยวกับชื่อของกราฟ

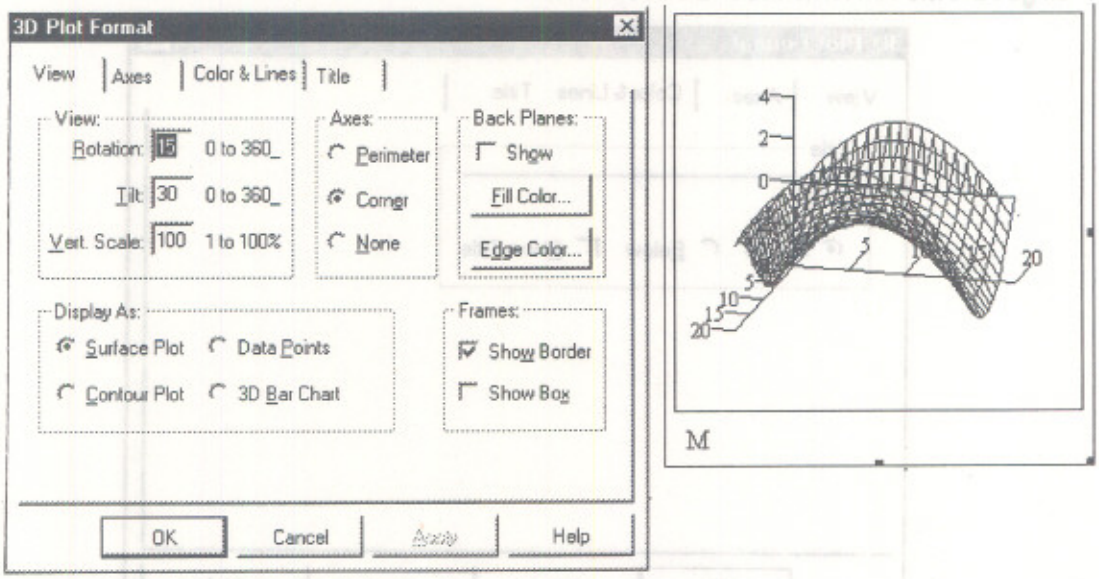


ตัวอย่างของการพล็อตรูปแบบต่างๆ ขอให้ดูจากการเลือกแบบต่างๆ ดังนี้

เริ่มต้นที่ Rotation = 0 , Tilt = 90 , Corner , Show Border



เปลี่ยนเป็น Rotation = 15 , Tilt = 30 , Corner , Show Border

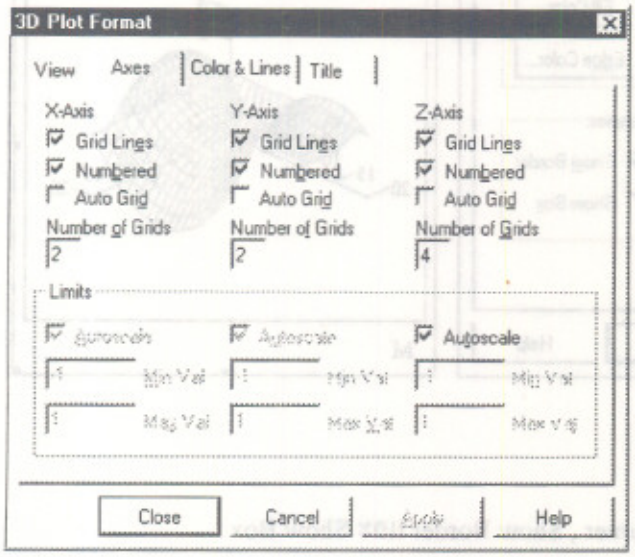


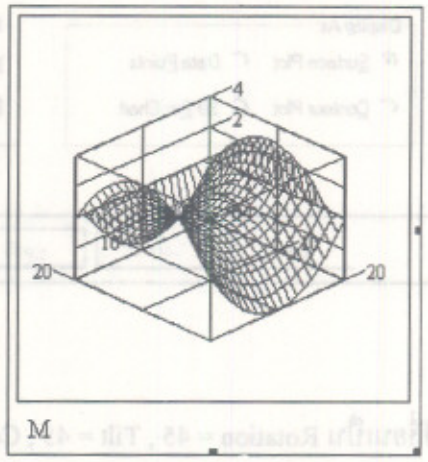
เปลี่ยนเป็น Rotation = 45 , Tilt = 45 , Corner , Show Border และ Show Box

เลือก Grid บนแกน X เท่ากับ 2 และแสดง Grid

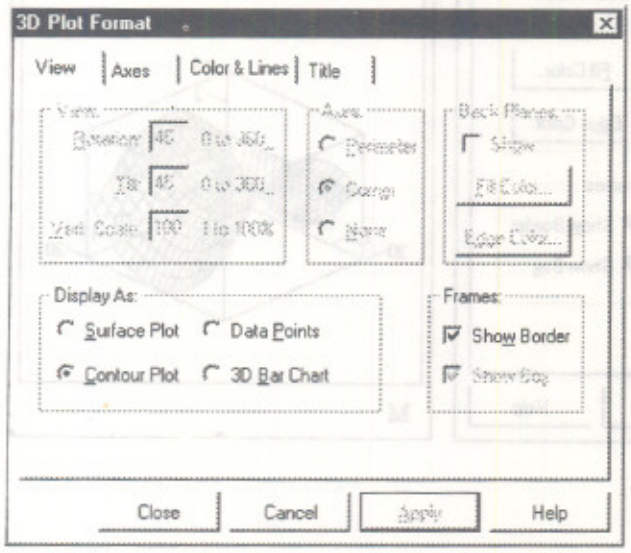
เลือก Grid บนแกน Y เท่ากับ 4 และแสดง Grid

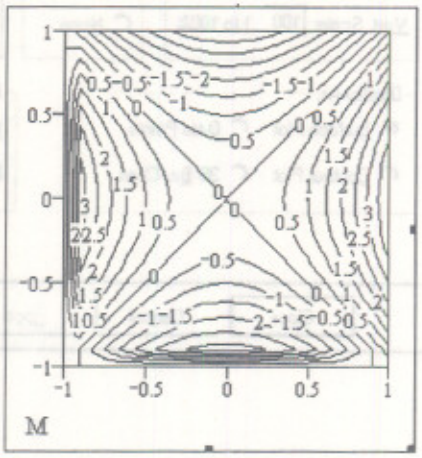
เลือก Grid บนแกน Z เท่ากับ 4 และแสดง Grid



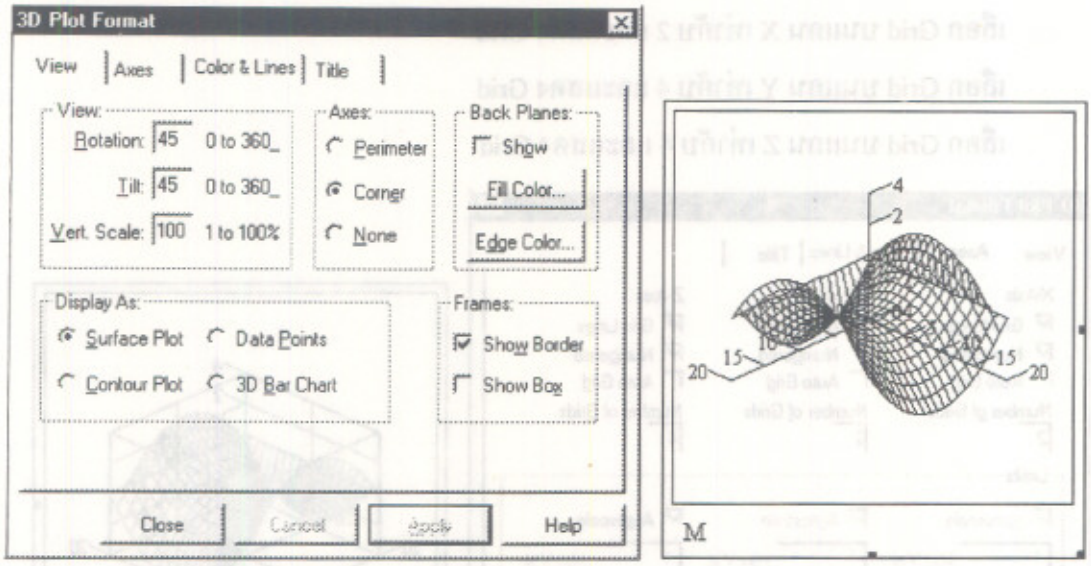


เปลี่ยนเป็น Contour Plot

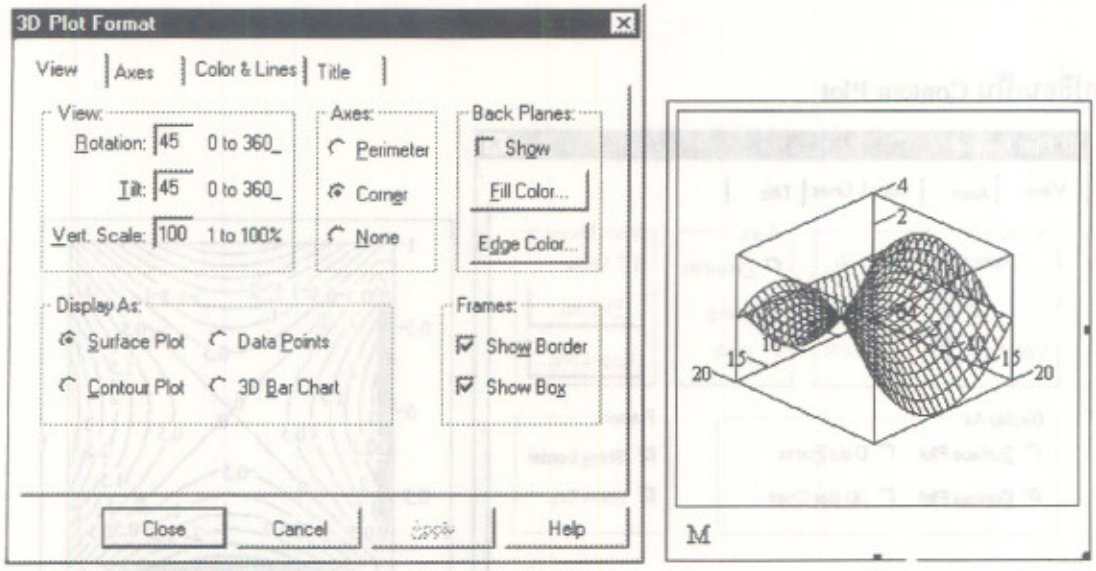




เปลี่ยนเป็น Rotation = 45 , Tilt = 45 , Corner , Show Border



เปลี่ยนเป็น Rotation = 45 , Tilt = 45 , Corner , Show Border และ Show Box



3.8 ตัวอย่างการประยุกต์วิธีเขียนกราฟในรูปแบบผสม

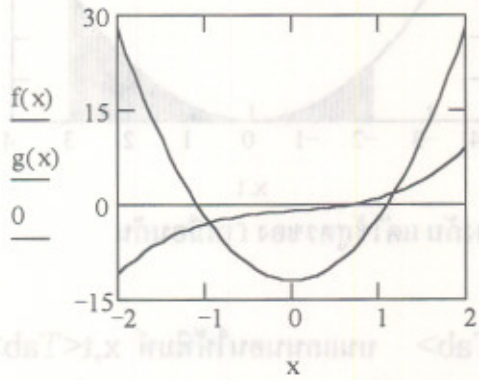
3.8.1 การเขียนกราฟ 2 เส้นพร้อมกัน

กราฟของ $f(x) = x^3 + x - 1$ และ $g(x) = 10x^2 - 12$

$x := -2, -1.9 .. 2$

$f(x) := x^3 + x - 1$

$g(x) := 10 \cdot x^2 - 12$



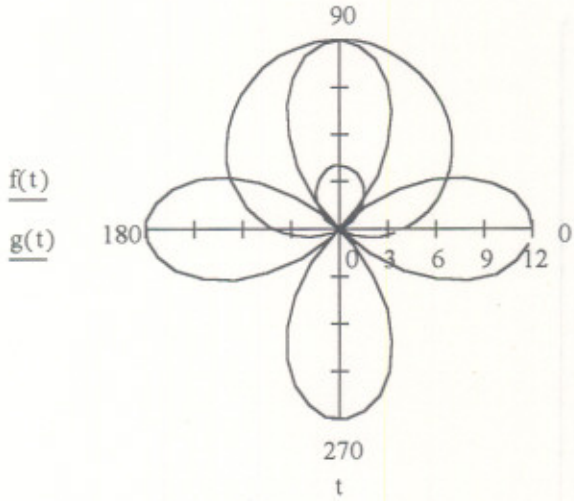
หมายเหตุ การพิมพ์สูตรของฟังก์ชันบนแกน Y ให้พิมพ์แบบนี้ f(x),g(x),0↵

กราฟของ $f(t) = 4 + 8\sin(t)$ และ $g(t) = 12\cos(2t)$

$t := 0, 0.1 .. 2 \cdot \pi$

$f(t) := 4 + 8 \cdot \sin(t)$

$g(t) := 12 \cdot \cos(2 \cdot t)$

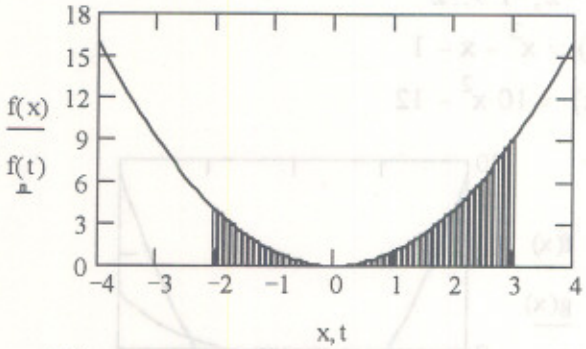


3.8.2 การเขียนกราฟให้มีลักษณะของการแรเงา

$x := -4, -3.9 .. 4$

$f(x) := x^2$

$t := -2, -1.9 .. 3$



วิธีทำ กำหนดโดเมนของการ Plot ให้ต่างกัน แต่ใช้สูตรของ f เหมือนกัน

กำหนดช่วง x และ t ให้ต่างกัน

บนแกนตั้งให้พิมพ์ f(x),f(t)<Tab> บนแกนนอนให้พิมพ์ x,t<Tab>

เลือกรูปแบบการ plot ของเส้นกราฟ f(t) เป็นแบบ Bar graph

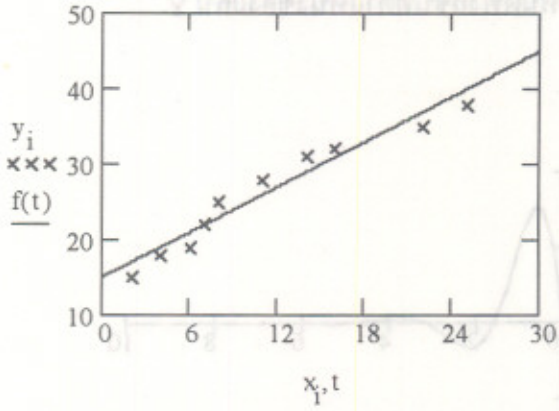
3.8.3 การเขียนกราฟของคู่ลำดับ และ กราฟเส้น

ORIGIN := 1 $\qquad$ $i := 1 .. 10$

$f(x) := x + 15$

$t := 0, 0.1 .. 30$

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 16 \\ 22 \\ 25 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 15 \\ 18 \\ 19 \\ 22 \\ 25 \\ 28 \\ 31 \\ 32 \\ 35 \\ 38 \end{bmatrix}$$



วิธีทำ ที่แกน Y ให้พิมพ์ y [i , f(t) <Tab> ที่แกน X ให้พิมพ์ x [i , t

เลือกชนิดของกราฟเส้นแรกเป็นการ Plot ตัว ×

เลือกชนิดของกราฟเส้นที่ 2 เป็นการ Plot แบบกราฟเส้นตรง

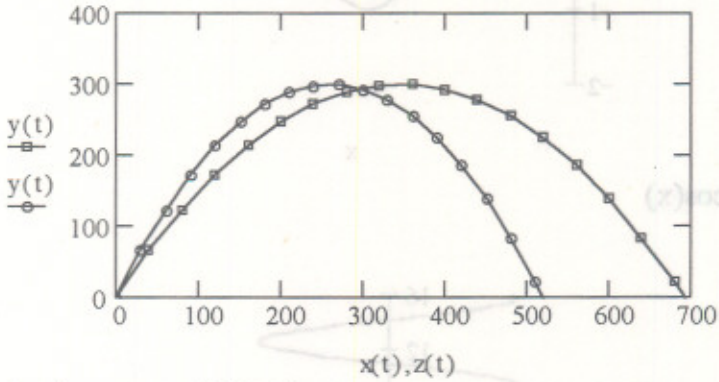
3.8.4 การเขียนกราฟของสมการอิงตัวแปรเสริม 2 เส้นพร้อมกัน

$t := 0, 0.5 .. 9$

$z(t) := 60 \cdot t$

$x(t) := 80 \cdot t$

$y(t) := -16 \cdot t^2 + 80 \cdot \sqrt{3} \cdot t$



วิธีทำ การพิมพ์บนแกน X ให้พิมพ์ x(t) , z(t)

การพิมพ์บนแกน Y ให้พิมพ์ y(t) , y(t)

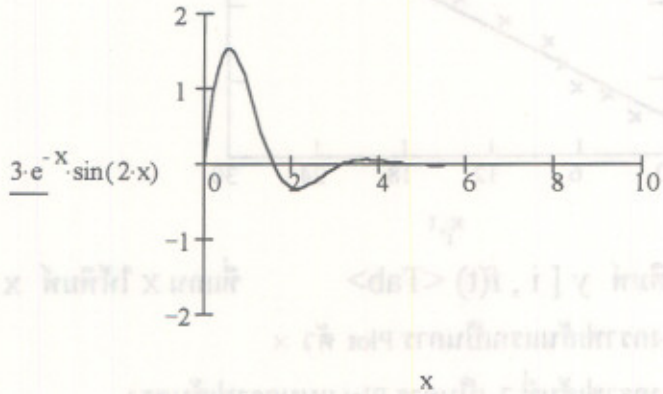
กำหนดรูปแบบการ Plot ของเส้นแรกเป็นแบบ point และ Plot เป็นจุดสี่เหลี่ยม

กำหนดรูปแบบการ Plot ของเส้นที่ 2 เป็นแบบ point และ Plot เป็นวงกลม

3.8.5 การเขียนกราฟโดยการกำหนดฟังก์ชันที่ตำแหน่งของแกน Y

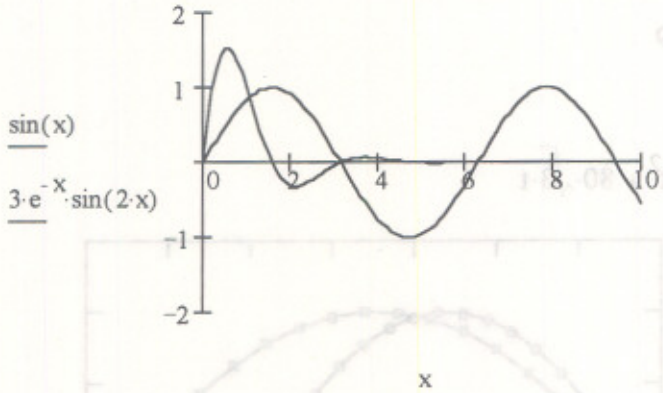
กราฟของ $y = 3e^{-x}\sin(2x)$

$x := 0, 0.1 .. 10$



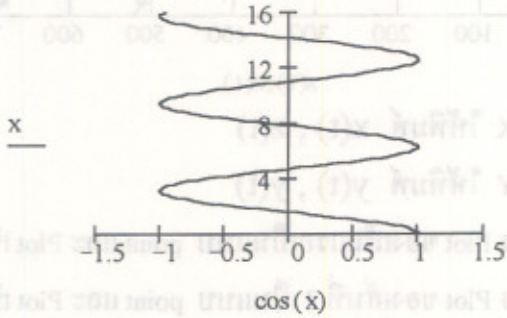
กราฟของ $y = \sin(x)$ **และ** $y = 3e^{-x}\sin(2x)$

$x := 0, 0.1 .. 10$



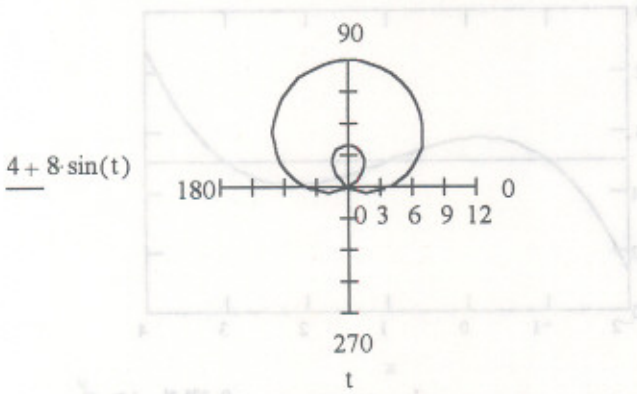
กราฟของ $y = \cos(x)$

$x := 0, 0.1 .. 16$

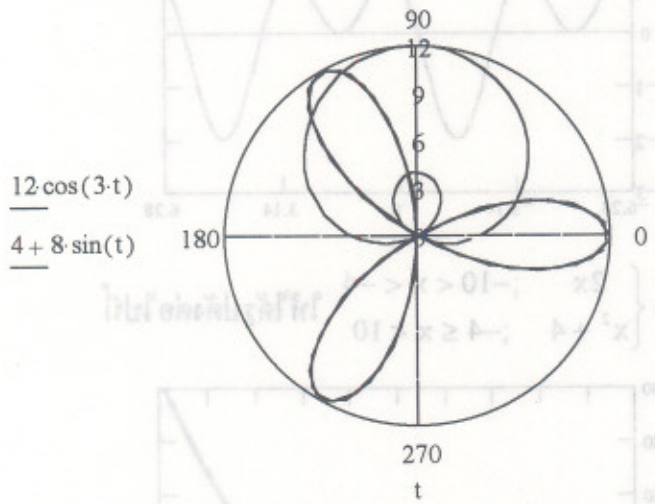


กราฟของ $r = 4 + 8\sin(t)$

$t := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$

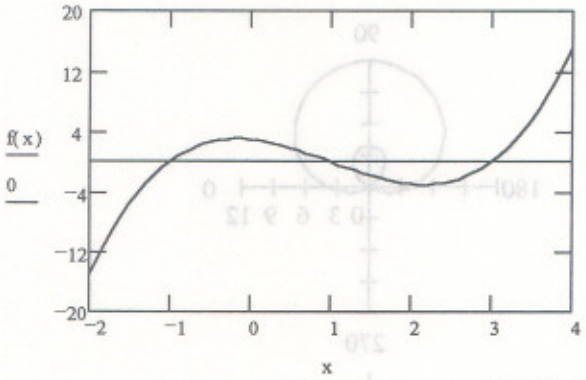


กราฟของ $r = 12\cos(3t)$ และ $r = 4 + 8\sin(t)$

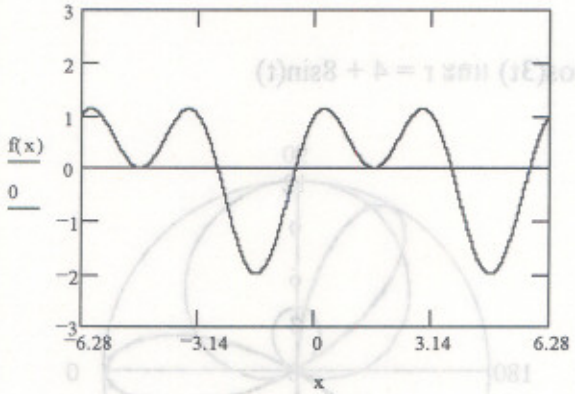


แบบฝึกหัด 3

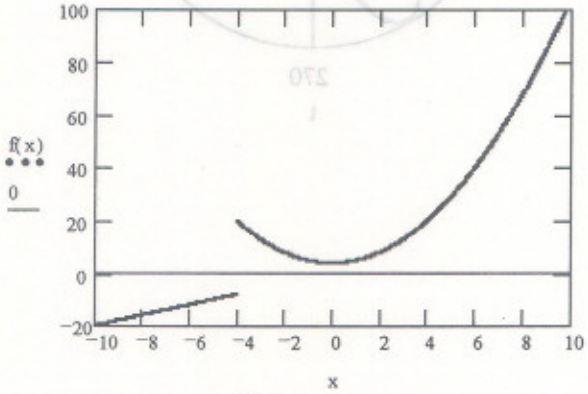
1. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ บนช่วง $[-2, 4]$ ให้ได้รูปดังนี้



2. จงเขียนกราฟของ $f(x) := \sin(x) + \cos(2 \cdot x)$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$ ให้ได้รูปดังนี้



3. จงเขียนกราฟของ $f(x) = \begin{cases} 2x & ;-10 < x < -4 \\ x^2 + 4 & ;-4 \le x < 10 \end{cases}$ ให้ได้รูปดังต่อไปนี้



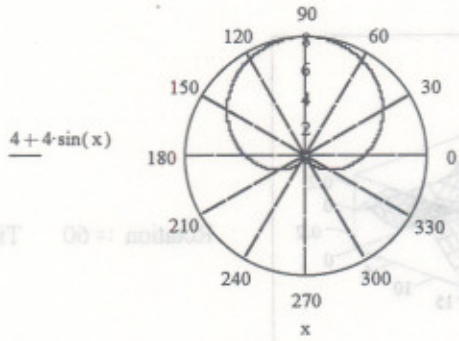
หมายเหตุ พิมพ์สูตร $f(x) = if(x < -4, 2x, x^2 + 4)$

4. จงเขียนกราฟของ $f(x) = x^3 - 4x^2 - 2x + 12$ บนช่วง $[-5, 5]$

5. จงเขียนกราฟของ $f(x) = 3\cos(x) + 4\sin(2x)$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$

6. จงเขียนกราฟของ $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & ;-5 < x < 0 \\ x^2 - 3x - 4 & ;0 \le x < 6 \end{cases}$ (พิมพ์สูตรทำนองเดียวกับข้อ 3.)

7. จงเขียนกราฟของ $r = 4 + 4\sin(x)$ ให้ได้ดังรูปนี้



8. จงเขียนกราฟของ $r = 4 + 4\cos(x)$

9. จงเขียนกราฟของ $r = 4\cos(2x)$

10. จงเขียนกราฟของ $r = 6 - 3\cos(x)$

11. จงเขียนกราฟของ $r = 4\cos(3x)$

12. จงเขียนกราฟการกระจายของข้อมูล $x := \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 10 \\ 11 \\ 15 \\ 18 \end{bmatrix}$ $y := \begin{bmatrix} 25 \\ 27 \\ 32 \\ 46 \\ 50 \\ 63 \\ 74 \\ 85 \end{bmatrix}$

13. จงเขียนกราฟการกระจายของข้อมูล $x := \begin{bmatrix} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 12 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$ $y := \begin{bmatrix} 25 \\ 32 \\ 47 \\ 62 \\ 65 \\ 74 \end{bmatrix}$

14. จงเขียนกราฟของ $x(t) = t$ และ $y((t) = t^2 + t + 1$ บนช่วง $[0, 5]$

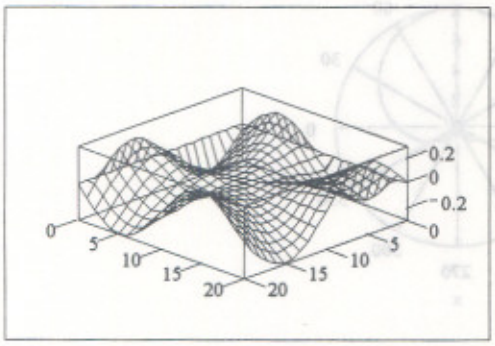
15. จงเขียนกราฟของ $x(t) = 2\sin t$ และ $y((t) = 3\cos t$ บนช่วง $[0, 2\pi]$

16. กำหนดกราฟ 3 มิติ

$i := 1..20 \qquad j := 1..20$

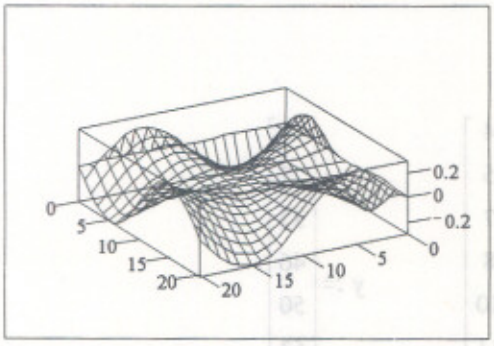
$x_i := -1 + 0.1 \cdot i \qquad y_j := -1 + 0.1 \cdot j$

$f(x,y) := \dfrac{x \cdot y \cdot (x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} \qquad M_{(i,j)} := f(x_i, y_j)$



Rotation := 60 Tile := 45

M



Rotation := 60 Tile := 60

M

จงเขียนกราฟนี้ตามข้อกำหนด

16.1 กำหนด Rotation = 0 , Tile = 90

16.2 กำหนด Rotation = 90 , Tile = 0

16.3 กำหนด Rotation = 90 , Tile = 180

16.4 เขียนเป็นกราฟแบบคอนทัวร์

17. จงเขียนกราฟ 3 มิติของฟังก์ชัน

17.1 $f(x,y) = y^2 - y^4 - x^2$ 17.2 $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

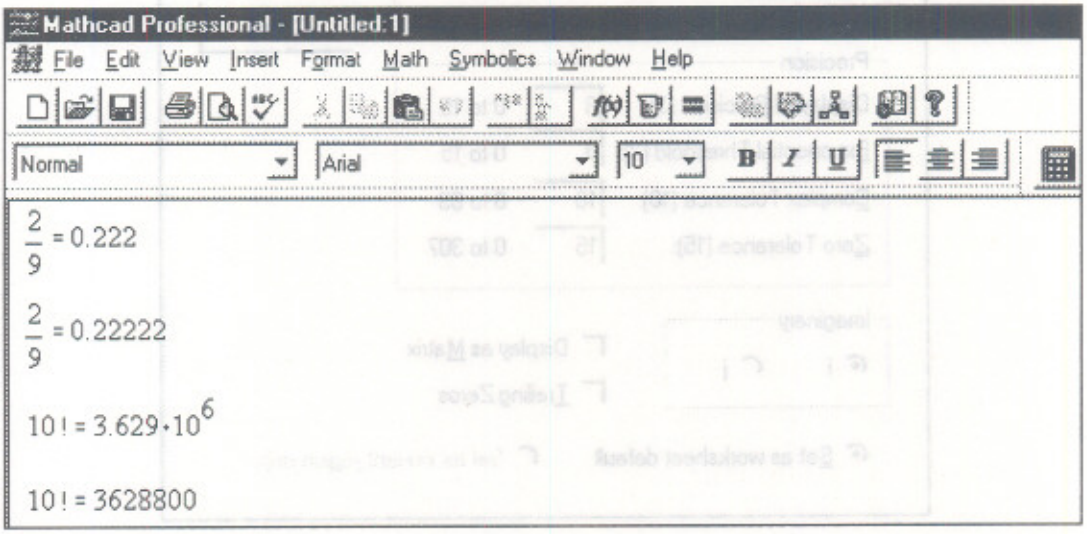
บทที่ 4

การใช้งานเบื้องต้นเกี่ยวกับโปรแกรม MATHCAD

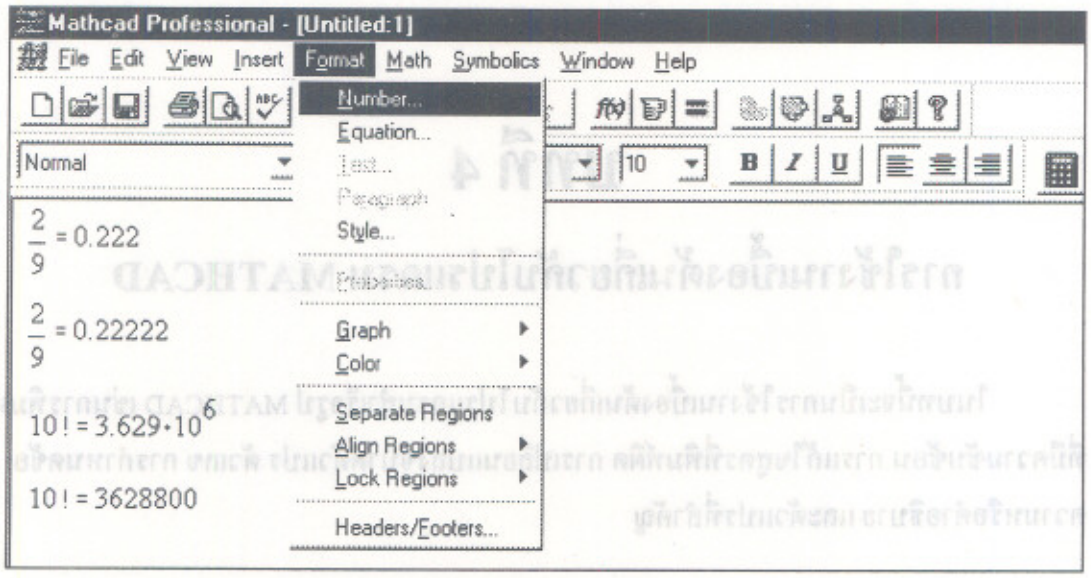
ในบทนี้จะเป็นการใช้งานเบื้องต้นเกี่ยวกับโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD เช่นการพิมพ์ที่มีความซับซ้อน การแก้ไขสูตรที่พิมพ์ผิด การเปลี่ยนแปลงขนาดตัวแปร ตัวเลข การกำหนดข้อความหรือคำอธิบาย และตัวแปรที่สำคัญ

4.1. การกำหนดค่าต่างๆ ในการแสดงผลเกี่ยวกับตัวเลข

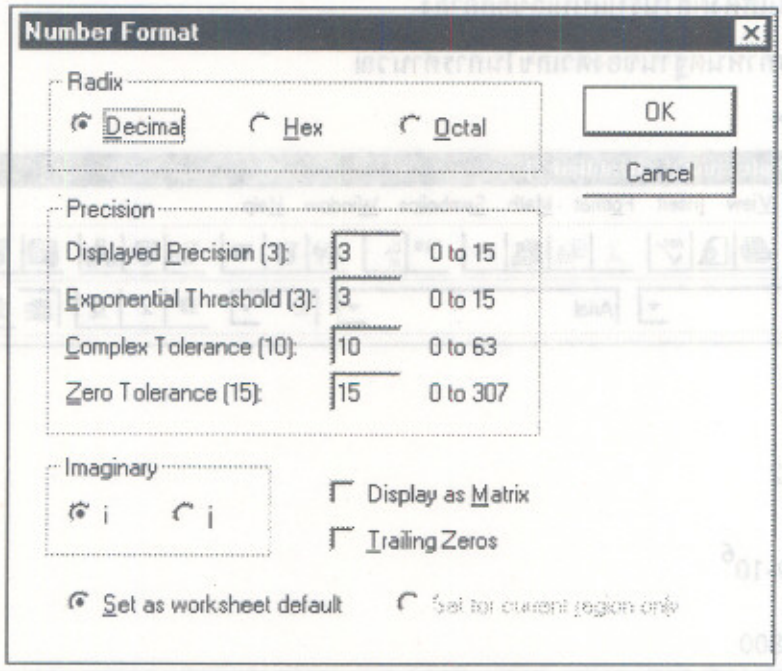
- การกำหนดตำแหน่งของทศนิยม
- การแสดงผลในรูปแบบเลขยกกำลัง
- การกำหนดฐานของตัวเลขในการคำนวณ
- ฯลฯ



ขั้นที่ 1 เลื่อนเม้าส์ไปที่ Menu Bar คลิกที่ Format จะได้แถบคำสั่งเป็นดังนี้



ขั้นที่ 2 คลิกที่ Number จะได้แถบคำสั่งของเมนูย่อยเป็นดังนี้



เมนูย่อย Precision

Precision		
Displayed Precision(3):	3	0 to 15
Exponential Threshold(3):	3	0 to 15
Complex Tolerance(10):	10	0 to 63
Zero Tolerance(15):	15	0 to 307

Displayed Precision กำหนดจำนวนตำแหน่งทศนิยม k ตำแหน่ง $k = 1,2,3...,15$

Exponential Threshold ใช้กำหนดว่าค่า k , $k = 1,2,3,...,15$

ถ้าตัวเลขที่ต้องการแสดงผลมีค่าสูงกว่า 10^k แล้วให้แสดงผลในรูปแบบเลขยกกำลัง

Complex Tolerance กำหนดการแสดงผลเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อน กำหนดค่า k

$k = 0,1,2,3...,63$ ตัวอย่างเช่น $k = 10$ ถ้า $\frac{Re(z)}{Im(z)} < 10^{-10}$ แล้ว จะแสดงผลเป็น Re(z)

ถ้า $\frac{Im(z)}{Re(z)} < 10^{-10}$ แล้ว จะแสดงผลเป็น Im(z)

Zero Tolerance กำหนดการแสดงผล $k = 0,1,2,3,...,307$

การแสดงผลของตัวเลขจะปัดเป็นศูนย์ถ้าค่าของตัวเลขนั้นต่ำกว่า 10^{-k}

ตัวอย่างเช่น $z = 0.0001215$

Zero Tolerance	การแสดงผล
2	0
3	0
4	0.0001215
5	0.0001215

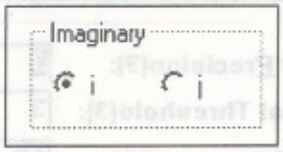
เมนูย่อย Radix

Radix: ◉ Decimal ○ Hex ○ Octal

ใช้กำหนดฐานของตัวเลขในการการคำนวณ

ตัวอย่างเช่น $6o + 12o = 16$ $6 + 12 = 18$ $6h + 12h = 24$

เมนูย่อย Imaginary



กำหนดสัญลักษณ์แทน $\sqrt{-1}$ ว่าจะใช้ i หรือ j ตัวอย่างเช่น $4i + 3i = 7i$, $|3 + 4i| = 5$

เมนูย่อยส่วนที่เหลือ

GLOBAL ใช้กำหนดว่าทางเลือกต่างๆ ที่เราเลือก จะใช้กับทุกแห่งในการทำงานขณะนั้น

LOCAL ใช้กำหนดว่าทางเลือกต่างๆ ที่เราเลือก จะใช้เฉพาะบริเวณที่กำหนด

Trailing Zeros กำหนดการแสดงผลว่าจะให้พิมพ์ 0 ที่อยู่หลังสุดหรือไม่ เช่น 1.5,1.500

Display as Matrix กำหนดการแสดงผลว่าจะให้พิมพ์ในรูปแบบเมทริกซ์หรือไม่

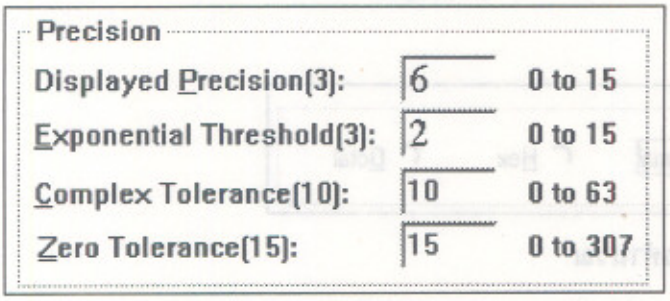
ตัวอย่างเช่น

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

A =

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

ตัวอย่างเช่นการกำหนด



จะได้ผลการคำนวณค่าต่างๆดังนี้ $\frac{1}{3} = 0.333333$ $10! = 3.6288 \cdot 10^6$ $i := \sqrt{-1}$

$$\frac{1}{e^{10}} + i = 0.000045399929762 + i$$

$$\frac{1}{e^{100}} + i = i$$

$$\frac{1}{10^{15}} = 1 \cdot 10^{-15}$$

$$\frac{1}{10^{16}} = 0$$

Precision

Displayed Precision(3):	15	**0 to 15**
Exponential Threshold(3):	8	**0 to 15**
Complex Tolerance(10):	10	**0 to 63**
Zero Tolerance(15):	15	**0 to 307**

จะได้ผลการคำนวณค่าต่างๆดังนี้ $\frac{1}{3} = 0.333333333333333$ $10! = 3628800$

ค่าคงตัวที่โปรแกรม MATHCAD กำหนดไว้ให้และวิธีพิมพ์

Predefined Math Constants

Name	**Keystroke**
∞	**Ctrl+z**
π	**Ctrl+p**
e	**e**
i	**1i**
j	**1j**
%	**%**

ตัวอย่างเช่น

$50 \cdot \% = 0.5$ (พิมพ์ 50 * %=)

$2 \cdot \% = 0.02$ (พิมพ์ 2 * %=)

$e = 2.718281828459045$

$\pi = 3.141592653589793$

$\infty = 1 \cdot 10^{307}$

4.2. การพิมพ์สูตรที่ยุ่งยากซับซ้อน

การพิมพ์สูตรทางคณิตศาสตร์ที่มีความยุ่งยากซับซ้อนเช่น

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \qquad f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

มีแป้นบนแผงแป้นอักขระ (Keyboard) ที่สำคัญที่ช่วยในการพิมพ์คือ

<Space bar> ใช้ขยายบริเวณของเส้นตั้งฉากที่กำลังคลุมสูตรที่เราพิมพ์ 1 ขั้นตอน

↑ ใช้ยกเลิกบริเวณของ เส้นตั้งฉากที่กำลังคลุมสูตรที่เราพิมพ์

ตัวอย่างการพิมพ์สูตร $f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(x):	$f(x) := \blacksquare$
\	$f(x) := \sqrt{\blacksquare}$
x^2	$f(x) := \sqrt{x^2}$
<Space bar>	$f(x) := \sqrt{x^2}$
+1	$f(x) := \sqrt{x^2+1}$

<Space bar>	$f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$
<Space bar>	$f(x) := \sqrt{x^2 + 1}$
/	$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\blacksquare}$
x+1↵	$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

ตัวอย่างการคำนวณเช่น

$$f(x) := \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} \qquad x := 1..3$$

x	f(x)
1	0.7071
2	0.7454
3	0.7906

ตัวอย่างการพิมพ์สูตร $f(z) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
f(z):1	$f(z) := 1$

/	$f(z) := \frac{1}{\blacksquare}$
\	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{\blacksquare}}$
2*	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\blacksquare}}$
<Ctrl> + P	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$
<Space bar>	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$
<Space bar>	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$
<Space bar>	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}$

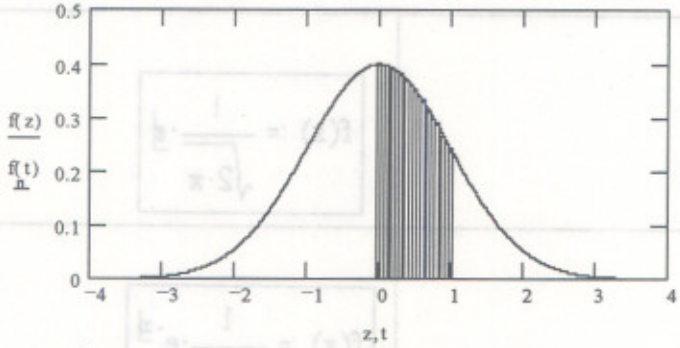
*	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot$
e^–z	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-z}$
^2	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-z^2}$
<Space bar>	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-z^2}$
/2↵	$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{\frac{-z^2}{2}}$

ตัวอย่างการคำนวณบนจอภาพ

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$z := -4, -3.99 .. 4$

$t := 0, 0.1 .. 1$



$$\int_0^1 f(z)\,dz = 0.3413$$

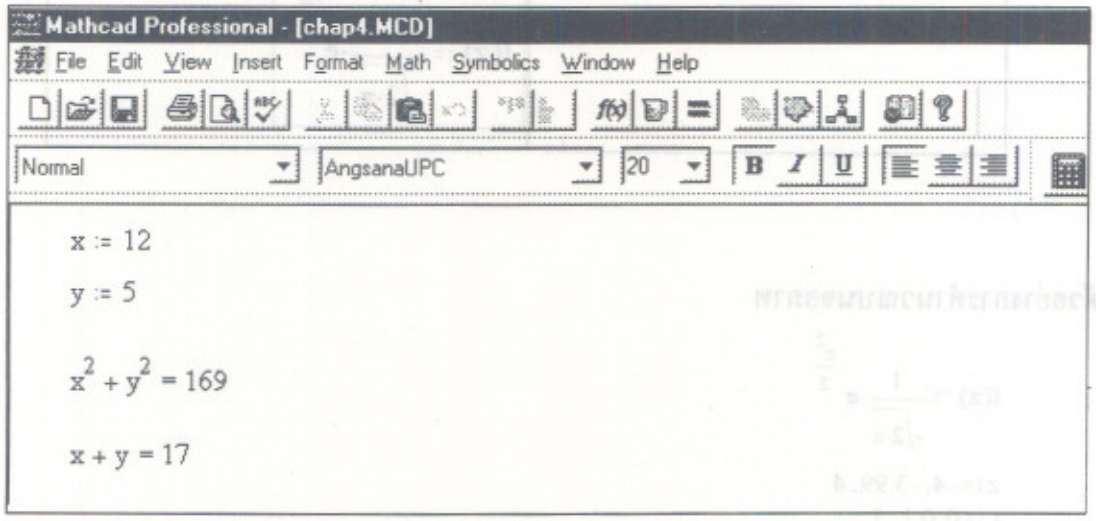
$$\int_0^2 f(z)\,dz = 0.4772$$

หมายเหตุ f(z) เป็นฟังก์ชันที่ช่วยในการหาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน

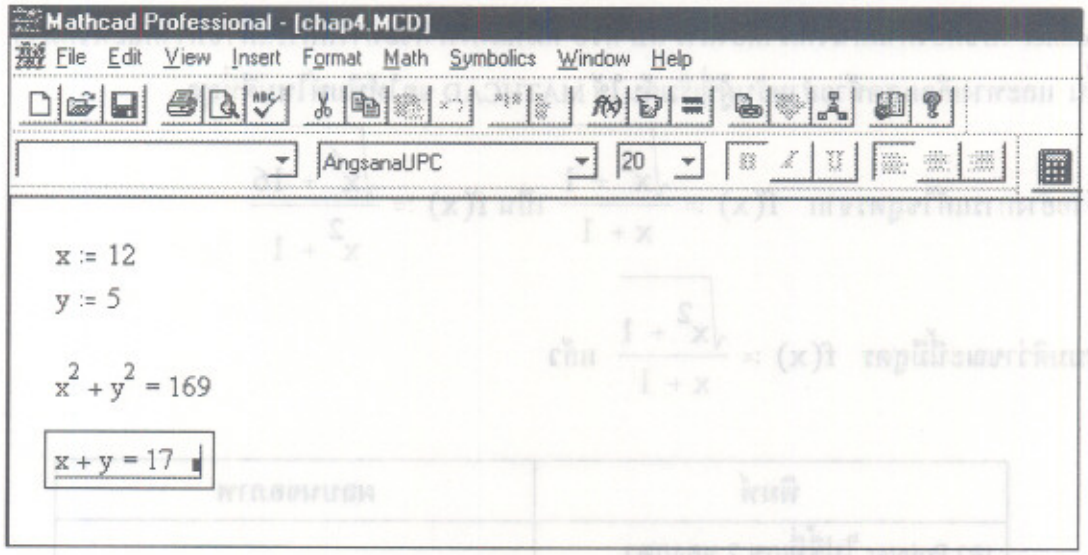
ตัวอย่างเช่น $P(0<z<1) = 0.3413$, $P(0<z<2) = 0.4771$

4.3 การลบ การคัดลอก สูตร ตัวแปร และ ตัวเลข

ใน MATHCAD จะมอง สูตร ต่างๆ เป็นบริเวณที่ล้อมด้วยกรอบสี่เหลี่ยม



เมื่อทำการกดเม้าส์ค้างไว้แล้วลากเม้าส์เข้าไปที่บริเวณของสูตร จะเห็นกรอบสี่เหลี่ยมคลุมสูตรเมื่อปล่อยมือก็จะมีทั้งกรอบสี่เหลี่ยมคลุมสูตรทั้งหมด และ มีเส้นตั้งฉากคลุมสูตรตัวจริงภายใน เช่น ลากเม้าส์ไปคลุมสูตร $x + y = 17$



ขณะนี้เราได้ทำการเลือกบริเวณของสูตรแล้ว

ขณะนี้เราสามารถทำการ copy , cut , paste หรือ เคลื่อนย้ายสูตรได้ ด้วยการกด

F2 คือการ copy สูตรที่ถูกคลุมด้วยเส้นตั้งฉาก

F3 คือการลบทิ้ง แต่ยังเก็บ สูตรที่ถูกคลุมด้วยเส้นตั้งฉากไว้ในหน่วยความจำ

F4 เป็นการนำสูตรที่เคย copy ไว้ออกมาพิมพ์ที่ตำแหน่งตัวชี้ตำแหน่ง (Curser) ขณะนั้น การเคลื่อนย้ายสูตรทำได้โดยการนำเม้าส์ไปขอบของสี่เหลี่ยม เมื่อเรากดเม้าส์ค้างไว้ก็จะเป็นรูปมือที่ขอบ เมื่อเราลากเม้าส์ไป กรอบสี่เหลี่ยมที่คลุมสูตรก็จะย้ายตามไปด้วย

4.4 การแก้ไขเกี่ยวกับการพิมพ์ผิด

เนื่องจาก MATHCAD จะทำการจัดรูปแบบการพิมพ์ให้เหมาะสมตลอดเวลา ดังนั้นการที่เราจะทำการลบอักษรบางตัวด้วย <Backspace> หรือ <Del> หรือ <Insert> ภายในสูตรอาจจะทำให้รูปแบบของสูตรขณะนั้นผิดไป อย่างไรก็ตามหากเรามีความชำนาญในการเอา Pointer ไปชี้ต้องตำแหน่งที่เราต้องการ ลบ หรือ พิมพ์แทรก ก็จะทำให้การแก้ไขทำได้สะดวกมากขึ้น และทางเลือกสุดท้ายสำหรับผู้ที่เริ่มต้นใช้ MATHCAD ขอให้พิมพ์ใหม่ดีที่สุด

ตัวอย่างการแก้ไขสูตรจาก $f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ เป็น $f(x) := \frac{\sqrt{x^4+16}}{x^2+1}$

สมมติว่าขณะนี้มีสูตร $f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ แล้ว

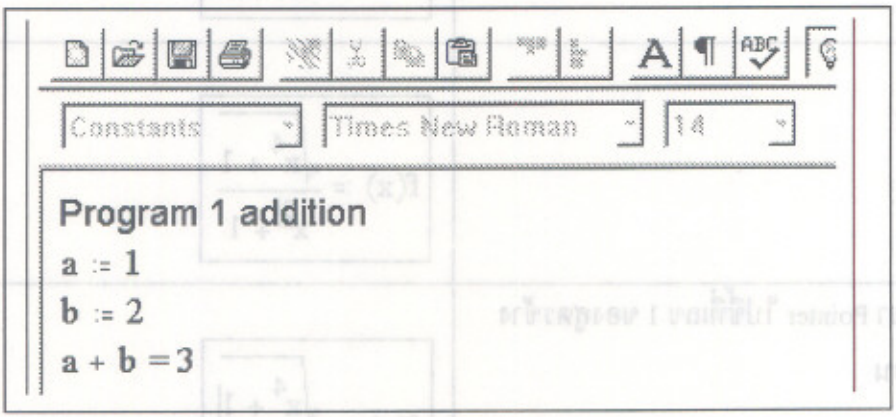
พิมพ์	ผลบนจอภาพ
เอา Pointer ไปชี้ที่เลข 2 ของสูตร $f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$	$f(x) := \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$
<Backspace>	$f(x) := \frac{\sqrt{x^{\blacksquare}+1}}{x+1}$
4	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4+1}}{x+1}$

เอา Pointer ไปชี้ที่ x ตัวข้างล่างของสูตร $f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x + 1}$	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x + 1}$
^	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^{\blacksquare} + 1}$
2	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2 + 1}$
เอา Pointer ไปชี้ที่เลข 1 ของสูตรข้างบน $f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2 + 1}$	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{x^2 + 1}$
<Backspace>	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + \blacksquare}}{x^2 + 1}$

16↵	$f(x) := \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x^2 + 1}$

4.5 การทำ Remark ใน MATHCAD

ในการทำงานเราสามารถเขียนคำอธิบายเพื่อเป็นหมายเหตุประกอบสูตรคำนวณ และ/หรือ คำอธิบายของตัวโปรแกรม ตัวอย่างเช่น



ในตัวอย่างนี้ Program 1 addition เป็นหมายเหตุของตัวโปรแกรมซึ่ง MATHCAD เรียกข้อมูลแบบนี้ว่า Text

การพิมพ์ข้อมูลแบบ Text ใน MATHCAD

พิมพ์	ผลบนจอภาพ
“	

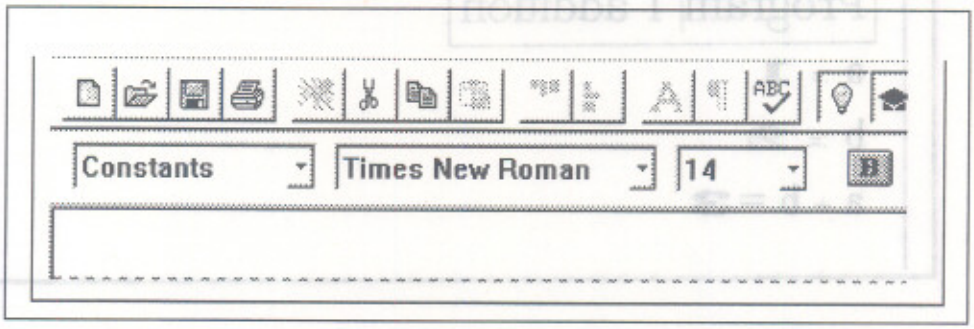
Program 1 Addition	Program 1 addition
<PageDown>	Program 1 addition

หมายเหตุ กด “ จะได้บริเวณสี่เหลี่ยมสำหรับพิมพ์ข้อความ ในบริเวณกรอบของ Text การกด Enter คือการขึ้นบรรทัดใหม่ภายในกรอบ การออกจากบริเวณของ Text ต้องกด <PageDown>

4.6 การเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปแบบของตัวอักษร และ ตัวเลข

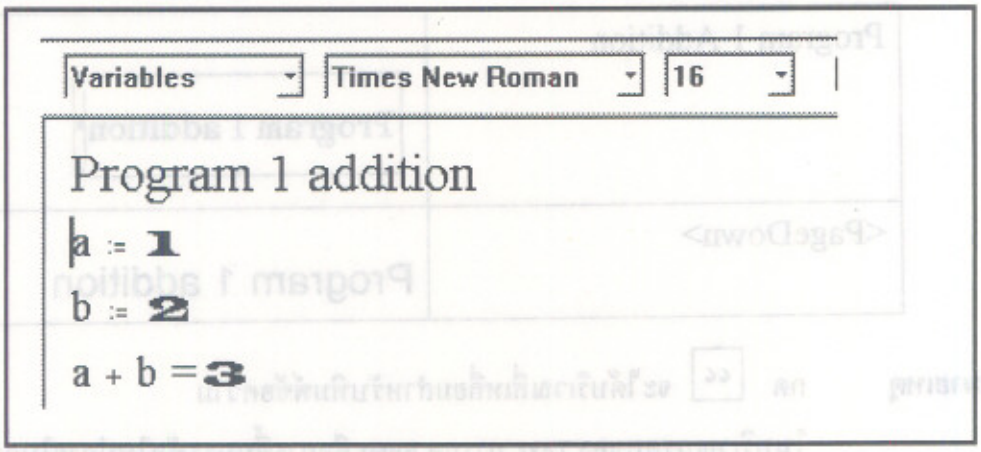
การเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปแบบตัวอักษรตัวเลข ทำเหมือนการใช้โปรแกรม Microsoft Word หรือ Excell แต่ในโปรแกรม MATHCAD จำแนกรูปแบบออกเป็น 3 กลุ่มคือ

1. ตัวเลข
2. ตัวอักษร
3. ตัวเลข และ ตัวอักษรที่อยู่ในบริเวณของ Text



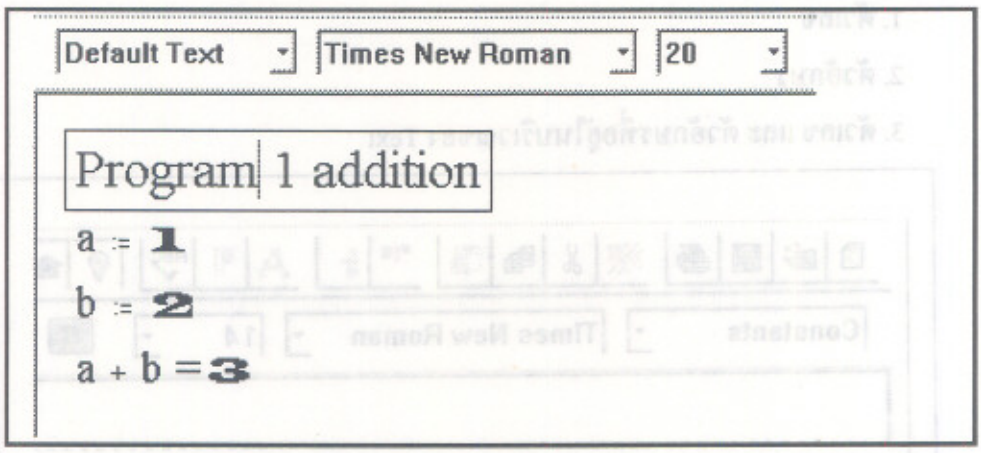
การเปลี่ยนตัวแปรให้มีรูปแบบเป็น **Times New Roman 16**

1. คลิ้กที่ตัวแปรตัวใดก็ได้
2. เลือก Font เป็น Times New Roman
3. เลือกขนาดเป็น 16



การเปลี่ยนข้อมูลแบบ Text ให้มีรูปแบบเป็น Times New Roman 20

1. คลิ้กที่ตัวอักษรในบริเวณ Text ตัวใดก็ได้
2. เลือก Font เป็น Times New Roman
3. เลือกขนาดเป็น 20



4.7 การควบคุมความถูกต้องของการประมาณค่าตัวแปร TOL

การคำนวณเกี่ยวกับการหารากของสมการ เช่นการใช้คำสั่ง root หรือ การหาคำตอบของระบบสมการด้วยชุดคำสั่ง Given , Find โปรแกรม MATHCAD จะตรวจความถูกต้องว่าคำตอบที่ได้นั้นถูกต้องมากหรือน้อย โดยการตรวจสอบค่าคลาดเคลื่อนกับค่าของ TOL ซึ่งเป็นตัวแปรที่กำหนดค่าไว้ล่วงหน้าแล้วเป็น 0.001 ดังนั้นหากเราต้องการความถูกต้องมากขึ้นจะต้องลดค่าของ TOL ให้เล็กลงเช่น

TOL = 0.00001
TOL = 0.0000001

ตัวอย่างเช่น การประมาณรากที่ 2 ของ 2 จากสมการ $f(x) := x^2 - 2$

ค่าจริงที่ถูกต้อง 15 ตำแหน่ง $\sqrt{2} = 1.414213562373095$

การคำนวณของ MATHCAD

$\sqrt{2} = 1.414213562373095$
$f(x) := x^2 - 2$
$x := 2$

$TOL := 0.1$
$root(f(x), x) = 1.437340153452686$
$\left|root(f(x), x) - \sqrt{2}\right| = 0.02312659107959$ ความถูกต้องที่ได้ 1 ตำแหน่ง

$TOL := 0.01$
$root(f(x), x) = 1.414670639164679$
$\left|root(f(x), x) - \sqrt{2}\right| = 0.000457076791583$ ความถูกต้องที่ได้ 3 ตำแหน่ง

$TOL := 0.001$
$root(f(x), x) = 1.414215716463644$
$\left|root(f(x), x) - \sqrt{2}\right| = 0.000002154090548$ ความถูกต้องที่ได้ 5 ตำแหน่ง

$TOL := 0.0001$
$root(f(x), x) = 1.414215689279686$
$\left|root(f(x), x) - \sqrt{2}\right| = 0.000002126906591$ ความถูกต้องที่ได้ 5 ตำแหน่ง

$TOL := 0.0000001$

$root(f(x), x) = 1.41421356268887$

$\left| root(f(x), x) - \sqrt{2} \right| = 0.000000000315775$ ความถูกต้องที่ได้ 9 ตำแหน่ง

$TOL := 0.0000000001$

$root(f(x), x) = 1.414213562373095$

$\left| root(f(x), x) - \sqrt{2} \right| = 0$ ความถูกต้องที่ได้ 15 ตำแหน่ง

หมายเหตุ เมื่อเข้าสู่โปรแกรม MATHCAD ครั้งแรกค่าของ TOL กำหนดไว้เท่ากับ 0.001

ตัวอย่างต่อไป การประมาณจุดตัดของเส้นตรง $y = x$ และ วงกลม $x^2 + y^2 = 1$ จุดตัดที่อยู่ในจตุภาค (quadrant) ที่ 1 คือ $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ค่าที่ถูกต้อง 15 ตำแหน่ง

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707106781186547$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$x := 1$

$y := 1$

$TOL := 1$

Given

$x - y = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

$Find(x, y) = \begin{pmatrix} 0.750000005407099 \\ 0.750000005407098 \end{pmatrix}$ ความถูกต้องที่ได้ 1 ตำแหน่ง

$TOL := 0.0001$

Given

$x - y = 0$

$x^2 + y^2 = 1$

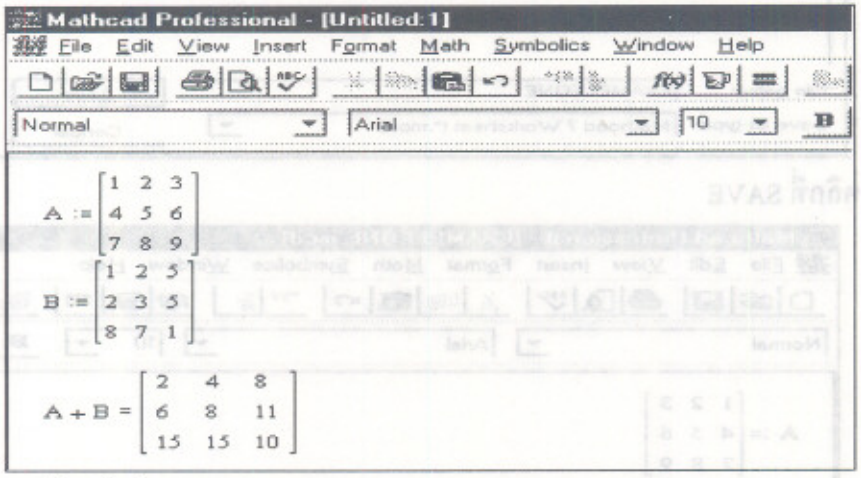
$Find(x, y) = \begin{pmatrix} 0.707106781186547 \\ 0.707106781186547 \end{pmatrix}$ ความถูกต้องที่ได้ 15 ตำแหน่ง

หมายเหตุ จำนวน 0 หลังจุดทศนิยมของ TOL ไม่ใช้จำนวนตำแหน่งของทศนิยมที่ถูกต้องของการคำนวณ

4.8 การ บันทึกแฟ้มข้อมูล MATHCAD และ เรียกแฟ้มข้อมูลขึ้นมาทำงาน

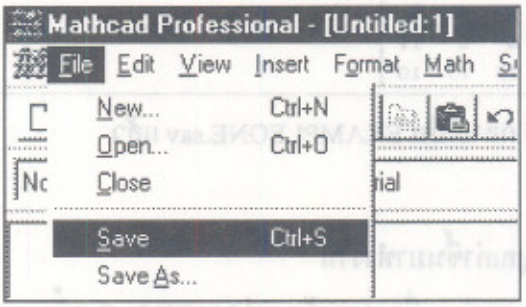
เมื่อเริ่มทำงานครั้งแรกกับ MATHCAD จะเห็นว่าชื่อแฟ้มของงานที่เราทำจะมีชื่อที่โปรแกรม MATHCAD กำหนดคือ [Untitled: 1]

สมมติงานที่เราทำขณะนี้คือ โปรแกรมการหาผลบวกของเมทริกซ์

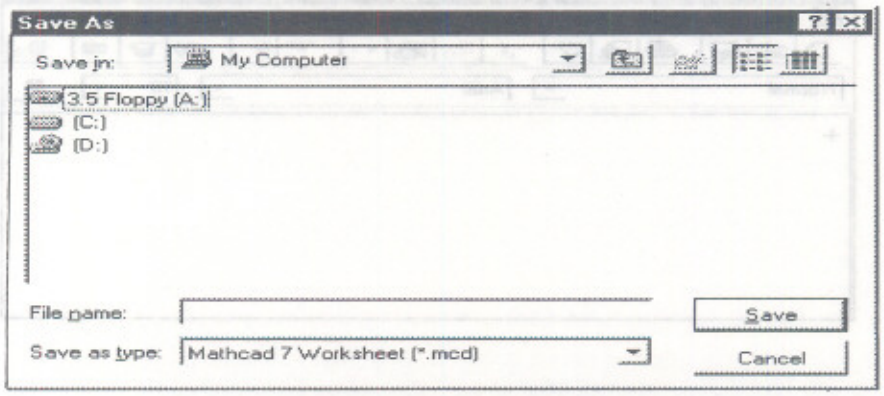


4.8.1 การบันทึกแฟ้มข้อมูล

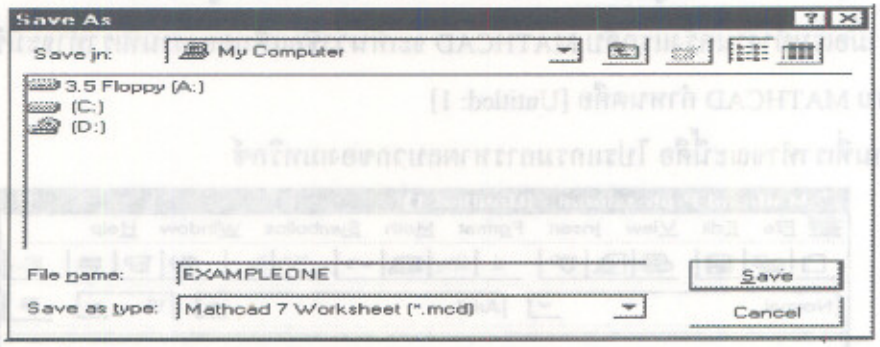
ขั้นที่ 1. คลิกที่ File



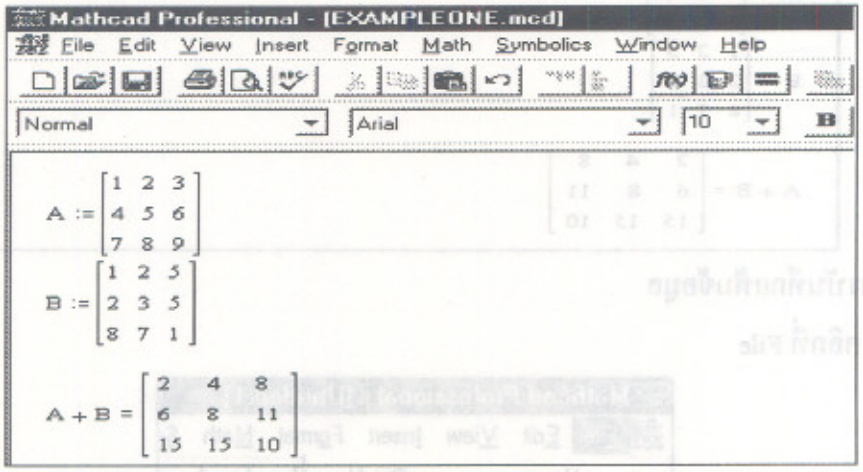
ขั้นที่ 2. คลิกที่ Save



ขั้นที่ 3. พิมพ์ชื่อแฟ้มตามที่ต้องการเช่น EXAMPLEONE



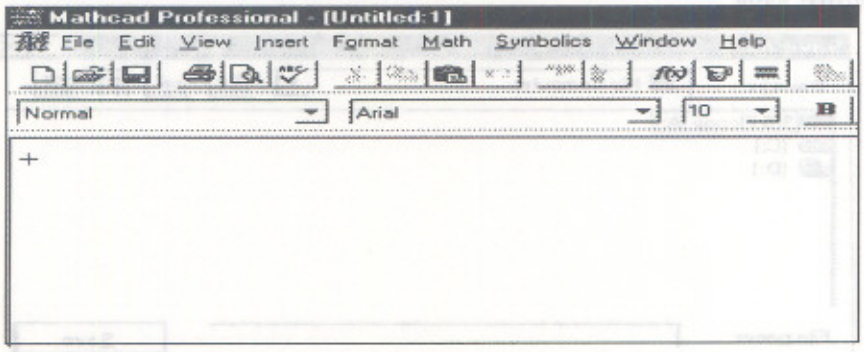
ขั้นที่ 4. คลิกที่ SAVE



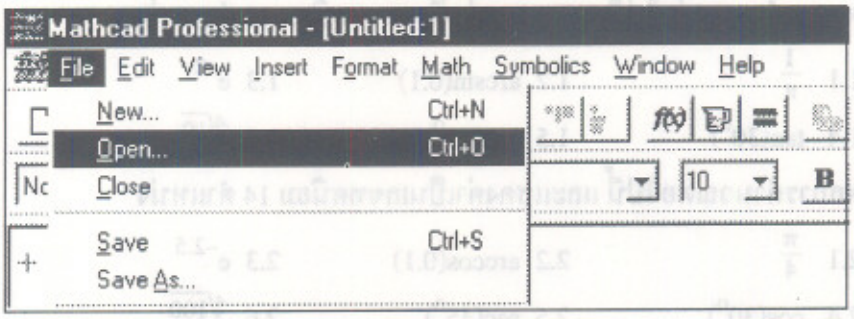
จะเห็นว่า [Untitled: 1] กลายเป็น EXAMPLEONE.sav แล้ว

4.8.1 การเรียกแฟ้มข้อมูลเก่าขึ้นมาทำงาน

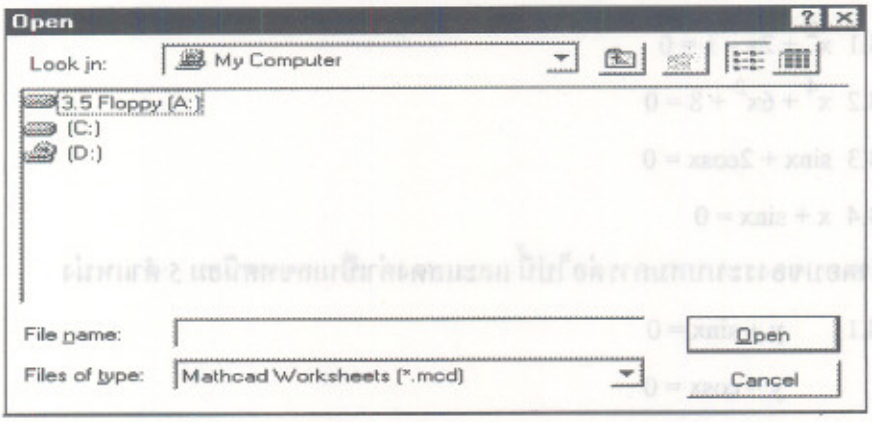
สมมติขณะนี้จอภาพของเราว่าง เนื่องจากเข้ามาสู่ MATHCAD ครั้งแรก



ขั้นที่ 1. คลิกที่ File

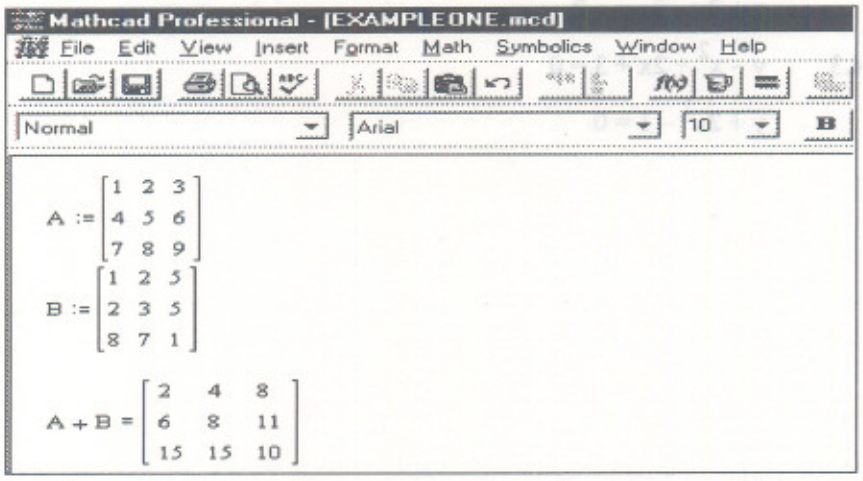


ขั้นที่ 2. คลิกที่ Open



ขั้นที่ 3. พิมพ์ชื่อแฟ้มที่ต้องการเปิด เช่น EXAMPLEONE

ขั้นที่ 4. คลิก OPEN จะได้แฟ้มข้อมูลที่ต้องการ



หมายเหตุ คำสั่ง File\New.. คำสั่ง File\Save As.. คำสั่ง File\Close.. มีลักษณะใช้งานเหมือนกับการทำงานทั่วไปของระบบ Windows

แบบฝึกหัด 4.

1. จงหาผลการคำนวณต่อไปนี้ และแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม 10 ตำแหน่ง

1.1 $\frac{1}{\pi}$	1.2 $\arcsin(0.1)$	1.3 e^{-2}
1.4 $\tan(30^{o})$	1.5 $\cos(45^{o})$	1.6 $\sqrt[4]{10}$

2. จงหาผลการคำนวณต่อไปนี้ และแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม 14 ตำแหน่ง

2.1 $\frac{\pi}{4}$	2.2 $\arccos(0.1)$	2.3 $e^{-2.5}$
2.4 $\cos(30^{o})$	2.5 $\sec(45^{o})$	2.6 $\sqrt[4]{100}$

3. จงหารากของสมการต่อไปนี้ และแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม 6 ตำแหน่ง

3.1 $x^2 + 2x - 1 = 0$

3.2 $x^4 + 6x^2 + 8 = 0$

3.3 $\sin x + 2\cos x = 0$

3.4 $x + \sin x = 0$

4. จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้ และแสดงค่าเป็นเลขทศนิยม 5 ตำแหน่ง

4.1 $y + \sin x = 0$

$y - \cos x = 0$

4.2 $x + y + z = 4$

$x - y + 2z = 5$

$x + 2y - 3z = -2$

4.3 $y - x^2 + 2x + 3 = 0$

$y + 2x^2 - 1 = 0$

บทที่ 5

การเขียนโปรแกรมด้วยคำสั่งของ MATHCAD

ในบทนี้จะเป็นการนำคำสั่งต่างของโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD มาใช้ในการเขียนโปรแกรมเพื่อเพิ่มความสามารถในการคำนวณให้มากขึ้น แผนภูมิสายงานที่ใช้ในการคำนวณส่วนใหญ่จะมีรูปแบบดังนี้

เริ่มต้น

↓

กำหนดค่าต่างๆ ของตัวแปร

↓

คำนวณค่าต่างๆ ตามสูตร

↓

แสดงผลการคำนวณ

↓

จบการทำงาน

โปรแกรมที่ 1 การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดความยาวของด้าน a , b , c

Program 1. Find Area of triangle

$a := 3$

$b := 4$

$c := 5$

$$s := \frac{a + b + c}{2}$$

$$Area := \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$$

$Area = 6$

แนวคิดของโปรแกรมภาษา MATHCAD ก็คือการนำ คำสั่งกำหนดค่า คำสั่งคำนวณมาประกอบกันเป็นการทำงานแบบโปรแกรม

จากโปรแกรมที่ 1 เราสามารถจำแนกส่วนของการทำงานต่างๆ ดังนี้

ส่วนของ INPUT คือ

$a := 3$

$b := 4$

$c := 5$

ส่วนประมวลผลคือ

$$s := \frac{a+b+c}{2}$$

$$Area := \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

ส่วนแสดงผลคือ

$Area = 6$

เมื่อเราเปลี่ยนค่า a , b , c ใหม่ก็จะได้ผลการคำนวณใหม่ดังนี้

$a := 30$

$b := 40$

$c := 50$

$$s := \frac{a+b+c}{2}$$

$$Area := \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

$Area = 600$

$a := 50$

$b := 120$

$c := 130$

$$s := \frac{a+b+c}{2}$$

$$Area := \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$$

$Area = 3\cdot 10^{3}$

โปรแกรมที่ 2 การหาเมทริกซ์ผกผัน และ เมทริกซ์ผูกพันของ A

Program 2.Find inverse and adjoint matrix of A

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$adjA := |A| \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$cofA := adjA^{T}$$

$$cofA = \begin{bmatrix} 9 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

โปรแกรมที่ 3 การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

Program 3. Find root of complex number

$ORIGIN := 0$

$a := 81$

$b := 0$

$i := \sqrt{-1}$

$z := a + b \cdot i$

$n := 4$

$r := |z|$

$\theta := arg(z)$

$k := 0, 1 .. n - 1$

$$\alpha_k := \frac{\theta + 2 \cdot k \cdot \pi}{n}$$

$$x_k := r^{\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \left(\cos\left(\alpha_k\right) + i \cdot \sin\left(\alpha_k\right)\right)$$

x_k	k
3	0
3i	1
-3	2
-3i	3

โปรแกรมที่ 4 การหาพื้นที่สามเหลี่ยมเมื่อกำหนดพิกัดจุดยอด 3 จุด

Program 4. Find area of triangle

$a1 := 0 \qquad b1 := 0$

$a2 := 5 \qquad b2 := 0$

$a3 := 0 \qquad b3 := 12$

$$Area := \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left|\left|\begin{pmatrix} a2 - a1 & b2 - b1 \\ a3 - a1 & b3 - b1 \end{pmatrix}\right|\right|$$

$Area = 30$

หมายเหตุ ถ้า (a1,b1) , (a2,b2) , (a3,b3) เป็นพิกัดจุดยอดสามเหลี่ยม

แล้วพื้นที่สามเหลี่ยมเท่ากับ $\left(\frac{1}{2}\right)\left|\det\left(\begin{bmatrix} a2-a1 & b2-b1 \\ a3-a1 & b3-b1 \end{bmatrix}\right)\right|$

โปรแกรมที่ 5 การหาค่าเฉลี่ย และ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

Program 5. Find mean and standard deviation

$ORIGIN := 1$

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$n := length(x)$

$i := 1..n$

$$xbar := \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$s := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}{n} - xbar^2}$$

$xbar = 8$

$s = 4.561$

โปรแกรมที่ 6 การหาระยะทางจากจุด (x_o,y_o) ไปยังเส้นตรง $ax + by + c = 0$

Program 6. Find distance from (xo,yo) to line ax+by+c = 0

$a := 3$

$b := 4$

$c := 10$

$xo := 2$

$yo := 5$

$$distance := \frac{|a \cdot xo + b \cdot yo + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$distance = 7.2$

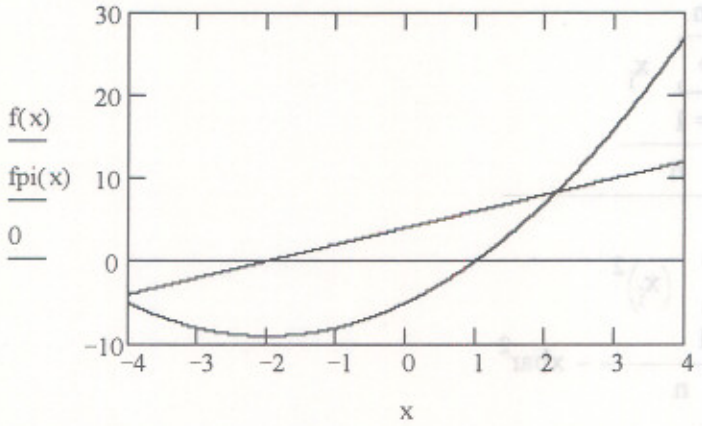
โปรแกรมที่ 7 การเขียนกราฟของ f(x) และ f'(x)

Program 7. Graph of f(x) and f '(x)

$f(x) := x^2 + 4 \cdot x - 5$

$$fpi(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

$x := -4, -3.99 .. 4$



โปรแกรมที่ 8 การหาความน่าจะเป็น

มีลูกบอลทั้งหมด N = 20 ลูก เป็นสีดำ k = 5 ลูก หยิบออกมาพร้อมกัน n = 4 ลูก

P(x) = ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีดำ x ลูกเท่ากับเท่าใด

Program 8. Find P(x)

$$C(n,r) := \frac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$$

$N := 20$

$k := 5$

$n := 4$

$x := 0..n$

$$P(x) := \frac{C(k,x)\cdot C(N-k,n-x)}{C(N,n)}$$

x	P(x)
0	0.2817
1	0.4696
2	0.2167
3	0.031
4	0.001

โปรแกรมที่ 9 การคำนวณในรูปแบบการกระทำซ้ำ การหารากโดยวิธีของนิวตัน

การหารากของสมการ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 6$ กำหนด $x_0 = 1$

สูตรของการหารากคือ $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

Program 9. Find root of f(x)=0 using Newton's Method

$ORIGIN := 0$

$f(x) := x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 6$

$fpi(x) := \dfrac{d}{dx} f(x)$

$x_0 := 1$

$n := 1 .. 10$

$x_{n+1} := x_n - \dfrac{f(x_n)}{fpi(x_n)}$

n	x_n
1	0
2	1.5
3	0.638
4	-4.047
5	-4.289
6	-4.267
7	-4.267
8	-4.267
9	-4.267
10	-4.267

โปรแกรมที่ 10 การคำนวณค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของเมทริกซ์

Program 10. Find eigenvalue and eigenvector of A

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A, -5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A, 4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.874 \\ 0.486 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A, 2) = \begin{bmatrix} 0.893 \\ -0.446 \\ 0.064 \end{bmatrix}$$

โปรแกรมที่ 11 การคำนวณค่าความยาวเส้นโค้ง

การหาความยาวเส้นโค้ง $r(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}\,t, 3t^4)$ **จาก** $t = -1$ **ถึง** $t = 2$

Program 11. Find length of curve

$t_1 := -1$

$t_2 := 2$

$x(t) := 6 \cdot t^2$

$y(t) := 4 \cdot \sqrt{2} \cdot t^3$

$z(t) := 3 \cdot t^4$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}(x(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(y(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(z(t))\right]^2}\, dt = 81$$

ค่า t บนช่วง [0 , 1] จะได้ความยาวดังนี้

$$\int_{0}^{1} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}(x(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(y(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(z(t))\right]^2}\, dt = 9$$

โปรแกรมที่ 12 การหารากของพหุนามระดับขั้น 2 เช่นการหารากของสมการ $x^2 + 2x - 3 = 0$

Program 12. Find roots of polynomial degree 2

$a := 1 \qquad b := 2 \qquad c := -3$

$$x_1 := \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x_2 := \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

สรุป รากสมการคือ –3 , 1

โปรแกรมที่ 13 การหารากของพหุนามระดับขั้น 3 เช่ นสมการ $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$

Program 13. Find roots of polynomial degree 3

$p := -6 \qquad q := 3 \qquad r := 10$

$$a := \frac{1}{3} \cdot \left(3 \cdot q - p^2\right) \qquad b := \frac{1}{27} \cdot \left(2 \cdot p^3 - 9 \cdot p \cdot q + 27 \cdot r\right)$$

$$A := \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \qquad B := \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$$

$$x_1 := (A + B) - \frac{p}{3}$$

$$x_2 := \left[-\left(\frac{A + B}{2}\right) + \left(\frac{A - B}{2}\right) \cdot \sqrt{-3}\right] - \frac{p}{3}$$

$$x_3 := -\left(\frac{A + B}{2}\right) - \left(\frac{A - B}{2}\right) \cdot \sqrt{-3} - \frac{p}{3}$$

$$x = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

สรุป รากสมการคือ 5 , –1 , 2

โปรแกรมที่ 14 การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติมาตรฐาน จาก z = a ถึง z = b

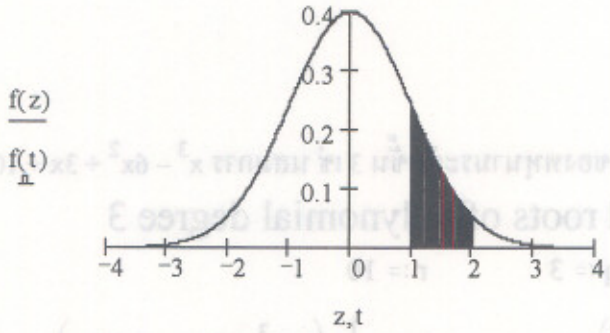
Program 14. Find area from z = a to z = b

$a := 1 \qquad b := 2$

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$z := -4, -3.99 .. 4$

$t := a, a + 0.01 .. b$



$P(a,b) := \text{cnorm}(b) - \text{cnorm}(a)$

$P(a,b) = 0.136$

โปรแกรมที่ 15 การหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด 3 จุดที่กำหนดให้

จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (3, –4) , (3, 4) , (4, 3)

Program 15. Find circle

$$\left\| \begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 25 & 3 & -4 & 1 \\ 25 & 3 & 4 & 1 \\ 25 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$-8\cdot x^2 - 8\cdot y^2 + 200 = 0$

สมการวงกลมคือ $-8\cdot x^2 - 8\cdot y^2 + 200 = 0$ หรือ $x^2 + y^2 = 25$

จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (1, 1) , (1, –1) , (–1, 1)

Program 15. Find circle

$$\left\|\begin{bmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$-4\cdot x^2 - 4\cdot y^2 + 8 = 0$

สมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 = 2$

โปรแกรมที่ 16 การหาสมการทรงกลมที่ผ่านจุด 4 จุดที่กำหนดให้

ตัวอย่างเช่นกำหนดจุด (1, 2, 3) , (–1, 2, 3) , (1, –2, 3) , (1, 2, –3) จงหาทรงกลมที่ผ่าน 4 จุด

Program 16. Find conic equation

$$\left\|\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & y & 1 \\ 14 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 14 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 14 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 14 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$48\cdot x^2 + 48\cdot y^2 + 48\cdot z^2 - 672 = 0$

สมการทรงกลมคือ $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

ตัวอย่างเช่นกำหนดจุด (1, 1, 1) , (–1, 1, 1) , (1, –1, 1) , (1, 1, –1) จงหาทรงกลมที่ผ่าน 4 จุด

Program 16. Find conic equation

$$\left\|\begin{bmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

$8\cdot x^2 + 8\cdot y^2 + 8\cdot z^2 - 24 = 0$

สมการทรงกลมคือ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

แบบฝึกหัด 5.

1. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ที่มีด้าน

   1.1 $a = 7$, $b = 24$, $c = 25$

   1.2 $a = 10$, $b = 15$, $c = 24$

2. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC ที่มีจุดยอดเป็น

   2.1 (1,2) , (4,6) และ (5,12)

   2.2 (-4,2) , (3,-6) และ (4,1)

3. จงหา adj(A) และ Cof(A) เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

4. จงหารากที่ 5 ของ $z = 32$

5. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหาระยะทางระหว่างเส้นตรง $ax + by + c_1 = 0$ กับ $ax + by + c_2 = 0$

6. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหามุมระหว่างเวกเตอร์ U กับ V

7. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหามุม A , B และ C เมื่อกำหนดความยาวของด้าน a , b , c

8. จงเขียนโปรแกรมเพื่อหา เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของ A

9. การหาค่าเฉลี่ย มัธยฐาน และ ความแปรปรวนของข้อมูล 10 ตัว

10. จงเขียนโปรแกรมเพื่อเขียนกราฟของ f, f' , f''

11. จงเขียนโปรแกรมเพื่อ หาสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 19 & 11 \\ 28 & 16 \end{bmatrix}$

12. จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด

    12.1 (–1,2) , (4,–6) และ (5,12)

    12.2 (–4,2) , (3,–6) และ (–4,1)

13. จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด

    13.1 (–1,2) , (4,–6) และ (5,12)

    13.2 (–4,2) , (3,–6) และ (–4,1)

บทที่ 6

MATHCAD กับคณิตศาสตร์ระดับ ม. ปลาย

ในบทนี้จะเป็นการนำความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD มาใช้ในการคำนวณเพื่อเสริมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษาตอนปลายโดยจำแนกเนื้อหาคณิตศาสตร์ตามระดับ ม.4 – ม.6

6.1 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค 011

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 011 ในหัวข้อนี้คือ

1. การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร
2. การคำนวณ เลขยกกำลัง และ การหารากที่ 2
3. การคำนวณค่าในรูปแบบตาราง
4. การกำหนดสูตรฟังก์ชัน
5. การคำนวณค่าฟังก์ชันในรูปแบบตาราง
6. การเขียนกราฟฟังก์ชัน
7. การเปลี่ยนเลขฐาน 8 ฐาน 16 เป็นเลขฐาน 10 และการคำนวณ
8. การแยกตัวประกอบพหุนาม
9. การเขียนกราฟ r และ r^{-1}
10. การหาระยะทางระหว่างจุด P และ Q
11. การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ Q
12. การหาระยะทางจากจุด P ไปยังเส้นตรง $ax + by + c = 0$
13. การหาคำตอบของสมการพหุนาม
14. การกระจายผลคูณของพหุนาม

ตัวอย่างการคำนวณเช่น

1. การคำนวณเบื้องต้น บวก ลบ คูณ หาร

$3+4=7$ $\qquad$ $3-4=-1$

$3\cdot 4=12$ $\qquad$ $\frac{3}{4}=0.75$

2. การคำนวณ เลขยกกำลัง และ การหารากที่ 2

$3^4=81$ $\qquad$ $3^{0.5}=1.732$

$\sqrt{2}=1.414$ $\qquad$ $\sqrt{3}=1.732$ $\qquad$ $\sqrt{7}=2.646$

3. การคำนวณค่าในรูปแบบตาราง

$x:=1..5$

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$
1	1	1	1
2	4	8	1.414
3	9	27	1.732
4	16	64	2
5	25	125	2.236

4. การกำหนดสูตรฟังก์ชันและการคำนวณค่า

$f(x):=x^2$ $\qquad$ $f(2)=4$

$f(x):=2\cdot x+3$ $\qquad$ $f(3)=9$

$g(x):=\frac{x+1}{x+4}$ $\qquad$ $g(2)=0.5$

5. การคำนวณค่าฟังก์ชันในรูปแบบตาราง

$x:=1,1.5..4$ $\qquad$ $f(x):=2\cdot x+3$

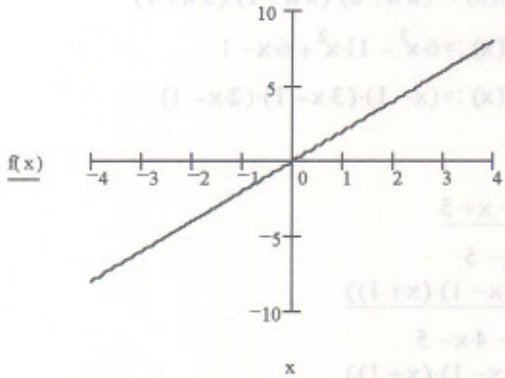
x	f(x)
1	5
1.5	6
2	7
2.5	8
3	9
3.5	10
4	11

หรือ $\quad x:=\begin{bmatrix}1.2\\2.4\\2.5\\-1.2\end{bmatrix}$ $\qquad f(x):=x^2$ $\qquad \overrightarrow{f(x)}=\begin{bmatrix}1.44\\5.76\\6.25\\1.44\end{bmatrix}$

6. การเขียนกราฟฟังก์ชัน

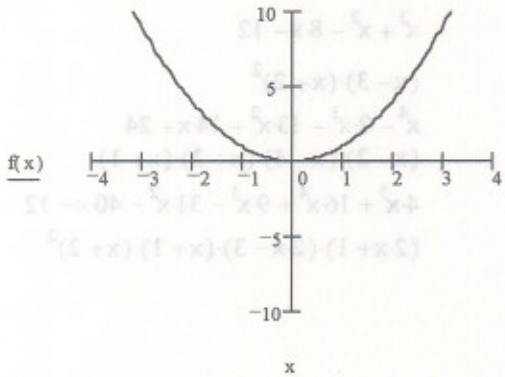
$f(x) := 2 \cdot x$

$x := -4, -3.95 .. 4$



และ $f(x) := x^2$

$x := -4, -3.95 .. 4$



6. การเปลี่ยนเลขฐาน 8 ฐาน 16 เป็นเลขฐาน 10

จากฐาน 8 เป็นฐาน 10	1o = 1	2o = 2
	3o = 3	13o = 11
จากฐาน 16 เป็นฐาน 10	1h = 1	2h = 2
	3h = 3	13h = 19

ตัวอย่างการคำนวณหาผลบวกและผลคูณ

2h + 2h = 4	8h + 8h = 16
8h + 9h = 17	4o + 4o = 8
5o + 3o = 8	8h + 3o = 11
10h + 10o = 24	20·20 = 400
20o·20o = 256	20h·20h = 1024

8. โปรแกรม MATHCAD มีความสามารถทำการแยกตัวประกอบพหุนาม

$p(x) := 12 \cdot x^3 + 16 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3$

การแยกตัวประกอบพหุนามที่ได้ $p(x) := (2 \cdot x + 3) \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 1)$

$f(x) := 6 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 1$

การแยกตัวประกอบพหุนามที่ได้ $f(x) := (x - 1) \cdot (3 \cdot x - 1) \cdot (2 \cdot x - 1)$

หรือสั่งให้แยกตัวประกอบที่ละขั้นตอน

กำหนด $\dfrac{x^3 - 5 \cdot x^2 - x + 5}{x^2 - 4 \cdot x - 5}$

แยกตัวประกอบของเศษ $\dfrac{((x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1))}{x^2 - 4 \cdot x - 5}$

แยกตัวประกอบของส่วน $\dfrac{((x - 5) \cdot (x - 1) \cdot (x + 1))}{((x + 1) \cdot (x - 5))}$

หาผลลัพธ์ $x - 1$

ตัวอย่างการแยกตัวประกอบอื่นๆ

$x^3 + x^2 - 8 \cdot x - 12$

$(x - 3) \cdot (x + 2)^2$

$x^4 - 2 \cdot x^3 - 13 \cdot x^2 + 14 \cdot x + 24$

$(x - 2) \cdot (x - 4) \cdot (x + 3) \cdot (x + 1)$

$4 \cdot x^5 + 16 \cdot x^4 + 9 \cdot x^3 - 31 \cdot x^2 - 40 \cdot x - 12$

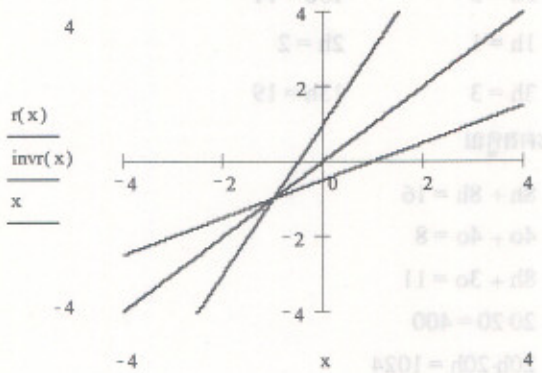
$(2 \cdot x + 1) \cdot (2 \cdot x - 3) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2)^2$

9. การเขียนกราฟ r และ r^{-1}

$r(x) := 2 \cdot x + 1$

$invr(x) := \dfrac{x - 1}{2}$

$x := -4, -3.99 .. 4$



10 การหาระยะทางระหว่างจุด P และ Q

$ORIGIN := 1$

$P := \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$

$Q := \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$PQ := \sqrt{(P_1 - Q_1)^2 + (P_2 - Q_2)^2}$

$PQ = 7.81$

11. การหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ Q

$ORIGIN := 1$

$P := \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$Q := \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\text{midpointofPQ} := \begin{bmatrix} \frac{P_1 + Q_1}{2} \\ \frac{P_1 + Q_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{midpointofPQ} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

12. การหาระยะทางจากจุด P ไปยังเส้นตรง $ax + by + c = 0$

ตัวอย่างเช่นการหาระยะทางจาก $(-2, -1)$ ไปยังเส้นตรง $3x + 4y - 10 = 0$

$x_1 := -2$

$y_1 := -1$

$a := 3$

$b := 4$

$c := -10$

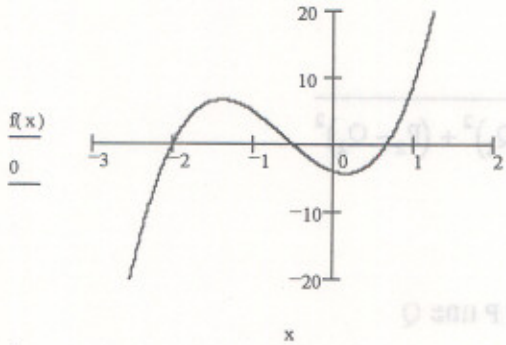
$$\text{distance} := \frac{|a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\text{distance} = 4$

13. การหาคำตอบของสมการพหุนาม

$f(x) := 6 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 4$

$x := -3, -2.99 .. 2$



$x := 0$

$root(f(x), x) = -0.5$

$x := 2$

$root(f(x), x) = 0.667$

$x := -2$

$root(f(x), x) = -2$

หรือทำโดยการแยกตัวประกอบ $f(x) := 6 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 4$

$f(x) := (2 \cdot x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (3 \cdot x - 2)$

14. การกระจายผลคูณของพหุนาม

$(x+1)\cdot(x+2)$	การกระจายได้เป็น	$x^2 + 3 \cdot x + 2$
$(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$	การกระจายได้เป็น	$x^3 + 6 \cdot x^2 + 11 \cdot x + 6$
$(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 + x + 1)$	การกระจายได้เป็น	$x^4 + x^2 + 1$
$(x^2 - x + 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^3 + 1)$	การกระจายได้เป็น	$x^7 + x^4 + x^5 + x^2 + x^3 + 1$
$(x+1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot(x^2 - x + 1)^2$	การกระจายได้เป็น	$x^7 + x^4 + x^5 + x^2 + x^3 + 1$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาค่าของ

1.1 $\sqrt{12}$ 1.2 $\sqrt[5]{24}$ 1.3 $\sqrt[7]{12}$

1.4 $\log(120)$ 1.5 $\ln(12)$ 1.6 $\log_{12}45$

1.7 1.2^{4} 1.8 e^{-3} 1.9 e^{-1}

2. การเขียนกราฟฟังก์ชัน

2.1 $f(x) = 2x + 3$ บนช่วง $[-3, 3]$

2.2 $f(x) = x^2 + 3x - 4$ บนช่วง $[-4, 4]$

3. จงหาค่าของ

3.1 $(123)_8 + (234)_8$ 3.2 $(1212)_{16} + (1213)_{16}$

3.3 $(12)_8(24)_8$ 3.4 $(12)_{16}(13)_{16}$

4. จงกระจายหพุนาม

4.1 $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$ 4.2 $(x - 2)^4$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุด P และ Q

5.1 $P(5,4)$, $Q(-1,3)$

5.2 $P(-5,3)$, $Q(1,-3)$

6. จงหาระยะทางจากจุด P ไปยังเส้นตรง $ax + by + c = 0$

6.1 $P(1,2)$ $3x + 5y - 3 = 0$

6.2 $P(3,2)$ $4x + 5y - 10 = 0$

7. จงหาคำตอบของสมการพหุนาม

7.1 $x^3 - 5x^2 - 16x + 80 = 0$

7.2 $x^4 + 3x - 10 = 0$

8. จงแยกตัวประกอบ

8.1 $4x^5 + 16x^4 + 9x^3 - 31x^2 - 40x - 12$

8.2 $4x^3 + 13x^2 + 4x - 12$

8.3 $x^5 - 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

6.2 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค. 012

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 012 ในหัวข้อนี้คือ

1. การคำนวนค่าในรูปแบบตาราง
2. การเขียนกราฟของวงกลม
3. การเขียนกราฟของพาราโบลา
4. การเขียนกราฟของวงรี
5. การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา
6. การคำนวณค่าฟังก์ชัน
7. การเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียน และ เรเดียนเป็นองศา
8. การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin cos tan sec csc cot
9. กราฟของ sin cos tan sec csc cot
10. การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่าเฉลี่ย เรขาคณิต และค่าเฉลี่ย ฮาร์มอนิก

ตัวอย่างการคำนวณเช่น

1. การคำนวนค่าในรูปแบบตาราง

$x := -2..3$

$y(x) := x^3$

x	y(x)	x^3	$x^3 + 1$
-2	-8	-8	-7
-1	-1	-1	0
0	0	0	1
1	1	1	2
2	8	8	9
3	27	27	28

การกำหนดค่าในรูปแบบเวกเตอร์เมื่อการเพิ่มค่าของ x ไม่เท่ากัน

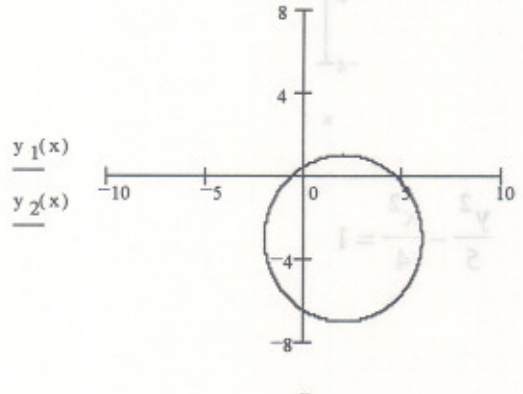
$$x := \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.8 \\ 1.2 \\ -1.5 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{y(x)} = \begin{bmatrix} 0.008 \\ 0.064 \\ 0.512 \\ 1.728 \\ -3.375 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{(2 \cdot x + 1)} = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 1.8 \\ 2.6 \\ 3.4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2. การเขียนกราฟของวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$

$x := -2, -1.99 .. 6$

$y_1(x) := -3 + \sqrt{16 - (x - 2)^2}$

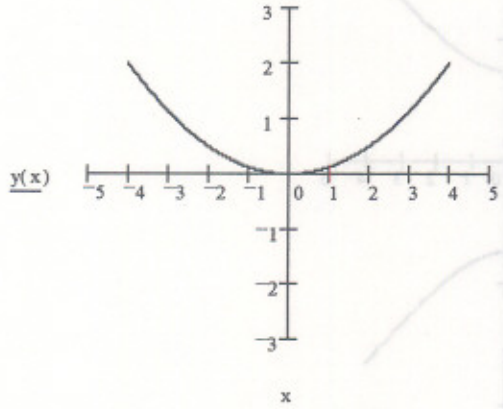
$y_2(x) := -3 - \sqrt{16 - (x - 2)^2}$



3. การเขียนกราฟของพาราโบลา $y = \frac{1}{8}x^2$

$x := -4, -3.99 .. 4$

$y(x) := \frac{1}{8} \cdot x^2$

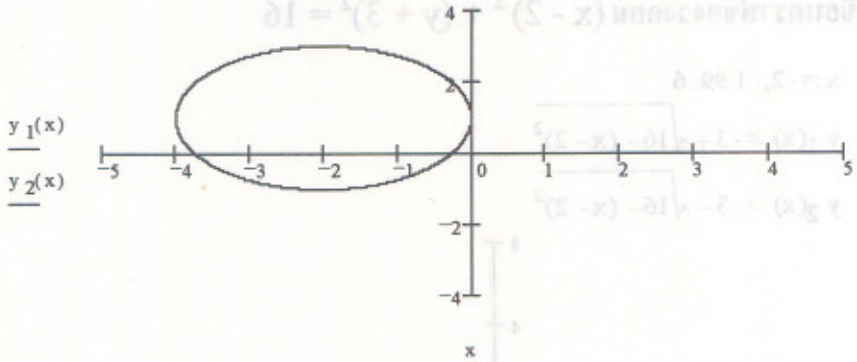


4. การเขียนกราฟของวงรี $\frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$

$x := -4, -3.99 .. 0$

$y_1(x) := 1 + 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{4}}$

$y_2(x) := 1 - 2 \cdot \sqrt{1 - \frac{(x+2)^2}{4}}$

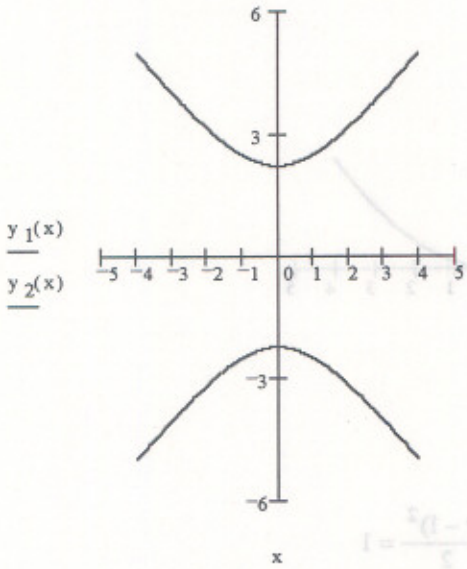


5. การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

$x := -4, -3.99 .. 4$

$y_1(x) := \sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$

$y_2(x) := -\sqrt{5} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}$



6. การคำนวณค่าฟังก์ชัน f(x) = 2x +1

$f(x) := 2 \cdot x + 1$

$x := 0 .. 5$

x	f(x)
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11

$$f(x) := \frac{x^2 - x - 12}{x + 3}$$

$x := 1..5$

x	f(x)
1	-3
2	-2
3	-1
4	0
5	1

การคำนวณค่าผลประกอบของฟังก์ชัน

$f(x) := x^2 + 3$

$g(x) := 3 \cdot x + 2$

$x := 0..5$

x	f(x)	g(x)	f(g(x))	g(f(x))
0	3	2	7	11
1	4	5	28	14
2	7	8	67	23
3	12	11	124	38
4	19	14	199	59
5	28	17	292	86

7. การเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียน และ เรเดียนเป็นองศา

การเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียน

degree := 0, 30.. 90

$$\text{radian}(\text{degree}) := \left(\frac{\text{degree}}{180}\right) \cdot \pi$$

degree	radian(degree)
0	0
30	0.523599
60	1.047198
90	1.570796

การเปลี่ยน เรเดียน เป็นองศา

$radian := 1, 2 .. 5$

$degree(radian) := \left(\frac{radian}{\pi}\right) \cdot 180$

radian	degree(radian)
1	57.29578
2	114.591559
3	171.887339
4	229.183118
5	286.478898

8. **การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ** sin cos tan sec cosec cot

$\sin(\pi) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.5 \qquad \cos(0) = 1$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.5 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\sin\left(\frac{12 \cdot \pi}{15}\right) + \cos\left(\frac{7 \cdot \pi}{3}\right) + \tan\left(\frac{5 \cdot \pi}{4}\right) = 2.087785$

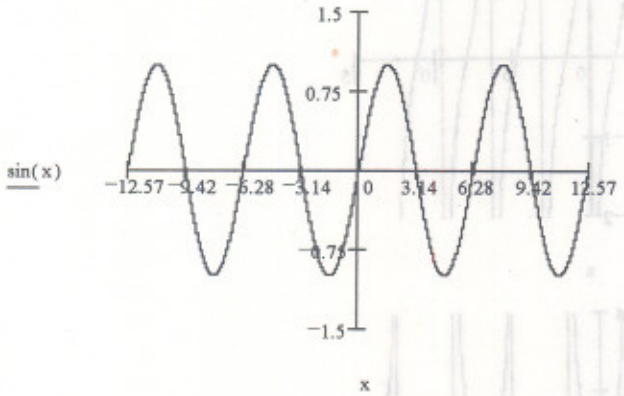
$\sec\left(\frac{\pi}{4}\right) + \csc\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cot\left(\frac{3 \cdot \pi}{4}\right) = 1.568914$

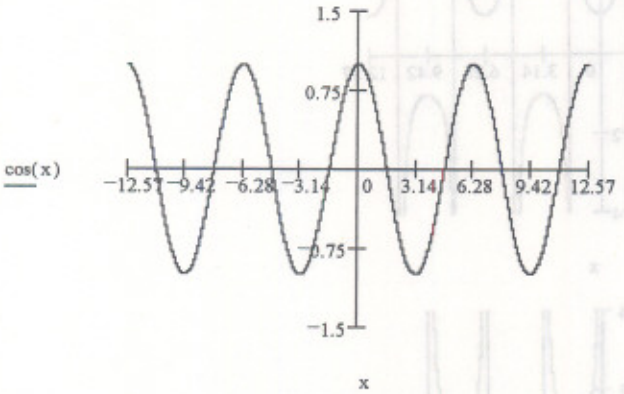
$degree := 0, 30 .. 90$

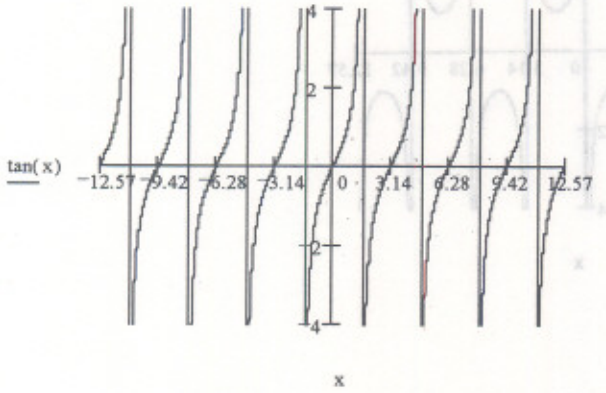
degree	$\sin\left(\frac{degree \cdot \pi}{180}\right)$	$\tan\left(\frac{degree \cdot \pi}{180}\right)$	$\sin\left(\frac{degree \cdot \pi}{180}\right)$
0	0	0	0
30	0.5	0.57735	0.5
60	0.866025	1.732051	0.866025
90	1	1.63317810^{16}	1

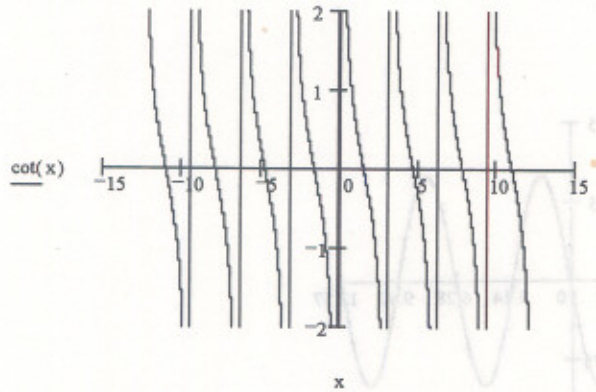
9. กราฟของ sin cos tan sec csc cot

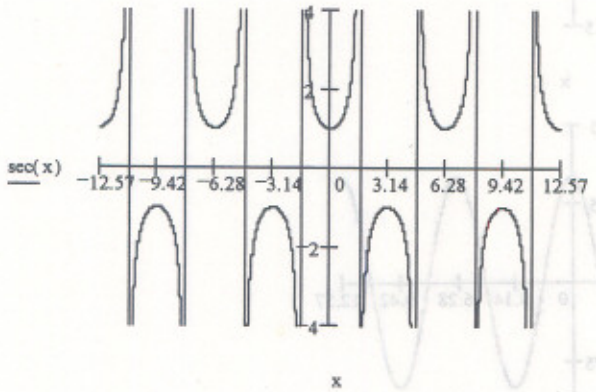
$x := -4\cdot\pi, -4\cdot\pi + 0.01 .. 4\cdot\pi$

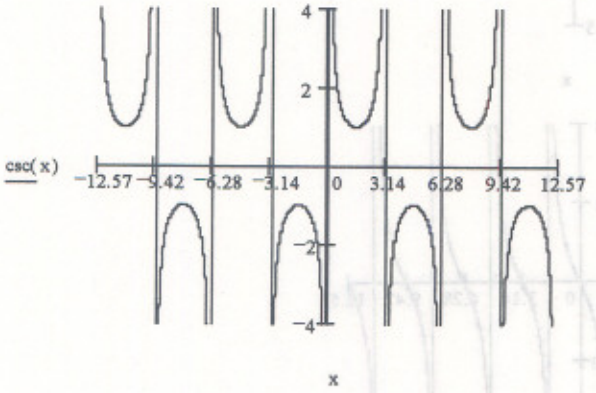






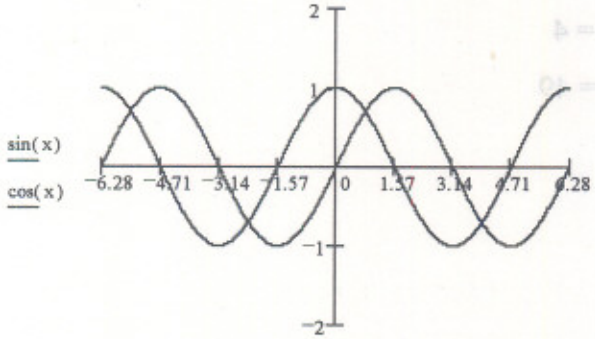

cot(x)
2
1
−1
−2
−15
−10
−5
0
5
10
15
x

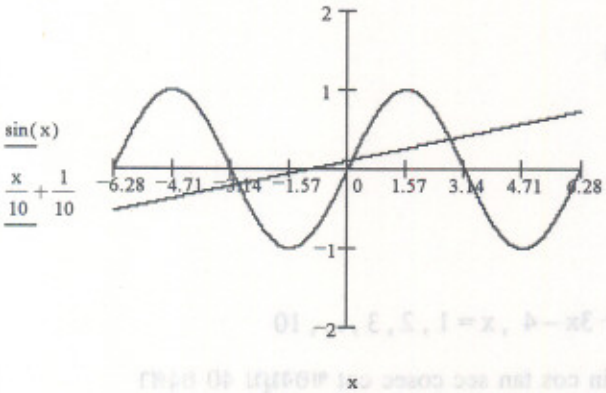

sec(x)
4
2
−2
−4
−12.57
−9.42
−6.28
−3.14
0
3.14
6.28
9.42
12.57
x


csc(x)
4
2
−2
−4
−12.57
−9.42
−6.28
−3.14
0
3.14
6.28
9.42
12.57
x

กราฟแบบมีหลายเส้นพร้อมกัน

$x := -2\cdot\pi, -2\cdot\pi + 0.01 .. 2\cdot\pi$





10. การหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต เรขาคณิต และฮาร์มอนิก

ORIGIN := 1 $\quad x := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad i := 1..6$

i	x_i
1	2
2	3
3	5
4	6
5	4
6	3

$xbar := \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{6}$ $\quad xbar = 3.833333$ $\quad GM := \left(\prod_{i=1}^{6} x_i\right)^{\frac{1}{6}}$ $\quad GM = 3.595359$

$HM := \dfrac{1}{\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i}}$ $\quad HM = 3.364486$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเขียนกราฟของวงกลม

   1.1 $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 4$

   1.2 $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 49$

2. จงเขียนกราฟของพาราโบลา

   2.1 $y = \frac{1}{4}x^2$

   2.2 $y = 16x^2$

4. จงเขียนกราฟของวงรี

   4.1 $\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$

   4.2 $\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$

5. จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

   5.1 $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

   5.2 $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{16} = 1$

6. จงคำนวณค่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$

7. จงคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ sin cos tan sec cosec cot ของมุม 40 องศา

8. จงเปลี่ยนองศาเป็นเรเดียน และ เรเดียนเป็นองศา

   8.1 45 องศา = ...เรเดียน

   8.2 70 องศา = ...เรเดียน

   8.3 1 เรเดียน = ... องศา

   8.4 4 เรเดียน = ... องศา

9. จงหาค่าของ

   9.1 $\sin(\frac{\pi}{15})$

   9.2 $\sin(\frac{\pi}{15}) + \cos(\frac{\pi}{15})$

   9.3 $\sin(\frac{\pi}{15}) + \cos(\frac{\pi}{15}) + \tan(\frac{\pi}{15})$

10. จงเขียนกราฟของ

    10.1 $y = \sin(4x)$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$

    10.2 $y = \sin(4x) + \cos(4x)$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$

    10.3 $y = \sin x \cos 2x$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$

6.3 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค. 013

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 013 ในหัวข้อนี้คือ

1. การคำนวณค่าเลขยกกำลัง และ การจำนวนจริงในรูปแบบของกรณฑ์
2. การจัดรูปแบบทางพีชคณิต
3. การเขียนกราฟของ $y = a^x$
4. การเขียนกราฟของ $y = \log_a x$
5. การทำตารางค่า log และ เลขยกกำลัง
6. การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ
7. การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
8. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน
9. การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆ
10. การคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

ตัวอย่างการคำนวณ

1. การคำนวณค่าเลขยกกำลัง และ การจำนวนจริงในรูปแบบของกรณฑ์

$3\cdot 5^{\frac{1}{3}} - 4\cdot 40^{\frac{1}{3}} = -8.55$

$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ใช้การจัดรูปแบบทางพีชคณิตของ MATHCAD จัดได้เป็น $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3}$ ใช้การจัดรูปแบบทางพีชคณิตของ MATHCAD จัดได้เป็น $4\cdot\sqrt{3}$

การคำนวณค่าโดยตรง

$$-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5} = 0.252$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 0.252$$

$$\sqrt{12}+\sqrt{27}-\sqrt{3} = 6.928$$

$$4\cdot\sqrt{3} = 6.928$$

2. การจัดรูปแบบทางพีชคณิตโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD

$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2} + \frac{\left(\frac{2}{a\cdot b}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$ MATHCAD ทำการกระจายได้เป็น

$$\frac{1}{(a+b)^2}\cdot a^2+\frac{1}{(a+b)^2}\cdot b^2+\frac{2}{\left[a\cdot\left[b\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\right]\right]}$$

$$\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\frac{\left(\frac{2}{a\cdot b}\right)}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น 1

$$\left(\frac{a^{2\cdot n-3}}{a^{3\cdot n+1}}\right)\cdot\left(\frac{a^{n+5}}{a^{n-3}}\right)$$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น $\frac{1}{(a^n)}\cdot a^4$

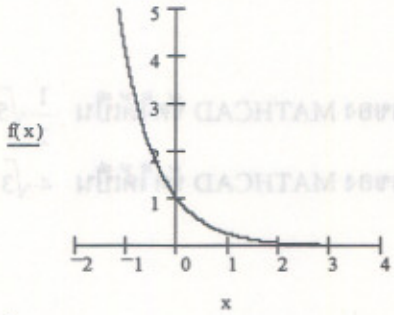
$$\frac{3\cdot 2^n-4\cdot 2^{n-2}}{2^n-2^{n-1}}$$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น 4

$$\left(\frac{a^{-1}\cdot b^{-2}}{c^3}\right)^2\cdot\left(\frac{a^{-4}\cdot b^2}{c^{-3}}\right)^{-2}$$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น $\frac{a^6}{(b^8\cdot c^{12})}$

3. การเขียนกราฟของ $y = a^x$

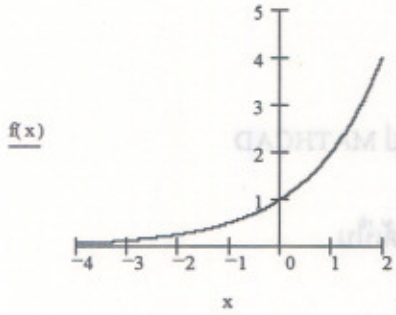
$x := -2, -1.99 .. 4$

$f(x) := \left(\frac{1}{4}\right)^x$



$x := -4, -3.99 .. 2$

$f(x) := 2^x$

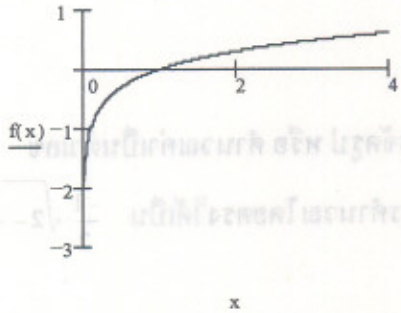


4. การเขียนกราฟของ $y = \log_a x$

กราฟของ log ฐาน 10

$x := 0.01, 0.02 .. 4$

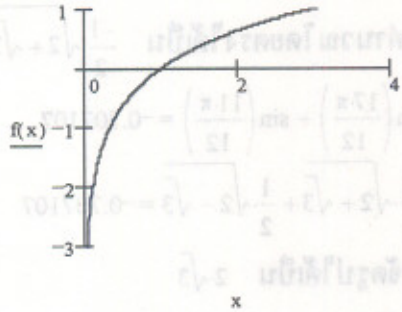
$f(x) := \log(x)$



กราฟของ log ฐาน 3

$x := 0.01, 0.02 .. 4$

$f(x) := \dfrac{\log(x)}{\log(3)}$



5. การทำตารางค่า log และ เลขยกกำลัง

$\log_3(x) := \dfrac{\log(x)}{\log(3)}$

$x := 1 .. 5$

x	log(x)	$\log_3(x)$
1	0	0
2	0.30103	0.63093
3	0.477121	1
4	0.60206	1.26186
5	0.69897	1.464974

$x := 1..5$

x	2^x	$\left(\frac{1}{5}\right)^x$
1	2	0.2
2	4	0.04
3	8	0.008
4	16	0.0016
5	32	0.00032

6. การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยการจัดรูป หรือ คำนวณค่าเป็นตัวเลข

$\cos\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น $\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$

คำนวณค่าโดยตรง

$\cos\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)=-1.224745$

$\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}=-1.224745$

$\sin\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)$ MATHCAD ทำการจัดรูปได้เป็น $\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$

$\sin\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)$ MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรงได้เป็น $\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$

MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรง $\sin\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)=-0.707107$

$\frac{-1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=-0.707107$

$\tan\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)$ MATHCAD ทำการจัดรูปได้เป็น $2\cdot\sqrt{3}$

MATHCAD ทำการคำนวณโดยตรง $\tan\left(\frac{17\cdot\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{11\cdot\pi}{12}\right)=3.464102$

$2\cdot\sqrt{3}=3.464102$

7. การคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

$\mathrm{asin}(1)=1.570796$ $\mathrm{asin}(1)=90\cdot\mathrm{deg}$

$\mathrm{acos}\left(\frac{1}{2}\right)=1.047198$ $\mathrm{acos}\left(\frac{1}{2}\right)=60\cdot\mathrm{deg}$

$\mathrm{atan}(-1)=-0.785398$ $\mathrm{atan}(-1)=-45\cdot\mathrm{deg}$

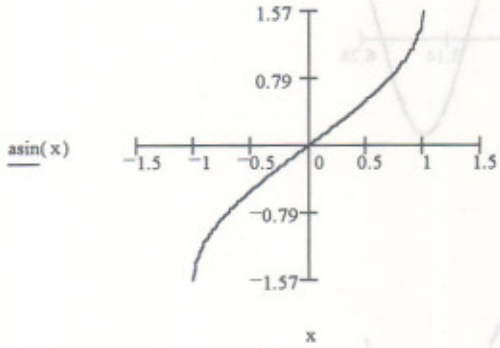
$\mathrm{acos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2.617994$ $\mathrm{acos}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=150\cdot\mathrm{deg}$

$\mathrm{asin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-0.785398$ $\mathrm{asin}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-45\cdot\mathrm{deg}$

8. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

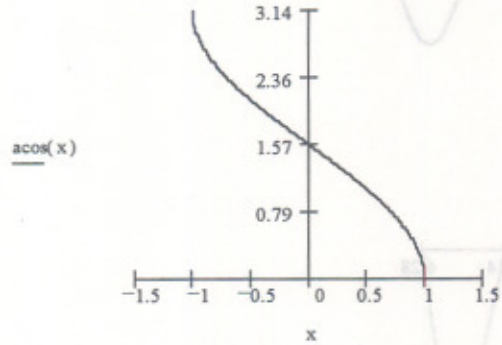
กราฟของ arcsin

x := - 1, - 0.99.. 1



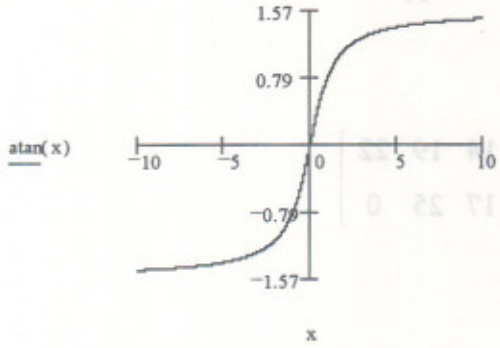
กราฟของ arccos

x := - 1, - 0.99.. 1



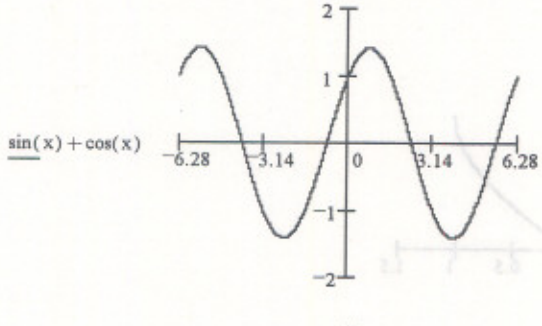
กราฟของ arctan

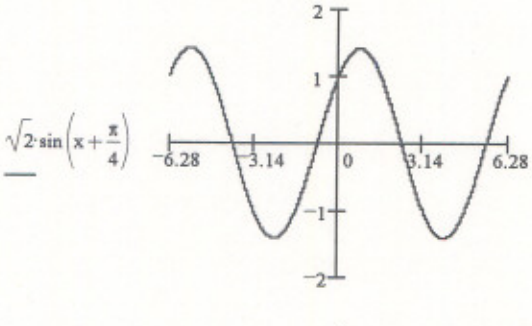
x := - 10, - 9.99.. 10

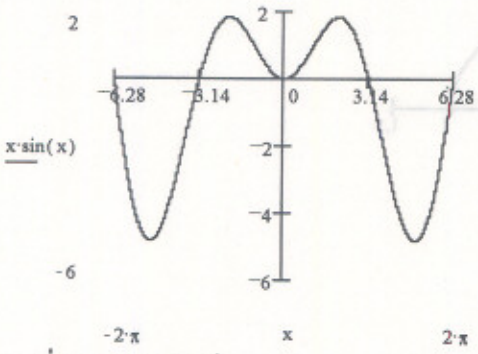


9. การเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณอื่นๆ

$x := -2\cdot\pi, -2\cdot\pi + 0.01 .. 2\cdot\pi$







10. การคำนวนเกี่ยวกับเมทริกซ์

10.1 การบวกเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 15 & 18 & 17 \\ 12 & 20 & 14 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 14 & 19 & 22 \\ 17 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 29 & 37 & 39 \\ 29 & 45 & 14 \end{bmatrix}$$

10.2 การคูณเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 8 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

10.3 การคำนวณ สเกลาร์คูณเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3 \cdot A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 12 & 0 \\ -6 & 3 & 15 & 3 \end{bmatrix} \qquad -A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

10.4 การหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

10.5 การหาค่ากำหนดของเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad |A| = -2$$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad |A| = 9$$

10.6 การหาเมทริกซ์ผกผัน

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.114 & -0.143 & 0.457 \\ 0.043 & 0.071 & 0.171 \\ 0.2 & 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

10.7 การหาเมทริกซ์ผูกพันของ A

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.133 & 0.333 & 0.067 \\ 1.867 & -0.667 & 0.067 \\ -1.133 & 0.333 & 0.067 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -15$$

$$adjA := |A| \cdot A^{-1}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ -28 & 10 & -1 \\ 17 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$cofA := adjA^{T}$$

$$cofA = \begin{bmatrix} 2 & -28 & 17 \\ -5 & 10 & -5 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

10.8 การหาผลบวกเฉียงของเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$tr(A) = 6$

10.9 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 3 \\ 2x - y - 4z &= 7 \\ 3x - 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

10.9.1 ใช้กฎของคราเมอร์

$$x := \frac{\left|\begin{bmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 7 & -1 & -4 \\ 8 & -3 & -5 \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}\right|} \qquad y := \frac{\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 8 & -5 \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}\right|} \qquad z := \frac{\left|\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 7 \\ 3 & -3 & 8 \end{bmatrix}\right|}{\left|\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}\right|}$$

$x = 2 \qquad y = 1 \qquad z = -1$

10.9.2 ใช้ผลคูณของ A^{-1} กับ B

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 3 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$X := A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

10.9.3 ใช้ชุดคำสั่ง Given และ Find ของโปรแกรม MATHCAD

$x := 0$

$y := 0$

$z := 0$

Given

$x - 2\cdot y - 3\cdot z = 3$

$2\cdot x - y - 4\cdot z = 7$

$3\cdot x - 3\cdot y - 5\cdot z = 8$

$$\text{Find}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

10.10 การดำเนินการเบื้องต้นกับเมทริกซ์

10.10.1 แถวที่ 2 ถูกบวกด้วย 2 เท่าของแถวที่ 1

$ORIGIN := 1$

$j := 1 .. 3$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A_{(2,j)} := A_{(2,j)} + (-2)\cdot A_{(1,j)}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

10.10.2 แถวที่ 1 สลับกับแถวที่ 3

$ORIGIN := 1$

$j := 1..3$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$temp_j := A_{(1,j)}$

$A_{(1,j)} := A_{(3,j)}$

$A_{(3,j)} := temp_j$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

10.10.3 ค่าคงตัว 10 คูณแถวที่ 2

$ORIGIN := 1$

$j := 1..3$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$A_{(2,j)} := 10 \cdot A_{(2,j)}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 30 & 40 & 50 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

แบบฝึกหัด 6.3

1. จงหาค่าเลขยกกำลัง และ การจำนวนจริงในรูปแบบของกรณฑ์

   1.1 $12^{\frac{2}{3}}$ 1.2 $\sqrt[6]{45}$ 1.3 $5^{-\frac{2}{3}}$ 1.4 $\log_3 15$

2. จงเขียนกราฟของ $y = (0.2)^{2x}$ บนช่วง $[-4, 4]$

3. จงเขียนกราฟของ $y = \log_4 x$ บนช่วง $[-4, 4]$

4. จงทำตารางค่า $\log_4 x$ เมื่อ $x = 1, 2, 3, \ldots, 10$

5. จงคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

   5.1 $\cos(\frac{2\pi}{3})$ 5.2 $\cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5})$

   5.3 $\cos(\frac{2\pi}{7}) + \cos(\frac{4\pi}{7}) + \cos(\frac{6\pi}{7})$ 5.3 $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{6\pi}{7})$

6. จงคำนวณค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

   6.1 $\arcsin(-0.5)$ 6.2 $\arccos(0.25)$

   6.3 $\arctan(2)$ 6.4 $\arcsin(0.1) + \arccos(0.1)$

7. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน $y = \arcsin(2x)$ บนช่วง $[-0.5, 0.5]$

8. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา

   8.1 $A + B$ 8.2 AB 8.3 $|A|$

   8.4 $|B|$ 8.5 $A^T + B^T$ 8.6 $2A + 3B$

9. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$ และ A^{-1}

10. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A)$ เมทริกซ์ผูกพันของ A และ cofA

11. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 1 \\ 2x - y - 4z &= 2 \\ 3x - 3y - 5z &= -3 \end{aligned}$$

6.4 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค. 014

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 014 ในหัวข้อนี้คือ

1. การคำนวณเกี่ยวกับการบวกและลบเวกเตอร์
2. การคำนวณเกี่ยวกับสเกลาร์คูณเวกเตอร์
3. ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์
4. ขนาดของเวกเตอร์
5. มุมระหว่างของสองเวกเตอร์
6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน X และ แกน Y
7. การคำนวณเกี่ยวกับการบวกและลบจำนวนเชิงซ้อน
8. การคำนวณเกี่ยวกับค่าสัมบรูณ์และอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน
9. ส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน
10. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
11. การหาเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวน
12. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ

ตัวอย่างการคำนวณ

1. การคำนวณเกี่ยวกับการบวกและลบเวกเตอร์

$$AB := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad CD := \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad AB + CD = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix} \quad AB - CD = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

2. การคำนวณเกี่ยวกับสเกลาร์คูณเวกเตอร์

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad 2 \cdot u = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad 3 \cdot u + 2 \cdot v = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \end{bmatrix}$$

3. ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสองเวกเตอร์

$$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad v := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad u \cdot v = 11 \quad (3 \cdot u) \cdot (-2 \cdot v) = -66$$

4. ขนาดของเวกเตอร์

$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $v := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $|u| = 2.236$ $|v| = 5$

$|u + v| = 7.211$ $|(2 \cdot u) \cdot (-4 \cdot v)| = 88$

5. มุมระหว่างของสองเวกเตอร์

$u := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $v := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|} = 0.707$

$angle\_uv := acos\left(\frac{u \cdot v}{|u| \cdot |v|}\right)$

$angle\_uv = 0.785$ $angle\_uv = 45 \cdot deg$

6. เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางแกน X และ แกน Y

$i := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $j := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u := 2 \cdot i + 3 \cdot j$ $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $|u| = 3.606$ $3 \cdot u = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

7. การคำนวณเกี่ยวกับการบวก ลบ คูณ หาร จำนวนเชิงซ้อน

$i := \sqrt{-1}$

$\frac{2 + i}{2 - i} = 0.6 + 0.8i$

$\frac{1 + \sqrt{2} \cdot i}{1 - \sqrt{2} \cdot i} = -0.333 + 0.943i$

$(1 + i)^2 = 2i$

$(1 + i)^3 = -2 + 2i$

$z := 2 + 3i$

$w := 4 - 5i$

$z + w = 6 - 2i$

$3 \cdot z - 2 \cdot w = -2 + 19i$

$z \cdot w = 23 + 2i$

$\frac{z}{w} = -0.171 + 0.537i$

8. การคำนวณเกี่ยวกับ ค่าสัมบรูณ์ และ อาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน

$z := 1 + i$

$\arg(z) = 0.785$

$\arg(z) = 45 \cdot deg$

$z := 3 + 4 \cdot i$

$|z| = 5$

9. ส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน

$$\frac{1 + \sqrt{2} \cdot i}{1 - \sqrt{2} \cdot i} = -0.333 + 0.943i$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1 + \sqrt{2} \cdot i}{1 - \sqrt{2} \cdot i}\right) = -0.333$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{1 + \sqrt{2} \cdot i}{1 - \sqrt{2} \cdot i}\right) = 0.943$$

10. การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

$z := -16$

$r := |z|$

$n := 4$

$\theta := \arg(z)$

$r = 16$

$\theta = 3.142$

$$x(k) := \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\cdot k\cdot\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta + 2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)\right)$$

$k := 0..n-1$

k	x(k)
0	1.414+ 1.414i
1	-1.414+ 1.414i
2	-1.414− 1.414i
3	1.414− 1.414i

$z := 81\cdot i$

$r := |z|$

$n := 4$

$\theta := \arg(z)$

$r = 81$

$\theta = 1.571$

$$x(k) := \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\theta + 2\cdot k\cdot\pi}{n}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\theta + 2\cdot k\cdot\pi}{n}\right)\right)$$

$k := 0..n-1$

k	x(k)
0	2.772+ 1.148i
1	-1.148+ 2.772i
2	-2.772− 1.148i
3	1.148− 2.772i

11. การหาเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวน

$$x := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$\text{mean}(x) = 3.6$

max(x) = 5

min(x) = 2

stdev (x) = 1.02

var(x) = 1.04

12. การหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ

cnorm(0) = 0.5

cnorm(1) = 0.841

cnorm(- 1) = 0.159

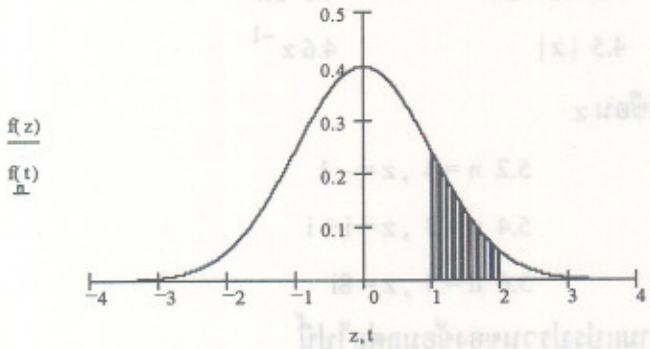
P(a,b) := cnorm(b) – cnorm(a)

P(0,1) = 0.341

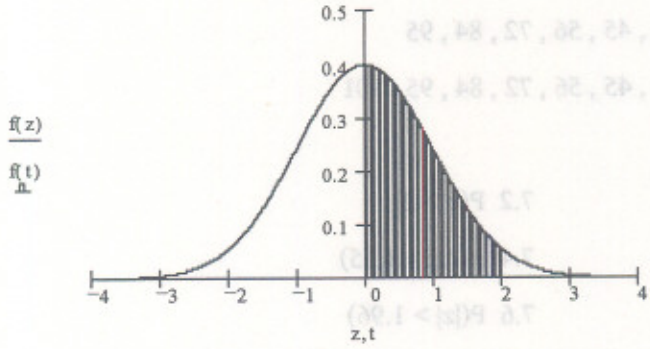
P(0,2) = 0.477

cnorm(z) = พื้นที่ใต้โค้งปกติตั้งแต่ -∞ ถึง z

P(a,b) := cnorm(b) – cnorm(a)= พื้นที่ใต้โค้งปกติตั้งแต่ a ถึง b



P(0,1) = 0.341



P(0,2) = 0.477

แบบฝึกหัด 6.4

1. กำหนด $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหา

1.1 $2u + 3v$ 1.2 $3u - 4v$ 1.3 $|u|$

1.4 $|u + v|$ 1.4 uv 1.5 $(3u)(4v)$

2. กำหนด $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหามุมระหว่าง u และ v

3. กำหนด $u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา

3.1 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทาง u

3.2 เวกเตอร์ 2 หน่วยในทิศทางตรงข้าม v

3.3 เวกเตอร์ 2 หน่วยในทิศทาง v

3.4 เวกเตอร์ 4 หน่วยในทิศทางตรงข้ามกับ $u + v$

4. กำหนด $z = 3 + 4i$ $w = 2 - 5i$ จงหา

4.1 $z + w$ 4.2 $3z - 2w$ 4.3 zw

4.4 $\frac{z}{w}$ 4.5 $|z|$ 4.6 z^{-1}

5. จงหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z

5.1 $n = 2$, $z = 1 - i$ 5.2 $n = 4$, $z = -1$

5.3 $n = 8$, $z = 16$ 5.4 $n = 3$, $z = i + i$

5.5 $n = 4$, $z = -i$ 5.6 $n = 3$, $z = 8i$

6. จงหาเฉลี่ยเลขคณิตและค่าความแปรปรวนของข้อมูลต่อไปนี้

6.1 ข้อมูล 1 , 2 , 3 , 4 , 5

6.2 ข้อมูล 11 , 12 , 31 , 45 , 56 , 72 , 84 , 95

6.3 ข้อมูล 11 , 12 , 31 , 45 , 56 , 72 , 84 , 95 , 101

7. จงหาพื้นที่ใต้โค้งปกติ

7.1 $P(0 < z < 3)$ 7.2 $P(z > 2)$

7.3 $P(z < -1.2)$ 7.4 $P(|z| < 1.25)$

7.5 $P(-2 < z < 3)$ 7.6 $P(|z| > 1.96)$

6.5 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค. 015

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 015 ในหัวข้อนี้คือ

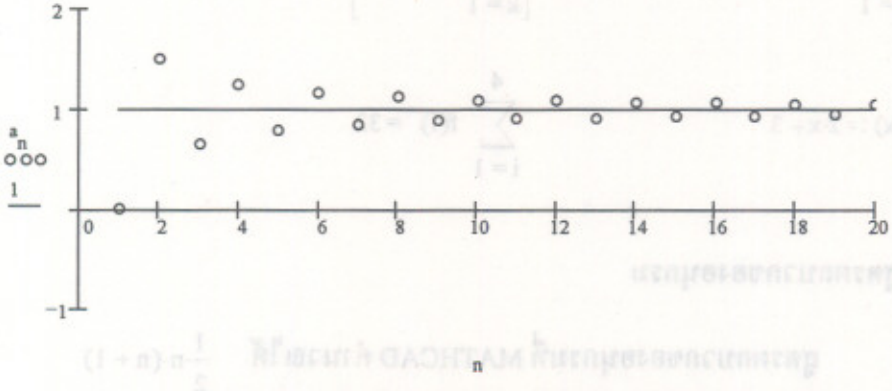
1. กราฟของลำดับ
2. การหาลิมิตของลำดับ
3. การหาผลบวกของอนุกรม
4. การหาสูตรผลบวกของอนุกรม
5. การหาลิมิตของฟังก์ชัน
6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามลิมิต
7. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร
8. การหาอนุพันธ์อันดับสูง
9. การเขียนกราฟของ f , f′
10. การหาค่าปริพันธ์
11. การหาสูตรปริพันธ์
12. การหาพื้นที่ใต้โค้ง

ตัวอย่างการคำนวณ

1. กราฟของลำดับ

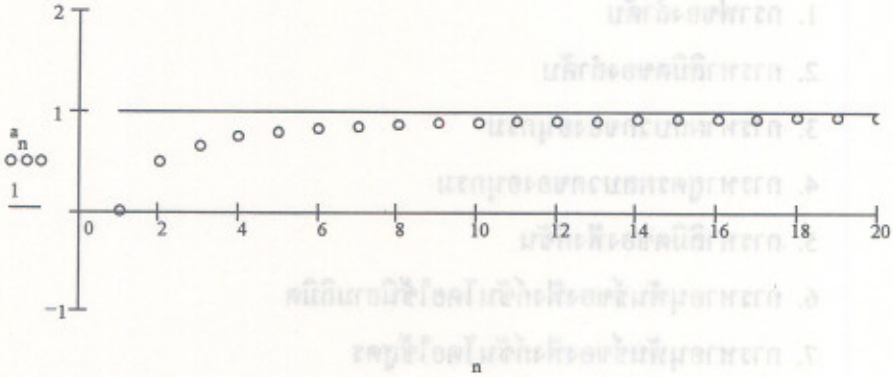
$n := 1..20$

$a_n := 1 + \frac{(-1)^n}{n}$



$n := 1..20$

$a_n := 1 - \frac{1}{n}$



2. การหาลิมิตของลำดับ

$\lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้คือ 1

$\lim_{n \to \infty} \frac{4 \cdot n^2 - 2 \cdot n + 3}{n^2}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้คือ 4

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{2}\right)$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้คือ 0

3. การหาผลบวกของอนุกรม

$\sum_{i=1}^{10} i = 55$ $\sum_{i=1}^{10} i^2 = 385$

$\sum_{i=1}^{10} i^3 = 3025$ $\left[\sum_{k=1}^{4} (2 \cdot k - 1) \right] = 16$

$f(x) := 2 \cdot x + 3$ $\sum_{i=1}^{4} f(i) = 32$

4. การหาสูตรผลบวกของอนุกรม

$\sum_{i=1}^{n} i$ สูตรผลบวกของอนุกรมที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

$\sum_{i=1}^{n} i^2$ สูตรผลบวกของอนุกรมที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{6}\cdot n\cdot(n+1)\cdot(2\cdot n+1)$

$\sum_{i=1}^{n} i^3$ สูตรผลบวกของอนุกรมที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$

$\sum_{i=1}^{n} i\cdot(i+1)$ สูตรผลบวกของอนุกรมที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{3}\cdot n\cdot(n+2)\cdot(n+1)$

5. การหาลิมิตของฟังก์ชัน

$\lim_{x\to 2} x^2$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ 4

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ undefined

$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ 1

$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ -1

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{10}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{25+x}-5}{x}$ ค่าของลิมิตที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{10}$

6. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามลิมิต

$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $2\cdot x$

$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $3\cdot x^2$

$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{x+2}\right)-\left[\frac{1}{(x+h)+2}\right]}{h}$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{-1}{(x+2)^2}$

7. การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตร

$\frac{d}{dx}x^2$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $2\cdot x$

$\frac{d}{dx}x^3$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $3\cdot x^2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x+2}\right)$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{-1}{(x+2)^2}$

8. การหาอนุพันธ์อันดับสูง

$\frac{d}{dx}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $20\cdot x^3+6\cdot x^2-1$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)\right]$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $60\cdot x^2+12\cdot x$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)\right]$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $120x+12$

$\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)\right]\right]$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ 120

$\frac{d^2}{dx^2}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $60\cdot x^2+12\cdot x$

$\frac{d^3}{dx^3}\left(5\cdot x^4+2\cdot x^3-x+2\right)$ ค่าของอนุพันธ์ที่ MATHCAD คำนวณได้ $120x+12$

9. การเขียนกราฟของ f, f'

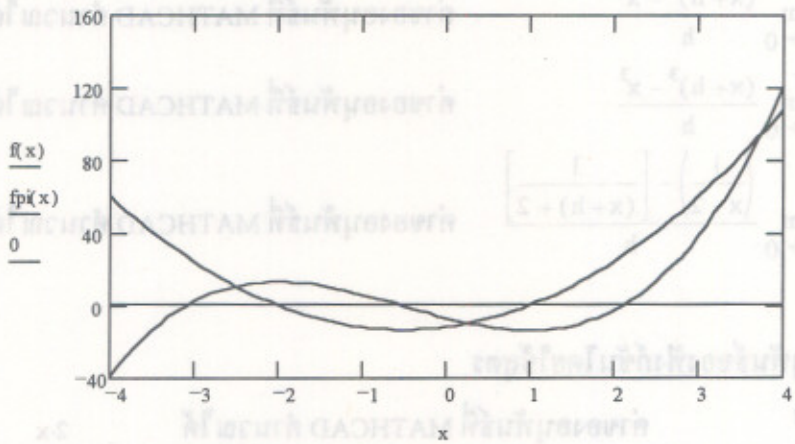
$x := -4, -3.9 .. 4$

$f(x) := 2\cdot x^3+3\cdot x^2-12\cdot x-7$

$\frac{d}{dx}\left(2\cdot x^3+3\cdot x^2-12\cdot x-7\right)$

$6\cdot x^2+6\cdot x-12$

$fpi(x) := 6\cdot x^2+6\cdot x-12$



10. การหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_0^1 x\,dx = 0.5$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = 0.333$$

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\,dx = 1.111$$

11. การหาสูตรปริพันธ์

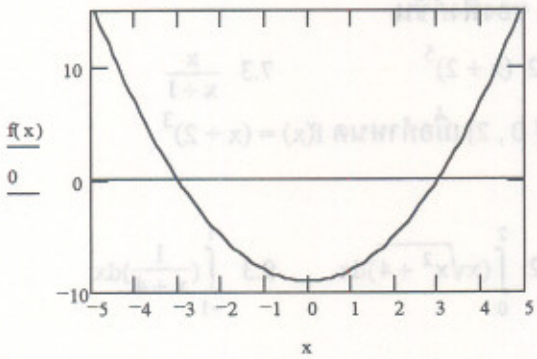
$\int x\,dx$ ค่าของปริพันธ์ ที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{2}\cdot x^2$

$\int \left(x^2 + 2\cdot x\right)\,dx$ ค่าของปริพันธ์ ที่ MATHCAD คำนวณได้ $\frac{1}{3}\cdot x^3 + x^2$

12. การหาพื้นที่ใต้โค้ง

$f(x) := x^2 - 9$

$x := -5, -4.9 .. 5$



$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -24$$

$$\left|\int_{-2}^{1} f(x)\,dx\right| = 24$$

แบบฝึกหัด 6.5

1. จงเขียนกราฟของลำดับ

1.1 $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ 1.2 $a_n = \frac{2n^2+1}{n^2-4}$

2. จงหาลิมิตของลำดับ

2.1 $a_n = \frac{2n^3+n+4}{n^2-4}$ 2.2 $a_n = \frac{1}{n^2-4n+4}$ 2.3 $a_n = \sin(\frac{2n+.3}{n^2-4})$

3. จงหาผลบวกของอนุกรม

3.1 $\sum_{i=1}^{20} 3i$ 3.2 $\sum_{i=1}^{5} (3i^2+4i+1)$ 3.3 $\sum_{i=1}^{50} (3i^3+4)$ 3.4 $\sum_{i=1}^{10} i^4$

4. จงหาลิมิตของฟังก์ชัน

4.1 $\lim_{x\to 0}(\frac{x+1}{x-1})$ 4.2 $\lim_{x\to 1^+}(\frac{x+1}{|x-1|})$ 4.3 $\lim_{x\to 2^-}(\frac{|x-2|}{x-1})$ 4.4 $\lim_{x\to 0}(\frac{x+1}{x})$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้นิยามลิมิต

5.1 $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^4-x^4}{h}$ 5.2 $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}}{h}$

6. จงหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

6.1 x^3+x^2+x+1 6.2 $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ 6.3 $\frac{x^3-1}{x+1}$

7. จงหาสูตรอนุพันธ์อันดับ 2 และ 3 ของฟังก์ชัน

7.1 x^6+x^2+x+1 7.2 $(x+2)^5$ 7.3 $\frac{x}{x+1}$

8. จงเขียนกราฟของ f, f' บนช่วง [0 , 2] เมื่อกำหนด $f(x) = (x+2)^3$

9. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขต

9.1 $\int_0^4 (\sqrt{x+4})dx$ 9.2 $\int_0^2 (x\sqrt{x^2+4})dx$ 9.3 $\int_{-1}^1 (\frac{1}{x+4})dx$

10. จงหาสูตรปริพันธ์

10.1 $\int \sqrt{x+1}dx$ 10.2 $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ 10.3 $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

11. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกับแกน X

11.1 $y = x^2+2x+3$ บนช่วง [0 , 2] 11.2 $y = \frac{1}{x+4}$ บนช่วง [1 , 3]

6.6 เสริมการคำนวณคณิตศาสตร์ ค. 016

ความสามารถของ MATHCAD ที่ช่วยคำนวณทางด้านคณิตศาสตร์ ค. 016 ในหัวข้อนี้คือ

1. การคำนวณ n!
2. การคำนวณ nPr และ nCr
3. การกระจายทวินาม
4. กราฟแสดง แผนภาพการกระจายของข้อมูล
5. การวิเคราะห์ความ สัมพันธ์เชิงฟังก์ระหว่างข้อมูล
6. การหาค่า m และ c จากสมการปกติ
7. การหาค่า m และ c โดยใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปของ MATHCAD
8. การหาค่าดัชนี

ตัวอย่างการคำนวณ

1. การคำนวณ n!

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$n := 0..10$

n	n!
0	1
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5040
8	40320
9	362880
10	3628800

2. การคำนวณ nPr และ nCr

$$\frac{10!}{5!} = 30240$$

$$\frac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$$

$P(n,r) := \frac{n!}{(n-r)!}$

$P(10,5) = 30240$

$n := 5$

$r := 0..n$

r	P(n,r)
0	1
1	5
2	20
3	60
4	120
5	120

$C(n,r) := \frac{n!}{(n-r)!\cdot r!}$

$C(10,5) = 252$

$n := 5$

$r := 0..n$

r	C(n,r)
0	1
1	5
2	10
3	10
4	5
5	1

3. การกระจายทวินาม

$(a+b)^2$ $\quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$

$(a+b)^3$ $\quad a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$

$(a+b)^5$ $\quad a^5 + 5\cdot a^4\cdot b + 10\cdot a^3\cdot b^2 + 10\cdot a^2\cdot b^3 + 5\cdot a\cdot b^4 + b^5$

$(x+3)^4$ $\quad x^4 + 12\cdot x^3 + 54\cdot x^2 + 108\cdot x + 81$

$(2\cdot y - 3\cdot b)^4$ $\quad 16\cdot y^4 - 96\cdot y^3\cdot b + 216\cdot y^2\cdot b^2 - 216\cdot y\cdot b^3 + 81\cdot b^4$

$\left(x - \frac{2}{x}\right)^{10}$

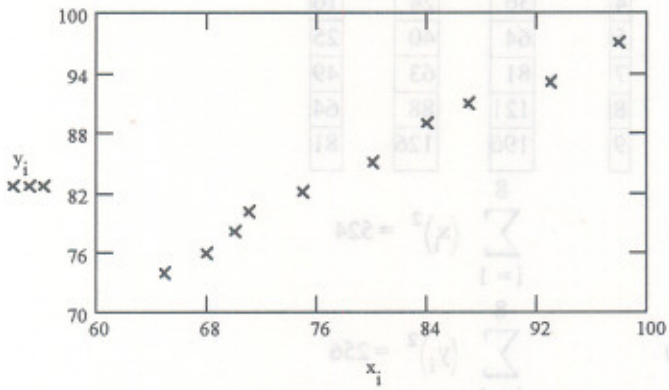
$$x^{10} - 20\cdot x^8 + 180\cdot x^6 - 960\cdot x^4 + 3360\cdot x^2 - 8064 + \frac{13440}{x^2} - \frac{15360}{x^4} + \frac{11520}{x^6} - \frac{5120}{x^8} + \frac{1024}{x^{10}}$$

4. กราฟแสดง แผนภาพการกระจายของข้อมูล

ORIGIN := 1

$$x := \begin{bmatrix} 84 \\ 87 \\ 98 \\ 71 \\ 75 \\ 65 \\ 93 \\ 68 \\ 70 \\ 80 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 89 \\ 91 \\ 97 \\ 80 \\ 82 \\ 74 \\ 93 \\ 76 \\ 78 \\ 85 \end{bmatrix}$$

$i := 1..10$

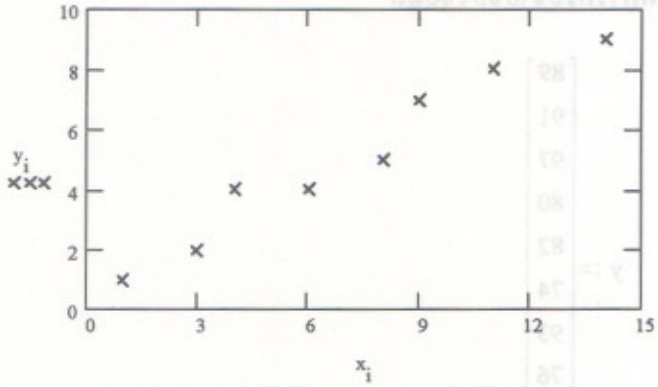


5. การวิเคราะห์ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ระหว่างข้อมูล

ORIGIN := 1

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$i := 1..8$



i	x_i	y_i	$(x_i)^2$	$x_i \cdot y_i$	$(y_i)^2$
1	1	1	1	1	1
2	3	2	9	6	4
3	4	4	16	16	16
4	6	4	36	24	16
5	8	5	64	40	25
6	9	7	81	63	49
7	11	8	121	88	64
8	14	9	196	126	81

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 56 \qquad \sum_{i=1}^{8} (x_i)^2 = 524$$

$$\sum_{i=1}^{8} y_i = 40 \qquad \sum_{i=1}^{8} (y_i)^2 = 256$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot y_i = 364$$

6. การหาค่า m และ c จากสมการปกติ

$m := 0$

$c := 0$

Given

$8 \cdot c + 56 \cdot m = 40$

$56 \cdot c + 524 \cdot m = 364$

$$\text{Find}(m, c) = \begin{pmatrix} 0.636 \\ 0.545 \end{pmatrix}$$

7. การหาค่า m และ c โดยใช้ฟังก์ชันสำเร็จรูปของ MATHCAD

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 9 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

ORIGIN := 1

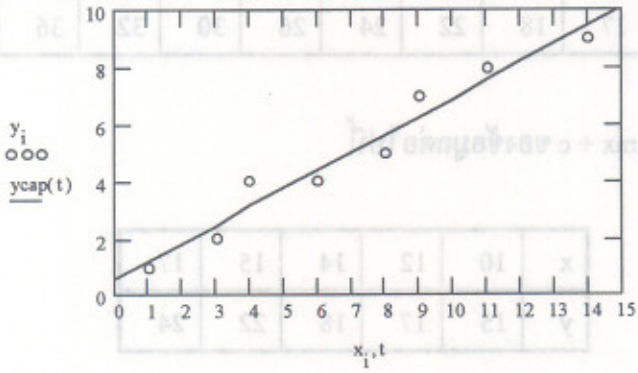
$i := 1..8$

$m := \text{slope}(x,y)$ $\qquad m = 0.636$

$c := \text{intercept}(x,y)$ $\qquad c = 0.545$

$t := 0..15$

$\text{ycap}(t) := m \cdot t + c$



8. การหาค่าดัชนี

ORIGIN := 1

$$Po := \begin{bmatrix} 8000 \\ 7500 \\ 750 \\ 7800 \end{bmatrix} \qquad Pn := \begin{bmatrix} 8200 \\ 7500 \\ 750 \\ 8200 \end{bmatrix} \qquad \sum_{i=1}^{4} Pn_i = 24650 \qquad \sum_{i=1}^{4} Po_i = 24050$$

$$I := \frac{\sum_{i=1}^{4} Pn_i}{\sum_{i=1}^{4} Po_i} \cdot 100 \qquad I = 102.495$$

แบบฝึกหัด 6.6

1. จงคำนวณค่า 0! , 11! , 12! , 13!

2. จงคำนวณค่า $\frac{10!}{5!}$, $\frac{10!}{5!5!}$, $\frac{10!}{5!3!2!}$

3. จงคำนวณค่า $\binom{12}{6}$, $\binom{12}{7}$, $\binom{10}{6}$

4. จงทำการกระจายทวินาม

3.1 $(x+2y)^5$ 3.2 $(x-y)^4$ 3.3 $(2x+\frac{1}{x})^5$

3.4 $(x+\frac{1}{x})^{10}$ 3.5 $(x-\frac{1}{x})^{12}$

5. จงเขียนกราฟแสดงแผนภาพการกระจายของข้อมูล

x	10	12	14	15	17	18	22	24	28	30
y	15	17	18	22	24	26	30	32	36	40

6. การหาสมการ $\hat{y} = mx + c$ ของข้อมูลต่อไปนี้

6.1

x	10	12	14	15	17
y	15	17	18	22	24

6.2

x	10	12	14	15	17	18
y	15	17	18	22	24	26

6.3

x	10	12	14	15	17	18	22
y	15	17	18	22	24	26	30

6.7 MATHCAD กับการเฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ Entrance

ในหัวข้อนี้จะเป็นการนำความสามารถของ MATHCAD เข้ามาช่วยหาคำตอบของข้อสอบ ซึ่งมีข้อสอบ Entrance เป็นจำนวนมากที่เราอาจจะหาคำตอบได้ด้วยการแทนค่า คำนวณค่า หรือแม้แต่เขียนกราฟดูก็จะได้คำตอบ

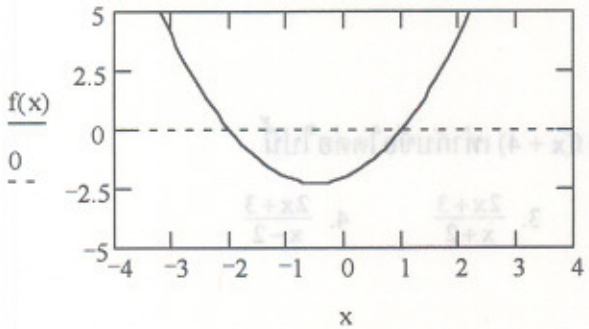
ตัวอย่าง 6.7.1 เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $[-2, 1]$ 2. $[-1, 2]$ 3. $[-2, 1)$ 4. $[-1, 2)$

ตอบ 1.

$f(x) := x^2 - 2 + x$

$x := -4, -3.9 .. 4$



$x := -2$

$\text{root}(f(x), x) = -2$

$x := 2$

$\text{root}(f(x), x) = 1$

$x^2 \leq 2 - x$

$x^2 + x - 2 \leq 0$

$f(x) \leq 0$

จากกราฟ $f(x) \leq 0$ เมื่อ x เป็นสมาชิกของ $[-2, 1]$

สรุป เซตคำตอบของอสมการ $x^2 \leq 2 - x$ คือ $[-2, 1]$

ตัวอย่าง 6.7.2 คำตอบของสมการ $4x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{2}{3}} = 0$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, 0]$ 2. $[0, 3)$ 3. $[3, 10)$ 4. $[10, \infty)$

ตอบ 3.

โดยการคำนวณของ MATHCAD

$$f(x) := 4\cdot x^{\frac{1}{3}} - 12\cdot x^{-\frac{2}{3}}$$
$$x := 1$$
$$\mathrm{root}(f(x), x) = 3$$

สรุป $x = 3$ เป็นรากของสมการ $4x^{\frac{1}{3}} - 12x^{-\frac{2}{3}} = 0$ และ 3 อยู่ในช่วง $[3, 10)$

สรุปเลือกตัวเลือก 3

ตัวอย่าง 6.7.3. ถ้า $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ แล้ว $f(x+4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2x+11}{x+2}$ 2. $\frac{2x+1}{x-2}$ 3. $\frac{2x+3}{x+2}$ 4. $\frac{2x+3}{x-2}$

ตอบ 1.

โดยการจัดรูปของ MATHCAD $\frac{2\cdot(x+4)+3}{(x+4)-2}$ จะได้ $\frac{(2\cdot x+11)}{(x+2)}$

สรุปเลือกตัวเลือก 1.

ตัวอย่าง 6.7.4. ให้ $a > 0$ และ $a \neq 1$ ข้อใดต่อไปนี้มีค่าเท่ากับ $\log_a(2a)^b$

1. $2b$ 2. 2^b 3. $\log_a 2 + b$ 4. $b\log_a 2 + b$

ตอบ 4

โดยการจัดรูปของ MATHCAD $\frac{\log\left[(2\cdot a)^b\right]}{\log(a)}$

จะได้ $\frac{1}{\ln(a)}\cdot b\cdot\ln(2) + b = b\log_a 2 + b$

สรุปเลือกตัวเลือก 4.

ตัวอย่าง 6.7.5. ถ้า $\log 2 = A$ $\log 3 = B$ และ $\log 5 = C$ แล้ว $\log(0.006)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}(A+B)$ 2. $3(A+B)$ 3. $A+B-3$ 4. $A+B+3$

ตอบ 3.

การคำนวณด้วย MATHCAD คือ

$$A := \log(2)$$

$$B := \log(3)$$

$$C := \log(5)$$

$$\log(0.006) = -2.222$$

$$\frac{1}{3}\cdot(A+B) = 0.259$$

$$3\cdot(A+B) = 2.334$$

$$A + B - 3 = -2.222$$

$$A + B + 3 = 3.778$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3.

ตัวอย่าง 6.7.6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว A^{-1} คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$

ตอบ 1.

การคำนวณของ MATHCAD

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.385 & 0.231 \\ -0.077 & 0.154 \end{bmatrix}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 1.

ตัวอย่าง 6.7.7. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{2x+4}$ ค่าของ $f'(0)$ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2

ตอบ 2.

การคำนวณของ MATHCAD

$$f(x) := \sqrt{2\cdot x + 4}$$
$$x := 0$$
$$\frac{d}{dx}f(x) = 0.5$$

สรุปเลือกตัวเลือก 2.

ตัวอย่าง 6.7.8 $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}}dx$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} + C$ 2. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C$
3. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} + C$ 4. $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 18\sqrt{x} + C$

ตอบ 3.

การคำนวณของ MATHCAD

$$\int \frac{x-9}{\sqrt{x}}dx$$
$$\frac{2}{3}\cdot x^{\left(\frac{3}{2}\right)} - 18\cdot\sqrt{x}$$

สรุปเลือกตัวเลือก 3.

ตัวอย่าง 6.7.9 ให้ $\bar{u} = -\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{v} = \bar{i} - 3\bar{j}$

แล้วเวกเตอร์ $\bar{w}$ ในข้อใดต่อไปนี้มีขนาด 2 หน่วย และ $\bar{u}\cdot\bar{v} = \bar{v}\cdot\bar{w}$

1. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} + 3\bar{j})$ 2. $\frac{-2}{5}(4\bar{i} - 3\bar{j})$
3. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} + \bar{j})$ 4. $\frac{2}{\sqrt{26}}(5\bar{i} - \bar{j})$

ตอบ 1.

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$u := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad i := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v := \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad j := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u \cdot v = 2$$

$$\left[-\frac{2}{5}\cdot(4\cdot i + 3\cdot j)\right]\cdot v = 2 \qquad \left[-\frac{2}{5}\cdot(4\cdot i - 3\cdot j)\right]\cdot v = -5.2$$

$$\left[\frac{2}{\sqrt{26}}\cdot(5\cdot i + j)\right]\cdot v = 0.784 \qquad \left[\frac{2}{\sqrt{26}}\cdot(5\cdot i - j)\right]\cdot v = 3.138$$

สรุป เลือกตัวเลือก 1.

ตัวอย่าง 6.7.10 รากที่ 6 ของ -64 ที่ไม่เป็นจำนวนจริง เป็นจริงตามข้อใด

1. มี 4 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$
2. มี 4 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$ และ $-1 \pm \sqrt{3}i$
3. มี 6 ราก คือ $1 \pm \sqrt{3}i$, $-1 \pm \sqrt{3}i$ และ $\pm 2i$
4. มี 6 ราก คือ $\sqrt{3} \pm i$, $-\sqrt{3} \pm i$ และ $\pm 2i$

ตอบ 4

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$i := \sqrt{-1}$$

$$\left(\sqrt{3} - i\right)^6 = -64 \qquad \left(\sqrt{3} + i\right)^6 = -64$$

$$\left(-\sqrt{3} - i\right)^6 = -64 \qquad \left(-\sqrt{3} + i\right)^6 = -64$$

$$(2\cdot i)^6 = -64 \qquad (-2\cdot i)^6 = -64$$

สรุป เลือกตัวเลือก 4.

แบบฝึกหัด 6.7

จงใช้โปรแกรม MATHCAD ช่วยในการหาตัวเลือกที่ถูกต้องของข้อสอบต่อไปนี้

1. เซตคำตอบของ $\left|\frac{x-1}{x-2}\right| > 2$ คือเซตหรือช่วงในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\varnothing$ 2. $(2, 3)$
   3. $(-1, 2) \cup (2, 7)$ 4. $(\frac{5}{3}, 2) \cup (2, 3)$

2. $\tan(\frac{11\pi}{12})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{-1}{1+\sqrt{3}}$ 2. $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ 3. $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

3. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $2A^{-1}B^{t}$ คือเมตริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 30 & 18 \\ 12 & 8 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่งทำให้ $AB = C$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. $\det(B^{-1}) = 12$ 2. $\det(B^{-1}A^{-1}) = 24$
   3. $\det(2B^{t}) = 24$ 4. $\det(A^{2}B) = 48$

5. ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $z_1 = (\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16})^4$ และ $\overline{z_2} = \overline{2+i} - \frac{\sqrt{2}}{z_1}$ แล้ว z_2 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 1 2. -1 3. i 4. $-i$

6. ให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j}$ ถ้า $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่งทำมุมกับเวกเตอร์ $\bar{a}$ เท่ากับที่ทำกับเวกเตอร์ $\bar{b}$ แล้ว $\bar{c}$ คือเวกเตอร์ในข้อใดต่อไปนี้

   1. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} - 3\bar{j})$ 2. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(\bar{i} + 3\bar{j})$
   3. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} + \bar{j})$ 4. $\pm\frac{1}{\sqrt{10}}(3\bar{i} - \bar{j})$

7. กำหนด $\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{12}{13} + x = \frac{\pi}{2}$ แล้ว $\tan x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. $\frac{16}{63}$ 2. $\frac{6}{63}$ 3. $-\frac{16}{63}$ 4. $-\frac{6}{63}$

บทที่ 7

เสริมการคำนวณระดับอุดมศึกษาด้วย MATHCAD

ในการเรียนการสอนระดับอุดมศึกษามีปัญหาทางด้านการคำนวณมากมาย หากนักเรียน นิสิต นักศึกษา หรือ ผู้สอน ได้นำความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD มาใช้ในการคำนวณก็จะทำให้เกิดประโยชน์อย่างมาก ในบทที่ 7 นี้จึงได้ยกตัวอย่างของปัญหาทางคณิตศาสตร์ระดับอุดมศึกษาจำแนกเป็นกลุ่มต่างๆ ดังนี้

1. แคลคูลัส
2. สมการเชิงอนุพันธ์
3. การวิเคราะห์เชิงตัวเลข
4. พีชคณิตเชิงเส้น
5. สถิติและความน่าจะเป็น
6. คณิตศาสตร์ขั้นสูง

7.1 เสริมการคำนวณแคลคูลัสด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.1.1 การคำนวณเกี่ยวกับลิมิต

$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4}$

$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right)$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ $\frac{-1}{4}$

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-2)^{\frac{1}{3}}+1}{x-1}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ 1

$\lim_{z \to -\infty^+} \frac{(z^3+1)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot z - 5}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{3}$

$\lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-1}{2 \cdot x + 4}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ ∞

$\lim_{x \to 0^+} \frac{x \cdot \sin(x)}{1-\cos(x)}$ การคำนวณด้วย MATHCAD มีค่าเท่ากับ 2

ตัวอย่าง 7.1.2 การคำนวณเกี่ยวกับอนุพันธ์

การหาค่าของอนุพันธ์

$f(x) := x^3 - x^2 + 1$

$x := 1$

$\frac{d}{dx} f(x) = 1$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x) = 4$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x) = 6$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x) = 0$

การหาสูตรของอนุพันธ์

$\frac{d}{dx}(x^2 + 2 \cdot x - 4)$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $2 \cdot x + 2$

$\frac{d}{dx}(x \cdot \sin(x))$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\sin(x) + x \cdot \cos(x)$

$\frac{d}{dx}(x \cdot \ln(x))$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\ln(x) + 1$

$\frac{d}{dx}(\mathrm{atan}(x))$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{(1+x^2)}$

การหาสูตรของอนุพันธ์อันดับสูง

$\frac{d^2}{dx^2}(x^4)$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $12 \cdot x^2$

$\frac{d^2}{dx^2}(x^2 \cdot e^x)$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $2 \cdot \exp(x) + 4 \cdot x \cdot \exp(x) + x^2 \cdot \exp(x)$

$\frac{d^5}{dx^5}\sin(x)$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\cos(x)$

ตัวอย่าง 7.1.3 การคำนวณเกี่ยวกับปริพันธ์

การหาปริพันธ์จำกัดเขต

$$\int_0^1 x^2\,dx = 0.333$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = 0.693$$

การหาสูตรปริพันธ์และเทคนิคการปริพันธ์

$\int x^2\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{3}\cdot x^3$

$\int \sin(x)\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $-\cos(x)$

$\int \frac{1}{2\cdot x+3}\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{2}\cdot\ln(2\cdot x+3)$

$\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{4-x^2}+2\cdot\operatorname{asin}\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{-1}{3}\cdot\sqrt{9-x^2}\cdot x^2-6\cdot\sqrt{9-x^2}$

$\int \sin(x)^4\cdot\cos(x)^3\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ

$$\frac{-1}{7}\cdot\sin(x)^3\cdot\cos(x)^4-\frac{3}{35}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)^4+\frac{1}{35}\cdot\cos(x)^2\cdot\sin(x)+\frac{2}{35}\cdot\sin(x)$$

$\int \sec(x)^3\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{1}{\left(2\cdot\cos(x)^2\right)}\cdot\sin(x)+\frac{1}{2}\cdot\ln(\sec(x)+\tan(x))$

$\int x\cdot\sin(x)\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\sin(x)-x\cdot\cos(x)$

$\int \frac{1}{2+\sin(x)}\,dx$ สูตรที่ MATHCAD คำนวณได้เท่ากับ $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\operatorname{atan}\left[\frac{1}{6}\cdot\left(4\cdot\tan\left(\frac{1}{2}\cdot x\right)+2\right)\cdot\sqrt{3}\right]$

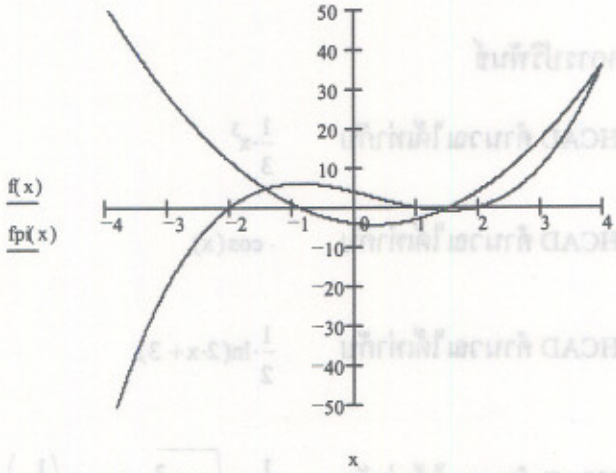
ตัวอย่าง 7.1.4 กราฟของฟังก์ชัน

การเขียนกราฟของ f และ f'

$x := -4, -3.99 .. 4$

$f(x) := x^3 - x^2 - 4\cdot x + 4$

$fpi(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

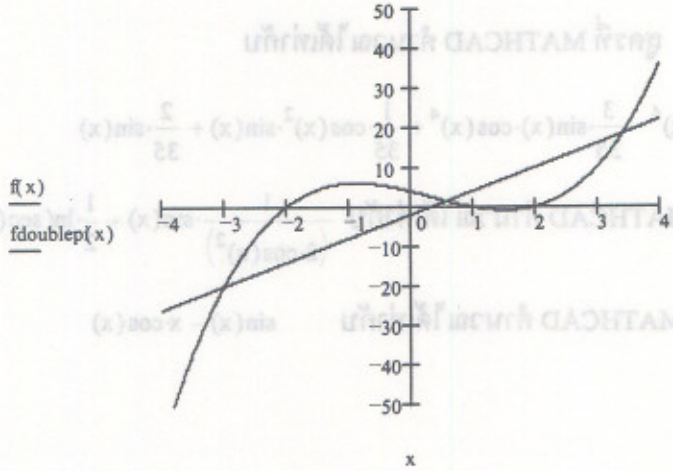


การเขียนกราฟของ f และ f''

$x := -4, -3.99 .. 4$

$f(x) := x^3 - x^2 - 4\cdot x + 4$

$fdoublepi(x) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x)$



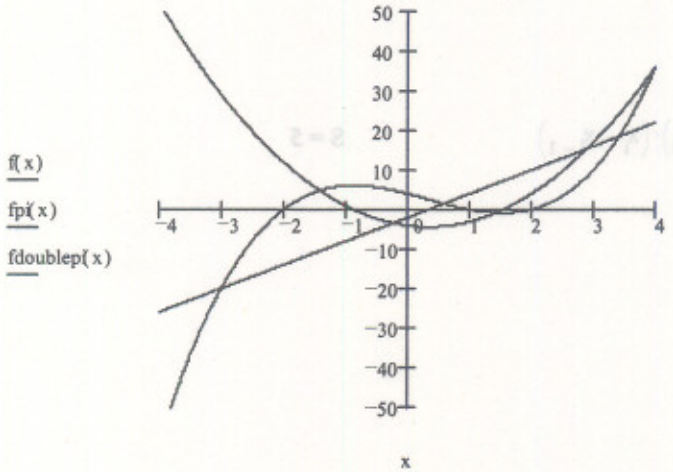
การเขียนกราฟของ f, f', f''

$x := -4, -3.99 .. 4$

$f(x) := x^3 - x^2 - 4 \cdot x + 4$

$fpi(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

$fdoublepi(x) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x)$

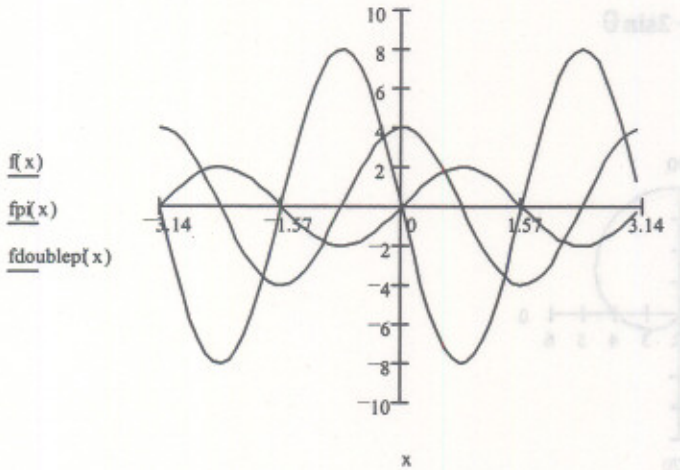


$x := -\pi, -\pi + 0.1 .. \pi$

$f(x) := 2 \cdot \sin(2 \cdot x)$

$fpi(x) := \frac{d}{dx} f(x)$

$fdoublepi(x) := \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} f(x)$



ตัวอย่าง 7.1.5 การคำนวณค่าผลบวกรีมันน์ (Riemann sum)

ตัวอย่างเช่นการหาผลบวกรีมันน์ของ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ บนช่วง [1 , 3]

$f(x) := x^2 - 4\cdot x + 6 \qquad a := 1 \qquad b := 3$

$n := 2$

$h := \frac{b-a}{n}$

$i := 1..n$

$x_0 := a$

$x_i := x_{i-1} + h$

$S := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \qquad S = 5$

$n := 10$

$h := \frac{b-a}{n}$

$i := 1..n$

$x_0 := a$

$x_i := x_{i-1} + h$

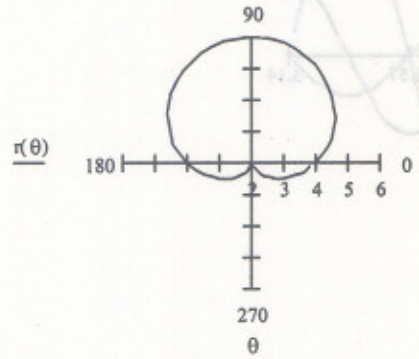
$S := \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot(x_i - x_{i-1}) \qquad S = 4.68$

ตัวอย่าง 7.1.6 การเขียนกราฟในพิกัดเชิงขั้ว

ตัวอย่างเช่น**กราฟของ** $r = 4 + 2\sin\theta$

$\theta := 0, 0.1..2\cdot\pi$

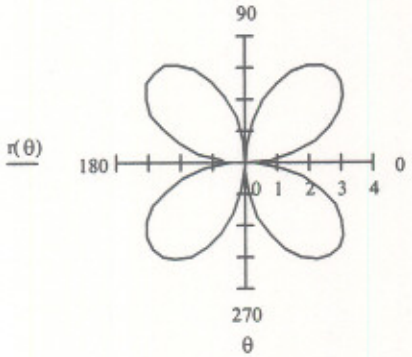
$r(\theta) := 4 + 2\cdot\sin(\theta)$



กราฟของ r = 4sin(2θ)

$\theta := 0, 0.1 .. 2\cdot\pi$

$r(\theta) := 4\cdot\sin(2\cdot\theta)$



ตัวอย่าง 7.1.7 การเขียนกราฟ 3 มิติ

ตัวอย่างเช่น กราฟของ $z = x^2 - y^2$

$f(x, y) := x^2 - y^2$

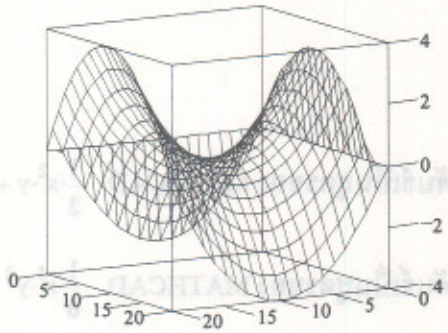
$i := 1 .. 20$

$j := 1 .. 20$

$x_i := -2 + \frac{4}{20}\cdot i$

$y_j := -2 + \frac{4}{20}\cdot j$

$M_{(i,j)} := f(x_i, y_j)$



M

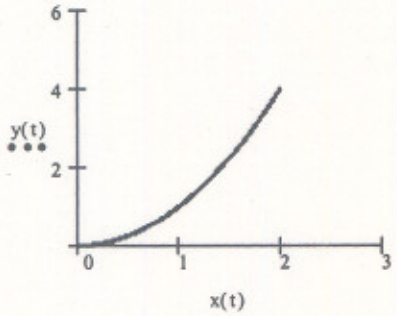
ตัวอย่าง 7.1.8 การเขียนกราฟของส่วนโค้ง

ตัวอย่าง เส้นโค้งที่เป็นรอยทางของ $r(t) = (t, t^2)$, $0 < t < 2$

$t := 0, 0.01 .. 2$

$x(t) := t$

$y(t) := t^2$



ตัวอย่าง 7.1.9 การหาปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

การหาผลปริพันธ์ค่าเป็นตัวเลข

$$\int_0^1 \int_0^2 (x+y)\,dx\,dy = 3$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 x \cdot y^2\,dx\,dy = 1.333$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \cdot \sin(\theta)\,dr\,d\theta = 0.5$$

การหาสูตรของปริพันธ์

$\int \int (x+y)\,dx\,dy$ การหาปริพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD $\frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot y + \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot x$

$\int \int x^2 \cdot y\,dx\,dy$ การหาปริพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD $\frac{1}{6} \cdot x^3 \cdot y^2$

$\int \int r^2\,dr\,d\theta$ การหาปริพันธ์เป็นสูตรของ MATHCAD $\frac{1}{3} \cdot r^3 \cdot \theta$

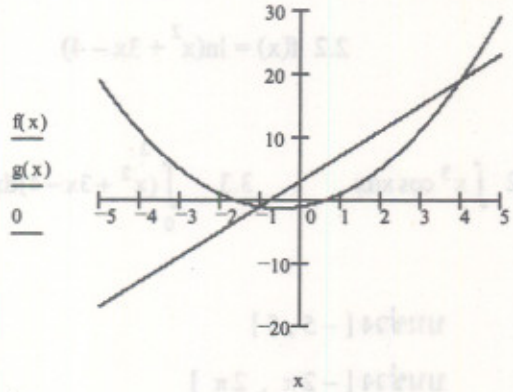
ตัวอย่าง 7.1.10 การหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

ตัวอย่างเช่น การหาพื้นที่ระหว่าง $f(x) := x^2 + x - 1$ **กับ** $g(x) := 4 \cdot x + 3$

$f(x) := x^2 + x - 1$

$g(x) := 4 \cdot x + 3$

$x := -5, -4.99 .. 5$



$x := 0$

$\text{root}(f(x) - g(x), x) = -1$

$x := 5$

$\text{root}(f(x) - g(x), x) = 4$

$$\int_{-1}^{4} (g(x) - f(x))\, dx = 20.833$$

พื้นที่เท่ากับ 20.833

ตัวอย่าง 7.1.11 การคำนวณค่าความยาวส่วนโค้ง

ตัวอย่างเช่น การหาความยาวเส้นโค้ง $r(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}\, t^3, 12t^3)$, $-1 < t < 2$

ผลการคำนวณของ MATHCAD

$x(t) := 6 \cdot t^2 \qquad y(t) := 4 \cdot \sqrt{2} \cdot t^3 \qquad z(t) := 3 \cdot t^4$

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}(x(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(y(t))\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(z(t))\right]^2}\, dt = 81$$

หรือคำนวณโดยตรง

$$\int_{-1}^{2} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}\left(6 \cdot t^2\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}\left(4 \cdot \sqrt{2} \cdot t^3\right)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}\left(3 \cdot t^4\right)\right]^2}\, dt = 81$$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงหาค่าลิมิต

1.1 $\lim_{x\to 2} \frac{|x-1|-1}{|x|-2}$ 1.2 $\lim_{x\to 2} \frac{2x^2-x-1}{x-1}$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

2.1 $f(x) = x^2 \sin x$ 2.2 $f(x) = \ln(x^2+3x-4)$

3. จงหาปริพันธ์ของฟังก์ชัน

3.1 $\int x \ln x dx$ 3.2 $\int x^3 \cos x dx$ 3.3 $\int_0^2 (x^2+3x-4)dx$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน

4.1 $f(x) = x3 + 3x - 7$ บนช่วง $[-5, 5]$

4.2 $f(x) = 2\sin x + \cos x$ บนช่วง $[-2\pi, 2\pi]$

5. จงเขียนกราฟ 3 มิติ ของ $z = f(x,y)$

5.1 $z = 2x^2 - y^2$ บนช่วง $[-1, 1] \times [-2, 2]$

5.2 $z = \sin(x+y)$ บนช่วง $[-1, 1] \times [-1, 1]$

6. จงเขียนกราฟของส่วนโค้งเส้นโค้งที่เป็นรอยทางของ $r(t)$

6.1 $r(t) = (t, t^3)$ บนช่วง $[0, 4]$

6.2 $r(t) = (\sin t, \cos t)$ บนช่วง $[0, 4\pi]$

7. จงปริพันธ์ของฟังก์ชันสองตัวแปร

7.1 $\iint (xy+y^3)dxdy$ 7.2 $\iint (\sin(x+y))dxdy$

7.3 $\int_1^3\int_0^4 (x+2y)dx$ 7.4 $\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi \sin(x+y)dx$

8. จงหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง

8.1 $y = x^2 - 2x$ และ $y = 2x - 3$ 8.2 $y = x^2 - 6x + 4$ และ $y = 4x - 6$

9. จงหาความยาวส่วนโค้ง

9.1 $r(t) = (2\sin t, 3\cos t)$ บนช่วง $0 < t < 2\pi$

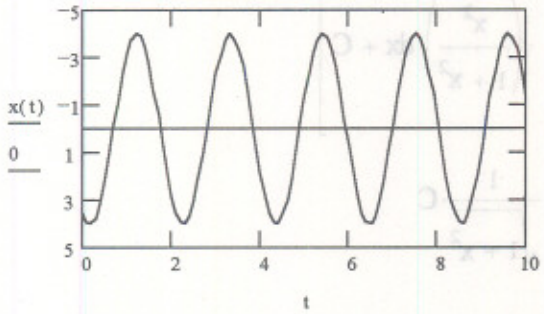
9.2 $r(t) = (2\sin t, 3\cos t, t)$ บนช่วง $0 < t < 2\pi$

7.2 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.2.1 กราฟของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

$x(t) := 4\cdot\sin\left(3\cdot t + \frac{\pi}{3}\right)$

$t := 0, 0.1 .. 10$



ตัวอย่าง 7.2.2 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - 2xy = x$

สมการเชิงเส้น $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ มีผลเฉลย $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C\right)$

$P(x) = -2x$

$Q(x) = x$

ผลการคำนวณจาก MATHCAD

$$e^{-\int (-2\cdot x)\,dx}\cdot\left[\int e^{\int (-2\cdot x)\,dx}\cdot(x)\,dx + C\right]$$

$$\frac{-1}{2} + \exp(x^2)\cdot C$$

จงหาผลเฉลยของสมการ $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + xy = x^2$

$P(x) = \frac{x}{1 + x^2}$

$$Q(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

ผลการคำนวณของ MATHCAD คือ

$$e^{-\int \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx} \cdot \left[\int e^{\int \left(\frac{x}{1+x^2}\right) dx} \cdot \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) dx + C \right]$$

$$\frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{\left(2 \cdot \sqrt{1+x^2}\right)} \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot C$$

ตัวอย่าง 7.2.3 การหารอนสเกียนของ $f_1, f_2, f_3, \ldots$

ตัวอย่างเช่น $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$

การคำนวณรอนสเกียนของ MATHCAD

$$W(x) := \left| \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x \\ \frac{d}{dx}\left(x^3\right) & \frac{d}{dx}\left(x^2\right) & \frac{d}{dx}(x) \\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(x^3\right) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(x) \end{bmatrix} \right|$$

$$W(x) := \left| \begin{bmatrix} x^3 & x^2 & x \\ 3 \cdot x^2 & 2 \cdot x & 1 \\ 6 \cdot x & 2 & 0 \end{bmatrix} \right|$$

$$W(x) := -2 \cdot x^3$$

ตัวอย่างเช่น $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = \sin(2x)$

การคำนวณรอนสเกียนของ MATHCAD

$$W(x) := \left|\begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) & \sin(2\cdot x) \\ \frac{d}{dx}(\sin(x)) & \frac{d}{dx}(\cos(x)) & \frac{d}{dx}(\sin(2\cdot x)) \\ \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\sin(x)) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\cos(x)) & \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(\sin(2\cdot x)) \end{bmatrix}\right|$$

$$W(x) := \left|\begin{bmatrix} \sin(x) & \cos(x) & 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \\ \cos(x) & -\sin(x) & 4\cdot\cos(x)^2 - 2 \\ -\sin(x) & -\cos(x) & -8\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) \end{bmatrix}\right|$$

$$W(x) := 6\cdot\sin(x)^3\cdot\cos(x) + 6\cdot\cos(x)^3\cdot\sin(x)$$

ตัวอย่าง 7.2.4 การตรวจสอบผลเฉลยของสมการ

ตัวอย่างเช่น จงตรวจสอบว่า $y = 4\sin 2x + 3\cos 2x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

การตรวจสอบด้วย MATHCAD ทำโดยการแทนค่าแล้วให้ MATHCAD ทำการหาอนุพันธ์

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}(4\cdot\sin(2\cdot x) + 3\cdot\cos(2\cdot x)) + 4\cdot(4\cdot\sin(2\cdot x) + 3\cdot\cos(2\cdot x))$$

$$\frac{d}{dx}\left(16\cdot\cos(x)^2 - 8 - 12\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\right) + 4\cdot(4\cdot\sin(2\cdot x) + 3\cdot\cos(2\cdot x))$$

$$-32\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) - 12\cdot\cos(x)^2 + 12\cdot\sin(x)^2 + 4\cdot(4\cdot\sin(2\cdot x) + 3\cdot\cos(2\cdot x))$$

$$12\cdot\cos(x)^2 + 12\cdot\sin(x)^2 - 12$$

มีค่าเท่ากับ 0

สรุป $y = 4\sin 2x + 3\cos 2x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

ตัวอย่างเช่น จงตรวจสอบว่า $y = 4e^{-5x} + 3e^{x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

การตรวจสอบด้วย MATHCAD ทำโดยการแทนค่าแล้วให้ MATHCAD ทำการหาอนุพันธ์

$$\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)\right]+4\cdot\left[\frac{d}{dx}\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)\right]\right]-5\cdot\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)\right]+\left(\frac{-80}{\exp(x)^{5}}+12\cdot\exp(x)\right)\right]-5\cdot\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)$$

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{-20}{\exp(x)^{5}}+3\cdot\exp(x)\right)+\left(\frac{-80}{\exp(x)^{5}}+12\cdot\exp(x)\right)\right]-5\cdot\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)$$

$$\left[\frac{100}{\exp(x)^{5}}+3\cdot\exp(x)+\left(\frac{-80}{\exp(x)^{5}}+12\cdot\exp(x)\right)\right]-5\cdot\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)$$

$$\left(\frac{20}{\exp(x)^{5}}+15\cdot\exp(x)\right)-5\cdot\left(4\cdot e^{-5\cdot x}+3\cdot e^{x}\right)$$

0

สรุป $y = 4e^{5x} + 3e^{-x}$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 5y = 0$

ตัวอย่าง 7.2.5 การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปร

ตัวอย่างเช่น $(\ln y)^2\frac{dy}{dx} = x^2y$ แยกตัวแปรได้เป็น $\frac{(\ln y)^2}{y}dy = x^2dx$

การหาผลเฉลยต่อด้วย MATHCAD

$$\int\left(\frac{\ln(y)^2}{y}\right)dy$$

$$\frac{1}{3}\cdot\ln(y)^3$$

$$\int x^2\,dx$$

$$\frac{1}{3}\cdot x^3$$

สรุปผลเฉลยคือ $\frac{(\ln y)^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C$

ตัวอย่าง 7.2.6 การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอับดับ n

การหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - 5y = 3\sin 2x$

จะได้สมการ $(D-5)\,y = 3\sin 2x$

ผลเฉลย $y_c = c_1 e^{5t}$

ผลเฉลย $y_p = \frac{1}{(D-5)}(3\sin 2x)$

$= e^{5t}\int e^{-5x}(3\sin 2x)dx$

การคำนวณ $e^{5t}\int e^{-5x}(3\sin 2x)dx$ ด้วย MATHCAD จะทำให้ได้ผลเฉลยเร็วขึ้น

$$e^{5\cdot x}\cdot\int \left(e^{-5\cdot x}\right)\cdot(3\cdot\sin(2\cdot x))\,dx$$

$$\frac{-12}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{6}{29} - \frac{30}{29}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$$

เพราะฉะนั้น $y_p = \frac{-12}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{6}{29} - \frac{30}{29}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

หมายเหตุ ตรวจสอบโดยการแทนค่าย้อนกลับได้ดังนี้

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-12}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{6}{29} - \frac{30}{29}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\right) - 5\cdot\left(\frac{-12}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{6}{29} - \frac{30}{29}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\right)$$

$$= 6\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) + \frac{30}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{30}{29}\cdot\sin(x)^2 - \frac{30}{29}$$

สรุป ผลเฉลย $y = y_c + y_p = c_1 e^{5t} + \frac{-12}{29}\cdot\cos(x)^2 + \frac{6}{29} - \frac{30}{29}\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$

การหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 5y = 1 + x$

จะได้สมการ $(D^2 + 4D - 5)y = 1 + x$

$(D+5)(D-1)\,y = 1 + x$

ผลเฉลย $y_c = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t}$

ผลเฉลย $y_p = \dfrac{1}{(D+5)(D-1)}(1+x)$

$$= e^{-5t}\int e^{5x}(e^{x}\int(e^{-x})(1+x)dx)dx$$

การคำนวณ $e^{-5t}\int e^{5x}(e^{x}\int(e^{-x})(1+x)dx)dx$ ด้วย MATHCAD จะทำให้ได้ผลเฉลยเร็วขึ้น

$e^{-5\cdot x}\cdot\int\left(e^{5\cdot x}\right)\cdot\left[e^{x}\cdot\int\left(e^{-x}\right)\cdot(1+x)\,dx\right]dx$ ผลการคำนวณของ MATHCAD $\dfrac{-9}{25}-\dfrac{1}{5}\cdot x$

เพราะฉะนั้น $y_p = \dfrac{-9}{25}-\dfrac{1}{5}\cdot x$

หมายเหตุ ตรวจสอบโดยการแทนค่าย้อนกลับได้ดังนี้

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\left(\frac{-9}{25}-\frac{1}{5}\cdot x\right)+4\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{-9}{25}-\frac{1}{5}\cdot x\right)\right]-5\cdot\left(\frac{-9}{25}-\frac{1}{5}\cdot x\right) = 1+x$$

สรุป ผลเฉลย $y = y_c + y_p = c_1e^{-5t}+c_2e^{t}+\dfrac{-9}{25}-\dfrac{1}{5}\cdot x$

ตัวอย่าง 7.2.7 การหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform)

จากบทนิยามของผลการแปลงลาปลาซ $L\{f(x)\}(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx$

เพราะฉะนั้นเราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซด้วย MATHCAD ได้

ตัวอย่างเช่น $L\{f(x)=x)(s) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-sx}(x)dx$

$\displaystyle\int_0^{\infty}\left(e^{-s\cdot x}\right)\cdot(x)\,dx$ ผลการคำนวณของ MATHCAD

$$\text{limit}\left[\frac{-1}{(s\cdot\exp(s\cdot x))}\cdot x-\frac{1}{\left(s^2\cdot\exp(s\cdot x)\right)}+\frac{1}{s^2},x=\infty,\text{left}\right]$$

มีค่าเท่ากับ $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{se^{sx}}-\frac{1}{s^2e^{sx}}+\frac{1}{s^2}\right]=\frac{1}{s^2}$ สรุป $L\{f(x)=x)\}(s)=\dfrac{1}{s^2}$

การหาผลการแปลงลาปลาซ $L\{f(x) = \sin x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}(\sin x)dx$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\int_0^{\infty} \left(e^{-s\cdot x}\right)\cdot(\sin(x))\,dx$$

$$\text{limit}\left[\frac{-1}{\left[\left(s^2+1\right)\cdot\exp(s\cdot x)\right]}\cdot\cos(x) - \frac{s}{\left[\left(s^2+1\right)\cdot\exp(s\cdot x)\right]}\cdot\sin(x) + \frac{1}{\left(s^2+1\right)}, x=\infty, \text{left}\right]$$

มีค่าเท่ากับ $\lim_{x\to\infty}[-\frac{1}{(s^2+1)e^{sx}}\cos x - \frac{s}{(s^2+1)e^{sx}}\sin x + \frac{1}{s^2+1}] = \frac{1}{s^2+1}$

สรุป $L\{f(x) = \sin x)\}(s) = \frac{1}{s^2+1}$

ตัวอย่าง 7.2.8 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีของออยเลอร์ (Euler's method) ตัวอย่างเช่นกำหนด $\frac{dy}{dx} = 1 + x$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(1)$

จงสูตรของออยเลอร์ $y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$ เมื่อ $f(x,y) = \frac{dy}{dx}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$f(x,y) := 1 + x$

$x_0 := 0$

$c := 1$

$n := 10000$

$h := \frac{c - x_0}{n}$

$i := 1..n$

$x_i := x_{i-1} + h$

$y_0 := 1$

$y_i := y_{i-1} + h\cdot f\left(x_{i-1}, y_{i-1}\right)$

$y_n = 2.49995$

หมายเหตุ ค่าจริงของ $y(x) = x + \frac{x^2}{2} + 1$, $y(1) = 2.5$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงเขียนกราฟของการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์มอนิก

   1.1 $x(t) = 10\sin(4t + \frac{\pi}{3})$ บนช่วง $[0, 10]$

   1.2 $x(t) = 5\sin(5t + \frac{\pi}{6})$ บนช่วง $[0, 12]$

2. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

   2.1 $\frac{dy}{dx} - 4xy = x + 4$ 2.2 $\frac{dy}{dx} - 4xy = e^{4x}$

   2.3 $\frac{dy}{dx} - 4xy = \sin x$ 2.4 $\frac{dy}{dx} - 4xy = x e^{4x}$

3. จงหารอนสเกียนของ $f_1, f_2, f_3, \ldots$

   3.1 $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = \sin x$

   3.2 $f_1(x) = x + 1$, $f_2(x) = x^2 + 2x + 3$, $f_3(x) = x^3 + 2$

   3.3 $f_1(x) = x\sin x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = \sin x + \cos x$

4. จงแสดงว่า $\sin x + \cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

5. จงแสดงว่า $y = 4xe^x + 3e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 0$

6. จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - y = \sin x$

7. จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - 3y = \sin x + \cos x$

8. จงหาผลเฉลยของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 4y = \sin 2x$

9. จงหาผลการแปลงลาปลาซ (Laplace transform)

   9.1 $f(x) = x^3 \sin x$ 9.2 $f(x) = \sin x\cos 2x$

   9.3 $f(x) = e^x \cos 2x$ 9.4 $f(x) = x\cos x$

10. จงหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีของออยเลอร์ (Euler's method)

    10.1 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 1 + x$ และ $y(1) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(2)$

    10.2 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 4\sqrt{x}$ และ $y(0) = 1$ จงหาค่าประมาณของ $y(1)$

7.3 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับการวิเคราะห์เชิงตัวเลขด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.3.1 การประมาณเส้นโค้ง $y(x)$ ที่ผ่านจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ จงหาสมการเส้น โค้ง $y(x)$ ที่ผ่านจุด (1, 2) , (2, 4) , (3, 5) , (4, 12) และ (5, 18)

การคำนวณด้วย MATHCAD แบบที่ 1

$$\text{ORIGIN} := 1 \qquad x := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 12 \\ 18 \end{bmatrix}$$

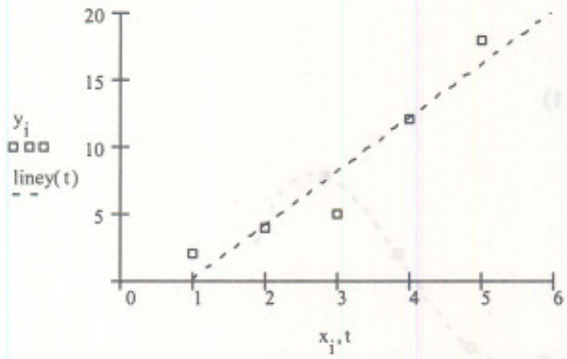
$i := 1..5$

$t := 0, 0.1..6$

$m := \text{slope}(x, y) \qquad m = 4$

$c := \text{intercept}(x, y) \qquad c = -3.8$

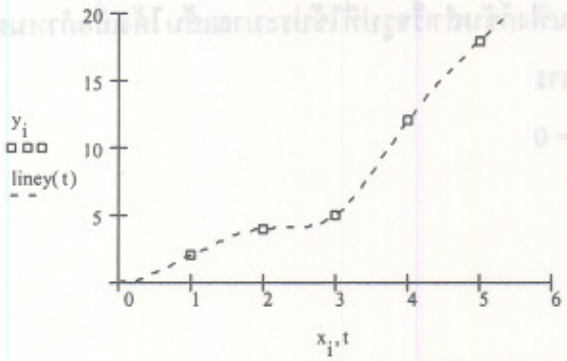
$\text{liney}(x) := m \cdot x + c$



การคำนวณด้วย MATHCAD แบบที่ 2 ใช้คำสั่ง lspline และ interp

$Vs := \text{lspline}(x, y)$

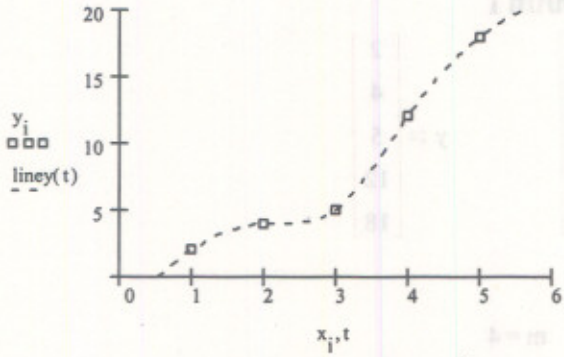
$\text{liney}(t) := \text{interp}(Vs, x, y, t)$



หมายเหตุ lspline และ interp เป็นฟังก์ชันสำเร็จรูปที่ใช้ประมาณเส้นโค้งเมื่อกำหนดจุดผ่าน

การคำนวณด้วย MATHCAD แบบที่ 3 ใช้คำสั่ง pspline และ interp

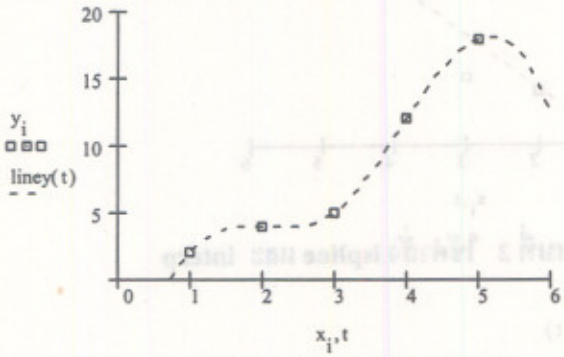
$Vs := pspline(x, y)$
$liney(t) := interp(Vs, x, y, t)$



หมายเหตุ pspline และ interp เป็นฟังก์ชันสำเร็จรูปที่ใช้ประมาณเส้นโค้งเมื่อกำหนดจุดผ่าน

การคำนวณด้วย MATHCAD แบบที่ 4 ใช้คำสั่ง cspline และ interp

$Vs := cspline(x, y)$
$liney(t) := interp(Vs, x, y, t)$



หมายเหตุ cspline และ interp เป็นฟังก์ชันสำเร็จรูปที่ใช้ประมาณเส้นโค้งเมื่อกำหนดจุดผ่าน

ตัวอย่าง 7.3.2 การหารากของสมการ

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 2 = 0$

$f(x) := x^2 + 3 \cdot x - 4$
$x := 1$
$root(f(x), x) = 1$
$x := -5$
$root(f(x), x) = -4$

เพราะฉะนั้นรากสมการคือ -4 , 1

จงหารากของสมการ sinx – cosx = 0

$TOL := 0.000001$

$x := 0$

$root(\sin(x) - \cos(x), x) = 0.785 \cdot rad$

$root(\sin(x) - \cos(x), x) = 45 \cdot deg$

เพราะฉะนั้นรากสมการคือ 0.785 เรเดียน หรือ 45 องศา

ตัวอย่าง 7.3.3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น และ ไม่เชิงเส้น

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x + y + z = 12$$
$$x - y + z = 4$$
$$x + y - z = 2$$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$x := 0$

$y := 0$

$z := 0$

Given

$x + y + z = 12$

$x - y + z = 4$

$x + y - z = 2$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} := Find(x, y, z)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

สรุป $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$

จงหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$x^2 + y^2 = 25$$
$$x - y = 1$$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$x := 0$

$y := 0$

Given

$x^2 + y^2 = 25$

$x + y = 7$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \mathrm{Find}(x, y)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

สรุป $x = 4$, $y = 3$

ตัวอย่าง 7.3.4 การประมานค่า $y(c)$ เมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ และผ่านจุด (x_0, y_0) โดยวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))$$

เมื่อ $h = \frac{c - x_0}{n}$, $x_{i+1} = x_i + h$

จงหาค่าประมานค่า $y(1)$ เมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx} = x + y$ และผ่านจุด (0, 0)

$ORIGIN := 0$

$f(x, y) := x + y$

$x_0 := 0$

$c := 1$

$n := 1000$

$h := \frac{c - x_0}{n}$

$i := 1..n$

$x_i := x_{i-1} + h$

$i := 0..n - 1$

$y_0 := 0$

$y_{i+1} := y_i + \left(\frac{h}{2}\right) \cdot \left(f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_i + h \cdot f(x_i, y_i)\right)\right)$

$y_n = 0.718281$

หมายเหตุ ผลเฉลยแท้จริงคือ $y(x) := e^x - x - 1$ เพราะฉะนั้นค่าจริง $y(1) = 0.718282$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงประมาณเส้นโค้ง y(x) ที่ผ่านจุด (-1, 4) , (1, 2) และ (15, 18)
2. จงประมาณเส้นโค้ง y(x) ที่ผ่านจุด (-1, 4) , (1, 2) , (8, 5) และ (15, 18)
3. จงประมาณเส้นโค้ง y(x) ที่ผ่านจุด (-1, 4) , (1, 2) , (2, 4) , (14, 12) และ (15, 18)
4. จงประมาณเส้นโค้ง y(x) ที่ผ่านจุด (-1, 4) , (1, 2) , (2, 4) , (8, 5) , (14, 12) และ (15, 18)
5. การหารากทั้งหมดของสมการบนช่วง [– 10 , 10]

   5.1 $x^3 + 3x - 2 = 0$

   5.2 $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

   5.3 $2\sin x + 3\cos x = 0$

   5.4 $x - \sin x = 2$

   5.5 $2^x - x^2 = 0$

6. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น และ ไม่เชิงเส้น

   6.1
   $$x + 3y + z = 12$$
   $$2x - 2y + z = 4$$
   $$3x + y - z = 2$$

   6.2
   $$2x + y = 2$$
   $$x^2 + y^2 = 144$$

7. จงประมานค่า y(c) เมื่อกำหนด $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ และผ่านจุด (x_0 , y_0) โดยวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงแล้ว

   7.1 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 2x + y$ และผ่านจุด (0, 0) จงประมาณค่า y(1)

   7.2 กำหนด $\frac{dy}{dx} = 2x - 3y$ และผ่านจุด (0, 0) จงประมาณค่า y(1)

   7.3 กำหนด $\frac{dy}{dx} = \sin x + 3y$ และผ่านจุด (0, 0) จงประมาณค่า y(1)

7.4 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับพีชคณิตเชิงเส้นด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.4.1 การคำนวณเกี่ยวกับเมทริกซ์

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \qquad B := \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 10 & 14 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2.5 \\ 2 & -1.5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 \qquad |B| = -10$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 42 & 61 \\ 52 & 76 \end{bmatrix} \qquad 2 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{bmatrix} 18 & 31 \\ 26 & 36 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 7.4.2 การหาผลเฉลยของระบบสมการ

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยของระบบสมการ

$$2x + 3y = 10$$
$$4x - 5y = 2$$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$x := 0$

$y := 0$

Given

$2 \cdot x + 3 \cdot y = 10$

$4 \cdot x - 5 \cdot y = 2$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

สรุป $x = 2$ และ $y = 2$

ตัวอย่าง 7.4.3 การหาค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง

ตัวอย่างเช่น การหาค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง ของ $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$A := \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A,4) = \begin{bmatrix} 0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

การหาค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง ของ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvals}(A) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{eigenvec}(A,2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A,-3) = \begin{bmatrix} 0.196 \\ -0.981 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{eigenvec}(A,1) = \begin{bmatrix} -0.408 \\ 0.408 \\ 0.816 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 7.4.4 การหาสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

ตัวอย่างเช่น การหาสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$-2 - 5\cdot\lambda + \lambda^2 = 0$$

การหาสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$-6 + 7\cdot\lambda - \lambda^3 = 0$$

ตัวอย่าง 7.4.5 การแปลงแถวเมทริกซ์

แบบที่ 1 แถวที่ 1 คูณด้วย –2

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$i := 1..3 \quad j := 1..3 \quad A_{(1,j)} := A_{(1,j)} + 5\cdot A_{(2,j)}$

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 27 & 33 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

แบบที่ 2 สลับแถว 1 กับ 2

ORIGIN:= 1

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$i := 1..3 \quad j := 1..3 \quad temp_j := A_{(1,j)} \quad A_{(1,j)} := A_{(2,j)} \quad A_{(2,j)} := temp_j$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

แบบที่ 3 แถว 1 ถูกบวกด้วย 5 เท่า ของแถวที่ 2

ORIGIN := 1

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$i := 1..3 \qquad j := 1..3 \qquad A_{(1,j)} := A_{(1,j)} + 5 \cdot A_{(2,j)}$

$$A = \begin{bmatrix} 21 & 27 & 33 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 7.4.6 การแปลงเชิงเส้น

ตัวอย่าง การหาผลการแปลงเชิงเส้น $T(x,y,z) = (-2y - 6z\ ,\ 3y + 7z\ ,\ x - 2y - 5z\ )$

$$T(x,y,z) := \begin{bmatrix} 0 & -2 & -6 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$T(1,0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad T(0,1,0) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad T(0,0,1) = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \\ -5 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 7.4.7 การหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ R^3 โดยใช้กระบวนการของ Gram - Schmidt

ตัวอย่างเช่น กำหนดมูลฐาน $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

การคำนวณด้วย MATHCAD ตามขั้นตอน ดังต่อไปนี้

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$u_1 := \frac{v_1}{|v_1|} \qquad u_1 = \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix}$$

$$w_2 := v_2 - (v_2 \cdot u_1) \cdot u_1 \qquad w_2 = \begin{bmatrix} -0.667 \\ 0.333 \\ 0.333 \end{bmatrix}$$

$$u_2 := \frac{w_2}{|w_2|} \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -0.816 \\ 0.408 \\ 0.408 \end{bmatrix}$$

$$w_3 := v_3 - (v_3 \cdot u_2) \cdot u_2 - (v_3 \cdot u_1) \cdot u_1 \qquad w_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$u_3 := \frac{w_3}{|w_3|} \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix}$$

สรุป มูลฐานเชิงตั้งฉากปกติคือ $\left\{ \begin{bmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.816 \\ 0.408 \\ 0.408 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -0.707 \\ 0.707 \end{bmatrix} \right\}$

ตัวอย่าง 7.4.8 การหาสมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุดกำหนด

จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, 2) และ (4, 5)

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\left| \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$-2 \cdot x + 3 \cdot y - 7 = 0$$

สมการเส้นตรงคือ $-2x + 3y - 7 = 0$

จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (-1, 2) , (2, 5) และ (4, 10)

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\left| \begin{bmatrix} x & y & x^2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 16 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$27 \cdot x - 30 \cdot y + 3 \cdot x^2 + 84 = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} x & y & y^2 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 25 & 1 \\ 4 & 8 & 64 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$54 \cdot x - 75 \cdot y + 3 \cdot y^2 + 192 = 0$$

สมการพาราโบลาคือ $54 \cdot x - 75y + 3 \cdot y^2 + 192 = 0$ หรือ $27 \cdot x - 30y + 3 \cdot x^2 + 84 = 0$

จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด (3, 4) , (-3, 4) และ (-4, 3)

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 25 & -3 & 4 & 1 \\ 25 & 4 & 3 & 1 \\ 25 & 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$-50 \cdot x^2 - 50 \cdot y^2 + 1250 = 0$$

สมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 = 25$

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด (1, 1) , (–1, 1) , (2 , -4) และ (-4, 3)

การคำนวณด้วย MATHCAD

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 16 & 2 & 4 & 1 \\ 16 & 4 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$-12 \cdot x^2 - 84 \cdot y^2 + 432 \cdot y - 336 = 0$$

สมการไฮเพอร์โบลาคือ $x^2 - 7y^2 + 36y - 28 = 0$

จงหาสมการวงรีที่ผ่านจุด (5, 0) , (–5, 0) , (0 , -4) และ (0 ,-4)

$$\left|\begin{bmatrix} x^2 & y^2 & x & y & 1 \\ 25 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 25 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ 0 & 16 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 16 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$1280x^2 + 2000y^2 - 32000 = 0$$

สมการวงรีคือ $1280x^2 + 2000y^2 - 32000 = 0$

แบบฝึกหัด 7.4

1. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

   1.1 $A + 3B$ 1.2 AB

   1.3 $|AB|$ 1.4 A^{-1}

2. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

   1.1 $2A + 3B$ 1.2 B^{-1}

   1.3 $|AB|$ 1.4 BA^{-1}

2. จงหาค่าเจาะจง และ เวกเตอร์เจาะจง ของเมทริกซ์

   2.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 2.2 $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

   2.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2.2 $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. จงหาสมการลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์

   3.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ 3.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. จงหามูลฐานเชิงตั้งฉากปกติของ R^3 โดยใช้กระบวนการของ Gram - Schmidt

   กำหนดมูลฐาน $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

5. จงหาสมการภาคตัดกรวยที่ผ่านจุดกำหนด

   5.1 สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด (1, – 2) และ (– 4, 5)

   5.2 สมการพาราโบลาที่ผ่านจุด (-1, 2) , (2, – 5) และ (– 4, 1)

   5.3 สมการวงกลมที่ผ่านจุด (1, 4) , (-1, 2) และ (1, 3)

   5.4 สมการไฮเพอร์โบลาที่ผ่านจุด (1, 1) , (–1, 1) , (–2 , -4) และ (–4, 3)

   5.5 สมการวงรีที่ผ่านจุด (3, 0) , (–3, 0) , (1 , -4) และ (1 ,-4)

7.5 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับ ความน่าจะเป็นและสถิติด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.5.1 การสร้างตารางความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม

$n := 10$

$p := 0.25$

$x := 0..n$

$$b(x,n,p) := \frac{n!}{x!\cdot(n-x)!}\cdot p^{x}\cdot(1-p)^{n-x}$$

x	b(x,n,p)
0	0.0563
1	0.1877
2	0.2816
3	0.2503
4	0.146
5	0.0584
6	0.0162
7	0.0031
8	0.0004
9	0
10	0

ตัวอย่าง 7.5.2 การสร้างตารางความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซง

$\mu := 1$

$x := 0..10$

$$p(x) := \frac{e^{-\mu}\cdot\mu^{x}}{x!}$$

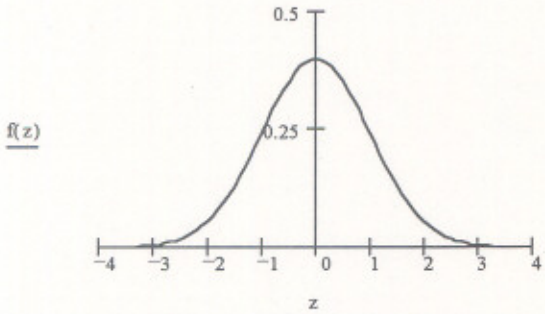
x	p(x)
0	0.3679
1	0.3679
2	0.1839
3	0.0613
4	0.0153
5	0.0031
6	0.0005
7	0.0001
8	0
9	0
10	0

ตัวอย่าง 7.5.3 การเขียนกราฟของการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง z , t , f , χ^2

Standard Normal distribution

$$f(z) := \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot z^2}$$

$z := -4, -3.9 .. 4$

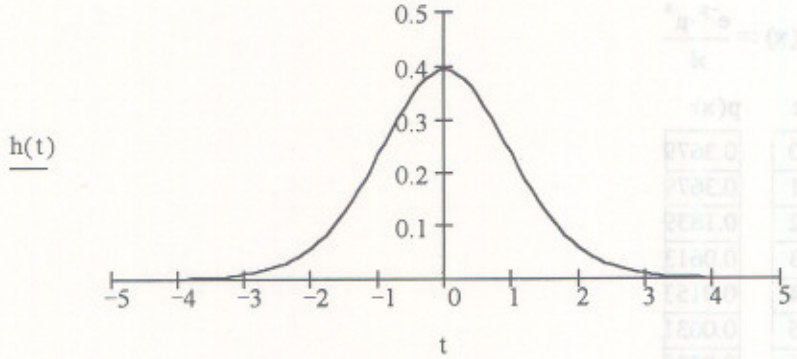


T distribution

$v := 14$

$$h(t) := \left[\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\cdot\sqrt{\pi\cdot v}}\right]\cdot\left[1+\left(\frac{t^2}{v}\right)\right]^{-\frac{v+1}{2}}$$

$t := -5, -4.9 .. 5$

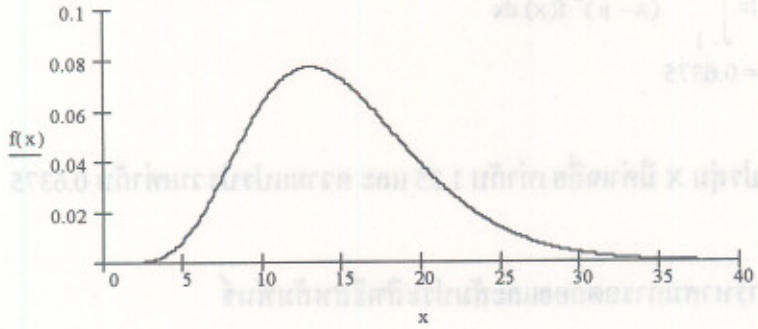


Chi-square distribution

$v := 15$

$$f(x) := \left[\frac{1}{2^{\frac{v}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\right]\cdot x^{\left(\frac{v}{2}\right)-1}\cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$x := 0, .1 .. 40$



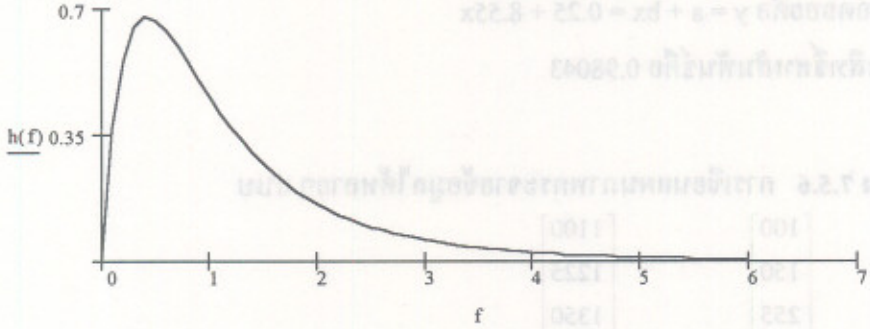
F distribution

$v1 := 4$

$v2 := 10$

$$h(f) := \frac{\Gamma\left(\frac{v1+v2}{2}\right)\cdot\left(\frac{v1}{v2}\right)^{\frac{v1}{2}}\cdot f^{\left(\frac{v1}{2}\right)-1}}{\Gamma\left(\frac{v1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{v2}{2}\right)\cdot\left[1+\left(\frac{v1}{v2}\right)\cdot f\right]^{\frac{v1+v2}{2}}}$$

$f := 0, .1 .. 6$



ตัวอย่าง 7.5.4 การหาค่าเฉลี่ย และ ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันการแจกแจงความน่าจะเป็น $f(x) = \frac{x^2}{3}$ เมื่อ $-1 < x < 2$

$$f(x) := \frac{x^2}{3}$$

$$\mu := \int_{-1}^{2} x\,f(x)\,dx$$

$\mu = 1.25$

$$\text{variance} := \int_{-1}^{2} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx$$

$$\text{variance} = 0.6375$$

เพราะฉะนั้นตัวแปรสุ่ม X มีค่าเฉลี่ย เท่ากับ 1.25 และ ความแปรปรวนเท่ากับ 0.6375

ตัวอย่าง 7.5.5 การหาสมการถดถอยและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

$$x := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 14 \\ 23 \\ 35 \\ 64 \\ 79 \end{bmatrix}$$

$a := \text{intercept}(x, y) \qquad a = 0.25$

$b := \text{slope}(x, y) \qquad b = 8.55$

$r := \text{corr}(x, y) \qquad r = 0.98043$

สมการถดถอยคือ $y = a + bx = 0.25 + 8.55x$

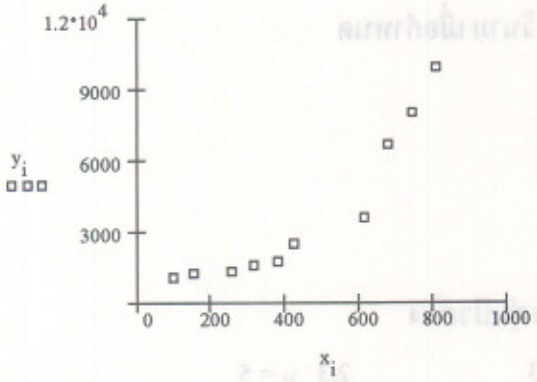
สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์คือ 0.98043

ตัวอย่าง 7.5.6 การเขียนแผนภาพกระจายข้อมูลได้หลายๆ แบบ

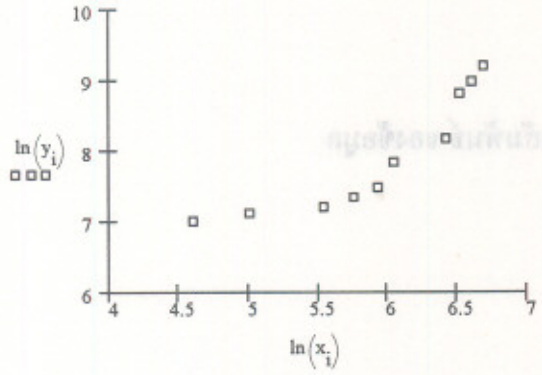
$$x := \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 255 \\ 315 \\ 378 \\ 423 \\ 612 \\ 677 \\ 745 \\ 812 \end{bmatrix} \qquad y := \begin{bmatrix} 1100 \\ 1225 \\ 1350 \\ 1550 \\ 1780 \\ 2530 \\ 3560 \\ 6645 \\ 7982 \\ 9954 \end{bmatrix}$$

$i := 1..10$

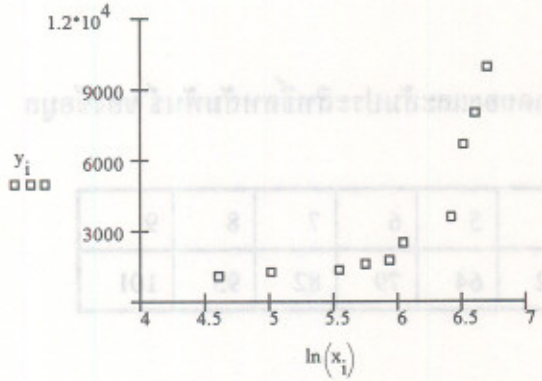
แผนภาพการกระจายของข้อมูล สเกลบนแกน X แกน Y



แผนภาพการกระจายของข้อมูล สเกลบนแกน lnX แกน lnY



แผนภาพการกระจายของข้อมูล สเกลบนแกน lnX แกน Y



หมายเหตุ Mathcad มีความสามารถที่จะกำหนดให้ตัวแปรในแนวแกนตั้งหรือแกนนอน เป็นได้ทั้งค่าของตัวแปร x y ปกติ หรือเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x , y ก็ได้

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงตารางความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มทวินาม เมื่อกำหนด

   1.1 $n = 5$, $p = 0.5$

   1.2 $n = 12$, $p = 0.25$

   1.3 $n = 15$, $p = 0.8$

   1.4 $n = 25$, $p = 0.2$

2. จงสร้างตารางความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มปัวส์ซง

   2.1 $\mu = 2$ 2.2 $\mu = 3$ 2.3 $\mu = 5$

3. จงหาความน่าจะเป็น

   4.1 $P(0.25 < z < 1.25)$

   4.2 $P(1.5 < z < 2.25)$

   4.3 $P(-2 < z < 1.15)$

4. จงหาสมการถดถอยและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ของข้อมูล

   3.1 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 35 \\ 41 \end{bmatrix}$

   3.2 $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 12 \\ 23 \\ 41 \\ 78 \\ 101 \\ 200 \end{bmatrix}$

5. จงเขียนแผนภาพการกระจาย หาสมการถดถอยและสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ของข้อมูล

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	11	22	35	42	64	79	82	95	101

7.6 เสริมการคำนวณเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ขั้นสูงด้วย MATHCAD

ตัวอย่าง 7.6.1 การหาสูตรของฟังก์ชันที่นิยามในพจน์ของปริพันธ์

$f(x)=\int_x^{x^2}\left(t^2+t+1\right)dt$ คำนวณค่าได้เป็น $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot x^6-x-\frac{1}{3}\cdot x^3$

$f(x)=\int_x^{x^2}\sin(t)\,dt$ คำนวณค่าได้เป็น $f(x)=-\cos\left(x^2\right)+\cos(x)$

$f(x):=\int_x^{x^2}e^{-x\cdot t}\,dt$ คำนวณค่าได้เป็น $f(x):=\frac{-1}{\left(x\cdot\exp\left(x^3\right)\right)}+\frac{1}{\left(x\cdot\exp\left(x^2\right)\right)}$

$f(x)=\int_x^{x^2}t\cdot\sin(t\cdot x)\,dt$ คำนวณค่าได้เป็น $f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(x^3\right)-x\cos\left(x^3\right)-\frac{1}{x^2}\cdot\sin\left(x^2\right)+\cos\left(x^2\right)$

ตัวอย่าง 7.6.2 การหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามในพจน์ของปริพันธ์

การหาปริพันธ์โดยตรง

$\frac{d}{dx}\int_x^{x^2}\frac{e^{-x\cdot t}}{t}\,dt$ คำนวณค่าได้เป็น $\frac{3}{\left(x\cdot\exp\left(x^3\right)\right)}-\frac{2}{\left(x\cdot\exp\left(x^2\right)\right)}$

การคำนวณค่าก่อน

$\int_x^{x^2}\sin(x\cdot t)\,dt$ คำนวณค่าได้เป็น $\frac{-\cos\left(x^3\right)}{x}+\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}$

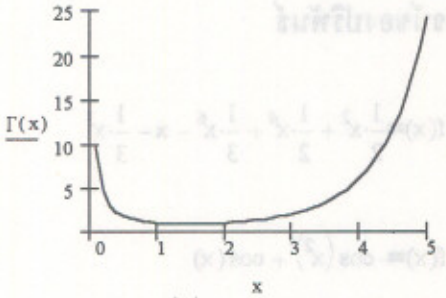
แล้วจึงหาอนุพันธ์

$\frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos\left(x^3\right)}{x}+\frac{\cos\left(x^2\right)}{x}\right)$ คำนวณค่าได้เป็น $3\cdot\sin\left(x^3\right)\cdot x+\frac{\cos\left(x^3\right)}{x^2}-2\cdot\sin\left(x^2\right)-\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^2}$

หรือหาอนุพันธ์โดยตรง

$\frac{d}{dx}\left(\int_x^{x^2}\sin(x\cdot t)\,dt\right)$ คำนวณค่าได้เป็น $3\cdot\sin\left(x^3\right)\cdot x+\frac{\cos\left(x^3\right)}{x^2}-2\cdot\sin\left(x^2\right)-\frac{\cos\left(x^2\right)}{x^2}$

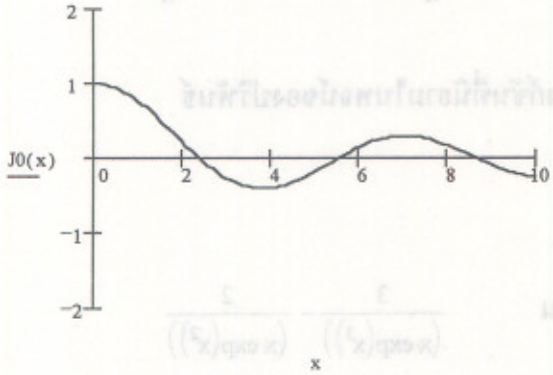
ตัวอย่าง 7.6.3 กราฟของฟังก์ชันแกมมา (Gamma function) และการคำนวณค่า



$\Gamma(2) = 1$ $\qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1.772 \qquad \sqrt{\pi} = 1.772$

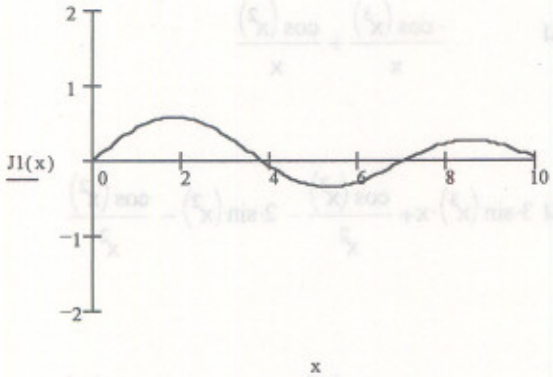
ตัวอย่าง 7.6.4 กราฟของฟังก์ชันเบสเซล (Bessel function) และการคำนวณค่า

กราฟของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 1



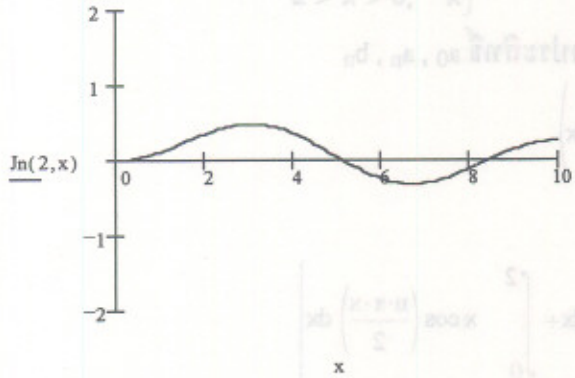
$J0(1) = 0.765$ $\qquad J0(0) = 1 \qquad J0(0.5) = 0.938$

กราฟของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 2



$J1(1) = 0.44$ $\qquad J1(0) = 0 \qquad J1(0.5) = 0.242$

กราฟของเบสเซลอันดับ 2



$Jn(2,1) = 0.115$ $\quad$ $Jn(2,0) = 0$ $\quad$ $Jn(2,0.5) = 0.031$

ตัวอย่าง 7.6.5 การหาอนุพันธ์อันดับสูง และ อนุพันธ์ย่อย

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left[(y\cdot x)^2 + (x\cdot y)^2\right]$ คำนวณค่าได้เป็น $8\cdot y\cdot x$

$\frac{d^3}{dx^3}\left(x^4\right)$ คำนวณค่าได้เป็น $24\cdot x$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}(\sin(x)\cdot\cos(y))$ คำนวณค่าได้เป็น $-\cos(x)\cdot\sin(y)$

$\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\left(\ln\left(x^2+y^2\right)\right)$ คำนวณค่าได้เป็น $-4\cdot\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot x$

ตัวอย่าง 7.6.5 การหาพหุนามเลอจองด์อันดับต่างๆ จากสูตรโรดริกส์

จากสูตรโรดริกส์ $p_n(x)=\left[\frac{1}{\left(2^n\right)\cdot(n!)}\right]\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$

$p_1(x)=\left[\frac{1}{\left(2^1\right)\cdot(1!)}\right]\cdot\frac{d^1}{dx^1}\left[\left(x^2-1\right)^1\right]$ คำนวณค่าได้เป็น $p_1(x)=x$

$p_2(x)=\left[\frac{1}{\left(2^2\right)\cdot(2!)}\right]\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(x^2-1\right)^2\right]$ คำนวณค่าได้เป็น $p_2(x)=\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}$

$p_3(x)=\left[\frac{1}{\left(2^3\right)\cdot(3!)}\right]\cdot\frac{d^3}{dx^3}\left[\left(x^2-1\right)^3\right]$ คำนวณค่าได้เป็น $p_3(x)=\frac{5}{2}\cdot x^3-\frac{3}{2}\cdot x$

$p_4(x)=\left[\frac{1}{\left(2^4\right)\cdot(4!)}\right]\cdot\frac{d^4}{dx^4}\left[\left(x^2-1\right)^4\right]$ คำนวณค่าได้เป็น $p_4(x)=\frac{35}{8}\cdot x^4-\frac{15}{4}\cdot x^2+\frac{3}{8}$

ตัวอย่าง 7.6.6 การหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = \begin{cases} 2 & ,-2 < x < 0 \\ x & ,0 < x < 2 \end{cases}$, $f(x+4) = f(x)$

การคำนวณด้วย MATHCAD เพื่อหาสัมประสิทธิ์ a_0 , a_n , b_n

$$a_0 := \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\int_{-2}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx\right)$$

$$a_0 := 3$$

$$n := 1..10$$

$$a_n := \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\int_{-2}^{0} 2\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right)dx\right]$$

$$a_n := 2\cdot\frac{(2\cdot n\cdot\pi\cdot\sin(n\cdot\pi) + \cos(n\cdot\pi) - 1)}{(n^2\cdot\pi^2)}$$

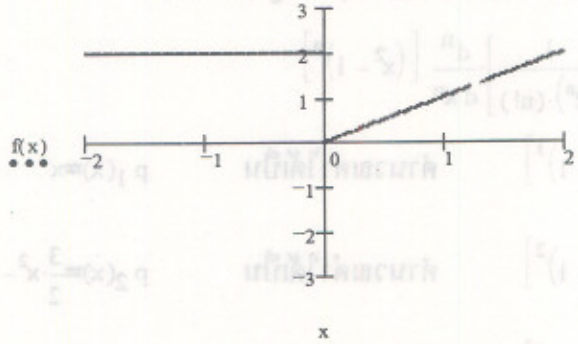
$$b_n := \left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\int_{-2}^{0} 2\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right)dx + \int_{0}^{2} x\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right)dx\right]$$

$$b_n := -2\cdot\frac{(n\cdot\pi - \sin(n\cdot\pi))}{(n^2\cdot\pi^2)}$$

การเขียนกราฟของ f(x)

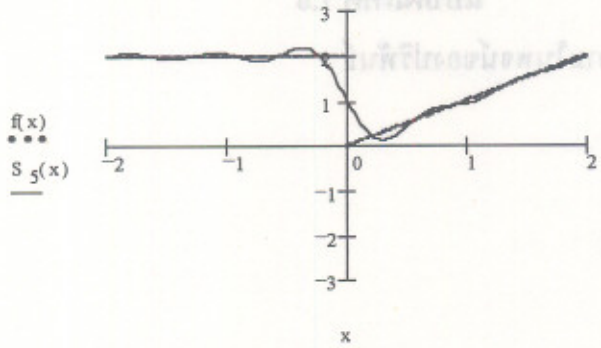
$$f(x) := \text{if}(x<0, 2, x)$$

$$x := -2, -1.98..2$$



การเขียนการของ f(x) และ อนุกรมฟูเรียร์ที่หาได้

$$S_5(x) := \frac{a_0}{2} + \left[\sum_{n=1}^{5} a_n\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right) + b_n\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{2}\right)\right]$$



ตัวอย่าง 7.6.7 การคำนวณปริพันธ์ตามเส้นโค้ง

การหาค่า $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = z$, C เป็นเส้นโค้ง $z(t) = t + it^2$, $1 < t < 2$

$i := \sqrt{-1}$

$z(t) := t + i \cdot t^2$

$f(z) := z$

$$\int_1^2 f(z(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) dt = -6 + 7i$$

การหาค่า $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = z$, C เป็นเส้นโค้ง $z(t) = \cos t + i\sin t$

$i := \sqrt{-1}$

$z(t) := \cos(t) + i \cdot \sin(t)$

$f(z) := z$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(z(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) dt = -0.5 - 0.5i$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(z(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) dt = -1$$

$$\int_0^{2 \cdot \pi} f(z(t)) \cdot \left(\frac{d}{dt} z(t)\right) dt = 0$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาสูตรของฟังก์ชันที่นิยามในพจน์ของปริพันธ์

   1.1 $f(x) = \int_{1}^{x} (t+1)dt$

   1.2 $f(x) = \int_{x}^{x^2} (t+1)dt$

   1.3 $f(x) = \int_{1}^{x} te^{t}dt$

2. จงหาสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่นิยามในพจน์ของปริพันธ์

   2.1 $f(x) = \int_{1}^{x} \sin t dt$

   2.2 $f(x) = \int_{1}^{x} t\cos t dt$

3. จงหาค่าของ

   3.1 $\Gamma(3.5)$ 3.2 $\Gamma(-3.5)$

   3.3 $\Gamma(1.5)$ 3.2 $\Gamma(05)$

4. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันเบสเซลอันดับ 3

5. จงหาอนุพันธ์ย่อยและอนุพันธ์อันดับสูง

   5.1 $\frac{d}{dx}(\frac{d}{dy}(x^3y+xy+xy^4))$ 5.2 $\frac{d^2}{dx^2}(\frac{d^2}{dy^2}(x^4y+2xy+x^2y^4))$

6. จงหาพหุนามเลอจองด์อันดับ 5 และ 6 จากสูตรโรดริกส์

7. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = x^2$, $f(x+2\pi) = f(x)$

8. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = \begin{cases} 1 & ,-1 < x < 0 \\ x & ,0 < x < 1 \end{cases}$, $f(x+2) = f(x)$

9. จงคำนวณปริพันธ์ตามเส้นโค้ง $\int_C f(z)dz$

   เมื่อ $f(z) = z$, C เป็นเส้นโค้ง $z(t) = \cos t + i\sin t$, $0 < t < \pi$

10. จงคำนวณปริพันธ์ตามเส้นโค้ง $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = z^2$, C เป็นเส้นโค้ง $z(t) = t + it^2$, $1 < t < 2$

ภาคผนวกที่ 1

การกดอักขระบนแป้นพิมพ์กับผลการทำงาน

การกดอักขระบนแป้นพิมพ์ที่ใช้แทนการเลือกคำสั่งผ่าน Menu จะทำให้เราทำงานได้เร็ว

การกดอักขระบนแป้นพิมพ์	ผลการทำงาน
<Ctrl>+S	บันทึกแฟ้มข้อมูล
<Ctrl>+O	เปิดแฟ้มข้อมูล
<Ctrl>+V	paste
<Ctrl>+C	copy
<Ctrl>+N	สร้างแฟ้มใหม่
<Ctrl>+F9	แทรกบรรทัดว่าง
<Ctrl>+F10	ลดบรรทัดว่าง
<Ctrl>+z	ได้ ∞
<Ctrl>+p	ได้ π
<Ctrl>+M	สร้างเมทริกซ์
<Ctrl>+R	พิมพ์ใหม่ให้สมบรูณ์
<Ctrl>+F5	Find
<Ctrl>+F	แทรกฟังก์ชัน
<Ctrl>+U	แทรกหน่วย
<Ctrl>+7	แทรกกราฟเชิงขั้ว
<Ctrl>+2	แทรกกราฟ 3 มิติ
<Ctrl>+5	แทรกกราฟคอนทัวร์

การกดอักขระบนแป้นพิมพ์	ผลการทำงาน
F3	cut
F2	copy
F4	paste
<Shift>+F5	แทนที่คำ (Replace)
<Alt>+O+S	แยกบริเวณที่ซ้อน (separated)
<Alt>+O+N	กำหนด Format ตัวเลข
<Alt>+O+G+X	Format XY plot
<Alt>+O+G+P	Format Polar plot
<Alt>+I+G+X	แทรกกราฟแบบ XY Plot
<Alt>+I+G+P	แทรกกราฟแบบ Polar plot
<Alt>+I+G+....	แทรกกราฟ ....
<Alt>+V+M	แสดงแถบการคำนวณหรือไม่แสดง
<Alt>+V+F	แสดง Format Bar หรือไม่แสดง
<Alt>+V+T	แสดง Tool Bar หรือไม่แสดง
<Alt>+S+X	คำนวณแบบกระจายสูตร
<Alt>+S+F	คำนวณแบบแยกตัวประกอบ
<Alt>+S+E	คำนวณเป็นสูตร
<Alt>+M+A	คำนวณแบบอัตโนมัต
<Alt>+M+C	คำนวณแบบต้องสั่งด้วยการกด F9

ภาคผนวกที่ 2.

อักขระบนแป้นพิมพ์กับสัญลักษณ์ของการคำนวณ

การจดจำอักขระบนแป้นพิมพ์ที่ใช้แทนสัญลักษณ์ของการคำนวณจะทำให้เราทำงานได้เร็ว

อักขระบนแป้นพิมพ์	สัญลักษณ์ของการคำนวณ
+	การบวก
–	การลบ
*	การคูณ
/	การหาร
\	$\sqrt{\blacksquare}$
<Ctrl>+\	<Ctrl>+!
?	$\frac{d}{d\blacksquare}\blacksquare$
<Ctrl>+<Shift>+M	$\frac{d^{\blacksquare}}{d\blacksquare^{\blacksquare}}\blacksquare$ อนุพันธ์อันดับที่ n
! <Shift>+1	$\blacksquare!$
<Ctrl>+<Shift>+1	$\blacksquare^{T}$
@ <Shift>+2	กราฟแบบแกน X แกนY
<Ctrl>+<Shift>+2	กราฟ 3 มิติ
# <Shift>+3	$\prod_{\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ ผลคูณ

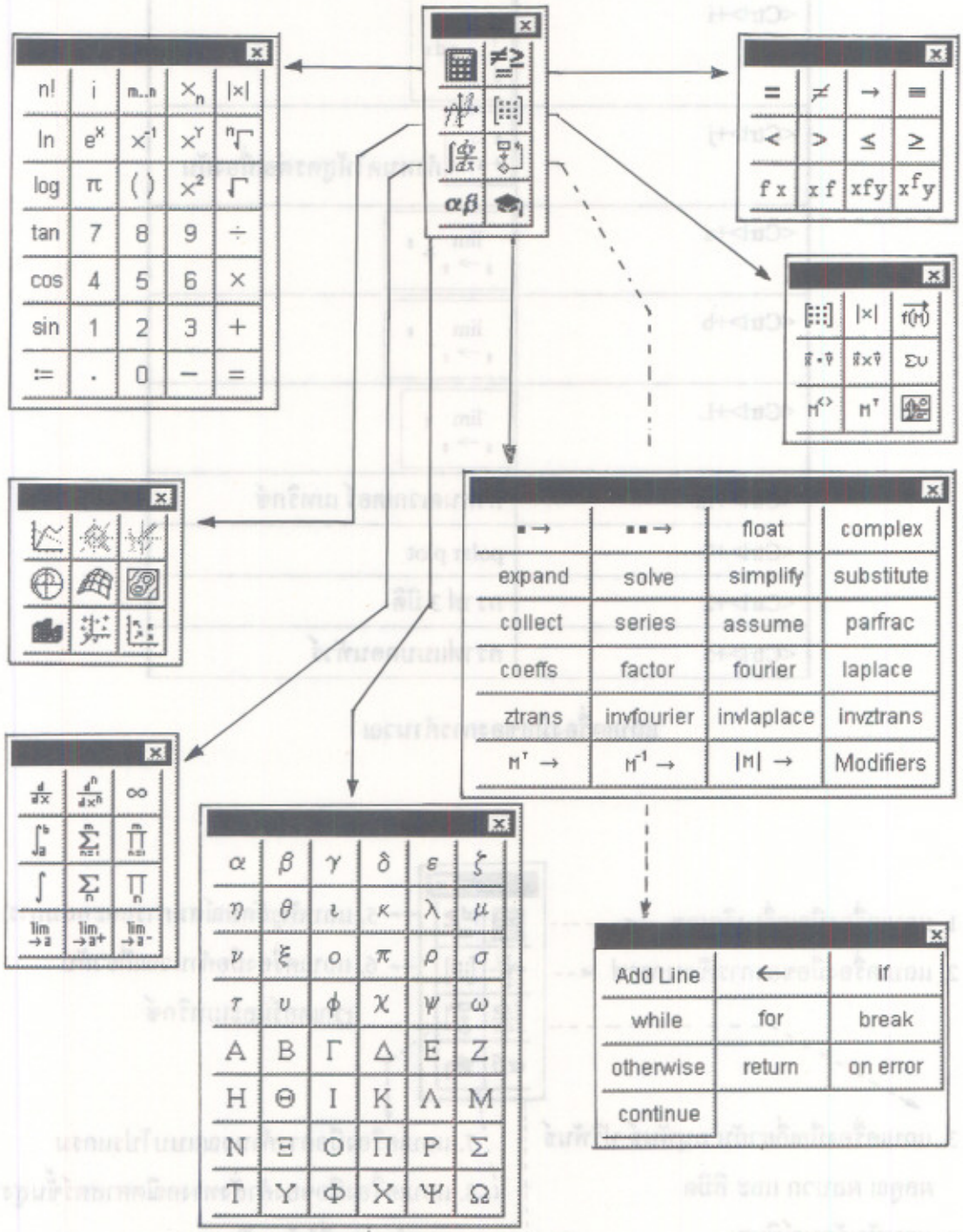
อักขระบนแป้นพิมพ์	สัญลักษณ์ของการคำนวณ
<Ctrl>+<Shift>+3	$\prod_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$ ผลคูณ เช่น $\prod_{i=1}^{10} i = 10!$
$ <Shift>+4	$\sum_{\blacksquare}^{\blacksquare}$
<Ctrl>+<Shift>+4	$\sum_{\blacksquare=\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare$
^ <Shift>+6	$\blacksquare^{\blacksquare}$ การยกกำลัง
<Ctrl>+<Shift>+6	$\blacksquare_{\langle\blacksquare\rangle}$ หลักที่ i ของ เมทริกซ์
& <Shift>+7	$\int_{\blacksquare}^{\blacksquare}\blacksquare\, d\blacksquare$
<Ctrl>+<Shift>+7	กราฟพิกัดเชิงขั้ว
<Ctrl>+*	$\blacksquare \times \blacksquare$ cross product
|	$\lvert\blacksquare\rvert$ det หรือ ขนาดเวกเตอร์
:	$\blacksquare := \blacksquare$ กำหนดค่า
=	= คำนวณผล
<Ctrl>+=	$\blacksquare = \blacksquare$ กำหนดค่า
[	$\blacksquare_{\blacksquare}$ กำหนดตัว subscript
<Ctrl>+z	∞
<Ctrl>+p	π

อักขระบนแป้นพิมพ์	สัญลักษณ์ของการคำนวณ
<Ctrl>+i	$\int \, d$
<Ctrl>+j	$\cdots + \cdots$ กำหนดให้สูตรต่อเนื่องกัน
<Ctrl>+a	$\lim_{\to} +$
<Ctrl>+b	$\lim_{\to} -$
<Ctrl>+L	$\lim_{\to}$
<Ctrl>+m	กำหนดเวกเตอร์ เมทริกซ์
<Ctrl>+7	polar plot
<Ctrl>+2	กราฟ 3 มิติ
<Ctrl>+5	กราฟแบบคอนทัวร์

แถบเครื่องมือของการคำนวณ

1. แถบเครื่องมือเครื่องคิดเลข
2. แถบเครื่องมือของการเขียนกราฟ
3. แถบเครื่องมือเกี่ยวกับ อนุพันธ์ ปริพันธ์ ผลคูณ ผลบวก และ ลิมิต
4. แถบสัญลักษณ์พิเศษ
5. แถบสัญลักษณ์สมการและอสมการ
6. แถบเครื่องมือคำนวณเกี่ยวกับเวกเตอร์และเมทริกซ์
7. แถบเครื่องมือการคำนวณแบบโปรแกรม
8. แถบเครื่องมือของคำสั่งทางคณิตศาสตร์ขั้นสูงและคำนวณที่ให้ผลเป็นสูตร

แผนภาพแสดงเครื่องมือย่อยของแถบเครื่องมือของการคำนวณ



บรรณานุกรม

1. MathSoft , **Mathcad User's Guide Mathcad 6.0 Mathcad Plus 6.0** , MathSoft Inc , Cambrige , Massachusetts , USA , 1995
2. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , **แคลคูลัส เล่มที่ 1 261101 261103** , พิทักษ์การพิมพ์ , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2537
3. คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , **ความน่าจะเป็นและสถิติ** , พิทักษ์การพิมพ์ , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2537
4. ดำรงค์ ทิพย์โยธา , เพ็ญพรรณ ยังคง , **พีชคณิตเชิงเส้น** , โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2535
5. ดำรงค์ ทิพย์โยธา , **คณิตศาสตร์ขั้นสูง** , โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2538
6. ดำรงค์ ทิพย์โยธา , **เมทริกซ์และตัวกำหนด ระเบียบวิธีการคณนา** , โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2540
7. พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ , **สมการเชิงอนุพันธ์** , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2540
8. สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี , **หนังสือเรียนคณิตศาสตร์ ค. 011 – ค. 016 ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย** , โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว , กรุงเทพมหานคร , พ.ศ. 2535

ดัชนี

พิมพ์ที่โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย โทร. 2153612
นายประเสริฐ ศีลพิพัฒน์ ผู้พิมพ์ผู้โฆษณา มิถุนายน 2541
4102-066/1,500(2)

ผลงานตำราของผู้เขียน

- พีชคณิตเชิงเส้น
- พีชคณิตระดับอุดมศึกษา
- คณิตศาสตร์ขั้นสูง
- การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
- ตัวกำหนดและเมทริกซ์ : ระเบียบวิธีการคณนา
- ภาษาเบสิก
- คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป LINDO
- คู่มือโปรแกรมสำเร็จรูป SPSS For Windows
- **คณิตศาสตร์ปรนัย**
  - คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ปลาย (ภาค 1 – 3)
  - คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ ม. ต้น
  - คู่มือตัดตัวเลือก ข้อสอบคณิตศาสตร์ GMAT และ MBA
  - เฉลยข้อสอบคณิตศาสตร์ Entrance ด้วย วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
  - เฉลยข้อสอบแข่งขันโอลิมปิกด้วย วิธีจริง VS. วิธีตัดตัวเลือก
  - เสริมความรู้มุ่งสู่โอลิมปิก
  - สารพันปัญหาคณิตศาสตร์
  - รวมปัญหาอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

ท่านที่สนใจหนังสือเหล่านี้ติดต่อสั่งซื้อได้ที่

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย ศาลาพระเกี้ยว และ สยามสแควร์

คู่มือ MATHCAD

MATHCAD

หนังสือ **คู่มือ MATHCAD** เป็นหนังสือที่จะช่วยให้ผู้อ่านทุกท่านมีความสามารถที่จะใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATHCAD ได้และนำไปช่วยแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

ความสามารถทางคณิตศาสตร์ที่ MATHCAD ทำได้เช่น

- ทำการคำนวณได้ดีกว่าเครื่องคิดเลขและคำนวณได้ทุกแบบเช่น ตัวเลขจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน เวกเตอร์ เมทริกซ์
- ทำการกระจายและแยกตัวประกอบพหุนามได้
- คำนวณผลลัพธ์ให้ออกมาเป็นสูตรหรือตัวเลขได้
- หาอนุพันธ์หรือปริพันธ์เป็นสูตรหรือตัวเลขได้
- เขียนกราฟได้หลายแบบเช่น กราฟ 2,3 มิติ กราฟพิกัดเชิงขั้ว กราฟแบบคอนทัวร์
- มีฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ให้ครบทุกแบบเช่น sin cos tan arcsin log ln sinh cosh Bessel function Gamma function Fourier Transfrom
- มีฟังก์ชันทางสถิติให้ใช้มากมายเช่น mean median variance standard deviation
- สามารถทำการคำนวณในรูปแบบของโปรแกรมได้

ภายในเล่มมีการประยุกต์ MATHCAD กับคณิตศาสตร์

- ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย ค. 011 - ค. 016
- ระดับอุดมศึกษาเช่น แคลคูลัส สมการเชิงอนุพันธ์ การวิเคราะห์เชิงตัวเลข พีชคณิตเชิงเส้น ความน่าจะเป็นและสถิติ คณิตศาสตร์ขั้นสูง

ติดต่อสั่งซื้อได้ที่

ศูนย์หนังสือจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
อาคารศาลาพระเกี้ยว จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ถนนพญาไท กรุงเทพฯ 10330
โทร. 2183980 , 2187000 โทรสาร 2554441
e-mail:cubook@chula.edu
http://www.chula.edu/cubook/index.htm

คู่มือ MATHCAD
ISBN 974-639-160-7
9 789746 391603
C112
4000 270.00 บาท