คณิตศาสตร์ปรนัย(ฉบับพิเศษ)

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
Mathematical Induction

รองศาสตราจารย์ ดำรงค์ ทิพย์โยธา
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์
Mathematical Induction

1 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการพิสูจน์สูตรหรือข้อความทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญเช่น

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $5 \mid (n^5 - n)$
3. a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว

ให้ P(n) เป็นข้อความในพจน์ของ n

การพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริง เราเลือกใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ได้หลายแบบ

แบบที่ 1 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 ให้ $m \geq 1$

ถ้า (1) P(m) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq m$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = m, m + 1, m + 2, ...

แบบที่ 3 ถ้า (1) P(1) เป็นจริง

(2) ถ้า P(k) เป็นจริง ทุกค่า $k < n$ แล้ว P(n) เป็นจริง

แล้ว P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เทคนิควิธีในการพิสูจน์โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์มีหลายแบบดังต่อไปนี้

2 การจัดรูปพีชคณิตจากซ้ายไปเท่ากับขวาหรือจัดรูปเข้ามาหากันตรงกลาง

ตัวอย่าง 2.1 จงแสดงว่า 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{(1)(1+1)}{2}$ = 1 เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น 1 + 2 + 3 + ... + k = $\frac{k(k+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = $\frac{k(k+1)}{2}$ + (k + 1)

$= (k + 1)(\frac{k}{2} + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น 1 + 2 + 3 + ... + n = $\frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า n $\in$ N ☐

ตัวอย่าง 2.2 จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}$(n + 1)(2n + 1) ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}$(n + 1)(2n + 1) "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{6}$(1 + 1)(2 (1) + 1) = 1^2 เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k}{6}$(k + 1)(2k + 1)

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)^2$ จะได้

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2$

$= (k + 1)(\frac{k(2k+1)}{6} + (k + 1))$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6)$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 6)$

$= \frac{k+1}{6}(2k + 3)(k + 2)$

$= \frac{k+1}{6}((k + 1) + 1)(2 (k + 1) + 1)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.3 จงแสดงว่า $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(\frac{1}{2}(1 + 1))^2 = 1^3$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 = (\frac{k}{2}(k + 1))^2$

บวกทั้งสองข้างด้วย $(k + 1)^3$ จะได้ $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + k^3 + (k + 1)^3 = (\frac{k}{2}(k + 1))^2 + (k + 1)^3$

$$= (k + 1)^2(\frac{k^2}{4} + (k + 1))$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k^2 + 4k + 4)$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4}(k + 2)^2$$

$$= (\frac{(k+1)((k+1)+1)}{2})^2$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n}{2}(n + 1))^2$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.4 จงแสดงว่า $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1(1!) + 2(2!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1(1!) = 1 = (1 + 1)! - 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + ... + k(k!) = (k + 1)! - 1$

เพราะว่า $1(1!) + 2(2!) + ... + k(k!) + (k + 1)((k + 1)!) = ((k + 1)! - 1) + (k + 1)((k + 1)!)$

$$= (k + 1)! - 1 + (k + 1)(k + 1)!$$

$$= (k + 2)(k + 1)! - 1$$

$$= ((k + 1) + 1)! - 1$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1(1!) + 2(2!) + ... + n(n!) = (n + 1)! - 1$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.5 จงแสดงว่า $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(3(1) - 1) = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) = \frac{k}{2}(3k - 1)$

บวกทั้ง 2 ข้างด้วย $(3(k + 1) - 2)$ จะได้

$$\begin{aligned}
1 + 4 + 7 + \ldots + (3k - 2) + (3(k + 1) - 2) &= \frac{k}{2}(3k - 1) + (3(k + 1) - 2) \\
&= \frac{k}{2}(3k - 1) + 3k + 1 \\
&= \frac{3k^2 - k + 6k + 1}{2} \\
&= \frac{3k^2 + 5k + 2}{2} \\
&= \frac{(k+1)}{2}(3k + 2) \\
&= \frac{(k+1)(3(k+1)-1)}{2}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 4 + 7 + \ldots + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 2.6 จงแสดงว่า $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1)^2(2(1)^2 - 1) = 1 = 1^3$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 = k^2(2k^2 - 1)$

บวกด้วย $(2(k + 1) - 1)^3$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\begin{aligned}
1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2k - 1)^3 + (2(k + 1) - 1)^3 &= k^2(2k^2 - 1) + (2(k + 1) - 1)^3 \\
&= 2k^4 - k^2 + (8k^3 + 12k^2 + 6k + 1) \\
&= 2k^4 + 8k^3 + 11k^2 + 6k + 1 \\
&= (2k^4 + 4k^3 + k^2) + (4k^3 + 8k^2 + 2k) + (2k^2 + 4k + 1) \\
&= (k^2 + 2k + 1)(2k^2 + 4k + 1) \\
&= (k + 1)^2(2(k + 1)^2 - 1)
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

3 การจัดรูปแบบทางพีชคณิตที่ต้องมีการบวกเข้าและลบออก

ตัวอย่าง 3.1 จงแสดงว่า a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a + b) \mid (a^{2n} - b^{2n})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2k} - b^{2k}$ ลงตัว

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)} &= a^2 a^{2k} - b^2 b^{2k} \\ &= a^2 a^{2k} - a^2 b^{2k} + a^2 b^{2k} - b^2 b^{2k} \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)} \\ &= a^2 (a^{2k} - b^{2k}) + b^{2k} (a^2 - b^2) \end{aligned}$$

เพราะว่า $(a + b) \mid (a^{2k} - b^{2k})$, $(a + b) \mid (a^2 - b^2)$ เพราะฉะนั้น $(a + b) \mid (a^{2(k+1)} - b^{2(k+1)})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2n} - b^{2n}$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

:

$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตเมื่อพจน์แรก = a^{n-1} และอัตราส่วนร่วม = $-\frac{b}{a}$

เพราะฉะนั้น $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}$

$$= \frac{(a^{n-1})(1 - (-\frac{b}{a})^n)}{1 - (-\frac{b}{a})} \qquad \text{(เพราะว่า n เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น } (-\tfrac{b}{a})^n = \tfrac{b^n}{a^n}\text{)}$$

$$= \frac{a^n - b^n}{a + b}$$

□

ตัวอย่าง 3.2 จงแสดงว่า a – b หาร $a^n - b^n$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(a - b) \mid (a^n - b^n)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(a - b) \mid (a - b)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น a – b หาร $a^k - b^k$ ลงตัว

$$\begin{aligned} a^{k+1} - b^{k+1} &= a a^k - b^k b \\ &= a a^k - a b^k + a b^k - b^k b \qquad \text{(บวกเข้าและลบออก)} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k (a - b) \end{aligned}$$

เพราะว่า (a – b) $|$ $(a^k - b^k)$ และ (a – b) $|$ (a – b) เพราะฉะนั้น (a – b) $|$ $(a^{k+1} - b^{k+1})$
เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง
โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N
เพราะฉะนั้น (a – b) $|$ $(a^n - b^n)$ ทุกค่า n $\in$ N

หมายเหตุ 1. $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$

2. โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตจะได้

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1} = \frac{a^{n-1}(1 - (\frac{b}{a})^n)}{1 - (\frac{b}{a})}$$
$$= \frac{a^n - b^n}{a - b}$$ □

ตัวอย่าง 3.3 จงแสดงว่า a + b หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " (a + b) $|$ $(a^{2n-1} + b^{2n-1})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1}$ = a + b เพราะฉะนั้น (a + b) $|$ $(a^{2(1)-1} + b^{2(1)-1})$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2k-1} + b^{2k-1}$ ลงตัว

$$\begin{aligned} a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1} &= a^{2k+1} + b^{2k+1} \\ &= a^2 a^{2k-1} + b^2 b^{2k-1} \\ &= a^2 a^{2k-1} + a^2 b^{2k-1} - a^2 b^{2k-1} + b^2 b^{2k-1} \quad \text{(บวกเข้าและลบออก)} \\ &= a^2(a^{2k-1} + b^{2k-1}) - b^{2k-1}(a^2 - b^2) \end{aligned}$$

เพราะว่า (a + b) $|$ $(a^2 - b^2)$, (a + b) $|$ $(a^{2k-1} + b^{2k-1})$ เพราะฉะนั้น (a + b) $|$ $(a^{2(k+1)-1} + b^{2(k+1)-1})$
เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง
โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N
เพราะฉะนั้น a + b หาร $a^{2n-1} + b^{2n-1}$ ลงตัว ทุกค่า n $\in$ N

หมายเหตุ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$a^7 + b^7 = (a + b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

โดยใช้สูตรผลบวกของลำดับเรขาคณิตเมื่อ พจน์แรก = a^{n-1} **และ อัตราส่วนร่วม =** $(-\frac{b}{a})$

จะได้ $a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + a^{n-5}b^4 - \ldots + b^{n-1}$ **บรรทัดนี้ต้องปรับปรุง**

$$= \frac{(a^{n-1})(1 - (-\frac{b}{a})^n)}{1 - (-\frac{b}{a})}$$ **(เพราะว่า n เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น** $(-\frac{b}{a})^n = -\frac{b^n}{a^n}$ **)**

$$= \frac{a^n + b^n}{a + b}$$ □

4 ใช้เหตุผลเฉพาะ

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นจำนวนจริง ทุกค่า $n \in N$

จงแสดงว่า $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ "

เพราะว่า $|x_1| \le |x_1|$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &\le |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\ &= (|a| + |b|)^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $|a + b| \le |a| + |b|$

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 2$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 2$

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k|$

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + x_2 + \ldots + x_k) + (x_{k+1})| \\ &\le |x_1 + x_2 + \ldots + x_k| + |x_{k+1}| && \text{(P(2) เป็นจริง)} \\ &\le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_k| + |x_{k+1}| && \text{(P(k) เป็นจริง)} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = 2, 3, 4, ...

เพราะฉะนั้น $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$ □

ตัวอย่าง 4.2 จงแสดงว่า $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(\cos x + i \sin x)^1 = \cos x + i \sin x$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i \sin x)^k = (\cos kx + i \sin kx)$ ... (1)

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{k+1} &= (\cos x + i \sin x)(\cos x + i \sin x)^k \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos kx + i \sin kx) && \text{(จาก (1))} \\ &= \cos x \cos kx + i \cos x \sin kx + i \sin x \cos kx - \sin x \sin kx \\ &= (\cos x \cos kx - \sin x \sin kx) + i(\cos x \sin kx + \sin x \cos kx) \\ &= \cos(x + kx) + i \sin(x + kx) \end{aligned}$$

$= \cos(k+1)x + i\sin(k+1)x$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, ...

หมายเหตุ ทฤษฎีบทของเดอมัวฟ์ กล่าวว่า

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, ... □

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริงบวก

จงแสดงว่า ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตน้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า

$$\begin{aligned} 0 &\le (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \\ &= x - 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y \\ 2\sqrt{x}\sqrt{y} &\le x + y \\ \sqrt{xy} &\le \frac{x+y}{2} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a_1a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(n) เป็นจริง เมื่อ $n \ge 2$ แล้ว P(n + 1) เป็นจริง

สมมติ P(n) เป็นจริง เมื่อ $n \ge 2$

ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $0 \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le a_{n+1}$

เพราะฉะนั้น $a_{n+1} \ge \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ ... (1)

ให้ $A_n = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}$ และ $A_{n+1} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}$ ... (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ $a_{n+1} \ge A_n$ เพราะฉะนั้นมีจำนวนจริง $b \ge 0$ ที่ทำให้ $a_{n+1} = A_n + b$ ... (3)

จาก (2) จะได้

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{nA_n + A_n + b}{n+1} \\ &= A_n + \frac{b}{n+1} \\ (A_{n+1})^{n+1} &= (A_n + \frac{b}{n+1})^{n+1} \\ &= (A_n)^{n+1} + \binom{n+1}{1}(A_n)^n(\frac{b}{n+1}) + \binom{n+1}{2}(A_n)^{n-1}(\frac{b}{n+1})^2 + \ldots + \\ &\quad + \binom{n+1}{n}A_n(\frac{b}{n+1})^n + (\frac{b}{n+1})^{n+1} \end{aligned}$$

เพราะว่า $\binom{n+1}{2}(A_n)^{n-1}(\frac{b}{n+1})^2 + \ldots + \binom{n+1}{n}A_n(\frac{b}{n+1})^n + (\frac{b}{n+1})^{n+1} \ge 0$

เพราะฉะนั้น $(A_{n+1})^{n+1} \ge (A_n)^{n+1} + (n+1)(A_n)^n(\frac{b}{n+1})$

$$= (A_n)^{n+1} + (A_n)^n b$$

$= (A_n)^n (A_n + b)$

$= (A_n)^n a_{n+1}$ (จาก (3))

เพราะฉะนั้น $(A_{n+1})^{n+1} \geq (A_n)^n a_{n+1}$ ... (4)

เพราะว่า P(n) เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$

$$A_n \geq (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$(A_n)^n \geq a_1 a_2 \ldots a_n$$

$$(A_n)^n a_{n+1} \geq a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1}$$

$$(A_{n+1})^{n+1} \geq a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \quad \text{(จาก (4))}$$

$$A_{n+1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}}{n+1} \geq (a_1 a_2 \ldots a_{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

เพราะฉะนั้น P(n + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = 2, 3, 4, ...

เพราะฉะนั้น ค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ น้อยกว่าหรือเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจริง ทุกค่า n = 2, 3, 4, ... □

ตัวอย่าง 4.4 จงแสดงว่า $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\{ a_1 \}$ มีสับเซต 2 เซต คือ $\varnothing$ และ $\{ a_1 \}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ ... (1)

ให้ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$ เป็นเซตที่มีสมาชิก k + 1 ตัว

จาก (1) จะได้ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^k เซต

ให้ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^k}$ เป็นสับเซตของ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$

เพราะว่า $A_1 \cup \{ a_{k+1} \}, A_2 \cup \{ a_{k+1} \}, A_3 \cup \{ a_{k+1} \}, \ldots, A_{2^k} \cup \{ a_{k+1} \}$

และ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{2^k}$ เป็นสับเซตของ $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$

เพราะฉะนั้น $\{ a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1} \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^{k+1} เซต

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพระฉะนั้น $\{ a_1, a_2, \ldots, a_n \}$ มีสับเซตทั้งหมด 2^n เซต ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น ถ้า $|A| = n$ แล้ว $|P(A)| = 2^n$ □

ตัวอย่าง 4.5 จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ ทุกค่า $n \in N$

แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{dx}{dx} = 1 = 1!$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}) &= \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}(x^{k+1})\right) \\
&= \frac{d^k}{dx^k}((k+1)x^k) \\
&= (k+1)\frac{d^k}{dx^k}(x^k) \\
&= (k+1)(k!) && (P(k) \text{ เป็นจริง} \Rightarrow \frac{d^k}{dx^k}(x^k) = k!) \\
&= (k+1)!
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$ ทุกค่า $n \in N$ □

หมายเหตุ โดยผลจากข้างต้นจะได้ $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = n!$

ข้อพิสูจน์ เพราะว่า $(x + c)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}c + \binom{n}{2}x^{n-2}c^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}x\,c^n + \binom{n}{n}c^n$

และ $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}) = 0$, $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-2}) = 0$, ... , $\frac{d^n}{dx^n}(x) = 0$, $\frac{d^n}{dx^n}(c^n) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = \frac{d^n}{dx^n}\binom{n}{0}x^n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

ในทำนองเดียวกันจะได้ $\frac{d^n}{dx^n}(x - c)^n = n!$

แบบฝึกหัด อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. จงแสดงว่า $7 \mid (8^n - 14n + 27)$ ทุกค่า $n \in N$
2. จงแสดงว่า $6 \mid (n^3 + 11n)$ ทุกค่า $n \in N$
3. จงแสดงว่า $3^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 8$
4. จงแสดงว่า $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$
5. จงแสดงว่า $n^3 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq 10$
6. จงแสดงว่า $n^4 \leq 2^n$ ทุกค่า $n \geq 16$
7. จงแสดงว่า $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$
8. จงแสดงว่า $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$
9. จงแสดงว่า $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า $n \in N$
10. จงแสดงว่า $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$
11. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $m!\,n! < (m+n)!$ ทุกค่า $n \in N$
12. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$
13. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ ทุกค่า $n \in N$
14. จงแสดงว่า $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{4}) \ldots (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$
15. จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ ทุกค่า $n \in N$
16. จงแสดงว่า $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ ทุกค่า $n \in N$
17. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$
18. จงแสดงว่า $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$
19. จงแสดงว่า $\frac{5}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{6}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{n+4}{n(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ ทุกค่า $n \in N$
20. จงแสดงว่า $(n+1)(n+2)(n+3) \ldots (2n-1)(2n) = 2^n (1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-3)(2n-1))$ ทุกค่า $n \in N$
21. จงแสดงว่า $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุกค่า $n \in N$
22. จงแสดงว่า $1\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 4 + 3\cdot 4\cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ทุกค่า $n \in N$
23. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเต็มบวก
    จงแสดงว่า $(1\cdot 2\cdot 3 \ldots p) + (2\cdot 3\cdot 4 \ldots (p+1)) + (3\cdot 4\cdot 5 \ldots (p+2)) + \ldots + (n(n+1) \ldots (n+p-1))$
    $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$ ทุกค่า $n \in N$
24. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n})$, $n \geq 4$
25. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n})$ ทุกค่า $n \in N$

26. จงแสดงว่า $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$ ทุกค่า $n \in N$

27. จงแสดงว่า $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\ldots+\frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1}+\frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ ทุกค่า $n \in N$

28. จงแสดงว่า $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ทุกค่า $n \in N$

29. จงแสดงว่า $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ทุกค่า $n \in N$

30. จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

31. จงแสดงว่า $\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n \Big|_{x=c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

32. จงแสดงว่า $\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^n)\Big|_{x=c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

33. จงแสดงว่า $2 \mid n(n+1)$ ทุกค่า $n \in N$

34. จงแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n \in N$

35. จงแสดงว่า $4 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ ทุกค่า $n \in N$

36. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $m \mid n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)$

37. จงแสดงว่า $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

38. จงแสดงว่า $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

39. จงแสดงว่า $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

40. จงแสดงว่า $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$

41. จงแสดงว่า $3 \mid n(n^2 + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

42. จงแสดงว่า $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2 - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

43. จงแสดงว่า $6 \mid n(n+1)(2n+1)$ ทุกค่า $n \in N$

44. จงแสดงว่า $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกจำนวนเฉพาะ p และ $r = 1, 2, \ldots, p-1$

45. กำหนดให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่า $p \mid (n^p - n)$ ทุกค่า $n \in N$

46. จงแสดงว่า $35 \mid (3^{6n} - 2^{6n})$ ทุกค่า $n \in N$

47. จงแสดงว่า $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$ ทุกค่า $n \in N$

48. จงแสดงว่า $20 \mid (11^{2n} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

49. จงแสดงว่า $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)$ ทุกค่า $n \in N$

50. จงแสดงว่า $120 \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ ทุกค่า $n \in N$

51. จงแสดงว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

52. จงแสดงว่า $6 \mid (n(n^2 + 5))$ ทุกค่า $n \in N$

53. จงแสดงว่า $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

54. ให้ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ จงแสดงว่า $\frac{n}{2}(n+1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k)$ ทุกค่า $n \in N$

55. จงแสดงว่า ทุกจำนวนจริง $a \geq 2$ จะได้ $a^n > n$ ทุกค่า $n \in N$

56. จงแสดงว่า $3^n \geq 1 + 2n$ ทุกค่า $n \in N$

57. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $1 + \frac{n}{m} \leq (1 + \frac{1}{m})^n$ ทุกค่า $n \in N$

58. ให้ m เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า $n \in N$ และ $n \leq m$

59. จงแสดงว่า $2 \leq (1 + \frac{1}{n})^n \leq 3$ ทุกค่า $n \in N$

60. จงแสดงว่า $n! > (\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \in N$

61. จงแสดงว่า $n! < n(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \geq 7$

62. จงแสดงว่า $(\frac{n}{e})^n < n! < n(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า n = 7, 8, ...

63. จงแสดงว่า $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า $n \in N$

64. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = (n)a_{n-1}$ จงแสดงว่า $a_n = n!$

65. กำหนดให้ $a_n = -n\, a_{n-1} + n!$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \begin{cases} n! & ;\ n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 0 & ;\ n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

66. กำหนดให้ $a_n = 2\, a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

67. กำหนดให้ $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, $a_1 = 3$ จงแสดงว่า $a_n = (2)^{2^n} - 1$

68. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3(n-1)$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}(n-1)n + 1$

69. กำหนดให้ $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ จงแสดงว่า $a_n = 2^{n+1} - 1$

70. กำหนดให้ $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)}$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_{2n} = \frac{1-2n}{(2n)!}$

71. กำหนดให้ $(2n+1)(2n)a_n - 7a_{n-1} = 0$, $a_1 = \frac{7}{6}$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$

72. กำหนดให้ $n a_n + 2a_{n-2} = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ จงแสดงว่า $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$

73. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = -\frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$

74. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

75. กำหนดให้ $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + n$ จงแสดงว่า $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n+1)$

76. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + n(n-1)$, $a_0 = 3$ จงแสดงว่า $a_n = 2\binom{n+1}{3} + 3$

77. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} - 2$, $a_0 = 0$ จงแสดงว่า $a_n = -3^n + 1$

78. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3n^2$, $a_0 = 0$ จงแสดงว่า $a_n = 6\binom{n+2}{3} - 3\binom{n+1}{2}$

79. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

80. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + 1$, $a_1 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = 2^n - 1$

81. จงแสดงว่า $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(n - 1)) = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$

82. ให้ $S_1 = \{1\}$

$S_2 = \{2, 3\}$

$S_3 = \{4, 5, 6\}$

$S_4 = \{7, 8, 9, 10\}$

:

จงหาผลบวกของสมาชิกในเซต S_n

83. จงแสดงว่า $2^n < n!$ ทุกค่า $n \geq 4$

84. จงแสดงว่า $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$

85. จงแสดงว่า $2304 \mid (7^{2n} - 48n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

86. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$

87. จงแสดงว่า $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

88. จงแสดงว่า $3 \mid (4^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

89. จงแสดงว่า $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

90. จงแสดงว่า $24 \mid (713(9^{3n-2}) + 15)$ ทุกค่า $n \in N$

91. จงแสดงว่า $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

92. จงแสดงว่า $9 \mid (2 \cdot 10^n + 3 \cdot 10^{n-1} + 4)$ ทุกค่า $n \in N$

93. จงแสดงว่า $11 \mid (8 \cdot 10^{2n} + 6 \cdot 10^{2n-1} + 9)$ ทุกค่า $n \in N$

94. จงแสดงว่า $1 + n < 2^n$ ทุกค่า $n \geq 2$

95. จงแสดงว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots + (n - 1)^4 < \frac{n^5}{5}$ ทุกค่า $n \in N$

96. จงแสดงว่า $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 \ldots + (n - 1)^4 + n^4$ ทุกค่า $n \in N$

97. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า $n \in N$

98. จงแสดงว่า $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$ ทุกค่า $n \in N$

99. กำหนดให้ $a_{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} a_n$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = 2(3^{n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

100. กำหนดให้ $a_{n+1} = 4a_n - 1$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{2}{3}(4^n) + \frac{1}{3}$ ทุกค่า $n \in N$

เฉลยแบบฝึกหัด อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. จงแสดงว่า $7 \mid (8^n - 14n + 27)$ ทุกค่า $n \in N$

1. แนวคิด ให้ $a_n = 8^n - 14n + 27$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 8^1 - 14(1) + 27 = 21$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $7 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 21$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_k$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (8^{k+1} - 14(k + 1) + 27) - (8^k - 14k + 27) \\ &= 8^{k+1} - 8^k - 14 \\ &= 8^k(8 - 1) - 14 \\ &= 7(8^k - 2) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 7(8^k - 2) + a_k$

เพราะว่า $7 \mid a_k$ เพราะฉะนั้น $7 \mid (7(8^k - 2) + a_k)$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_{k+1}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $7 \mid (8^n - 14n + 27)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

2. จงแสดงว่า $6 \mid (n^3 + 11n)$ ทุกค่า $n \in N$

2. แนวคิด ให้ $a_n = n^3 + 11n$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 12$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $6 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 12$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_k$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= ((k + 1)^3 + 11(k + 1)) - (k^3 + 11k) \\ &= (k + 1)^3 - k^3 + 11 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 + 11 \\ &= 3(k^2 + k + 4) \\ &= 3(k(k + 1) + 4) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 3(k(k + 1) + 4) + a_k$

เพราะว่า k(k + 1) เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น $2 \mid k(k + 1)$ เพราะฉะนั้น $2 \mid (k(k + 1) + 4)$

เพราะว่า gcd(2, 3) = 1 และ $2 \mid (k(k + 1) + 4)$ และ $3 \mid (3(k(k + 1) + 4))$ เพราะฉะนั้น $6 \mid (3(k(k + 1) + 4))$

เพราะว่า $6 \mid (3(k(k + 1) + 4))$ และ $6 \mid a_k$ เพราะฉะนั้น $6 \mid (3(k(k + 1) + 4) + a_k)$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $6 \mid (n^3 + 11n)$ ทุกค่า $n \in N$ □

3. จงแสดงว่า $3^n > n^4$ ทุกค่า n ≥ 8

3. แนวคิด ให้ $b_n = \frac{3^n}{n^4}$ ทุกค่า n ≥ 1

ให้ P(n) แทนข้อความ " $b_n > 1$ "

(1) การแสดงว่า P(8) เป็นจริง

เพราะว่า 3^8 = 6561 > 4096 = 8^4 เพราะฉะนั้น $b_1 > 1$ เพราะฉะนั้น P(8) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะฉะนั้น $b_k > 1$ ... (1)

$b_{k+1} = \frac{3^{k+1}}{(k+1)^4} = 3\frac{3^k}{k^4}\frac{k^4}{(k+1)^4} = 3b_k\frac{k^4}{(k+1)^4}$ ... (2)

จากหมายเหตุจะได้ $\frac{k^4}{(k+1)^4} > \frac{1}{3}$ ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $b_{k+1} > 1$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n ≥ 8

เพราะฉะนั้น $3^n > n^4$ ทุกค่า n ≥ 8

หมายเหตุ การแสดงว่า $\frac{k^4}{(k+1)^4} > \frac{1}{3}$

แบบที่ 1 ให้ $x_n = (\frac{n}{1+n})^4$, n ≥ 1

เพราะฉะนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} = (\frac{n+1}{1+(n+1)})^4(\frac{1+n}{n})^4 = (\frac{n+1}{n+2}\frac{1+n}{n})^4 = (\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n})^4 = (1+\frac{1}{n^2+2n})^4$

เพราะฉะนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ เพราะฉะนั้น $x_{n+1} > x_n$

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{1+n})^4 = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{1+n})^4 = 1$ และ $x_{n+1} > x_n$ ทุกค่า n ≥ 8

เพราะฉะนั้น $x_n > 1$ ทุกค่า n ≥ 8 เพราะฉะนั้น $(\frac{n}{1+n})^4 > \frac{1}{3}$ ทุกค่า n ≥ 8

แบบที่ 2 $\sqrt[4]{3} = \sqrt{\sqrt{3}} > \sqrt{1.732} > \sqrt{1.69} = 1.3$

$\sqrt[4]{3} > 1.3 \Rightarrow \sqrt[4]{3} - 1 > 0.3$

$\Rightarrow n(\sqrt[4]{3} - 1) > (0.3)n$ เมื่อ n ≥ 1

$\Rightarrow \sqrt[4]{3}n - n > 1$ เมื่อ n ≥ 4

$\Rightarrow \sqrt[4]{3}n > n + 1$ เมื่อ n ≥ 4

$\Rightarrow \frac{n}{1+n} > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ เมื่อ n ≥ 4

$\Rightarrow (\frac{n}{1+n})^4 > \frac{1}{3}$ เมื่อ n ≥ 4 □

4. จงแสดงว่า $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$

4. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $4^n > n^4$ ”

(1) การแสดงว่า P(5) เป็นจริง

เพราะว่า $4^5 = 1024 > 625 = 5^4$ เพราะฉะนั้น P(5) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 4^{k+1} &= 4\ 4^k \\ &> 4(k^4) && \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow 4^k > k^4\text{)} \\ &= k^4 + k^4 + k^4 + k^4 \\ &> k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\ &= (k+1)^4 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 5$

เพราะฉะนั้น $4^n > n^4$ ทุกค่า $n \geq 5$ □

5. จงแสดงว่า $n^3 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 10$

5. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $n^3 \le 2^n$ "

(1) การแสดงว่า P(10) เป็นจริง

เพราะว่า $10^3 = 1000 \le 1024 = 2^{10}$ เพราะฉะนั้น P(10) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 10$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 10$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^3 &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\
&\le 2^k + 3k^2 + 3k + 1 \\
&\le 2^k + 3k^2 + 3k^2 + 3k^2 \\
&\le 2^k + 9k^2 \\
&\le 2^k + k^3 && \text{(เพราะว่า } k \ge 10\text{)} \\
&\le 2^k + 2^k && \text{(P(k) เป็นจริง } \Rightarrow k^3 \le 2^k\text{)} \\
&\le 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \ge 16$

เพราะฉะนั้น $n^3 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 10$ □

6. จงแสดงว่า $n^4 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 16$

6. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $n^4 \le 2^n$ ”

(1) การแสดงว่า P(16) เป็นจริง

เพราะว่า $16^4 = 2^{16}$ เพราะฉะนั้น P(16) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 16$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 16$

$$
\begin{aligned}
(k+1)^4 &= k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
&\le 2^k + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 \\
&\le 2^k + 4k^3 + 6k^3 + 4k^3 + k^3 \\
&\le 2^k + 15k^3 \\
&\le 2^k + k^4 && \text{(เพราะว่า } k \ge 16\text{)} \\
&\le 2^k + 2^k && \text{(P(k) เป็นจริง } \Rightarrow k^4 \le 2^k\text{)} \\
&\le 2^{k+1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \ge 16$

เพราะฉะนั้น $n^4 \le 2^n$ ทุกค่า $n \ge 16$ □

7. จงแสดงว่า $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

7 แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $3 \mid (7^n + 2)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3 \mid (7 + 2)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$7^{k+1} + 2 = 7\ 7^k + 2 = 7(7^k + 2) - 7(2) + 2 = 7(7^k + 2) - 12$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 3 \mid (7^k + 2)$) และ $3 \mid 12$ เพราะฉะนั้น $3 \mid (7^{k+1} + 2)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (7^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$ □

8. จงแสดงว่า $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$

8. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $4 \mid (5^n + 3)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $4 \mid (5 + 3)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$5^{k+1} + 3 = 5 \cdot 5^k + 3 = 5(5^k + 3) - 15 + 3 = 5(5^k + 3) - 12$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 4 \mid (5^k + 3)$) และ $4 \mid 12$ เพราะฉะนั้น $4 \mid (5^{k+1} + 3)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $4 \mid (5^n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$ □

9. จงแสดงว่า $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า $n \in N$

9. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1^3 + 2^3 + 3^3) = 36$ เพราะฉะนั้น $9 \mid (1^3 + 2^3 + 3^3)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $9 \mid (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3)$ ... (1)

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 - k^3$ ... (2)

$$
\begin{aligned}
(k+3)^3 - k^3 &= (k+3-k)((k+3)^2 + (k+3)k + k^2) \\
&= (3)(k^2 + 6k + 9 + k^2 + 3k + k^2) \\
&= (3)(3k^2 + 9k + 9) \\
&= (9)(k^2 + 3k + 3) \qquad \text{... (3)}
\end{aligned}
$$

จาก (2) และ (3) จะได้

$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + (9)(k^2 + 3k + 3)$ ... (4)

จาก (1) และ (4) จะได้ $9 \mid ((k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $9 \mid (n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$ ทุกค่า $n \in N$ □

10. จงแสดงว่า $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

10. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{4}(5^1 - 1) = \frac{4}{4} = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1} = \frac{1}{4}(5^k - 1) \qquad \text{(P(k) เป็นจริง)}$$

$$\begin{aligned} 1 + 5 + 5^2 + ... + 5^{k-1} + 5^k &= \frac{1}{4}(5^k - 1) + 5^k \qquad \text{(บวกด้วย } 5^k \text{ ทั้งสองข้าง)} \\ &= \frac{1}{4}(5^k - 1 + 4 \cdot 5^k) \\ &= \frac{1}{4}(5 \cdot 5^k - 1) \\ &= \frac{1}{4}(5^{k+1} - 1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ... + 5^{n-1} = \frac{1}{4}(5^n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

11. กำหนด m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $m!\,n! < (m + n)!$ ทุกค่า $n \in N$

11. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $m!\,n! < (m + n)!$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $m!\,1! = m! < (m + 1)!$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
m!\,(k + 1)! &= m!\,k!\,(k + 1) \\
&\leq (m + k)!\,(k + 1) && (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow m!\,k! < (m + k)!) \\
&< (m + k)!\,(m + k + 1) \\
&= (m + k + 1)!
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $m!\,n! < (m + n)!$ ทุกค่า $n \in N$ □

12. การแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2}$ + $\frac{1}{2\cdot 3}$ + $\frac{1}{3\cdot 4}$ + ... + $\frac{1}{n(n+1)}$ = $\frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$

12. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1\cdot 2}$ + $\frac{1}{2\cdot 3}$ + $\frac{1}{3\cdot 4}$ + ... + $\frac{1}{n(n+1)}$ = $\frac{n}{n+1}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 2}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2}$ + $\frac{1}{2\cdot 3}$ + $\frac{1}{3\cdot 4}$ + ... + $\frac{1}{k(k+1)}$ = $\frac{k}{k+1}$ บวกด้วย $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ ทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{k}{k+1}(k + \frac{k}{k+2})$$

$$= \frac{k}{k+1}(\frac{k^2+2k+1}{k+2})$$

$$= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2}$ + $\frac{1}{3\cdot 4}$ + $\frac{1}{4\cdot 5}$ + ... + $\frac{1}{n(n+1)}$ = $\frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$ □

13. การแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ ทุกค่า $n \in N$

13. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{(3(1)-2)(3(1)+1)} = \frac{1}{(1)(4)}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{k}{3k+1}$

บวกทั้งสองข้างด้วย $\frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$ จะได้

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots + \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3(k+1)-2)(3(k+1)+1)}$$

$$= \frac{k}{3k+1} + \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{1}{3k+1}(k + \frac{1}{3k+4})$$

$$= \frac{1}{3k+1}(\frac{3k^2+4k+1}{3k+4})$$

$$= \frac{1}{3k+1} \frac{(3k+1)(k+1)}{3k+4}$$

$$= \frac{k+1}{3(k+1)+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$ ทุกค่า $n \in N$ □

14. จงแสดงว่า $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ \ldots\ (1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$

14. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ \ldots\ (1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ \ldots\ (1-\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{k+1}$ คูณทั้งสองข้างด้วย $(1-\frac{1}{(k+1)+1})$ จะได้

$$\begin{aligned}(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})(1-\tfrac{1}{4})\ \ldots\ (1-\tfrac{1}{k+1})(1-\tfrac{1}{(k+1)+1}) &= (\tfrac{1}{k+1})(1-\tfrac{1}{(k+1)+1}) \\ &= (\tfrac{1}{k+1})(\tfrac{k+2-1}{(k+1)+1}) \\ &= \tfrac{1}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ \ldots\ (1-\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$ □

15. จงแสดงว่า $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ ทุกค่า $n \in N$

15. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(1-1)^2 = 0 < \frac{1^3}{3}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 < \frac{k^3}{3}$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 + k^2 &< \frac{k^3}{3} + k^2 \\ &= \frac{k^3+3k^2}{3} \\ &< \frac{k^3+3k^2}{3} + k + \frac{1}{3} \\ &= \frac{k^3+3k^2+6k+3}{3} \\ &= \frac{(k+1)^3}{3} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (k-1)^2 + k^2 < \frac{(k+1)^3}{3}$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3}$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

16. การแสดงว่า $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ ทุกค่า $n \in N$

16. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1^3}{3} = \frac{1}{3} < 1 = 1^2$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 > \frac{k^3}{3}$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 &> \frac{k^3}{3} + (k+1)^2 \\ &= \frac{k^3}{3} + k^2 + 2k + 1 \\ &= \frac{k^3+3k^2+6k+3}{3} \\ &= \frac{k^3+3k^2+3k+1}{3} + \frac{3k}{3} + \frac{2}{3} \\ &> \frac{k^3+3k^2+3k+1}{3} \\ &= \frac{(k+1)^3}{3}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 > \frac{(k+1)^3}{3}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{n^3}{3} < 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$ ทุกค่า $n \in N$ □

17. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$

17. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)}{(k+1)+1}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ทุกค่า $n \in N$ □

18. การแสดงว่า $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + ... + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า n $\in$ N

18. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + ... + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $-1^2 = -1 = (-1)^1 \frac{(1)(1+1)}{2}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะฉะนั้น $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + ... + (-1)^k k^2 = (-1)^k \frac{k(k+1)}{2}$

เพราะฉะนั้น $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + ... + (-1)^k k^2 + (-1)^{k+1}(k+1)^2$

$$= (-1)^k \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^{k+1}(k+1)^2$$

$$= (-1)^{k+1}\left(-\frac{k(k+1)}{2} + (k+1)^2\right)$$

$$= (-1)^{k+1}\left(\frac{-k^2 - k + 2k^2 + 4k + 2}{2}\right)$$

$$= (-1)^{k+1}\left(\frac{k^2 + 3k + 2}{2}\right)$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น $-1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + ... + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ ทุกค่า n $\in$ N □

19. จงแสดงว่า $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{6}{2\cdot3\cdot4}$ + $\frac{7}{3\cdot4\cdot5}$ + ... + $\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}$ = $\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ ทุกค่า n $\in$ N

19. แนวคิด

ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{6}{2\cdot3\cdot4}$ + $\frac{7}{3\cdot4\cdot5}$ + ... + $\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}$ = $\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ = $\frac{(1)(3+7)}{2(1+1)(1+2)}$ = $\frac{10}{12}$ = $\frac{5}{6}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{6}{2\cdot3\cdot4}$ + $\frac{7}{3\cdot4\cdot5}$ + ... + $\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$ = $\frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{6}{2\cdot3\cdot4}$ + $\frac{7}{3\cdot4\cdot5}$ + ... + $\frac{k+4}{k(k+1)(k+2)}$ + $\frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k(3k+7)}{2(k+1)(k+2)} + \frac{k+5}{(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{k(3k+7)}{2} + \frac{k+5}{k+3}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)(k+2)}\left(\frac{k(3k+7)(k+3)+2(k+5)}{2(k+3)}\right) \\
&= \frac{3k^3+16k^2+21k+2k+10}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{3k^3+16k^2+23k+10}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{(3k+10)(k^2+2k+1)}{2(k+1)(k+2)(k+3)} \\
&= \frac{(k+1)^2(3k+10)}{2(k+2)(k+3)(k+1)} \\
&= \frac{(k+1)(3(k+1)+7)}{2(k+2)(k+3)}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น $\frac{5}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{6}{2\cdot3\cdot4}$ + $\frac{7}{3\cdot4\cdot5}$ + ... + $\frac{n+4}{n(n+1)(n+2)}$ = $\frac{n(3n+7)}{2(n+1)(n+2)}$ ทุกค่า n $\in$ N □

20. การแสดงว่า $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n - 1)(2n) = 2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$ ทุกค่า $n \in N$

20. แนวคิด

ให้ P(n) แทนข้อความ “ $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n - 1)(2n) = 2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2 = 2^1(1)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots (2k - 2)(2k - 1)(2k) = 2^k (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2k - 5)(2k - 3)(2k - 1))$

เพราะว่า $(k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots (2(k + 1) - 2)(2(k + 1) - 1)(2(k + 1))$

$= (k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots (2k)(2k + 1)(2k + 2)$

$= (k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots (2k)(2k + 1)(k + 1)(2)$

$= (k + 1)(k + 2)(k + 3)(k + 4) \ldots (2k)(2k + 1)(2)$

$= 2^k (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2k - 3)(2k - 1))(2k + 1)(2)$ (P(k) เป็นจริง)

$= 2^{k+1} (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2k - 3)(2k - 1)(2k + 1))$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n - 1)(2n) = 2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ โดยการจัดรูปแบบพีชคณิต

ให้ $x = (n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n - 1)(2n)$

$y = 2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$

เพราะว่า $n!\, x = (1\cdot2\cdot3\cdot \ldots n)(n + 1)(n + 2) \ldots (2n - 1)(2n) = (2n)!$

และ $n!\, y = (1\cdot2\cdot3\cdot \ldots n)(2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$

$= 2^n (1\cdot2\cdot3\cdot \ldots n)(1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$

$= (2\cdot4\cdot6\cdot \ldots 2n)(1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$

$= (2n)!$

เพราะฉะนั้น $n!\, x = n!\, y$ เพราะฉะนั้น $x = y$

เพราะฉะนั้น $(n + 1)(n + 2)(n + 3) \ldots (2n - 1)(2n) = 2^n (1\cdot3\cdot5\cdot \ldots (2n - 3)(2n - 1))$ □

21. การแสดงว่า $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุกค่า $n \in N$

21. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ P(n) แทนข้อความ “ $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot2 = 2 = \frac{(1)(1+1)(1+2)}{3}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + k(k + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$

$$\begin{aligned} 1\cdot2 + 2\cdot3 + \dots + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2) &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2) \\ &= (k + 1)(k + 2)(\frac{k}{3} + 1) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2

$$\begin{aligned} 1\cdot2 + 2\cdot3 + 3\cdot4 + \dots + n(n + 1) &= \sum_{i=1}^{n} i(i + 1) = \sum_{i=1}^{n} (i^2 + i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) + \frac{n}{2}(n + 1) \\ &= n(n + 1)(\frac{(2n+1)}{6} + \frac{1}{2}) \\ &= n(n + 1)(\frac{2n+1+3}{6}) \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

□

22. การแสดงว่า 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + n(n + 1)(n + 2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

22. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ P(n) แทนข้อความ

" 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + n(n + 1)(n + 2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า 1·2·3 = 6 = $\frac{(1)(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะฉะนั้น 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + k(k + 1)(k + 2) = $\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$

1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + k(k + 1)(k + 2) + (k + 1)(k + 2)(k + 3)

$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k + 1)(k + 2)(k + 3)$

$= (k + 1)(k + 2)(k + 3)(\frac{k}{4} + 1)$

$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n ∈ N

เพราะฉะนั้น 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + n(n + 1)(n + 2) = $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ทุกค่า n ∈ N

แบบที่ 2 1·2·3 + 2·3·4 + 3·4·5 + ... + n(n + 1)(n + 2) = $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1)(i + 2) = \sum_{i=1}^{n} (i^3 + 3i^2 + 2i)$

$= \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$

$= (\frac{n(n+1)}{2})^2 + 3(\frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)) + 2(\frac{n}{2}(n + 1))$

$= n(n + 1)(\frac{n(n+1)}{4} + \frac{(2n+1)}{2} + 4)$

$= \frac{n(n+1)}{4}(n(n + 1) + 2(2n + 1) + 4)$

$= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + 5n + 6)$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ □

23. ให้ p เป็นจำนวนเต็มบวก การแสดงว่า

$(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p + 1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p + 2)) + \ldots + (n(n + 1) \ldots (n + p - 1))$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$$

23. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p + 1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p + 2)) + \ldots$

$.. + (n(n + 1) \ldots (n + p - 1)) = \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$

"

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1\cdot2\cdot3 \ldots p = \frac{(1)(1+1)(1+2)\ldots(1+p-1)(1+p)}{p+1}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p + 1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p + 2)) + \ldots$

$.. + (k (k + 1) \ldots (k + p - 1)) = \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1}$

เพราะว่า $(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p + 1)) + \ldots + (k (k + 1) \ldots (k + p - 1))$

$+ ((k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1 + p - 1))$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{p+1} + ((k + 1)(k + 2) \ldots (k + 1 + p - 1))$$

$$= (k + 1)(k + 2) \ldots (k + p)(\frac{k}{p+1} + 1)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)(k+p+1)}{p+1}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(1\cdot2\cdot3 \ldots p) + (2\cdot3\cdot4 \ldots (p + 1)) + (3\cdot4\cdot5 \ldots (p + 2)) + \ldots + (n(n + 1) \ldots (n + p - 1))$

$= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+p)}{p+1}$ ทุกค่า $n \in N$ □

24. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n})$, $n \ge 4$

24. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}$
$= \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n})$ "

(1) การแสดงว่า P(4) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(4-2)(4-1)(4)}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{24}) = \frac{1}{24} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$ เพราะฉะนั้น P(4) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 4$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 4$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(k-3)(k-2)(k-1)k} + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(k-2)(k-1)k}) + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{3(k-2)(k-1)k} + \frac{1}{(k-2)(k-1)k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{18} - (\frac{k+1-3}{3(k-2)(k-1)k(k+1)})$$
$$= \frac{1}{18} - \frac{k-2}{3(k-2)(k-1)k(k+1)}$$
$$= \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(k-1)k(k+1)})$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n})$

หมายเหตุ ผลที่ได้คือ $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{18}$

โดยการจัดรูปพีชคณิต
$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{(\frac{1}{3})}{k(k+1)(k+2)} - \frac{(\frac{1}{3})}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$
$$\frac{3}{k(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

เพราะฉะนั้น
$$\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{2\cdot3\cdot4}$$
$$\frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{3\cdot4\cdot5}$$
$$\frac{3}{3\cdot4\cdot5\cdot6} = \frac{1}{3\cdot4\cdot5} - \frac{1}{4\cdot5\cdot6}$$
$$\vdots$$
$$\frac{3}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{3}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{3}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{1\cdot2\cdot3} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$
$= \frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \ldots + \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{6} - \frac{1}{(n-2)(n-1)n})$

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\frac{4}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}$$

$$\frac{5}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}$$

และเมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\frac{p}{k(k+1)(k+2)...(k+p+1)} = \frac{1}{k(k+1)...(k+p)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)...(k+p+1)}$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + ... + \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{(n-3)(n-2)(n-1)n}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + ... + \frac{1}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot p} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot...(p+1)} + ... + \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)...n}$$

$$= \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n-p+2)(n-p+3)...n}\right)$$

นอกจากนั้นจะได้ว่า

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{4(4!)}$$

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{(n-5)(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{5(5!)}$$

กรณีทั่วไปเมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{(n-p+1)(n-p+2)(n-p+3)...n} = \frac{1}{(p-1)((p-1)!)} \quad \square$$

25. จงแสดงว่า $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}$ + ... + $\frac{1}{(n-2)(n-1)n}$ = $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{(n-1)n})$ ทุกค่า n ≥ 3

25. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}$ + $\frac{1}{2\cdot3\cdot4}$ + ... + $\frac{1}{(n-2)(n-1)n}$ = $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}$ – $\frac{1}{(n-1)n})$ ”

(1) การแสดงว่า P(3) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(3-1)3}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}) = \frac{1}{2}(\frac{2}{6}) = \frac{1}{1\cdot2\cdot3}$ เพราะฉะนั้น P(3) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 3 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 3

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{(k-2)(k-1)k} + \frac{1}{(k-1)(k)(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k-1)k}) + (\frac{1}{(k-1)(k)(k+1)})$$ (เพราะว่า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 3)

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k-1)k} + \frac{1}{(k-1)(k)(k+1)}$$

$$= \frac{1}{4} - (\frac{k+1-2}{2(k-1)k(k+1)})$$

$$= \frac{1}{4} - (\frac{k-1}{2(k-1)(k)(k+1)})$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{k(k+1)})$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n ≥ 3

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n})$

หมายเหตุ $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n})) = \frac{1}{4}$

โดยการจัดรูปพีชคณิต $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(\frac{1}{2})}{k(k+1)} - \frac{(\frac{1}{2})}{(k+1)(k+2)}$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$\frac{2}{1\cdot2\cdot3} = \frac{1}{1\cdot2} - \frac{1}{2\cdot3}$$

$$\frac{2}{2\cdot3\cdot4} = \frac{1}{2\cdot3} - \frac{1}{3\cdot4}$$

$$\frac{2}{3\cdot4\cdot5} = \frac{1}{3\cdot4} - \frac{1}{4\cdot5}$$

$$\vdots$$

$$\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{1\cdot2\cdot3} + \frac{2}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot2\cdot3} + \frac{1}{2\cdot3\cdot4} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n})$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

$$\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}$$
$$\frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}$$
$$\frac{2}{3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{3\cdot 4} - \frac{1}{4\cdot 5}$$
$$\vdots$$
$$\frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{(n-2)(n-1)} - \frac{1}{(n-1)n}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n-1)n}\right)$ □

26. การแสดงว่า $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$

26. แนวคิด แบบที่ 1

ให้ P(n) แทนข้อความ " $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{1+1}}}) &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^4})\\ &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^2})(1+\frac{1}{3^2})\\ &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})\\ &= \frac{3}{2}(\frac{2}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})\\ &= (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3^2})\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^k}}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}})$

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^k}})(1+\frac{1}{3^{2^{k+1}}}) &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{k+1}}})(1+\frac{1}{3^{2^{k+1}}})\\ &= \frac{3}{2}(1-(\frac{1}{3^{2^{k+1}}})^2)\\ &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{(3^{2^{k+1}})^2})\\ &= \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{k+2}}})\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}})$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 เพราะว่า
$$\begin{aligned}(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3}) &= (1-\frac{1}{9})\\ (1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9}) &= (1-\frac{1}{81})\\ (1-\frac{1}{81})(1+\frac{1}{81}) &= (1-\frac{1}{81^2}) = (1-\frac{1}{3^8})\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}&(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})\\ &= (1-\frac{1}{9})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{81})(1+\frac{1}{3^8})\ldots(1+\frac{1}{3^{2^n}})\end{aligned}$$

$$= (1 - \frac{1}{81})(1 + \frac{1}{81})(1 + \frac{1}{3^8}) \ldots (1 + \frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= (1 - \frac{1}{3^8})(1 + \frac{1}{3^8}) \ldots (1 + \frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= \ldots$$

$$= (1 - \frac{1}{3^{2^n}})(1 + \frac{1}{3^{2^n}})$$

$$= 1 - \frac{1}{3^{2^{n+1}}}$$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{81}) \ldots (1 + \frac{1}{3^{2^n}}) = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{2^{n+1}}})$ ทุกค่า $n \in N$ □

27. การแสดงว่า $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ ทุกค่า $n \in N$

27. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1+x^2+2+2x}{(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{2^{1+1}}{1-x^{2^{1+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{1-x^4} = \frac{-(1+x)(1+x^2)+4}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} = \frac{-1-x^2-x-x^3+4}{(1+x)(1-x)(1+x^2)}$$

$$= \frac{-(x^3+x^2+x-3)}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} = \frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1+x)(1-x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)}$$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$

เพราะว่า $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = (\frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}) + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}}$

$$= \frac{1}{x-1} + 2^{k+1}(\frac{1}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{1}{1+x^{2^{k+1}}})$$

$$= \frac{1}{x-1} + 2^{k+1}(\frac{2}{1-(x^{2^{k+1}})^2})$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{(k+1)+1}}{1-x^{2^{(k+1)+1}}}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + ... + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$ ทุกค่า $n \in N$ □

28. จงแสดงว่า $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ทุกค่า $n \in N$

28. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{a(1-r^1)}{1-r} = a$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(1-r^k)}{1-r}$

$$
\begin{aligned}
a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} + ar^k &= \frac{a(1-r^k)}{1-r} + ar^k \\
&= \frac{a(1-r^k)+ar^k(1+r)}{1-r} \\
&= \frac{a-ar^k+ar^k-ar^{k+1}}{1-r} \\
&= \frac{a(1-r^{k+1})}{1-r}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2

$$
\begin{aligned}
s &= a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \\
rs &= a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ar^n \\
s - rs &= a - ar^n \\
(1-r)s &= a(1-r^n) \\
s &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ทุกค่า $n \in N$ □

29. จงแสดงว่า 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n = $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ทุกค่า n $\in$ N

29. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " 1 + x + x^2 + ... + x^n = $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1-x^{1+1}}{1-x} = \frac{1-x^2}{1-x} = \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}$ = 1 + x เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น $1 + x + x^2 + \dots + x^k = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}$

$$
\begin{aligned}
1 + x + x^2 + \dots + x^k + x^{k+1} &= \frac{1-x^{k+1}}{1-x} + x^{k+1} \\
&= \frac{1-x^{k+1} + x^{k+1}(1-x)}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{k+1} + x^{k+1} - x^{(k+1)+1}}{1-x} \\
&= \frac{1-x^{(k+1)+1}}{1-x}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น 1 + x + x^2 + ... + x^n = $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ ทุกค่า n $\in$ N

หมายเหตุ โดยใช้ผลของ a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

จะได้ 1 + x + x^2 + ... + x^n = $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ เหมือนกัน $\square$

30. จงแสดงว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ = n! ทุกค่า n = 1, 2, 3, ...

30. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ = n! "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{dx}{dx}$ = 1 = 1! เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะว่า $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^{k+1}) = \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d}{dx}(x^{k+1})\right)$

$= \frac{d^k}{dx^k}((k+1)x^k)$

$= (k+1)\frac{d^k}{dx^k}(x^k)$

$= (k+1)(k!)$ **(P(k) เป็นจริง** $\Rightarrow \frac{d^k}{dx^k}(x^k) = k!$**)**

$= (k+1)!$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n ∈ N

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x^n)$ = n! ทุกค่า n ∈ N

หมายเหตุ ในทำนองเดียวกันจะได้

1. $\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^n = n!$

2. n เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $f^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}((x-a)^n)$ แล้ว $f^{(k)}(a) = 0$ ทุกค่า k = 0, 1, 2, ... , n − 1

3. $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = n!$

แนวคิด เพราะว่า $(x+c)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}c + \binom{n}{2}x^{n-2}c^2 + \dots + \binom{n}{n}c^n$

เพราะว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}) = 0,\ \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-2}) = 0,\ \dots,\ \frac{d^n}{dx^n}(c^n) = 0$

เพราะฉะนั้น $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = \frac{d^n}{dx^n}\binom{n}{0}x^n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n) = n!$

นอกจากนั้นเรายังได้ว่า $\frac{d^n}{dx^n}(x+c)^n = n!$ □

31. การแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n\right|_{x=c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

31. แนวคิด เมื่อ $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ จะได้ว่า $k \neq 0,\ n-k \neq 0$

$$(x-c)^n = (x-c)^k (x-c)^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n = (x-c)^k \frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k} + (x-c)^{n-k}\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^k$$

$$= (x-c)^k \frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k} + (x-c)^{n-k}(k!)$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^n\right|_{x=c} = (0) + (0)(k!) = 0$

เพราะว่า $\frac{d^0}{dx^0}(x-c)^n = (x-c)^n$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^0}{dx^0}(x-c)^n\right|_{x=c} = 0$ □

32. จงแสดงว่า $\left.\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^n)\right|_{x=c} = 0$ ทุกค่า $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

32. แนวคิด $k = 0$

$$\frac{d^0}{dx^0}(q(x)(x-c)^n) = q(x)(x-c)^n$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^0}{dx^0}(q(x)(x-c)^n)\right|_{x=c} = 0$

เมื่อ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$ เพราะฉะนั้น $k \neq 0,\ n-k \neq 0$

$$q(x)(x-c)^n = q(x)(x-c)^k(x-c)^{n-k}$$

$$\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^n) = (q(x)(x-c)^k)\left(\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k}\right) + ((x-c)^{n-k})\left(\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^k)\right)$$

เพราะฉะนั้น $\left.\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^n)\right|_{x=c}$

$$= q(c)(0)^k\left(\left.\left(\frac{d^k}{dx^k}(x-c)^{n-k}\right)\right|_{x=c}\right) + ((0)^{n-k})\left(\left.\frac{d^k}{dx^k}(q(x)(x-c)^k)\right|_{x=c}\right)$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$ □

33. จงแสดงว่า $2 \mid n(n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

33. แนวคิด ให้ $a_n = n(n + 1)$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 2$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $2 \mid a_n$ ลงตัว "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2$ เพราะฉะนั้น $2 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $2 \mid a_k$

$a_{k+1} = (k + 1)(k + 2) = k(k + 1) + 2(k + 1) = a_k + 2(k + 1)$

เพราะว่า $2 \mid a_k$ และ $2 \mid 2(k + 1)$ เพราะฉะนั้น $2 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $2 \mid n(n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ การใช้เหตุผลที่ง่ายกว่านี้คือ n(n + 1) เป็นจำนวนคู่

เพราะฉะนั้น 2 หาร n(n + 1) ลงตัว ทุกค่า $n \in N$ □

34. จงแสดงว่า $3 \mid n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n \in N$

34. แนวคิด ให้ $a_n = n(n+1)(n+2)$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 6$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $3 \mid n(n+1)(n+2)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 6$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k+1)(k+2)(k+3) - k(k+1)(k+2) \\ &= (k+1)(k+2)((k+3) - k) \\ &= 3(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 3(k+1)(k+2) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 3 \mid a_k$) และ $3 \mid 3(k+1)(k+2)$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $3 \mid n(n+1)(n+2)$ ทุกค่า $n \in N$ □

35. จงแสดงว่า $4 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$

35. แนวคิด ให้ $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 24$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $4 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 24$ เพราะฉะนั้น $4 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k + 1)(k + 2)(k + 3)(k + 4) - k(k + 1)(k + 2)(k + 3) \\ &= (k + 1)(k + 2)(k + 3)((k + 4) - k) \\ &= 4(k + 1)(k + 2)(k + 3) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 4(k + 1)(k + 2)(k + 3) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 4 \mid a_k$) และ $4 \mid 4(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $4 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$ □

36. กำหนดให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $m \mid n(n + 1)(n + 2) \ldots (n + m - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

36. แนวคิด **แบบที่ 1** ให้ $a_n = n(n + 1)(n + 2) \ldots (n + m - 1)$

ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก ให้ P(n) แทนข้อความ “ $m \mid a_n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

$a_1 = (1)(1 + 1)(1 + 2) \ldots (1 + m + 1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m$ เพราะฉะนั้น $m \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2) \ldots ((k + 1) + m - 1) - k(k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1) \\ &= (k + 1)(k + 2)(k + 3) \ldots (k + m) - k(k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1) \\ &= (k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1)((k + m) - k) \\ &= m(k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + m(k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1)$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow m \mid a_k$) และ $m \mid m(k + 1)(k + 2) \ldots (k + m - 1)$ เพราะฉะนั้น $m \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $m \mid n(n + 1)(n + 2) \ldots (n - m + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 เพราะว่า m, m + 1, m + 2, ... , m + m − 1 เป็นจำนวนเต็มที่เรียงค่ากัน n ตัว

เพราะฉะนั้นมีอย่างน้อยหนึ่งตัวจาก m, m + 1, m + 2, ... , m + m − 1 ที่หารด้วย n ลงตัว

เพราะฉะนั้น $n \mid (m(m + 1)(m + 2) \ldots (m + n - 1))$

แบบที่ 3 สมมติ ไม่มี $t \in \{0, 1, 2, \ldots , n - 1\}$ ที่ทำให้ $n \mid (n + t)$ ... (1)

ให้ $C_i = \{x \mid x \equiv i \pmod n\}$, i = 0, 1, 2, ... , n − 1

เพราะฉะนั้นเซตจำนวนเต็ม = $C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{n-1}$

เพราะฉะนั้น $0, 1, 2, \ldots , n - 1 \in C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{n-1}$

จาก (1) จะได้ $0, 1, 2, \ldots , n - 1 \notin C_0$ เพราะฉะนั้น $0, 1, 2, \ldots , n - 1 \in C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_{n-1}$

ให้ 0, 1, 2, ... , n − 1 เป็นนก n ตัวและ $C_1, C_2, \ldots , C_{n-1}$ เป็นรังนก n − 1 รังซึ่งน้อยกว่าจำนวนนก

โดยหลักรังนกพิราบจะมี $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots , n - 1\}$ และ C_k ที่ทำให้ $n + i, n + j \in C_k$

โดยไม่สูญเสียสาระสำคัญของกรณีทั่วไปเราสามารถสมมติให้ $i < j$

เพราะว่า $i < j$ เพราะฉะนั้น $0 < j - i$ ... (2)

เพราะฉะนั้น $n + i \equiv k \pmod n$ และ $n + j \equiv k$ (mog n)

เพราะฉะนั้น $(n + j) - (n + i) \equiv 0 \pmod n$ เพราะฉะนั้น $j - i \equiv 0 \pmod n$ เพราะฉะนั้น $n \mid (j - i)$ ... (3)

จาก (2) และ (3) จะได้ $n \leq j - i$ ... (4)

เพราะว่า $i, j \in \{0, 1, 2, \ldots , n - 1\}$ และ $i < j$ เพราะฉะนั้น $1 \leq j - i \leq n - 1$ ... (5)

เพราะฉะนั้น (4) และ (5) ขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้นที่สมมติ (1) ไม่มี $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ที่ทำให้ $n \mid (n + t)$ ไม่จริง

เพราะฉะนั้น มี $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ ที่ทำให้ $n \mid (n + t)$

เพราะฉะนั้น $n \mid (m(m + 1)(m + 2) \dots (m + n - 1))$ $\square$

37. จงแสดงว่า $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

37. แนวคิด จากข้อ 34 จะได้ 3 หารผลคูณของจำนวนเต็มบวกสามตัวเรียงกันได้เสมอ
เพราะว่า $(n^3 - n) = (n - 1)n(n + 1)$ เป็นผลคูณของจำนวนเต็มบวกสามตัวเรียงกัน
เพราะฉะนั้น $3 \mid (n^3 - n)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

38. จงแสดงว่า $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

38. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_n = n^5 - n$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 0$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $5 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $5 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= ((k+1)^5 - (k+1)) - (k^5 - k) \\ &= (k+1)^5 - k^5 - 1 \\ &= (k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) - k^5 - 1 \\ &= 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k \\ &= 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 5 \mid a_k$) และ $5 \mid 5(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$ เพราะฉะนั้น $5 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2
$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n+1)(n-1)(n^2 + 1) \\ &= (n-1)\, n(n+1)(n^2 + 1) \end{aligned}$$

กรณีที่ 1 เมื่อหลักหน่วยของ n เป็น 0, 1, 4, 5, 6 หรือ 9 จะได้ $5 \mid (n-1)n(n+1)$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^5 - n)$

กรณีที่ 2 เมื่อหลักหน่วยของ n เป็น 2, 3, 7 หรือ 8 จะได้หลักหน่วยของ n^2 เป็น 4 หรือ 9

เพราะฉะนั้นหลักหน่วยของ $n^2 + 1$ ต้องเป็น 5 หรือ 0

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^2 + 1)$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^5 - n)$

แบบที่ 3 $n^5 - n = (n-1)(n+1)(n^2 + 1)$

$n \equiv 0 \pmod 5 \quad \Rightarrow n^5 - n \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

$n \equiv 1 \pmod 5 \quad \Rightarrow n - 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow (n-1)(n+1)(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

$n \equiv 2 \pmod 5 \quad \Rightarrow n^2 \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow (n-1)(n+1)(n^2 + 1) \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

$n \equiv 3 \pmod 5$ $\Rightarrow n^2 \equiv 9 \pmod 5 \Rightarrow n^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow (n-1)(n+1)(n^2+1) \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

$n \equiv 4 \pmod 5$ $\Rightarrow n^2 \equiv 16 \pmod 5 \Rightarrow n^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow (n-1)(n+1)(n^2+1) \equiv 0 \pmod 5$

$\Rightarrow 5 \mid (n^5 - n)$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (n^5 - n)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

39. จงแสดงว่า $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

39. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_n = n^7 - n$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 0$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $7 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= ((k + 1)^7 - (k + 1)) - (k^7 - k) \\ &= (k + 1)^7 - k^7 - 1 \\ &= (k^7 + 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k + 1) - k^7 - 1 \\ &= 7k^6 + 21k^5 + 35k^4 + 35k^3 + 21k^2 + 7k \\ &= 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 7 \mid a_k$) และ $7 \mid 7(k^6 + 3k^5 + 5k^4 + 5k^3 + 3k^2 + k)$

เพราะฉะนั้น $7 \mid a_{k+1}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2
$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) \\ &= n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \\ &= n(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) \end{aligned}$$

จำแนกกรณีตามเศษเหลือจากการหาร n ด้วย 7

$n \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow n - 1 \equiv 0 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n - 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 2 \pmod 7 \Rightarrow n^2 + n + 1 \equiv 4 + 2 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n^2 + n + 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 3 \pmod 7 \Rightarrow n^2 - n + 1 \equiv 9 - 3 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n^2 - n + 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 4 \pmod 7 \Rightarrow n^2 + n + 1 \equiv 16 + 4 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n^2 + n + 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 5 \pmod 7 \Rightarrow n^2 - n + 1 \equiv 25 - 5 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n^2 - n + 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

$n \equiv 6 \pmod 7 \Rightarrow n + 1 \equiv 6 + 1 \pmod 7 \Rightarrow 7 \mid (n + 1) \Rightarrow 7 \mid (n^7 - n)$

เพราะฉะนั้น $7 \mid (n^7 - n)$ ทุกค่า $n \in N$ □

40. จงแสดงว่า $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$

40. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_n = n^{11} - n$ เพราะฉะนั้น $a_1 = 0$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $11 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น $11 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$a_{k+1} - a_k = ((k + 1)^{11} - (k + 1)) - (k^{11} - k)$

$= (k + 1)^{11} - k^{11} - 1$

$= k^{11} + 11k^{10} + 55k^9 + 165k^8 + 330k^7 + 462k^6 + 462k^5 + 330k^4 + 165k^3$

$+ 55k^2 + 11k + 1 - k^{11} - 1$

$= 11k^{10} + 55k^9 + 165k^8 + 330k^7 + 462k^6 + 462k^5 + 330k^4 + 165k^3 + 55k^2 + 11k$

$= 11(k^{10} + 5k^9 + 15k^8 + 30k^7 + 42k^6 + 42k^5 + 30k^4 + 15k^3 + 5k^2 + k)$

เพราะฉะนั้น

$a_{k+1} = 11(k^{10} + 5k^9 + 15k^8 + 30k^7 + 42k^6 + 42k^5 + 30k^4 + 15k^3 + 5k^2 + k) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 11 \mid a_k$)

และ $11 \mid 11(k^{10} + 5k^9 + 15k^8 + 30k^7 + 42k^6 + 42k^5 + 30k^4 + 15k^3 + 5k^2 + k)$

เพราะฉะนั้น $11 \mid a_{k+1}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 โดย Fermat's Theorem

p เป็นจำนวนเฉพาะและ a เป็นจำนวนเต็มบวกและ $p \nmid a$ จะได้ $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

เพราะฉะนั้น $a^p \equiv a \pmod{p}$ เพราะฉะนั้น $p \mid (a^p - a)$

เพราะฉะนั้น $p \mid (n^p - n)$ ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $11 \mid (n^{11} - n)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

41. จงแสดงว่า $3 \mid n(n^2 + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

41. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_n = n(n^2 + 2)$

ให้ P(n) แทนข้อความ “ $3 \mid a_n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (1)(1^2 + 2) = 3$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k + 1)((k + 1)^2 + 2) - k(k^2 + 2) \\ &= (k + 1)^3 + 2(k + 1) - k^3 - 2k \\ &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 2 - k^3 \\ &= 3k^2 + 3k + 3 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + 3(k^2 + k + 1)$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 3 \mid a_k$) และ $3 \mid (3(k^2 + k + 1))$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $3 \mid n(n^2 + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2 $n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow n^7 - n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid n(n^2 + 2)$

$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow n^2 + 2 \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (n^2 + 2) \Rightarrow 3 \mid n(n^2 + 2)$

$n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow n^2 \equiv 4 \pmod 3 \Rightarrow n^2 + 2 \equiv 6 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (n^2 + 2) \Rightarrow 3 \mid n(n^2 + 2)$ ☐

42. จงแสดงว่า $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$ ทุกค่า $n \in N$

42. แนวคิด ให้ $a_n = (2n-1)((2n-1)^2-1)$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $24 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (1)(1^2-1) = 0$ เพราะฉะนั้น $3 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (2(k+1)-1)((2(k+1)-1)^2-1) - (2k-1)((2k-1)^2-1) \\ &= (2k+1)((2k+1)^2-1) - (2k-1)((2k-1)^2-1) \\ &= (2k+1)^3 - (2k+1) - (2k-1)^3 + (2k-1) \\ &= (2k+1)^3 - (2k-1)^3 - 2 \\ &= (8k^3+12k^2+6k+1) - (8k^3-12k^2+6k-1) - 2 \\ &= 24k^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + 24k^2$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 24 \mid a_k$) และ $24 \mid (24k^2)$ เพราะฉะนั้น $24 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $24 \mid (2n-1)((2n-1)^2-1)$, n = 1, 2, 3, …

มีความหมายเทียบเท่ากับ $24 \mid m(m^2-1)$ เมื่อ m เป็นเลขคี่, m = 1, 2, 3, … □

43. จงแสดงว่า $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

43. แนวคิด ให้ $a_n = n(n + 1)(2n + 1)$

ให้ P(n) แทนข้อความ “ $6 \mid a_n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (1)(2)(3) = 6$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k + 1)((k + 1) + 1)(2(k + 1) + 1) - k(k + 1)(2k + 1) \\ &= (k + 1)(k + 2)(2k + 3) - k(k + 1)(2k + 1) \\ &= (k + 1)((k + 2)(2k + 3) - k(2k + 1)) \\ &= (k + 1)(2k^2 + 7k + 6 - 2k^2 - k) \\ &= (k + 1)(6k + 6) \\ &= 6(k + 1)^2 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + 6(k + 1)^2$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 6 \mid a_k$) และ $6 \mid (6(k + 1)^2)$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เพราะว่า n(n + 1) เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น $2 \mid n(n + 1)$

$n \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(n + 1)(2n + 1)$

$n \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 2n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow 2n + 1 \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (2n + 1) \Rightarrow 3 \mid n(n + 1)(2n + 1)$

$n \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow n + 1 \equiv 3 \pmod 3 \Rightarrow 3 \mid (n + 1) \Rightarrow 3 \mid n(n + 1)(2n + 1)$

เพราะฉะนั้น $3 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, ...

เพราะว่า gcd(2, 3) = 1 และ $3 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ และ $2 \mid n(n + 1)$

เพราะฉะนั้น $6 \mid n(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

44. จงแสดงว่า $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกจำนวนเฉพาะ p และ r = 1, 2, …, p − 1

44. แนวคิด ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ $\binom{p}{r} = \frac{p!}{r!(p-r)!} = \frac{(r+1)(r+2)\ldots(p-1)\,p!}{(p-r)!}$

เพราะว่า $r \neq 0$ และ $r \neq p$ เพราะฉะนั้นไม่มีจำนวนเต็มใดในตัวประกอบของ $(p - r)!$ ที่จะไปหาร p ได้ลงตัว

เพราะฉะนั้น p หาร $\binom{p}{r}$ ลงตัวเสมอ $\square$

45. กำหนด p เป็นจำนวนเฉพาะ จงแสดงว่า $p \mid (n^p - n)$ ทุกค่า $n \in N$

45. แนวคิด ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะ P(n) แทนข้อความ “ $p \mid (n^p - n)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1^p - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น $p \mid (1^p - 1)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $k \mid (k^p - k)$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}(k+1)^p - (k+1) &= \sum_{r=0}^{p} \binom{p}{r} k^{p-r} - k - 1 \\ &= k^p + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r} + 1 - k - 1 \\ &= (k^p - k) + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r}\end{aligned}$$

และ $p \mid \binom{p}{r}$ ทุกค่า r = 1, 2, 3, …, p − 1

เพราะฉะนั้น $p \mid \left((k^p - k) + \sum_{r=1}^{p-1} \binom{p}{r} k^{p-r}\right)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $p \mid n^p - n$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ โดย Fermat Theorem จะได้ $a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p)$ เพราะฉะนั้น $p \mid (a^{p-1} - 1)$

เพราะฉะนั้น $p \mid (a^p - a)$ เพราะฉะนั้น $p \mid (n^p - n)$ ทุกค่า $n \in N$ □

46. จงแสดงว่า $35 \mid (3^{6n} - 2^{6n})$ ทุกค่า $n \in N$

46. แนวคิด ให้ $a_n = 3^{6n} - 2^{6n}$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $35 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 3^6 - 2^6 = 729 - 64 = 665 = 35(19)$ เพราะฉะนั้น $35 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$
\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= (3^{6(k+1)} - 2^{6(k+1)}) - (3^{6k} - 2^{6k}) \\
&= (3^{6(k+1)} - 3^{6k}) - (2^{6(k+1)} - 2^{6k}) \\
&= 3^{6k}(3^6 - 1) - 2^{6k}(2^6 - 1) \\
&= 3^{6k}(729 - 1) - 2^{6k}(64 - 1) \\
&= 3^{6k}(728) - 2^{6k}(63) \\
&= 3^{6k}(665) + 3^{6k}(63) - 2^{6k}(63) \\
&= 3^{6k}(35)(19) + 63(3^{6k} - 2^{6k}) \\
&= 3^{6k}(35)(19) + 63a_k
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 3^{6k}(35)(19) + 64a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 35 \mid a_k$) และ $35 \mid (3^{6k}(35)(19))$ เพราะฉะนั้น $35 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $35 \mid (3^{6n} - 2^{6n})$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

47. จงแสดงว่า $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$ ทุกค่า $n \in N$

47. แนวคิด ให้ $a_n = 2^{4n+1} - 2$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $30 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2^5 - 2 = 32 - 2 = 30$ เพราะฉะนั้น $30 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (2^{4(k+1)+1} - 2) - (2^{4k+1} - 2) \\ &= 2^{4k+5} - 2^{4k+1} \\ &= 2^{4k+1}(2^4 - 1) \\ &= 2^{4k+1}(15) \\ &= 2^{4k}(30) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 2^{4k}(30) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 30 \mid a_k$) และ $30 \mid (2^{4k}(30))$ เพราะฉะนั้น $30 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $30 \mid (2^{4n+1} - 2)$ ทุกค่า $n \in N$ □

48. จงแสดงว่า $20 \mid (11^{2n} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

48. แนวคิด ให้ $a_n = 11^{2n} - 1$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $20 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 11^2 - 1 = 120$ เพราะฉะนั้น $20 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (11^{2(k+1)} - 1) - (11^{2k} - 1) \\ &= 11^{2(k+1)} - 11^{2k} \\ &= 11^{2k}(121 - 1) \\ &= 11^{2k}(120) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 11^{2k}(120) + a_k$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 20 \mid a_k$) และ $20 \mid (11^{2k}(120))$) เพราะฉะนั้น $20 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $20 \mid (11^{2n} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

49. จงแสดงว่า $8 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$

49. แนวคิด ให้ $a_n = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $8 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (1)(2)(3)(4) = 8$ เพราะฉะนั้น $8 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (k + 1)((k + 1) + 1)((k + 1) + 2)((k + 1) + 3) - k(k + 1)(k + 2)(k + 3) \\ &= (k + 1)(k + 2)(k + 3)(k + 4) - k(k + 1)(k + 2)(k + 3) \\ &= (k + 1)(k + 2)(k + 3)((k + 4) - k) \\ &= 4(k + 1)(k + 2)(k + 3) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + 4(k + 1)(k + 2)(k + 3)$

เพราะว่า $(k + 1)(k + 2)(k + 3)$ เป็นเลขคู่ เพราะฉะนั้น $2 \mid ((k + 1)(k + 2)(k + 3))$

เพราะฉะนั้น $8 \mid (4(k + 1)(k + 2)(k + 3))$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 8 \mid a_k$) และ $8 \mid (4(k + 1)(k + 2)(k + 3))$ เพราะฉะนั้น $8 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $8 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $8 \mid n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายความว่าผลคูณของจำนวนเต็มบวก 4 ตัวที่เรียงกันต้องหารด้วย 8 ลงตัว □

50. จงแสดงว่า $120 \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ ทุกค่า $n \in N$

50. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ $a_n = n^5 - 5n^3 + 4n$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $120 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 1 - 5 + 4 = 0$ เพราะฉะนั้น $120 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

$$a_{k+1} - a_k = ((k+1)^5 - 5(k+1)^3 + 4(k+1)) - (k^5 - 5k^3 + 4k)$$
$$= k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k - 5(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 4 - k^5 + 5k^3$$
$$= 5(k-1)k(k+1)(k+2)$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + 5(k-1)k(k+1)(k+2)$

เพราะว่า $4! \mid ((k-1)k(k+1)(k+2))$ เพราะฉะนั้น $120 \mid (5(k-1)k(k+1)(k+2))$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 120 \mid a_k$) และ $120 \mid (5(k-1)k(k+1)(k+2))$ เพราะฉะนั้น $120 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $5! \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

เพราะว่า n − 2, n − 1, n, n + 1, n + 2 เป็นจำนวนเต็ม 5 ตัวที่เรียงค่ากัน

เพราะฉะนั้น $5! \mid ((n-2)(n-1)n(n+1)(n+2))$

เพราะฉะนั้น 5! หารผลคูณของจำนวนเต็ม 5 ตัวที่เรียงค่ากัน

แบบที่ 2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ให้ $f(n) = n^5 - 5n^3 + 4n$

เพราะว่า f(0) = 0, f(1) = 0, f(−1) = 0, f(−2) = 0, f(2) = 0

เพราะฉะนั้น $n^5 - 5n^3 + 4n = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

เพราะว่า $5 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, $8 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$, $3 \mid n(n+1)(n+2)$

และ 5, 8, 3 ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน เพราะฉะนั้น $(5)(8)(3) \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

เพราะฉะนั้น $120 \mid (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$

เพราะฉะนั้น $5! \mid (n^5 - 5n^3 + 4n)$ ทุกค่า $n \in N$ □

51. จงแสดงว่า $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

51. แนวคิด ให้ $a_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

ให้ P(n) แทนข้อความ " $7 \mid a_n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 35$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= (3^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+2}) - (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \\ &= 3^{2k+1}(3^2 - 1) + 2^{k+2}(2^1 - 1) \\ &= 3^{2k+1}(8) + 2^{k+2} \\ &= 3^{2k+1}(7) + (3^{2k+1} + 2^{k+2}) \\ &= 3^{2k+1}(7) + a_k \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 2a_k + 3^{2k+1}(7)$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 7 \mid a_k$) และ $7 \mid (3^{2k+1}(7))$ เพราะฉะนั้น $7 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $7 \mid (3^{2n+1} + 2^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$ □

52. จงแสดงว่า $6 \mid (n(n^2 + 5))$ ทุกค่า $n \in N$

52. แนวคิด ให้ $a_n = n(n^2 + 5)$

ให้ P(n) แทนข้อความ “ $6 \mid a_n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 6$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= ((k + 1)((k + 1)^2 + 5) - k(k^2 + 5) \\ &= (k + 1)^3 + 5k + 5 - k^3 - 5k \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5 - k^3 \\ &= 3(k^2 + k) + 6 \\ &= 3k(k + 1) + 6 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = a_k + (3k(k + 1) + 6)$

เพราะว่า k(k + 1) เป็นเลขคู่และ gcd(3, 2) = 1 เพราะฉะนั้น $2 \mid k(k + 1)$

เพราะฉะนั้น $6 \mid (3k(k + 1))$ เพราะฉะนั้น $6 \mid (3k(k + 1) + 6)$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 6 \mid a_k$) และ $6 \mid (3k(k + 1) + 6)$ เพราะฉะนั้น $6 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $6 \mid (n(n^2 + 5))$ ทุกค่า $n \in N$ □

53. จงแสดงว่า $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$

53. แนวคิด ให้ $a_n = 2^{2n-1} + 3^{2n-1}$

ให้ P(n) แทนข้อความ “ $5 \mid a_n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 5$ เพราะฉะนั้น $5 \mid a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} - a_k &= (2^{2(k+1)-1} + 3^{2(k+1)-1}) - (2^{2k-1} + 3^{2k-1}) \\
&= 2^{2k-1}(2^2 - 1) + 3^{2k-1}(3^2 - 1) \\
&= 2^{2k-1}(3) + 3^{2k-1}(8) \\
&= 2^{2k-1}(3) + 3^{2k-1}(3) + 3^{2k-1}(5) \\
&= 3(2^{2k-1} + 3^{2k-1}) + 3^{2k-1}(5) \\
&= 3a_k + 3^{2k-1}(5)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 4a_k + 3^{2k-1}(5)$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 5 \mid a_k$) และ $5 \mid (3^{2k-1}(5))$ เพราะฉะนั้น $5 \mid a_{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $5 \mid (2^{2n-1} + 3^{2n-1})$ ทุกค่า $n \in N$ □

54. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ k เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

จงแสดงว่า $\frac{n}{2}(n+1) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k)$

54. แนวคิด ให้ $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots n^k$ และ k เป็นเลขคี่

กรณีที่ 1 n เป็นเลขคู่ ให้ n = 2m เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}(n+1) = m(2m+1)$

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (m-1)^k + m^k + (m+1)^k + (m+2)^k + \ldots + (2m-1)^k + (2m)^k$

$S_k = ((2m)^k + 1^k) + ((2m-1)^k + 2^k) + \ldots + ((m+2)^k + (m-1)^k) + ((m+1)^k + m^k)$

เพราะว่า k เป็นเลขคี่ เพราะฉะนั้น $(a+b) \mid (a^k + b^k)$

เพราะฉะนั้น $(2m+1) \mid ((2m)^k + 1^k)$

$((2m-1)+2) \mid ((2m-1)^k + 2^k) \Rightarrow (2m+1) \mid ((2m-1)^k + 2^k)$

:

$((m+2)+(m-1)) \mid ((m+2)^k + (m-1)^k) \Rightarrow (2m+1) \mid ((m+2)^k + (m-1)^k)$

$((m+1+m) \mid ((m+1)^k + m^k) \Rightarrow (2m+1) \mid ((m+1)^k + m^k)$

เพราะฉะนั้น $(2m+1) \mid S_k$

$S_k = (1^k + (2m-1)^k) + (2^k + (2m-2)^k) + \ldots + ((m-1)^k + (m+1)^k) + m^k + (2m)^k$

เพราะว่า $(1+(m-1)) \mid (1^k + (m-1)^k) \quad \Rightarrow 2m \mid (1^k + (2m-1)^k)$

$(2+(2m-2)) \mid (2^k + (2m-2)^k) \quad \Rightarrow 2m \mid (2^k + (2m-2)^k)$

:

$((m-1)+(m+1) \mid ((m-1)^k + (m+1)^k) \quad \Rightarrow 2m \mid ((m-1)^k + (m+1)^k)$

$m \mid m^k$

$m \mid (2m)^k$

เพราะฉะนั้น $m \mid S_k$

เพราะว่า gcd(m, 2m + 1) = 1 และ $m \mid S_k$ และ $(2m+1) \mid S_k$ เพราะฉะนั้น $m(2m+1) \mid S_k$

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}(n+1) \mid S_k$

กรณีที่ 2 n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ ให้ n = 2m − 1 เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}(n+1) = m(2m-1)$

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$

$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (m-1)^k + m^k + (m+1)^k + \ldots + (2m-2)^k + (2m-1)^k$

$= (1^k + (2m-1)^k) + (2^k + (2m-2)^k) + \ldots + ((m-1)^k + (m+1))^k + m^k$

เพราะว่า $(1+(2m-1)) \mid (1^k + n^k) \Rightarrow 2m \mid (1^k + n^k) \Rightarrow m \mid (1^k + n^k)$

$(2+(2m-2)) \mid (2^k + (2m-1)^k) \Rightarrow 2m \mid (2^k + (2m-1)^k) \Rightarrow m \mid (2^k + (2m-1)^k)$

:

$((m-1)+(m+1)) \mid ((m-1)^k + (m+1)^k) \Rightarrow 2m \mid ((m-1)^k + (m+1)^k)$

$\Rightarrow m \mid ((m-1)^k + (m+1))^k$

$m \mid m^k$

เพราะฉะนั้น $m \mid S_k$

$S_k = 1^k + 2^k + ... + 3^k + \ldots + (m-1)^k + m^k + ... + (2m-3)^k + (2m-2)^k + (2m-1)^k$

$= (1^k + (2m-2)^k) + (2^k + (2m-3)^k) + \ldots + ((m-1)^k + m^k) + (2m-1)^k$

เพราะว่า $(1 + (2m-2)) \mid (1^k + (2m-2)^k) \Rightarrow (2m-1) \mid (1^k + (2m-2)^k)$

$((2 + (2m-3)) \mid (2^k + (2m-3)^k) \Rightarrow (2m-1) \mid (2^k + (2m-3)^k)$

$\vdots$

$((m-1) + (m)) \mid ((m-1)^k + m^k) \Rightarrow (2m-1) \mid ((m-1)^k + m^k)$

$(2m-1) \mid (2m-1)^k$

เพราะฉะนั้น $(2m-1) \mid S_k$

เพราะว่า $\gcd(m, 2m-1) = 1$ และ $m \mid S_k$ และ $(2m-1) \mid S_k$ เพราะฉะนั้น $m(2m-1) \mid S_k$

เพราะฉะนั้น $\frac{n}{2}(n+1) \mid S_k$

เพราะฉะนั้นจากกรณี 1 และ 2 จะได้ $(\frac{n}{2}(n+1)) \mid (1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k)$ $\square$

55. จงแสดงว่า ทุกจำนวนจริง a $\geq$ 2 จะได้ $a^n > n$ ทุกค่า $n \in N$

55. แนวคิด กำหนด a $\geq$ 2 และ P(n) แทนข้อความ " $a^n > n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า a $\geq$ 2 เพราะฉะนั้น $a^1 \geq 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะว่า $a^{k+1} = a^k a$

$> ka$ (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow a^k > k$)

$\geq k(2)$ (เพราะว่า $a \geq 2$)

$= k(1 + 1)$

$> k(1 + \frac{1}{k})$ (เพราะว่า $k \geq 1 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{k}$)

$= k + 1$

เพราะฉะนั้น $a^{k+1} > k + 1$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้นทุกจำนวนจริง a $\geq$ 2 จะได้ $a^n > n$ ทุกค่า $n \in N$ □

56. จงแสดงว่า $3^n \geq 1 + 2n$ ทุกค่า $n \in N$

56. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $3^n \geq 1 + 2n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $3^1 = 3 \geq 1 + 2(1)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$3^{k+1} = 3^k 3$

$\geq (1 + 2k)(3)$ (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 3^k \geq 1 + 2k$)

$= 3 + 6k$

$> 3 + 2k$ (เพราะว่า $6k > 2k$)

$= 3 + 2k$

$= 1 + 2k + 2$

$= 1 + 2(k + 1)$

เพราะฉะนั้น $3^{k+1} \geq 1 + 2(k + 1)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $3^n \geq 1 + 2n$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

57. ให้ m เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $1 + \frac{n}{m} \le (1 + \frac{1}{m})^n$ ทุกค่า $n \in N$

57. แนวคิด แบบที่ 1 ให้ P(n) แทนข้อความ “ $1 + \frac{n}{m} \le (1 + \frac{1}{m})^n$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 + \frac{1}{m} \le (1 + \frac{1}{m})^1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

$$\begin{aligned}(1 + \tfrac{1}{m})^{k+1} &= (1 + \tfrac{1}{m})(1 + \tfrac{1}{m})^k \\ &\ge (1 + \tfrac{1}{m})(1 + \tfrac{k}{m}) && (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow (1 + \tfrac{1}{m})^k \ge 1 + \tfrac{k}{m}) \\ &= 1 + \tfrac{k}{m} + \tfrac{1}{m} + \tfrac{k}{m^2} \\ &= 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{k}{m^2} \\ &> 1 + \tfrac{k+1}{m} && (\tfrac{k}{m^2} \ge 0)\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $1 + \frac{k+1}{m} < (1 + \frac{1}{m})^{k+1}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + \frac{n}{m} < (1 + \frac{1}{m})^n$ ทุกค่า $n \in N$

แบบที่ 2

$$\begin{aligned}(1 + \tfrac{1}{m})^n &= 1 + \binom{n}{1}(\tfrac{1}{m})^1 + \binom{n}{2}(\tfrac{1}{m})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{m})^n \\ &> 1 + \binom{n}{1}(\tfrac{1}{m}) && (\binom{n}{2}(\tfrac{1}{m})^2 + \ldots + (\tfrac{1}{m})^n \ge 0) \\ &= 1 + \tfrac{n}{m}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{m})^n > 1 + \frac{n}{m}$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, … และ $m > 0$ □

58. ให้ m เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, ... , m

58. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ "

เพราะว่า $(1 + \frac{1}{m})^1 = 1 + \frac{1}{m} < 1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \in \{1, 2, 3, \dots, m - 1\}$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{m})^k < 1 + \frac{k}{m} + \frac{k^2}{m^2}$ ... (1)

$$\begin{aligned}(1 + \tfrac{1}{m})^{k+1} &= (1 + \tfrac{1}{m})(1 + \tfrac{1}{m})^k \\ &< (1 + \tfrac{1}{m})(1 + \tfrac{k}{m} + \tfrac{k^2}{m^2}) \qquad \text{(จาก (1))} \\ &= 1 + \tfrac{k}{m} + \tfrac{k^2}{m^2} + \tfrac{1}{m} + \tfrac{k}{m^2} + \tfrac{k^2}{m^3} \\ &= 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{k^2+k}{m^2} + \tfrac{k^2}{m^3}\end{aligned}$$

$0 < k \le m \Rightarrow k^2 \le (k + 1)m \Rightarrow \frac{k^2}{m} \le k + 1 \Rightarrow \frac{k^2}{m^3} \le \frac{k+1}{m^2}$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}(1 + \tfrac{1}{m})^{k+1} &= 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{k^2+k}{m^2} + \tfrac{k^2}{m^3} \\ &\le 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{k^2+k}{m^2} + \tfrac{k+1}{m^2} \\ &= 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{k^2+2k+1}{m^2} \\ &= 1 + \tfrac{k+1}{m} + \tfrac{(k+1)^2}{m^2}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{m})^{k+1} \le 1 + \frac{k+1}{m} + \frac{(k+1)^2}{m^2}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, ... , m

หมายเหตุ m = 2 และ n = 7 จะได้

$(1 + \frac{1}{m})^n = (1 + \frac{1}{2})^7 = \frac{2187}{128} = 17.086$ และ $1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2} = 1 + \frac{7}{2} + \frac{49}{4} = \frac{76}{4} = 16.75$

เพราะฉะนั้นมีกรณีที่ $(1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ ไม่จริงเมื่อ n > m □

59. จงแสดงว่า $2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 3$ ทุกค่า $n \in N$

59. แนวคิด จากข้อ 57 และ 58 จะได้ $1 + \frac{n}{m} \le (1 + \frac{1}{m})^n < 1 + \frac{n}{m} + \frac{n^2}{m^2}$ ทุกค่า n = 1, 2, ... , m

แทนค่า n = m จะได้ $1 + \frac{n}{n} \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 1 + \frac{n}{n} + \frac{n^2}{m^2}$

$$2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 1 + 1 + 1$$

$$2 \le (1 + \frac{1}{n})^n \le 3$$

หมายเหตุ n = 2, 3, 4, ... จะได้ $2 < (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

เพราะฉะนั้น $2 < \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n < 3$

และเมื่อหาค่าลิมิตแท้จริงจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.71828$ □

60. จงแสดงว่า n! > $(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \in N$

60. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " n! > $(\frac{n}{e})^n$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 > \frac{1}{e} = (\frac{1}{e})^1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะว่า $(1 + \frac{1}{k+1})^{k+1} > (1 + \frac{1}{k})^k$ ... (1)

หมายเหตุ ดูการพิสูจน์ (1) ในหนังสือคณิตศาสตร์ปรนัย เล่มที่ 29 โลกอสมการ หน้า 138

และ $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$ เพราะฉะนั้น $e > (1 + \frac{1}{k})^k$ เพราะฉะนั้น $\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k} > 1$ ... (2)

เพราะว่า (k + 1)! = (k + 1)k!

$> (k + 1)(\frac{k}{e})^k$ (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow k! > (\frac{k}{e})^k$)

$= (\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{k^k e}{(k+1)^k})$

$= (\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k})$

$> (\frac{k+1}{e})^{k+1}(1)$ (จาก (2))

เพราะฉะนั้น $(k + 1)! > (\frac{k+1}{e})^{k+1}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(\frac{n}{e})^n < n!$ ทุกค่า $n \in N$ □

61. จงแสดงว่า $n! < (\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \in N$

61. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $n! < (\frac{n}{e})^n$ ”

(1) จงแสดงว่า P(7) เป็นจริง

เพราะว่า $\ell n(6!) = \ell n(720) = 6.58$

$$\ell n(\frac{7}{e})^7 = 7(\ell n 7 - \ell n e) = 7(\ell n 7 - 1) = 6.62$$

เพราะฉะนั้น $\ell n(6!) < \ell n(\frac{7}{e})^7$

$$6! < (\frac{7}{e})^7$$

$$7! < 7(\frac{7}{e})^7$$

เพราะฉะนั้น P(7) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $k! < k(\frac{k}{e})^k$ ... (1)

หมายเหตุ $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ มี $f'(x) = \frac{x\ell n(1+\frac{1}{x}) - 1}{x}(1 + \frac{1}{x})^{x+1} = (\ell n(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$

เพราะฉะนั้น $f'(x) < 0$ ทุกค่า $x > 1$ เพราะฉะนั้น f เป็นฟังกชันลดแท้ เมื่อ $x \ge 2$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$ ทุกค่า n

เพราะว่า $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$ และ $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > (1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}$ ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(1 + \frac{1}{n})^{n+1} > e$ ทุกค่า n เพราะฉะนั้น $\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}} < 1$ ทุกค่า $n \in N$ ... (2)

$$\begin{aligned}
(k + 1)! &= (k + 1)(k!) \\
&< (k + 1)(k(\frac{k}{e})^k) \\
&= (k + 1)\frac{(k+1)^{k+1}k^{k+1}e}{e^{k+1}(k+1)^{k+1}} \\
&= (k + 1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}\frac{k^{k+1}e}{(k+1)^{k+1}} \\
&= (k + 1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}(\frac{e}{(1+\frac{1}{k})^{k+1}}) \\
&< (k + 1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}(1) \qquad \text{(จาก (2))}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $(k + 1)! < (k + 1)(\frac{k+1}{e})^{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \ge 7$

เพราะฉะนั้น $n! < n(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \ge 7$ □

62. การแสดงว่า $(\frac{n}{e})^n < n! < n(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \geq 7$

62. แนวคิด จากข้อ 60 $n! > (\frac{n}{e})^n$ และจากข้อ 61 $n! < n(\frac{n}{e})^n$ เมื่อ $n \geq 7$

เพราะฉะนั้น $(\frac{n}{e})^n < n! < n(\frac{n}{e})^n$ ทุกค่า $n \geq 7$ $\square$

63. จงแสดงว่า $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า n $\in$ N

63. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ "

(1) จงแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{3(2)+1}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$ = 0.38 และ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ = 0.375 เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{3(2)+1}}$

เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะฉะนั้น $$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2k-1)}{2k} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{(2k-1)}{2k}\ \frac{(2(k+1)-1)}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{3k+1}}\left(\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}\right) = \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{(2k-1)}{2k}\ \frac{(2k+1)}{2(k+1)} < \frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} \qquad \ldots (1)$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}}\right)^2 &= \frac{(2k+1)^2}{(2k+2)^2(3k+1)} \\ &= \frac{(2k+1)^2}{12k^3+28k^2+20k+4} \\ &= \frac{(2k+1)^2}{(2k+1)^2(3k+4)+4} \\ &= \frac{1}{(3k+4)+4} \\ &< \frac{1}{3k+4} \\ &= \frac{1}{3(k+1)+1}\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{2k+1}{(2k+2)\sqrt{3k+1}} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} \qquad \ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \cdot\frac{(2k-1)}{2k}\ \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n = 2, 3, 4, ...

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า n = 2, 3, 4, ...

เพราะว่า $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3(1)+1}}$ เพราะฉะนั้น $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ \ldots\ \frac{(2n-1)}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ ทุกค่า n $\in$ N ☐

64. กำหนดให้ a_1 = 1 และ a_n = (n)a_{n-1} จงแสดงว่า a_n = n!

64. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " a_n = n! "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า a_1 = 1 = 1! เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

เพราะว่า a_{k+1} = (k + 1)$a_{(k+1)-1}$

= (k + 1)a_k

= (k + 1)k! (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow$ a_k = k!)

= (k + 1)!

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\in$ N

เพราะฉะนั้น a_n = n! ทุกค่า n $\in$ N □

65. กำหนดให้ $a_n = -n\,a_{n-1} + n!$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \begin{cases} n! & ;\ n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 0 & ;\ n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$

65. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_{2n} = (2n)!$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = (-1)a_0 + 1 = 0$ และ $a_2 = -2a_0 + 2! = 2$ เพราะฉะนั้น $a_2 = 2!$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2}$$

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= -(2k+1)a_{2k} + (2k+1)! \\ &= -(2k+1)((2k)!) - (2k+1)! && (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_{2k} = (2k)!) \\ &= 0 && \text{... (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\ &= -(2k+2)a_{2k+1} + (2k+2)! \\ &= -(2k+2)(0) + (2k+2)! && (\text{จาก (1)}) \\ &= (2k+2)! \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = (2n)!$ ทุกค่า $n \in N$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= -(2n+1)a_{2n} + (2n+1)! \\ &= -(2n+1)(2n)! + (2n+1)! \\ &= 0 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $a_{2n+1} = 0$ ทุกค่า n = 1, 2, 3, …

เพราะฉะนั้น $a_n = \begin{cases} n! & ;\ n \text{ เป็นเลขคู่} \\ 0 & ;\ n \text{ เป็นเลขคี่} \end{cases}$ ทุกค่า $n \in N$ □

66. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^n$, $a_0 = 2$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$

66. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2a_0 + (-1)^1 = 2(2) - 1 = 3 = \frac{5}{3}(2^1) + \frac{1}{3}(-1)^1 = \frac{10}{3} - \frac{1}{3} = 3$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$a_{k+1} = 2a_k + (-1)^{k+1}$

$= 2(\frac{5}{3}(2^k) + \frac{1}{3}(-1)^k) + (-1)^{k+1}$ (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow a_k = \frac{5}{3}(2^k) + \frac{1}{3}(-1)^k$)

$= \frac{5}{3}(2^{k+1}) + \frac{2}{3}(-1)^k + (-1)^{k+1}$

$= \frac{5}{3}(2^{k+1}) - \frac{2}{3}(-1)(-1)^k + (-1)^{k+1}$

$= \frac{5}{3}(2^{k+1}) - \frac{2}{3}(-1)^{k+1} + (-1)^{k+1}$

$= \frac{5}{3}(2^{k+1}) + \frac{1}{3}(-1)^{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{5}{3}(2^n) + \frac{1}{3}(-1)^n$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

67. กำหนดให้ $a_{n+1} = a_n(a_n + 2)$, $a_1 = 3$ จงแสดงว่า $a_n = (2)^{2^n} - 1$

67. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = (2)^{2^n} - 1$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(2)^{2^1} - 1 = 4 - 1 = 3 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k(a_k + 2) \\ &= (a_k)^2 + 2a_k \\ &= ((2)^{2^k} - 1)^2 + 2(2)^{2^k} - 1 && \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = (2)^{2^k} - 1) \\ &= (2)^{2^k}(2)^{2^k} - 2(2)^{2^k} + 1 + (2)^{2^k+1} - 2 \\ &= (2)^{2^{k+1}} - 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = (2)^{2^n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

68. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3(n - 1)$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)n + 1$

68. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = \frac{3}{2}(n - 1)n + 1$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = a_0 + 3(1 - 1) = a_0 = 1$ และ $\frac{3}{2}(1 - 1)(1) + 1 = 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{(k+1)-1} + 3((k + 1) - 1) \\
&= a_k + 3k \\
&= \frac{3}{2}(k - 1)k + 1 + 3k \qquad (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = \frac{3}{2}(k - 1)k + 1) \\
&= \frac{3}{2}(k - 1)k + 3k + 1 \\
&= 3k(\frac{k-1}{2} + 1) + 1 \\
&= 3k(\frac{k+1}{2}) + 1 \\
&= \frac{3}{2}k(k + 1) + 1 \\
&= \frac{3}{2}((k + 1) - 1)(k + 1) + 1
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{3}{2}(n - 1)n + 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

69. กำหนดให้ $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ จงแสดงว่า $a_n = 2^{n+1} - 1$

69. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = 2^{n+1} - 1$ ”

(1) จงแสดงว่า P(3) เป็นจริง

เพราะว่า $3a_2 - 2a_1 = 3(7) - 2(3) = 15 = 2^4 - 1 = a_3$ เพราะฉะนั้น P(3) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(i) เป็นจริง ทุกค่า i, i = 1, 2, 3, …, k แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(i) เป็นจริง ทุกค่า i, i = 1, 2, 3, …, k

เพราะฉะนั้น $a_k = 2^{k+1} - 1$ และ $a_{k-1} = 2^{(k-1)+1} - 1$ ... (1)

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_{(k+1)-1} - 2a_{(k+1)-2} \\
&= 3a_k - 2a_{k-1} \\
&= 3(2^{k+1} - 1) - 2(2^{(k-1)+1} - 1) && \text{(จาก (1))} \\
&= 3(2\cdot 2^k - 1) - 2(2^k - 1) \\
&= 6\cdot 2^k - 3 - 2\cdot 2^k + 2 \\
&= 4\cdot 2^k - 1 \\
&= 2^2\cdot 2^k - 1 \\
&= 2^{k+2} - 1 \\
&= 2^{(k+1)+1} - 1
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น $a_{k+1} = 2^{(k+1)+1} - 1$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = 2^{n+1} - 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

70. กำหนดให้ $a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)}$ และ $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_{2n} = \frac{1-2n}{(2n)!}$

70. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_{2n} = \frac{1-2n}{(2n)!}$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_2 = \frac{a_0}{(1)(1-3)} = \frac{1}{-2}$ และ $\frac{1-2(1)}{(2(1))!} = \frac{-1}{2}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k ≥ 1

$$\begin{aligned}
a_{2(k+1)} &= a_{2k+2} \\
&= \frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+2-3)} \\
&= \frac{1}{(2k+2)(2k+2-3)}\,\frac{(1-2k)}{(2k)!} \qquad (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_{2k} = \frac{1-2k}{(2k)!}) \\
&= \frac{1-2k}{(2(k+1))(2k-1)(2k)!} \\
&= \frac{-1}{(2(k+1))(2k)!} \\
&= \frac{-1(2k+1)}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} \\
&= \frac{-1-2k}{(2k+2)!} \\
&= \frac{1-2-2k}{(2(k+1))!} \\
&= \frac{1-2(k+1)}{(2(k+1))!}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n ∈ N

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = \frac{1-2n}{(2n)!}$ ทุกค่า n ∈ N □

71. กำหนดให้ $a_1 = \frac{7}{6}$ และ $(2n + 1)(2n)a_n - 7a_{n-1} = 0$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$

71. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{7^1}{(2(1)+1)!} = \frac{7}{6} = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$(2(k+1)+1)(2(k+1))a_{k+1} - 7a_{(k+1)-1} = 0$$

$$(2(k+1)+1)(2(k+1))a_{k+1} = 7a_k$$

$$= 7\left(\frac{7^k}{(2k+1)!}\right) \qquad (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = \frac{7^k}{(2k+1)!})$$

$$= \frac{7^{k+1}}{(2k+1)!}$$

$$a_{k+1} = \frac{7^{k+1}}{(2(k+1)+1)(2(k+1)(2k+1)!}$$

$$= \frac{7^{k+1}}{(2(k+1)+1)!}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{7^n}{(2n+1)!}$ ทุกค่า $n \in N$ □

72. กำหนดให้ $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ และ $na_n + 2a_{n-2} = 0$, n = 2, 3, 4, …

จงแสดงว่า $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ ทุกค่า $n \in N$

72. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2a_2 + 2a_{2-2} = 0$ เพราะฉะนั้น $a_2 = -a_0 = -1 = \frac{(-1)^1}{1!}$ เพราะฉะนั้น $a_{2(1)} = \frac{(-1)^1}{1!}$

เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง

$$2(k+1)a_{2(k+1)} - 2a_{2(k+1)-2} = 0$$

$$(k+1)a_{2(k+1)} = -a_{2k}$$

$$= -\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right) \qquad \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}\text{)}$$

$$a_{2(k+1)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)(k!)} = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_{2n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ ทุกค่า $n \in N$ □

73. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$, $a_0 = 1$ และ $a_1 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = -\frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$

73. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{2}(3^1 + (-1)^1) = 1 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{1}{2}(3^k + (-1)^k)$ และ $a_{k-1} = \frac{1}{2}(3^{k-1} + (-1)^{k-1})$ ... (1)

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_k + 3a_{k-1} \\
&= 2\left(\frac{1}{2}(3^k + (-1)^k)\right) + 3\left(\frac{1}{2}(3^{k-1} + (-1)^{k-1}\right) && \text{(จาก (1))} \\
&= 3^k + (-1)^k + \frac{1}{2}(3^k) + (-1)^{k-1}\frac{3}{2} \\
&= \frac{3}{2}(3^k) + (-1)^k\left(1 + (-1)^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right) \\
&= \frac{3^{k+1}}{2} + (-1)^k\left(1 - \frac{3}{2}\right) \\
&= \frac{3^{k+1}}{2} + \frac{(-1)^{k+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} + (-1)^{k+1})
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{1}{2}(3^n + (-1)^n)$ ทุกค่า $n \in N$ □

74. กำหนดให้ $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ และ $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$

74. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{2}{5}(4^1) + \frac{3}{5}(-1)^1 = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} = 1 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(1), P(2), ... , P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(1), P(2), ... , P(k) เป็นจริง

เพราะฉะนั้น $a_k = \frac{2}{5}(4^k) + \frac{3}{5}(-1)^k$ และ $a_{k-1} = \frac{2}{5}(4^{k-1}) + \frac{3}{5}(-1)^{k-1}$ ... (1)

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 3a_k + 4a_{k-1} \\
&= 3\left(\frac{2}{5}(4^k) + \frac{3}{5}(-1)^k\right) + 4\left(\frac{2}{5}(4^{k-1}) + \frac{3}{5}(-1)^{k-1}\right) \qquad \text{(จาก (1))} \\
&= \frac{6}{5}(4^k) + \frac{8}{5}(4^{k-1}) + \frac{9}{5}(-1)^k + \frac{12}{5}(-1)^{k-1} \\
&= \frac{6}{5}(4^k) + \frac{8}{5}\left(\frac{1}{4}\right)(4^k) + \left(\frac{9}{5} - \frac{12}{5}\right)(-1)^k \\
&= \left(\frac{6}{5} + \frac{2}{5}\right)4^k - \frac{3}{5}(-1)^k \\
&= \frac{8}{5}4^k + \frac{3}{5}(-1)^{k+1} \\
&= \frac{2}{5}(4^{k+1}) + \frac{3}{5}(-1)^{k+1}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{2}{5}(4^n) + \frac{3}{5}(-1)^n$ ทุกค่า $n \in N$ ☐

75. กำหนดให้ $a_1 = 2$ และ $a_n = a_{n-1} + n$

จงแสดงว่า $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n + 1)$, n = 1, 2, 3, …

75. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n + 1)$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 + \frac{1}{2}(1)(1 + 1) = 2 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(1), P(2), … , P(k) แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_{(k+1)-1} + (k + 1) \\
&= a_k + (k + 1) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}k(k + 1) + (k + 1) && \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = 1 + \tfrac{1}{2}k(k + 1)) \\
&= 1 + (k + 1)(\tfrac{k}{2} + 1) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(k + 1)(k + 2) \\
&= 1 + \tfrac{1}{2}(k + 1)((k + 1) + 1)
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = 1 + \frac{1}{2}n(n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

76. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + n(n - 1),\ a_1 = 3$

จงแสดงว่า $a_n = \frac{n(n^2-1)}{3} + 3$

76. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = \frac{n(n^2-1)}{3} + 3$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1(1^2-1)}{3} + 3 = 3 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + (k+1)((k+1)-1) \\
&= a_k + k(k+1) \\
&= \left(\frac{k(k^2-1)}{3} + 3\right) + k(k+1) \qquad (P(k) \text{ เป็นจริง} \Rightarrow a_k = \frac{k(k^2-1)}{3} + 3) \\
&= \left(\frac{k(k^2-1)}{3} + k(k+1)\right) + 3 \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k(k-1) + 3k) + 3 \\
&= \frac{1}{3}(k+1)(k^2 + 2k) + 3 \\
&= \frac{(k+1)((k+1)^2-1)}{3} + 3
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{n(n^2-1)}{3} + 3$ ทุกค่า $n \in N$ □

77. กำหนดให้ $a_n = 3a_{n-1} - 2,\ a_0 = 0$ จงแสดงว่า $a_n = -3^n + 1$

77. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = -3^n + 1$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 3a_0 - 2 = -2 = -3^1 + 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3a_{(k+1)-1} - 2 \\ &= 3a_k - 2 \\ &= 3(-3^k + 1) - 2 && (\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = -3^k + 1) \\ &= -3^{k+1} + 1 \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = -3^n + 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

78. กำหนดให้ $a_n = a_{n-1} + 3n^2$, $a_1 = 3$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$

78. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1(1+1)(2(1)+1)}{2} = 3 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + 3(k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{2} + 3(k+1)^2 \qquad \left(\text{P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2}\right) \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{2} \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(2k^2 + k + 6k + 6) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(2k^2 + 7k + 6) \\
&= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)(2k+3) \\
&= \frac{(k+1)((k+1)+1)(2(k+1)+1)}{2}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$ ทุกค่า $n \in N$ □

79. กำหนดให้ $a_n = 2a_{n-1} + n$, $a_0 = 1$ จงแสดงว่า $a_n = 3(2^n) - n - 2$

79. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = 3(2^n) - n - 2$ "

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2a_0 + 1 = 2(1) + 1 = 3 = 3(2^1) - 1 - 2 = 6 - 1 - 2 = 3$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$a_{k+1} = 2a_k + (k + 1)$

$= 2(3(2^k) - k - 2) + (k + 1)$ (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow a_k = 3(2^k) - k - 2$)

$= 3(2^{k+1}) - 2k - 4 + k + 1$

$= 3(2^{k+1}) - (k + 1) - 2$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = 3(2^n) - n - 2$ ทุกค่า $n \in N$ □

80. กำหนดให้ $a_1 = 1$ และ $a_n = 2a_{n-1} + 1$ จงแสดงว่า $a_n = 2^n - 1$

80. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $a_n = 2^n - 1$ ”

(1) จงแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1 = a_1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) จงแสดงว่า ถ้า P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(1), P(2), … , P(k) เป็นจริง

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 2a_{(k+1)-1} + 1 \\
&= 2a_k + 1 \\
&= 2(2^k - 1) + 1 && \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = 2^k - 1) \\
&= 2^{k+1} - 2 + 1 \\
&= 2^{k+1} - 1
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = 2^n - 1$ ทุกค่า $n \in N$ □

81. จงแสดงว่า

$1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(n - 1)) = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$

81. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ

" $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(n - 1)) = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $1 = \frac{1}{6}(1 + 1)(2(1) + 1)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(k - 1))$

$= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1)$

$1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(k - 1)) + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(k))$

$= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2k)$

$= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + \frac{(k+1)}{6}(1 + 1 + 2k)$

$= \frac{k}{6}(k + 1)(2k + 1) + (k + 1)^2$

$= (k + 1)(\frac{k}{6}(2k + 1) + (k + 1))$

$= \frac{(k+1)}{6}(k(2k + 1) + 6(k + 1))$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + k + 6k + 6)$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2 + 7k + 2)$

$= (\frac{k+1}{6})(k + 2)(2k + 3)$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(n - 1))$

$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ ทุกค่า $n \in N$

หมายเหตุ เพราะว่า $1 + 3 + 5 + \ldots + 1 + (2(n - 1)) = \frac{n}{2}(1 + 1 + 2(n - 1)) = n^2$

เพราะฉะนั้น $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots + (1 + 3 + 5 + \ldots + (1 + 2(n - 1))$

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

$= \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$ □

82. S_1 , S_2 , S_3 , … เป็นลำดับของเซต { 1 }, { 2, 3 }, { 4, 5, 6 }, … การหาผลบวกของสมาชิกในเซต S_n

82. แนวคิด จำนวนสมาชิกของ $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \ldots \cup S_k$

$= 1 + 2 + 3 + \ldots + k$

$= \frac{k}{2}(k + 1)$

เพราะฉะนั้นสมาชิกตัวแรกของ S_{k+1} คือ $\frac{k}{2}(k + 1) + 1$

และสมาชิกตัวสุดท้ายของ S_{k+1} คือ $\frac{k}{2}(k + 1) + k + 1$

$S_{k+1} = \{ \frac{k}{2}(k + 1) + 1, \frac{k}{2}(k + 1) + 2, \ldots, \frac{k}{2}(k + 1) + (k + 1) \}$

ผลบวกของสมาชิกใน S_{k+1} $= \frac{k+1}{2}(\frac{k}{2}(k + 1) + 1 + \frac{k}{2}(k + 1) + (k + 1))$

$= \frac{(k+1)}{2}(\frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} + k + 1)$

$= \frac{(k+1)}{2}(k^2 + 2k + 2)$

$= \frac{(k+1)}{2}((k + 1)^2 + 1)$

เพราะฉะนั้นผลบวกของสมาชิกใน S_n คือ $\frac{n}{2}(n^2 + 1)$ □

83. จงแสดงว่า $2^n < n!$ ทุกค่า $n \geq 4$

83. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $2^n < n!$ ”

(1) การแสดงว่า P4) เป็นจริง

เพราะว่า $2^4 = 16 < 24 = 4!$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $2^k < k!$

เพราะว่า $2^{k+1} < 2(2^k) < 2(k!) < (k + 1)(k!) = (k + 1)!$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \geq 4$

เพราะฉะนั้น $2^n < n!$ ทุกค่า $n \geq 4$ $\square$

84. จงแสดงว่า $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$

84. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(2)! < 2^2(1!)^2$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}(2(k+1))! &= (2k+2)! \\ &= (2k)!(2k+1)(2k+2) \\ &< (2k)!(2k+2)(2k+2) \\ &< 2^{2k}(k!)^2(2k+2)(2k+2) \qquad (P(k) \text{ เป็นจริง} \Rightarrow (2k)! < 2^{2k}(k!)^2) \\ &= 2^{2k+2}(k!)^2(k+1)(k+1) \\ &= 2^{2(k+1)}((k+1)!)^2\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

85. จงแสดงว่า $2304 \mid (7^{2n} - 48n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

85. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $2304 \mid (7^{2n} - 48n - 1)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $7^2 - 48 - 1 = 0$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} 7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1 &= (49)7^{2k} - 48k - 48 - 1 \\ &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 49(48k) - 48k \\ &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 48(48k) \\ &= 49(7^{2k} - 48k - 1) + 2304k \end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 2304 \mid (7^{2k} - 48k - 1)$) และ $2304 \mid (2304k)$

เพราะฉะนั้น $2304 \mid (7^{2(k+1)} - 48(k+1) - 1)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $2304 \mid (7^{2n} - 48n - 1)$ ลงตัว ทุกค่า $n \in N$ $\square$

86. **จงแสดงว่า** $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$

86. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} \le 2 - 1$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} \le 2\sqrt{k} - 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} - \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} \quad \dots (1)$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned}
4(k^2 + k) &< 4k^2 + 4k + 1 \\
4(k^2 + k) &< (2k + 1)^2 \\
2\sqrt{k^2 + k} &< 2k + 1 \\
2\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} &< 2k + 1 \\
2\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} - \sqrt{k+1} + 1 &< 2k + 2 - \sqrt{k+1} \\
2\sqrt{k}\,\sqrt{k+1} - \sqrt{k+1} + 1 &< 2(k + 1) - \sqrt{k+1}
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} - \sqrt{k+1} + 1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 1 \quad \dots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k+1} - 1$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \le 2\sqrt{n} - 1$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

87. จงแสดงว่า $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

87. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $9^2 - 80 - 1 = 0$ และ $6400 \mid 0$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 9^{2(k+1)} - 80(k+1) - 1 &= (81)9^{2k} - 80k - 81 \\ &= (80)(9^{2k} - 1) + 9^{2k} - 80k - 1 \\ &= (80)(81^{k} - 1) + 9^{2k} - 80k - 1 \qquad \text{... (1)} \end{aligned}$$

P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 6400 \mid (9^{2k} - 80k - 1)$ ... (2)

เพราะว่า $(81 - 1) \mid (81^k - 1) \Rightarrow 80 \mid (81^k - 1)$เพราะฉะนั้น $6400 \mid (80)(81^k - 1)$ ... (3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ $6400 \mid (9^{2(k+1)} - 80(k+1) - 1)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $6400 \mid (9^{2n} - 80n - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

88. จงแสดงว่า $3 \mid (4^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$

88. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $3 \mid (4^n + 2)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า 4 + 2 = 6 และ $3 \mid 6$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$4^{k+1} + 2 = 4 \; 4^k + 2 = 4(4^k + 2) - 6$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 3 \mid (4^k + 2)$) และ $3 \mid 6$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (4^{k+1} + 2)$ ลงตัว เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $3 \mid (4^n + 2)$ ทุกค่า $n \in N$ □

89. จงแสดงว่า $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$

89. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $4^{2(1)+1} + 3^{1+2} = 64 + 27 = 91 = 13(7)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2} &= 16(4^{2k+1}) + 3(3^{k+2}) \\ &= 16(4^{2k+1}) + 3(3^{k+2}) \\ &= 16(4^{2k+1} + 3^{k+2}) - 13(3^{k+2}) \end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 13 \mid (4^{2k+1} + 3^{k+2})$) และ $13 \mid 13(3^{k+2})$

เพราะฉะนั้น $13 \mid (4^{2(k+1)+1} + 3^{(k+1)+2})$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n

เพราะฉะนั้น $13 \mid (4^{2n+1} + 3^{n+2})$ ทุกค่า $n \in N$ □

90. จงแสดงว่า $24 \mid (713(9^{3n-2}) + 15)$ ทุกค่า $n \in N$

90. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $24 \mid (713(9^{3n-2}) + 15)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $713(9^{3(1)-2}) + 15 = 713(9) + 15 = 6432 = 268(24)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 713(9^{3(k+1)-2}) + 15 &= 713(9^3(9^{3k-2})) + 15 \\ &= 9^3(713(9^{3k-2}) + 15) - 15(9^3 - 1) \\ &= 729(713(9^{3k-2}) + 15) - 24(455) \end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 24 \mid (713(9^{3k-2}) + 15)$) และ $24 \mid 24(455)$

เพราะฉะนั้น $24 \mid (713(9^{3(k+1)-2}) + 15)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $24 \mid (713(9^{3n-2}) + 15)$ ทุกค่า $n \in N$ □

91. จงแสดงว่า $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$

91. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ”

(1) การแสดงว่า P(7) เป็นจริง

เพราะว่า 16 + 9 – 1 = 24 เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned} 16^{k+1} + 9^{3(k+1)-2} - 1 &= 16(16^k) + 9^3(9^{3k-2}) - 1 \\ &= 16(16^k) + 729(9^{3k-2}) - 1 \\ &= 16(16^k + 9^{3k-2} - 1) - 16(9^{3k-2}) + 729(9^{3k-2}) + 16 - 1 \\ &= 16(16^k + 9^{3k-2} - 1) + 713(9^{3k-2}) + 15 \end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 24 \mid (16^k + 9^{3k-2} - 1)$) และ $24 \mid (713(9^{3k-2}) + 15)$ (จากข้อ 92)

เพราะฉะนั้น $24 \mid (16^{k+1} + 9^{3(k+1)-2} - 1)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $24 \mid (16^n + 9^{3n-2} - 1)$ ทุกค่า $n \in N$ □

92. จงแสดงว่า $9 \mid ((2)10^{n} + (3)10^{n-1} + 4)$ ทุกค่า $n \in N$

92. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $9 \mid ((2)10^{n} + (3)10^{n-1} + 4)$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(2)10^{1} + (3)10^{1-1} + 4 = 20 + 3 + 4 = 27$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}(2)10^{k+1} + (3)10^{(k+1)-1} + 4 &= 10(2)10^{k} + 10(3)10^{k-1} + 4 \\ &= 10((2)10^{k} + 10(3)10^{k-1} + 4\ ) - 36\end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 9 \mid ((2)10^{k} + (3)10^{k-1} + 4))$ และ $9 \mid 36$

เพราะฉะนั้น $9 \mid ((2)10^{k+1} + (3)10^{(k+1)-1} + 4$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $9 \mid ((2)10^{n} + (3)10^{n-1} + 4)$ ทุกค่า $n \in N$ $\square$

93. จงแสดงว่า $11 \mid ((8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9)$ ทุกค่า $n \in N$

93. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $11 \mid ((8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9)$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $(8)10^{2} + (6)10^{2-1} + 9 = 800 + 60 + 9 = 869 = 79(11)$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$\begin{aligned}(8)10^{2(k+1)} + (6)10^{2(k+1)-1} + 9 &= 100(8)10^{2k} + 100(6)10^{2k-1} + 9\\ &= 100(8)10^{2k} + 100(6)10^{2k-1} + 9\\ &= 100((8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9) - 900 + 9\\ &= 100((8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9) - 891\end{aligned}$$

เพราะว่า (P(k) เป็นจริง $\Rightarrow 11 \mid ((8)10^{2k} + (6)10^{2k-1} + 9)$)) และ $11 \mid 891$

เพราะฉะนั้น $11 \mid ((8)10^{2(k+1)} + (6)10^{2(k+1)-1} + 9)$ เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $11 \mid ((8)10^{2n} + (6)10^{2n-1} + 9)$ ทุกค่า $n \in N$ □

94. จงแสดงว่า 1 + n $< 2^n$ ทุกค่า n $\geq$ 2

94. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " 1 + n $< 2^n$ "

(1) การแสดงว่า P(2) เป็นจริง

เพราะว่า 1 + 2 $< 2^2$ เพราะฉะนั้น P(2) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1 แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k $\geq$ 1

เพราะฉะนั้น 1 + k $< 2^k$

$$\begin{aligned} 1 + (k+1) &< 1 + 2^k \\ &< 2^k + 2^k \\ &= 2(2^k) \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า n $\geq$ 2

เพราะฉะนั้น 1 + n $< 2^n$ ทุกค่า n $\geq$ 2

แบบที่ 2 $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} \geq 1 + n$ ทุกค่า n $\geq$ 2 □

95. จงแสดงว่า $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$ ทุกค่า $n \in N$

95. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $0^4 < \frac{1^5}{4}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (k-1)^4 < \frac{k^5}{5}$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (k-1)^4 + k^4 < \frac{k^5}{5} + k^4 \qquad \text{(บวก } k^4 \text{ สองข้าง)}$$

$$= \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4)$$

$$\leq \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 5k^2 + 1)$$

$$= \frac{(k+1)^5}{5}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + (n-1)^4 < \frac{n^5}{5}$ ทุกค่า $n \in N$ □

96. จงแสดงว่า $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$ ทุกค่า $n \in N$

96. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ “ $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$ ”

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1^5}{5} < 1^4$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{k^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + k^4$ ... (1)

$$\begin{aligned}
\frac{(k+1)^5}{5} &= \frac{1}{5}(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&= \frac{k^5}{5} + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \\
&< 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1) \qquad \text{(จาก (1))} \\
&< 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 + \frac{1}{5}(5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 5) \\
&= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 + (k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1) \\
&\leq 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 + (k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1) \\
&= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + k^4 + (k+1)^4
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพระฉะนั้น $\frac{n^5}{5} < 1^4 + 2^4 + 3^4 + ... + n^4$ ทุกค่า $n \in N$ □

97. จงแสดงว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า $n \in N$

97. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{\sqrt{1}} \geq \sqrt{1}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{k}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ ... (1)

$$k(k+1) \geq k$$

$$\sqrt{k(k+1)} + 1 \geq k + 1$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)} + 1}{k+1} \geq 1$$

$$\frac{\sqrt{k(k+1)}}{k+1} + \frac{1}{k+1} \geq 1$$

$$\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1} \geq 1$$

$$\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k+1} \quad \ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \geq \sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ ทุกค่า $n \in N$ □

98. จงแสดงว่า $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$ ทุกค่า $n \in N$

98. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $\frac{1}{1^2} \le 2 - \frac{1}{1}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \ge 1$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{k}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2}$ ... (1)

$$-k - 1 \le -k$$

$$-k^2 - k - 1 \le -k^2 - k$$

$$-k^2 - 2k - 1 + k \le -k^2 - k$$

$$-(k+1)^2 + k \le -k(k+1)$$

$$\frac{-(k+1)^2 + k}{k(k+1)^2} \le -\frac{1}{k+1}$$

$$-\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le -\frac{1}{k+1}$$

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1} \qquad \text{... (2)}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \le 2 - \frac{1}{k+1}$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \le 2 - \frac{1}{n}$ ทุกค่า $n \in N$ □

99. กำหนดให้ $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} a_n$ จงแสดงว่า $a_n = 2(3^{n-1})$

99. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = 2(3^{n-1})$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 2(a_0) = 2$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ k = 1, 2, 3, ... , n แล้ว P(n + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ k = 1, 2, 3, ... , n

เพราะฉะนั้น $a_k = 2(3^{k-1})$ ทุกค่า k = 1, 2, 3, ... , n

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2\sum_{i=0}^{n} a_i \\
&= 2(1 + \sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1})) \\
&= 2 + 2\sum_{i=1}^{n} 2(3^{i-1}) \\
&= 2 + 4\sum_{i=1}^{n} 3^{i-1} \\
&= 2 + 4(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) \\
&= 2 + 4\left(\frac{3^n - 1}{3 - 1}\right) \\
&= 2 + 2(3^n - 1) \\
&= 2(3^n) \\
&= 2(3^{(n+1)-1})
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น P(n + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = 2(3^{n-1})$ ทุกค่า $n \in N$ □

100. กำหนดให้ $a_0 = 1$ และ $a_{n+1} = 4a_n - 1$ จงแสดงว่า $a_n = \frac{2}{3}(4^n) + \frac{1}{3}$ ทุกค่า $n \geq 1$

100. แนวคิด ให้ P(n) แทนข้อความ " $a_n = \frac{2}{3}(4^n) + \frac{1}{3}$ "

(1) การแสดงว่า P(1) เป็นจริง

เพราะว่า $a_1 = 4a_0 - 1 = 4(1) - 1 = 3 = \frac{2}{3}(4^1) + \frac{1}{3}$ เพราะฉะนั้น P(1) เป็นจริง

(2) การแสดงว่า ถ้า P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$ แล้ว P(k + 1) เป็นจริง

สมมติ P(k) เป็นจริง เมื่อ $k \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= 4a_k - 1 \\
&= 4(\tfrac{2}{3}(4^k) + \tfrac{1}{3}) - 1 && \text{(P(k) เป็นจริง} \Rightarrow a_k = \tfrac{2}{3}(4^k) + \tfrac{1}{3}) \\
&= 4(\tfrac{2}{3}(4^k)) + \tfrac{4}{3} - 1 \\
&= \tfrac{2}{3}(4^{k+1}) + \tfrac{1}{3}
\end{aligned}
$$

เพราะฉะนั้น P(k + 1) เป็นจริง

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ จะได้ P(n) เป็นจริง ทุกค่า $n \in N$

เพราะฉะนั้น $a_n = \frac{2}{3}(4^n) + \frac{1}{3}$ ทุกค่า $n \in N$ □